



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

**Causas de errores que cometen estudiantes de Telesecundaria al abordar tareas sobre
el Teorema de Pitágoras. Dificultades para el aprendizaje**

PRESENTA

Irving Axel Rodríguez Márquez

Directora

Dra. Anna Tarasenko

Codirector

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Comité tutorial

Dr. Cutberto Rodríguez Álvarez
Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Dra. Anna Tarasenko
Mtra. Miriam Martínez Vázquez

Mineral de la Reforma, Hgo., México., abril 2026

Oficio de autorización de impresión



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
School of Engineering and Basic Sciences
Área Académica de Matemáticas y Física
Department of Physics and Mathematics

Mineral de la Reforma, Hgo., a 26 de febrero de 2026

Número de control: ICBI-AAMyF/158/2026
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

El Comité Tutorial de la tesis titulada "Causas de errores que cometen estudiantes de Telesecundaria al abordar tareas sobre el Teorema de Pitágoras. Dificultades para el aprendizaje", realizada por el sustentante Irving Axel Rodríguez Márquez, con número de cuenta 114413, perteneciente a la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial


Dra. Anna Tarasenko
Directora


Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Codirector


Dr. Cutberto Rodríguez Álvarez
Miembro del comité


Mtra. Miriam Martínez Vázquez
Miembro del comité

AT/EPC

"Amor, Orden y Progreso"

Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 40155 y 40156
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx, ravila@uaeh.edu.mx



2025



uaeh.edu.mx

Agradecimientos

Hoy, al cerrar este ciclo que ha sido travesía, búsqueda y transformación, mi corazón se llena de gratitud por quienes hicieron posible que este sueño tomara forma y se volviera realidad.

A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), por haberme brindado el apoyo invaluable a través de la beca de posgrado con CVU 1275349, que representó un sustento, un voto de confianza en este proyecto y en mi vocación por el conocimiento. Su respaldo fue luz constante en este camino de esfuerzo y perseverancia.

A la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, mi alma mater, en sus aulas no solo adquirí saberes, sino también la certeza de que la educación transforma, dignifica y abre horizontes infinitos.

A mis directores de tesis, la Dra. Anna Tarasenko y al Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez, por su guía sabia, su paciencia generosa y su mirada crítica que impulsó cada paso de esta investigación. Su acompañamiento fue faro en los momentos de duda y motor en los instantes de crecimiento.

A mi comité revisor, la Mtra. Miriam Martínez Vázquez y al Dr. Cutberto Rodríguez Álvarez por su tiempo, dedicación y valiosas aportaciones, que enriquecieron este trabajo y lo fortalecieron con rigor académico y compromiso.

A los estudiantes que participaron en la investigación, por su disposición, su confianza y la generosidad de permitirme aprender con ellos y de ellos. En cada uno encontré el verdadero sentido de la educación: el encuentro humano que trasciende los contenidos.

Al subsistema de Telesecundarias del Estado de Hidalgo, espacio al que he entregado 22 años de mi vida docente. En sus aulas he sembrado y también he aprendido, confirmando que enseñar es, ante todo, un acto de amor y de esperanza.

A mi compañera, cómplice y amada esposa Alejandra Islas Enciso, quien fue la inspiración para iniciar esta travesía, por acompañarme en los momentos de agobio y de certeza, complementando con amor y dedicación este sueño, por ser mi fortaleza, mi brújula y mi horizonte.

Finalmente, a mi mamá, raíz profunda de todo lo que soy, por sembrar en mí la pasión por la educación, por su ejemplo incansable, su ternura y su fortaleza, que me acompañan y guían a cada paso que doy. A mi familia, por ser refugio, impulso y compañía incondicional en cada paso de este camino.

A todos ustedes, gracias por ser parte de esta historia que hoy se escribe con tinta de esfuerzo, sueños cumplidos y esperanza renovada, y que encontrará, invariablemente, páginas en blanco para seguir escribiendo.

Con gratitud, Irving Axel Rodríguez Márquez

Resumen

Se identifican las causas de los errores que cometen estudiantes de tercer grado de telesecundaria al abordar tareas que involucran el teorema de Pitágoras. El teorema de Pitágoras es uno de los resultados más importantes en matemáticas, el cual tiene aplicaciones en diversas áreas, desde la educación básica hasta el nivel superior. Por lo anterior, es importante conocer las causas de los errores cometidos por estudiantes cuando requieren utilizar dicho teorema al resolver problemas. El marco conceptual del trabajo incluye una clasificación de causas de los errores propuesta por Newman. Los participantes en la investigación fueron 17 estudiantes de una escuela telesecundaria ubicada en una comunidad rural del estado de Hidalgo, quienes fueron seleccionados por conveniencia. El docente de los estudiantes es un conocido del autor de la tesis, quien le permitió trabajar con el grupo, previa autorización de los directivos de la escuela y de los padres de los estudiantes. Los participantes abordaron una prueba escrita, integrada por seis tareas durante una sesión de dos horas. Las fuentes de información incluyen producciones escritas de todos los estudiantes, así como entrevistas semiestructuradas a tres participantes, efectuadas la semana siguiente de la implementación de la prueba escrita. El análisis de la información se basó en la identificación de causas del primer error cometido, con base en las siete categorías (cinco intrínsecas y dos extrínsecas) de la taxonomía de Newman. Los resultados indican que las causas más frecuentes de los errores que cometen los estudiantes son dificultades de comprensión, de transformación de la información y falta de habilidades de procesamiento.

Abstract

This study identifies the causes of errors committed by ninth graders when solving tasks involving the Pythagorean Theorem. As one of the most fundamental results in mathematics, the Pythagorean Theorem has applications across diverse fields, from basic education to higher-level studies. Thus, understanding the causes of students' errors in applying this theorem is critical. The conceptual framework incorporates Newman's classification of error causes. Participants included 17 students from a *telesecundaria* (distance-learning secondary school) in a rural community in Hidalgo, selected through convenience sampling. The students' teacher, an acquaintance of the thesis author, granted access to the group after approval from school administrators and parents. During a two-hour session, participants completed a written test consisting of six tasks. Data sources included written solutions and semi-structured interviews conducted the following week. Analysis focused on identifying the causes of the first error made, based on Newman's taxonomy of seven categories (five intrinsic and two extrinsic). Results indicate that the most frequent error causes were comprehension difficulties, information transformation challenges, and deficits in processing skills.

Contenido**Página**

Oficio de autorización de impresión	ii
Agradecimientos	iii
Resumen	iv
Abstract	v
CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	
1.1. Introducción	1
1.2. Revisión de la literatura	3
1.2.1. Problemas, marcos, metodologías y resultados	12
1.3. Planteamiento del problema	13
1.4. Justificación	15
CAPÍTULO 2. MARCO DE INVESTIGACIÓN	
2.1. Introducción	17
2.2. Tipos y características de los marcos de investigación	17
2.3. Elementos que integran el marco conceptual	20
2.3.1. Taxonomía de causas de errores de Newman	20
2.3.2 Desarrollo histórico del teorema de Pitágoras	22
2.3.3 Construcción de conceptos matemáticos	26
2.4. Pertinencia del marco	28
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA	
3.1. Introducción	31
3.2. Selección de las tareas	32
3.3. Participantes	36
3.4. Contexto sociocultural	36
3.5. Instrumentos de recolección de la información	37

3.6. Procedimiento para el análisis de la información	38
CAPÍTULO 4. RESULTADOS	
4.1. Introducción	41
4.2. Resultados generales	42
4.3. Resultados de tres estudiantes seleccionados	53
CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	
5.1. Introducción	71
5.2. Respuesta a las preguntas de investigación	72
5.3. Discusión	78
5.4. Alcances y limitaciones	80
5.5. Reflexiones finales	81
Referencias	83
Apéndice A. Transcripciones de las entrevistas	91
ÍNDICE DE TABLAS	
Tabla 1. Concentrado de problemas resueltos de manera correcta (1) o incorrecta (0)	39
Tabla 2. Concentrado de causas a partir de los errores que cometen los estudiantes	39
Tabla 3. Desarrollo de conceptos expresados por los estudiantes	40
Tabla 4. Concentrado de resultados: solución correcta (1) o incorrecta (0)	42
Tabla 5. Codificación de las causas de error	43
Tabla 6. Causas de error cometidas por los estudiantes.	52
Tabla 7. Desarrollo de conceptos expresados por A1	58
Tabla 8. Desarrollo de conceptos expresados por A4	62
Tabla 9. Desarrollo de conceptos expresados por A5	67
Tabla 10. Concentrado de las causas de error a partir de las entrevistas	68
Tabla 11. Subcategorías de la jerarquía de Newman	69

ÍNDICE DE FIGURAS	
Figura 1. Triángulo rectángulo con ángulo recto en el vértice A y el segmento AD perpendicular al segmento BC	25
Figura 2. Representación esquemática del marco de investigación (Fuente elaboración propia a partir de Radatz, 1979; Vinner, 2020)	30
Figura 3. Error de tipo E1 y P1 cometidos por el estudiante A2 durante la resolución del problema 3	44
Figura 4. Error de tipo P2 cometido por el estudiante A3 durante la resolución del problema 4	45
Figura 5. Error de tipo P2 cometido por el estudiante A16 durante la resolución del problema 6	46
Figura 6. Error de tipo P3 cometido por el A7 durante la resolución del problema 2	47
Figura 7. Error de tipo P4 cometido por el A16 durante la resolución del problema 1	48
Figura 8. Error de tipo P5 cometido por el A17 durante la resolución del problema 5	49
Figura 9. Error de tipo E1 cometido por A17 durante la resolución del problema 3	50
Figura 10. Error de tipo E2 cometido por A10 durante la resolución del problema 5	51
Figura 11. Proceso de solución de problemas del estudiante A1	54
Figura 12. Proceso de solución de problemas del estudiante A4	59
Figura 13. Proceso de solución de problemas del estudiante A5	63

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1.Introducción

Estudiantes de cualquier edad, país y época, independientemente de su desempeño en matemáticas, han cometido errores al resolver problemas (Gagatsis y Kyriakides, 2000). El interés de la educación matemática en los errores que cometen los estudiantes tiene una larga historia, la cual se fundamenta en la trascendencia del error, tanto para docentes como para investigadores y responsables de las políticas educativas (Peng y Luo, 2009). Desde inicios del siglo pasado, sobre todo a partir de 1920, se realizaron investigaciones enfocadas en analizar errores de estudiantes al resolver problemas, en los Estados Unidos y en Alemania, principalmente en el ámbito de la aritmética (Radatz, 1979; 1980). La relevancia de los errores para la investigación radica en que su análisis puede ayudar a entender mejor cómo aprenden los estudiantes. Particularmente, el análisis de errores puede ayudar a identificar dificultades de aprendizaje matemático y propuestas de solución (Borasi, 1987).

Diversos errores cometidos por estudiantes no se deben a descuido o desinterés, como asumen algunas teorías basadas en el conductismo, sino que son el resultado de experiencias previas en las clases de matemáticas (Radatz, 1980). Por ejemplo, si para apoyar el aprendizaje del cálculo de áreas un docente solo utiliza ejemplos de un mismo tipo, como triángulos rectángulos, el estudiante puede formarse la idea (errónea) de que la altura de un triángulo es uno de sus lados; lo cual, posteriormente, puede llevarlo a cometer errores al calcular áreas de triángulos isósceles o escalenos. Otra idea errónea sobre la altura de un triángulo puede generarse en escenarios de instrucción en los que el docente solo ejemplifica las ideas con triángulos acutángulos, ya que el estudiante puede formarse la idea de que las alturas de un triángulo siempre intersecan un lado (Gutiérrez y Jaime, 1999).

La investigación en educación matemática ha obtenido evidencia de que los errores de los estudiantes, al resolver problemas matemáticos, frecuentemente son sistemáticos (Ayres, 2001), persistentes y tienen sus origen en dificultades experimentadas durante la recepción y procesamiento de la información que se realiza durante el proceso de instrucción

(Brousseau, 1983). Además, el conocimiento sobre los errores que cometen los estudiantes es un elemento inicial importante para investigar sobre los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (Radatz, 1980). Los errores de los estudiantes son evidencia de su pensamiento y de sus necesidades, y los docentes pueden aprovechar el razonamiento que subyace en los errores que cometen los estudiantes para ayudarlos a desarrollar entendimiento conceptual (Brodie, 2014).

Durante la clase de matemáticas el aula se convierte en un entorno propicio para hacer investigación. En cada clase ocurren fenómenos que, al documentarse adecuadamente, pueden aportar información útil para que el docente realice propuestas encaminadas a fortalecer y mejorar los procesos de aprendizaje. Es necesario darle sentido a los descubrimientos que esta práctica arroja, compartirlo con otros docentes que se encuentran en condiciones similares propiciar una actitud mucho más activa de su papel frente a problemas de aprendizaje de las matemáticas.

En esta tesis se analizan los errores que cometen estudiantes de telesecundaria al resolver problemas que involucran al *Teorema de Pitágoras*, el cual es un resultado que se aborda, por primera vez, en tercer grado de secundaria (SEP, 2022). Se eligió este tema porque es un contenido fundamental en todas las ramas de las matemáticas (Reyes et al., 2018) que permite relacionar y conectar diversas áreas como álgebra, geometría, trigonometría, cálculo, etcétera (Beltrán, 2022; Gómez *et al.*, 2020; Rondero *et al.*, 2016). Realizar investigación sobre los errores es relevante ya que el error es un fenómeno natural e inevitable durante el aprendizaje de las matemáticas (Vosniadow y Verschaffel, 2004), y que puede emplearse como un medio para apoyar y fortalecer la comprensión matemática.

Actualmente, en los salones de clase de matemáticas el error se percibe como deficiencia o fracaso en el proceso educativo. En esta misma línea de ideas, algunas investigaciones de corte psicológico han conceptualizado negativamente al error (Economou, 1995). Además, la posición de la escuela hacia el error ha sido esencialmente penalizante (Morin, 1999). Así, en esta tesis se identifican causas de errores que cometen estudiantes de tercer grado de telesecundaria al abordar tareas que involucran el Teorema de Pitágoras.

1.2. Revisión de literatura

En esta sección se realiza una revisión de investigaciones sobre el error en matemáticas, particularmente sobre la conceptualización del error en ámbitos escolares. El objetivo de la revisión es enmarcar la pregunta de investigación de esta tesis en el cuerpo de conocimiento científico existente sobre el tema; así como justificar la relevancia del trabajo y resaltar los posibles aportes.

Radatz (1980) hace un recuento histórico sobre el análisis de errores en la educación matemática con el objetivo de relacionar la presencia del error con dificultades en el aprendizaje, como un punto de partida para investigar en torno al proceso de enseñanza aprendizaje, en contextos donde el error se concibe como producto de una técnica docente equivocada, persistente y sistemática. Tales investigaciones se enmarcan en tres líneas de investigación: (i) análisis del error a partir de la interacción del docente, estudiante y currículo; (ii) procesos conscientes y subconscientes involucrados en los intentos equivocados al resolver problemas; y (iii) desarrollo de estrategias didácticas para atender dificultades y errores en aprendizajes particulares. Se concluye que es importante describir las causas del error, conocer las rutas de solución individuales, así como los métodos de análisis utilizados en la investigación y en la práctica docente. Analizar los errores que cometen los estudiantes produce información sobre el proceso de resolución de problemas matemáticos y sobre la actitud de los estudiantes ante el error.

Gagatsis y Kyriakides (2000) revisaron aproximaciones epistemológicas y didácticas que sostienen maestros de primaria chipriotas respecto de los errores matemáticos que cometen estudiantes. Particularmente, determinaron cómo los docentes de primaria interpretan los errores matemáticos que cometen sus estudiantes. El marco de investigación incluye los conceptos de *obstáculo epistemológico*, *contrato didáctico* y de *actitudes*. La investigación es cuantitativa. A los docentes se les pidió que expresaran su opinión sobre las causas de los errores de sus estudiantes y también se les presentaron soluciones de problemas matemáticos para que explicaran la razón de los errores. La información se recopiló mediante un cuestionario aplicado a 350 docentes, pero solo respondieron 254 (tasa de respuesta de 74%). Para validar el cuestionario se utilizó el *Alfa de Cronbach*. Además, se

implementaron entrevistas semiestructuradas a cinco de los docentes. El análisis estadístico inferencial aportó evidencia de que las actitudes de los docentes hacia los errores están asociadas con las ideas que los docentes revisaron en un curso de formación especializado en matemáticas. Aunque la mayoría de los docentes recurren al conductismo para entender los errores de los estudiantes, algunos utilizan la *teoría del error* de la ciencia cognitiva y la *teoría de los obstáculos*. Más del 65% de los participantes consideró que los errores se asocian a las capacidades limitadas de los estudiantes y aproximadamente la mitad de los docentes explican los errores de los estudiantes como deficiencias en sus conocimientos previos.

Ayres (2001) investigó la relación entre errores sistemáticos al operar con paréntesis en un contexto algebraico y la presencia de *carga cognitiva* (cognitive load). El marco de la investigación incluye el concepto de *carga cognitiva*. Se argumenta que el uso de estrategias de resolución de problemas, análisis de medios y fines al resolver problemas crea cargas cognitivas altas durante el proceso de solución, provocando mayor cantidad de errores, en relación con la solución de ejercicios. Se realizaron tres experimentos con 229 estudiantes australianos (Sydney) de octavo y noveno grado. El análisis fue cuantitativo e incluyó un análisis estadístico ANOVA de una vía. En el primer experimento, se asignaron ocho problemas que requerían la expansión de dos paréntesis sucesivos; cada paréntesis requería dos cálculos. En este caso, los estudiantes cometieron más errores durante las operaciones del segundo paréntesis que con las del primero, y más errores durante la segunda operación que con la primera, dentro de cada paréntesis. Los protocolos verbales recopilados en el segundo experimento (cuatro problemas) indican que la mayoría de los errores se deben a fallos en la memoria de trabajo. En el tercer experimento (ocho problemas) se utilizó una metodología de doble tarea, mediante la que se obtuvo evidencia de que la carga cognitiva al operar con paréntesis afecta el rendimiento de la memoria de trabajo. Se identificaron errores de signo, errores aritméticos y errores procedimentales.

Tariq et al. (2008) analizaron errores y concepciones erróneas de estudiantes de primer año de una licenciatura en biociencias al aplicar conceptos matemáticos a situaciones abstractas y contextualizadas en una prueba escrita. En la investigación participaron 326 estudiantes voluntarios de Reino Unido, inscritos en licenciaturas que van de las ciencias biomédicas

hasta la zoología. La información empírica se recolectó mediante un test de 20 ítems (10 cálculos matemáticos abstractos y 10 problemas de palabras en un contexto biológico). La prueba se implementó en sesiones supervisadas, en condiciones análogas a las de un examen. Se permitió el uso de calculadoras pero se solicitó explicar el proceso de solución. No se presionó a los participantes, con el tiempo, para finalizar la prueba. Se realizó un análisis cuantitativo mediante porcentaje de respuesta correcta, además de análisis cualitativo del tipo de errores. Más del 50% de los estudiantes tuvo dificultades con el cálculo de volúmenes o superficies, la conversión de unidades de medida, el manejo de razones, proporciones y potencias de 10, así como con la determinación de un aumento o unidades de medida. También se observó reticencia a resolver problemas contextualizados. Los errores y conceptos erróneos fueron similares a los reportados previamente entre niños de 13 y 14 años.

Singh et al. (2010) analizaron si el cambio de idioma del chino o tamil, al inglés, durante la enseñanza de las matemáticas ha perjudicado el logro de los estudiantes. Se identificaron tipos de error cometidos por 22 estudiantes de cuarto grado de primaria al resolver problemas. Se analizó si los errores se deben al lenguaje o a los conocimientos matemáticos. La selección de los participantes fue intencional, con representantes de contextos rurales y urbanos. Las fuentes de información fueron una prueba integrada por 20 tareas matemáticas en inglés. Además, se realizaron entrevistas semiestructuradas, utilizando el protocolo de análisis de errores de Newman, a los estudiantes que respondieron incorrectamente varios ítems. La entrevista se enfocó en dos *problemas bien definidos* y uno *mal definido*. Las categorías de análisis son: (a) error de lectura, (b) error de comprensión, (c) error de transformación, (d) error de habilidades de procesamiento, (e) error de codificación y (f) error por descuido. Se obtuvo evidencia de que estudiantes, tanto urbanos como rurales, cometen errores que se relacionan con el lenguaje. En el 68% de los casos, los errores se deben a deficiencias en el conocimiento del contenido. Los estudiantes enfrentan más dificultades en cuanto al conocimiento del contenido en comparación con las dificultades del lenguaje.

Brodie (2014) estudió cómo los integrantes de una *comunidad de práctica docente* comprenden los errores de los estudiantes y cómo cambian su forma de conceptualizar a

tales errores. Particularmente, se analiza cómo los docentes aprenden a trabajar con los errores de los estudiantes. El marco de investigación se basa en la conceptualización del *error* como confusiones (mistakes) sistemáticas, persistentes y generalizadas que cometen los estudiantes en diversos contextos. Se distingue entre *errores* y *deslices*, que son equivocaciones que se corrigen fácilmente cuando se identifican y señalan. Los errores son más difíciles de abordar porque surgen aunque no se enseñan explícitamente; son persistentes incluso al corregirse, por lo que parecen resistentes a la instrucción; aparecen dentro y entre contextos, lo que sugiere que son sistémicos y no resultado de un fracaso individual del estudiante o del docente. La información empírica se obtuvo de la segunda fase del proyecto DIPIP, en el que docentes de diferentes escuelas públicas se reunieron para trabajar y reflexionar sobre la comprensión de los errores de los estudiantes y la manera de abordarlos. Los participantes provienen de escuelas con pocos recursos y bajo rendimiento, así como escuelas suburbanas con buenos recursos y resultados. Los docentes trabajaron en pequeños grupos por grado (de tres a cuatro docentes y un líder de grupo) durante tres años para analizar errores en conceptos matemáticos específicos y diseñar lecciones para abordar estos errores. Algunos docentes del grupo se ofrecieron como voluntarios para impartir las lecciones, las cuales se grabaron en video. Luego, los pequeños grupos reflexionaron sobre las lecciones grabadas y eligieron dos episodios, uno en el que el docente tuvo un buen desempeño al abordar los errores de los estudiantes y otro en el que no lo hizo tan bien. Se identificaron tres cambios importantes en los docentes, respecto de su conceptualización sobre los errores de los estudiantes: (a) de identificarlos a interpretarlos; (b) de interpretarlos a abordarlos; y (c) de centrarse en los estudiantes a centrarse en su propio conocimiento.

Kingsdorf y Krawec (2014) investigaron los tipos de errores, y su frecuencia de aparición, cometidos por estudiantes con dificultades de aprendizaje (Learning Disabilities, abreviado LD) y sus compañeros con desempeño promedio (Average Achieving) al abordar problemas de palabras (word problems). El marco de investigación incluyó el modelo de resolución de problemas propuesto por Mayer (1985). Los datos se recopilaron a lo largo de dos años (2008-2010). En el primer año participaron estudiantes de octavo grado y, en el segundo, estudiantes de séptimo grado. Inicialmente, fueron seleccionadas 40 escuelas

secundarias en un distrito escolar grande, urbano y diverso del sureste de los Estados Unidos; y en estas se eligieron 779 estudiantes. La muestra final estuvo integrada por 101 participantes, de los cuales 38 se clasificaron con LD. La competencia de los estudiantes; así como la frecuencia y tipo de errores se evaluó mediante la *prueba CBM de resolución de problemas matemáticos*, integrada por 10 problemas de palabras. El análisis de la información se realizó mediante seis categorías, cuatro de las cuales fueron a priori, basadas en el modelo de Mayer: (i) error de selección de número, (ii) error de operación, (iii) error de paso faltante y (iv) error de cálculo. Las dos categorías identificadas durante el análisis son: (a) error aleatorio y (b) error de omisión (pregunta en blanco). También se realizó un análisis MANOVA. Se obtuvo evidencia de que los estudiantes con dificultades de aprendizaje cometieron significativamente más errores relacionados con la selección de números, la selección de operaciones, la inclusión de toda la información relevante y los errores aleatorios, atribuidos a falta de habilidades de control.

Veloo *et al.* (2015) identificaron dificultades que presentan estudiantes de décimo grado durante la resolución de problemas que involucran símbolos matemáticos y gráficas, para establecer indicadores de rendimiento. El tipo de errores que cometen estudiantes de bachillerato se analizó mediante métodos cuantitativos y cualitativos (análisis de contenido). La información empírica se recolectó a través de pruebas escritas y entrevistas semiestructuradas. Los autores utilizaron el índice de dificultad del ítem para medir el desempeño de los estudiantes. Se identificaron cuatro tipos de errores: (i) en la resolución de problemas, (ii) de valor, (iii) por descuido y (iv) relacionados con los conceptos. Las razones vinculadas a los errores que cometieron los estudiantes fueron: falta de comprensión, olvido de procedimientos, negligencia al transcribir información de la pregunta, descuido y conjeturas equivocadas. El índice de dificultad permitió asociar aquellos ítems más complicados con la tendencia de los estudiantes a cometer más errores.

En el trabajo de Zazkis y Zazkis (2016) se relacionan concepciones de futuros docentes de secundaria sobre cómo demostrar el teorema de Pitágoras con el tipo de evaluación utilizada; bajo la premisa de que la demostración de un teorema se fundamenta en la memorización. Se examinaron concepciones sobre la demostración en los futuros docentes y se identificaron sus dificultades al aprender a demostrar el teorema de Pitágoras mediante

guiones creados por los participantes a partir de una interacción imaginaria con el estudiante, dicho diálogo imaginario pretende predecir obstáculos en los futuros docentes, al mismo tiempo que se evalúa su comprensión y se proporciona un apoyo para superarlos. Los autores utilizaron una adaptación del modelo de Mejía-Ramos et al. (2012) para evaluar la comprensión de la demostración. Los elementos útiles para la comprensión de demostraciones escolares para el teorema de Pitágoras se encuentran clasificadas en dos categorías, las cuales son definidas como: comprensión local (significado de los términos y declaraciones, así como justificación de las afirmaciones) y comprensión holística (resumir a través de ideas de alto nivel, transferir ideas a otro contexto e ilustrar con ejemplos). Se obtuvo evidencia de que solamente una cuarta parte de los participantes se enfocaron en la evaluación de la comprensión holística de la demostración, además de que existen dificultades para distinguir entre los datos que justifican las afirmaciones.

