



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Es buena suerte ver aves volando: un modelo para predecir la disminución de la población de la cotorra serrana occidental ante el cambio climático

T E S I S

que para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

presenta

Alicia Areli Zamora López

bajo la dirección de

Dr. Roberto Ávila Pozos

Mineral de la Reforma, Hidalgo.

Junio de 2026



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

School of Engineering and Basic Sciences

Dirección

Office of the Director

Mineral de la Reforma, Hgo., a 24 de junio de 2026

Número de control: ICBI-D/1201/2026

Asunto: Autorización de impresión.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UA EH

Con Título Quinto, Capítulo II, Capítulo V, Artículo 51 Fracción IX del Estatuto General de nuestra Institución, por este medio, le comunico que el Jurado asignado al egresado de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas **Alicia Areli Zamora López**, quien presenta el trabajo de titulación **"Es buena suerte ver aves volando: un modelo para predecir la disminución de la población de la cotorra serrana occidental ante el cambio climático"**, ha decidido, después de revisar fundamento en lo dispuesto en el Título Tercero, Capítulo I, Artículo 18 Fracción IV; dicho trabajo en la reunión de sinodales, **autorizar la impresión del mismo**, una vez realizadas las correcciones acordadas.

A continuación, firman de conformidad los integrantes del Jurado:

Presidente: Dr. Ronald Richard Jiménez Munguía

Secretario: Dra. Brenda Tapia Santos

Vocal: Dr. Roberto Ávila Pozos

Suplente: Dr. Arturo Criollo Pérez

Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

Dr. Gabriel Vergara Rodríguez
Director del ICBI



GVR/MMM

"Amor, Orden y Progreso"



Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo
Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,
México. C.P 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 40001
direccion_icbi@uaeh.edu.mx, vergara@uaeh.edu.mx

uaeh.edu.mx

Índice general

Agradecimientos	1
Resumen	2
Introducción	3
2. Antecedentes	4
2.1. Aspectos biológicos	4
2.1.1. Cambio climático y biodiversidad	4
2.1.2. Aves como bioindicadores	5
2.1.3. Especie de estudio: cotorra serrana occidental	7
2.2. Aspectos matemáticos	14
2.2.1. Modelos predictivos en conservación de aves	14
2.2.2. Modelos dinámicos: teoremas y definiciones	16
2.3. Contexto histórico y fundamentos teóricos	21
2.3.1. El modelo de Malthus	22
2.3.2. El modelo logístico de Verhulst	24
2.3.3. Ecuación logística del efecto Allee	26
2.3.4. Aplicaciones del efecto Allee en conservación y manejo poblacional .	30
2.3.5. Reintroducciones de psitácidos y efecto Allee	32
2.3.6. Reintroducción de la cotorra serrana occidental en Arizona	34
3. El modelo	39
El modelo matemático	39
3.1. Detalles del modelo	40
3.1.1. Análisis dimensional del modelo	42
4. Resultados	45

Resultados	45
4.1. Análisis cualitativo del modelo no autónomo	46
4.1.1. Reescritura del modelo en forma polinómica cúbica	46
4.1.2. Definición de coeficientes	48
4.1.3. Análisis de los puntos de equilibrio (no en el sentido clásico de equilibrio autónomo)	48
4.1.4. Análisis cualitativo de la dinámica del sistema	51
4.1.5. Caso particular $t = 30$	52
4.1.6. Análisis de estabilidad para $t = 30$	54
4.1.7. Campo de direcciones	56
4.1.8. Trayectorias temporales de la población $N(t)$ para distintas condi- ciones iniciales $N(0)$	60
4.1.9. Efecto de la variación de la capacidad de carga inicial (K_0) en la dinámica poblacional.	61
Conclusiones	64

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mis padres y a mi abuelita, quienes han sido un pilar fundamental en cada paso de mi vida, brindándome su apoyo incondicional, amor y enseñanzas. A mi hermana, por su constante ánimo y compañía, que han sido una fuente de fortaleza en este camino.

A mi asesor de tesis, cuya guía, paciencia, conocimiento y dedicación ha sido esencial en la realización de este trabajo.

Finalmente, agradezco a mi querida mascota, cuya presencia y cariño no solo han llenado mis días de felicidad, sino que fue mi fuente de inspiración para elegir el tema de esta tesis. Su conexión con la naturaleza me motivó a explorar y profundizar en el estudio de la conservación y el impacto del cambio climático en la vida de las aves.

Resumen

Una de las mayores amenazas para la biodiversidad es el cambio climático, que afecta a la reproducción, migración y distribución de las aves. La cotorra serrana occidental (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*), es una de las especies más amenazadas, en peligro de extinción y endémica de México.

El objetivo de este estudio fue desarrollar un modelo matemático que permita estimar la disminución de la población ante el cambio climático. Se usaron datos demográficos históricos, criterios de migración y reproducción, y estimaciones de pérdida de hábitat para ello se hicieron simulaciones a través de tres generaciones (30 años) utilizando un modelo de crecimiento con tasas de disminución basadas en proyecciones climáticas.

Los hallazgos indican que la población podría disminuir entre un 30 % y un 49 % en un plazo de tres generaciones y llegar a niveles críticos al final del siglo XXI. Estos descubrimientos enfatizan la necesidad de establecer estrategias de conservación fundamentadas en pruebas cuantitativas. El modelo propuesto es una herramienta valiosa para respaldar la toma de decisiones en cuanto al cuidado y preservación de esta especie y su hábitat.

One of the greatest threats to biodiversity is climate change, which affects the reproduction, migration, and distribution of birds. The thick-billed parrot (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*) is one of the most threatened species; it is endangered and endemic to Mexico.

The objective of this study was to develop a mathematical model to estimate the potential decline of its population under climate change. Historical demographic data, migration and reproduction criteria, and estimates of habitat loss were used. Simulations were carried out over three generations (30 years) using a growth model with decline rates based on climate projections.

The results indicate that the population could decrease between 30% and 49% within three generations and reach critical levels by the end of the 21st century. These findings highlight the need to establish conservation strategies supported by quantitative evidence. The proposed model represents a valuable tool for supporting decision-making regarding the protection and preservation of this species and its habitat.

Introducción

El cambio climático es uno de los mayores retos a los que nos enfrentamos en este siglo; desde la mitad del siglo XX ha provocado transformaciones rápidas y continuas en los ecosistemas. Todas estas alteraciones han generado impactos significativos en la biodiversidad, particularmente en la avifauna, pues se han visto afectados patrones de reproducción, migración y distribución geográfica [1].

Las aves son reconocidas como bioindicadores eficaces del cambio climático debido a sus adaptaciones específicas y sensibilidad a las variaciones ambientales. De acuerdo con diversos estudios, se han proyectado importantes reducciones en cuanto a la distribución de áreas habitadas por especies endémicas, tal es el caso de los bosques húmedos de montaña, de niebla, pino y encino, los cuales se encuentran entre los más vulnerables ante el aumento de temperaturas y la disminución de precipitaciones [32]. Incluso en Áreas Naturales Protegidas, se prevé que estas condiciones obliguen a numerosas especies a desplazarse en busca de nuevos hábitats, lo que podría comprometer su supervivencia a largo plazo [11].

La especie en la que se centra esta investigación es la cotorra serrana occidental (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*), una especie endémica y emblemática de México. Su población se encuentra en declive debido a la pérdida de hábitat, fragmentación forestal, la cacería y el comercio ilegal [5]. La cotorra serrana occidental es catalogada como *En Peligro de Extinción* en la NOM-059-SEMARNAT-2010 (Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales, SEMARNAT) y se encuentra incluida en el Apéndice I de la Convención sobre el Comercio Internacional de Especies Amenazadas de Fauna y Flora Silvestres (CITES) [30, 13]. Esta especie es altamente vulnerable a los efectos del cambio climático, los cuales podrían reducir drásticamente la disponibilidad de áreas climáticamente adecuadas en las próximas décadas [34].

El objetivo de esta investigación es desarrollar un modelo matemático que proyecte la disminución de la población de la cotorra serrana occidental bajo el cambio climático para distintas condiciones iniciales, con el fin de aportar elementos para la toma de decisiones en materia de conservación y manejo de la especie.

Antecedentes

2.1. Aspectos biológicos

2.1.1. Cambio climático y biodiversidad

El cambio climático constituye una de las principales amenazas para la biodiversidad en el siglo XXI. De acuerdo con el Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático (IPCC), desde la década de 1950, y con mayor intensidad en las últimas dos décadas, se han observado transformaciones rápidas en los sistemas climáticos globales. Estos cambios incluyen alteraciones en los ciclos hidrológicos y de nutrientes, lo cual repercute directamente en la biodiversidad, la cobertura vegetal y los servicios ecosistémicos que de ella dependen. En el caso de las aves, se prevé que los impactos sean en gran medida negativos, afectando su reproducción, distribución geográfica y migración [32].

El cambio climático antropogénico (ACC), derivado de actividades humanas, intensifica estas presiones al generar aumentos sostenidos en la temperatura, modificaciones en los regímenes de precipitación y una mayor frecuencia de eventos climáticos extremos. Si bien el fenómeno es global, sus efectos no son homogéneos: los ecosistemas ubicados en los extremos de los gradientes climáticos, como los bosques tropicales montañosos, se ven particularmente afectados [24].

En este contexto, las Áreas Naturales Protegidas (ANP) desempeñan un papel estratégico al ser consideradas soluciones basadas en la naturaleza. Su relevancia radica en que, en términos de mitigación, contribuyen a la captura y almacenamiento de carbono, mientras que en materia de adaptación ayudan a reducir los impactos de fenómenos hidrometeorológicos extremos y a mantener servicios ecosistémicos esenciales, como la regulación de la temperatura y la provisión de agua [11]. Sin embargo, estas funciones podrían verse comprometidas por el cambio climático.

Diversos estudios han demostrado que la representatividad de especies dentro de las ANP disminuirá con el tiempo. Actualmente, alrededor del 65 % de las especies están potencialmente protegidas en alguna ANP; no obstante, este porcentaje podría reducirse a 56 % en escenarios futuros, particularmente en Reservas de la Biosfera y Parques Nacionales. Incluso algunas áreas protegidas dejarían de ser adecuadas para ciertos taxones, ya que muchas especies se desplazarán en busca de condiciones ambientales más favorables [32]. Estas proyecciones se confirman con estimaciones que indican que, hacia 2050, al menos 40 ANP enfrentarán un aumento de 3 °C en su temperatura promedio. Asimismo, 31 de ellas, que albergan a 22,866 especies registradas, perderían el 100 % de su espacio climático base, lo que provocaría la transición hacia condiciones climáticas completamente nuevas

[17].

En el caso de México, se prevé un aumento de temperatura en todas las ANP hacia mediados del siglo XXI, con incrementos más marcados en regiones áridas que ya registran temperaturas extremas, como Janos, Mapimí, El Pinacate y Tehuacán-Cuicatlán. Aunque muchas especies presentes en estas regiones se encuentran adaptadas a altas temperaturas, incrementos adicionales podrían representar un estrés térmico que rebase sus límites fisiológicos [17]. Estos escenarios ponen de manifiesto que las ANP, aunque fundamentales, no garantizan por sí mismas la permanencia de las especies si las condiciones climáticas cambian más allá de su rango de tolerancia.

A nivel de especies, el potencial adaptativo depende de factores biológicos como el tamaño del área de distribución, la capacidad de dispersión, las tasas de reproducción y el grado de especialización de hábitat. Aquellas con distribuciones restringidas, baja capacidad de dispersión y alta especialización presentan un riesgo mayor de declive poblacional bajo escenarios de cambio climático acelerado [18].

De acuerdo con lo anterior, se observa que los efectos del cambio climático sobre la biodiversidad no solo transforman ecosistemas completos, sino que también condicionan la viabilidad de las especies individuales. Esto refuerza la necesidad de considerar organismos sensibles, como las aves, que funcionan como bioindicadores de las variaciones ambientales. Por ello, el siguiente apartado se centra en analizar el papel de las aves como indicadores de los impactos del cambio climático.

2.1.2. Aves como bioindicadores

Las aves han sido ampliamente utilizadas como bioindicadores debido a su sensibilidad a los cambios ambientales, su papel clave en los ecosistemas y la disponibilidad de registros de largo plazo. Su fisiología, comportamiento y distribución responden de manera inmediata a variaciones en la temperatura, la precipitación y la disponibilidad de recursos, lo que las convierte en un grupo adecuado para evaluar los impactos del cambio climático.

Vulnerabilidad de aves de montaña

Las especies endémicas de los bosques húmedos de montaña (bosque de niebla, pino, encino y oyamel) se encuentran entre las más vulnerables al aumento de temperatura y disminución de las precipitaciones. Un estudio evaluó 34 especies restringidas a estos ecosistemas en México, proyectando una reducción de hasta 63 % en su distribución hacia 2070, lo que refleja su alta sensibilidad a los cambios climáticos recientes [32]. Esta pérdida potencial de hábitat es crítica porque muchas de estas especies dependen de condiciones ambientales muy específicas y muestran poca capacidad de adaptación a diferentes ambientes.

Grandes depredadores como centinelas

Los principales depredadores, como el águila real (*Aquila chrysaetos*), ilustran cómo los cambios climáticos pueden tener consecuencias desproporcionadas en la biodiversidad. Se estima que su área de distribución potencial podría reducirse entre 57 % y 78 % durante

este siglo, debido a condiciones más cálidas y secas, así como a la pérdida de conectividad de hábitats [18]. Además, los incrementos de temperatura afectan su rendimiento reproductivo al aumentar los costos energéticos y modificar la disponibilidad de presas. Este caso muestra cómo el cambio climático, en combinación con el cambio del uso del suelo, puede acelerar procesos de declive poblacional incluso en especies con un rango más amplio de distribución.

Migración y fenología

La migración y la reproducción de las aves se encuentran fuertemente condicionadas por señales ambientales. El cambio climático ha alterado la fenología, provocando adelantos en la llegada a los sitios de reproducción y en la eclosión, con el fin de coincidir con la disponibilidad máxima de presas [31]. Sin embargo, estas respuestas no son homogéneas: existen disparidades regionales y entre especies debido a diferencias en el hábitat y los requerimientos ecológicos [8].

Los efectos de arrastre entre hábitat invernal y éxito reproductivo en zonas de cría son cada vez más evidentes. Individuos que invernan en hábitats de baja calidad llegan en peores condiciones y presentan menor éxito reproductivo [28]. Asimismo, la pérdida de hábitat y la intensificación de fenómenos extremos incrementan la mortalidad durante la migración [19]. En consecuencia, las aves migratorias no solo reflejan la respuesta de los ecosistemas al cambio climático, sino que también transmiten sus efectos a escala regional y global al modificar procesos ecológicos que son clave.

Golpe de calor y adaptaciones fisiológicas

El incremento en la frecuencia de olas de calor representa una amenaza directa para muchas aves, particularmente aquellas que habitan en zonas áridas. A pesar de poseer adaptaciones fisiológicas como la evaporación cutánea y respuestas conductuales como el jadeo, el aleteo o la selección de micrositios sombreados, estas estrategias no siempre son suficientes para evitar el golpe de calor [38]. Algunas especies pequeñas pueden perder más del 5 % de su masa corporal por evaporación en una hora, lo que incrementa significativamente el riesgo de deshidratación y mortalidad en condiciones donde el agua es limitada.

Incluso exposiciones leves a temperaturas por encima de la zona de termoneutralidad pueden inducir estrés térmico subclínico, el cual actúa como un precursor de alteraciones fisiológicas más severas y puede pasar desapercibido en etapas tempranas. La incapacidad del organismo para disipar el exceso de calor conduce a cambios patológicos en órganos vitales y a alteraciones hematológicas, incluyendo congestión pulmonar, hemorragias intersticiales, vacuolización hepatocelular y congestión en riñones y tracto gastrointestinal. Asimismo, se han documentado diferencias interespecíficas en la magnitud de estos efectos, lo que sugiere que la vulnerabilidad al estrés térmico no es homogénea entre especies [39].

Desde una perspectiva fisiológica, el límite superior de temperatura corporal letal en aves se sitúa entre 45 y 46 °C, lo que representa un margen térmico reducido de apenas 4 a 5 °C por encima de su temperatura basal [38]. Esto implica que pequeños incrementos en la temperatura ambiental pueden tener consecuencias críticas, especialmente durante

eventos extremos.

En respuesta a estas condiciones, las aves presentan ajustes conductuales que constituyen uno de los principales mecanismos de afrontamiento frente al estrés térmico. Durante periodos de altas temperaturas, pueden reducir su actividad, modificar sus patrones de alimentación o desplazarse hacia microhábitats más frescos. Estas respuestas implican compromisos ecológicos entre la obtención de alimento y la termorregulación, lo que puede afectar su balance energético [38].

Eventos recientes en México han documentado episodios de mortalidad masiva de aves asociados a olas de calor extremas. En mayo de 2024, en regiones de la Huasteca Potosina y Tamaulipas, se reportó la muerte de múltiples individuos de distintas especies, incluyendo psitácidos, tucanes y otras aves, las cuales colapsaron en pleno vuelo o fueron encontradas sin vida en el suelo. Estos eventos coincidieron con temperaturas ambientales excepcionalmente elevadas, con sensaciones térmicas superiores a los 50 °C, lo que sugiere que la deshidratación aguda y el golpe de calor fueron factores determinantes en la mortalidad observada [9].

Este tipo de eventos evidencia cómo las olas de calor pueden provocar respuestas fisiológicas críticas en escalas de tiempo muy cortas, superando la capacidad de termorregulación incluso en especies con adaptaciones al calor. Asimismo, evidencia que el estrés térmico puede traducirse en mortalidad directa a nivel poblacional, particularmente en contextos donde la disponibilidad de agua es limitada.

Síntesis crítica

En conjunto, la evidencia muestra que las aves responden al cambio climático a través de modificaciones en su fisiología, comportamiento, migración y reproducción. Estas respuestas, aunque reflejan cierta plasticidad adaptativa, no garantizan su persistencia a largo plazo frente a escenarios de calentamiento acelerado. Por ello, las aves no solo funcionan como bioindicadores de los efectos climáticos, sino también como centinelas que advierten sobre la urgencia de integrar criterios de cambio climático en las estrategias de conservación.

Este marco resulta esencial para analizar la situación de especies particulares como la cotorra serrana occidental, cuyo caso de estudio se desarrolla en el siguiente apartado.

2.1.3. Especie de estudio: cotorra serrana occidental

La cotorra serrana occidental (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*) es una especie emblemática de la Sierra Madre Occidental, catalogada como *En Peligro de Extinción* en la Norma Oficial Mexicana NOM-059-SEMARNAT-2010 de la Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales (SEMARNAT) y listada en el Apéndice I de la Convención sobre el Comercio Internacional de Especies Amenazadas de Fauna y Flora Silvestres (CITES) [30, 13]. Su papel ecológico como dispersora de semillas, al favorecer la regeneración de áreas degradadas, y su estrecha dependencia de los bosques de pino-encino la convierten en una especie clave para comprender los efectos del cambio climático y la pérdida de hábitat sobre los ecosistemas de montaña.



Figura 2.1: *cotorra serrana occidental* (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*). Fotografía de tres individuos en cautiverio. Imagen de Joe Mazzola, disponible en Wikimedia Commons bajo licencia Creative Commons Attribution-ShareAlike 2.0 (CC BY-SA 2.0).

Descripción de la especie

El loro de pico grueso (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*) es una especie de aproximadamente 38 cm de longitud, caracterizada por su coloración predominantemente verde y un pico grande y oscuro. Presenta marcas distintivas de color rojo en la frente, franja ocular, los hombros y los muslos. Durante el vuelo, destacan las coberteras inferiores de las alas de tonalidad amarilla. Las plumas de vuelo y la cola escalonada muestran una apariencia negruzca vista desde abajo.

En cuanto a la diferenciación con especies similares, se distingue de la guacamaya militar (*Ara militaris*) por su menor tamaño y cola relativamente más corta, así como por la ausencia de tonalidades azules en las plumas de vuelo y la rabadilla. A su vez, se diferencia del loro corona lila (*Amazona finschi*) por la presencia de alas inferiores amarillas y una cola más larga. En comparación con el loro de frente granate (*Rhynchopsitta terrisi*), el loro pico grueso es más pequeño y carece de la coloración granate en la cabeza.

Su vocalización es similar a la de las guacamayas, caracterizada por sonidos agudos que incluyen chillidos, graznidos y llamadas ásperas, descritas fonéticamente como “cra-ak” o “graa-ah” [5].

La Cotorra Serrana Occidental es un psitácido, es decir, una especie perteneciente al grupo de los loros, pericos, cotorras y guacamayas. Como otros miembros de este grupo, presenta un pico robusto adaptado para romper semillas y conos de pino, patas con dos dedos hacia adelante y dos hacia atrás que facilitan la manipulación de alimentos y una conducta social compleja, viviendo habitualmente en bandadas y manteniendo fuertes vínculos entre individuos, además de un comportamiento altamente inteligente y gregario, formando bandadas que facilitan la búsqueda de alimento, la comunicación entre individuos y la detección temprana de posibles depredadores.

Distribución geográfica de la cotorra serrana occidental

La cotorra serrana occidental (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*) es una especie endémica de México cuya distribución actual se restringe principalmente a la Sierra Madre Occidental. Sus poblaciones se encuentran principalmente en los estados de Chihuahua, Durango, Sonora y Sinaloa, donde habita bosques templados de pino y pino-encino localizados entre 1200 y 3600 m de altitud. Históricamente la especie también habitaba en el suroeste de Estados Unidos (Arizona y Nuevo México), pero actualmente está prácticamente extinta en esa región [4].