Mohyuddin y Khalil (2016) analizaron las concepciones erróneas y errores que cometen estudiantes de quinto grado de primaria durante el aprendizaje de matemáticas. Se diseñó un test basado en los programas de estudio de primero a cuarto grado, el cual incluyó ocho áreas conceptuales (números naturales, operaciones aritméticas, fracciones, operaciones con fracciones, números decimales, medida, geometría y manejo de la información). En la investigación participaron 248 estudiantes de doce escuelas seleccionadas aleatoriamente ubicadas en la ciudad de Faisalabad, en Pakistán. El test fue aplicado por los investigadores. Se llevó a cabo un análisis cuantitativo utilizando el software SPSS. Se realizaron análisis por ítem y por género para identificar los errores y conceptos erróneos cometidos por los estudiantes, así como para determinar si existía uniformidad por género. Los análisis revelaron que los estudiantes cometieron errores en las ocho áreas conceptuales y sostuvieron ideas matemáticas erróneas, por lo que el rendimiento académico se mantuvo muy bajo (promedios entre 6.2 y 16.1 de 51 puntos posibles).

Un estudio realizado por Santoso *et al.* (2017) proporciona información sobre los errores más comunes que cometen estudiantes malayos de bachillerato durante la resolución de problemas verbales. Se efectuó un análisis descriptivo de datos obtenidos a partir de tres instrumentos: (i) una prueba en la que se narra una historia para examinar la comprensión de los estudiantes, (ii) una rúbrica que examina las dificultades que experimentan los

estudiantes a partir de una descripción de los errores y (iii) entrevistas. Los resultados fueron analizados y clasificados mediante el Análisis de Errores de Newman (NEA). Los tipos de errores se clasificaron en orden de mayor a menor frecuencia de aparición; siendo el tipo de error más común el de transformación, seguido por el de habilidades de proceso, el de comprensión, codificación y lectura. Los autores concluyen que dichos errores se deben a una tendencia de los estudiantes por contestar apresuradamente y una comprensión equivocada del problema verbal.

Fitriani et al. (2018) describen errores que cometen estudiantes al resolver problemas matemáticos que involucran el cálculo de derivadas, con base en la taxonomía de errores de Newman. La investigación es de corte cualitativo con un diseño de estudio de caso y una selección intencional de los participantes. Los datos se recopilieron mediante una prueba escrita y una entrevista a estudiantes de grado 11 en Bandung, Indonesia. Los resultados indican que los estudiantes cometieron cinco tipos de errores: (i) de comprensión, (ii) de transformación, (iii) de habilidad de procesamiento, (iv) de codificación y (v) de descuido.

Rushton (2018) exploró si estudiantes de matemáticas de séptimo grado pueden aprender mejor a partir del uso de ejemplos resueltos y del análisis de errores, en relación con las aproximaciones tradicionales. El *análisis de errores* consiste en presentar un problema y un procedimiento de solución, en el que uno o más pasos son incorrectos. Los estudiantes analizan y explican los errores y luego completan el ejercicio correctamente, argumentando su propia solución. Se utilizó una metodología mixta, que incluye un diseño cuasi experimental pretest-posttest. Los datos cuantitativos se emplearon para determinar la significancia estadística de la efectividad del análisis de errores, y los métodos cualitativos ayudaron a comprender la experiencia de los participantes durante el análisis de errores. En la investigación participaron dos grupos de estudiantes de séptimo grado, inscritos en escuelas de una comunidad suburbana de Utah en los Estados Unidos. El grupo de control y el grupo tratamiento estuvieron integrados por 26 y 27 estudiantes, respectivamente. El mismo docente enseñó en ambos grupos. Las pruebas abordaron los temas de ecuaciones y desigualdades. Los resultados indican que no hubo diferencias significativas en las puntuaciones en relación con el pre-test. Sin embargo, sí se observó una diferencia significativa en las puntuaciones del post-test diferido.

Para analizar los errores cometidos por estudiantes en la resolución de problemas relacionados con el Teorema de Pitágoras, Sari y Wutsqa (2019); realizaron una investigación descriptiva y cualitativa, con estudiantes de noveno grado en Indonesia (tercer grado de secundaria). Se interesaron por identificar los factores asociados con los errores que cometen los estudiantes, utilizando el Análisis de Errores de Newman (NEA), el cual permite identificar los errores a partir de las respuestas a una prueba escrita. Los datos se recolectaron por medio de una hoja de respuestas en la cual se dan explicaciones de lo realizado por el estudiante. Se identificaron cinco tipos de errores: (i) de lectura, (ii) de comprensión, (iii) de transformación, (iv) de habilidades de proceso y (v) de codificación. Los autores concluyen que es importante que el docente reconozca los errores de sus estudiantes ya que esto le permitirá determinar qué acciones tomar para prevenirlos en el futuro.

Retnawati (2020) identificó las dificultades de aprendizaje al estudiar matemáticas, así como sus causas, con énfasis en el teorema de Pitágoras. El estudio se realizó en Indonesia, con estudiantes de segundo grado (de comunidades rurales y urbanas). La investigación fue cualitativa y descriptiva. Se realizaron observaciones del proceso instruccional y después se aplicó una prueba diagnóstica, de ocho ítems, a 103 estudiantes. Las preguntas fueron versiones modificadas de los materiales utilizados durante la observación. Finalmente, se realizaron entrevistas a seis estudiantes de cada escuela, quienes obtuvieron puntajes por debajo del mínimo. La información se analizó mediante técnicas de reducción y visualización. Los resultados indican que los tipos de dificultades predominantes, en ambas comunidades, son: dificultades para encontrar soluciones y dificultades para comprobar las respuestas. Las dificultades se clasifican en dificultades para comprender y analizar problemas, dificultades para diseñar y planificar una estrategia de conclusión, dificultades para encontrar soluciones a los problemas y dificultades para comprobar las respuestas. Los factores causantes de dichas dificultades son: el olvido de las fórmulas y formas de resolver problemas dados, imposibilidad de determinar resultados de la raíz cuadrada y el nerviosismo por terminar el diagnóstico en un tiempo determinado.

Neidorf et al. (2020) utilizaron datos de las pruebas estandarizadas *TIMSS* y *TIMSS Advanced*, obtenidos en un periodo de 20 años (1995-2015), para analizar concepciones

erróneas y errores cometidos por estudiantes de física y matemáticas. También se buscó realizar una comparación entre países y por género. El marco conceptual incluye el concepto de *objetivo de desempeño*, que son los conocimientos y habilidades específicos que se esperan de los estudiantes en los diferentes grados. Se utilizaron datos a nivel de ítem para identificar las concepciones erróneas, errores y malentendidos de estudiantes de cuarto y octavo grado (TIMSS); así como de estudiantes de grado 12 (TIMSS Advanced). Las concepciones erróneas (misconceptions) se evaluaron en el caso de física, y los errores en matemáticas, donde se esperaba que los estudiantes siguieran algún procedimiento rutinario para obtener la respuesta correcta. Las concepciones erróneas reflejan ideas o nociones preconcebidas incorrectas de un concepto físico. Los *errores* reflejan cualquier respuesta que no coincida con la respuesta correcta. Los *malentendidos* (misunderstandings) se evaluaron tanto en física como en matemáticas y reflejan el hecho de que los estudiantes no entienden el concepto físico o matemático necesario para abordar un ítem. En el caso de matemáticas se identificaron nueve objetivos de desempeño asociados con el concepto de función lineal. El análisis incluyó el cálculo de porcentajes de respuestas correctas y la implementación de pruebas de hipótesis estadísticas (prueba t para diferencia de proporciones). La frecuencia de ciertos tipos de conceptos erróneos, errores y malentendidos estudiantiles en cada grado varió en los cinco países. Se encontraron diferencias de género en los tres grados, pero fueron más pronunciadas en física que en matemáticas.

Siskawati et al. (2021) describieron errores de estudiantes al resolver problemas. La investigación fue de corte cualitativo y descriptivo. En la investigación participaron 40 estudiantes indonesios de séptimo grado (los estudiantes se encuentran agrupados por sexo, al ser un país musulmán). Se llevaron a cabo tres fases de recolección de datos. Cada fase de recolección se realizó mediante cuatro problemas. La puntuación máxima para cada problema es de 11 puntos. Se asignaron tres puntos por habilidad de proceso, y dos puntos para cada uno de los siguientes aspectos: (a) lectura, (b) comprensión, (c) transformación y (d) codificación. Además, se realizaron entrevistas a 20 participantes para determinar las causas de los errores que cometieron. Se obtuvo como resultado que la mayoría de errores de los varones son de codificación; mientras que los cometidos por las mujeres son de

proceso y codificación. La principal causa de los errores radica en que los estudiantes no pueden identificar la información en el enunciado de los problemas.

Winarso y Toheri (2021) relacionaron los errores de estudiantes al resolver problemas de matemáticas con sus estilos de aprendizaje. El marco de la investigación incluyó la teoría del *aprendizaje experiencial* de David Kolb. El estudio se llevó a cabo en una escuela secundaria de Cirebon, Indonesia. La investigación fue cualitativa, basada en un diseño de estudio de caso. La recolección de la información se llevó a cabo mediante el *Inventario de Estilos de Aprendizaje* de Kolb (KLSI versión 3.1) y problemas de matemáticas. El análisis de datos incluyó la identificación de cuatro categorías de *orientaciones de aprendizaje*. En la investigación participaron 24 estudiantes. Los errores cometidos por los estudiantes de estilo divergente fueron errores de procedimiento y malentendidos; los de los estudiantes asimiladores fueron errores de procedimiento y conceptuales; el tipo de error de los convergentes fue un error de procedimiento; el tipo de error cometido por los acomodadores fue un error teórico. Los errores conceptuales se debieron a una mala comprensión de los conceptos; mientras los errores de procedimiento ocurrieron cuando los estudiantes utilizaron un método no sistemático para completar el examen.

1.2.1. Problemas, marcos, metodologías y resultados

Mediante la revisión de la literatura se identificó que los conceptos erróneos y los errores que cometen los estudiantes al resolver problemas matemáticos son persistentes y similares en todos los contextos, independientemente de los planes de estudio o los métodos de enseñanza (Smith et al., 1994). Además, los errores que cometen los estudiantes están asociados a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, por lo que se plantean las siguientes cuestiones: ¿cuáles son las causas de los errores que cometen estudiantes de telesecundaria, cuando resuelven problemas que involucran el teorema de Pitágoras?, ¿cómo categorizar las causas de los errores que cometen estudiantes de telesecundaria cuando formulan, justifican y usan el teorema de Pitágoras?

Las principales líneas de investigación identificadas en la literatura están asociadas con la clasificación de los errores (Kingsdorf y Krawec, 2014; Neidorf et al., 2020; Radatz, 1980); sin embargo, la atención ha comenzado a centrarse en la comprensión de los docentes

respecto de los errores del estudiante (Gagatsis y Kyriakides, 2000) y las competencias docentes necesarias para abordar el error en el aula. También existen trabajos que han buscado asociar los errores que cometen estudiantes con otras variables, entre las que destacan las dificultades de aprendizaje (Kingsdorf y Krawec, 2014), los estilos de aprendizaje de los estudiantes (Winarso y Toheri, 2021) o el cambio en el idioma de enseñanza (Singh et al., 2010).

En cuanto a las metodologías utilizadas hay estudios cuantitativos, cualitativos y que utilizan métodos mixtos. En lo que respecta a los estudios cualitativos predomina la taxonomía de errores propuesta por Newman (Clements, 1980). En lo que respecta a los datos, la mayoría de los trabajos se basan en estudios de caso y en la selección de los participantes de forma intencional, identificando solamente un estudio que contó con una muestra estadísticamente representativa a escala internacional (Neidorf et al., 2020).

1.3. Planteamiento del problema

La enseñanza de las matemáticas en telesecundaria está fundamentada en el desarrollo del pensamiento matemático, como un constructo interdisciplinario, necesario para interpretar fenómenos vinculados a la ciencia y tecnología que son parte de un mundo globalizado (SEP, 2022). En la actualidad, es deseable que los jóvenes desarrollen, en la clase de matemáticas, capacidades lógicas, sistemáticas, críticas e innovadoras (Sari y Wutsqa, 2019). Bajo un enfoque didáctico de resolución de problemas se favorece la articulación de conceptos matemáticos tales como factorización, modelización de situaciones que involucran relaciones funcionales, áreas de polígonos, criterios de semejanza, razones trigonométricas y teorema de Pitágoras; como un medio o dispositivo para favorecer aprendizaje de las matemáticas al hacer uso de sus conocimientos previos. Lo anterior involucra un esfuerzo cognitivo que fuerza al estudiante a buscar estrategias de solución y con ello a construir un aprendizaje matemático con entendimiento (Balbuena *et al.*, 2021).

La metodología de telesecundaria indica que, además de articular conceptos matemáticos, es necesario que los estudiantes desarrollen habilidades de razonamiento deductivo e inductivo, así como habilidades de generalización y de síntesis todo lo cual se promueve mediante el estudio de la geometría. También es importante que durante el proceso de

instrucción se fomente la creatividad de los estudiantes para encontrar la solución a un problema y resiliencia para aprender a afrontar el error, mediante la validación de argumentos y la comparación de rutas de solución (Balbuena *et al.*, 2021).

A pesar de los esfuerzos que hace el Sistema Educativo en México por actualizar el currículo y los materiales educativos, particularmente en telesecundaria, los resultados de pruebas estandarizadas nacionales e internacionales, como la prueba PISA atribuye a México una puntuación media de 395 puntos, lo que estadísticamente significa que, se está por debajo del promedio de los países de la OCDE (OECD, 2023). Los resultados anteriores son consistentes con los de otras investigaciones que identifican una disminución en el rendimiento en matemáticas como un fenómeno que ocurre en diversas partes del mundo (Veloo *et al.*, 2015).

El informe del *Consejo Nacional de Investigación* (NRC) de los Estados Unidos revela que el menor desempeño de los estudiantes americanos se obtuvo en matemáticas. En el informe de la OCDE del 2023, Malasia superó a México por 14 puntos. Los desafíos para los docentes de matemáticas son similares en todo el mundo, los cuales implican contribuir con la mejora del aprendizaje de los estudiantes, pero surgen cuestiones que deben guiar a esos desafíos, entre ellas es importante determinar, ¿cómo contribuir para que los estudiantes mejoren su desempeño en matemáticas?, ¿el docente es consciente de las estrategias que utilizan los estudiantes al resolver problemas matemáticos?, ¿qué hacer con los errores que cometen los estudiantes?

Las matemáticas son una herramienta que permite resolver problemas de la vida cotidiana, por ello, en los currículos de todos los países del mundo se resalta la importancia de su estudio (Veloo *et al.*, 2015). El problema se presenta cuando el estudiante no se apropia de los conceptos o lo hace de manera parcial, originando dificultades para construir nuevos conceptos o ideas matemáticas (Radatz, 1979). Si este fenómeno de falta de comprensión profunda ocurre en etapas escolares tempranas, el desempeño académico de los estudiantes en niveles posteriores se ve afectado.

La evaluación es un elemento importante para determinar la eficacia y eficiencia del proceso de enseñanza-aprendizaje. Dicha evaluación, debe ser integral y permitir identificar

el progreso de los estudiantes (Santoso *et al.*, 2017). Es necesario que sea vista como un medio y no como un fin, en la que se deben hacer adecuaciones. La evaluación representa un diagnóstico, y por ello debiera de ser un diálogo con los estudiantes, en el que se hacen patentes sus dificultades para resolver problemas o desarrollar un entendimiento profundo de las ideas, por lo que se convierte en una herramienta útil para identificar fallos o deficiencias en el entendimiento matemático de los estudiantes (Zazkis y Zazkis, 2016). Lo anterior es un fenómeno que se tiene que contemplar desde el diseño de las tareas de aprendizaje, durante la implementación de las tareas y el proceso de evaluación. La forma de evaluación depende de los componentes que se quieran valorar (Sari y Wutsqa, 2019).

El análisis del error está inmerso en el proceso de evaluación y debe atenderse para ser aprovechado, ya que es útil para examinar las dificultades que presentan los estudiantes (Santoso *et al.*, 2017). El error es resultado de experiencias en el aula, por lo que se requiere de la intervención del docente para evitar que persista en grados académicos posteriores (Radatz, 1979). Cuando estudiantes de tercer grado de telesecundaria estudian por primera vez el teorema de Pitágoras es usual que cometan errores durante la resolución de problemas que son un indicador de ciertas dificultades de aprendizaje o comprensión (Sari y Wutsqa, 2019).

Con base en lo expresado en los párrafos previos, el objetivo general de este trabajo es identificar y clasificar las causas de errores que cometen estudiantes de telesecundaria cuando formulan, usan y justifican el teorema de Pitágoras durante la resolución de problemas. Los objetivos específicos son dos: (1) identificar las causas de los errores que cometen estudiantes de telesecundaria cuando resuelven problemas que involucran el teorema de Pitágoras y (2) clasificar las causas de los errores de acuerdo con la jerarquía de errores propuesta por Newman (Clements, 1980).

1.4. Justificación

El aula tiene el potencial de convertirse en un laboratorio donde es posible hacer investigaciones en torno a los procesos educativos que en él se llevan a cabo. El análisis de los errores que cometen los estudiantes constituye una buena oportunidad para que el docente-investigador formule y responda preguntas sobre los procesos de enseñanza y

aprendizaje de las matemáticas, ya que constituyen fuentes de información valiosa para conocer cuáles son los errores más comunes e identificar la reacción y actitud de los estudiantes ante ellos. La identificación y categorización de errores permite medir el desempeño de los estudiantes de manera efectiva, para relacionarlo con dificultades persistentes, la mayoría de las cuales están asociadas a conceptos básicos o elementales, cuya atención supondría una mejora a mediano plazo de los indicadores sobre desempeño académico (Radatz, 1979).

El teorema de Pitágoras es uno de los teoremas más importantes de la matemática y la educación matemática, ya que está ligado a saberes transversales de álgebra, geometría, trigonometría, cálculo, entre otros (Beltran, 2022; Gomez el al., 2020; Rondero et al., 2016). Sin embargo, también es un tema complicado que junto con las razones trigonométricas son los temas con mayor índice de dificultad en el bachillerato (Veloo, 2015). El hecho antes mencionado incrementa la posibilidad de que los estudiantes cometan errores al resolver problemas que involucren estos contenidos. Así, con este trabajo de tesis se pretende contribuir con el incremento en el conocimiento científico con base en el cual se formulen propuestas para lograr una mejora del desempeño académico de los estudiantes de secundaria.

De acuerdo con Neidorf et al. (2020), comprender cómo las concepciones erróneas y los errores matemáticos que cometen estudiantes en el bachillerato o la universidad se relacionan con una falta de comprensión de conceptos e ideas matemáticas revisadas durante la educación básica es importante para maestros, formadores de docentes, investigadores y políticos. Identificar patrones en las ideas erróneas pueden orientar la instrucción como auxiliares en la detección de lagunas o deficiencias específicas en los currículos de los distintos grados. Otros autores como Große y Renkl (2007) sugieren que dado que los errores son inherentes al ser humano, integrar el análisis de errores en el proceso de aprendizaje de las matemáticas puede favorecer que los estudiantes reflexionen sobre qué saben y cómo lo saben. Esta reflexión puede favorecer el fortalecimiento de su capacidad de crear soluciones y explicaciones más claras y completas.

2. MARCO DE INVESTIGACIÓN

2.1. Introducción

En el presente capítulo se explica qué es un marco de investigación y cuáles son los diferentes tipos de marcos, así como su utilidad durante el desarrollo de una investigación en educación matemática. Un marco consiste en un mecanismo indagatorio, mediante el cual se conectan los hechos empíricos con las interpretaciones teóricas de tales hechos. Existen diferentes metáforas a través de las cuales los investigadores han intentado comunicar qué es un marco de investigación, a partir de hechos o fenómenos comprensibles para la mayoría de las personas. Una de esas metáforas es aquella que concibe a un marco como unos lentes o gafas, a través de los cuales se observa la realidad. Las teorías y constructos son como gafas, “algunas te ayudan a ver más claramente los objetos en los cuales estás interesado, mientras que otras solo te muestran una imagen distorsionada o borrosa” (Aguilar, 2013, p. 4). Dependiendo del objetivo que un investigador persigue es el tipo de gafas o lentes que debe usar, ya sea de sol, para ver de lejos o para ver de cerca.

Así, un marco de investigación hace posible la interpretación del fenómeno tomando en cuenta ciertos aspectos o puntos de vista. Sin embargo, esta analogía no es única, existen otros investigadores que consideran a un marco de investigación, más bien, como un andamio, formado por una estructura de ideas o conceptos, a través de los cuales el investigador puede mirar cosas más allá del sentido común, puede mirar fenómenos que no son perceptibles sin el uso de dicha estructura teórica (Eisenhart, 1991). El marco de investigación puede considerarse como un conjunto de herramientas las cuales ayudan o facilitan dar respuesta a las preguntas de investigación (Lester 2005).

2.2. Tipos y características de los marcos de investigación

Eisenhart (1991) considera que existen tres tipos de marco de investigación, cada uno con características particulares que determinan su pertinencia: marco teórico, marco práctico y marco conceptual.

Cuando se utiliza un marco teórico, una teoría formal (como la teoría de situaciones didácticas o la teoría antropológica de lo didáctico, por mencionar algunos ejemplos) proporciona el eje medular que guía la investigación. El problema de investigación se plantea con base en los principios establecidos por la teoría para respaldarla, ampliarla o revisarla. Al utilizar un marco teórico, todas las fases del proceso de investigación se apegan a las convenciones, supuestos y resultados obtenidos por la teoría, con lo que se fomenta su desarrollo y divulgación. Uno de los principales inconvenientes que plantea el uso de un marco teórico para el presente proyecto es que, los datos que se obtengan deben ser privados de su contexto y significado local, para poder adherirse a la teoría. Lo anterior también supone un problema colateral, ya que al prescindir del significado local del objeto de estudio, también lo hace de información de interés en el contexto de la matemática educativa y se estaría aceptando un resultado incompleto o adecuado a los decretos teóricos (Eisenhart, 1991).

Por otra parte, un marco práctico se distingue porque, en este caso, la investigación se lleva a cabo utilizando *lo que funciona*, con base en la experiencia y el conocimiento práctico de los profesionales involucrados en la problemática de interés, quienes están interesados en generar conocimiento que les permita mejorar su desempeño profesional. El problema de investigación se concentra en situaciones cotidianas, las cuales son valoradas según la experiencia y el conocimiento preexistente del profesional, en el caso particular, podríamos hablar de un docente de matemáticas, dichas situaciones son problemas de las personas que están directamente involucradas en el fenómeno de interés. Sin embargo el conocimiento personal del docente no es suficiente para abordar diversas problemáticas educativas, así como, el análisis de los datos. Por lo antes mencionado, el uso de un marco práctico puede limitar el alcance de las conclusiones y resultados de la investigación. Por otra lado, también puede sesgar el proceso de interpretación ya que las conclusiones estarán influenciadas fuertemente por las creencias y conocimientos del profesional (Eisenhart, 1991).

En tercer lugar, el marco conceptual consiste en un conjunto de ideas, principios y conceptos estructurados que guían una investigación a través de ideas y conceptos que sirven de justificación para recopilar datos, analizarlos y explicarlos. En este caso la

pregunta de investigación surge de la relación entre un problema (el bajo rendimiento de los estudiantes de matemáticas), los resultados de investigaciones y literatura previa relacionada con el tema en cuestión; así como de la experiencia obtenida mediante la práctica profesional del investigador. En este tipo de marco, los conceptos que lo integran sirven como herramienta para interpretar los datos, así como, para obtener las conclusiones, encaminadas a dar respuesta a la pregunta de investigación. El marco conceptual puede estar inspirado en una o varias teorías y, además, complementarse con aspectos del conocimiento y experiencia profesional, para que la respuesta al problema de investigación integre todos los aspectos posibles, teóricos y prácticos, conocidos en un cierto momento. Esta plasticidad permite adaptar los conceptos y teorías, con la finalidad de argumentar por qué la respuesta a una pregunta de investigación es adecuada en un contexto determinado, y por qué, al mismo tiempo, puede generalizarse a otros contextos con características similares. Los resultados obtenidos mediante el uso de un marco conceptual son apreciados, debido a la sistematización del proceso; evitando que el investigador exprese justificaciones sin fundamento (Eisenhart, 1991). Al utilizar un marco conceptual se llega a un punto de equilibrio en el que se justifica la evidencia a partir de teorías, conceptos y experiencia del investigador para resolver un problema de investigación.

Con base en las características descritas anteriormente, el presente trabajo de investigación se inclina por la utilización de un marco conceptual, su plasticidad lo hace una guía adecuada para interpretar y justificar la diversidad de fenómenos relacionados con la matemática educativa. Una vez que se han establecido las preguntas u objetivos de la investigación, es importante establecer la perspectiva teórica que apoyará la recolección e interpretación de la información empírica con base en la cual se sustentará la respuesta a dicha pregunta. En el presente estudio se ha optado por una perspectiva integradora interpretativista, la cual parte de un enfoque cualitativo y donde el marco de investigación se explicita a partir de la estructuración de conceptos que delimitan el objeto de estudio en un contexto determinado, es por ello que se ha optado por un marco conceptual; como una estructura que define la perspectiva adoptada y por lo tanto guía la recopilación de datos para el estudio. Este proceso de conceptualización permite establecer una conexión entre

las observaciones, los datos empíricos y el análisis posterior para llegar a una interpretación (Eisenhart, 1991).

2.3. Elementos que integran el marco conceptual

En esta sección se describen los conceptos e ideas teóricas utilizadas para responder a la pregunta de investigación, así como la forma en que se utilizaron, tanto para diseñar el instrumento de recolección de la información como para analizar la información empírica. El primer elemento del marco es una taxonomía de causas de los errores propuesta por Newman (Clements, 1980), el cual ha sido utilizado ampliamente para analizar los errores que cometen los estudiantes al resolver una amplia diversidad de problemas matemáticos, principalmente problemas de palabras (word problems). Otro elemento del marco incluye una revisión del desarrollo histórico del teorema de Pitágoras, con la finalidad de identificar algunas dificultades inherentes a este concepto matemático que pueden impactar en el entendimiento que los estudiantes tienen del mismo.

2.3.1 Taxonomía de causas de errores de Newman

El éxito escolar de los estudiantes durante la educación básica, incluyendo la secundaria, depende que tan bien se haya llevado a cabo el proceso de construcción de significado de los conceptos matemáticos. Lo anterior plantea diferentes retos para el logro de una formación integral, incluyendo la capacidad para aplicar reglas, algoritmos y resultados matemáticos durante el proceso de resolución de problemas, de interpretación o justificación de resultados (Veloo, 2015). El análisis de las deficiencias durante el proceso de instrucción constituye un área de oportunidad para identificar experiencias escolares previas que deben mejorarse. El error es un fenómeno natural durante el proceso de aprendizaje, útil para diagnosticar cuáles son los retos que enfrenta el docente durante el desempeño de su actividad profesional y la formulación de propuestas, con fundamento científico, para abordar tales problemáticas.

Para Radatz (1979), las dificultades escolares son la manifestación de problemas en la comprensión de ciertos conceptos, de tal manera que el análisis de los errores que los estudiantes cometen cuando resuelven problemas proporciona información útil que puede emplearse en la toma de decisiones que favorezcan una mejora en el desempeño de los

estudiantes. Algunos de los factores asociados a las dificultades que afectan el éxito de los estudiantes son: la capacidad de cálculo, la capacidad de hacer implicaciones matemáticas a partir de palabras o símbolos, dar sentido a los diversos procesos matemáticos y seguir procedimientos efectivos con problemas matemáticos (Holander, 1978).

Conocer y describir los errores que cometen los estudiantes aporta información valiosa para el docente sobre el proceso de resolución de problemas matemáticos (Radatz, 1979). Es así que en el marco conceptual que orienta el desarrollo de este trabajo se considera al error como fuente de información que resulta de implementar conceptos que no se interpretaron, comprendieron o interiorizaron correctamente. El método de Análisis de errores de Newman, es un procedimiento de diagnóstico, integrado por jerarquías de *causas de error* que se aplican a *problemas verbales* (word problems) de contenido matemático de un solo paso. Los niveles de la jerarquía de errores, descritos en Clements (1980) son:

Causas asociadas con interacciones entre el estudiante y la pregunta. En el primer nivel se encuentra el *error de lectura o decodificación* (P1), el cual ocurre cuando las palabras o símbolos escritos no fueron reconocidos por el estudiante, lo que lleva a no seguir con el curso de solución del problema. En el segundo nivel está el *error de comprensión* (P2) se da cuando puede leer preguntas pero no entiende los requisitos, lo que provoca equivocaciones o fracasos en el intento por resolver el problema. En el tercer nivel se encuentra el *error por transformación* (P3) aparece cuando el estudiante entiende los requerimientos de una pregunta, pero no puede identificar la secuencia de operaciones matemáticas adecuadas para buscar la solución del problema, es decir cuando el estudiante no lleva a cabo un plan que lo conduzca a la solución. En el cuarto nivel se encuentra el *error de habilidades de proceso* (P4), el cual se produce cuando se identifica la operación o secuencia de operaciones correctas a utilizar para buscar la solución del problema, pero el estudiante no lleva a cabo el procedimiento correctamente. En el quinto nivel se encuentra el *error de codificación* (P5), ocurre cuando a pesar de haber resuelto adecuadamente el problema, el estudiante no proporciona de forma escrita la respuesta.

Causas asociadas con las interacciones entre el estudiante y condiciones externas. Podemos encontrar *errores por descuido* (E1) y de *motivación o argumento defectuoso*

(E2). En el caso del primer tipo ocurre cuando el estudiante es capaz de obtener la respuesta correcta al problema durante la entrevista, a pesar de haberse equivocado en el momento de abordar el problema por primera vez. En el segundo caso, el error por motivación o argumento defectuoso ocurre cuando acierta la respuesta a un problema a pesar de haber mal interpretado el texto de la pregunta, los requisitos y/o a pesar de haber otros errores durante el proceso de resolución. Asociados a los errores se encuentran las dificultades para Newman (1977, como se citó en Clements, 1980) los obstáculos están asociados con las dificultades para resolver un problema y deben superarse para obtener una solución correcta. La propuesta de Newman es ideal para examinar la forma en que piensan los estudiantes cuando resuelven problemas en un área determinada de las matemáticas (Clements, 1980), como puede ser el teorema de Pitágoras.

2.3.2 Desarrollo histórico del teorema de Pitágoras

En este apartado se bosqueja el desarrollo histórico del Teorema de Pitágoras. Esta sección es importante porque, como mencionan Hativa y Cohen (1995), los obstáculos intelectuales que bloquearon la comprensión de un concepto, idea o resultado matemático a lo largo de la historia también pueden arrojar luz sobre los obstáculos intelectuales que pueden bloquear la comprensión de los estudiantes. En esta misma línea de ideas Gagatsis y Kyriakides (2000) argumentan que incluso los grandes matemáticos han enfrentado dificultades para comprender diversas nociones matemáticas, entre las cuales se encuentran el operar e interpretar números negativos, en especial con la regla de los signos, y por lo anterior puede esperarse que los estudiantes enfrenten dificultades similares.

En la historia de las matemáticas, el teorema de Pitágoras se ha catalogado como uno de los resultados más útiles en las matemáticas y, por ello, ha atraído la atención de los educadores matemáticos, debido a la falta de razones intuitivas para relacionar el triángulo rectángulo con los cuadrados contruidos sobre sus lados, se requiere de una deducción lógica para su concepción, esto significó una revolución, que llevó, de una especulación empírica a un razonamiento deductivo (González, 2009). Debido a que dicho teorema se encuentra relacionado con múltiples conceptos matemáticos, para la educación matemática representa un punto donde convergen los conocimientos y la experiencia que favorecen la

apropiación de dicha *relación Pitagórica*, concebida como una red de conceptos y significados asociados con el teorema de Pitágoras (Reyes et al., 2018) que permitirá darles sentido a este concepto matemático.

Establecer la relación general entre los lados de un triángulo rectángulo, llevó más de mil años y aunque se le atribuye a los pitagóricos, debido a que fueron ellos quienes dieron una demostración lógica, existen pruebas arqueológicas de civilizaciones previas a ellos, que conocían casos particulares del teorema: mesopotámicos, egipcios, hindúes y chinos (González, 2009; Rondero y Campos, 2016). De esta manera los pitagóricos tomaron un conocimiento práctico transmitido a través de la cultura y lo generalizaron, es por ello que a través de la historia dicho teorema lleva su nombre.

La génesis histórica del teorema de Pitágoras, se puede dividir en tres etapas: empírico-práctica, aritmético-geométrica y demostración general (González, 2009). La evidencia encontrada en tablillas como la de Plimpton 322, datada entre 1900 a 1600 a. C., sugiere que los escribas representaban una relación que satisface las siguientes igualdades: $a=2uv$, $b=u^2-v^2$, y $c=u^2+v^2$; las cuales aseguran que (a, b, c) es una terna pitagórica. Las condiciones que deben cumplir esas relaciones son: que tanto u como v deben ser enteros sexagesimales regulares, además de que v sea menor a 60 y que la razón de u/v sea menor que 1. En la tablilla se encuentran 15 de las 38 ternas que satisfacen las condiciones anteriores. Dada la falta de conocimientos sobre la cultura sumeria solamente es posible plantear conjeturas sobre su finalidad o utilidad. En la tablilla Yale (YBC 7289) se puede identificar el uso de un caso particular del teorema de Pitágoras, en ella se pueden identificar triángulos rectángulos resultantes al trazar las diagonales a un cuadrado. Dado que la diagonal de un cuadrado se puede calcular multiplicando la medida de su lado por $\sqrt{2}$, se puede deducir que el conocimiento que tenían los babilonios era empírico práctico (González, 2009).

En los registros de un papiro que data del periodo comprendido entre 1800 y 2000 a. C. encontrado en la ciudad de Kahum en el antiguo Egipto, se encontró la expresión $1^2 + (3/4)^2 = (1 + 1/4)^2$ la cual corresponde a la cuarta parte de la relación pitagórica $4^2 + 3^2 = 5^2$. Los egipcios utilizaban las cualidades del triángulo rectángulo de lados 3, 5 y 5 como un

instrumento de medición, dependiendo de sus necesidades, se utilizan triángulos proporcionales a estas medidas, a modo de escuadra, con la finalidad de proyectar las crecientes del río Nilo y poder medir los corrimientos de tierra (González, 2009). Derivado de la falta de evidencia, es arriesgado determinar dónde surge como conocimiento empírico práctico, lo que resulta evidente es que en Babilonia se refleja una aplicación con un dominio más profundo.

La aplicación del teorema de Pitágoras en la India se dio a partir de la planificación arquitectónica de templos y altares, su registro queda plasmado en diversos documentos; por ejemplo, uno que data del siglo VII al siglo II a. C., denominado *manual de reglas de cuerda*. Las medidas y formas de estas construcciones debían tener características muy específicas, por su relevancia religiosa. En el documento se describe el uso de la cuerda para medir distancias, al igual que los egipcios, con la cuerda se construyen triángulos rectángulos a partir de ternas pitagóricas; la innovación en el uso de esta técnica fue que también lo utilizaban para trazar líneas perpendiculares (González, 2009). Es así como las características del triángulo rectángulo fueron aprovechadas en una diversidad de situaciones aritmético-geométricas.

El misticismo que rodea a los pitagóricos ha originado suposiciones a lo largo de la historia sobre las condiciones que dieron origen al teorema que lleva su nombre y que establece que “el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos”. Lo cierto es que Pitágoras de Samos (actual Turquía) vivió alrededor del año 659 a. C. Por influencia de Tales de Mileto, viajó a Egipto y, probablemente, a Mesopotamia. A su regreso se asentó en Crotona (actual Italia) donde fundó la comunidad pitagórica en la que promovía un sistema de pensamiento basado en el descubrimiento, aunque con un enfoque místico y religioso (González, 2009). La influencia de sus viajes propició un pensamiento en el que se complementa lo científico y racional con los místico y religioso. Desarrolló un pensamiento centrado en los números como principio y causa de las cosas, cuyos atributos eran conferidos a las cosas en un sentido cualitativo y material (Osuji, 2021). Es razonable considerar que su interés sobre las características del triángulo rectángulo fue el detonante que lo llevó a profundizar sobre sus relaciones aritméticas y geométricas. Se cree que la

prueba que llevó a demostrar el teorema se origina a partir de la semejanza de triángulos. La demostración lógica en la que se basa el resultado es que, si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el vértice del ángulo recto hasta la base, los triángulos que se originan y que comparten como lado la perpendicular trazada, son semejantes entre sí y son semejantes al triángulo original (Bueso, s. f.).

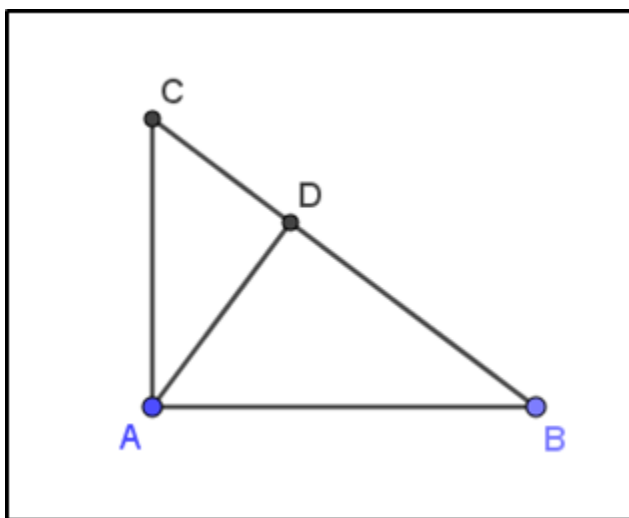


Figura 1. Triángulo rectángulo con ángulo recto en el vértice A y el segmento AD perpendicular al segmento BC

Demostración

De la semejanza de los triángulos ABC, ABD y ACD (Fig. 1) se obtiene:

$$1. AB/BD = CB/AB, \quad AC/CD = BC/AC$$

$$2. (AB)^2 = BD \cdot CB, \quad (AC)^2 = CD \cdot BC$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$$3. (AB)^2 + (AC)^2 = (BD+CD) BC = BD+CD= BC$$

Entonces

$$4. (AC)^2 + (AB)^2 = (BC)^2 \quad \blacksquare$$

Las evidencias encontradas en documentos históricos dan testimonio de que el triángulo rectángulo fue la herramienta para construir una relación entre conceptos a través de su aplicación práctica en situaciones de la vida cotidiana. Cada cultura toma para sí misma lo que es de utilidad, lo adapta y lo mejora para satisfacer sus necesidades, en el desarrollo de la ciencia y la tecnología podemos encontrar ejemplos tales como el descubrimiento del microscopio y el desarrollo de la biología, de manera análoga, el triángulo rectángulo como herramienta concreta, llevó al desarrollo del teorema de Pitágoras como una relación conceptual abstracta, un proceso que llevó entre 1000 y 1600 años.

Como resultado de la elaboración de esta sección, se puede concluir que el teorema de Pitágoras, en sus orígenes entre la cultura mesopotámica y egipcia, apareció como un conjunto de relaciones particulares y que la consideración del resultado como teorema, es decir, como una relación general se dio hasta el periodo histórico de la cultura griega. Por lo anterior, es posible esperar que existan dificultades por parte de los estudiantes para comprender qué es un teorema, cuáles son los objetos y las relaciones entre estos que se establecen mediante el teorema de Pitágoras, y que incluso en ocasiones se confunda el teorema de Pitágoras con la relación pitagórica $a^2+b^2=c^2$.

2.3.3 Construcción de conceptos matemáticos

El desarrollo del pensamiento matemático en la educación básica contribuye a la formación integral de los estudiantes, los prepara para incorporarse a una sociedad del conocimiento que demanda cualidades como la perseverancia, tolerancia al fracaso, adaptación y aceptación de los errores para afrontarlos con resiliencia (Balbuena et al., 2021). De acuerdo con las SEP (2017), las matemáticas son un lenguaje que utiliza conceptos, métodos, técnicas, símbolos y notaciones para describir relaciones numéricas, geométricas y gráficas. El estudio de esta disciplina favorece que los estudiantes desarrollen procesos mentales que mejoran el pensamiento lógico y crítico, mediante el planteamiento y la resolución de problemas se contribuye a la toma de decisiones. La resolución de problemas matemáticos permite comprender el mundo físico, social y económico en diversos contextos, sobre todo para desarrollar el pensamiento matemático de manera creativa.

El concepto es amplio, pero refleja el compromiso que deben tener los docentes con los saberes que deben dominar para ser compartidos con los estudiantes de una forma eficaz. La definición es pertinente, ya que resulta imposible simplificar una ciencia de la cual dependen muchas otras. Pero para fines prácticos, podemos referirnos a las matemáticas como la ciencia de los patrones. En este trabajo las matemáticas se conceptualizan como una actividad humana, durante la cual los estudiantes observan, representan e identifican patrones y relaciones entre objetos matemáticos (Steen, 1988), los cuales a su vez se utilizan para entender el comportamiento de fenómenos naturales o sociales. Desde esta perspectiva, mediante el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos se puede dar explicaciones a los fenómenos en contextos determinados.

Como parte del proceso de formación de los estudiantes es necesario desarrollar conceptos matemáticos como resultado del proceso de enseñanza, dentro del cual destaca el proceso de asignación de significado a combinaciones de palabras o símbolos, actividad que se encuentra asociada a el logro de un aprendizaje con entendimiento de los conceptos matemáticos. Para Vinner (2020) la construcción de significado para los conceptos matemáticos es un proceso que permite dar sentido a las ideas, en la mente de los estudiantes, mediante el establecimiento de relaciones y asociación de conceptos abstractos y objetos concretos. Los conceptos pueden conceptualizarse como generalizaciones de ideas o acciones. Los mecanismos cognitivos que ocurren en la formación de conceptos se relacionan con la capacidad de identificar similitudes y diferencias que pasan por seis etapas. Los fallos en tales etapas pueden dar lugar a una falta de comprensión conceptual, la cual es el origen de muchas de las dificultades matemáticas de los estudiantes.

En primer lugar, se encuentra la etapa de definición del concepto. A partir de un contexto no técnico en el que se utilizan ejemplos para dar un propósito de aplicación de la noción o de manera formal, a partir de bibliografía especializada o mediante libros de textos, en donde conceptos que son familiares se toman como base para explicar nuevos conceptos. Cuando se comunican definiciones de manera formal sin el uso de ejemplos, se puede generar una carencia de sentido y significado. La adquisición del lenguaje es la segunda etapa; los estudiantes no expresan su conocimiento sin que este se convierta en algo cotidiano, es decir, al volverse familiar para ellos, cuando son capaces de relacionar las

nociones con el ambiente matemático se puede decir que existe una apropiación de términos en contextos asociados a las matemáticas.

La tercera etapa corresponde al seguimiento de reglas rigurosas, que a su vez está relacionada con el pensamiento matemático y con el desarrollo intelectual del estudiante; el pensamiento matemático está asociado a reglas que los estudiantes deben considerar y estar conscientes para ponerlas en práctica en contextos apropiados. Se debe tener en cuenta que en muchos casos, el pensamiento matemático se diferencia del modo de pensamiento intuitivo y natural en otros contextos. Asociar conceptos con definiciones como la cuarta etapa, toma relevancia desde la perspectiva de que, para fomentar el pensamiento matemático debe ocurrir este proceso, propiciando una especialización, en esta etapa se crean oportunidades para el aprendizaje, a través de la aplicación del conocimiento matemático funcional, equivalente al dominio del conocimiento aplicable en el aula.

La quinta etapa corresponde a un proceso de asociación de nociones matemáticas con las que ya estaban familiarizados los estudiantes, a través de su experiencia, y se lleva a cabo mediante la articulación de conocimientos previos con los recién adquiridos, en esta etapa el estudiante asocia la definición sugerida con el concepto que ha construido previamente a partir de los ejemplos presentados creando una imagen conceptual. Finalmente la sexta etapa se manifiesta a partir de procesos de pensamiento con significado, es el resultado de la experiencia matemática, se deriva de la asociación verbal y del proceso intelectual expresados en acciones racionales y reflexivas, analíticas y explícitas, asociadas a actividades que matemáticos y educadores matemáticos utilizan en actividades académicas, una forma de matemática aplicada en el salón de clases.

2.4. Pertinencia del marco conceptual

El marco conceptual que orienta el desarrollo de esta tesis, hace posible contar con herramientas para responder a una pregunta de investigación en un contexto determinado, sin que las creencias del investigador predominen, permitiendo que las teorías y conceptos apunten explicaciones plausibles, que den respuesta a los fenómenos observados y que sean generalizables bajo ciertas condiciones.

De esta manera, en la tesis se aborda una problema recurrente entre los estudiantes de tercer grado de telesecundaria, el cual tiene que ver con los errores que cometen al aplicar el teorema de Pitágoras en la solución de una amplia diversidad de situaciones problemáticas. El problema de investigación se concibe desde una perspectiva que considera a las matemáticas como ciencia de los patrones y al pensamiento matemático como la aplicación de un conocimiento funcional. Entonces, es importante analizar las causas de errores cometidos por los estudiantes cuando resuelven problemas relacionados con el teorema de Pitágoras, tomando en cuenta el desarrollo histórico que condujo a su constitución como un resultado general el cual se ha demostrado deductivamente por diversas rutas. El análisis de la información empírica se basa en el marco para *Análisis de Errores de Newman* (1977, citado en Clements, 1980), con la intención de identificar la fuente de los errores.

El obstáculo intelectual existente antes de llegar a un razonamiento deductivo, a partir de especulaciones empíricas, puede estar asociado a la construcción de conceptos matemáticos (Vinner, 2020). La especialización de las ternas pitagóricas, como una de las relaciones que guardan los lados de un triángulo rectángulo permitió, de manera práctica, satisfacer una necesidad comercial; si bien los antiguos mesopotámicos se habían percatado de relación aritmética que se presentaba entre los lados del triángulo rectángulo no hay evidencia de que se extendieron esos conceptos a la geometría. Por otro lado los egipcios e hindúes si llevaron esa relación aritmética a la geometría y eso les valió otras aplicaciones donde la geometría juega un papel preponderante sobre los cálculos aritméticos, si bien se utilizaban ternas para construir triángulos rectángulos con las cuerdas, dichas ternas fueron principalmente múltiplos, pero la aplicación del método de la cuerda fue más encaminada a resolver problemas geométricos, donde el concepto de perpendicularidad se volvía una cualidad para la aplicación práctica. A través de la historia el obstáculo fue resuelto mediante un replanteamiento de la concepción práctica y geométrica del triángulo rectángulo. Esta evolución está ligada con el desarrollo del pensamiento matemático que implica una transición de un pensamiento intuitivo a un pensamiento deductivo.

De acuerdo al desarrollo de conceptos, en el momento en que se siguen reglas, de manera sistemática, el individuo debe tomar una decisión: entre un modo de pensamiento intuitivo-literal o uno analítico racional, es decir, en lugar de formular una respuesta

automática, se da un tiempo, relativamente lento, este proceso está caracterizado por ser reflexivo (Vinner, 2020). La deducción del teorema de Pitágoras es un ejemplo representativo de dicho proceso, ya que la credibilidad en el resultado de sus relaciones, no dependen de una representación gráfica, sino que fue el resultado de proceso intelectual el cual no estuvo basado en la perspectiva sensorial (González, 2009). (Figura 2).

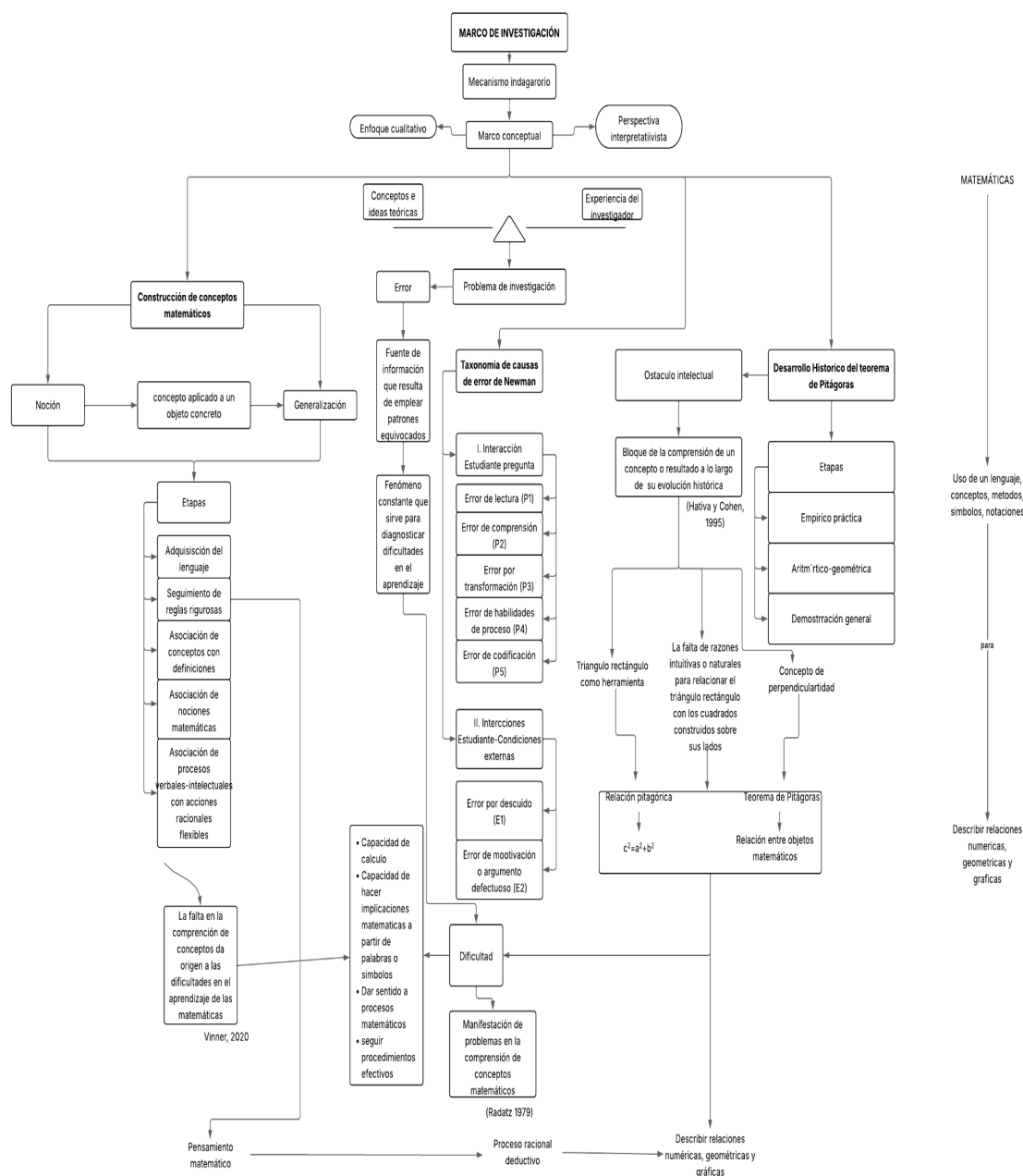


Figura 2. Representación esquemática del marco de investigación (Fuente: elaboración propia a partir de Radatz, 1979; Vinner, 2020).