Figura 2.2: Mapa de distribución de la cotorra serrana occidental (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*). Las áreas indicadas muestran las zonas de reproducción y presencia de la especie (El área de reproducción incluye las montañas del oeste de México desde el noreste de Sonora y el oeste de Chihuahua hacia el sureste hasta el sur y oeste de Durango y Michoacán y, al menos anteriormente, hasta Sinaloa y Jalisco en la Sierra Madre Occidental [34]). Imagen adaptada de Cephas (2021), basada en información de *Birds of the World* (The Cornell Lab of Ornithology). Disponible bajo licencia Creative Commons Attribution–ShareAlike 4.0 (CC BY-SA 4.0).

El mapa de distribución de la cotorra serrana occidental (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*) muestra tanto las áreas actuales como las regiones donde la especie estuvo presente en el pasado. En la figura, las zonas marcadas en color naranja representan la distribución actual y las principales áreas de reproducción de la especie, localizadas principalmente en los bosques de coníferas de la Sierra Madre Occidental, particularmente en los estados de Chihuahua y Durango. Por otro lado, las áreas señaladas en color azul indican regiones de presencia histórica o zonas donde anteriormente se registraban desplazamientos y poblaciones de la especie. Estas incluyen principalmente partes del suroeste de Estados Unidos, como Arizona y Nuevo México, donde habitaba décadas atrás pero donde actualmente ya no existen poblaciones silvestres estables.

Situación poblacional actual

Las estimaciones poblacionales han mostrado una fuerte variabilidad y una tendencia decreciente. En 1995 se calculó entre 1,000 y 4,000 individuos maduros; en 2004 se estimaron 2,800 individuos maduros; y en 2011, los censos sugirieron una reducción hasta aproximadamente 840 individuos. La estimación global más reciente considera 2,097 individuos, aunque probablemente sea una sobreestimación. Asimismo, la especie presenta una extensión de la ocurrencia (EOO) de aproximadamente 141,000 km² en periodo reproductivo, mientras que durante el periodo no reproductivo se amplía hasta cerca de 152,000 km²[5].

Las estimaciones poblacionales de la cotorra serrana occidental (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*) empleadas en este trabajo provienen de programas de monitoreo desarrollados en las Áreas de Protección de Flora y Fauna Tutuaca, Papigochic y Campo Verde, así como en la Reserva de la Biosfera Janos y en la Región Prioritaria para la Conservación Madera, todas ubicadas en el estado de Chihuahua [14, 12]. El objetivo de estos programas ha sido conocer la distribución y las tendencias poblacionales de la especie mediante el seguimiento de sus zonas de anidación, además de caracterizar su hábitat e identificar los factores asociados con su reproducción.

Como parte de la metodología empleada, se utilizaron técnicas de telemetría para localizar sitios de alimentación, perchas, bebederos y dormideros. Para ello, algunos individuos fueron equipados con radiocollares y rastreados diariamente mediante receptores y triangulación de señales, permitiendo identificar las áreas utilizadas por la especie. Una vez localizados estos sitios, se realizaron conteos sistemáticos por arriba, registrando el número de individuos observados y su comportamiento. En particular, los bebederos fueron utilizados como puntos estratégicos para la estimación poblacional debido a la alta concentración de ejemplares que presentan, realizándose conteos sistemáticos para obtener estimaciones del número de individuos en cada área de estudio [12].

Adicionalmente, durante la temporada reproductiva se llevó a cabo el monitoreo de nidos con registros históricos, clasificando las cavidades según su uso y verificando su actividad mediante observaciones periódicas de huevos, pollos y comportamiento de los adultos. La localización de nuevos nidos se efectuó mediante recorridos de observación y técnicas de búsqueda y espera, aprovechando las vocalizaciones y conductas reproductivas de las aves. Asimismo, en los nidos accesibles se registraron parámetros reproductivos, como el tamaño de puesta, el tamaño de la nidada y el número de volantones exitosos, junto con variables del hábitat, entre ellas la especie del árbol utilizado, su diámetro, altura, ubicación geográfica y altitud. Con base en la información de productividad y en los conteos sistemáticos de parvadas realizados entre 1998 y 2011, se concluyó que las áreas monitoreadas albergan aproximadamente el 50 % de la población total reportada para la especie en la literatura especializada [12].

No obstante, la información disponible sobre la dinámica poblacional de la cotorra serrana occidental aún presenta limitaciones importantes. De acuerdo con NatureServe, la dinámica de la población de *Rhynchopsitta pachyrhyncha* es poco conocida, lo que dificulta delimitar con precisión las distintas ocurrencias de la especie. Asimismo, se ha señalado que algunas regiones de su distribución no han sido estudiadas exhaustivamente debido a su acceso difícil o peligroso debido al tráfico ilícito de drogas, por lo que se considera necesario continuar fortaleciendo los programas de monitoreo y actualizar periódicamente las estimaciones poblacionales para mejorar el conocimiento sobre la especie y apoyar las

estrategias de conservación [26].

Las recomendaciones de manejo propuestas por NatureServe también ponen de manifiesto la necesidad de fortalecer el conocimiento sobre la especie y sus poblaciones. Entre las principales acciones sugeridas se encuentran la protección de los sitios de reproducción actuales e históricos, la implementación de políticas de manejo forestal que favorezcan la conservación de árboles maduros y cavidades de anidación, la restauración de áreas degradadas y el uso de cajas nido como medida complementaria cuando sea necesario. Asimismo, se destaca la importancia de obtener estimaciones poblacionales actualizadas, mantener programas de monitoreo mediante muestreos periódicos y profundizar en el estudio de los movimientos de la especie a través de tecnologías de seguimiento, como la telemetría satelital. Estas recomendaciones evidencian que aún existen vacíos de información y resaltan la necesidad de continuar generando datos confiables que apoyen la conservación y el desarrollo de herramientas predictivas para la gestión de la cotorra serrana occidental [26].

La importancia de estos esfuerzos de monitoreo y conservación se hace aún más evidente al considerar las tendencias poblacionales reportadas para la especie. Se estima que la población de la cotorra serrana occidental ha disminuido más de 30 % en las últimas tres generaciones (31.5 años). Modelos predictivos sugieren que, dependiendo del escenario climático, el área climáticamente adecuada para la especie podría reducirse entre 25–70 % para 2090. Esto representaría una disminución poblacional adicional de 30–49 % a lo largo de las próximas tres generaciones, agravada por amenazas antrópicas como la cacería y el saqueo de nidos [5].

Biología y ecología

La especie habita en bosques templados de coníferas y bosques maduros de pino-encino, principalmente entre 2,000–2,700 m de altitud, aunque puede encontrarse entre 1,200–3,600 m, depende estrechamente de estos bosques, especialmente de árboles viejos o deteriorados que le proporcionan refugio. Este hábitat ha sido impactado por la industria maderera, pastoreo, incendios forestales y la degradación en general. Su reproducción coincide con el pico de producción de semillas de pino, su principal fuente alimenticia, entre mediados de junio y finales de julio. El periodo de incubación dura en promedio 26 días, y los polluelos abandonan el nido entre septiembre y octubre; una pareja de cotorra serrana occidental pone 2.7 huevos por nidada con un desempeño reproductivo de 1.6 polluelos por nidada, es una especie bastante longeva (característica común de muchos psitácidos) llegando a vivir entre 30 a 40 años en estado salvaje, y puede superar las 4 décadas en cautiverio bajo cuidados especializados. [5, 10, 25].

La longevidad de una ave depende de múltiples factores ambientales y biológicos. En vida silvestre, la supervivencia puede verse limitada por la depredación, la disponibilidad de alimento, las enfermedades, los eventos climáticos extremos y las actividades humanas, como la pérdida de hábitat y la captura ilegal. En cautiverio, muchos de estos riesgos disminuyen gracias al suministro regular de alimento y la atención veterinaria; sin embargo, el estrés asociado al confinamiento, la falta de estimulación ambiental o un manejo inadecuado también pueden afectar negativamente la salud y la esperanza de vida.

La dieta está compuesta principalmente por semillas de diversas especies de pinos como *Pinus arizonica*, *P. gregii*, *P. teocote*, *P. montezumae*, *P. cembroides*, *P. durangensis*,

P. engelmannii. También consume ocasionalmente semillas de pinabete, de bellotas, de brotes de coníferas y néctar de algunas flores de maguey. Su comportamiento social incluye forrajeo en bandadas, vigilancia cooperativa frente a depredadores y formación de grupos numerosos durante las migraciones estacionales. Además, funciona como especie bandera al representar los esfuerzos de conservación de los bosques templados mexicanos y también es considerada especie paraguas, ya que la conservación de sus hábitats beneficia a numerosas especies simpátricas amenazadas, como el quetzal orejiblanco (*Euptilotis neoxenus*) y el búho moteado (*Strix occidentalis*), su valor es reconocido a nivel trinacional (México, Estados Unidos y Canadá) por la iniciativa Partners in Flight [11, 34].

Migración y fisiología

A diferencia de la mayoría de los loros neotropicales, la cotorra serrana occidental presenta movimientos migratorios estacionales que pueden superar los 1,000 km, siguiendo la orientación noroeste-sureste de la Sierra Madre Occidental. Su patrón migratorio, aunque aún poco documentado, parece estar asociado a la disponibilidad de conos de pino, mostrando también comportamientos nómadas cuando el alimento escasea [34].

Estudios de poblaciones reintroducidas en Arizona sugieren que las migraciones pueden realizarse en trayectos de un solo día, alcanzando velocidades cercanas a 50 km/h. Además, la especie presenta adaptaciones fisiológicas particulares: puede soportar temperaturas bajo cero, alimentarse en medio de nevadas y obtener agua de la nieve, lo que demuestra una tolerancia inusual al frío en comparación con otros psitácidos [34].

Amenazas

La principal amenaza histórica ha sido la pérdida de hábitat: se estima que 99.5 % de los bosques antiguos de pino-encino de la Sierra Madre Occidental han sido talados al menos parcialmente, quedando menos del 0.6 % de bosque primario intacto [34]. La tala selectiva de árboles grandes y muertos en pie reduce los sitios disponibles para anidación. Otras amenazas incluyen los incendios forestales, la ganadería, el cultivo ilegal, y la caza y captura para el comercio ilegal de mascotas [5].

Estudios recientes muestran que, aunque la mayoría de los nidos se ubican en pinos muertos en pie, la reducción de estos ha incrementado el uso de álamos y abetos Douglas. Este cambio refleja la presión antrópica sobre el hábitat y limita las opciones de anidación disponibles [34].

Síntesis crítica

La cotorra serrana occidental no solo es un bioindicador del estado de conservación de los bosques templados de montaña, sino también un centinela frente al cambio climático. Su fuerte dependencia hacia hábitats especializados, su sensibilidad a la variación en la disponibilidad de alimento y su reducida población la hacen especialmente vulnerable. Su declive anticipa los efectos que podrían experimentar otras especies simpátricas, lo que justifica su estudio como modelo para evaluar los impactos del cambio climático en la biodiversidad mexicana.

Influencia del fenómeno El Niño–Oscilación del Sur en la producción de conos

Los estudios dendrocronológicos llevados a cabo en el área de Mesa de las Guacamayas, al noroeste de Chihuahua, donde se ha identificado como sitio de anidación de la cotorra serrana occidental (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*), posibilitaron la reconstrucción de una serie hidroclimática que abarca más de 400 años (1600-2008) a través del análisis de los anillos de crecimiento del *Pseudotsuga menziesii*. Según los resultados, los patrones atmosféricos circulatorios tienen una fuerte influencia sobre la variabilidad hidroclimática a nivel regional, especialmente el fenómeno El Niño-Oscilación del Sur (ENSO). Se descubrió que la fase fría del ENSO (La Niña) está vinculada a situaciones de sequía, en cambio la fase cálida (El Niño) favorece condiciones más húmedas. Estos descubrimientos demuestran que la dinámica climática regional puede producir periodos prolongados de sequía, los cuales tienen la capacidad de impactar a los ecosistemas forestales y a las especies animales que dependen de ellos [35].

La producción de conos en especies de coníferas puede verse afectada por patrones climáticos a gran escala, como El Niño-Oscilación del Sur (ENSO); sin embargo, esta conexión entre especies varía. Por ejemplo, se ha registrado que la producción de conos en *Pinus edulis* está significativamente relacionada con las fluctuaciones climáticas regionales vinculadas al ENSO; en otras especies, como *Pinus ponderosa*, por el contrario, esta relación es menos notoria. Estos hallazgos señalan que la manera en que las coníferas responden a los cambios climáticos no es homogénea, sino que varía según las propiedades ecológicas particulares de cada especie. Esta conducta es especialmente importante en los bosques del norte mexicano, en donde especies como *P. montezumae*, *P. engelmannii*, *P. teocote*, *P. durangensis*, *P. arizonica*, *P. gregii* y *P. cembroides* son un componente esencial de la dieta de la cotorra serrana occidental. Por lo tanto, los cambios climáticos asociados con ENSO podrían afectar indirectamente la disponibilidad del alimento para esta especie [37].

Esta relación cobra especial importancia en áreas donde el ENSO ha tenido históricamente un impacto sobre la variabilidad hidroclimática, como se ha registrado en el noroeste de Chihuahua [35].

La producción de conos y semillas en las especies del género *Pinus* presenta una gran variabilidad entre árboles y sitios, estando influenciada por las características estructurales de los árboles y las condiciones ambientales locales. Investigaciones realizadas en *Pinus pseudostrobus* en el noreste de México han demostrado que variables como el diámetro, la altura y la cobertura de copa se relacionan con la cantidad y viabilidad de las semillas producidas, lo que muestra que la disponibilidad de semillas no es homogénea dentro de un mismo ecosistema. Además, se ha indicado que condiciones climáticas tales como temperaturas elevadas y periodos secos pueden afectar la producción de semillas, lo que sugiere que la variabilidad ambiental tiene un importante efecto sobre la dinámica reproductiva de las coníferas [15].

2.2. Aspectos matemáticos

2.2.1. Modelos predictivos en conservación de aves

El uso de modelos predictivos ha permitido comprender cómo las aves responden al cambio climático, tanto en términos de distribución como de fenología. Entre los enfoques más empleados se encuentran los Modelos de Distribución de Especies (SDM) o Modelos de Nicho Ecológico (ENM), que integran variables climáticas actuales y futuras para proyectar áreas potencialmente adecuadas bajo distintos escenarios de emisiones (RCP). La mayoría de los estudios concluyen que las distribuciones geográficas de numerosas especies disminuirán significativamente en los próximos 50 años [32].

De acuerdo con Matadamas et al. (2022), los resultados obtenidos (aproximadamente 86 %) coinciden con la hipótesis ampliamente aceptada de que las especies tienden a desplazarse hacia altitudes mayores, al tiempo que reducen su rango de distribución en un intento por mantener condiciones climáticas favorables. Estos patrones tienen implicaciones directas en la planificación de áreas protegidas y corredores biológicos [24].

Métodos ornitológicos

Los modelos predictivos dependen de la calidad y cantidad de los datos obtenidos en campo. Para ello, la ornitología ha desarrollado múltiples métodos de monitoreo que permiten estimar abundancia, supervivencia y rutas migratorias, datos esenciales para parametrizar modelos poblacionales y de distribución.

- **Censos de aves o conteos:** Se utilizan para conocer cuántas especies o aves hay en un área o región. El observador identifica a las especies por su morfología, colores o cantos. En caso de no reconocer alguna, se recomienda hacer un dibujo, tomar nota de detalles o grabar el canto para su verificación posterior. Los censos se realizan en periodos de tiempo definidos, preferiblemente antes de las 10 a.m., cuando las aves están más activas.
- **Censos a lo largo de transectos:** El observador camina a velocidad constante en un recorrido definido, registrando las aves observadas en una distancia determinada a lo largo de una línea llamada transecto.
- **Censos desde puntos de radio fijo:** El observador se ubica en un punto de muestreo y registra aves en un radio determinado durante un tiempo específico.
- **Captura con redes de niebla:** Son mallas empleadas para capturar aves y examinarlas de cerca, con el fin de registrar características físicas, edad, peso y estado del plumaje, antes de liberarlas. Este método debe ser utilizado únicamente por personal capacitado. Las redes se colocan en zonas estratégicas como quebradas, rastrojos o áreas con alimento.
- **Marcación de individuos:** Incluye el anillamiento con anillos metálicos en patas, collares o placas plásticas en especies grandes. Permite identificar individuos, estudiar rutas migratorias y estimar longevidad y movimientos regionales. Gracias al

seguimiento de aves marcadas, se han podido registrar las rutas de migración y los sitios de parada durante los viajes anuales.

- **Telemetría o radiotransmisores:** Se utilizan pequeños dispositivos fijados al cuerpo de las aves para rastrear su posición y movimientos. Las señales emitidas son captadas por receptores que registran ubicación y desplazamientos. Es especialmente útil en especies migratorias y en programas de conservación [6].

Importancia de los estudios ornitológicos

Los estudios ornitológicos no solo generan información básica sobre las aves, sino que también son indispensables para la construcción y validación de modelos predictivos. Permiten comprender la distribución, migración y estado de las poblaciones de aves; ayudan a evaluar la efectividad de las áreas protegidas y contribuyen a entender el impacto del cambio climático en las poblaciones [6].

Además, los **atlas de aves** son una herramienta complementaria. Estos proyectos nacionales o regionales consisten en mapear la distribución reproductiva de cada especie mediante cuadrículas estandarizadas, que varían desde 5×5 km hasta medio grado de latitud/longitud. Actualmente se emplean ampliamente en Europa, Australia, Nueva Zelanda, Norteamérica y África [23].

Ejemplo aplicado: fenología de aves migratorias

Un caso relevante es el análisis de la llegada y salida de aves migratorias en Sudáfrica. Bussiere et al. (2015) emplearon datos de atlas de aves (SAPAB1: 1987–1991; SAPAB2: 2007–2012) para comparar patrones fenológicos de nueve especies paleárticas y siete intra-africanas. Los resultados mostraron adelantos en la partida de varias especies migratorias paleárticas, esto es una evidencia de un ajuste fenológico asociado al cambio climático.

Para modelar estos cambios, los autores aplicaron un algoritmo de ajuste de curvas no lineales mediante el procedimiento *nls* en R (versión 3.0.1), con la siguiente ecuación:

$$R_s = \begin{cases} \frac{\text{Asym}_1}{1 + \exp\left(-\frac{P_{SH} - x_{mid1}}{\text{scale}_1}\right)} + \epsilon & \text{si } P_{SH} \leq [P_{SH}]_s \\ \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{P_{SH} - x_{mid2}}{\text{scale}_2}\right)} + \epsilon & \text{si } P_{SH} > [P_{SH}]_s \end{cases}$$

donde R_s es la tasa de reporte de la especie s en una pentada del hemisferio sur (P_{SH}), y los parámetros representan:

- Asym_1 : tasa máxima promedio de reporte en verano.
- x_{mid1} , x_{mid2} : puntos de inflexión de las curvas (llegada y salida).
- scale_1 , scale_2 : tasas de llegada y salida.

Este modelo divide el ciclo anual en dos fases: llegada y partida de las especies migratorias, capturando así los cambios fenológicos en respuesta al clima. Aunque se trata de un modelo estadístico, ilustra cómo las series de datos a largo plazo pueden integrarse en análisis cuantitativo para detectar desplazamientos temporales en la migración [8].

2.2.2. Modelos dinámicos: teoremas y definiciones

Al estudiar modelos dinámicos mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, no solamente es necesario establecer la ecuación que representa el desarrollo del sistema, sino también especificar la condición inicial. Con esta información se puede hallar una solución particular y estudiar la dinámica del sistema a través del tiempo. En este sentido, el concepto de problema de valor inicial resulta una herramienta básica para la formulación y el análisis de modelos matemáticos aplicados a fenómenos biológicos.

Un **problema de valor inicial** para una ecuación diferencial ordinaria de orden n es el sistema que contiene la ecuación diferencial junto con n condiciones iniciales, de la siguiente forma:

$$\begin{cases} F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ \frac{dy}{dx}(x_0) = y_1, \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

donde x_0 es un punto dado en algún intervalo I , y $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ son constantes dadas. Resolver el problema de valor inicial significa encontrar una función $y(x)$ que satisfaga la ecuación diferencial y todas las condiciones iniciales [29].

Una vez planteado el problema de valor inicial, es interesante preguntarnos si existe una solución que satisfaga tanto la ecuación diferencial como las condiciones iniciales dadas y, de ser así, si esa solución es única. Estas interrogantes son de gran importancia en la modelación matemática, ya que aseguran que el comportamiento descrito por el modelo esté bien definido. En este sentido, el siguiente teorema da las condiciones bajo las que se garantiza la existencia y unicidad de la solución.

Teorema 1 (Existencia y unicidad de la solución)

Sean $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, $\dots$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $h(x)$ funciones continuas en un intervalo I , con $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Si x_0 es un punto de I , entonces una solución $y(x)$ del problema de valores iniciales

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

existe en el intervalo I y es única [40].

Una vez que sabemos que las soluciones de un problema de valor inicial existen y son únicas, podemos estudiar su comportamiento en el tiempo. En particular nos interesa identificar aquellos estados en los que el sistema permanece sin cambios y si pequeñas

perturbaciones en las condiciones iniciales hacen que la solución se mantenga cercana a estos estados o se aleje de ellos. Estos conceptos se formalizan mediante las nociones de punto de equilibrio y estabilidad, las cuales constituyen herramientas fundamentales para el análisis de los modelos dinámicos estudiados en este trabajo.

Definición 2.2.1 (Punto de equilibrio y estabilidad) Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y sea $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = p, \end{cases}$$

donde $x(t, p)$ denota la solución única del sistema con condición inicial $p \in \mathbb{R}^n$.

Un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ se denomina **punto de equilibrio** si

$$f(x^*) = 0. \quad (2.1)$$

Definimos la **estabilidad** de x^* de la siguiente manera:

1. x^* es **estable** si, para todo $\varepsilon > 0$, existe una vecindad U de x^* tal que si $p \in U$, entonces

$$x(t, p) \in T_\varepsilon(x^*) \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

$$\text{donde } T_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| < \varepsilon\}.$$

2. x^* es **asintóticamente estable** si existe una vecindad U_0 de x^* tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, p) = x^*, \quad \text{para todo } p \in U_0.$$

3. x^* es **inestable** si no es estable [2].