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1. Introducción

El enfoque de esta tesis es cualitativo y tiene el propósito de examinar la forma en que los participantes en una investigación perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus interpretaciones y significados (Hernández et al., 2014). Particularmente, dichos fenómenos están relacionados con los errores que cometen estudiantes de una telesecundaria, ubicada en una comunidad del municipio de Singuilucan en el Estado de Hidalgo, cuando formulan, justifican y usan el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.

La elección del diseño de investigación responde al interés por el contexto en el que se desarrollará el estudio. Desde su origen, la telesecundaria, como modalidad educativa dentro del Sistema Educativo Nacional (SEN) en 1968, fue concebida para ampliar la cobertura en localidades marginadas, con una población estudiantil reducida, enfocada a regiones rurales de difícil acceso y comunidades urbanas en condiciones de marginalidad (Navarrete y López, 2022). En este contexto, con la modalidad de telesecundaria se busca brindar atención a los estudiantes de comunidades que comparten características geográficas, demográficas y sociales desventajosas con la finalidad de brindar una guía o apoyo para que continúen con su formación académica en sus comunidades de origen. El diseño de investigación se basa en un *estudio de casos múltiples* para examinar con profundidad y detalle las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes de tercer grado de telesecundaria al resolver problemas cuya solución requiere de la utilización del teorema de Pitágoras. Las características particulares de la localidad y de los participantes representan una oportunidad para determinar la sensibilidad de las causas de errores a las condiciones contextuales, lo cual puede ser un aporte de este trabajo (Chaves y Weiler, 2016).

Con el diseño de investigación se busca triangular las proposiciones y explicaciones empíricas, que surgieron a partir de observaciones en el aula de telesecundaria de tercer grado en la clase de matemáticas; con los argumentos contruidos por investigaciones relacionadas como son: el desarrollo histórico, que llevó al descubrimiento, generalización

y aplicación del teorema de Pitágoras y la relación de este resultado con otros resultados y objetos matemáticos. Se diseñó e implementó una prueba escrita, que permitió identificar las dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas relacionados con su aplicación. Posteriormente, se llevaron a cabo entrevistas a los estudiantes, con la intención de indagar entre las posibles causas que originan las dificultades y así ampliar la información sobre la causa de los errores y proponer una respuesta para la pregunta de investigación (Eisenhart, 1991).

La pertinencia del presente diseño se sustenta en la interpretación de la perspectiva de los estudiantes y en las características presentes en el contexto, de tal manera que se hagan visibles, a través de los instrumentos de recolección de información, las causas que propician los errores al resolver problemas relacionados con el teorema de Pitágoras. Desde esta óptica, el diseño, se concibe como una herramienta con la cual se da congruencia teórica, empírica y metodológica, a través de la caracterización de los datos recolectados y las observaciones, con la intención de explicar las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al abordar este tema durante la secundaria.

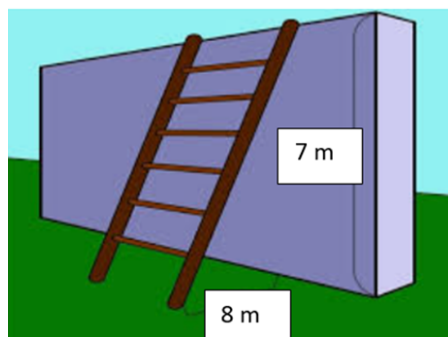
3.2. Selección de las tareas

La tarea consta de una prueba escrita, la cual se conformó a partir de lo expresado en el avance del contenido del programa sintético de la fase 6 para la educación básica en México, donde se menciona, como proceso de desarrollo de aprendizaje, “Formula, justifica y usa el teorema de Pitágoras al resolver problemas” para tercer grado de telesecundaria, el cual se encuentra vinculado al contenido *Medición y cálculo en diferentes contextos* (SEP, 2022). De igual manera, se revisaron las tareas que aparecen en la guía didáctica para el docente en telesecundaria correspondiente a tercer grado (Balbuena et al., 2021). Es importante mencionar que los libros con los que trabajaron los estudiantes y docentes en el ciclo escolar 2023–2024 en escuelas telesecundarias del municipio de Tulancingo y Singuilucan, no correspondían a la actualización del Plan de Estudio, sin embargo fueron utilizados, por su compatibilidad en la mayoría de los contenidos y porque fueron entregados por Servicios Regionales de la SEP. El tema *Teorema de Pitágoras* se encuentra en las secuencia 8 y 17, respectivamente, ubicado en el tercer grado, con el

aprendizaje esperado *Formula, justifica y usa el teorema de Pitágoras* (Balbuena et al., 2021).

A partir de lo anterior se seleccionaron y adaptaron seis problemas encontrados en Internet, que cumplieran con las condiciones establecidas en el plan de estudios. Tras examinar diferentes sitios en la red, fue posible identificar una fuente importante de recursos para desarrollar y evaluar el tema, desde problemas clásicos, los cuales implican un contexto histórico, digno de desarrollar durante su implementación, por lo cual fueron descartados (García, 2023); hasta problemas específicamente diseñados para abordarlos de una manera creativa, considerando un grado de dificultad para considerarse un reto, en donde se estima que se cometan errores, tal y como trabaja un matemático, con el objetivo de brindar a los estudiantes la oportunidad de pensar, explorar y trabajar sistemáticamente echando mano de las habilidades adquiridas en la escuela (Nrich, s. f.). Los problemas fueron elegidos considerando el grado escolar de los estudiantes, a los que están dirigidos, en este caso, se concretó la búsqueda de problemas dirigidos a estudiantes de secundaria, en un rango de edad de entre 11 y 16 años, con un grado de dificultad progresiva, en contextos análogos a las propuestas del libro de texto.

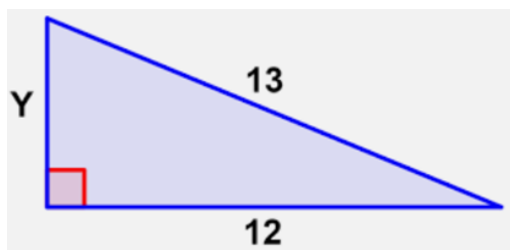
Problema 1. ¿Cuál es la medida de la longitud de la escalera?



Fuente: Adaptado de Asth. (s. f.)

El propósito de este problema es establecer la relación pitagórica con la longitud de la escalera, el reto para los estudiantes está vinculado a la asociación de la imagen con un triángulo rectángulo. A partir de la información dada, se puede inferir la longitud de los catetos, por lo que la respuesta al problema se enfoca en encontrar la medida de la hipotenusa, la cual está representada por la longitud de la escalera en metros.

Problema 2. ¿Cuál es el valor de “Y” si se considera el siguiente triángulo rectángulo?



Fuente: Neurochispas (s. f.)

En el segundo problema se busca el valor de “Y” asociado a uno de los catetos del triángulo rectángulo. En este caso, se debe despejar uno de los catetos en la relación pitagórica para obtener el valor deseado, de esta manera establecer la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del cateto conocido. En este problema se promueve una ruta de solución algebraica.

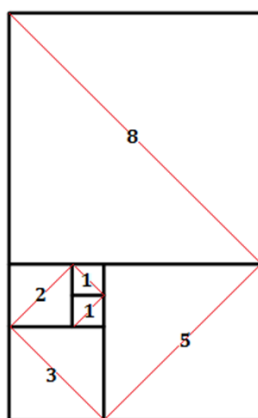
Problema 3. La medida que se utiliza en los televisores es la longitud de la diagonal de la pantalla en unidades de pulgadas. Una pulgada equivale a 2.54 centímetros:

Si David desea comprar un televisor para colocarlo en un hueco de 96x79cm, ¿de cuántas pulgadas de diagonal debe ser el televisor? (Asth, s. f.). En este problema se presenta una situación hipotética en la que no se hace explícita la utilización del teorema de Pitágoras, pero que involucra a las diagonales de dos rectángulos. Es necesario establecer la longitud de la diagonal del rectángulo formado por el hueco en el que se acomodará el televisor en centímetros, para asociarla al tamaño máximo que debe tener el televisor, en relación a su diagonal en pulgadas, para poder cumplir con las condiciones, es necesario transitar de unidades en algún momento durante la resolución.

Problema 4. Si dos de los lados de un triángulo rectángulo miden 5 cm y 6 cm de largo, ¿cuántas posibilidades hay para la longitud del tercer lado? (Nrich, s. f.). En el presente problema se examinan las nociones sobre el triángulo rectángulo y las implicaciones para establecer la relación pitagórica cuando se desea encontrar uno de los catetos o la hipotenusa. Representa una oportunidad para identificar la forma en que el estudiante

aborda el problema para dar una respuesta rápida o decide invertir un mayor tiempo en la reflexión del mismo.

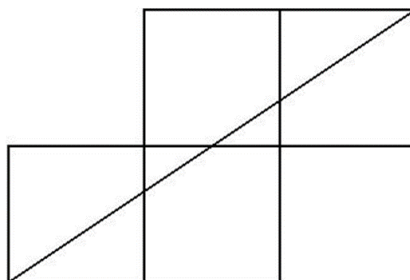
Problema 5. La figura siguiente está formada por cuadrados de distintos tamaños, siendo el número de cada cuadrado la longitud del lado de dicho cuadrado (primeros términos de la serie de Fibonacci). Se desea calcular la longitud de la cuerda de color rojo.



Fuente: Asth (s. f).

En este problema la atención está centrada en la longitud de la cuerda roja, pero están de por medio nociones relacionadas con las diagonales de cuadrados y triángulos rectángulos isósceles que propician el establecimiento de patrones como una oportunidad de simplificar la resolución de la relación pitagórica en cada uno de los cuadrados. Es un problema que a simple vista puede parecer laborioso, pero representa una oportunidad para examinar la forma en que se emplean las nociones sobre el tema al momento de abordar este tipo de problemas.

Problema 6. Cuatro cuadrados unitarios se colocan de borde a borde como se muestra. ¿Cuál es la longitud de la línea diagonal trazada?



Fuente: Nrich (s. f.)

En el sexto problema se propone una figura compuesta por cuatro cuadrados en la que no se identifica a primera instancia el triángulo rectángulo que podría servir de referencia. Una respuesta apresurada podría implicar una secuencia de cálculos imprecisos. La concepción de la relación pitagórica como algoritmo para resolver ejercicios, limita la identificación de los objetos y sus relaciones, es necesario tomar decisiones reflexivas derivadas de un proceso de pensamiento deductivo para poder completar la figura y deducir el rectángulo cuya longitud de su diagonal representa la respuesta que se busca.

3.3. Participantes

Los participantes de la investigación son estudiantes de una telesecundaria ubicada en el Municipio de Singuilucan, en el estado de Hidalgo, quienes fueron seleccionados por conveniencia. Al momento de implementar las tareas, los participantes ya habían revisado el siguiente contenido (26 de enero de 2024): “fórmula, justifica y usa el teorema de Pitágoras al resolver problemas”. Para llevar a cabo la implementación de las tareas se solicitó el permiso al director de la escuela y, posteriormente, se coordinó la implementación con el docente responsable del grupo. Es importante mencionar que se informó a los padres de familia sobre dicha actividad y se solicitó la autorización, por escrito, para permitir a sus hijos o tutorados abordar las actividades.

La tarea se implementó el martes 30 de enero del 2024. Participaron 10 mujeres y siete hombres, con edades entre 14 y 15 años, quienes en su mayoría son originarios de la comunidad donde se ubica la escuela. La sesión de trabajo inició a las 9:00 de la mañana y tuvo una duración aproximada de dos horas con 15 minutos. Las indicaciones a los estudiantes fueron que debían resolver los problemas sin el uso de calculadoras. Se les indicó, además, que debían hacer explícitas todas las operaciones y explicaciones sobre la resolución de los problemas.

3.4. Contexto sociocultural

La comunidad en la que habitan los estudiantes que participaron en la investigación cuenta con una población aproximada de 389 habitantes, de los cuales 209 son mujeres y 180 son hombres. Las principales actividades económicas son: la agricultura, la ganadería y

actividades relacionadas con la industria y el comercio. Cuenta con vías de comunicación accesibles y transporte que conecta con Pachuca, Tulancingo y Singuilucan.

En cuanto a educación, la cobertura del nivel básico está cubierto, la comunidad cuenta con preescolar, primaria general y telesecundaria. Para continuar con los estudios de educación media superior y superior, los estudiantes deben trasladarse fuera de la comunidad. Para el ciclo escolar 2022-2023 la escuela telesecundaria en que se implementó la actividad contaba con una matrícula de 124 estudiantes (69 mujeres y 55 hombres), repartidos en dos grupos por cada grado. En cuanto a infraestructura la institución cuenta con seis edificios en los cuales se encuentran repartidas 11 aulas. Cada grupo cuenta con una computadora e internet, además de un cañón para proyectar, una televisión conectada a la señal de edusat (<https://aprende.gob.mx/red-edusat/>) y un docente.

3.5. Instrumentos de recolección de la información

Los instrumentos utilizados para recabar la información empírica incluyen una *prueba escrita* y una *entrevista semiestructurada*. El contenido de las preguntas en ambos casos fue identificar las dificultades de los estudiantes al resolver problemas cuya solución requiere de utilizar el teorema de Pitágoras y clasificar las causas de los errores. La estructura de ambos instrumentos permitió obtener información sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes (Becerra, 2012). La prueba escrita se integra por seis problemas mediante los cuales se buscó evaluar el rendimiento de los sujetos de estudio cuando formulan, justifican y usan el teorema de Pitágoras. El orden en el que aparecen responde, en principio, a la similitud de ejercicios presentados durante su estudio en el salón de clases, posteriormente, se plantean situaciones que brindan a los estudiantes la oportunidad de trabajar sistemáticamente para justificar su pensamiento y aplicación de los conceptos curriculares, con lo cual se desea clasificar las causas de los errores que cometen los estudiantes.

Dos días después de la aplicación de la prueba escrita se llevó a cabo una entrevista semiestructurada a tres estudiante, con la intención de identificar ideas y puntos de vista que permitan identificar las dificultades relacionadas con el aprendizaje del teorema de Pitágoras asociadas a las dificultades registradas en desarrollo histórico de conceptos durante su génesis. Este intercambio de opiniones a través del diálogo permite obtener

información sobre el modo en que fueron abordados los problemas con pocos días de diferencias, permitiendo la comprensión de la perspectiva de los estudiantes ante las dificultades que experimentaron expresado en sus propias palabras. El guión de la entrevista fue estructurado con base en los cuestionamientos que se enuncian a continuación, considerando que, con cada estudiante la situación es diferente, por lo que la improvisación se orientó hacia las dificultades y nociones insuficientes en torno al teorema de Pitágoras.

Lee en voz alta el primer problema

¿Se entendió la pregunta?

¿Qué dificultades encontraste al resolver el problema?

¿La información que proporciona el problema fue suficiente para resolverlo?

¿Consideraste que podrías resolverlo? ¿Por qué sí? o ¿Por qué no?

¿Qué conceptos, conocimientos, experiencia, se necesitó para que lo resolvieras?

¿Qué es un triángulo rectángulo?

¿Tomaste en cuenta las unidades que te daban en el problema?

¿Para resolver este problema qué expresión algebraica utilizaste?

¿Cuáles son los elementos de esa expresión?

¿Recuerdas en qué situaciones se realiza una suma en cuáles una resta?

¿Cómo elevas al cuadrado un número?

¿Las unidades también se elevan al cuadrado?

¿Qué representa o significa elevar los metros al cuadrado?

¿Cómo obtener la raíz cuadrada de un número?

De acuerdo con los resultados que obtuviste ¿Cuál sería la solución al problema utilizando tus propias palabras?

Se realizaron grabaciones de la entrevistas

3.6. Procedimiento para el análisis de la información

La información se codificó para obtener datos, a partir de los cuales se identificaron patrones y regularidades que, finalmente, fueron la base para estructurar una respuesta a la

pregunta de investigación. Los datos se organizaron y resumieron en tablas con la finalidad de examinarlos y comprenderlos, al identificar patrones de significado (Hernández et al., 2014). En la tabla 1, de doble entrada, se concentran los resultados de la prueba escrita, los renglones corresponden a los estudiantes y las columnas a los problemas que integraron la prueba escrita. Además se indica si la respuesta es correcta o no.

Tabla 1. Concentrado de problemas resueltos de manera correcta (1) o incorrecta (0).

Elaboración propia.

Estudiante/ Problema	P1	P2	P3	P4	P5	P6
A 1						
A 2						
...						
A 17						

En los casos donde el problema no fue resuelto de forma correcta, se identificaron las diversas fuentes de error, para ellos se utilizó la categorización de Newman. Los datos serán codificados en una tabla análoga a la tabla 1 en donde se puntualizan las causas asociadas con las interacciones entre estudiantes y la pregunta (error de lectura P1, error de comprensión P2, error por transformación P3, error de habilidad de proceso P4 y error de codificación P5) así como, las causas asociadas con las interacciones entre estudiantes y condiciones externas (error por descuido E1 y error de motivación o de argumento defectuoso E2).

Tabla 2. Concentrado de causas a partir de los errores que cometen los estudiantes.

Elaboración propia.

Estudiante/Tarea	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4	Tarea 5	Tarea 6
A 1						
A 2						
...						
A17						
Causas asociadas con las interacciones entre estudiantes y la pregunta (P1, P2, P3, P4, P5)						
Causas asociadas con las interacciones entre estudiantes y condiciones externas (E1, E2)						

En cuanto a las entrevistas, el procesamiento de la información inicia con su transcripción, mediante un procesador de textos. Los resultados obtenidos serán analizados mediante una lista de cotejo que den cuenta del desarrollo de conceptos que los estudiantes utilizan para expresar sus ideas.

Tabla 3. Desarrollo de conceptos expresados por los estudiantes. Elaboración propia

Caracterización de etapas que ocurren en la formación de conceptos en torno al teorema de Pitágoras		
Etapas del desarrollo de conceptos	Si	No
Definición		
Adquisición del lenguaje		
Seguimiento de reglas rigurosas		
Asociar concepto con definición		
Articulación de nociones matemáticas preexistentes		
Asociación de procesos con acciones		

La organización de los datos en la tabla 3, servirá para hacer visibles, aspectos relacionados con las dificultades en el desempeño de los estudiantes de tercer grado cuando estudian el teorema de Pitágoras en telesecundaria.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

4.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados derivados del análisis de la aplicación de la tarea escrita, donde los participantes resolvieron seis problemas relacionados con el teorema de Pitágoras, así como de la entrevista semiestructurada realizada posteriormente a tres de ellos. En la primera fase del análisis, la información se organizó en una tabla de doble entrada, en la cual se resume la cantidad de problemas que fueron resueltos de manera correcta e incorrecta por cada uno de los estudiantes. Posteriormente, se examinaron las causas de los errores cometidos a partir de los problemas identificados como incorrectos.

Los resultados se sintetizaron en una segunda tabla, en la que se clasificaron las causas de errores utilizando la jerarquía de causas de error de Newman, las cuales se encuentran asociadas: con interacciones entre el estudiante y la pregunta, así como, a las interacciones entre el estudiante y condiciones externas. Lo que dio lugar a siete categorías *a priori*, codificadas de la siguiente manera. Las primeras cinco están centradas en las acciones, estrategias o conceptos que el estudiante utiliza al enfrentarse al problema siendo: error de lectura o decodificación (P1), error de comprensión (P2), error por transformación (P3), error de habilidades de proceso (P4) y error de codificación (P5). Las últimas dos están relacionadas con factores externos que afectan a los estudiantes cuando resuelven un problema, a manera de distracción y son: errores por descuido (E1) y de motivación o argumento defectuoso (E2) (Clements, 1980; Santoso, 2017; Sari y Wutsqa, 2019).

En la segunda parte del análisis se describen con mayor detalle los errores que cometieron los estudiantes durante la tarea, así como las causas que los provocan. Los datos obtenidos fueron resultado de la exploración de las entrevistas semiestructuradas realizada a tres estudiantes. También se identificaron categorías emergentes, ya que un error puede surgir de diferentes procesos (Radatz, 1979), las cuales fueron agrupadas en una tercera tabla de doble entrada.

4.2. Resultados generales

Los resultados de la prueba escrita se condensaron en la Tabla 4, en la que aparecen los resultados de los 17 estudiantes que participaron, la tarea consistió en resolver seis problemas. El orden en el que aparecen está relacionado a la similitud de los ejercicios que resolvieron en su clase de matemáticas, en donde se plantearon situaciones que pongan en práctica la formulación, justificación y uso del teorema de Pitágoras.

Tabla 4. Concentrado de resultados: solución correcta (1) o incorrecta (0). Elaboración propia.

Estudiante/Tarea	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4	Tarea 5	Tarea 6
A 1	0	0	0	0	0	0
A 2	0	0	0	0	1	1
A 3	0	0	0	0	0	0
A 4	0	0	0	0	0	0
A 5	0	0	0	0	0	0
A 6	0	0	0	0	0	0
A 7	0	0	0	0	0	0
A 8	1	1	1	0	0	0
A 9	0	1	0	0	0	0
A 10	1	1	0	0	0	0
A 11	1	1	0	0	0	0
A 12	0	1	1	0	0	0
A 13	1	1	1	0	0	0
A 14	1	1	0	1	0	0
A 15	1	0	0	0	0	0
A 16	0	0	0	0	0	0
A 17	1	1	0	0	0	1

En la tabla anterior podemos observar que la mayor cantidad de estrategias que llevaron a la solución correcta se presentaron en los problemas 1 y 2. Posteriormente se percibe una reducción considerable. El número de estudiantes que respondieron de manera correcta el problema 1 es de 7 (41.1%), en el problema 2 se identificaron a 8 (47 %), en el problema 3 se identificaron a 3 estudiantes que respondieron correctamente (17.6%), en el problema 4 y 5, se identificó a 1 estudiante respectivamente, que contestaron de manera correcta (5.8%), finalmente en el problema 6 se identificaron a 2 estudiantes que lo resolvieron de manera satisfactoria (11.7%).

A partir de los resultados anteriores se examinaron las causas, que llevaron a cometer errores por parte de los estudiantes, en cada uno de los problemas, mediante la jerarquía de causas de error de Newman (Clements, 1980; Santoso, 2017; Sari y Wutsqa, 2019). Los niveles de la jerarquía de causas de error se codificaron y se consideraron como categorías para su análisis las cuales se muestran en la tabla 5.

Tabla 5. Codificación de las causas de error. Elaboración propia.

Causas de error asociadas con las interacciones entre estudiantes y la pregunta	Categoría
Error de lectura o decodificación	P1
Error de comprensión	P2
Error por transformación	P3
Error de habilidades de proceso	P4
Error de codificación	P5
Causas de error asociadas con las interacciones entre estudiantes y condiciones externas	Categoría
Errores por descuido	E1
Error de motivación o argumento defectuoso	E2

A continuación se describen las causas asociadas con las interacciones entre estudiantes y la pregunta conforme a la jerarquía de causas de error de Newman de la cual se desprenden 5 categorías. En el primer nivel de la taxonomía se encuentra el error de lectura o decodificación (P1). En esta categoría los errores se presentan cuando las palabras o símbolos escritos no fueron reconocidos por el estudiante, lo que lleva a no seguir con el curso de solución del problema, el cual se hizo evidente en el caso del estudiante A2 cuando resolvía el problema 3 (Figura 3).

En el problema 3 se presenta una situación apegada a una realidad que puede ocurrir en un contexto determinado. En este caso se presenta un problema en el que no se hace explícita la utilización del teorema de Pitágoras, pero en donde se involucra la diagonal de un televisor, la cual permite determinar sus dimensiones, así como, un hueco en la pared que

limita el tamaño máximo que debe tener la pantalla. De acuerdo al orden cronológico relacionado con el procedimiento empleado por A2 se puede identificar errores asociados con interacciones entre el estudiante y condiciones externas de tipo E1, asociados a descuidos por parte del estudiante que no impidieron continuar con la resolución del problema. Más adelante se identificó un error de tipo P1 asociado a un error de lectura.

3.- La medida que se utiliza en los televisores es la longitud de la diagonal de la pantalla en unidades de pulgadas. Una pulgada equivale a 2.54 centímetros:

1" = 2,54 cm

Si David desea comprar un televisor para colocarlo en un hueco de 96x79cm, ¿de cuántas pulgadas de diagonal debe ser el televisor?

$$\begin{array}{r} 79 \\ \times 79 \\ \hline 711 \\ 553 \\ \hline 6241 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 69 \\ \hline 621 \\ 714 \\ \hline 7761 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7761 \\ 6241 \\ \hline 14002 \end{array}$$

- 1 $a = b^2 + c^2$ ← E1
- 2 $c = a + b^2$
- 3 $c = 79 + 69$ ← P1
- 4 $c = 6241 + 7761$
- 5 $c = \sqrt{14002}$
- 6 $c = 118$

$$\begin{array}{r} 118 \\ \times 118 \\ \hline 944 \\ 118 \\ \hline 13924 \end{array}$$

Figura 3. Error de tipo E1 y P1 cometidos por el estudiante A2 durante la resolución del problema 3.

A1 representa la relación pitagórica a partir de la forma algebraica $a = b^2 + c^2$ en la línea 1, lo cual difiere de la representación tradicional de la relación pitagórica ($c^2 = a^2 + b^2$), omite elevar al cuadrado la literal a este descuido persiste durante toda la secuencia de resolución. En la línea 2 reescribe la relación como $c = a^2 + b^2$. En la línea 3 se presenta el error de tipo P1, el cual ocurre porque el número 96 no fue reconocido por A1, en su lugar escribió 69, dando como resultado una secuencia equivocada que impidió el curso de solución del problema.

En el segundo nivel encontramos errores de tipo P2 o de comprensión, el cual aparece cuando el estudiante puede leer la pregunta pero no entiende los requisitos, lo que provoca fracasos o equivocaciones en el intento por resolver un problema. En la figura 4 y 5 podemos observar ejemplos de este tipo.

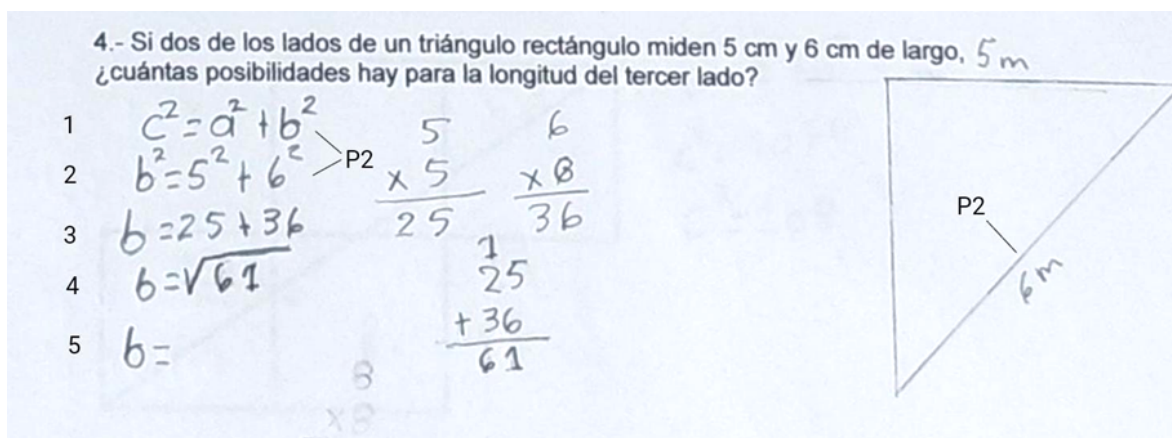


Figura 4. Error de tipo P2 cometido por el estudiante A3 durante la resolución del problema 4.

En el problema 4 se examinan las nociones sobre el triángulo rectángulo y las implicaciones para establecer la relación pitagórica cuando se desea encontrar uno de los catetos o la hipotenusa. Representa una oportunidad para identificar la forma en que el estudiante aborda el problema para dar una respuesta rápida o decide invertir un mayor tiempo en la reflexión del mismo. De acuerdo a la secuencia de pasos durante la resolución del problema podemos identificar errores de tipo E1 asociados a descuidos por parte del estudiante que no le impidieron continuar con la resolución del problema. Posteriormente se presenta evidencia de errores de tipo P2 que llevaron a A3 a cometer equivocaciones que impidieron continuar con la resolución del problema.

En este caso A3 omite la representación de unidades en centímetros en la línea 2, lo cual se repite durante el proceso de solución, este descuido no impidió continuar con el proceso. La evidencia del error de tipo P2 se puede identificar cuando escribe la relación pitagórica $c^2 = a^2 + b^2$ en la línea 1 que después cambia por $b^2 = 5^2 + 6^2$, esto ocurre debido a que comprende el problema en términos matemático, pero no capta el significado de toda la información contenida en la pregunta, no relaciona la totalidad de los datos con las condiciones del

problema, esto se puede observar cuando, al sustituir los datos del triángulo rectángulo que representa mediante un dibujo, lo hace cometiendo equivocaciones, ya que asigna 6 m, a la longitud de la hipotenusa, que luego escribe en la relación pitagórica como uno de los catetos. Dichas equivocaciones lo conducen a resolver el problema de manera intuitiva. Otro ejemplo que corresponde a la categoría P2, como se observa en la figura 5, correspondiente al problema 6. En este caso A16 recurre a la utilización de una regla para hacer mediciones lo cual conlleva al fracaso en su intento por resolver el problema.

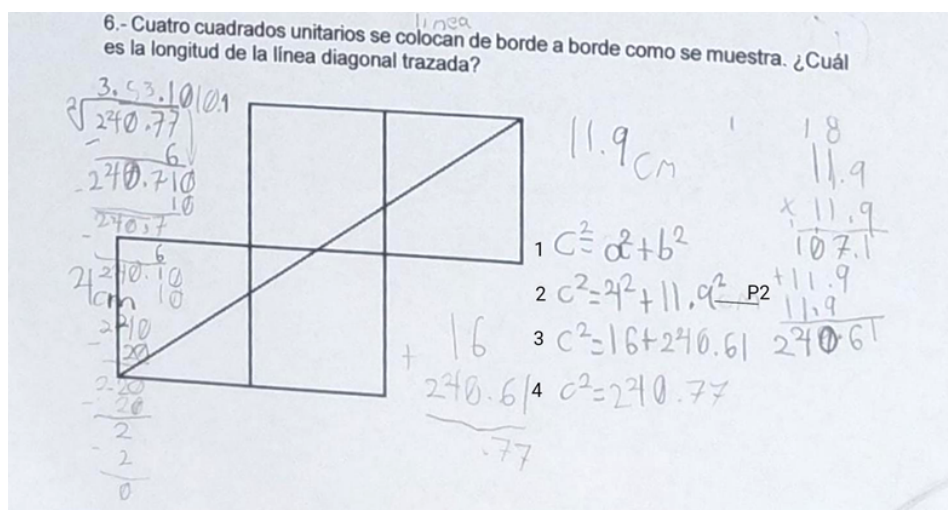


Figura 5. Error de tipo P2 cometido por el estudiante A16 durante la resolución del problema 6.

En el problema 6 se propone una figura compuesta por cuatro cuadrados de lado unitario, en la que no se identifica a primera instancia el triángulo rectángulo que podría servir de referencia. Una respuesta apresurada podría implicar una secuencia de cálculos imprecisos. La concepción de la relación pitagórica como algoritmo para resolver ejercicios, limita la identificación de los objetos y sus relaciones, es necesario tomar decisiones reflexivas derivadas de un proceso de pensamiento deductivo para poder completar la figura y deducir el rectángulo cuya longitud de su diagonal representa la respuesta que se busca. En este caso A16 realiza cálculos en la línea 2 a partir de mediciones, como resultado de no haber entendido las condiciones del problema.

La categoría P3 corresponde a errores por transformación, en este nivel los errores ocurren debido a que los estudiantes no pueden identificar la secuencia de operaciones adecuadas

para resolver un problema, a pesar de entender los requerimientos del mismo. Esto lo podemos observar en el caso representado en la figura 6 donde el estudiante A7, emplea un proceso equivocado en la resolución del problema.

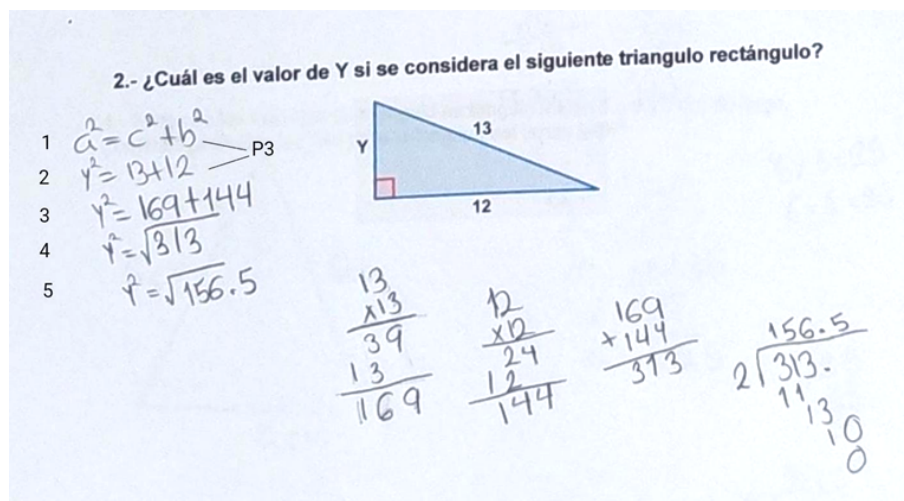


Figura 6. Error de tipo P3 cometido por el A7 durante la resolución del problema 2

En el problema 2 se busca el valor de la literal Y asociado a uno de los catetos del triángulo rectángulo. En este caso, se debe despejar uno de los catetos en la relación pitagórica para obtener el valor deseado, de esta manera establecer la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del cateto conocido. En este problema se promueve una ruta de solución algebraica. En la figura anterior se observa que A7 representa la relación pitagórica a partir de la forma algebraica $a^2 = c^2 + b^2$ en la línea 1, lo cual difiere de la representación $a^2 = c^2 - b^2$, lo cual resultó en el empleo de un procedimiento equivocado.

La categoría P4 corresponde a errores que se producen cuando el estudiante no lleva a cabo el procedimiento correctamente para la resolución de un problema, a pesar de haber identificado la secuencia de operaciones correctas. Como en el caso representado en la figura 7, donde el estudiante A16 no lleva a cabo el procedimiento correcto para resolver la raíz cuadrada. En el problema 1 se pretende establecer la relación pitagórica, como herramienta para encontrar la longitud de la escalera, el reto para los estudiantes está vinculado a la asociación de la imagen con un triángulo rectángulo. A partir de la información dada, se puede inferir la longitud de los catetos, por lo que la respuesta al

problema se enfoca en encontrar la medida de la hipotenusa, la cual está representada por la longitud de la escalera en metros.

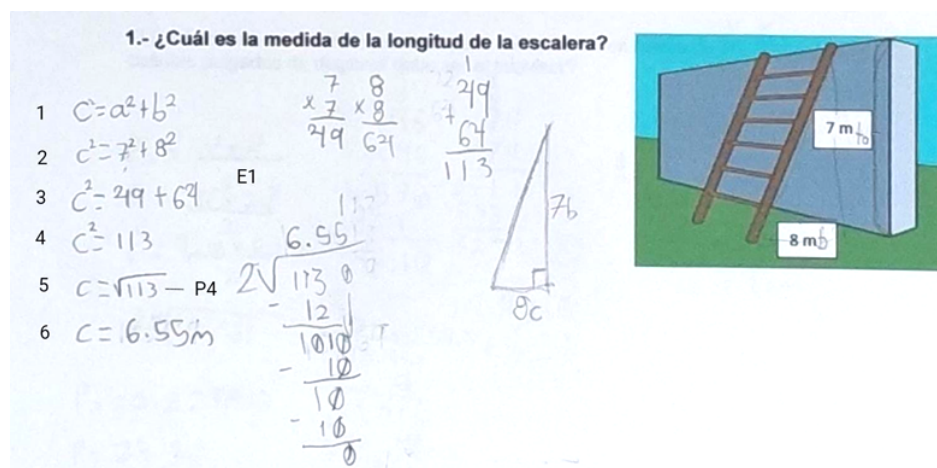


Figura 7. Error de tipo P4 cometido por el A16 durante la resolución del problema 1

En este caso podemos identificar errores de tipo E1 que el estudiante A16 comete en las líneas 2, 3 y 4 que de haber progresado de manera efectiva no hubieran limitado la resolución del problema. En la línea 2, el estudiante omite expresar las unidades cuando representa la longitud de los catetos, las cuales están dadas en metros, en la línea 3 persiste la omisión de las unidades, en esta instancia no coloca las unidades al cuadrado después de efectuar la operación de manera correcta. En la línea 5 se presenta el error que resultó en el empleo de procedimientos equivocados. Se puede apreciar que representa simbólicamente, de lado derecho de la igualdad, la raíz cuadrada de 113, pero a un costado, las operaciones que realizó, corresponde al algoritmo de la división, lo que impidió que se llegara a la solución del problema de manera efectiva.

En la categoría P5 se encuentran los errores que comete el estudiante cuando no proporciona de forma explícita la respuesta al problema que se le plantea. Se puede observar en la figura 8 donde el estudiante A17 resuelve de manera efectiva el problema pero no es capaz de codificar su respuesta de forma explícita.

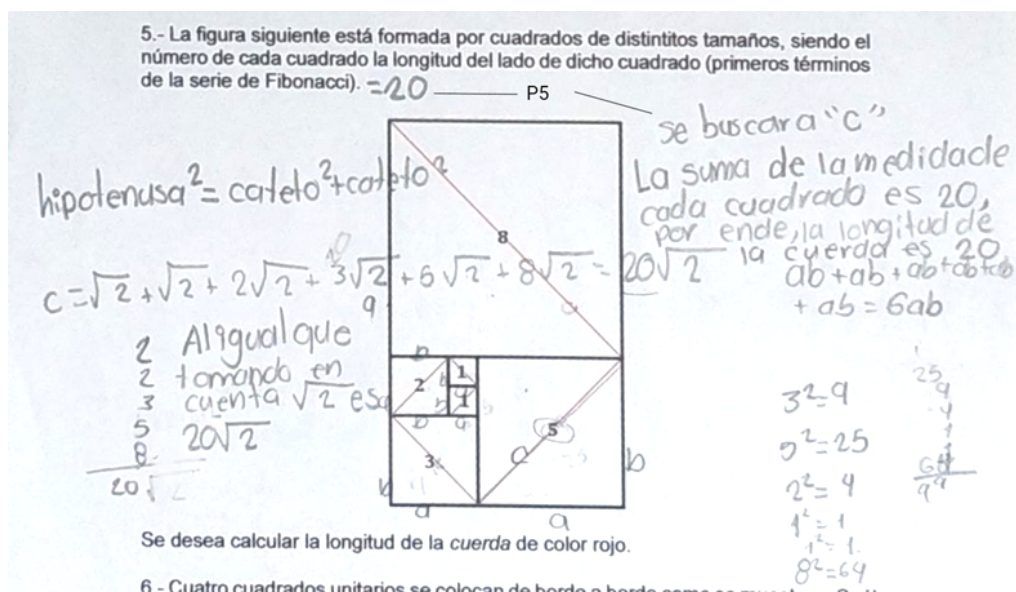


Figura 8. Error de tipo P5 cometido por el A17 durante la resolución del problema 5

En el problema 5 la atención se centra en la longitud de la cuerda roja, pero están de por medio nociones relacionadas con las diagonales de cuadrados y triángulos rectángulos isósceles que propician el establecimiento de patrones como una oportunidad de simplificar la resolución de la relación pitagórica en cada uno de los cuadrados. Es un problema que a simple vista puede parecer laborioso, pero representa una oportunidad para examinar la forma en que se emplean las nociones sobre el tema al momento de abordar este tipo de problemas. Para este caso, se puede identificar que A17 establece como ruta de solución a la relación pitagórica y en específico la longitud de la hipotenusa, al escribir “se busca a c”, establece patrones relacionados con las diagonales de un cuadrado y realiza explícitamente la suma, pero al final falla al presentar su respuesta, ya que escribe que “La suma de la medida de cada cuadrado es 20, por ende la longitud de la cuerda es 20”. Deduce de una forma poco intuitiva la solución, pero a pesar de haber resuelto adecuadamente el problema, no proporciona de forma escrita la respuesta.

En cuanto a las causas de los errores asociadas con las interacciones entre estudiantes y condiciones externas de acuerdo a la jerarquía de causas de error de Newman, se desprenden dos categorías: E1 la cual tiene que ver con errores cometidos por los estudiantes debido a descuidos y la E2 asociada a la motivación o a un argumento

defectuoso. En la categoría E1 se clasifican los errores que se presentan cuando se emplea un patrón equivocado al momento de abordar un problema, pero que en un segundo momento, cuando se vuelve a revisar es capaz de darse cuenta y corregir el patrón, lo podemos observar en la figura 9.

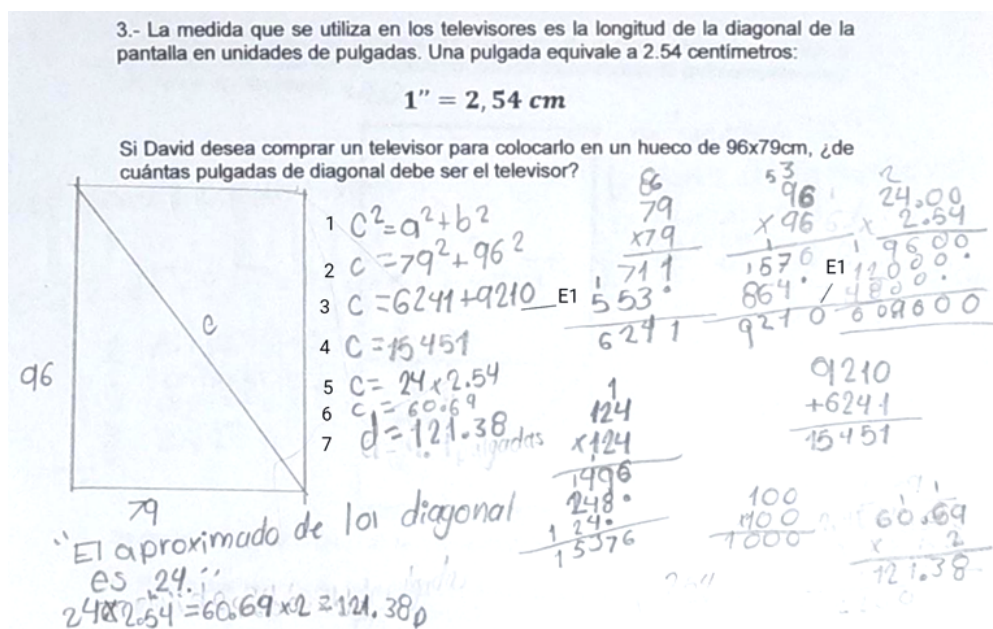


Figura 9. Error de tipo E1 cometido por A17 durante la resolución del problema 3

En el proceso realizado por A17, al resolver el problema 2 de la tarea, podemos observar que reconoce el lenguaje y los símbolos, además, entiende los requisitos del problema y formula una secuencia de pasos adecuada hasta la línea 3, realiza el algoritmo de la multiplicación de maneras correcta, sin embargo se observan descuidos como: omitir la expresión de valores como "C" al cuadrado o colocar las unidades. En la línea 3 se presenta un descuido que le impide seguir con el curso de solución. A17 comete un descuido al codificar con poco cuidado el 6 durante el algoritmo de la multiplicación de 96x96, los escribe cada vez más parecido al cero, lo cual llevó a que en la línea 3 escribiera 9210, en lugar de 9216.

En la categoría E2 podemos encontrar errores de motivación, los cuales ocurren cuando el estudiante decide no resolver el problema a pesar de haberlo comprendido y de haber

trazado una ruta de solución adecuada, en la figura 10 podemos observar el caso de A10, en donde explícitamente describe la ruta de solución, pero el proceso se queda inconcluso.

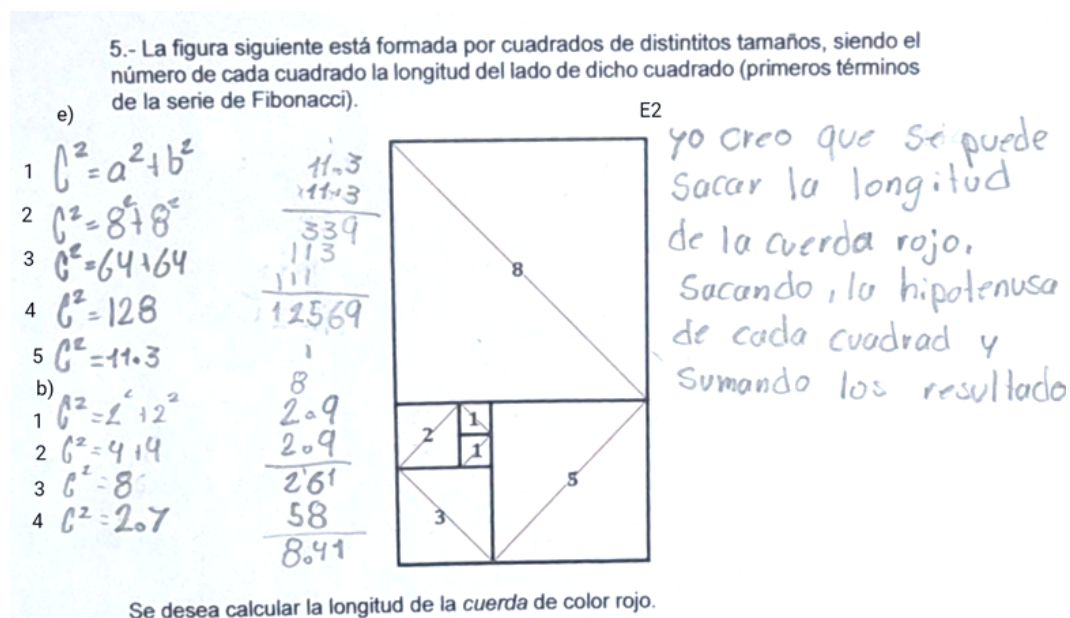


Figura 10. Error de tipo E2 cometido por A10 durante la resolución del problema 5

La ruta de solución propuesta por A10 para abordar el problema 5 parece ser adecuada, pero solo realiza el proceso para la diagonal del cuadrado de lados 8 y para el de 2. Posteriormente escribe “yo creo que se puede sacar la longitud de la cuerda roja, sacando la hipotenusa de cada cuadrado y sumando los resultados” lo cual indica que toma la decisión de no continuar con el proceso de solución. El conjunto de datos se concentró en la tabla 6, en ella podemos observar que: en el problema 1, las causas de error que cometieron los estudiantes encajan en la categoría P4. En cuanto al problema dos las causas de errores están relacionados con la categoría 3 predominantemente, pero también aparecen causas de errores dentro de la categoría 3. En los dos primeros problemas, los errores que aparecen son relacionados a las habilidades de proceso, principalmente, equivocaciones en el proceso para obtener la raíz cuadrada de un número, así como, en la multiplicación en el proceso de elevar al cuadrado un número.

Durante el análisis de la tarea, frecuentemente los estudiantes representaron a la relación pitagórica como $a^2 = c^2 + b^2$.

Tabla 6. Causas de error cometidas por los estudiantes. Elaboración propia.

Estudiante/ Tarea	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4	Tarea 5	Tarea 6
A 1	P4, E1	P3,E1	P4,E1	P2,E1	P2	P2
A 2	P4, E1	P3,E1, E2	P1, E1	P2,E1	NA	NA
A 3	P4, E1	P4	P4,E1	P2,E1	P5, E1	P2
A 4	P4, E1	P4	P4, E1	P2	P2	P2
A 5	P4, E1	P3, E2	P4, E1	P2	P2	P2
A 6	P4, E1	P3, E1	P4, E1	P2,E1	P3	P2
A 7	P4, E1	P3,E1	P4, E1	P2,E1	P2	P2
A 8	NA	NA	NA	P2,E1	P5, E1	P2
A 9	P4, E1	NA	P3,E1	P2,E1	P2	P2
A 10	NA	NA	P4, E1	P2,E1	E2	P2
A 11	NA	NA	P4, E1	P2,E1	E2	P2
A 12	P4, E1	NA	NA	P2	P2	P2
A 13	NA	NA	NA	P2	P2	P2
A 14	NA	NA	P4, E1	NA	P5, E2	P2
A 15	NA	P3, E2	P4, E1	P2	E2	P2
A 16	P4, E1	P4,E1	P2	P2,E1	P3	P2
A 17	NA	NA	E1	P2,E1	P5	NA
Causas asociadas con las interacciones entre estudiantes y la pregunta (P1, P2, P3, P4, P5)						
Causas asociadas con las interacciones entre estudiantes y condiciones externas (E1, E2)						

Para el problema 2 las categorías muestran que las causas de error que cometieron los estudiantes de manera más frecuente fueron del tipo P3, esto ocurre después de establecer la relación pitagórica en la primera línea para buscar el cuadrado de la hipotenusa, pero no despejan alguno de los catetos. Es decir no establecen la diferencia de cuadrados entre la hipotenusa y el cateto conocido. También se hicieron presentes causas de error de tipo P4 consistente a los predominantes en el problema 1.

En el problema 3 aparece la categoría P1, donde el estudiante lee mal los símbolos y los interpreta de manera equivocada, también aparece la categoría P2, en este caso el estudiante no capta el significado de toda la información contenida en el problema y escribe $(a^2 \times b^2)/2$. Además se presentó una causa de error de la categoría E1 debido a un descuido de codificación, el estudiante transcribió de manera equivoca el resultado de una multiplicación originada por cambiar el seis por el cero. Aunado a lo anterior aparece un caso donde la causa del error que comete el estudiante se ubica dentro de la categoría P3, ya

que, el plan que formuló no fue adecuado, debido a que escribe la representación algebraica para encontrar la distancia de uno de los catetos $c^2 = a^2 - b^2$, en lugar de $c^2 = a^2 + b^2$, desviándose de un curso adecuado de solución. La mayor frecuencia de causas de error recayó en la categoría P4 consistentes en los errores cometidos en los problemas anteriores. Este problema fue el que presentó más diversidad de errores por parte de los estudiantes.

En el problema 4 todos los errores cometidos por los estudiantes se encuentran dentro de la categoría P2, es posible identificar que comprenden el problema, en términos generales, pero no logran captar el significado de toda la información. En el problema 5 aparecieron causas de error P5, donde los estudiantes, a pesar de haber resuelto satisfactoriamente el problema no proporcionan de forma escrita la respuesta. También se presentan errores dentro de la categoría E2, los cuales están relacionados con la comprensión del problema, la formulación de una ruta de solución adecuada y la realización de algunos procedimientos de manera correcta pero no concluir con el proceso de solución. Las causas de error que aparecen en las categorías P2, P3 son consistentes a los errores cometidos anteriormente.