A continuación, se considera el caso particular de los sistemas autónomos. Para distinguir esta situación del sistema general introducido previamente, se utilizará la notación g (o g_i en el caso multidimensional) para representar la función que define la dinámica del sistema. En particular, el criterio de estabilidad presentado más adelante se aplicará al caso escalar $\dot{x} = g(x)$. Esta elección de notación permite diferenciar claramente el análisis del caso unidimensional del desarrollado para sistemas generales y facilita la presentación de las definiciones y resultados posteriores.

Definición 2.2.2 (Sistema autónomo) Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se dice que es **autónomo** cuando puede escribirse en la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases}$$

donde la variable independiente t no aparece explícitamente en el lado derecho de cada ecuación diferencial [40].

Muchos modelos matemáticos pueden representarse mediante sistemas autónomos, pero existen situaciones en las que ciertos factores varían de manera explícita con el tiempo y, por tanto, deben incorporarse directamente en las ecuaciones. Este enfoque resulta especialmente útil cuando se pretende modelar fenómenos como cambios ambientales o efectos externos que modifican la dinámica poblacional. En este sentido, el modelo desarrollado en el presente trabajo se formula como un sistema no autónomo, por lo que es importante introducir la siguiente definición.

Definición 2.2.3 (Sistema no autónomo) *Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se dice que es **no autónomo** cuando la variable independiente t aparece explícitamente en el lado derecho de alguna de las ecuaciones. En este caso, el sistema puede escribirse en la forma:*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \frac{dx_2}{dt} = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \end{cases}$$

[40].

La definición de estabilidad permite caracterizar el comportamiento de los puntos de equilibrio; sin embargo, en muchas aplicaciones resulta conveniente contar con criterios que permitan determinar dicha estabilidad sin resolver explícitamente el sistema. En este sentido, el siguiente teorema establece una condición suficiente para clasificar localmente un punto de equilibrio a partir del signo de la derivada de la función que define la dinámica.

Teorema 2 (Criterio de estabilidad local para ecuaciones autónomas)

Sea x^* un punto de equilibrio de la ecuación autónoma

$$\dot{x} = g(x),$$

con g diferenciable en un vecindario de x^* . Entonces:

- Si $g'(x^*) < 0$, el punto x^* es *asintóticamente estable* (atractor local).
- Si $g'(x^*) > 0$, el punto x^* es *inestable* (repulsor) [40].

El criterio de estabilidad que hemos presentado anteriormente se aplica para una determinada familia de ecuaciones diferenciales, los llamados sistemas autónomos. Estos sistemas son fundamentales para el estudio de la dinámica poblacional, pues describen cómo evoluciona una variable de interés dependiendo de su estado actual, y no explícitamente del tiempo.

Las herramientas gráficas, además del análisis teórico de las ecuaciones diferenciales, hacen posible obtener una comprensión más intuitiva del comportamiento de sus soluciones. En

particular, el campo de direcciones proporciona una representación visual de la dinámica del sistema, mostrando la trayectoria que seguirían las soluciones en diferentes puntos del plano sin necesidad de resolver explícitamente la ecuación diferencial. Por eso es un recurso útil para el estudio cualitativo de los modelos matemáticos.

Definición 2.2.4 (Campo de direcciones) *Si se evalúa sistemáticamente la función f sobre una malla rectangular de puntos en el plano xy y se dibuja en cada punto (x, y) un elemento de línea con pendiente $f(x, y)$, entonces el conjunto de todos estos elementos se denomina **campo de direcciones** o **campo de pendientes** de la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Visualmente, el campo de direcciones sugiere la forma de una familia de curvas solución de la ecuación diferencial y permite identificar aspectos cualitativos de las soluciones, como regiones en el plano donde una solución presenta comportamientos particulares. Una curva solución que pasa a través de un campo de direcciones sigue el patrón de flujo del campo y es tangente a un elemento lineal cuando intersecta un punto de la malla [40].

Modelo logístico no autónomo como base para el análisis del modelo propuesto

El análisis presentado en esta sección sigue la metodología propuesta por [20] para el modelo logístico no autónomo. Si bien el modelo desarrollado en esta investigación no corresponde al modelo logístico clásico, sino que presenta una dinámica no autónoma con una estructura cúbica, se consideró pertinente incluir este enfoque porque proporciona una base para comprender el comportamiento de sistemas cuyos parámetros dependen explícitamente del tiempo. En particular, la introducción de una función auxiliar que permite identificar regiones de crecimiento y decrecimiento de las soluciones constituye una herramienta útil para el análisis cualitativo y sirve como punto de partida para el estudio del modelo propuesto en esta tesis.

En el caso autónomo del modelo logístico clásico, los puntos de equilibrio desempeñan un papel fundamental en la descripción de la dinámica de las soluciones, ya que el signo de la función de reacción cambia alrededor de dichos estados estacionarios. Cuando los coeficientes dependen explícitamente del tiempo, los puntos de equilibrio constantes del caso autónomo dejan de existir en el sentido clásico; sin embargo, es posible realizar un análisis cualitativo análogo mediante la función $[l(t) = \frac{\rho(t)}{\eta(t)}]$ cuya evolución temporal permite identificar regiones de crecimiento y decrecimiento de las trayectorias.

Definición 2.2.5 *Sea $x(t, s; x_s)$ la solución del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x'(t) = \rho(t)x - \eta(t)x^2, & t \in \mathbb{R}, \\ x(s) = x_s > 0, & s \leq t, \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $\rho(t), \eta(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas a trozos con $\eta(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definimos la función:

$$l(t) = \frac{\rho(t)}{\eta(t)}.$$

Esta función proporciona información sobre la dinámica de las soluciones del sistema.

Aunque $l(t)$ no constituye una solución estacionaria del sistema, proporciona información cualitativa sobre la dinámica de las trayectorias.

El signo de la derivada depende de la posición relativa de $x(t)$ respecto a la función $l(t)$:

Se tiene que:

- Si $x(t) \in (0, l(t))$, entonces $x'(t) > 0$ y la solución crece.
- Si $x(t) > l(t)$, entonces $x'(t) < 0$ y la solución decrece.
- Si $x(t) = l(t)$, entonces $x'(t) = 0$.

La función ($l(t)$) no solo permite identificar regiones de crecimiento y decrecimiento de las soluciones, sino que su comportamiento para tiempos muy grandes o muy pequeños también aporta información importante sobre la dinámica del sistema. Por ello, es útil introducir los conceptos de positividad asintótica *forward* y *backward*, los cuales se definen a continuación.

Definición 2.2.6 Decimos que una función $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es asintóticamente positiva *forward* (o *backward*) si su comportamiento es positivo cuando $t \rightarrow \infty$ (o cuando $t \rightarrow -\infty$), es decir, existe un tiempo $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $l(t) > 0$ cuando $t > \tau$ (o $t < \tau$).

Si existe $\varepsilon > 0$ tal que $l(t) > \varepsilon$ para valores suficientemente grandes de t , diremos que $l(t)$ es asintóticamente estrictamente positiva [20].

Una vez establecidas las condiciones sobre el comportamiento de la función ($l(t)$) cuando el tiempo avanza hacia el futuro o hacia el pasado, es posible estudiar cómo estas influyen en la dinámica de las soluciones del sistema. En particular, el siguiente teorema describe las condiciones bajo las cuales las soluciones convergen a cero o permanecen alejadas de la extinción, proporcionando una caracterización de su comportamiento asintótico.

Teorema 3 (Caracterización del comportamiento asintótico del sistema logístico no autónomo)

Adaptado de [20].

Sea $l(t)$ definido como antes y denotemos por $x(t, s; x_s)$ a cualquier solución del problema anterior (2.2) con $x_s > 0$. Supongamos que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t\eta(t) > 0.$$

Entonces:

1. Si

$$l(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \sigma \in [-\infty, 0],$$

entonces

$$x(t, s; x_s) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

2. Si $l(t)$ es asintóticamente estrictamente positiva *forward* para $t > \tau$, $x(t, s; x_s)$ no converge a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Además, si

$$l(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \sigma \in (0, \infty],$$

entonces

$$x(t, s; x_s) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \sigma \quad \text{para todo } s \leq t.$$

3. Si $l(t)$ es asintóticamente estrictamente positiva *backward* cuando $t < \tau$, $x(t, s; x_s)$ no converge a cero en sentido *pullback*, es decir, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ existe $\zeta > 0$ y $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$x(t_0, s; x_s) \geq \zeta \quad \text{para todo } s < s_0.$$

La demostración detallada del presente resultado puede consultarse en [20], pp. 87–89.

En este contexto, la expresión *no converge a cero en sentido pullback* indica que, para un tiempo de observación fijo, la solución permanece separada de cero cuando el tiempo inicial se considera cada vez más lejano en el pasado. En otras palabras, la población no tiende a extinguirse bajo este criterio de análisis. Este enfoque consiste en estudiar el comportamiento del sistema en un instante fijo considerando trayectorias que se originan en tiempos cada vez más remotos.

2.3. Contexto histórico y fundamentos teóricos

Antes de presentar el modelo desarrollado en esta tesis, resulta conveniente revisar algunos de los modelos clásicos de crecimiento poblacional que han servido como fundamento para la modelación matemática en ecología. El estudio del crecimiento de las poblaciones ha sido un tema de gran interés en disciplinas como la biología, la ecología y la demografía, motivando la formulación de modelos que describen la evolución del tamaño poblacional y los factores que influyen en su incremento o disminución.

Entre los modelos más representativos se encuentran el **modelo de Malthus** y el **modelo logístico de Verhulst**, los cuales constituyen la base conceptual de numerosos modelos matemáticos formulados mediante **ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)**. Posteriormente, el **modelo de Allee** incorporó mecanismos biológicos adicionales para describir situaciones en las que poblaciones pequeñas presentan dificultades para sobrevivir o reproducirse.

El estudio de estos modelos permite comprender cómo se han incorporado progresivamente distintos mecanismos biológicos en la descripción de la dinámica poblacional. Además, su

inclusión proporciona el contexto necesario para introducir el modelo propuesto en esta tesis, mostrando de manera gradual las ideas y supuestos que motivan su construcción.

2.3.1. El modelo de Malthus

El economista y demógrafo inglés **Thomas Robert Malthus** fue el primero en proponer un modelo matemático para representar el crecimiento poblacional en su obra *An Essay on the Principle of Population* (1798). Malthus observó que las poblaciones tienden a crecer en proporción directa a su tamaño, mientras que los recursos lo hacen de forma mucho más lenta. A partir de esta observación, planteó que la tasa de cambio de la población N es proporcional al número de individuos existentes en un momento dado:

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad N(0) = N_0 \quad (2.3)$$

donde:

- $N(t)$ representa el tamaño de la población en el tiempo t ,
- $r = b - \mu$ es la *tasa de crecimiento per cápita*, resultado de la diferencia entre la tasa de natalidad (b) y la tasa de mortalidad (μ).

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$N(t) = N_0 e^{rt} \quad (2.4)$$

De esta forma, si $r > 0$ la población crece exponencialmente; si $r = 0$, se mantiene constante; y si $r < 0$, disminuye hasta la extinción.

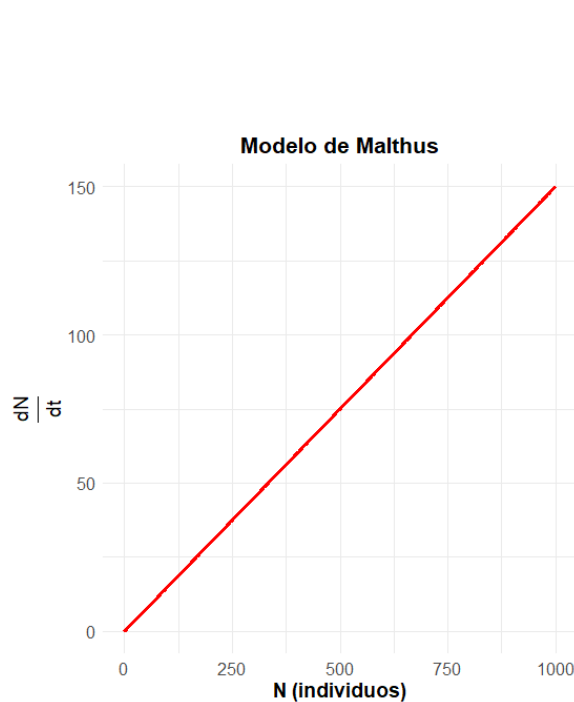


Figura 2.3: Representación gráfica del modelo de Malthus, $\frac{dN}{dt} = rN$, donde la tasa de crecimiento poblacional es directamente proporcional al tamaño de la población.

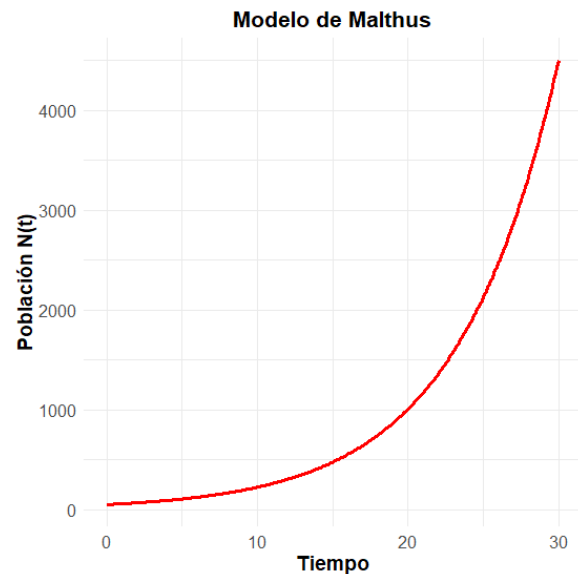


Figura 2.4: Evolución temporal de la población según el modelo de Malthus, descrito por la ecuación $\frac{dN}{dt} = rN$ con condición inicial $N(0) = N_0$. La solución $N(t) = N_0 e^{rt}$ presenta un crecimiento exponencial, en el que la población aumenta de manera ilimitada al asumir que cada individuo contribuye al crecimiento poblacional en una proporción constante y que no existen limitaciones ambientales como competencia por recursos o capacidad de carga.

El modelo logístico predice que cuando la población es pequeña ($N \ll K$), el crecimiento es casi exponencial, pero conforme N se aproxima a K , el crecimiento se reduce hasta alcanzar un equilibrio estable en $N = K$.

Este modelo, conocido como **modelo de crecimiento exponencial**, describe adecuadamente poblaciones en las que los recursos son abundantes o las condiciones ambientales son favorables, como bacterias en un medio de cultivo o poblaciones recién establecidas. Sin embargo, Malthus asumía un ambiente ilimitado, lo cual no refleja la realidad a largo plazo, ya que los recursos disponibles tienden a agotarse, provocando una desaceleración en el crecimiento [7].

Equilibrios

Los equilibrios se obtienen usando la condición de la ecuación 2.1. En este caso, tenemos que resolver $rN = 0$:

$$N^* = 0.$$

Verificación de estabilidad

Definimos $g(N) = rN$. Calculamos su primera derivada:

$$g'(N) = r.$$

Evaluamos en $N^* = 0$:

$$g'(0) = r.$$

Aplicando el Teorema 2.2.2:

- Si $r < 0$, entonces $g'(0) < 0$ y $N^* = 0$ es *asintóticamente estable* (extinción).
- Si $r > 0$, entonces $g'(0) > 0$ y $N^* = 0$ es *inestable* (crecimiento exponencial).

2.3.2. El modelo logístico de Verhulst

Para corregir esta limitación, el matemático belga **Pierre-François Verhulst** introdujo en 1838 el concepto de *capacidad de carga ambiental*, es decir, el número máximo de individuos que un entorno puede sostener de manera estable. De esta forma, modificó la ecuación de Malthus para incluir un término que representa la disminución de la tasa de crecimiento conforme aumenta la población:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (2.5)$$

donde:

- r es la tasa intrínseca de crecimiento,
- K es la *capacidad de carga del ambiente*.

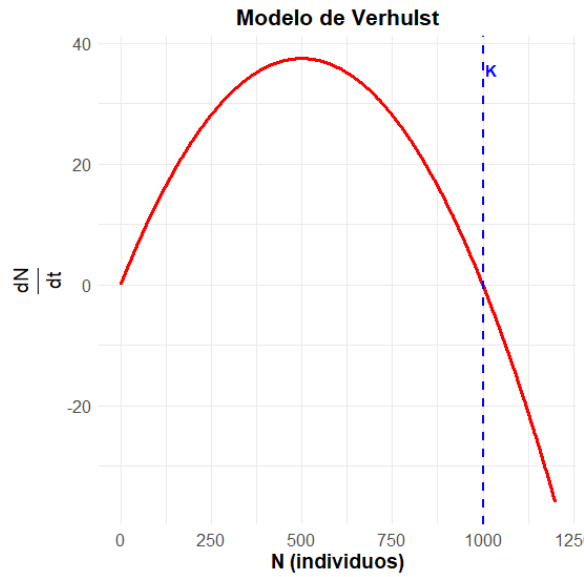


Figura 2.5: Gráfica de la tasa de crecimiento poblacional del modelo logístico de Verhulst, descrita por la ecuación $\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$. La tasa de crecimiento es nula en $N = 0$ y $N = K$, donde este último corresponde a la capacidad de carga del sistema. La línea vertical punteada indica el valor de K .

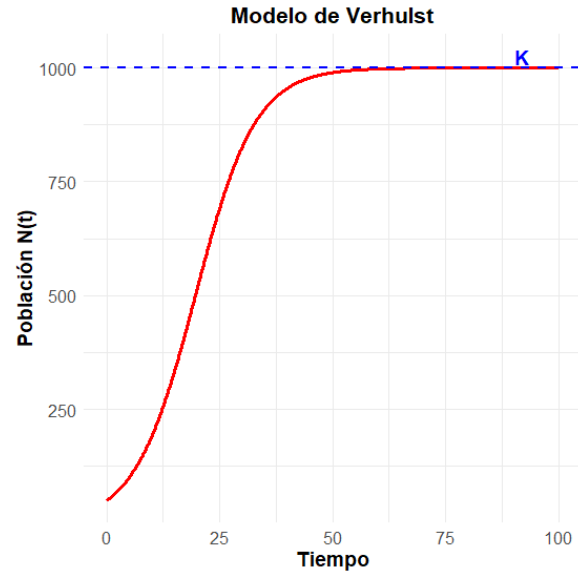


Figura 2.6: Evolución temporal de la población según el modelo logístico de Verhulst. La solución $N(t)$ presenta un crecimiento sigmoide: inicialmente aumenta de forma acelerada, posteriormente desacelera debido a la limitación de recursos y converge asintóticamente hacia la capacidad de carga K , representada por la línea horizontal punteada.

El modelo logístico predice que cuando la población es pequeña ($N \ll K$), el crecimiento es casi exponencial, pero conforme N se aproxima a K , el crecimiento se reduce hasta alcanzar un equilibrio estable en $N = K$.

Este comportamiento genera una **curva sigmoide o logística** (Figura 2.6), ampliamente observada en poblaciones biológicas reales. Verhulst interpretó además la función de crecimiento como la diferencia entre las tasas de natalidad y mortalidad:

$$G(N) = \beta(N) - \mu(N) \quad (2.6)$$

Si se considera que la mortalidad es constante y la natalidad disminuye linealmente con el tamaño de la población, de modo que $\beta(N) = a - bN$, entonces:

$$G(N) = (a - \mu) - bN \quad (2.7)$$

$$G(N) = (a - \mu) \left(1 - \frac{bN}{a - \mu}\right) \quad (2.8)$$

Al redefinir los parámetros como $r = a - \mu$ y $K = \frac{a - \mu}{b}$, se obtiene la forma clásica de la ecuación logística:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (2.9)$$

Este modelo representa un avance conceptual y matemático respecto al de Malthus, pues incorpora una retroalimentación negativa: a medida que la población crece, la competencia por los recursos se intensifica, reduciendo el crecimiento. Así, el modelo de Verhulst describe con mayor precisión el comportamiento de poblaciones naturales que tienden a estabilizarse [7]. Dado que los recursos disponibles tienden a agotarse, provocando una desaceleración en el crecimiento, Verhulst propuso un modelo denso-dependiente.

A continuación se presenta la solución analítica de la ecuación logística:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0} \right) e^{-rt}}. \quad (2.10)$$

Equilibrios

Sea $g(N) = rN(1 - \frac{N}{K})$. Necesitamos resolver $g(N) = 0$, entonces:

$$rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) = 0 \implies N^* = 0, N^* = K.$$

Verificación de estabilidad

Derivamos g :

$$g'(N) = r \left(1 - \frac{N}{K} \right) + rN \left(-\frac{1}{K} \right) = r \left(1 - \frac{2N}{K} \right).$$

Evaluamos en los equilibrios y por Teorema 2.2.2 obtenemos que:

- En $N^* = 0$:

$$g'(0) = r > 0 \implies N^* = 0 \text{ es } \textit{inestable}.$$

- En $N^* = K$:

$$g'(K) = r \left(1 - \frac{2K}{K} \right) = r(-1) = -r < 0 \implies N^* = K$$

es *linealmente asintóticamente estable*.

2.3.3. Ecuación logística del efecto Allee

Warder Clyde Allee (1885–1955) fue un ecólogo estadounidense de la Universidad de Chicago a principios del siglo XX, quien realizó experimentos con peces dorados, ofiuras, escarabajos de la harina y diversas especies. Allee demostró que los individuos de una población pueden verse afectados negativamente cuando el tamaño poblacional se vuelve muy pequeño o disperso.

Existen varias razones ecológicas por las cuales puede ocurrir este fenómeno: los individuos podrían tener dificultades para encontrar pareja, requerir grandes grupos para alimentarse

o expresar comportamientos sociales, o bien, modificar su ambiente de manera menos favorable cuando la densidad poblacional es baja.

Como resultado de estos hallazgos, se denomina **efecto Allee** al fenómeno en el cual la *tasa de crecimiento per cápita disminuye a bajas densidades poblacionales*. Es decir, cuando una población desciende por debajo de cierto umbral crítico, su crecimiento puede volverse negativo, lo que la conduce al riesgo de extinción.

Matemáticamente, este efecto puede representarse mediante una *variación de la ecuación logística* propuesta por Verhulst:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(\frac{N}{A} - 1\right) \quad (2.11)$$

donde:

- r es la tasa intrínseca de crecimiento,
- K es la capacidad de carga ambiental,
- A es el **umbral de Allee**, el tamaño poblacional por debajo del cual el crecimiento poblacional se vuelve negativo.

Donde $r > 0$, $K > 0$ el valor A se encuentra entre 0 y K , es decir $0 < A < K$, y depende de la especie; sin embargo, en la mayoría de los casos se aproxima más a 0 que a K [40].

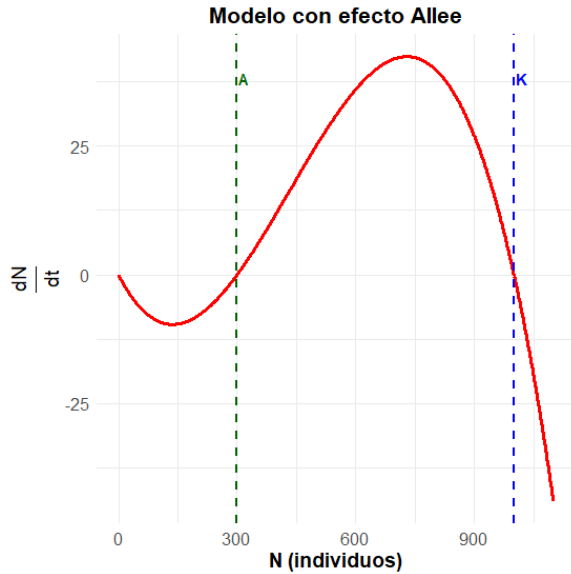


Figura 2.7: Representación gráfica de la tasa de crecimiento del modelo con efecto Allee. El umbral de Allee A y la capacidad de carga K determinan los tres puntos de equilibrio del sistema, delimitando las regiones donde la población disminuye o aumenta en función de su tamaño.

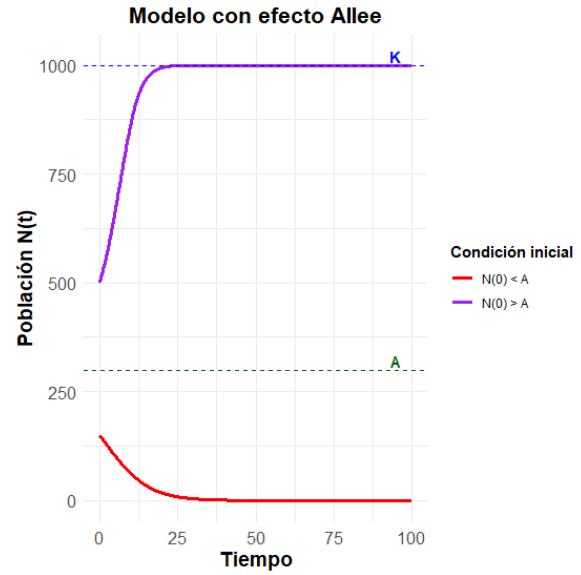


Figura 2.8: Evolución temporal de la población bajo el modelo con efecto Allee para dos condiciones iniciales distintas. Cuando la población inicial satisface $N(0) < A$, la tasa de crecimiento permanece negativa y la población disminuye hasta la extinción (color rojo). En contraste, si $N(0) > A$, la población supera el umbral crítico de Allee y crece hasta aproximarse asintóticamente a la capacidad de carga K (color morado). Las líneas horizontales punteadas representan el umbral de Allee A y la capacidad de carga K , respectivamente, ilustrando la dependencia de la dinámica poblacional respecto al tamaño inicial de la población.

Equilibrios

Sea

$$g(N) = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(\frac{N}{A} - 1\right).$$

Al resolver $g(N) = 0$. Obtenemos:

$$N = 0, \quad 1 - \frac{N}{K} = 0 \Rightarrow N = K, \quad \frac{N}{A} - 1 = 0 \Rightarrow N = A.$$

Por tanto los equilibrios son

$$N^* = 0, \quad N^* = A, \quad N^* = K.$$

Verificación de estabilidad

Para aplicar el Teorema 2.2.2, necesitamos $g'(N)$. Es conveniente derivar usando la regla del producto; para simplicidad denotamos

$$g(N) = r N h(N), \quad h(N) = \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(\frac{N}{A} - 1\right).$$

Entonces

$$g'(N) = r \left(1 \cdot h(N) + N \cdot h'(N)\right).$$

Calculemos $h'(N)$. Primero desarrollamos $h(N)$:

$$h(N) = \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(\frac{N}{A} - 1\right) = -1 + \frac{N}{A} + \frac{N}{K} - \frac{N^2}{AK}.$$

Derivando:

$$h'(N) = \frac{1}{A} + \frac{1}{K} - \frac{2N}{AK}.$$

Por tanto

$$g'(N) = r \left[h(N) + N \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{K} - \frac{2N}{AK} \right) \right].$$

Es decir

$$g'(N) = r \left[-1 + \frac{N}{A} + \frac{N}{K} - \frac{N^2}{AK} + N \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{K} - \frac{2N}{AK} \right) \right].$$

Ahora evaluamos en cada equilibrio.

En $N^* = 0$:

$$h(0) = (1 - 0)(0 - 1) = 1 \cdot (-1) = -1.$$

Entonces

$$g'(0) = r(h(0) + 0 \cdot h'(0)) = r(-1) = -r < 0.$$

Así, por el Teorema 2.2.2, $N^* = 0$ es *linealmente asintóticamente estable* (extinción) cuando $r > 0$.

En $N^* = A$: Primero observamos que el factor $(N/A - 1)$ se anula en $N = A$, por lo que $h(A) = 0$. Entonces

$$g'(A) = r[h(A) + Ah'(A)] = r \left[0 + A \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{K} - \frac{2A}{AK} \right) \right].$$

Simplificando:

$$g'(A) = r \left[1 + \frac{A}{K} - \frac{2A^2}{AK} \right] = r \left[1 + \frac{A}{K} - \frac{2A}{K} \right] = r \left(1 - \frac{A}{K} \right).$$

Dado que asumimos $0 < A < K$, se tiene $1 - \frac{A}{K} > 0$, y así

$$g'(A) = r \left(1 - \frac{A}{K} \right) > 0.$$

Por el Teorema 2.2.2, $N^* = A$ es *inestable*.

En $N^* = K$: Similarmente, en $N = K$ el factor $(1 - \frac{N}{K})$ se anula, así $h(K) = 0$ y

$$g'(K) = r \left[0 + K \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{K} - \frac{2K}{AK} \right) \right] = r \left[K \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{K} - \frac{2}{A} \right) \right]$$

(sustituyendo $\frac{2K}{AK} = \frac{2}{A}$). Simplificando:

$$g'(K) = r \left[K \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{A} - \frac{2}{A} \right) \right] = r \left[1 + \frac{K}{A} - \frac{2K}{A} \right] = r \left(1 - \frac{K}{A} \right).$$

Aquí conviene revisar el signo: si $A < K$ entonces $\frac{K}{A} > 1$ y $1 - \frac{K}{A} < 0$. Por tanto

$$g'(K) = r \left(1 - \frac{K}{A} \right) < 0 \quad (\text{cuando } 0 < A < K).$$

Así $N^* = K$ es *linealmente asintóticamente estable*.

Por lo tanto, bajo la hipótesis $0 < A < K$ y $r > 0$:

- $N^* = 0$ es linealmente asintóticamente estable (atractor local).
- $N^* = A$ es inestable (umbral crítico).
- $N^* = K$ es linealmente asintóticamente estable (Este punto de equilibrio actúa como un *atractor de gran tamaño*, ya que las trayectorias del sistema tienden hacia él desde un amplio rango de condiciones iniciales.).

Ecológicamente esto significa que si la población cae por debajo del umbral A tenderá hacia la extinción; si está por encima de A puede ascender hacia la capacidad de carga K . Cabe destacar que, en el modelo de Allee, una perturbación que reduzca la población por debajo del umbral A provoca que la tasa de crecimiento $\frac{dN}{dt}$ se torne negativa. En consecuencia, la población continúa decreciendo hasta alcanzar la extinción ($N = 0$), lo que evidencia la importancia del umbral de Allee como tamaño mínimo viable para la supervivencia de la especie.

2.3.4. Aplicaciones del efecto Allee en conservación y manejo poblacional

La formulación matemática del efecto Allee permite comprender cómo las poblaciones pueden enfrentarse a riesgos de extinción cuando su tamaño desciende por debajo de un umbral crítico. Este principio no sólo tiene implicaciones teóricas, sino también prácticas en la conservación y el manejo de especies. Diversos estudios han explorado cómo el efecto Allee influye en la dinámica poblacional y en la eficacia de estrategias de control biológico o erradicación de especies invasoras.

El **efecto Allee** y la **dinámica estocástica** afectan la supervivencia o desaparición de poblaciones pequeñas. Se demostró que, si los niveles de densidad poblacional se encuentran por debajo de un umbral crítico, la tasa de crecimiento se torna negativa lo cual puede llevar a la extinción incluso cuando las condiciones del medio ambiente son favorables.

Asimismo, la diversidad demográfica y ambiental incrementa la probabilidad de extinción, puesto que mínimas oscilaciones pueden llevar a la población por debajo de ese umbral. Liebhold y Bascompte (2003), mediante modelos matemáticos aplicados a poblaciones de la Polilla Gitana (*Lymantria dispar*), determinaron que el efecto Allee, junto con las variaciones y cambios inesperados en el ambiente son elementos cruciales para comprender la dinámica de extinción y que tan efectivas son las tácticas de gestión poblacional. En este sentido, **la comprensión del efecto Allee también resulta fundamental en programas de erradicación de especies invasoras**, pues al reducir su densidad por debajo del umbral crítico puede provocar el colapso natural de la población, provocando su eliminación local [22].

A través de la teoría de conjuntos difusos, Amarti et al. (2018) desarrollaron una versión modificada de la ecuación logística que incluye el efecto Allee y la incertidumbre en el medio ambiente. Este modelo tiene en cuenta parámetros difusos, como la tasa de crecimiento, el umbral crítico y la capacidad de carga; estos son expresados mediante cifras triangulares difusas. Los resultados revelaron que las poblaciones se expanden hasta la capacidad de carga solamente cuando el tamaño inicial excede el umbral de Allee, pero si están por debajo de este límite, tienden a extinguirse. Los parámetros difusos facilitan una representación más realista de la variabilidad ecológica, lo que resulta útil para estimar si las especies pueden o no sobrevivir en condiciones ambientales inciertas [3].

En vez de modelos puramente fenomenológicos, Dos Santos, Ribeiro y Martínez (2015) sugirieron modelos del efecto Allee fundamentados en principios físicos. Determinaron una conexión entre la conducta macroscópica de la población, que se expresa a través de la tasa de crecimiento per cápita $G(N)$, y las interacciones microscópicas de los individuos, como son la cooperación y la competencia con base en la distancia.

El modelo supone que los individuos:

1. Colaboran con sus vecinos más próximos,
2. Compiten con individuos a distancias intermedias, y
3. No les importa los individuos que está lejos.

Esta metodología demostró que el efecto Allee puede surgir de manera natural a partir de las interacciones espaciales, sin que sea preciso imponerlo de forma artificial. Asimismo, los autores sugirieron versiones modificadas de los modelos de Hassell y Ricker que incluyen la competencia y la cooperación a escalas espaciales diversas. Estos modelos ayudan a entender mejor el paso del crecimiento cooperativo a la extinción de una población y brindan un fundamento teórico más firme para examinar dinámicas poblacionales reales, en particular las que han sido impactadas por la fragmentación del hábitat o una densidad baja [16].

Utilizando un modelo de *reacción-difusión*, la investigación de Keya, Kamrujjaman e Islam examinó el impacto que tiene la densidad poblacional en la dinámica de especies bajo efectos Allee tanto fuertes como débiles. Los autores demostraron que, en casos de baja densidad, pueden ocurrir dos situaciones:

1. Un **efecto Allee débil**, en el que la población tiene la capacidad de sobrevivir incluso en algunos dominios espaciales, y

2. Un **efecto Allee fuerte**, donde la tasa de crecimiento se torna negativa independientemente de las condiciones del medio ambiente, lo que conduce a la extinción.

El modelo incluyó elementos como el umbral de Allee (M), la tasa intrínseca de crecimiento (r), la capacidad de carga (K) y la migración lo que evidencia que hay un punto de bifurcación crucial después del cual las poblaciones dejan de tener soluciones estables y positivas. El análisis también investigó el efecto que tiene la extracción o cosecha sobre las poblaciones con efecto Allee. Se determinó que una extracción excesiva, es decir, la eliminación de individuos a una velocidad mayor a la que la población puede reponerse de manera natural, puede acelerar el proceso de extinción incluso cuando haya un efecto Allee débil. Estos resultados son significativos en lo que se refiere a la gestión de especies amenazadas porque facilitan el entendimiento de cómo la densidad y la dispersión impactan su continuidad o extinción [21].

Aplicación del efecto Allee en la cotorra argentina

El proceso de introducción, asentamiento y expansión de la cotorra argentina (*Myiopsitta monachus*) en México ocurrió principalmente a través del comercio de aves de compañía durante las décadas de 1980 y 1990. Posteriormente, las liberaciones intencionales y los escapes accidentales favorecieron el establecimiento de poblaciones silvestres en distintas regiones del país.

Se le atribuye a su éxito como invasor debido a su alta capacidad de adaptación a los entornos periurbanos y urbanos, su comportamiento cooperativo y social, así como a su gran tasa de reproducción. La edificación de nidos permanentes en comunidad brinda resguardo contra las inclemencias del clima y los depredadores, posibilitando la reproducción a lo largo de todo el año. Además, su expansión se ve favorecida por la disponibilidad de recursos para alimentarse y la falta de depredadores naturales. Esto genera efectos económicos y ecológicos de la invasión, entre los que se incluyen el deterioro a cultivos agrícolas, los perjuicios a la infraestructura eléctrica y la competencia con aves nativas por lugares donde anidar y alimentarse. Sin embargo, todavía no se han puesto en práctica en México estrategias sistemáticas para el control o la gestión poblacional.

La investigación destaca la relevancia de tomar medidas durante las fases iniciales de la invasión, antes de que las poblaciones alcancen un tamaño crítico que asegure su supervivencia. Este enfoque está directamente vinculado con el modelo del efecto Allee, ya que mantener las poblaciones por debajo del umbral puede impedir su crecimiento y hacer más fácil la regulación de la especie invasora [27].

2.3.5. Reintroducciones de psitácidos y efecto Allee

White et al. (2021) examinaron los factores biológicos y metodológicos que más influyen en el éxito o el fracaso de las reintroducciones en psitácidos, utilizando como modelo las iniciativas de conservación de la cotorra puertorriqueña (*Amazona vittata*). Los autores subrayan la relevancia de disminuir el efecto Allee, es decir, la disminución en el ritmo de crecimiento poblacional cuando el tamaño del grupo o la densidad son excesivamente bajos. Esta circunstancia puede poner en peligro la reproducción y supervivencia de especies sociales durante las fases tempranas de establecimiento [36].

Hallazgos principales: Los autores evaluaron cuatro estrategias de liberación de cotorras criadas en cautiverio entre 2000 y 2020:

1. **Liberación tradicional:** Grupos pequeños (15–20 individuos) sin apoyo posterior. Los resultados obtenidos fueron: baja supervivencia (41 %) y ausencia de reproducción.
2. **Liberación de precisión:** Liberación de solo dos individuos cerca de nidos silvestres. Los resultados obtenidos fueron: baja fidelidad al sitio (22–28 %) y sin reproducción.
3. **Liberación suave tipo A:** Grupos medianos con aclimatación y alimentación suplementaria. Los resultados obtenidos fueron: alta cohesión (100 %), 64 % de supervivencia y 18 % de reproducción exitosa.
4. **Liberación suave tipo B:** Liberaciones en instalaciones con más de 200 cotorras cautivas cercanas. Los resultados obtenidos fueron: supervivencia del 68 %, fidelidad del 67 % y reproducción inmediata (25 % en menos de dos meses).

Condiciones gregarias y desafíos ecológicos:

De acuerdo con White et al. (2021), los efectos Allee no solo afectan a poblaciones en declive, sino que también pueden presentarse durante la fase de establecimiento de poblaciones reintroducidas, antes de que estas alcancen un tamaño sostenible. Debido a que la mayoría de los psitácidos son especies altamente sociales y gregarias, las reintroducciones enfrentan retos numéricos, conductuales y metodológicos para evitar los efectos Allee iniciales. Entre los desafíos más comunes se encuentran:

- La dispersión excesiva o prematura del área de liberación.
- La dificultad para mantener la cohesión grupal.
- La baja supervivencia individual.
- El retraso en la reproducción postliberación.

Si no se identifican y gestionan apropiadamente estos factores, es posible que los programas resulten en fracaso y que los recursos sean desperdiciados. Por lo tanto, las estrategias de gestión más eficaces se clasifican en tres grupos:

1. Gestión del tamaño y la composición de los grupos liberados.
2. Disminución de la dispersión y mortalidad después de la liberación; y
3. Medidas directas para disminuir los efectos Allee, como la regulación de depredadores y el suministro adicional de comida.

Implicaciones ecológicas. Los hallazgos indican que la supervivencia y la reproducción aumentan de manera notable cuando:

- El tamaño del grupo liberado aumenta debido al fenómeno de la “masa crítica”.

- La presencia de miembros de la misma especie en el lugar ayuda a detectar a los depredadores y a fortalecer la cohesión social.
- Se implementan estrategias que promueven la fidelidad al sitio y la formación de parejas reproductivas.

Valor numérico del umbral de Allee: Aunque no se reporta un valor exacto, el estudio estima un umbral social y demográfico para la cotorra puertorriqueña en **más de 50 individuos**, cifra mínima necesaria para mantener la reproducción sostenida. Se observó un incremento en la tasa de mortalidad y una disminución en la tasa de reproducción en poblaciones con menos individuos que esta cifra, lo cual evidencia el efecto Allee demográfico.

Relevancia para la cotorra serrana occidental: El artículo cita los intentos de reintroducción de la especie en Arizona [33] como un ejemplo clásico donde se observó una “masa crítica” de grupo necesaria para evitar depredaciones y mantener la cohesión social. La ausencia de dicho tamaño mínimo contribuyó al fracaso del proyecto, lo que constituye una evidencia empírica de un efecto Allee fuerte en esta especie [36].

En síntesis, de acuerdo con los resultados y discusiones de White et al. (2021), las estrategias más exitosas para minimizar los efectos Allee en psitácidos son aquellas que:

1. Aseguran grupos de liberación numerosos.
2. Mantienen proximidad con otros individuos de la misma especie durante y después de la liberación.
3. Proveen apoyo alimenticio y refugio.
4. Sincronizan las liberaciones con la temporada reproductiva.

Estas medidas reducen la vulnerabilidad inicial al efecto Allee y aumentan las probabilidades de establecimiento exitoso de poblaciones reintroducidas.

2.3.6. Reintroducción de la cotorra serrana occidental en Arizona

El intento de reintroducción de la cotorra serrana occidental (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*) en el sureste de Arizona fue uno de los proyectos de conservación más ambiciosos y, al mismo tiempo, que nos dejó una lección muy importante en la historia en la conservación de psitácidos. El programa fue desarrollado entre 1986 y 1993 por el *U.S. Fish and Wildlife Service* y el *Arizona Game and Fish Department*, buscó restablecer la especie en parte de su antigua área de distribución, de la cual había desaparecido desde inicios del siglo XX [33].

Diversas fuentes históricas coinciden en que nuestra especie de estudio no fue una residente establecida en los Estados Unidos, sino una visitante ocasional procedente del norte de México. Las observaciones de grandes bandadas al norte de la frontera eran irregulares y no existen registros de reproducción en territorio estadounidense, lo que sugiere que los individuos llegaban de manera esporádica, posiblemente en respuesta a la disponibilidad de piñones o a variaciones estacionales en su área de distribución [33].

La desaparición de la especie en los Estados Unidos no se debió principalmente a la pérdida de hábitat, sino a la caza excesiva. Aunque atribuyeron su desaparición a la deforestación de los bosques de pino en Sonora y Chihuahua, la evidencia indica que la persecución directa fue el factor determinante. Los primeros registros ornitológicos mencionan que la mayoría de los grupos observados en Arizona fueron abatidos: por ejemplo, aproximadamente cien de trescientos individuos vistos en Pinery Canyon (montañas Chiricahua) entre 1917 y 1918 fueron cazados [33].

La especie fue cazada de manera sistemática, según corroboró el guardabosques Ralph Morrow, que vivió en las montañas Chiricahua desde 1903 hasta la década de los setenta. En su juventud, él mató decenas de ejemplares. La cotorra serrana occidental era un animal social, ruidoso y relativamente manso. Debido a esto, probablemente fue particularmente susceptible a la caza, lo que llevó a su extinción local en los inicios del siglo XX [33].

Número de individuos liberados

Durante el proyecto se liberaron aproximadamente **88 individuos** en total, distribuidos en diferentes cohortes entre 1986 y 1993. Sesenta y cinco de estas aves, obtenidas principalmente como confiscaciones por parte del U.S. Fish and Wildlife Service, se creía que eran individuos originalmente capturados en estado silvestre en México.