En el sexto problema los errores más frecuentes son de la categoría P2, ya que al comunicar sus ideas los estudiantes exhiben que tienen ideas erróneas asociadas con el significado de cierta información del enunciado, no logran relacionar datos con las condiciones del problema, por ejemplo, los estudiantes: A8, A9, A10 y A15 escribieron “3 unidades”. Otra estrategia recurrente fue realizar mediciones con una regla, como en los casos de A1 y A2. En el caso de A11 su respuesta se expresa de forma natural o literal, en ella escribe: “con la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$ ya que si completamos los cuadrados nos da un triángulo rectángulo y si hacemos el procedimiento, yo puse las medidas que saque midiendo con la regla para sacar la hipotenusa” siendo una respuesta espontánea.

4.3. Resultados de tres estudiantes seleccionados

A partir de la transcripción de las entrevistas a tres estudiantes se profundiza en las ideas y conceptos que estos utilizan para resolver los problemas planteados en la tarea. Las respuestas escritas pueden sugerir las razones por las que un estudiante comete errores, pero en la entrevista semiestructurada es posible determinar patrones consistentes de errores con

un mayor grado de certeza (Clements, 1980). A continuación se describen con mayor detalle los resultados de las entrevistas realizadas a tres estudiantes, las entrevistas se realizaron durante los tres días posteriores a la aplicación de la tarea, donde resolvieron seis problemas relacionados con el teorema de Pitágoras.

En primer lugar se describe el caso de A1 representado en la figura 11. Su actitud fue positiva, siempre mostró disposición por participar, el estudiante es considerado como sobresaliente por el docente a cargo. Una de las primeras preguntas de la entrevista para cada problema fue si la información había sido suficiente para resolverlos, en los primeros problemas su respuesta fue afirmativa, pero cuando se le cuestionó sobre ¿que representaban los valores dados en el problema? Comenzó a dar respuestas confusas

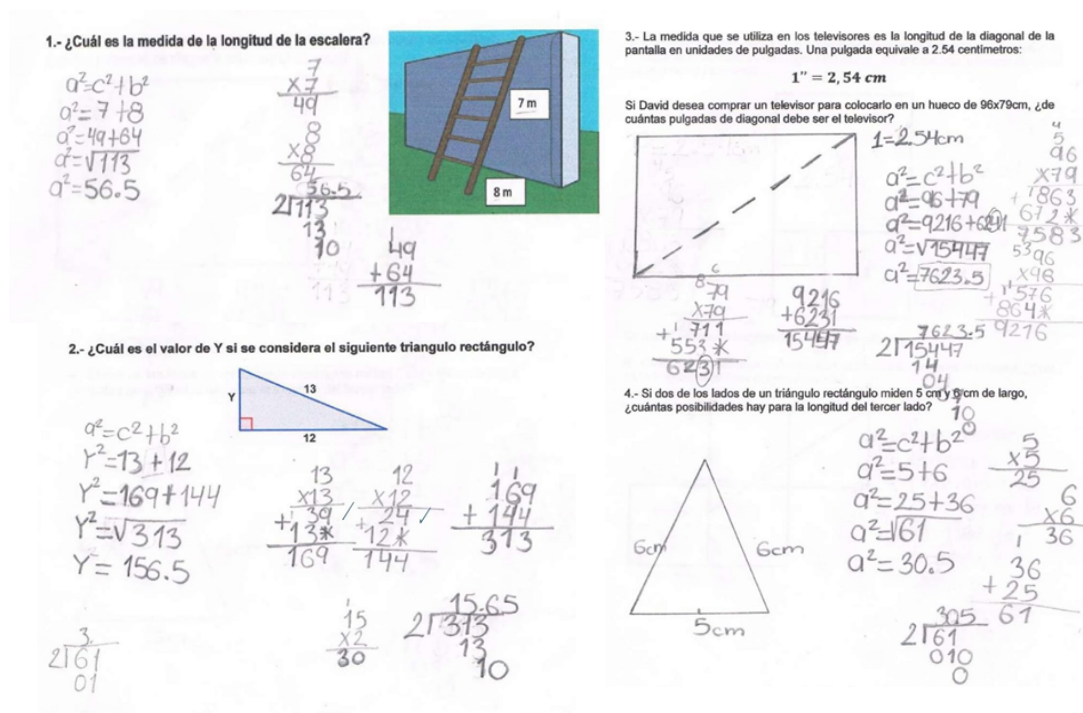


Figura 11. Proceso de solución de problemas del estudiante A1.

A1: El 8 aquí está representando como... ¿la altura?

P: ¿la altura?

A1: y el 7 ¿si es la altura no?... aja bueno yo, yo pen... Bueno yo dije que era la altura

P: ¿el 8 o el 7?

A1: el 8

P: el 8

A1: no el 7 aja (TA1, 26-34)

Con el extracto de la entrevista anterior se puede observar que el estudiante A1 emite respuestas poco reflexivas que provocan inseguridad y reflexión conforme se cuestiona con mayor detalle. Posteriormente, se le cuestionó qué representa para él el teorema de Pitágoras.

A1: Es como.. ¿Hay como se dice? Como la suma de los catetos que... que pues se puede resolver no? sacando, pues, las medidas.

P: muy bien.

A1: aja $a^2 = b^2 + c^2$. (TA1, 67-70)

En el fragmento anterior se ve reflejada la noción que el estudiante tiene sobre la relación pitagórica y la forma en que lo representa cuando resuelve problemas asociados con el teorema de Pitágoras. Se percibe una apropiación del lenguaje con algunas dificultades. A partir del problema 1, se le pide al estudiante que describa lo que representa una de las literales.

P: ¿Qué representa a?

A1: Ah ... bueno los catetos, Bueno la... ¿Cómo se llama laaaa? Creo es la longitud, la más grande ¿no? (TA1, 87-89)

En otro momento reconoció que no recordaba cómo se llamaba el lado del triángulo rectángulo con la longitud más grande, refiriéndose a la hipotenusa. También se le preguntó cómo relaciona la imagen con el teorema de Pitágoras, a lo que responde

A1: Eh... pues tal vez en relación bueno es que el teorema de Pitágoras solamente lo hemos visto con triángulos rectángulos, pero pues tal vez aquí pues... con la escalera ¿no? Aquí la altura y el ancho ¿no? tal vez. (TA1, 46-48)

En la respuesta anterior se percibe una limitada asociación de la definición sugerida con el concepto que ha construido y no es capaz de compararlo con el ejemplo presentado a causa de una vaga imagen conceptual. En la línea 220 de la transcripción de la entrevista a A1 se le solicita que describa el procedimiento que utilizó para obtener la raíz cuadrada a lo cual responde:

A1: dividiendo

P: Okey en este caso el ejemplo es $49 + 64$

A1: Que dá 113, se divide entre dos (TA1, 221-223)

La causa principal para que el proceso de solución efectuado por A1, no fuera el satisfactorio, en el problema 1, fue debido a que utilizó un algoritmo equivocado como lo expresa en el fragmento anterior. En el problema 2 se le pidió que explicara lo que representan los valores 12 y 13 a lo cual responde:

A1: La longitud y cateto

P: La longitud y un cateto

A1: Ajá

P: De este no te acuerdas cómo se llama (señalando la hipotenusa del triángulo rectángulo), Entonces tú representas...

A1: ¿no es la hipotenusa? (TA1, 265-270)

En este momento de la entrevista A1 manifiesta una adquisición del lenguaje en proceso, en un primer momento relaciona la hipotenusa del triángulo rectángulo con “longitud” para después corregir. También se le cuestionó sobre el motivo por el cual omite representar los exponentes en el segundo paso del proceso de solución a lo cual comenta que:

P: ¿Por qué aquí, en tu representación algebraica $a^2 = b^2 + c^2$, si los pones y abajo cuando sustituyes ya no?

A1: Porque a veces se me olvida

P: se te olvida

A1: Porque siempre dijo la maestra que hay que ponerlos porque si no es como no este..., Pus no, no lo estuvieras sumando a la potencia, aja... y aquí se me olvidó

P: Más sin embargo lo elevas al cuadrado

A1: Ajá al cuadrado

P: ¿Por qué?... si no lo pones pero sí lo elevas ¿por qué?

A1: Pus no sé, es un procedimiento que pus ya se me grabó. (TA1, 132-141)

La respuesta anterior, está asociada a un seguimiento de reglas rigurosas, las cuales se encuentran en desarrollo, ya que no lo representa textualmente, sin embargo de alguna forma lo realiza, de forma natural o mecánica. Aunado a lo anterior comenta que no pone las unidades por olvido:

P: No las pones. ¿no te confundes? ¿no te causa algún...?

A1: a veces sí porque no sé si estoy poniendo centímetros, metros o algo así

P: Entonces ¿por qué no las pones?

A1: no sé

P: ¿no sabes?

A1: Porque a veces sí las pongo

P: ¿a veces sí?

A1: aja

P: por ahorrar tiempo

A1: No, O sea termino el problema y tal vez se me olvide y ya me sigo con otro... no sé (TA1, 181-190)

Tal y como lo menciona A1, omitir las unidades puede ocasionar problemas al presentar la respuesta de forma escrita. Continuando con el indagatorio se le preguntó sobre lo que representa para él, elevar al cuadrado las unidades:

A1: Metros y metros cuadrados mmmm

P: ¿lo mismo?

A1: sería diferente ¿no?

P: ¿Qué representa? ¿No lo habías pensado?

A1: No nunca lo había

P: Ah okay

A1: Sí es cierto cómo sería... metros... metros cuadrados... ¿representa lo mismo? (TA1, 201-207)

La respuesta de A1 se relaciona con la asociación de conceptos con definiciones, esta etapa se encuentra en desarrollo, ya que al reflexionar sobre esto, se hace preguntas que le permiten aplicar conocimientos matemáticos. La causa de error que evitó el desarrollo correcto en el proceso de solución estuvo relacionado con el error de transformación P3. Se le preguntó si utilizaba la misma estrategia de solución cuando, se solicita en el problema, encontrar la longitud de la hipotenusa o de un cateto, a lo que respondió:

A1: si ¿no? bueno para mí sí (TA1, 288)

Su respuesta fue muy segura, sin tomarse el tiempo de reflexionar en las características del triángulo rectángulo. Este error evitó que su estrategia de solución fuera eficiente. Al indagar sobre el problema 4 se le cuestionó sobre la pregunta, si había sido sencilla de responder, A1 expresa que:

A1: más o menos

P: ¿Por qué más o menos?

A1: porque no está preguntando ¿Cuánto le falta? está posib... está diciendo ¿Qué posibilidades hay? (TA1, 449-452)

Su respuesta espontánea refleja un pensamiento natural, carente de reflexión, menciona que no tuvo dificultades para resolverlo. Más adelante se le cuestionó sobre los motivos por el que realizó el dibujo de un triángulo acutángulo:

A1: ehh... Pues que aquí está diciendo que dibujemos un triángulo rectángulo

P: muy bien... Con respecto a eso, el triángulo que tú dibujaste ¿es un triángulo rectángulo?

A1: No, nada más es un triángulo

P: ¿Por qué dibujaste ese triángulo?

A1: Porque es el primero que se me vino a la mente

P: Ah okey

A1: Porque pude haber dibujado uno así... o así... (Dibujando en el aire triángulos)

P: ¿Cualquier triángulo se puede resolver con el teorema de Pitágoras?

A1: Que debe ser con un triángulo rectángulo ¿No?

P: Entonces por qué no realizaste un triángulo rectángulo

A1: No sé (TA1, 458-469)

Las acciones realizadas por A1 reflejan la falta de comprensión de los requerimientos del problema, en el fragmento expresó que debe encontrar cuántas posibilidades hay a diferencia de la longitud, sin embargo, considera que, resolver la relación pitagórica es suficiente. Omite el seguimiento de reglas rigurosas. A partir de lo descrito anteriormente se pueden identificar nociones en desarrollo que A1 ha formado en torno a la relación entre objetos matemáticos asociados al teorema de Pitágoras. En la tabla 7 se resumen los resultados del estudiante a partir de la indagación realizada, se consideran en desarrollo, debido a que, presenta una actitud positiva y reflexiva antes la aplicación de reglas rigurosas y reconoce tener malos hábitos.

Tabla 7. Desarrollo de conceptos expresados por A1. Elaboración propia.

Caracterización de etapas que ocurren en la formación de conceptos en torno al teorema de Pitágoras		
Etapas del desarrollo de conceptos	Si	No
Definición	Desarrollo	
Adquisición del lenguaje	Desarrollo	
Seguimiento de reglas rigurosas	Desarrollo	
Asociar concepto con definición	Desarrollo	
Articulación de nociones matemáticas preexistentes		X
Asociación de procesos con acciones		X

En seguida se describe el caso de A4, representado en la figura 12 durante la entrevista el estudiante se mostró nervioso, indicó que la tarea se le complicó debido a que conforme avanzaba los problemas eran más difíciles, explica que: “En realidad no supe mmm bien que necesitábamos comprender o entender o realizar para sacar el... lo que pedía la pregunta, o sea, resolverla”. En el fragmento anterior el estudiante se expresa con familiaridad, utiliza un lenguaje apropiado, con pocos titubeos.

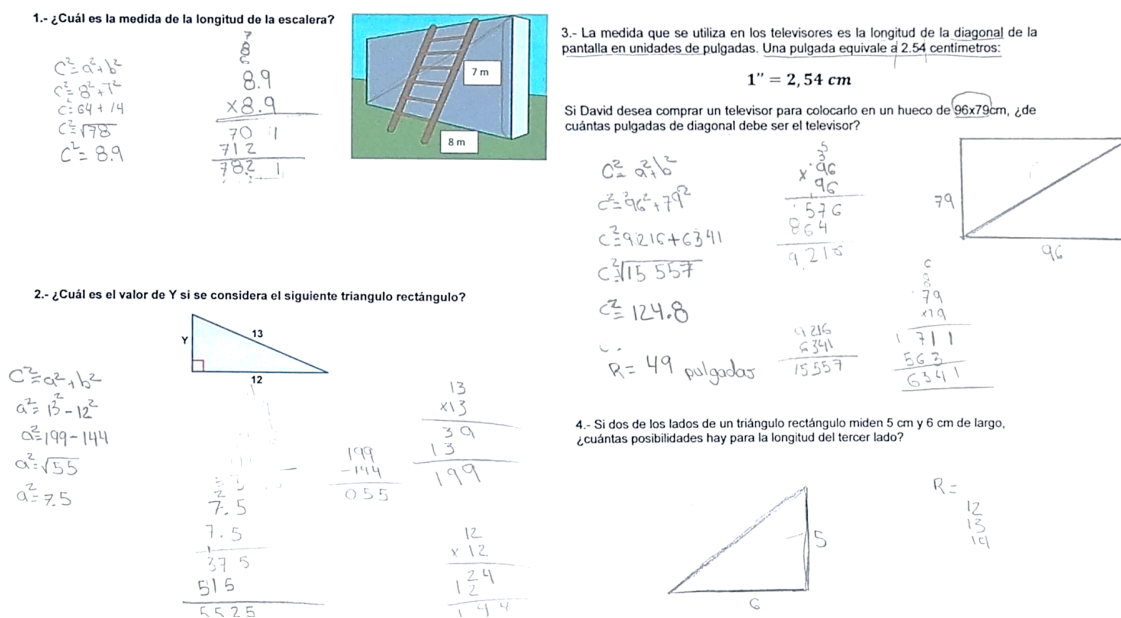


Figura 12. Proceso de solución de problemas del estudiante A4.

Al comenzar con la indagación se le cuestionó sobre la estrategia de solución que abordaría para el problema 1:

A4: Pues que con el Teorema de Pitágoras podemos sacar la hipotenusa de nuestro triángulo para saber la diagonal, la... ¿cómo se llama? Sí, la hipotenusa. (TA4, 30-31)

Más adelante explicó que representa al teorema de Pitágoras mediante la relación pitagórica:

A4: Eh... Una ecuación $c^2 = a^2 + b^2$

P: ¿Y esa expresión qué representa para ti?

A4: Mmm... La fórmula del Teorema de Pitágoras (TA4, 91-93)

Cuando se le solicitó explicar paso por paso, la ruta de solución, es posible identificar un seguimiento de reglas rigurosas en proceso:

A4: Pues, primero que nada, puse la fórmula de... pues la... nuestra fórmula base, se podría decir, ¿no? Y luego, yo pensando que teníamos que sacar la hipotenusa, empecé a hacer mi... mi desarrollo. C^2 es igual a 8^2 , que es nuestro largo, y 7^2 , que es nuestra altura. Eh... me dio un total de 64 y 14. Y sumándolos, me dieron 78. Y luego le saqué la raíz cuadrada a 78, que me dio 8.9. (TA4, 95-99)

Una vez que explicó su plan, se le preguntó sobre el algoritmo para elevar un número al cuadrado, ya que se hizo evidente que no se había percatado del error cometido:

A4: Mmm... Multiplicándolo por... por... por el mismo, o sea...

P: Por ejemplo, aquí tienes los ejemplos. Ocho al cuadrado y siete al cuadrado.

A4: Ajá. Pues lo multiplico por el mismo número porque como es al cuadrado se multiplica... dos veces el número, o sea, siete por siete nos da... Ah, ahí me equivoqué. Exactamente. Ahí me equivoqué, le puse catorce, yo pensé que lo iba a multiplicar por... dos, pero lo multipliqué.

P: ¿Por qué te... por qué te habrás equivocado? ¿Qué causó esa confusión?

A4: Eh... los nervios, yo creo. (TA4, 132-140)

En el fragmento anterior podemos redefinir la causa del error para el problema 1, pasando de un error de proceso a un error por descuido (E1), argumentando que se encontraba nervioso. Lo mismo ocurre en el problema 2, en el que A4 reconoce que multiplicó y que debió haber sumado “multipliqué 3 por 3 y tenía yo que sumar 3 más 3, me hubiera dado 169. O sea, el 199 está incorrecto”. Posteriormente, se le preguntó por qué omitió las unidades y lo que representa elevarlas al cuadrado:

A4: No sé.

P: ¿Nunca las utilizas?

A4: Sí, las... cuando nos ponen a resolver problemas, pues nos piden que le pongamos... sí, es en centímetros o en metros, pero pues... ayer no se me ocurrió ponerle metros.

P: ¿También las unidades se elevan al cuadrado?

A4: Mmm... Creo que sí.

P: ¿Sí? ¿Y qué representa elevar, por ejemplo, metros... al cuadrado?

A4: Mmm... No sabría decirle. (TA4, 145-157)

A partir del fragmento anterior A1 se refiere a la relación pitagórica como una forma práctica para resolver problemas donde se involucren triángulos rectángulos. En el siguiente fragmento explica las características de un triángulo rectángulo:

A4: Un triángulo rectángulo. Para mí es un triángulo que si juntamos dos se hace un rectángulo. Es lo que yo entendí. Que siempre va a tener un ángulo que mida 90 grados. Eso es lo que lo va a diferenciar de distintos triángulos. (TA4, 84-89)

También se le preguntó sobre posibles aplicaciones del teorema de Pitágoras en la vida cotidiana a lo cual respondió:

A4: Pues... Nos dijeron que antes los utilizaban para las pirámides. Pero en la vida real no sé si los sigan utilizando para algo en sí.

P: ¿No lo utilizarías? ¿No se te ocurre en algo de la vida cotidiana?

A4: para que utilizarlo... no (TA4, 124-130)

En esta parte de la entrevista A4 comenta que no ha reflexionado sobre las aplicaciones prácticas del teorema de Pitágoras. Expresó argumentos con base en su experiencia en el aula. El estudiante utiliza la relación pitagórica de una forma práctica y poco reflexiva. En el problema 4 se limita a establecer un plan basado en dos cantidades, las cuales comenta que es lo que requiere para solucionarlo, además de que al verse presionado porque la actividad estaba por terminar realiza cálculos apresurados:

A4: Porque nos dan dos medidas que podrían perfectamente ser nuestros dos catetos para sacar nuestra hipotenusa, que es, vuelvo a repetir, sumadas dan, sumadas los dos catetos dan, la suma de los dos catetos tiene que ser menor a la de la hipotenusa.

P: Claro. ¿Por qué aquí me escribes 12, 13 y 14?

A4: Porque 5 más 6 nos da 11, entonces, a mi criterio, pensé que podría ser 12, 13 y 14, porque son mayor a 11

P: Ah, ok. Pero estás sumando, ¿verdad? Los catetos. Y el teorema de Pitágoras dice que debes, ¿qué?

A4: Restar. No, sumar.

P: Sí, sumar. Pero antes de sumar, ¿qué tienes que hacer?

A4: Elevar al cuadrado. (TA4, 402-420)

El contenido de la entrevista realizada al estudiante A4 refleja que las causas de error asociadas con las interacciones entre estudiantes y condiciones externas como el estrés o la limitación del tiempo juegan un papel importante en el desempeño de los estudiantes. En la tabla 8 se resume el desempeño mostrado por este según las etapas identificadas en la formación de conceptos en torno al teorema de Pitágoras, durante la entrevista no fue posible identificar a la totalidad de las etapas para este caso.

Tabla 8. Desarrollo de conceptos expresados por A4. Elaboración propia.

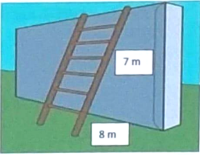
Caracterización de etapas que ocurren en la formación de conceptos en torno al teorema de Pitágoras		
Etapas del desarrollo de conceptos	Si	No
Definición	X	
Adquisición del lenguaje	X	
Seguimiento de reglas rigurosas	Desarrollo	
Asociar concepto con definición		X
Articulación de nociones matemáticas preexistentes		-
Asociación de procesos con acciones		-

Enseguida, se describe el caso de A5, el cual se representa en la figura 13. Al iniciar la entrevista, el estudiante se mostró confiado y seguro de sí mismo; posteriormente se mostró desconcertado y frustrado, en el proceso de indagación el estudiante reflexionó sobre los errores cometidos, por lo que su percepción fue cambiando y comentó:

A5: Sí bueno es que de hecho cuando íbamos llegando del entrenamiento me dolía la cabeza y por ejemplo mis compañeros que estaban a lado, como que me distraían mucho, entonces cuando intentaba concentrarme... Pues no podía Y como por ejemplo esos errores el anterior creo que fueron parte de que no me concentré lo suficiente y en no hacer bien el procedimiento. (TA5, 137-141)

A partir de lo aprendido en tu clase de matemáticas sobre el "Teorema de Pitágoras" resuelve los siguientes problemas, puedes utilizar el espacio que sea necesario para identificar, transformar y representar la información.

1.- ¿Cuál es la medida de la longitud de la escalera?



Handwritten solution for problem 1:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 7^2 + 8^2$$

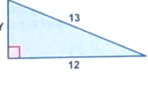
$$c^2 = 49 + 64$$

$$c^2 = 113$$

$$c = \sqrt{113}$$

$$c \approx 10.63$$

2.- ¿Cuál es el valor de Y si se considera el siguiente triángulo rectángulo?



Handwritten solution for problem 2:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$Y^2 + 12^2 = 13^2$$

$$Y^2 + 144 = 169$$

$$Y^2 = 169 - 144$$

$$Y^2 = 25$$

$$Y = 5$$

3.- La medida que se utiliza en los televisores es la longitud de la diagonal de la pantalla en unidades de pulgadas. Una pulgada equivale a 2.54 centímetros:

1" = 2,54 cm

Si David desea comprar un televisor para colocarlo en un hueco de 96x79cm, ¿de cuántas pulgadas de diagonal debe ser el televisor?

Handwritten solution for problem 3:

$$L^2 = 79^2 + 96^2$$

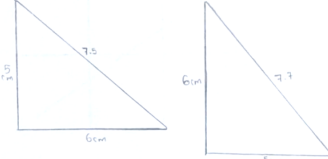
$$L^2 = 6241 + 9216$$

$$L^2 = 15457$$

$$L = \sqrt{15457}$$

$$L \approx 124.2$$

4.- Si dos de los lados de un triángulo rectángulo miden 5 cm y 6 cm de largo, ¿cuántas posibilidades hay para la longitud del tercer lado?



Handwritten solution for problem 4:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$5^2 + 6^2 = c^2$$

$$25 + 36 = c^2$$

$$61 = c^2$$

$$c = \sqrt{61}$$

$$c \approx 7.81$$

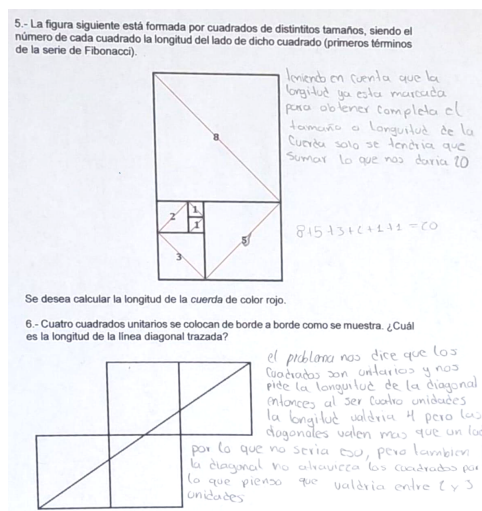


Figura 13. Proceso de solución de problemas del estudiante A5

Cuando se le preguntó, si a primera vista ¿qué requería para resolver el problema uno? respondió:

A5: Ah este que ya bueno el problema era sacar la medida de la longitud de la escalera con las dos esté cantidades que nos daba de la tanto la pared como del espacio de la pared a la escalera y pues principalmente saber resolver este, operaciones básicas como la son las sumas las multiplicaciones y divisiones, Y ya a partir de esto pues lo que nos han estado enseñando en el salón de clases, que era pues lo de sacar tanto la hipotenusa o un cateto que en el caso de este problema era la longitud la hipotenusa. (TA5, 12-38)

Expresa un lenguaje adecuado, se refiere al teorema de Pitágoras como una enseñanza práctica, útil para resolver problemas de longitud, identifica al triángulo rectángulo como herramienta asociada al tema, del cual describe una imagen conceptual adecuada “Es un triángulo que para ser un triángulo rectángulo tiene que tener un ángulo de 90 grados”. En seguida se le pidió que describiera las acciones realizadas:

A5: Ah pues se les da el valor por ejemplo que el ocho tenía que elevarse al cuadrado tanto como el 7 que fue el resultado de 64 más 42. Y eso se suma y tenemos que sacar la raíz cuadrada de 108 en esa parte fue la cual se me dificultó ya que pues no sé cómo tal, sacar bien la raíz cuadrada. Entonces tuve que hacer varias operaciones con diferentes números y que se acercara a esa raíz. (TA5, 65-69)

En el extracto anterior, el estudiante, expresa errores al realizar operaciones básicas, como multiplicar siete por siete y sumar 64 más 42 y la dificultad explícita por encontrar la raíz

cuadrada. Al indagar sobre estas acciones se le preguntó el proceso para elevar un número al cuadrado el respondió:

A5: Multiplicándolo por sí mismo y pues por ejemplo que como eran números pequeños pues, se podrían hacer así rápidamente.