De esos individuos, cuatro aparentemente eran juveniles al momento de ser recibidos, con base en el tamaño de sus gónadas o en la coloración parcialmente blanca de sus picos.

Las otras 23 cotorras liberadas habían sido criadas en cautiverio: 16 fueron criadas por sus padres y 7 fueron criadas a mano. La mayoría de las aves procedían de programas de cría en cautiverio de zoológicos estadounidenses, mientras que unas pocas provenían de confiscaciones del comercio ilegal. Las primeras liberaciones, realizadas entre 1986 y 1989, consistieron en grupos pequeños (10–20 aves), seguidas de liberaciones mayores (hasta 30 individuos) en los últimos años del proyecto [33].

Desarrollo del proyecto

Las liberaciones se realizaron en la zona montañosa de Chiricahua, ubicada en el sureste de Arizona. Este lugar fue elegido por su semejanza ecológica con los bosques templados de pino-encino de la Sierra Madre Occidental, que es el hábitat nativo de la especie. Para que las aves se familiarizaran con el medio ambiente antes de ser liberadas, se mantuvieron anteriormente en jaulas de aclimatación. Después, se hizo un seguimiento de ellas a través de radiotransmisores, anillas y observaciones directas con el fin de registrar su comportamiento, dispersión y supervivencia [33].

Causas del fracaso

A pesar de los esfuerzos, el proyecto enfrentó múltiples dificultades que condujeron a su fracaso. Las principales causas identificadas fueron:

1. **Depredación alta:** Los ataques de aves rapaces, sobre todo los halcones peregrinos

(*Falco peregrinus*) y los gavilanes (*Accipiter striatus*), causaron la mayor parte de las muertes confirmadas. Las cotorras no tenían experiencia antidepredadora y eran presas sencillas, ya que habían sido criadas en cautiverio.

2. **Debilidades en la cohesión del grupo:** Después de ser liberados, los individuos solían dispersarse con rapidez, lo que resultaba en la pérdida de la estructura social típica de la especie. Esto disminuyó la vigilancia en grupo y la habilidad para reaccionar frente a depredadores.
3. **Falta de poblaciones silvestres residentes:** El aprendizaje y la integración se volvieron difíciles debido a que no había cotorras establecidas en el área que pudieran funcionar como un grupo de apoyo social o modelo.
4. **Deficiencia de aptitudes para la supervivencia:** Algunas aves no lograron reconocer fuentes naturales de refugio y alimento debido a su larga estancia en cautiverio.
5. **Condiciones del hábitat:** A pesar de que la zona elegida mostraba semejanzas con los bosques mexicanos, la variedad de especies de pinos, es decir la base alimenticia era más reducida, lo cual restringió la disponibilidad de recursos.
6. **Restricciones logísticas:** El seguimiento se tornó más difícil debido a la pérdida de radiotransmisores y a la dispersión de los individuos fuera del rango de monitoreo. Ninguna cotorra logró reproducirse con éxito [33].

Durante las evaluaciones posteriores a las liberaciones, se registraron diversas causas de mortalidad en las cotorras reintroducidas. Una necropsia practicada a uno de los ejemplares reveló una acumulación considerable de mucosidad en la hendidura coanal, la cual, tras su cultivo bacteriano, mostró un crecimiento abundante de *Pasteurella cholerae avium*. Según Snyder1994 sostiene que esta infección bacteriana pudo haber sido un motivo más probable de fallecimiento que el ataque de un halcón, al cual se le había atribuido en primera instancia la muerte del individuo. Otras cotorras que murieron por depredación fueron catalogadas como individuos rezagados; no obstante, no se obtuvieron cadáveres en cantidad suficiente para llevar a cabo necropsias definitivas. No se sabe si la bacteria hallada provino del cautiverio o si fue contraída más tarde en el medio silvestre después de la liberación, lo que demuestra la relevancia de las condiciones sanitarias antes de la reintroducción y su potencial efecto en la supervivencia de los individuos liberados [33].

Resultados y lecciones aprendidas

Menos del 15 % de las aves liberadas sobrevivieron más de un año, y ninguna formó pareja reproductiva ni estableció territorio. El proyecto fue oficialmente cancelado en 1993. Estas pérdidas se atribuyen a un conjunto de factores que reflejan un efecto Allee fuerte: los grupos liberados eran demasiado pequeños para mantener la cohesión social y la defensa colectiva que caracteriza a las poblaciones naturales.

Este caso evidencia que las aves criadas en cautividad, que están acostumbradas a la presencia humana y no han aprendido nada de manera natural, atraviesan un cambio muy complicado cuando son liberadas. Por lo tanto, los programas de reintroducción que se implementen en el futuro tienen que incluir:

- Entrenamiento de adaptación conductual y antidepredador antes del momento de la liberación.
- Liberaciones con grandes grupos para promover la cohesión social.
- Elección de lugares con recursos alimentarios apropiados.
- Apoyo posterior a la liberación y supervisión que se extiende en el tiempo [33].

A pesar del fracaso aparente, la experiencia en Arizona aportó valiosas lecciones acerca de la importancia de tener en cuenta el comportamiento gregario y los límites poblacionales cruciales al diseñar estrategias para conservar a los psitácidos. La liberación de grupos pequeños resultó en una tasa de supervivencia que no fue suficiente para exceder el umbral mínimo de viabilidad.

En el marco de la conservación de la cotorra serrana occidental (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*), estos modelos pueden ser fundamentales para entender los peligros vinculados a la reducción demográfica. La disminución de individuos reproductivos, la caza ilegal o la pérdida de hábitat son elementos que podrían poner a la especie por debajo del umbral de Allee, poniendo en peligro su recuperación natural y aumentando el riesgo de extinción local.

Discusión crítica

Después de realizar una revisión exhaustiva de la literatura, notamos que existe una convergencia clara en torno a las siguientes ideas principales: los impactos del cambio climático y la pérdida de hábitat en la distribución de las aves, y la importancia de comprender las dinámicas poblacionales mediante modelos matemáticos que integren factores como la densidad y los efectos Allee. Sin embargo, también identificamos vacíos en la información recabada, así como retos metodológicos que justifican la necesidad de realizar estudios aplicados a especies particulares, como la cotorra serrana occidental.

Los autores coinciden en que el cambio climático está modificando el desplazamiento de las aves hacia zonas más elevadas o reduciendo su distribución. Aunque este patrón se ha observado a nivel global, su intensidad y consecuencias varían entre especies y regiones, lo que resalta la necesidad de realizar estudios específicos en especies de vida larga o distribuciones restringidas, como los psitácidos de montaña. De igual manera, la evidencia que posiciona a las aves como bioindicadores muestra su utilidad para detectar cambios ambientales tempranos; no obstante, la mayoría de estos estudios se han centrado en comunidades, mientras que dinámicas poblacionales como la reproducción o la supervivencia juvenil permanecen menos exploradas.

Desde un punto de vista matemático, es evidente un cambio histórico desde los modelos tradicionales de Malthus y Verhulst a otros más complejos que incluyen procesos estocásticos y ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto subraya la relevancia de tener en cuenta mecanismos realistas al predecir el futuro de las poblaciones. La influencia del efecto Allee se puede observar desde diferentes perspectivas gracias a las investigaciones de [22], [3], [16] y [21]: la primera a través de la dinámica estocástica, la segunda incluyendo incertidumbre ambiental mediante conjuntos difusos, la tercera basándose en interacciones espaciales y la cuarta evaluando escenarios de cosecha y difusión.

En suma, estas investigaciones demuestran que el efecto Allee no es un fenómeno raro; al contrario, se presenta regularmente en especies que viven en grupos, dependen del comportamiento social o son impactadas por acciones humanas como la caza o la captura. Esto significa que, cuando las poblaciones son muy reducidas, tienen más problemas para sobrevivir.

Si los modelos no toman en cuenta este fenómeno, pueden producir predicciones erróneas. Por ejemplo, podrían indicar que una población se recuperará cuando lo cierto es que podría extinguirse porque ya está por debajo del tamaño mínimo requerido.

Cuando se compara esta evidencia con la información disponible sobre la cotorra serrana occidental, aparece una cuestión crucial: hay claros indicios de que esta especie sufre efectos Allee demográficos y sociales relacionados con su elevada gregariedad. La dinámica poblacional en especies como la cotorra serrana está fuertemente relacionada con su comportamiento social, ya que dependen de refugios comunales y una reducción en el número de los individuos reproductivos puede tener un impacto severo sobre la estabilidad y la recuperación de la población.

Un caso evidente es el intento de reintroducción que fracasó en Arizona: la dispersión temprana, la escasa cohesión social, grupos demasiado pequeños y una depredación alta llevaron a que no se pudiera alcanzar un tamaño mínimo viable. Este caso coincide directamente con lo que los modelos teóricos predijeron, lo que refuerza la idea de que para las especies muy sociales, la estructura y densidad del grupo son tan fundamentales como la disponibilidad de hábitat.

A pesar de la abundancia de información empírica y teórica, todavía existen vacíos significativos. Aunque se han llevado a cabo investigaciones sólidas sobre la distribución de aves y el cambio climático, son escasas las que incluyen en un solo modelo predictivo tanto interacciones sociales como la extracción ilegal de individuos, los efectos Allee y procesos demográficos integrales.

La cotorra serrana occidental necesita modelos basados en sistemas dinámicos que incorporen de manera explícita el impacto Allee, las modificaciones en la tasa de crecimiento poblacional y la pérdida de hábitat bajo diversas situaciones de cambio climático, según la combinación de datos ecológicos, biológicos y matemáticos. Para analizar las dinámicas poblacionales, es indispensable el empleo de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto se debe a que posibilita el análisis de los puntos de equilibrio y la identificación de las circunstancias en las que la población puede mantenerse o desaparecer. Estos elementos, además de robustecer la comprensión teórica de cómo varía la población de la especie de estudio, proporcionan instrumentos esenciales para tomar decisiones que estén dirigidas a preservar psitácidos en peligro.

El modelo

Se propone el siguiente modelo de ecuaciones diferenciales:

Modelo propuesto

Se plantea el siguiente modelo para representar la tasa de cambio poblacional $N(t)$ de la cotorra serrana occidental (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*):

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[r_0 \left(1 - \frac{N(t)}{K_0 e^{-ct}} \right) \right] N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K_0} \right) - \left[m_0 \cdot \frac{N(t)}{1 + \beta t} \right] - 0.1 e^{-r_0 t} N(t) \quad (3.1)$$

Donde:

- r_0 : Tasa intrínseca de crecimiento.
- K_0 : Capacidad de carga inicial.
- c : Tasa de disminución de la capacidad de carga por pérdida de hábitat.
- m_0 : Mortalidad natural media anual.
- β : Amortiguación de mortalidad con el tiempo, posiblemente por intervención o adaptación.

En esta propuesta, el primer sumando es similar al que se presenta en el efecto Allee, donde del término con la exponencial tiene un comportamiento como el propuesto por Ricker, que es un modelo matemático utilizado en ecología para describir la dinámica de poblaciones con generaciones discretas y muestra cómo el tamaño de una población en el futuro depende de la población actual, incorporando el crecimiento exponencial y la mortalidad. Esta parte se puede plantear en su versión de tiempo continuo transformando su estructura para representar la tasa de cambio instantánea.

El segundo sumando representa el decrecimiento de la población asociado a la adaptación a un nuevo hábitat y a la mortalidad natural promedio de los individuos, la cual se modula mediante el término dependiente del tiempo $1 + \beta t$, reflejando una posible disminución progresiva de la mortalidad debido a procesos de adaptación, intervención o mejora en las condiciones ambientales.

El tercer término incorpora un efecto adicional de mortalidad dependiente del tiempo, el cual decrece exponencialmente y puede interpretarse como la reducción de una presión externa inicial fuerte que disminuye exponencialmente a lo largo del tiempo, asociada a factores de estrés iniciales como disturbios ambientales o presión antropogénica, cuya intensidad se atenúa conforme el sistema evoluciona.

En conjunto, el modelo propuesto integra procesos de crecimiento no lineal, regulación por capacidad de carga dependiente del tiempo y una mortalidad natural modulada temporalmente y una mortalidad externa transitoria decreciente, lo que permite representar de forma más realista la dinámica poblacional bajo escenarios ambientales cambiantes, particularmente aquellos asociados al cambio climático.

3.1. Detalles del modelo

El modelo está formado por tres contribuciones principales que representan distintos procesos biológicos que afectan la dinámica poblacional de la cotorra serrana occidental.

El primer término, $\left[r_0 \left(1 - \frac{N(t)}{K_0 e^{-ct}} \right) \right] N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K_0} \right)$ describe el crecimiento de la población bajo una regulación dependiente de la densidad. En esta expresión, el factor $(N(t))$ representa que la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño poblacional, mientras que el término $\left(1 - \frac{N(t)}{K_0} \right)$ incorpora la limitación logística clásica asociada con la capacidad de carga inicial del ecosistema.

Por otra parte, el factor $\left(1 - \frac{N(t)}{K_0 e^{-ct}} \right)$ considera una capacidad de carga dinámica ($K(t) = K_0 e^{-ct}$), la cual disminuye con el tiempo debido a la degradación del hábitat. En este contexto, el parámetro (c).

El parámetro (c) representa la tasa de pérdida de capacidad de carga ocasionada por procesos como la deforestación, la degradación ambiental y el cambio climático. En particular, se tiene que:

- Si $c > 0$, entonces $K(t) = K_0 e^{-ct}$ decrece con el tiempo, lo que representa una pérdida progresiva de hábitat.
- Si $c = 0$, la capacidad de carga permanece constante, recuperando el caso logístico clásico.
- Si $c < 0$, el modelo describe un escenario en el que la capacidad de carga aumenta con el tiempo, lo cual podría interpretarse como procesos de recuperación o mejora del hábitat.

De esta manera, el crecimiento poblacional se encuentra influenciado tanto por las limitaciones propias del ecosistema como por el deterioro progresivo de las condiciones ambientales, haciendo que el ambiente pueda sostener cada vez menos individuos.

El segundo término, $\left[-\frac{m_0 N(t)}{1 + \beta t} \right]$ representa la mortalidad natural de la población la cual varía en el tiempo mediante el factor $(1 + \beta t)$.

En este sentido, el parámetro (β) determina el comportamiento del segundo término de mortalidad. En particular, se tiene que:

- Si $\beta > 0$, la mortalidad efectiva disminuye progresivamente con el tiempo, lo cual puede interpretarse como un efecto de mejora en las condiciones de supervivencia asociado a la implementación de medidas de conservación, tales como el establecimiento de áreas naturales protegidas, la aplicación de normas de protección ambiental o acciones de manejo del hábitat.
- Si $\beta = 0$, el término se reduce a $m_0 N(t)$, lo que corresponde a una mortalidad proporcional constante, es decir, cada individuo presenta el mismo riesgo de muerte en cualquier instante.
- Si $\beta < 0$, la mortalidad aumenta con el tiempo, lo que puede asociarse a un deterioro progresivo de las condiciones ambientales o de supervivencia.

En todos los casos, el modelo se restringe al intervalo de tiempo en el que $1 + \beta t > 0$, con el fin de evitar singularidades y garantizar la validez matemática de la expresión.

Es importante señalar que el término $(\frac{m_0 N(t)}{1 + \beta t})$ introduce una restricción en el dominio del modelo, ya que la expresión no está definida cuando $(1 + \beta t = 0)$, es decir, en $(t = -\frac{1}{\beta})$. En consecuencia, el sistema solo es válido en los intervalos donde $(1 + \beta t \neq 0)$. En particular, si $(\beta < 0)$, esta singularidad puede ocurrir para tiempos positivos, lo que restringe el intervalo de validez del modelo. Además, el cambio de signo de $(1 + \beta t)$ puede dar lugar a interpretaciones no biológicas del término de mortalidad, por lo que el análisis se limita a las regiones donde dicho factor permanece positivo.

Finalmente, el término $[-0.1e^{-r_0 t} N(t)]$ introduce una pérdida adicional proporcional al tamaño poblacional cuyo efecto es más intenso al inicio del periodo de estudio y decrece exponencialmente con el tiempo. Este componente busca representar un impacto transitorio sobre la población que se amortigua gradualmente, de manera que su influencia disminuye conforme transcurre el tiempo.

Es importante señalar que, al considerar la anulación de los parámetros asociados a los mecanismos de variación temporal del modelo, es decir, $m_0 = 0$, $\beta = 0$ y $c = 0$, y tomando en cuenta que el término exponencial satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-r_0 t} = 0 \quad \text{para } r_0 > 0,$$

el modelo propuesto se reduce a

$$\frac{dN}{dt} = r_0 N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K_0}\right)^2. \quad (3.2)$$

Esta expresión se asemeja al modelo logístico clásico de Verhulst, el cual está dado por

$$\frac{dN}{dt} = r_0 N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K_0}\right), \quad (3.3)$$

sin embargo, en el modelo reducido el factor logístico aparece elevado al cuadrado. Esta modificación altera de manera significativa la dinámica del sistema, ya que en el modelo clásico el término $\left(1 - \frac{N}{K_0}\right)$ cambia de signo cuando $N > K_0$, lo que induce un crecimiento negativo y un retorno hacia la capacidad de carga. En contraste, al estar elevado al

cuadrado, dicho factor se mantiene siempre no negativo, de modo que la corrección por densidad no invierte el signo de la tasa de crecimiento.

En consecuencia, la regulación poblacional se vuelve más suave cerca de la capacidad de carga, ya que el término cuadrático evita el cambio de signo del crecimiento observado en el modelo logístico clásico. Esto hace que la transición alrededor de K_0 sea más gradual y que el sistema no presente un retorno tan directo de la población cuando esta supera dicha capacidad.

3.1.1. Análisis dimensional del modelo

El análisis dimensional es un método que se emplea para comprobar que las ecuaciones matemáticas sean dimensionalmente consistentes. Su propósito es comprobar que todos los términos de una expresión tengan las mismas unidades, con el fin de que las operaciones que se realizan entre ellos sean válidas desde el punto de vista matemático y biológico. En el contexto de los modelos poblacionales, el análisis dimensional efectuado nos permite asegurar que las variables y parámetros involucrados reflejan correctamente las magnitudes involucradas y que la ecuación propuesta describe de forma coherente la dinámica de la población. A continuación se procede al análisis dimensional del modelo desarrollado en este trabajo.

Denotemos $\theta = 0.1$ representa un coeficiente con unidades de $\text{año}^{-1} = \frac{1}{\text{año}}$

Puesto que $N(t)$ representa el número de individuos y t el tiempo medido en años, la derivada $\frac{dN}{dt}$ tiene unidades de

$$\left[\frac{dN}{dt} \right] = \frac{\text{individuos}}{\text{año}}.$$

Por lo tanto, cada término del lado derecho de la ecuación debe poseer las mismas unidades.

- El parámetro r_0 representa una tasa intrínseca de crecimiento, por lo que

$$[r_0] = \frac{1}{\text{año}}.$$

Además,

$$\frac{N(t)}{K_0 e^{-ct}}$$

es adimensional, ya que $N(t)$ y K_0 se miden en individuos y el término exponencial e^{-ct} también es adimensional. En consecuencia,

$$\left(1 - \frac{N(t)}{K_0 e^{-ct}} \right)$$

es adimensional.

De manera análoga,

$$\left(1 - \frac{N(t)}{K_0}\right)$$

también es adimensional.

Por tanto,

$$r_0 \left(1 - \frac{N(t)}{K_0 e^{-ct}}\right) N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K_0}\right)$$

tiene unidades

$$\frac{1}{\text{año}} \cdot 1 \cdot \text{individuos} \cdot 1 = \frac{\text{individuos}}{\text{año}}.$$

- Para el segundo término,

$$[m_0] = \frac{1}{\text{año}},$$

mientras que

$$1 + \beta t$$

debe ser adimensional. Por ello,

$$[\beta] = \frac{1}{\text{año}},$$

de modo que

$$[\beta t] = \frac{1}{\text{año}} \cdot \text{año} = 1.$$

Así,

$$\frac{m_0 N(t)}{1 + \beta t}$$

posee unidades

$$\frac{1}{\text{año}} \cdot \text{individuos} = \frac{\text{individuos}}{\text{año}}.$$

- En el último término,

$$e^{-r_0 t}$$

es adimensional, puesto que

$$[r_0 t] = \frac{1}{\text{año}} \cdot \text{año} = 1.$$

Si $\theta = 0.1$ tiene unidades de año^{-1} , entonces

$$\theta e^{-r_0 t} N(t)$$

tiene unidades

$$\frac{1}{\text{año}} \cdot 1 \cdot \text{individuos} = \frac{\text{individuos}}{\text{año}}.$$

Por consiguiente, todos los términos del lado derecho del modelo poseen unidades de individuos por año, lo que demuestra la consistencia dimensional de la ecuación diferencial propuesta.

Resultados

Parámetros para el análisis del modelo

Con el objetivo de estudiar el comportamiento dinámico del sistema propuesto, se fija un conjunto de valores paramétricos representativos de la dinámica ecológica de la cotorra serrana occidental. Estos valores permiten realizar el análisis numérico del modelo y no constituyen diferentes escenarios, sino una única configuración base del sistema, a partir de la cual se evalúa su evolución temporal.

Se considera un horizonte temporal de $t = 30$ años, correspondiente aproximadamente a tres generaciones de la especie (duración generacional promedio de 10.5 años).

- $r_0 = 0.15$: Tasa intrínseca de crecimiento poblacional.
- $K_0 = 6000$: Capacidad de carga inicial del sistema.
- $c = 0.02$: Tasa de degradación del hábitat.
- $m_0 = 0.05$: Mortalidad natural media anual.
- $\beta = 0.01$: Parámetro asociado a la variación temporal de la mortalidad.
- $N_0 = 2097$: Condición inicial de la población.