P: Muy bien, no consideras que no hacer las operaciones puede provocar algún tipo de equivocación

A5: mmm Pues tal vez sí porque haciendo las operaciones te das cuenta de que tanto vas bien en el procedimiento y por ejemplo si se... si llegas a borrar algo Tienes que volverla a hacer para volver a poder continuar con el problema.

P: Claro y ¿Por qué no las hiciste?

A5: A porque en ese momento tenía como una presión de terminar el examen rápido entonces lo que ya sabía, pues, casi como que me lo salté, entonces me concentré más en hacer o lo que se me dificultaba o lo que no sabía.

P: ¿Le pusiste todo tu empeño a realizar esto?

A5: Si, porque quería ver qué tanto había aprendido de este tema, la verdad creo que mi aprendizaje, sí fue muy poco, porque en parte no me pareció un tema muy interesante, si... tomé en cuenta que es muy fundamental para la vida diaria, pero no me pareció del todo como que fuera algo tan este interesante.

P: ¿Cuánto es cuánto es 7 por 7?

A5: aja... Sí es 42... aja 42

P: Okey Entonces aquí en esta multiplicación ¿Por qué pusiste cuatro?

A5: mmmm No lo sé yo creo que me confundí, o algo parecido pero que pues no... osea no tomé muy en cuenta no vi bien los resultados.

P: Si tú haces $64 + 42$ ¿cuánto te da? ¿Consideras que el resultado es correcto?

A5: mmm no son 106...bueno $42 + 64$ son 106. (TA5, 72-134)

La secuencia de ideas en el diálogo anterior, A5, refleja una actitud confiada, al realizar cálculos mentales, menosprecia un seguimiento de reglas rigurosas escritas, al considerar que puede ahorrar tiempo. Los errores en operaciones básicas, al multiplicar y sumar están relacionados con causas de error de proceso, en el problema 3 también presenta errores al realizar el algoritmo de la multiplicación (9 por 6) al resolver 96^2 . También expresa una falta de motivación al resolver la tarea, lo cual está asociado con las interacciones entre estudiantes y condiciones externas al problema. Argumentó que el uso habitual de la calculadora afectó su desempeño:

A5: Por ejemplo en clase a veces nos dejan usar la calculadora, entonces simplemente pues es más rápido, realizar un problema con calculadora a realizarlos así en tu mente y tener que hacer cada una de las operaciones para poder acercarte más al resultado. (TA5, 95-98)

Al final del análisis del problema 1, se le pide que exprese lo que representa su respuesta en términos del problema:

A5: mmm los 10.4 metros cubic... bueno no podrían ser cúbicos

P: ¿Por qué ya no son cúbicos?

A5: porque... se supone que tenías que sacar la de la línea recta ¿no? y los metros cúbicos son como un cuadrado, entonces pues, yo creo que serían los 10.4 metros o algo así. (TA5, 174-177)

En el fragmento anterior A5 expresa confusión al relacionar su resultado con las unidades utilizadas, expresa unidades cúbicas en lugar de cuadradas, lo anterior está relacionado con la articulación de nociones matemáticas, relaciona adecuadamente que la potencia, representa el área de un cuadrado, a partir de una imagen conceptual creada. Al avanzar en el análisis del problema 2 se le preguntó si había encontrado alguna diferencia con respecto al problema anterior:

A5: Sí porque tenías que sacar diferentes medidas entonces la la fórmula para sacarlo era diferente

P: ¿En qué consiste esa diferencia?

A5: En que para sacar la hipotenusa tienes que sacar, tienes que sumar y para sacar algún cateto tienes que restar. (TA5, 211-215)

El estudiante A5 comprende los requisitos del problema, utiliza un lenguaje apropiado, pero al momento de expresar su plan en lenguaje matemático, lo ejecuta sin un seguimiento de reglas rigurosas, escribe $a^2=12^2-13^2$, lo cual le propicia un error de transformación (P3), pero que combinado, con un error de argumento defectuoso acierta a la respuesta correcta, omite el seguimiento de reglas rigurosas en el desarrollo de su plan. Más adelante se le pidió que explicara los requerimientos del problema 4:

A5: pues.. Que Cuántas posibilidades hay para que o sea que qué medida según yo era el tercer lado y tomando en cuenta que teníamos que hacer un triángulo rectángulo pues simplemente es un lado de cinco y otro de 6 y pues medí lo otro y fue el resultado del otro, de la hipotenusa o del lado faltante del triángulo.

P: ¿Por qué no veo operaciones? ahorita me vas a contar cómo lo hiciste, pero yo veo que ya en tu dibujo simplemente cambias los catetos. ¿Qué fue lo que pasó ahí?

A5: Pues simplemente así como que... ya no, pues simplemente ya no quería hacer el examen, entonces nada más intentaba hacer como una respuesta fácil para terminar o algo así.

P: ¿Por qué ya no lo querías hacer?

A5: Ah, porque me estreso muy fácil y como ya había dicho me dolió la cabeza, entonces sentía que ya no lo quería realizar. No realicé operaciones porque simplemente lo medí con una regla y porque si no tendría que volver a hacer el procedimiento de sacada hipotenusa, entonces nada más se me hizo fácil medirlo y ya. (TA5, 352-393)

En el fragmento anterior se puede identificar que, la motivación como causa asociada con la interacción entre el estudiante y las condiciones externas, se volvían un factor de causa de error, que no se hace evidente en la tarea escrita, pero que para los estudiantes se convierte en una causa de error importante. Se encuentra relacionado con el proceso de asociación de procesos de pensamiento con significado en las etapas de formación de conceptos, en ella ocurre un proceso intelectual asociado a las actividades matemáticas, en el que se requiere de acciones racionales y reflexivas que involucran el fracaso y la resiliencia para superarlo. En consecuencia A5 decide utilizar la regla para hacer mediciones. Estos argumentos se repiten durante el análisis de los problemas 5 y 6.

P: ¿Resulta fácil identificar la información necesaria para resolver el problema 5?

A5: Ah, Pues creo que sí, porque dice que... Que siendo el número de cada cuadrado la longitud del lado... O sea, que la longitud era el lado, o algo así. Pero pues no quise así como tenerlo mucho en cuenta, así que solo tomé que ya estaba marcada la longitud. Y creo que sí, no entendí muy bien la pregunta. Entonces, como después vi que nada más decía que se deseaba calcular la longitud de la cuerda de color rojo, y ya estaba marcada, solo puse eso y ya. (TA5, 430-437)

P: Muy bien, la información fue clara y suficiente para resolver el problema 6?

A5: Pues creo que no, porque no nos proporcionaba ningún tipo de... O sea, sí nos decía que eran unitarios y todo, pero yo creo que, como nos han enseñado más, era que te proporcionara más medidas para poder sacar la diagonal. Ajá, ¿cuánto vale la diagonal? (TA5, 472-475)

En el diálogo anterior A5, se refiere al Teorema de Pitágoras como un conocimiento práctico, limitado a la utilización de la relación pitagórica, en el cual se requieren de las medidas de los catetos para obtener la diagonal, debido a las condiciones descritas anteriormente, como el estrés y la frustración el estudiante no reflexiona, se le complica transitar de un pensamiento natural a uno matemático, en el que puede deducir condiciones implícitas en el problema. En la tabla 9 se resume, lo que a través de la entrevista, A5 hace explícito, en cuanto al desarrollo de conceptos se refiere, el estudiante hace uso de un lenguaje adecuado, asociado a la aplicación de la relación Pitagórica en triángulos

rectángulos, con nociones en desarrollo, al referirse a ellos con familiaridad. Se identifican como causas de error el proceso de aplicaciones de operaciones básicas.

Tabla 9. Desarrollo de conceptos expresados por A5. Elaboración propia.

Caracterización de etapas que ocurren en la formación de conceptos en torno al teorema de Pitágoras		
Etapas del desarrollo de conceptos	Si	No
Definición	Desarrollo	
Adquisición del lenguaje	X	
Seguimiento de reglas rigurosas	Desarrollo	
Asociar concepto con definición	X	
Articulación de nociones matemáticas preexistentes	X	
Asociación de procesos con acciones		X

En la tabla 10 se concentran las causas de error identificadas durante la entrevista a tres estudiantes, en ella podemos observar que la causa de error más común en el problema 1 es debido a habilidades de proceso en el que hay una confusión entre el algoritmo de la raíz cuadrada con el de la división en el caso de A1, pero también existen errores por descuido que llevaron a los estudiantes a multiplicar por dos, en lugar de elevar al cuadrado como en el caso de A4, también se presentaron causas de error derivadas de problemas en el uso de operaciones básicas, principalmente multiplicación y división como en el caso de A5.

Conforme avanzaron los problemas el reto fue mayor, a las causas de error descritas anteriormente se incorpora la noción, que restringe al teorema de Pitágoras, a la relación pitagórica, la cual es utilizada para obtener longitudes dadas dos cantidades, lo cual dificultó la comprensión de los últimos problemas. La diversidad de causas de error justifica la ampliación de subcategorías, como se muestra en la tabla 11, se ha encontrado que los errores de la categoría P4, asociados a las habilidades de proceso se pueden separar en causa de error derivados en un proceso equivocado, en operaciones de suma o resta, también se diferencian de aquellos cometidos al multiplicar durante el proceso de elevar al cuadrado.

Tabla 10. Concentrado de las causas de error a partir de las entrevistas. Elaboración propia.

Estudiante /Tarea	Problema1	Problema 2	Problema3	Problema 4	Problema5	Problema 6
A1	P4e, E1 confunde el proceso para obtener la raíz cuadrada con el de la división (TA1, 220-225)	P3a, E1 Al expresar sus ideas en términos matemáticos, comenta que es lo mismo encontrar el valor de la hipotenusa que el del cateto (TA1, 286-288)	P4c, E1 Reconoce que cometió un error por no hacer una corrección, trabajó con dos valores distintos (TA1, 386)	P2b, E1 No comprende los requisitos se confunde entre cuánto le falta y las posibilidades (TA1, 446-452)	P2c Expresa que no supo cómo relacionar el TP con el problema ya que tenía más números de los que ocupaba (TA1, 508)	P2d No entiende los requisitos recurre a una respuesta automática y decide hacer mediciones con regla (TA1, 560-568)
A4	P4d, E1 Multiplica por 2 en lugar de elevar al cuadrado, argumenta que estaba nervioso. Durante la entrevista contesta correctamente (TA4, 132)	P4c, E1 En el proceso de multiplicar se confunde y multiplica de nuevo en lugar de suma. Durante la entrevista contesta correctamente (TA4, 209-220)	P4c, E1 Error en el algoritmo de la multiplicación, al realizar el cálculo mental se confunde con muchas operaciones (TA4, 313-332)	P2d No comprende el problema, reconoce que responde de manera automática al contar con dos números (TA4, 402)	P2e No comprende el problema debido a que no eran ejercicios como los abordados en clase (TA4, 436)	P2e No comprende el problema debido a que no eran ejercicios como los abordados en clase (TA4, 436)
A5	P4c, E1 Comenta que los errores al multiplicar fueron causados por un dolor de cabeza (TA5, 106-134)	P3c, E2 Al formular su plan comete un error al traducir la relación pitagórica de tal forma que al sustituir lo conduce a un resultado equivocado (TA5, 214)	P4c, E1 Estaba estresado al realizar las operaciones para obtener la raíz cuadrada que le llevó a cometer errores aunado a su dolor de cabeza (TA5, 296)	P2d No comprendió los requisitos del problema y utilizó una regla para medir (TA5, 352)	P2c Por error de comprensión supuso que los números en el problema corresponden a la longitud de la cuerda (TA5, 426)	P2e Menciona que para resolver el problema necesitaba dos números por lo que no pudo resolverlo (TA5, 467)

A partir de los resultados presentados se puede observar que, el error, es una consecuencia de diferentes factores. Su presencia se ha hecho visibles a partir del empleo de patrones equivocados, así como, de conocimientos deficientes o incompletos, también es necesario agregar, las dificultades entre los estudiantes, ligadas a la manifestación de problemas en la comprensión de ciertos conceptos o ideas, como por ejemplo, que el teorema de Pitágoras es más que una relación funcional entre cantidades, usadas para obtener longitudes en triángulos rectángulos, o la representación de la imagen conceptual del triángulo rectángulo asociado a una definición sugerida y como una relación entre objetos matemáticos con el área de figuras planas. Lo cual, es consistente con algunos de los factores asociados a las dificultades que afectan el éxito de los estudiantes como: la capacidad de cálculo, la capacidad de hacer implicaciones matemáticas a partir de palabras o símbolos, dar sentido a los diversos procesos matemáticos y seguir procedimientos efectivos con problemas matemáticos (Hollander, 1978).

Tabla 11. Subcategorías de la jerarquía de Newman. Elaboración propia.

Estudiante /Tarea	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
A 1	P4e, E1	P3a,E1	P4c,E1	P2f,E1	P2c	P2d
A 2	P4e, E1	P3c,E1, E2	P1, E1	P2f,E1		
A 3	P4a, E1	P4b	P4c,E1	P2b,E1	P5b, E1	P2d
A 4	P4d, E1	P4c, E1	P4c, E1	P2d	P2e	P2e
A 5	P4c, E1	P3c, E2	P4c, E1	P2d	P2c	P2e
A 6	P3d, E1	P3a, E1	P4c, E1	P2b,E1	P3d	P2e
A 7	P4e, E1	P3a,E1	P4c, E1	P2f,E1	P2e	P2e
A 8				P2b,E1	P5b, E1	P2e
A 9	P4a, E1		P3b,E1	P2f,E1	P2e	P2e
A 10			P4f, E1	P2b,E1	E2	P2e
A 11			P4c, E1	P2b,E1	E2	P2d
A 12	P4c, E1			P2d	P2e	P2e
A 13				P2b	P2c	P2e
A 14			P4c, E1		P5b, E2	P2e
A 15		P3a, E2	P4f, E1	P2b	E2	P2e
A 16	P4e, E1	P4e,E1	P2a	P2b,E1	P3b	P2d
A 17			E1	P2b,E1	P5a	

Causas asociadas con las interacciones entre estudiantes y la pregunta:

P1 error por cambio de símbolos al codificar la información

P2a error al relacionar nociones de área

P2b error al efectuar una acción meramente procedimental

P2c error al no relacionar los requisitos del problema con TP

P2d error al recurrir a la regla para hacer mediciones

P2e error al no pasar de un lenguaje natural a uno simbólico

P2f error al dibujar un triángulo distinto al triángulo rectángulo

P3a error al sumar cuando debe restar

P3b error al restar cuando debe sumar

P3c despeja equivocadamente la hipotenusa

P3d escribe una operación y realiza otra

P4a error en algoritmo de la suma

P4b error en algoritmo de la resta o diferencia

P4c error en el algoritmo de la multiplicación

P4d error al multiplica por dos durante la potenciación

P4e error al dividir entre dos durante la radicación

P4f error en el algoritmo para obtener la raíz cuadrada

P5a error al interpretar el resultado

P5b error al no presentar una respuesta escrita o conclusión del proceso

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

5.1. Introducción

En este capítulo se da respuesta a la pregunta de investigación que orientó el desarrollo de la tesis, la cual se interesó en el papel que juega el error en el aula, cuando se abordan tareas sobre el teorema de Pitágoras. El error como fenómeno, durante el proceso de aprendizaje de las matemáticas, debe ser el centro de un análisis profundo que conduzca a mejorar la enseñanza en la educación matemática. Su presencia se investiga con la finalidad de identificar las causas que le dan razón de ser.

Durante la aplicación de la tarea fue posible identificar que cuando un error se hace presente, su origen está relacionado con una diversidad de causas y factores relacionados entre sí, no puede verse al error como un fenómeno aislado, sino como un suceso natural (Vosniadow y Verschaffel, 2004) que además, debe propiciarse en el aula. Por esta razón, al inicio, se propuso identificar y clasificar las causas de errores que cometen los estudiantes de telesecundaria cuando resuelven tareas que abordan el teorema de Pitágoras. Durante la revisión de la tarea se establecieron patrones equivocados en el proceso de solución, que fueron asociados a: la comprensión del teorema de Pitágoras como la relación entre objetos matemáticos y su evolución a lo largo de la historia, así como a, las nociones o conceptos desarrollados durante la clase de matemáticas.

La taxonomía de causas de error de Newman facilitó la sistematización en la identificación de las causas de error, en cada fase, existen parámetros con los cuales debe contar el proceso de solución de los estudiantes. El problema 1 y 2 de la tarea tuvieron el mayor número de aciertos, lo cual está directamente relacionado con la familiaridad de los estudiantes con ese tipo de contenido. Las causas de error identificadas fueron predominantemente por el desarrollo de algoritmos defectuosos. A medida que la tarea avanzó, las características de los problemas cambiaron, dejaron de ser habituales, por lo que las causas de error se diversificaron, hasta que, al final de la tarea, la mayor causa de error fue relacionada con la falta de comprensión donde los estudiantes no logran pasar de un lenguaje natural a uno simbólico.

5.2. Respuesta a las preguntas de investigación

La pregunta de investigación que orientó el desarrollo de la tesis es ¿cuáles son las causas de los errores que cometen estudiantes de telesecundaria cuando formulan, justifican y usan el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas? Con base en los resultados expuestos en el cuarto capítulo la pregunta se respondió como se indica a continuación.

Los resultados indican que los errores que cometen los estudiantes de telesecundaria cuando resuelven tareas relacionadas al teorema de Pitágoras tienen un origen diverso, lo cual es un elemento útil para diagnosticar problemas estructurales en el aprendizaje de las matemáticas, que van desde el dominio de operaciones básicas hasta la falta de comprensión de conceptos interconectados, necesarios para su aplicación en problemas con alta demanda cognitiva, lo cual está relacionado con el desarrollo del pensamiento matemático, este promueve la generalización mediante un razonamiento formal a través de acciones racionales y reflexivas, dichas acciones deben ser un recurso que se promuevan durante el proceso de enseñanza aprendizaje. Estos problemas se encuentran arraigados en el sistema educativo, han sido persistentes y sistemáticos, por lo que, al identificar las causas de error, es posible identificar las dificultades que experimentan los estudiantes que no han sido posibles de superar y que impiden avanzar en la construcción de nuevos conocimientos y así, poder establecer estrategias de solución.

De acuerdo al primero de los objetivos específicos del presente trabajo, se identificaron las causas de los errores que cometen los estudiantes de telesecundaria cuando resuelven tareas que involucran el teorema de Pitágoras. Durante el análisis de resultados se identificaron los patrones equivocados que los estudiantes de la telesecundaria 118 cometieron en relación al teorema de Pitágoras y se establecieron conexiones que explican la ocurrencia del fenómeno. Una de las principales causas de ello, es la dificultad para comprender el teorema, el cual está basada en una noción mecanicista, práctica y simplista, en la que se establece la relación pitagórica $c^2 = a^2 + b^2$ como definición del teorema, lo cual difiere de la premisa matemática basada en una red estructurada de conceptos e ideas entre objetos matemáticos, que a lo largo de la historia ha permitido conectar diferentes áreas de la

matemática, dando sentido al conocimiento adquirido para ser aplicado en la construcción de nuevos conocimientos.

La demostración del teorema de Pitágoras significó un cambio profundo que aportó una perspectiva revolucionaria en el desarrollo de las matemáticas como ciencia, en su desarrollo histórico, la transición ocurrió, cuando, dejó de ser un resultado surgido de la especulación empírica, para convertirse en un proceso de pensamiento lógico, que infiere una conclusión a partir de premisas verdaderas, derivado del razonamiento deductivo.

En la tarea se muestran evidencias de que este salto, representa un obstáculo intelectual que bloquea la concepción del teorema entre los estudiantes, A4 explica que la fórmula del teorema de Pitágoras es $c^2 = a^2 + b^2$, reduciendo este, a la aplicación de una fórmula, donde se requiere de dos cantidades para poder aplicarla y establecer la relación de longitud. Una variante es la que representan A1, A2 y A7, en estos casos expresan la relación pitagórica como $a^2 = b^2 + c^2$ en donde se manifiesta que el seguimiento de reglas no es riguroso, ya que representa la fórmula de forma mecánica. Las causas de error, según la taxonomía de Newman, identificadas en el problema 2, como P3a y P3c también son evidencia de una noción limitada a una fórmula, del teorema, ya que simplifican su uso a una acción mecánica, cuando sustituyen los valores de la hipotenusa y del cateto conocido o cuando suman en lugar de restar; omitiendo una reflexión de sus acciones y tomando una decisión automática que los lleva a equivocar el patrón durante el proceso de transformación.

Las causas de los errores en el problema 4 están relacionadas con la comprensión de este y también fueron asociadas con la dificultad para comprender el teorema de Pitágoras, debido a que su validación, está dada, mediante su experiencia empírica en el aula, más que en la reflexión y el razonamiento. Los requerimientos del problema causaron confusión, cuando se les cuestionó sobre ¿cuántas posibilidades hay para la longitud del tercer lado? Si se conoce la longitud de dos de los lados de un triángulo rectángulo. En la respuesta de A1 y A5 durante la entrevista, comentaron que no entienden porque preguntan sobre las posibilidades, ellos expresaron que el problema se resolvía encontrando la longitud del tercer lado; esta respuesta es originada a partir de un pensamiento práctico y

poco reflexivo. En este problema también se hicieron evidentes, dificultades en el dominio de los elementos del triángulo rectángulo.

La segunda causa de error identificada a partir de los resultados obtenidos fue la dificultad en el dominio de los elementos del triángulo rectángulo. En el desarrollo histórico del teorema de Pitágoras, el triángulo rectángulo fue una herramienta concreta, utilizada de manera práctica para realizar cálculos aritméticos y geométricos, gracias a la aplicación de sus propiedades. Los resultados obtenidos reflejan que la adquisición de lenguaje en el desarrollo de conceptos, en cuanto a la identificación de los lados del triángulo rectángulo se encuentra en desarrollo, cuando los estudiantes se refieren a ellos, lo hacen con titubeos, incluso, como en el caso de A1, durante la entrevista, dijo haber olvidado algunos, sin embargo, son asociados de forma adecuada con su longitud, identificó que alguno debe tener la longitud más larga. Los estudiantes, también hicieron referencia al ángulo de 90° , como característica distintiva de este, pero omitieron hacer referencia a la perpendicularidad.

Durante el desarrollo de la tarea, los estudiantes: A1, A7 y A9 recurrieron a la representación de triángulos acutángulos como apoyo para resolver el problema 4, dichas acciones representan una limitada aplicación del conocimiento funcional como resultado de un seguimiento poco riguroso de reglas, de acuerdo con el desarrollo de conceptos. Durante la entrevista reconoce que, el triángulo que dibujó, no representa un triángulo rectángulo, pero comenta que no sabe porqué lo hizo. El seguimiento riguroso de reglas durante el proceso de formación de conceptos está relacionado con el pensamiento matemático.

Como tercera causa de los errores cometidos por los estudiantes cuando resuelven problemas que involucran el teorema de Pitágoras, se identificó a la dificultad para articular nociones matemáticas previas. González (2009) argumenta que antes de los pitagóricos, no existían razones basadas en la experiencia observable por parte de los mesopotámicos, egipcios o hindúes, para relacionar, al triángulo rectángulo, con los cuadrados construidos sobre sus lados. Durante el desarrollo de la tarea se identificaron descuidos que no impidieron continuar con la resolución del problema pero que están relacionados con esta dificultad, durante la entrevista, se buscó conocer las implicaciones de los descuidos

observados, se les cuestionó a los estudiantes sobre la razón por la que, omiten representar gráficamente el exponente, cuando sustituyen las literales en la expresión algebraica cuando representa la relación pitagórica, así como las unidades con las que se trabaja.

Los estudiantes entrevistados comentaron que durante la clase siempre se les había dado la indicación de ponerlo pero que durante la tarea, lo habían omitido por olvido y para ahorrar tiempo, mencionaron que evitar poner unidades les causa confusión al momento de emitir la respuesta, pero que aún así, cometen el descuido de no ponerlas. También se indagó sobre el significado que tenía para ellos, elevar al cuadrado las unidades. El estudiante A1 respondió que no lo había pensado, con las indagaciones el estudiante se cuestionó sobre la diferencia entre metros y metros cuadrados. El estudio de la relación pitagórica, como una fórmula que se emplea para conocer la longitud, evita la aplicación del conocimiento matemático, mediante la asociación de conceptos con definiciones, es por ello que los estudiantes no cuentan con razones intuitivas para relacionar el triángulo rectángulo con el cuadrado de sus lados.