Interpretación de los parámetros del modelo

- **Población inicial $N_0 = 2097$:** Este valor representa el número estimado de individuos maduros al inicio del periodo de estudio. De acuerdo con los registros más recientes de la población de la cotorra serrana occidental, se calcula que existen aproximadamente 2,097 individuos distribuidos en distintas subpoblaciones. Por lo tanto, este valor se considera como la condición inicial $N(0) = N_0$ en el modelo, a partir de la cual se evalúa la dinámica poblacional. Este número también sirve como referencia para analizar la tendencia de crecimiento o disminución en función de los parámetros de capacidad de carga, mortalidad y pérdida de hábitat.
- **Tasa de crecimiento $r_0 = 0.15$:** Este valor representa una tasa de crecimiento moderada. En aves longevas y de baja fecundidad como la cotorra serrana occidental, los valores típicos de r oscilan entre 0.05 y 0.2. Se adopta un valor conservador considerando su biología reproductiva, caracterizada por baja frecuencia de reproducción y tamaño reducido de nidada.

- **Capacidad de carga inicial** $K_0 = 6000$: No existe un valor empírico establecido para la capacidad de carga de esta especie. Por ello, se utiliza un valor de referencia ecológicamente plausible, con el objetivo de representar la disponibilidad inicial de recursos y sitios de anidación. Este parámetro permite analizar la sensibilidad del modelo ante variaciones en la capacidad del ecosistema.
- **Tasa de degradación del hábitat** $c = 0.02$: Representa la pérdida anual de capacidad de carga por degradación ambiental, deforestación y cambio climático. Este valor es consistente con proyecciones de pérdida de hábitat del 25–70 % hacia el año 2090.
- **Tasa de mortalidad natural** $m_0 = 0.05$: Se considera una tasa de mortalidad anual moderada, acorde con especies silvestres que enfrentan depredación, enfermedades y amenazas humanas. La mortalidad es menor en adultos, pero puede incrementarse en etapas juveniles.
- **Factor de amortiguamiento de mortalidad** $\beta = 0.01$: Este parámetro representa variaciones graduales en la mortalidad asociadas a cambios en las condiciones de supervivencia, como medidas de conservación, manejo del hábitat o procesos de adaptación progresiva. Su efecto consiste en suavizar la variación temporal del término de mortalidad dentro del sistema.
- **Presión externa** $0.1e^{-r_0t}$: Este término representa una perturbación inicial sobre la población asociada a factores externos de origen antrópico y ambiental, tales como la caza o captura ilegal, la pérdida y fragmentación del hábitat, la expansión de actividades agrícolas y urbanas, la construcción de infraestructura, los incendios forestales inducidos y la perturbación directa de las áreas de anidación. La forma exponencial decreciente del término indica que dicho impacto disminuye progresivamente con el tiempo, reflejando su carácter transitorio dentro de la dinámica del sistema.

4.1. Análisis cualitativo del modelo no autónomo

4.1.1. Reescritura del modelo en forma polinómica cúbica

Con el propósito de extender al modelo propuesto la metodología de análisis empleada para el modelo logístico no autónomo presentada en [20], resulta conveniente reescribir el lado derecho de la ecuación diferencial como un polinomio de grado tres en la variable $N(t)$, cuyos coeficientes dependen explícitamente del tiempo. Esta representación facilita el estudio cualitativo del sistema y constituye una generalización natural del procedimiento utilizado en el caso cuadrático.

Primero, se simplifica el término dependiente de la capacidad de carga:

$$\frac{N(t)}{K_0 e^{-ct}} = \frac{N(t)e^{ct}}{K_0}$$

por lo que el modelo se reescribe como:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r_0 \left(1 - \frac{N(t)e^{ct}}{K_0}\right) N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K_0}\right) - \frac{m_0 N(t)}{1 + \beta t} - 0.1e^{-r_0 t} N(t) \quad (4.1)$$

A continuación, se desarrolla el producto:

$$\left(1 - \frac{N(t)e^{ct}}{K_0}\right) \left(1 - \frac{N(t)}{K_0}\right)$$

Aplicando la distributividad:

$$\begin{aligned} &= 1 \left(1 - \frac{N(t)}{K_0}\right) - \frac{N(t)e^{ct}}{K_0} \left(1 - \frac{N(t)}{K_0}\right) \\ &= 1 - \frac{N(t)}{K_0} - \frac{N(t)e^{ct}}{K_0} + \frac{N^2(t)e^{ct}}{K_0^2} \end{aligned}$$

Ahora se multiplica por $r_0 N(t)$:

$$\begin{aligned} &r_0 N(t) \left[1 - \frac{N(t)}{K_0} - \frac{N(t)e^{ct}}{K_0} + \frac{N^2(t)e^{ct}}{K_0^2}\right] \\ &= r_0 N(t) - \frac{r_0}{K_0} N^2(t) - \frac{r_0 e^{ct}}{K_0} N^2(t) + \frac{r_0 e^{ct}}{K_0^2} N^3(t) \end{aligned}$$

Sustituyendo nuevamente en el modelo original:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{r_0 e^{ct}}{K_0^2} N^3(t) - \frac{r_0}{K_0} N^2(t) - \frac{r_0 e^{ct}}{K_0} N^2(t) + r_0 N(t) - \frac{m_0 N(t)}{1 + \beta t} - 0.1e^{-r_0 t} N(t)$$

Agrupando términos semejantes:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{r_0 e^{ct}}{K_0^2} N^3(t) - \frac{r_0}{K_0} (1 + e^{ct}) N^2(t) + \left(r_0 - \frac{m_0}{1 + \beta t} - 0.1e^{-r_0 t}\right) N(t) \quad (4.2)$$

Finalmente, el modelo puede expresarse en la forma polinómica cúbica general:

$$\frac{dN(t)}{dt} = a(t)N^3(t) + b(t)N^2(t) + c(t)N(t) + d(t) \quad (4.3)$$

donde:

$$a(t) = \frac{r_0 e^{ct}}{K_0^2} \quad (4.4)$$

$$b(t) = -\frac{r_0}{K_0} (1 + e^{ct}) \quad (4.5)$$

$$c(t) = r_0 - \frac{m_0}{1 + \beta t} - 0.1e^{-r_0 t} \quad (4.6)$$

$$d(t) = 0 \quad (4.7)$$

Donde los parámetros biológicos se agrupan en coeficientes dependientes del tiempo. Definimos estos coeficientes como funciones por trozos sobre el dominio $t \in [0, \infty)$:

4.1.2. Definición de coeficientes

- **Coeficiente de saturación superior $a(t)$:**

$$a(t) = \begin{cases} \frac{r_0 e^{ct}}{K_0^2} & \text{para } t \in [0, \infty) \end{cases} \quad (4.8)$$

- **Coeficiente de resistencia ambiental $b(t)$:**

$$b(t) = \begin{cases} -\frac{r_0}{K_0} (1 + e^{ct}) & \text{para } t \in [0, \infty) \end{cases} \quad (4.9)$$

- **Coeficiente de crecimiento neto $c(t)$:**

$$c(t) = \begin{cases} r_0 - \frac{m_0}{1 + \beta t} - 0.1e^{-r_0 t} & \text{para } t \in [0, \infty) \end{cases} \quad (4.10)$$

- **Término de flujo constante $d(t)$:**

$$d(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \in [0, \infty) \end{cases} \quad (4.11)$$

4.1.3. Análisis de los puntos de equilibrio (no en el sentido clásico de equilibrio autónomo)

Siguiendo la metodología para sistemas no autónomos presentada en la literatura [20], extendemos el análisis de estabilidad al caso de una dinámica cúbica. Definimos la función:

$$\Phi(N, t) = a(t)N^3 + b(t)N^2 + c(t)N \quad (4.12)$$

Dado que los coeficientes dependen explícitamente del tiempo, los puntos de equilibrio instantáneos del sistema (no en el sentido clásico de equilibrio autónomo) se obtienen resolviendo

$$\Phi(N, t) = 0 \quad (4.13)$$

lo cual conduce a:

$$N(a(t)N^2 + b(t)N + c(t)) = 0 \quad (4.14)$$

Por lo tanto, el sistema posee un equilibrio trivial (no en el sentido clásico autónomo):

$$N_1(t) = 0 \quad (4.15)$$

el cual representa el estado de extinción poblacional.

Los otros dos equilibrios (no en el sentido clásico autónomo) se obtienen resolviendo la ecuación cuadrática

$$a(t)N^2 + b(t)N + c(t) = 0 \quad (4.16)$$

Aplicando la fórmula general, se obtiene:

$$N_2(t) = \frac{-b(t) - \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)}}{2a(t)} \quad (4.17)$$

$$N_3(t) = \frac{-b(t) + \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)}}{2a(t)} \quad (4.18)$$

La existencia de equilibrios reales adicionales depende del discriminante asociado al polinomio cuadrático:

$$\Delta(t) = b^2(t) - 4a(t)c(t) \quad (4.19)$$

Desarrollando los términos anteriores se obtiene

$$\Delta(t) = \frac{r_0^2}{K_0^2}(1 + e^{ct})^2 - \frac{4r_0e^{ct}}{K_0^2}c(t),$$

o, equivalentemente,

$$\Delta(t) = \frac{r_0}{K_0^2} [r_0(1 + e^{ct})^2 - 4e^{ct}c(t)] .$$

Esta expresión permite analizar directamente el signo del discriminante y, por consiguiente, la existencia de raíces reales adicionales del sistema.

Por tanto:

- Si $\Delta(t) > 0$, el sistema presenta tres raíces reales, correspondientes al equilibrio trivial $N_1(t) = 0$ y dos equilibrios adicionales $N_2(t)$ y $N_3(t)$.
- Si $\Delta(t) = 0$, los equilibrios no triviales coinciden, produciendo una raíz doble.

- Si $\Delta(t) < 0$, el polinomio cuadrático no posee raíces reales y el único equilibrio real del sistema es $N_1(t) = 0$.

En consecuencia, el número de equilibrios (no en el sentido clásico autónomo) biológicamente viables puede variar con el tiempo debido a la dependencia temporal de los coeficientes dinámicos del modelo.

Al sustituir los coeficientes dinámicos del modelo en la solución general de la ecuación cuadrática asociada, se obtiene una expresión explícita para los equilibrios temporales (no en el sentido clásico autónomo) del sistema.

$$N_{2,3}(t) = \frac{-b(t) \pm \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)}}{2a(t)} \quad (4.20)$$

Se obtiene:

$$N_{2,3}(t) = \frac{K_0}{2e^{ct}} \left[(1 + e^{ct}) \pm \sqrt{(1 + e^{ct})^2 - \frac{4e^{ct}c(t)}{r_0}} \right] \quad (4.21)$$

donde

$$c(t) = r_0 - \frac{m_0}{1 + \beta t} - 0.1e^{-r_0 t} \quad (4.22)$$

Obsérvese que el factor

$$\frac{K_0}{2e^{ct}}$$

es estrictamente positivo para todo $t \geq 0$, dado que $K_0 > 0$ y $e^{ct} > 0$. Además, con los parámetros considerados en este trabajo se verifica que

$$c(t) = r_0 - \frac{m_0}{1 + \beta t} - 0.1e^{-r_0 t} \geq 0,$$

con igualdad únicamente en $t = 0$. En consecuencia, la cantidad dentro de la raíz cuadrada satisface

$$(1 + e^{ct})^2 - \frac{4e^{ct}c(t)}{r_0} \leq (1 + e^{ct})^2, \quad \text{ya que } c(t) \geq 0.$$

Ahora usamos la propiedad que dice: si $0 \leq A \leq B$, entonces $\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$. Por tanto,

$$\sqrt{(1 + e^{ct})^2 - \frac{4e^{ct}c(t)}{r_0}} \leq \sqrt{(1 + e^{ct})^2}.$$

Como $1 + e^{ct} > 0$, se tiene que

$$\sqrt{(1 + e^{ct})^2} = 1 + e^{ct}.$$

Luego,

$$\sqrt{(1 + e^{ct})^2 - \frac{4e^{ct}c(t)}{r_0}} \leq 1 + e^{ct}.$$

En consecuencia,

$$(1 + e^{ct}) - \sqrt{(1 + e^{ct})^2 - \frac{4e^{ct}c(t)}{r_0}} \geq 0.$$

Finalmente, como el factor $\frac{K_0}{2e^{ct}} > 0$, se concluye que

$$N_2(t) \geq 0.$$

Por su parte, $N_3(t)$ también es no negativa, al corresponder al signo positivo de la fórmula cuadrática. Asimismo, para todo $t \geq 0$, se verifica que permanece no negativa bajo los parámetros considerados en el modelo. Por tanto, las raíces $N_2(t)$ y $N_3(t)$ poseen interpretación biológica como posibles estados del sistema en el intervalo temporal considerado.

El análisis anterior permite obtener los puntos de equilibrio del sistema considerando los coeficientes temporales como parámetros instantáneos. Bajo esta interpretación, el modelo puede analizarse como un sistema congelado en el tiempo, lo que permite estudiar su comportamiento cualitativo en cada instante y determinar las raíces de la ecuación cúbica asociada.

Sin embargo, dado que los coeficientes $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$ dependen explícitamente del tiempo, los valores obtenidos para $N_2(t)$ y $N_3(t)$ no corresponden a equilibrios constantes en sentido clásico. En su lugar, representan curvas dinámicas que delimitan regiones de crecimiento o decrecimiento poblacional a lo largo del tiempo.

4.1.4. Análisis cualitativo de la dinámica del sistema

De manera análoga al caso cuadrático presentado en la literatura [20], la dinámica de las soluciones se estudia a partir del signo de la función de reacción $\Phi(N, t)$, considerando que los coeficientes dependen explícitamente del tiempo.

Se definen las soluciones no triviales como:

$$N_2(t) = \frac{-b(t) - \sqrt{\Delta(t)}}{2a(t)}, \quad N_3(t) = \frac{-b(t) + \sqrt{\Delta(t)}}{2a(t)},$$

donde, dado que $a(t) > 0$, se cumple $N_2(t) < N_3(t)$.

Asimismo, como resultado del análisis previo del signo de las soluciones, se tiene que $N_2(t) > 0$ en el intervalo de estudio. En consecuencia, el sistema posee tres raíces reales ordenadas como:

$$N_1(t) = 0 < N_2(t) < N_3(t), \tag{4.23}$$

.

El signo de la función de reacción $\Phi(N, t)$ se determina a partir de los factores

$$N(t), \quad (N(t) - N_2(t)), \quad (N(t) - N_3(t)).$$

A continuación se analiza el comportamiento por regiones:

Región 1: $0 < N(t) < N_2(t)$

En esta región se cumple que $N(t) > 0$, $N(t) - N_2(t) < 0$ y $N(t) - N_3(t) < 0$, por lo que el producto de los factores es positivo. En consecuencia,

$$\Phi(N, t) > 0 \quad \Rightarrow \quad N'(t) > 0,$$

lo que indica crecimiento poblacional.

Región 2: $N_2(t) < N(t) < N_3(t)$

Aquí se tiene $N(t) > 0$, $N(t) - N_2(t) > 0$ y $N(t) - N_3(t) < 0$, por lo que el producto resulta negativo. Por tanto,

$$\Phi(N, t) < 0 \quad \Rightarrow \quad N'(t) < 0,$$

indicando decrecimiento poblacional en esta región.

Región 3: $N(t) > N_3(t)$

En este caso todos los factores son positivos, es decir $N(t) > 0$, $N(t) - N_2(t) > 0$ y $N(t) - N_3(t) > 0$, lo que implica que

$$\Phi(N, t) > 0 \quad \Rightarrow \quad N'(t) > 0,$$

por lo que la población vuelve a crecer.

El análisis del signo de $\Phi(N, t)$ muestra que las trayectorias cercanas a $N_2(t)$ presentan un comportamiento de aproximación cualitativa hacia dicha curva desde valores inferiores y superiores, lo que sugiere un comportamiento atractor local hacia adelante (*foward*) dentro del análisis instantáneo del sistema no autónomo.

Por otro lado, las trayectorias próximas a $N_3(t)$ se alejan de esta solución crítica, evidenciando un comportamiento de tipo repulsor local asociado a la estructura dinámica del sistema no autónomo.

Este comportamiento debe interpretarse como una descripción cualitativa local del sistema, debido a la dependencia explícita en el tiempo de los coeficientes del modelo, lo cual impide la existencia de equilibrios clásicos en sentido autónomo.

4.1.5. Caso particular $t = 30$

En las simulaciones numéricas presentadas en esta subsección se emplean los mismos valores de los parámetros establecidos al inicio de este capítulo 4.

Los equilibrios poblacionales del sistema se obtienen resolviendo la condición

$$\frac{dN(t)}{dt} = 0.$$

Para el caso particular $t = 30$, el modelo presenta dos equilibrios biológicamente relevantes:

- **Equilibrio trivial** : $N = 0$ El cual corresponde a la extinción poblacional.
- **Equilibrio positivo**: mediante métodos numéricos implementados en R, utilizando la función `uniroot` (empleada para aproximar raíces reales de ecuaciones no lineales), se obtuvo el equilibrio $N \approx 1992.3$ individuos.
- **Equilibrio biológicamente no admisible**: $N \approx 7300$. Este equilibrio excede la capacidad de carga del sistema ($k_0 = 6000$); por tanto, no corresponde a un estado poblacional ecológicamente factible y no se considera en el análisis de la dinámica del modelo.

Aunque la ecuación cúbica asociada al modelo admite una tercera raíz real, dicha solución supera la capacidad de carga biológicamente viable del sistema, por lo que no se considera ecológicamente relevante dentro de la dinámica poblacional de la cotorra serrana occidental.

Para verificar el equilibrio positivo encontrado, el valor obtenido fue sustituido en la función:

$$\frac{dN(t)}{dt}$$

evaluada en $t = 30$, obteniéndose un resultado numéricamente cercano a cero, lo cual confirma que corresponde efectivamente a un punto de equilibrio del sistema.

Además, el análisis local del signo de la función de reacción indica que el equilibrio trivial $N = 0$ presenta comportamiento repulsor, mientras que el equilibrio positivo $N \approx 1992.3$ actúa como atractor local hacia adelante (*forward*) para las trayectorias cercanas.

Visualización de la dinámica para $t = 30$

Se generó una gráfica en R para ilustrar la derivada poblacional $\frac{dN}{dt}$ en función del número de individuos N , resaltando los equilibrios hallados:

En la gráfica (Figura 4.1). se observa:

- Una línea azul que representa el comportamiento de $\frac{dN}{dt}$.
- Una línea roja punteada en $y = 0$, que marca el eje donde hay equilibrio.
- Una línea verde punteada en $N \approx 1992.3$, indicando el equilibrio positivo.
- Una línea negra punteada en $N = 0$, representando el equilibrio trivial.

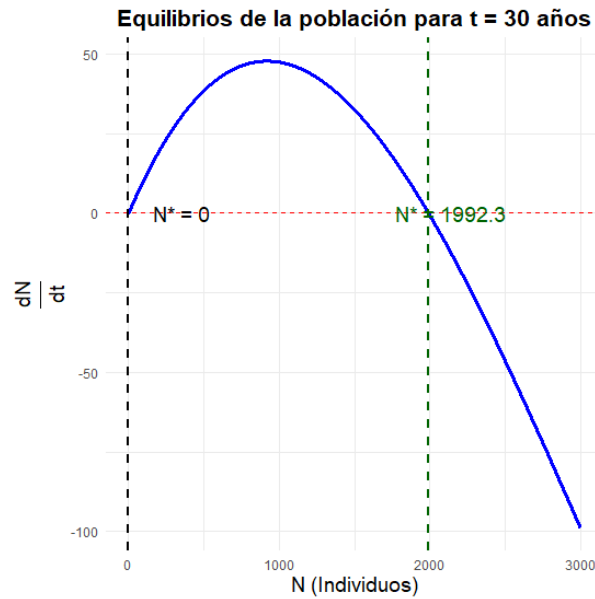


Figura 4.1: Derivada poblacional instantánea $\frac{dN}{dt}$ en función de N para $t = 30$ años. Los cruces con el eje horizontal corresponden al equilibrio trivial $N = 0$ y a un equilibrio positivo $N \approx 1992.3$, cuya estabilidad se evalúa de manera local e instantánea.

4.1.6. Análisis de estabilidad para $t = 30$

Para analizar la estabilidad local de los puntos de equilibrio para $t = 30$, se calcula la derivada parcial de la función $f(t, N)$ respecto a la variable N , es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial N}(t, N).$$

Al evaluar esta derivada en el punto de equilibrio N^* y en el instante considerado $t = t_0$, el signo obtenido permite determinar la estabilidad local del equilibrio.

1. Estabilidad del equilibrio $N^* = 0$ para $t = 30$

La curva de $f'(N^*)$ evaluada en el equilibrio $N^* = 0$ muestra valores positivos durante todo el intervalo analizado. Desde valores cercanos a 0 hasta aproximadamente 0.11, la derivada permanece siempre por encima de cero, como se observa en la Figura 4.2.

Interpretación matemática. En estabilidad local se cumple que:

$$f'(N^*) > 0 \quad \Rightarrow \quad N^* \text{ es un equilibrio inestable.}$$

Debido a que $f'(0) > 0$ en el intervalo analizado, el equilibrio es localmente inestable en el sentido instantáneo: Es decir, cualquier pequeña desviación por encima de cero hace que la población se aleje de este punto.

Interpretación biológica. El equilibrio $N^* = 0$ representa la extinción. Sin embargo, al ser positiva la derivada nos indica que si aparece un número muy pequeño de individuos (por ejemplo, tras una recolonización o liberación), la tasa de crecimiento es positiva y la población tiende a aumentar. Esto muestra que la extinción no es estable bajo las

condiciones ecológicas modeladas y que la especie no está sujeta a un efecto Allee fuerte en este punto.

Se concluye que el equilibrio $N^* = 0$ es localmente **inestable** (fuente).