Se identificó como cuarta causa de los errores cometidos durante la tarea, a la dificultad en la realización de cálculos aritméticos y algebraicos, mediante la taxonomía de causas de error de Newman se observaron situaciones de este tipo que recaen en el nivel P4, error de habilidades de proceso, asociadas a que el estudiante no lleva a cabo el procedimiento correctamente. Se identificaron las causas que provocan estas situaciones, en primer lugar se asocia al uso de calculadora durante las clases de matemáticas, para realizar operaciones básicas como suma, resta, multiplicación y división. A5 comentó que el uso de la calculadora le permite hacer los cálculos con mayor rapidez, por lo que durante la tarea se vio en la necesidad de realizarlos paso a paso, al realizar las operaciones, el estudiante manifestó problemas para el seguimiento de reglas rigurosas, en esta etapa, para el desarrollo de conceptos, se considera la decisión entre seguir con un pensamiento natural, basado en la experiencia, o seguir un razonamiento deductivo que implica el análisis lógico de la situación para validar o no el resultado según las condiciones del problema.

Otra de las causas de error relacionada a la dificultad de cálculos aritméticos y algebraicos fue la manifestación de problemas para obtener la raíz cuadrada, se identificaron 4 casos,

en los que los estudiantes dividieron entre dos en lugar de buscar la raíz cuadrada, lo cual se atribuye en respuesta a una acción mecanicista, probablemente causada por el uso de la calculadora, así como, a la similitud de símbolos en esta, lo cual pudo causar una confusión en los estudiantes. También relacionado con un seguimiento de reglas poco riguroso, ya que su aplicación funcional del conocimiento implica estar consciente de las reglas para aplicarlas en contextos apropiados.

La concepción de la relación pitagórica como una mera fórmula, así como su uso mecanicista, evita la reflexión durante las operaciones algebraicas, lo cual se hizo evidente en el problema 2, cuando los estudiantes despejaron la incógnita determinada por “Y”, empleando patrones equivocados durante la sustitución de la hipotenusa, en este caso se combinan problemas para seguir reglas rigurosas, una vez que se elaboró un plan para abordar el problema, este plan está basado en la experiencia previa, la manifestación del problema se da cuando no se reflexiona en el proceso de reorganización según las condiciones del problema y se realiza de forma mecánica. Finalmente, se identificó que existen distractores emocionales causantes de los errores que cometen los estudiantes cuando abordan problemas que involucran el teorema de Pitágoras, el nerviosismo y la presión por concluir la tarea en un tiempo determinado es uno de ellos, así como, malestares físicos como el dolor de cabeza o la falta de motivación e interés en el tema, fueron argumentos que los estudiantes dieron durante la entrevista.

Los resultados aportan evidencia de que los estudiantes presentaban descuidos al realizar cálculo mental en operaciones rutinarias a causa del nerviosismo, A4 y A5 lo manifestaron principalmente en los problemas 1 y 2. Ambos presentan descuidos similares al realizar cálculo mental, el estudiante A5 se muestra confiado y expresa que para él no es necesario escribir las operaciones al clasificarlas como sencillas; es complicado determinar hasta qué punto la dificultad para realizar cálculos aritméticos y los distractores emocionales determinan las causas de los errores para A5 ya que durante la entrevista tuvo dificultades para obtener el resultado de multiplicar 7 por 7. Es importante reconocer la influencia de condiciones personales que se convierten en estímulos positivos o negativos, como la motivación o la frustración, al principio de la entrevista A5 expresa haber puesto todo su

empeño para resolver la tarea, porque era importante valorar lo aprendido. Sin embargo también expresa una falta de interés en el tema.

La toma de decisiones vinculadas con distractores emocionales pueden ser determinantes en los procesos de pensamiento con significado en el desarrollo de conceptos, ya que implica un proceso intelectual relacionado con actividades matemáticas, en las que se debe manejar el fracaso y la desilusión. Los estudiantes experimentan estas situaciones, que son análogas a las actividades que realizan algunos matemáticos, en el salón de clases, ellos deben decidir entre seguir una ruta automática, mecanicista y práctica u optar por proceso analítico, relativamente lento lleno de incertidumbre como lo es el pensamiento matemático. Muchos estudiantes logran tener éxito en las clases de matemáticas apropiándose de algoritmos y resolviendo ejercicios de manera mecánica, debido a que, en los niveles elementales de la escuela no se introducen términos como el de heurística y la noción de prueba queda relegada al uso de símbolos y expresiones verbales sin sentido para ellos. Por lo tanto el pensamiento matemático debe verse reflejado en la aplicación de conocimientos funcionales, a través de acciones reflexivas derivadas de un lenguaje que ha llegado a ser familiar, que describa una imagen conceptual encaminada a una generalización.

De acuerdo al segundo de los objetivos específicos del presente trabajo, se clasificaron las causas de los errores de acuerdo con la jerarquía propuesta por Newman (Clements, 1980) y se adaptaron las cinco categorías descritas anteriormente: dificultad para comprender el teorema de Pitágoras, dificultad en el dominio de los elementos del triángulo rectángulo, dificultad para articular nociones matemáticas previas, dificultad en la realización de cálculos aritméticos y algebraicos y distractores emocionales.

Dificultad para comprender el teorema de Pitágoras: se basa en una noción determinada por la experiencia del estudiante, el teorema de Pitágoras definido como la relación pitagórica $c^2 = a^2 + b^2$. De acuerdo a la taxonomía de causa de errores de Newman dicha categoría se encuentra asociada a un error de comprensión (P2), error por transformación (P3) y con el error de codificación (P5).

Dificultad en el dominio de los elementos del triángulo rectángulo: se origina a partir de un problema al relacionar la imagen conceptual con la definición sugerida, el triángulo rectángulo fue una herramienta concreta, utilizada de manera práctica para realizar cálculos aritméticos y geométricos, gracias a la aplicación de sus propiedades. Esta categoría se encuentra relacionada con el error de comprensión (P2) y error por transformación (P3) de la taxonomía de Newman.

Dificultad para articular nociones matemáticas previas: se refiere a la falta de razones basadas en la experiencia para relacionar, al triángulo rectángulo con los cuadrados contruidos sobre sus lados. La categoría se encuentra relacionada con: error de comprensión (P2) y con errores por descuido (E1).

Dificultad en la realización de cálculos aritméticos y algebraicos: el uso de calculadora durante las clases de matemáticas promueve un acción mecánica y poco reflexiva al realizar operaciones básicas como suma, resta, multiplicación y división, puede causar confusión al realizar el algoritmo de la división en lugar de la raíz cuadrada así como en el despeje y sustitución de literales. La categoría se relaciona con: error por transformación (P3), error de habilidades de proceso (P4) y errores por descuido (E1).

Distractores emocionales: son factores que influyen en la toma de decisiones racionales y flexibles, tales como: el nerviosismo, presión por concluir la tarea en un tiempo determinado, malestares físicos, falta de motivación y falta de interés. La categoría se relaciona principalmente con: errores por descuido (E1) y con error de motivación o argumento defectuoso (E2).

5.3. Discusión

Reconocer que el error es un fenómeno persistente en las clases de matemáticas, el cual merece toda la atención por parte del docente, pero también, por parte de los estudiantes; es una de las ambiciones de este trabajo, ambos deben asumir una actitud resiliente e inquisitiva cuando este se presente, es necesario resignificar al error para darle una connotación más comprensiva, enriquecedora e integral y de esta forma ser utilizado como una herramienta que permita diagnosticar problemas de enseñanza y aprendizaje de las

matemáticas. Se considera que incluir de manera activa en el análisis, identificación e interpretación de los errores a los estudiantes se mejora su desempeño (Rushton, 2018).

A partir de un enfoque donde el error debe propiciarse en el aula, ya que su presencia evidencia las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (Radatz, 1980), es importante considerar tareas que sean un reto para el estudiante. Ayres (2001) y Veloo et al. (2015) establecieron una relación directa entre la frecuencia de errores, asociados a tareas con una carga cognitiva elevada, así como a ítems con mayor índice de dificultad, respectivamente. Los resultados son consistentes con los mostrados en los resultados de la presente investigación; a medida que la tarea presentaba problemas menos habituales, la diversidad de problemas aumentó. Los errores sistemáticos están relacionados con las dificultades en la realización de cálculos aritméticos y algebraicos.

Tariq *et al.* (2008) reporta que se analizaron errores y concepciones erróneas al resolver una prueba escrita, donde a los estudiantes de licenciatura, se les permitió el uso de la calculadora, sin la presión del tiempo; en su investigación se reporta que los errores y conceptos erróneos fueron similares a los reportados por adolescentes de 13 y 14 años. Durante las entrevistas realizadas a tres estudiantes de telesecundaria, dos de ellos mencionaron que habían sentido presión por el tiempo, así como por obtener buenos resultados, se concluyó que, lidiar con la desilusión, propiciar acciones racionales y reflexivas, así como el sobreponerse a las dificultades son actividades análogas al quehacer de un matemático y deben replicarse de manera controlada. En este orden de ideas, el uso de la calculadora no representó un aporte positivo en la investigación de Tariq *et al.* (2008); en la presente investigación se concluyó que el uso de la calculadora contribuye a la dificultad para la realización de cálculos aritméticos durante la secundaria, debido al proceso mecanicista que promueve.

El marco para analizar las causas de errores de Newman proporciona un panorama general sobre el origen de los errores que cometen los estudiantes aplicados a tareas matemáticas, en investigaciones previas se ha relacionado a: problemas verbales, cálculo de derivadas y en la resolución de problemas relacionados con el teorema de Pitágoras; en diferentes niveles educativos, que van desde el nivel de licenciatura, preparatoria y secundaria

(Fitriani *et al.*, 2018; Santoso *et al.*, 2017; y Sari y Wutsqa, 2019). La aportación a las investigaciones realizadas fue identificar las causas de error que cometen los estudiantes de telesecundaria cuando abordan tareas relacionadas con el teorema de Pitágoras en una telesecundaria de Singuilucan Hidalgo. Se especificó y diversificó la jerarquía de causas de error de Newman y se concluyó que las causas de error pueden ser multifactoriales, pero es posible rastrear la causa de error si se realiza un análisis mediante una entrevista semiestructurada.

5.4. Alcances y limitaciones

Durante la planeación e implementación de las tareas se tomaron decisiones que respondieron a los tiempos y objetivos, que al finalizar la tesis destacan por su pertinencia y por representar áreas de oportunidad en proyectos futuros relacionados con la identificación de errores en la clase de matemáticas, cometidos por estudiantes de secundaria. La selección intencionada de los problemas cuyo propósito fue representar una carga cognitiva que aumenta de manera progresiva conforme se avanzaba en la tarea, fue un aspecto que permitió a los estudiantes plasmar evidencias de su desempeño conforme a su potencial, la aparición de los diferentes tipo de error lo confirma, sin embargo es recomendable tomar en cuenta, que las operaciones aritméticas relacionadas con la raíz cuadrada sean intuitivas, apegadas a experiencias en el aula, de esta manera el estudiante se concentra en el análisis y la reflexión y no sobre la especulación, el estrés e incertidumbre que pudieran causar las operaciones aritméticas.

Uno de los instrumentos que aportó información relevante fue el guión de entrevista, mediante este, se obtuvieron datos sobre las creencias y justificaciones de los estudiantes cuando formulan, justifican y usan el teorema de Pitágoras ante las situaciones planteadas durante la tarea, lo que lleva a reflexionar sobre el valor de las preguntas en la recolección de datos, su diseño debe ser cuidadoso y encaminado a responder los cuestionamientos que motivaron el trabajo, pero al momento de llevar a cabo la entrevista, el investigador debe estar preparado para improvisar e indagar sobre aspectos que corren el riesgo de pasar desapercibidos, siempre existe la posibilidad de que ocurra, más aún, cuando se utiliza por primera vez la entrevista como técnica, es importante mantener el control y estar

consciente de que, la pregunta, su forma y el tono; condiciona la respuesta de los estudiantes.

En el futuro es recomendable seguir con investigaciones encaminadas a identificar las causas de error como un proceso diagnóstico en el aula de matemáticas, se identificó que estas son productos de patrones equivocados productos de hábitos mecanicistas. Es prudente llevar a la práctica las conclusiones obtenidas y proponer acciones que desarrollen el pensamiento matemático, fomente la motivación de los estudiantes y eviten errores sistemáticos.

5.5. Reflexiones finales

La experiencia acumulada durante la realización del presente proyecto de tesis ha provocado una reflexión sobre el rol que desempeña el docente de matemáticas y la influencia que pueden tener los recursos utilizados para su actualización, existe una búsqueda constante de superación y vigencia personal, motivadas por intereses y por compromisos institucionales, es así como los cursos de formación continua con énfasis en matemáticas puede tener un impacto sobre la actitud de los docentes hacia el error, trabajos como el presente, se desarrollan y comparten con la intención de fomentar una preparación constante. Con lo anterior se quiere decir que el docente está ávido de dar significado a nuevos conceptos, que al igual que los estudiantes, durante su carrera pasó por etapas de formación que le dotaron de las capacidades y herramientas que utiliza en el aula para ayudar a los estudiantes a interactuar con el aprendizaje, las cuales debe ser potencializadas con programas de posgrado, cursos y/o talleres, que no representen una carga administrativa.

Durante el análisis de los resultados se reconoció que las causas por las cuales los estudiantes de telesecundaria cometen errores cuando abordan tareas sobre el teorema de Pitágoras, pueden ser el resultado de aproximaciones instruccionales que simplifican el conocimiento del teorema a la relación pitagórica, mediante la cual se puede obtener la longitud de un lado desconocido de un triángulo rectángulo, conociendo las longitudes de los otros dos lados. Se obtuvo evidencia de que existen dificultades en temas de matemáticas, en los docentes en formación, ya que durante su formación universitaria no se

abordan conceptos como el de demostración matemática, conjetura o heurística, así como la concepción del error como un fenómeno que puede apoyar la construcción de un aprendizaje matemático con entendimiento. Con lo anterior se hace evidente la importancia de establecer un plan de mejora continua para los docentes en servicio, o una estrategia de actualización continua autónoma, ya que es posible que compañeros con muchos años de servicio consideren innecesario seguirse formando en aspectos disciplinares o didácticos.

Durante el desarrollo de la tesis se fue obteniendo evidencia de la necesidad que tiene un docente de educación básica de profundizar en el conocimiento de las matemáticas. Por una parte, es importante poner atención en el análisis de la evolución histórica de un concepto, el cual brinda una perspectiva que debe ser aprovechada para mejorar su comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

REFERENCIAS

- Aguilar, M. S. (2013). Sobre los roles de la teoría en una investigación en didáctica de las matemáticas. *Actas del 4º Seminario Taller en Educación Matemática: La Enseñanza del Cálculo y las Componentes de su Investigación*, 13-21. <https://bit.ly/473HPm9>
- Asth, R. C. (s. f.a). *Problemas resueltos del Teorema de Pitágoras*. Matesfacil. Recuperado el 14 de agosto de 2025, de <https://www.matesfacil.com/pitagoras/problemas-resueltos-pitagoras.html>
- Asth, R. C. (s. f.b). *Teorema de Pitágoras: fórmula e ejercicios*. Toda Materia. Recuperado el 14 de agosto de 2025, de <https://www.todamateria.com/teorema-de-pitagoras/>
- Ayres, P. L. (2001). Systematic mathematical errors and cognitive load. *Contemporary Educational Psychology*, 26(2), 227-248. <https://doi.org/10.1006/ceps.2000.1051>
- Balbuena, C. H. H., Domínguez, B. E., Escareño S. F., García P. S., & López E. O. L. (2021). *Libro para el maestro. Matemáticas. Tercer grado. Telesecundaria*. SEP. <https://libros.conaliteg.gob.mx/20/T3MAM.htm#page/1>
- Becerra, O. (2012). Elaboración de instrumentos de investigación. *Departamento de investigación del CUAM Caracas*. <https://bit.ly/4oh6een>
- Beltrán, P. (2022). El teorema de Pitágoras a través de la resolución de problemas. *La Gaceta de la RSME*, 25(1), 149-169. <https://bit.ly/4lO9FY3>
- Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 2–8. <http://www.jstor.org/stable/40247900>
- Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies in Mathematics*, 85, 221–239. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9507-1>

- Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en Mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 4(2), 164–198. <https://revue-rdm.com/1983/les-obstacles-epistemologiques-et/>
- Bueso M., J. L. (s. f.). *Proposición 8 (Libro VI)*, “Prop 8. De magnitudes desiguales...”. En *Los elementos de Euclides*. Universidad de Granada. Recuperado de <https://www.ugr.es/~jlbueso/euclides/6/prop-8.html>
- Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión. (2025, abril). Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos. Secretaría de Servicios Parlamentarios. <https://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/CPEUM.pdf>
- Chaves, V. E. J. y Weiler, C. C. (2016). Los estudios de casos como enfoque metodológico. *Academio*, 3(2). <https://www.redalyc.org/pdf/6882/688273458012.pdf>
- Clements, M. A. (1980). Analyzing children's errors on written mathematical tasks. *Educational studies in mathematics*, 11(1), 1-21. <https://doi.org/10.1007/BF00369157>
- Economou, P. (1995). How teachers of mathematics confront students’ errors. In G. Philippou, C. Christou, & A. Kakas (Eds.), *Proceedings of the Second Panhellenic Conference on Mathematics Education and the Informatics in Education* (pp. 383–400). Sighroni Epoxi.
- Eisenhart, M. A. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education researcher. En R Underhill (Ed.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of Psychology of Mathematics Education* (pp. 202-219). PME. <https://bit.ly/4hSuvDt>
- Fitriani, H. N., Turmudi, T., & Prabawanto, S. (2018). Analysis of students' errors in mathematical problem solving based on Newman’s error analysis. *International Conference on Mathematics and Science Education*, 3, 791-796. <https://bit.ly/3H5014i>

- Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, 6(1), 24–58. [https://doi.org/10.1076/1380-3611\(200003\)6:1;1-I:FT024](https://doi.org/10.1076/1380-3611(200003)6:1;1-I:FT024)
- García, J. (2023). *El cuadrado de la hipotenusa: Problemas pitagóricos clásicos. Matemáticas y retos*. Recuperado el 14 de agosto de 2025, de <https://elcuadradodelahipotenusa>.
- Gómez S., H. M., Vergel, M., y Rojas S., J. P. (2020). Estrategia metodológica para la enseñanza del Teorema de Pitágoras en el grado octavo de la Institución Monseñor Jaime Prieto Amaya. *Eco Matemático Journal of Mathematical Sciences*, 11(1), 63-72. <https://doi.org/10.22463/17948231.2948>
- González, P. M. U. (2009). *Pitágoras: el filósofo del número*. Nivola.
- Große, C.S., & Renkl, A. (2007). Finding and fixing errors in worked examples: can this foster learning outcomes? *Learning and Instruction*, 17(6), 612–634. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.008>
- Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1999). Preservice primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, 253–275. <https://doi.org/10.1023/A:1009900719800>.
- Hativa, N., & Cohen, D. (1995). Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems. *Educational Studies in Mathematics*, 28(4), 401-431. <https://doi.org/10.1007/BF01274081>
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a. Edición). McGraw-Hill.
- Hollander, S. K. (1978). A Literature Review: Thought Processes Employed in the Solution of Verbal Arithmetic Problems. *School Science and mathematics*, 78(4), 327-34. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1978.tb09368.x>

- Kingsdorf, S., & Krawec, J. (2014). Error analysis of mathematical word problem solving across students with and without learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 29(2), 66-74. <https://doi.org/10.1111/ldrp.12029>
- Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37, 457-467. <https://doi.org/10.1007/BF02655854>
- Mayer, R. E. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 123–138). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9780203063545>
- Mejia-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 88–93). Taipei, Taiwan. <https://bit.ly/452Wsn7>
- Morin, E. (1999). Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura.
- Mohyuddin, R. G., & Khalil, U. (2016). Misconceptions of students in learning mathematics at primary level. *Bulletin of Education and Research*, 38(1), 133-162. <https://bit.ly/4kXQIXe>
- Navarrete-Cazales, Z., y López-Hernández, P. A. (2022). La telesecundaria en México. *Perfiles Educativos*, 44(178), 63-78. <https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2022.178.60673>
- Neidorf, T., Arora, A., Erberner, E., Tsokodayi, Y., & Mai, T. (2020). *Student misconceptions and errors in physics and mathematics. Exploring data from TIMSS and TIMSS advanced*. Springer Open. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-30188-0>
- Neurochispas. (s.f.). *Ejemplos de Teorema de Pitágoras*. Recuperado el 14 de agosto de 2025, de <https://bit.ly/4oulymb>

- NRICH. (s. f.). *Developing mathematical thinking – Secondary teachers*. Retrieved August 14, 2025, from <https://bit.ly/4owuCbF>
- NRICH. (s. f.). *Right angled possibilities*. Recuperado el 14 de agosto de 2025, de <https://nrich.maths.org/problems/right-angled-possibilities>
- NRICH. (s. f.). *Tetromino diagonal*. Recuperado el 14 de agosto de 2025, de <https://nrich.maths.org/problems/tetromino-diagonal>
- OECD (2023). *How did countries perform in PISA? In PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity Education*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- Osuji, U. (2021). A Philosophical Analysis of the Role of Numbers in ordering Human Activities and Implications on Epistemological Discourses in Africa. *Journal of African Interdisciplinary Studies*, 5(7), 148-162.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 163-172. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.10.3.0163>
- Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: A survey. *For the Learning of Mathematics*, 1(1), 16-20. <http://www.jstor.org/stable/40247696>
- Retnawati, H. (2020). Diagnosis of learning difficulties in mathematics for students resolving problems related to material in the pythagorean theorem for 8th grade students in SMP 1 Todanan and SMP Muhammadiyah 9 Todanan, academic year 2018/2019. *Journal of Physics: Conference Series*, 1581(1), 012026. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1581/1/012026>
- Reyes-Rodríguez, A. V., Rondero-Guerrero, C., Acosta-Hernández, J. A., Campos-Nava, M., y Torres-Rodríguez, A. A. (2018). Reduccionismo didáctico y creencias de

- profesores acerca del teorema de Pitágoras. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31, 968-983. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a06>
- Rondero, C., y Campos Nava, M. (2016). Análisis didáctico de la relación pitagórica en libros de matemáticas de bachillerato. *Investigación e Innovación de Matemática Educativa*, 450-456. <https://bit.ly/46z8c3n>
- Rushton, S. J. (2018). Teaching and learning mathematics through error analysis. *Fields Mathematics Education Journal*, 3(4). <https://doi.org/10.1186/s40928-018-0009-y>
- Peng, A., y Luo, Z. (2009). A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis. *For the learning of mathematics*, 29(3), 22-25. <https://www.jstor.org/stable/25594562>
- Santoso, D. A., Farid, A., y Ulum, B. (2017). Error analysis of students working about word problem of linear program with NEA procedure. *Journal of Physics: Conference Series*, 855(1), 012043. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/855/1/012043>
- Sari, R. H. Y., & Wutsqa, D. U. (2019). Analysis of student's error in resolving the Pythagoras problems. *Journal of Physics: Conference Series*, 1320(1), 012056. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1320/1/012056>
- Sautu, R., Boniolo, P., Dalle, P., y Elbert, R. (2006). *Manual de metodología*. Buenos Aires : Clacso.
- Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*. SEP.
- Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2021). *Indicadores estatales de la mejora continua de la educación HIDALGO Información del ciclo escolar 2018-2019. Primera Edición*. SEP-
- Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2022). *Avance del contenido del Programa sintético de la Fase 6*. SEP.

- Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2022b). *Evaluación diagnóstica Hidalgo*. Educación Básica SEP. <https://bit.ly/470c0KU>
- Singh, P., Rahman, A. A., & Hoon, T. S. (2010). The Newman procedure for analyzing primary four pupils errors on written mathematical tasks: A Malaysian perspective. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 8, 264-271. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.036>
- Siskawati, E., Zaneuri, & Wardono, W. (2021). Analysis of students' error in solving math problem-solving problem based on Newman Error Analysis (NEA). *Journal of Physics: Conference Series*, 1918(4), 042108. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1918/4/042108>
- Smith III, J. P., diSessa, A. A., & Roschelle, J. (1994). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *Journal of the Learning Sciences*, 3(2), 115–163. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0302_1
- Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, 240(4852), 611-616. <https://statlit.org/pdf/1988-Steen-Science.pdf>
- Tariq, V. N. (2008). Defining the problem: mathematical errors and misconceptions exhibited by first-year bioscience undergraduates. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(7), 889-904. <https://doi.org/10.1080/00207390802136511>
- Veloo, A. K. H. N., Krishnasamy, H. N., & Wan Abdullah, W. S. (2015). Types of student errors in mathematical symbols, graphs and problem-solving. *Asian Social Science*, 11(15), 324-334. <https://doi.org/10.5539/ass.v11n15p324>
- Vinner, S. (2020). Concept development in mathematics education. In S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 123-127). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_29

Vosniadow, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction*, 14(5), 445–451.
<https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.014>

Winarso, W., & Toheri, T. (2021). An analysis of students' error in learning mathematical problem solving: The perspective of David Kolb's theory. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 12(1), 139-150.
<https://doi.org/10.16949/turkbilmat.753899>

APÉNDICE A. Transcripciones de las entrevistas

Para apoyar la política institucional de ahorro de papel implementada por la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, los apéndices de la tesis se pueden consultar mediante los hipervínculos que aparecen a continuación.

Transcripción A1

https://drive.google.com/file/d/11zlvqZQ5XHtKAVl-Xl-M_MgLdwR5RhkH/view?usp=sharing

Transcripción A4

https://drive.google.com/file/d/1apcmoowypfawWyLVldwas_eq_xvEsy-S/view?usp=sharing

Transcripción A5

https://drive.google.com/file/d/1NR9txKtM_FCM2c6vtX5J1RXbU1lO_dTd/view?usp=sharing