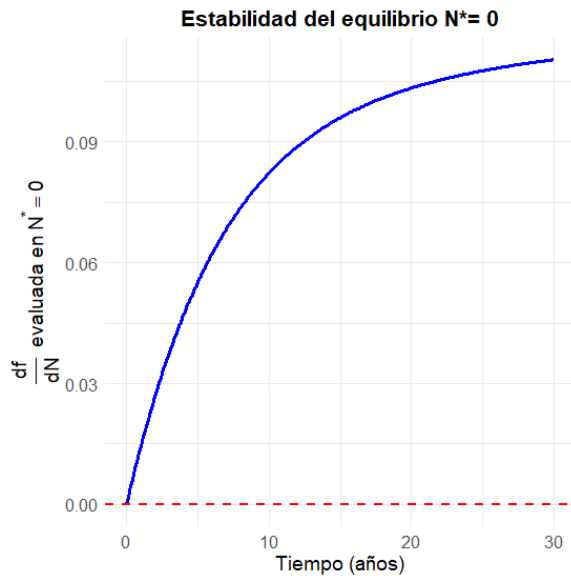


Figura 4.2: Derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial N}$ evaluada en el equilibrio $N^* = 0$ a lo largo del tiempo. Los valores positivos indican que el equilibrio trivial es localmente inestable en el sentido instantáneo.

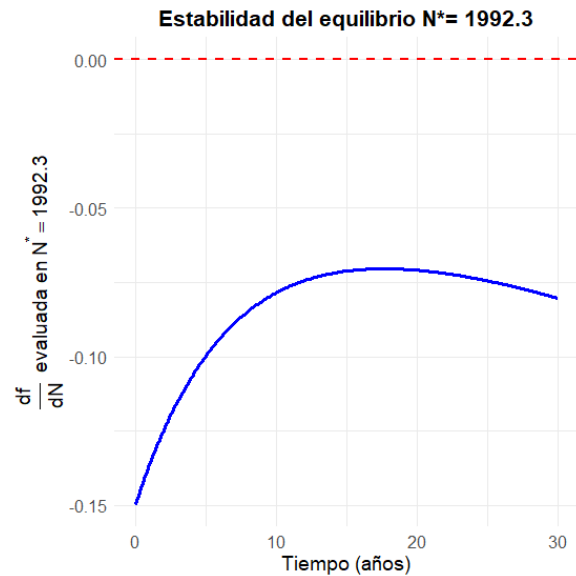


Figura 4.3: Derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial N}$ evaluada en el equilibrio $N^* \approx 1992.3$ a lo largo del tiempo. La derivada permanece negativa, indicando estabilidad local instantánea en el intervalo analizado.

2. Estabilidad del equilibrio $N^* = 1992.3$ para $t = 30$

La curva azul representa $f'(N^*)$ evaluada en el equilibrio $N^* = 1992.3$ a través del tiempo. En el intervalo analizado, los valores se mantienen por debajo de cero (aproximadamente entre -0.14 y -0.08). Aunque la derivada presenta ligeros cambios, siempre permanece negativa, como se observa en la Figura 4.3.

Interpretación matemática. En el análisis de estabilidad local instantánea se cumple que:

$$f'(N^*) < 0 \quad \Rightarrow \quad N^* \text{ es un equilibrio localmente estable.}$$

Dado que $f'(1992.3) < 0$ para todos los tiempos considerados, el equilibrio correspondiente es localmente estable bajo las condiciones ambientales evaluadas. Esto implica que pequeñas perturbaciones alrededor de $N^* = 1992.3$ tienden a regresar al equilibrio cuando los parámetros del sistema se consideran fijos en un instante dado.

No obstante, al considerar la dinámica completa del sistema no autónomo, las simulaciones temporales muestran que la población no converge hacia este equilibrio en el largo plazo, sino que presenta un máximo transitorio seguido de un declive progresivo. Esto indica que, aunque el equilibrio $N^* = 1992.3$ es localmente estable, las trayectorias del modelo no convergen hacia este valor bajo el escenario temporal analizado.

Interpretación biológica. El valor poblacional de 1992.3 individuos maduros corresponde a un equilibrio localmente estable en el sentido instantáneo del modelo. Cuando la

población se desvía ligeramente por encima de este valor, la tasa de cambio poblacional se vuelve negativa, mientras que desviaciones ligeras por debajo producen tasas de crecimiento positivas, lo que tiende a restaurar el sistema hacia el equilibrio bajo condiciones ambientales fijas.

Biológicamente, esto indica que dicho tamaño poblacional es transitoriamente viable y resistente a perturbaciones pequeñas en un escenario ecológico dado. No obstante, al considerar la dinámica completa del sistema no autónomo, este equilibrio no necesariamente es alcanzado ni mantenido en el largo plazo.

Cabe señalar que, en sistemas no autónomos, los equilibrios obtenidos al imponer $\frac{dN}{dt} = 0$ corresponden a equilibrios instantáneos asociados a un tiempo fijo. Su estabilidad es local y no implica necesariamente que el sistema converja a dichos valores en la dinámica temporal completa.

4.1.7. Campo de direcciones

Los mapas de direcciones (Definición 2.2.4) permiten visualizar el signo de la tasa de cambio poblacional $\frac{dN}{dt}$ en función del tamaño poblacional para tiempos específicos, proporcionando una herramienta cualitativa para comparar la dirección del flujo dinámico y los cambios en estabilidad de ambos equilibrios conforme avanza el tiempo.

En sistemas no autónomos no existen equilibrios fijos válidos para todo el tiempo; únicamente pueden definirse equilibrios instantáneos asociados a escenarios temporales específicos. En este sentido, el campo de direcciones presentado permite visualizar la evolución del flujo poblacional a lo largo del tiempo y analizar cualitativamente la estabilidad local de los equilibrios en distintos instantes temporales.

A continuación, se presentan los mapas de direcciones asociados al modelo.

En la **Figura 4.4** se muestra el campo de direcciones asociado al modelo propuesto, el cual permite visualizar el comportamiento de las trayectorias poblacionales.

En la **Figura 4.5** se muestra el campo de direcciones del modelo junto con una trayectoria solución, lo que permite visualizar la evolución temporal de la población para una condición inicial dada.

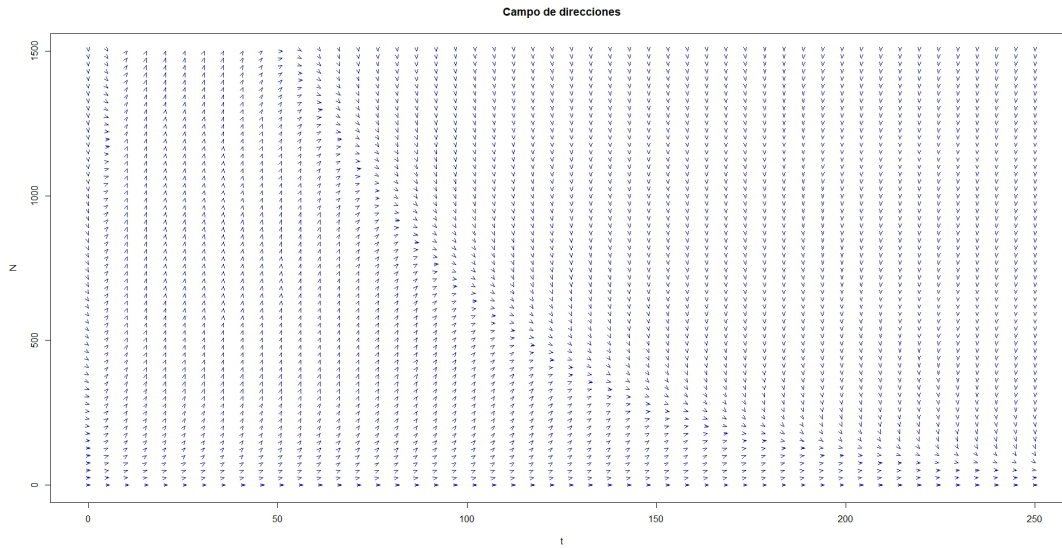


Figura 4.4: Campo de direcciones para la ecuación diferencial $N(t)$ utilizada en el modelo de dinámica poblacional de la cotorra serrana occidental. El eje horizontal corresponde al tiempo t y el eje vertical al tamaño poblacional N . Cada vector indica la dirección de evolución del sistema en cada punto del plano (t, N) , lo que permite visualizar el comportamiento de las soluciones y analizar la tendencia de las trayectorias para distintas condiciones iniciales.

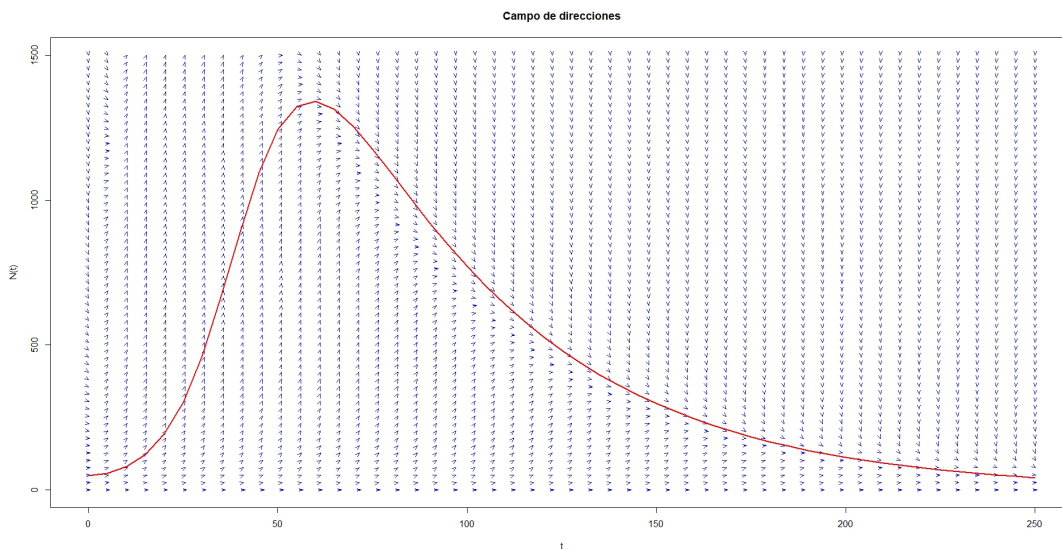


Figura 4.5: Campo de direcciones asociado a la ecuación diferencial que describe la dinámica poblacional de la cotorra serrana occidental en el plano (t, N) . Las flechas indican la dirección de evolución del sistema en cada punto, mientras que la curva roja representa una solución particular $N(t)$ para una condición inicial dada. Esta representación permite visualizar cómo la población evoluciona en el tiempo siguiendo las direcciones del campo, así como identificar las tendencias de crecimiento y posterior disminución poblacional.

Análisis local del comportamiento dinámico en los puntos de equilibrio

Con el fin de evaluar el comportamiento dinámico del sistema y la estabilidad de sus soluciones estacionarias, se construyeron mapas de direcciones unidimensionales para distintos valores del tiempo t . En particular, el análisis se centra en dos puntos de equilibrio de interés biológico:

$$N_0 = 1992.3 \quad \text{y} \quad N_0 = 0.$$

El equilibrio $N_0 = 0$ corresponde al estado de extinción. El análisis de su estabilidad resulta fundamental para identificar escenarios en los cuales la extinción actúa como atractor del sistema, así como aquellos en los que la población conserva capacidad de recuperación frente a perturbaciones.

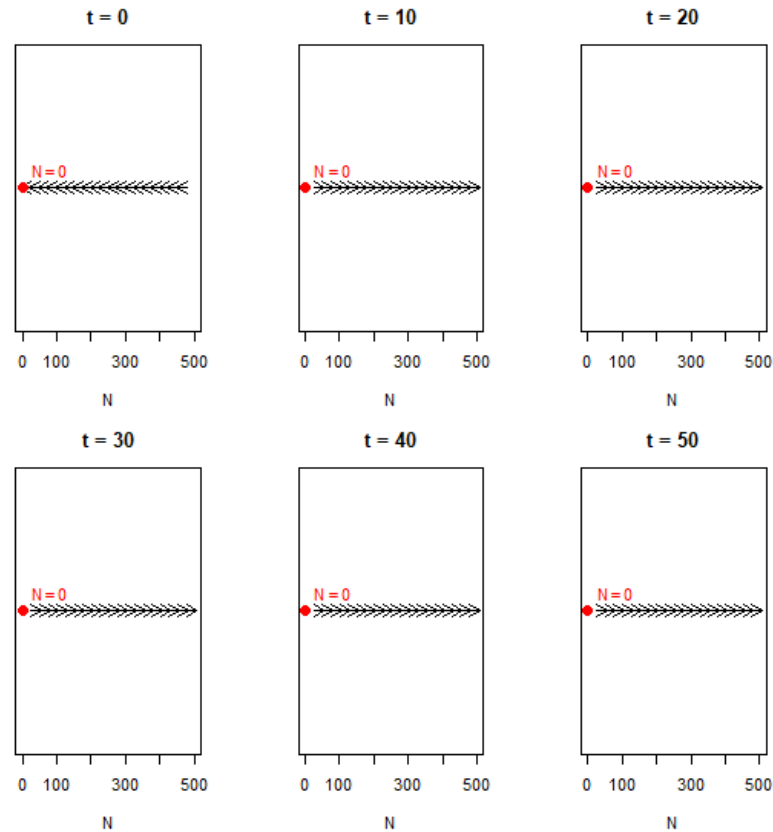


Figura 4.6: Mapa de direcciones instantáneo del sistema evaluado en $t = 30$ años. El equilibrio trivial $N = 0$ presenta flechas que se alejan del punto, indicando inestabilidad local instantánea.

Por otro lado el equilibrio $N_0 = 1992.3$ representa un estado de persistencia poblacional, asociado a una abundancia positiva que depende de las condiciones ambientales y demográficas del modelo. El estudio de su estabilidad a lo largo del tiempo permite evaluar cómo los efectos acumulativos del deterioro ambiental y la mortalidad influyen en la viabilidad de la población.

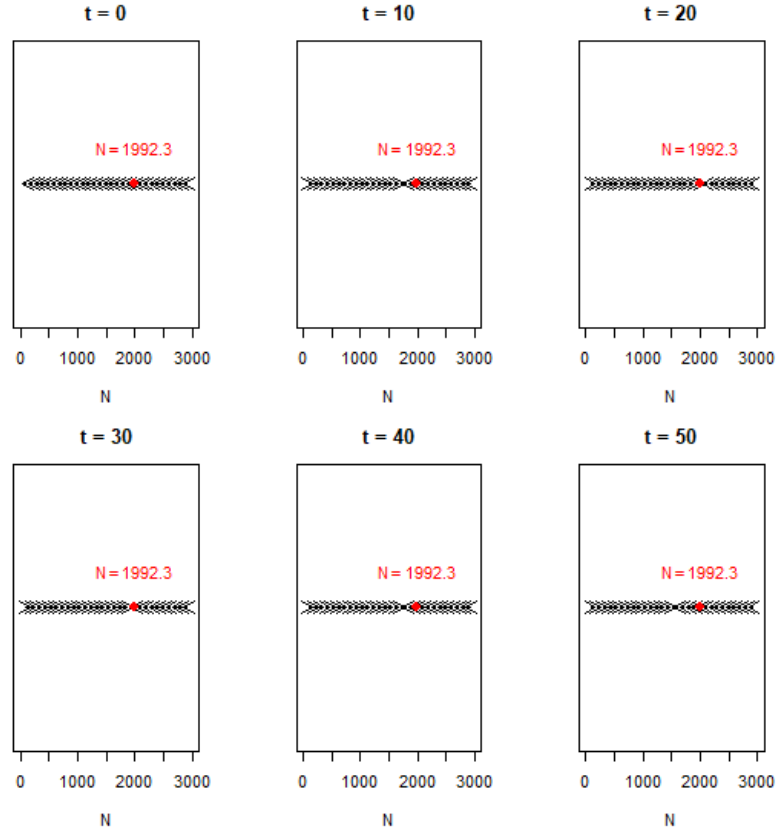


Figura 4.7: Mapa de direcciones instantáneo del sistema evaluado en $t = 30$ años. El equilibrio positivo $N \approx 1992.3$ actúa como atractor local, evidenciando estabilidad local instantánea.

Justificación de la selección de valores de tiempo

Los valores de tiempo

$$t = 0, 10, 20, 30, 40 \text{ y } 50$$

fueron seleccionados con el objetivo de analizar de manera progresiva la dinámica poblacional del sistema bajo estudio, capturando distintas etapas de la evolución temporal del modelo y permitiendo evaluar cambios en la estabilidad y el comportamiento cualitativo de la población.

En particular, cada valor de tiempo representa un escenario con significado biológico y matemático diferenciado:

- $t = 0$ representa el escenario inicial o de referencia, en el cual los parámetros del modelo reflejan condiciones base, sin la acumulación de efectos temporales asociados a la reducción de la capacidad de carga, el impacto ambiental y la mortalidad modulada por el tiempo.

- $t = 10$ corresponde a una fase temprana de cambio, donde comienzan a manifestarse los efectos iniciales del deterioro ambiental, pero la estructura dinámica del sistema aún conserva características cercanas al estado original.
- $t = 20$ se interpreta como un escenario intermedio, en el cual las modificaciones inducidas por el tiempo en la capacidad de carga y la mortalidad influyen de forma significativa en la dinámica poblacional.
- $t = 30$ representa una etapa de transición avanzada, donde los efectos acumulativos del modelo temporal se vuelven dominantes y pueden observarse cambios claros en la estabilidad del equilibrio poblacional.
- $t = 40$ describe un escenario de deterioro avanzado, caracterizado por una reducción más pronunciada de las condiciones ambientales favorables y una respuesta dinámica más restrictiva para la población.
- $t = 50$ corresponde a un escenario severo, en el cual el impacto combinado de la disminución de la capacidad de carga, el efecto ambiental y la mortalidad dependiente del tiempo alcanza niveles crítico, permitiendo evaluar la persistencia o un posible colapso de la población bajo condiciones extremas.

En conjunto, esta selección de valores de t permite analizar la evolución temporal del sistema de forma escalonada, comparando escenarios iniciales, intermedios y severos, y proporciona una base sólida para interpretar los cambios en la estabilidad y la viabilidad poblacional a lo largo del tiempo.

4.1.8. Trayectorias temporales de la población $N(t)$ para distintas condiciones iniciales $N(0)$.

En el modelo poblacional propuesto, los parámetros asociados al crecimiento y a la capacidad de carga dependen explícitamente del tiempo, con el fin de representar cambios ambientales inducidos por el cambio climático. Por lo tanto, el sistema analizado es de naturaleza no autónoma, entonces el análisis de estabilidad local de los equilibrios no es suficiente para describir la dinámica poblacional en el largo plazo. Por ello, se realizaron simulaciones numéricas del modelo para distintas condiciones iniciales, con el fin de evaluar la trayectoria temporal de la población bajo el escenario de cambio climático considerado.

Las trayectorias temporales de la población $N(t)$, simuladas a partir de distintas condiciones iniciales $N(0)$, muestran un patrón consistente caracterizado por un crecimiento acelerado en las primeras décadas, seguido de un máximo poblacional transitorio y un declive progresivo. Aunque las trayectorias parten de valores iniciales distintos y permanecen separadas durante las etapas tempranas, todas comparten la misma estructura dinámica general.

Cada curva corresponde a una solución numérica de la ecuación diferencial no autónoma que describe la dinámica poblacional, evaluada para diferentes valores iniciales. A partir de aproximadamente $t \approx 90$ –100 años, la dinámica poblacional deja de depender de la condición inicial y pasa a estar determinada principalmente por la evolución temporal de las condiciones ambientales incluidas en el modelo.

El máximo poblacional se alcanza aproximadamente en el intervalo $t \approx 60-70$ años, con valores que oscilan entre 1 100 y 1 350 individuos, dependiendo de la condición inicial. Este pico no corresponde a un equilibrio poblacional, sino que representa un máximo transitorio inducido por condiciones iniciales relativamente favorables. Posteriormente, todas las trayectorias colapsan gradualmente y convergen hacia valores bajos de abundancia, sin mostrar convergencia hacia el equilibrio positivo obtenido en el análisis local del sistema.

Estas simulaciones confirman que, si bien el equilibrio positivo identificado es localmente estable en un sentido instantáneo, la dinámica completa del sistema no autónomo no implica que la población converja hacia dicho equilibrio en el largo plazo. Esta discrepancia pone de manifiesto la diferencia fundamental entre estabilidad local instantánea y persistencia poblacional, lo que explica la ausencia de convergencia observada en las trayectorias temporales.

Mientras que el análisis de $\frac{dN}{dt}$ permite caracterizar la estabilidad local instantánea del sistema, las trayectorias temporales $N(t)$ describen la evolución poblacional completa y evidencian la ausencia de convergencia hacia el equilibrio positivo a largo plazo.

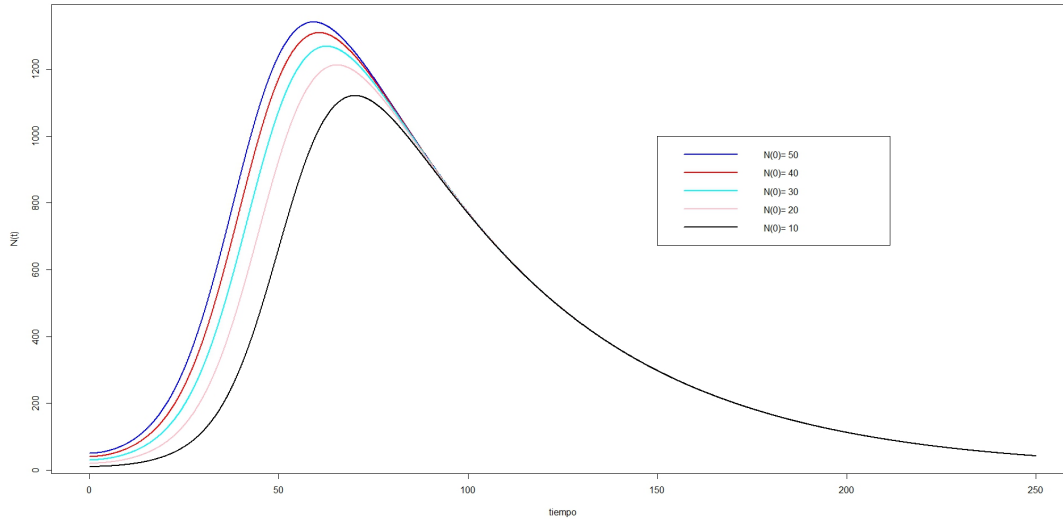


Figura 4.8: Trayectorias temporales de la población $N(t)$ para distintas condiciones iniciales $N(0)$. Todas las simulaciones muestran un crecimiento inicial, seguido de un máximo poblacional transitorio y un declive posterior, sin convergencia hacia el equilibrio positivo en el largo plazo.

4.1.9. Efecto de la variación de la capacidad de carga inicial (K_0) en la dinámica poblacional.

Con el objetivo de analizar de manera aislada la influencia de la capacidad de carga inicial K_0 sobre la dinámica poblacional, se fijaron el resto de los parámetros del modelo en valores constantes. Esta decisión permite evitar efectos de confusión entre parámetros y facilita la interpretación directa del papel que desempeña K_0 en la estructura de los equilibrios instantáneos del sistema.

La capacidad de carga inicial K_0 representa un parámetro clave desde el punto de vista ecológico, ya que sintetiza las condiciones ambientales disponibles para sostener a la población. Por esta razón, se exploró su variación manteniendo constantes los demás

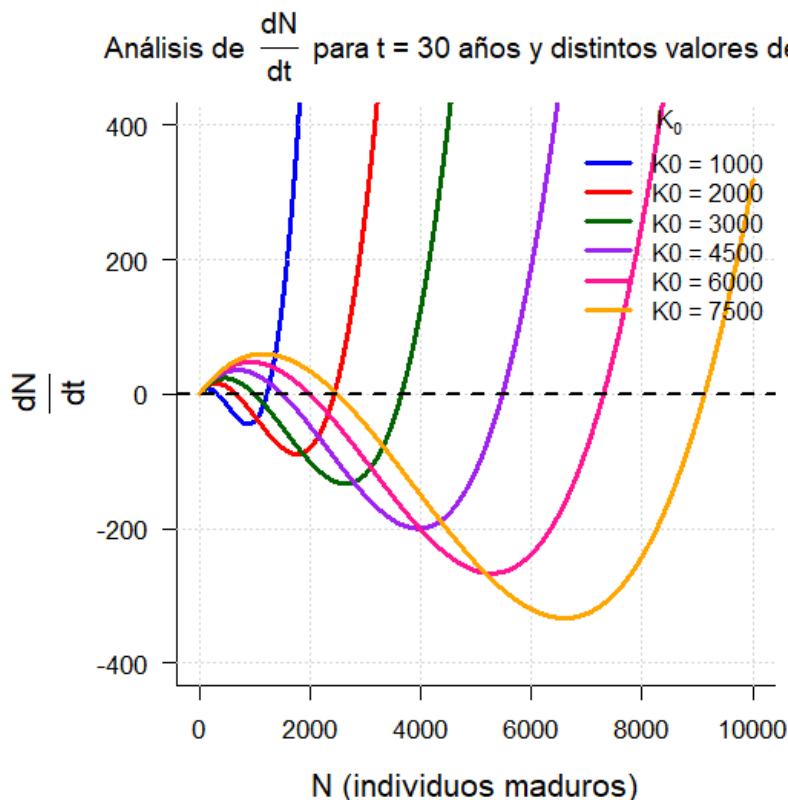


Figura 4.9: Análisis de $\frac{dN}{dt}$ en $t = 30$ años para distintos valores de la capacidad de carga inicial K_0 . Las intersecciones con el eje horizontal indican equilibrios instantáneos, de los cuales solo aquellos con $0 \leq N \leq K_0$ son biológicamente admisibles.

parámetros, con el fin de evaluar cómo cambios en la disponibilidad de recursos afectan la existencia y estabilidad de los equilibrios poblacionales.

Los valores de K_0 considerados (1000, 2000, 3000, 4500, 6000 y 7500) se seleccionaron de manera incremental para cubrir un rango amplio de escenarios ecológicamente plausibles, desde ambientes altamente limitantes hasta condiciones relativamente favorables. Esta selección permite identificar tendencias sistemáticas en la posición de los equilibrios y evaluar su dependencia funcional con respecto a K_0 .

Cuadro 4.1: Equilibrios instantáneos detectados en el análisis de $\frac{dN}{dt}$ en $t = 30$ años para distintos valores de K_0 .

K_0	Equilibrio trivial	Equilibrio positivo admisible	Equilibrio biológicamente no admisible
1000	0	332	1216
2000	0	664	2433
3000	0	996	3650
4500	0	1494	5475
6000	0	1992	7300
7500	0	2490	9125

El **Cuadro 4.1** muestra que, para todos los valores de K_0 analizados, el sistema presenta dos equilibrios biológicamente admisibles: el equilibrio trivial $N^* = 0$ y un equilibrio positivo cuya magnitud aumenta de manera aproximadamente proporcional a K_0 . Este

comportamiento es consistente con la interpretación ecológica de K_0 como un parámetro que determina la capacidad de carga inicial del sistema y, en consecuencia, influye en la ubicación de los equilibrios poblacionales instantáneos biológicamente admisibles.

Para cada valor de K_0 , el análisis de $\frac{dN}{dt}$ en $t = 30$ años identifica tres cruces con el eje horizontal. De ellos, el equilibrio trivial $N = 0$ y un equilibrio positivo con $0 < N < K_0$ son biológicamente admisibles, mientras que el tercer cruce, correspondiente a valores $N > K_0$, se descarta por carecer de significado ecológico, ya que representa una densidad poblacional incompatible con la capacidad de carga del sistema.

Es importante señalar que, debido a que el modelo es no autónomo, los equilibrios obtenidos al fijar un instante de tiempo corresponden a equilibrios instantáneos. En consecuencia, aunque el análisis local permita estudiar su estabilidad para un tiempo específico, ello no implica necesariamente que las trayectorias del sistema converjan a dichos valores en la dinámica temporal completa.

Este análisis indica que la capacidad de carga inicial K_0 actúa como un parámetro que determina la ubicación del equilibrio poblacional positivo en un sentido instantáneo. En particular, valores mayores de K_0 dan lugar a equilibrios positivos de mayor magnitud, lo que pone de manifiesto el papel clave de la disponibilidad inicial de sitios de anidación en la viabilidad poblacional bajo escenarios de deterioro ambiental.

En este capítulo se analizó la dinámica poblacional de la cotorra serrana occidental mediante un modelo no autónomo que incorpora la variación temporal de los parámetros asociados a la capacidad de carga y a las condiciones ambientales del sistema. El análisis de los puntos críticos de $\frac{dN}{dt}$ permitió identificar equilibrios instantáneos dependientes del tiempo, cuya interpretación se realizó en función de su consistencia ecológica respecto a la capacidad de carga K_0 .

Los resultados muestran que, aunque el sistema presenta equilibrios locales bien definidos al fijar un instante de tiempo específico (en este caso, $t = 30$ años), su carácter no autónomo implica que dichos valores corresponden a equilibrios instantáneos y no necesariamente actúan como atractores de la dinámica temporal completa. En particular, las simulaciones numéricas evidencian que la población experimenta un crecimiento inicial seguido de un máximo transitorio, para posteriormente decrecer sin converger al equilibrio positivo obtenido en el análisis local realizado para $t = 30$ años.

Asimismo, se observó la presencia de soluciones algebraicas con valores $N^* > K_0$, las cuales fueron descartadas por no ser biológicamente viables al exceder la capacidad de carga del sistema. Esta distinción entre soluciones matemáticas y su interpretación ecológica resulta fundamental para garantizar la consistencia del modelo.

En conjunto, los resultados resaltan la importancia de diferenciar entre estabilidad local instantánea y comportamiento dinámico global en sistemas no autónomos, así como el papel de la capacidad de carga como un parámetro estructural que influye en la existencia y localización de los equilibrios poblacionales instantáneos biológicamente admisibles.

Conclusiones

El objetivo del presente trabajo fue construir un modelo matemático que permitiera estimar la posible disminución poblacional de la cotorra serrana occidental para diferentes condiciones iniciales ante un escenario de cambio climático. Se desarrolló un modelo que describe la dinámica poblacional de la especie a lo largo de varias generaciones, integrando información demográfica, ecológica y biológica. A partir de los resultados obtenidos en el modelo, se observa que, dependiendo de la condición inicial de la población, ésta podría sufrir disminuciones importantes en las próximas décadas, llegando en algunos escenarios, a niveles críticos hacia finales del siglo XXI. Las simulaciones muestran que poblaciones con tamaños iniciales reducidos presentan una mayor vulnerabilidad frente a las condiciones ambientales consideradas, lo que incrementa el riesgo de disminuciones poblacionales importantes y limita su capacidad de recuperación. Este comportamiento se deriva de la dinámica propia del modelo propuesto y no implica la presencia de un umbral de efecto Allee.

Estos resultados reafirman que el cambio climático, sumado a otras presiones como la desaparición de los hábitats y la actividad humana, representa un grave peligro para la viabilidad de la especie. En este sentido, el desarrollo de modelos matemáticos se convierte en una herramienta valiosa para anticipar escenarios futuros y como apoyo en la toma de decisiones en estrategias de conservación, además pueden contribuir significativamente a la comprensión de procesos ecológicos complejos y al análisis de escenarios futuros bajo condiciones ambientales cambiantes.

Desde el punto de vista ecológico, la investigación sobre la cotorra serrana occidental revela también un problema más amplio: la vulnerabilidad de los ecosistemas de montaña frente al cambio climático. La pérdida de hábitats adecuados, la fragmentación del bosque y los cambios en la disponibilidad de alimentos pueden alterar drásticamente las dinámicas poblacionales de muchas especies que dependen de estos entornos.

En este sentido, el modelo cumple con el objetivo de aportar elementos para la toma de decisiones en materia de conservación y manejo de la especie, al proporcionar información útil para identificar escenarios de riesgo, orientar programas de monitoreo, priorizar acciones de protección en poblaciones vulnerables y apoyar el diseño de estrategias encaminadas a preservar su hábitat y reducir los efectos de las amenazas ambientales. Asimismo, la metodología propuesta podría adaptarse al estudio de otras especies de psitácidos con características ecológicas similares, ampliando su utilidad como herramienta para la investigación y la conservación de aves amenazadas.

Finalmente, este trabajo también nos invita a reflexionar sobre el valor de las especies que habitan nuestros ecosistemas. Más allá de los números y las proyecciones del modelo, las aves son parte esencial del equilibrio ecológico y del paisaje natural que compartimos. La

existencia de especies como la cotorra serrana occidental no sólo nos indica que los bosques donde viven están sanos, sino que estos ecosistemas albergan una amplia biodiversidad. El título de este trabajo, *Es buena suerte ver aves volando*, cobra importancia en este contexto: verlas libres no debería ser un privilegio poco común en el futuro, sino una realidad que podamos seguir compartiendo. Entender y prever los riesgos a los que sus poblaciones se enfrentan es, al final, una manera de ayudar a que esas aves continúen siendo parte de nuestros cielos.

Bibliografía

- [1] Climate change 2021: The physical science basis. contribution of working group i to the sixth assessment report of the intergovernmental panel on climate change, 2021.
- [2] Shair Ahmad and Antonio Ambrosetti. *A Textbook on Ordinary Differential Equations*. UNITEXT. Springer, Cham, Switzerland, 2016.
- [3] Zeni Amarti, N. S. Nurkholipah, N. Anggriani, and A. K. Supriatna. Numerical solution of a logistic growth model for a population with allee effect considering fuzzy initial values and fuzzy parameters. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, volume 332, page 012051, 2018.
- [4] Birding Depot. Thick-billed parrot (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*). <https://birdingdepot.com/thick-billed-parrot/>, 2025. Consultado el 16 de marzo de 2026.
- [5] BirdLife International. *Rhynchopsitta pachyrhyncha*. the iucn red list of threatened species 2021: e.t22685766a182984346. The IUCN Red List of Threatened Species, 2021. Consultado el 3 de abril de 2026.
- [6] Jorge E. Botero, Daniel Arbeláez, and Gloria Lentijo. *Métodos para estudiar las aves*. Instituto de Investigación de Recursos Biológicos Alexander von Humboldt, Bogotá, Colombia, 2005. Consultado el 22 de febrero de 2025.
- [7] Fred Brauer and Carlos Castillo-Chavez. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, volume 40 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, NY, USA, 2 edition, 2012.
- [8] Elsa M. S. Bussière, Les G. Underhill, and Res Altwegg. Patterns of bird migration phenology in south africa suggest northern hemisphere climate as the most consistent driver of change. *Global Change Biology*, 21(6):2179–2190, 2015.
- [9] Carolina Carrasco. Aves caen muertas a causa del calor en la huasteca potosina y en tamaulipas. Infobae, 2024. Publicado el 11 de mayo de 2024. Recuperado el 3 de abril de 2026.
- [10] Comisión Nacional de Áreas Naturales Protegidas. Protocolo de monitoreo no. 11: Monitoreo de la cotorra serrana occidental (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*) en las áreas de protección de flora y fauna tutuaca, campo verde y papigochic, y en las regiones prioritarias para la conservación madera, sierra tarahumara y cerro mohinora, en el estado de chihuahua. Technical Report Protocolo de Monitoreo No. 11, Comisión

- Nacional de Áreas Naturales Protegidas, México, 2021. Consultado el 3 de abril de 2026.
- [11] Comisión Nacional de Áreas Naturales Protegidas. Estudio previo justificativo para el establecimiento del área natural protegida santuario cotorra serrana. Technical report, Comisión Nacional de Áreas Naturales Protegidas, Chihuahua, México, 2023. Incluye cuatro anexos. Consultado el 3 de abril de 2026.
- [12] Comisión Nacional de Áreas Naturales Protegidas. Monitoreo de la cotorra serrana occidental (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*) en las Áreas de protección de flora y fauna tutuaca, campo verde, papigochic, la reserva de la biosfera janos y la región prioritaria para la conservación madera, chihuahua. Technical report, Comisión Nacional de Áreas Naturales Protegidas (CONANP), December 2013. Consultado el 18 de junio de 2026.
- [13] Convention on International Trade in Endangered Species of Wild Fauna and Flora. Appendices i, ii and iii, 2026. Consultado el 18 de junio de 2026.
- [14] J. Cruz-Nieto, F. Torres, A. Torres, M. E. Escarcega, M. Cruz, and A. Cervantes. Monitoreo del loro de pico grueso (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*) en las Áreas naturales protegidas de tutuaca, campo verde, papigochic y la región prioritaria para la conservación madera en el estado de chihuahua. Technical report, PRONATURA México A.C., 2012. Informe final del Programa de Monitoreo Biológico en Regiones Prioritarias (PROMOBI) presentado a la Comisión Nacional de Áreas Naturales Protegidas (CONANP).
- [15] Pedro Antonio Domínguez Calleros, José de Jesús Navar-Chaidez, Marín Pompa-García, and Eduardo J. Treviño-Garza. Producción de conos y semillas de pinus pseudostrobus lindl. en nuevo león, méxico. *Foresta Veracruzana*, 18(2):29–36, 2016.
- [16] Renato Vieira Dos Santos, Fabiano L. Ribeiro, and Alexandre Souto Martínez. Models for allee effect based on physical principles. *Journal of Theoretical Biology*, 385:143–152, 2015.
- [17] Manuel Esperón-Rodríguez, Linda J. Beaumont, Jonathan Lenoir, John B. Baumgartner, Jennifer McGowan, Alexander Correa-Metrio, and James S. Camac. Climate change threatens the most biodiverse regions of mexico. *Biological Conservation*, 240:108215, 2019.
- [18] Andrea M. Gama-Rodríguez, Juan A. García, Luis F. Lozano, and David A. Prieto-Torres. Protecting breeding sites: a critical goal for the conservation of the golden eagle in mexico under global change scenarios. *Journal of Ornithology*, 165:759–775, 2024.
- [19] Jeffrey A. Hostetler, T. Scott Sillett, and Peter P. Marra. Full-annual-cycle population models for migratory birds. *The Auk: Ornithological Advances*, 132(2):433–449, 2015.
- [20] Juan Carlos Jara Pérez. *Caracterización de los atractores en sistemas dinámicos no autónomos*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, Sevilla, España, 2013.

- [21] Kamrun Nahar Keya, Md. Kamrujjaman, and Md. Shafiqul Islam. The influence of density in population dynamics with strong and weak allee effect. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 29:1–26, 2021.
- [22] Andrew M. Liebhold and Jordi Bascompte. The allee effect, stochastic dynamics and the eradication of alien species. *Ecology Letters*, 6(2):133–140, 2003.
- [23] Germán M. López Iborra, Antonio Bañuls Patiño, Antonio Zaragoza Llenes, Joan Sala Bernabeu, Alejandro Izquierdo Rosique, José Emilio Martínez Pérez, Jacobo Ramos Sánchez, et al. *Atlas de las aves nidificantes en la provincia de Alicante*. Universidad de Alicante, Alicante, España, 2015.
- [24] Reinhard E. Matadamas, Paula L. Enríquez, Lázaro Guevara, and Adolfo G. Navarro-Sigüenza. Stairway to extinction? influence of anthropogenic climate change on distribution patterns of montane strigiformes in mesoamerica. *Avian Conservation and Ecology*, 17(2):37, 2022.
- [25] Tiberio César Monterrubio-Rico and Ernesto Enkerlin-Hoefflich. Variación anual en la actividad de anidación y productividad de la cotorra serrana occidental (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*). *Anales del Instituto de Biología, Serie Zoología*, 75(2):341–354, 2004.
- [26] NatureServe. *Rhynchopsitta pachyrhyncha*, 2022. NatureServe Explorer. Consultado el 18 de junio de 2026.
- [27] Aurelio Ramírez-Bautista, Ramón Pineda-López, and Miguel A. Martínez-Morales. De sudamérica para México: la invasión de la cotorra argentina. *Revista Mexicana de Biodiversidad*, 91:e913438, 2020. Consultado el 26 de octubre de 2025.
- [28] Michael C. Runge and Peter P. Marra. Modeling seasonal interactions in the population dynamics of migratory birds. In Russell Greenberg and Peter P. Marra, editors, *Birds of Two Worlds: The Ecology and Evolution of Migration*, pages 375–389. Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 2005.
- [29] Belkacem Said-Houari. *Differential Equations: Methods and Applications*. Compact Textbooks in Mathematics. Springer, Cham, Switzerland, 2015.
- [30] Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales. Norma oficial mexicana nom-059-semarnat-2010. protección ambiental–especies nativas de México de flora y fauna silvestres–categorías de riesgo y especificaciones para su inclusión, exclusión o cambio–lista de especies en riesgo. Diario Oficial de la Federación, 30 de diciembre de 2010, 2010. Consultado el 17 de junio de 2026.
- [31] Frank Seebacher and Eric Post. Climate change impacts on animal migration. *Climate Change Responses*, 2(1):13, 2015.
- [32] Pablo Sierra-Morales, Octavio Rojas-Soto, César A. Ríos-Muñoz, Leticia M. Ochoa-Ochoa, Pedro Flores-Rodríguez, and R. Carlos Almazán-Núñez. Climate change projections suggest severe decreases in the geographic ranges of bird species restricted to Mexican humid mountain forests. *Global Ecology and Conservation*, 30:e01794, 2021.

- [33] N. F. R. Snyder, S. E. Koenig, J. Koschmann, H. A. Snyder, and T. B. Johnson. Thick-billed parrot releases in arizona. *The Condor*, 96(4):845–862, 1994. Consultado el 3 de abril de 2026.
- [34] Noel F. R. Snyder, Ernesto C. Enkerlin-Hoefflich, Miguel A. Cruz-Nieto, R. A. Valdés-Peña, S. G. Ortiz-Maciel, and J. Cruz-Nieto. Thick-billed parrot (*Rhynchopsitta pachyrhyncha*), version 1.0. Birds of the World, 2020. Consultado el 3 de abril de 2026.
- [35] J. Villanueva Díaz, J. Cerano Paredes, P. Z. Fulé, C. Cortés Montaña, L. Vázquez Selem, L. L. Yocom, and J. A. Ruiz-Corral. Cuatro siglos de variabilidad hidroclimática en el noroeste de chihuahua, México, reconstruida con anillos de árboles. *Investigaciones Geográficas*, (87):141–153, 2015.
- [36] Jr. White, Thomas H., Wilfredo Abreu, Gabriel Benítez, Arelis Jhonson, Marisel López, Limary Ramírez, Iris Rodríguez, Miguel Toledo, Pablo Torres, and Jafet Vélez. Minimizing potential allee effects in psittacine reintroductions: An example from puerto rico. *Diversity*, 13(1):13, 2021.
- [37] Andreas P. Wion, Ian S. Pearse, Kyle C. Rodman, Thomas T. Veblen, and Miranda D. Redmond. The effects of enso and the north american monsoon on mast seeding in two rocky mountain conifer species. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 376(1839):20200378, 2021.
- [38] Shangzhe Xie, Erin J. Turrell, and Todd J. McWhorter. Behavioural responses to heat in captive native australian birds. *Emu – Austral Ornithology*, 117(1):51–67, 2017.
- [39] Shangzhe Xie, Lucy Woolford, and Todd J. McWhorter. Organ histopathology and hematological changes associated with heat exposure in australian desert birds. *Journal of Avian Medicine and Surgery*, 34(1):41–51, 2020.
- [40] Dennis G. Zill, Warren S. Wright, and Michael R. Cullen. *Differential Equations with Boundary-Value Problems*. Brooks/Cole, Cengage Learning, Boston, MA, 8 edition, 2013.