



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo  
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería  
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

---

# Modelo para la dinámica de poblaciones de abejas en presencia de distintos pesticidas.

---

## T E S I S

Que para obtener el título de

**Licenciada en Matemáticas Aplicadas**

Presenta

**Ana Karem García Hernández**

Bajo la dirección de

**Dr. Roberto Ávila Pozos**

Mineral de la Reforma, Hidalgo.

Noviembre de 2025



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo  
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería  
School of Engineering and Basic Sciences

Mineral de la Reforma, Hgo., a 12 de febrero de 2026

Número de control: ICBI-D/233/2026  
Asunto: Autorización de impresión.

**MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO**  
**DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH**

Con Título Quinto, Capítulo II, Capítulo V, Artículo 51 Fracción IX del Estatuto General de nuestra Institución, por este medio, le comunico que el Jurado asignado a la egresada de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas **Ana Karen García Hernández**, quien presenta el trabajo de titulación "**Modelo para la dinámica de poblaciones de abejas en presencia de distintos pesticidas**", ha decidido, después de revisar fundamento en lo dispuesto en el Título Tercero, Capítulo I, Artículo 18 Fracción IV; dicho trabajo en la reunión de sinodales, **autorizar la impresión del mismo**, una vez realizadas las correcciones acordadas.

A continuación, firman de conformidad los integrantes del Jurado:

**Presidente:** Dr. Raúl Temoltzi Ávila

**Secretario:** Dr. Christopher Kribs

**Vocal:** Dr. Roberto Ávila Pozos

**Suplente:** Dr. Ricardo Cruz Castillo

Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente  
"Amor, Orden y Progreso"

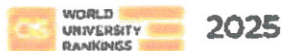
Mtro. Gabriel Vergara Rodríguez  
Director del ICBI



GVR/MMM

Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184  
Teléfono: 771 71 720 00 Ext. 40001  
direccion\_icbi@uaeh.edu.mx, vergara@uaeh.edu.mx

"Amor, Orden y Progreso"



uaeh.edu.mx

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>IV</b>
<b>1. Antecedentes</b>	<b>1</b>
1.1. Importancia de las abejas en el ecosistema y en la economía . . . . .	1
1.2. Pesticidas como posible causante del Trastorno de Colapso de Colonias . .	3
1.3. Modelos sobre la dinámica de las abejas con diversos factores . . . . .	4
1.3.1. Modelo de dinámica poblacional . . . . .	5
1.3.2. Modelos que incorporan los diferentes estadios de las abejas . . . . .	6
1.3.3. Modelos que incorporan los recursos de comida o nutrición . . . . .	7
1.3.4. Modelos que incorporan la dinámica con parásitos o virus . . . . .	9
1.3.5. Modelos sobre la dinámica de las abejas con distintos pesticidas . .	13
<b>2. Material y Métodos</b>	<b>17</b>
2.1. Ecuaciones diferenciales . . . . .	17
2.2. Modelo básico de crecimiento poblacional . . . . .	18
2.3. Modelo denso-dependiente . . . . .	18
2.4. Modelo propuesto . . . . .	19
2.4.1. Tipos de tasas de mortalidad . . . . .	20
2.4.2. Soluciones de Filippov . . . . .	21
2.4.3. Resolución numérica del modelo . . . . .	23
<b>3. Resultados</b>	<b>24</b>
3.1. Análisis del modelo propuesto . . . . .	24
3.1.1. Función de mortalidad lineal . . . . .	24
3.1.2. Función de mortalidad constante . . . . .	29
<b>4. Discusión y Conclusiones</b>	<b>33</b>

## Agradecimientos

A mi asesor, el Dr. Roberto Ávila Pozos, le estoy profundamente agradecida por su dedicación y paciencia durante la realización de esta tesis. Su conocimiento, consejos y sabiduría han sido fundamentales para mi formación durante toda la licenciatura. No hay palabras que expresen cuanto valoro su apoyo a lo largo de este viaje académico.

De igual manera, extendiendo mi agradecimiento al Dr. Christopher Kribs cuya orientación y asesoramiento han sido de gran ayuda para enriquecer este trabajo. Asimismo, al Dr. Raúl Ávila Temoltzi y al Dr. Ricardo Cruz Castillo por apoyarme en cualquier duda en este trabajo y desarrollo académico.

A mis papás y hermanos, gracias por su apoyo durante mi trayectoria académica y la vida en general. Su amor, comprensión y los valores inculcados han sido esenciales para convertirme en la persona que soy.

Agradezco a Erick Saenz, su apoyo y motivación fueron de gran ayuda para terminar este proyecto. Gracias por escucharme incontables veces y estar siempre.

Por ultimo, pero no menos importante, a Iván Delgado, por su amistad incondicional y acompañamiento durante nuestra formación, lo logramos.

## Resumen

En este trabajo se analiza la dinámica de las abejas *Apis mellifera* en presencia de pesticidas, mediante un modelo matemático que utiliza la ecuación logística de crecimiento poblacional con un término adicional que incorpora la mortalidad inducida por pesticidas. Se consideraron dos funciones a trozos para modelar la tasa de mortalidad: una lineal y una constante. Teniendo como resultado una ecuación diferencial con lado derecho discontinuo, por lo que, se probó la existencia de soluciones a través de una inclusión diferencial de Filippov.

Los resultados muestran que la función de mortalidad constante permite a la población de abejas recuperarse en menos tiempo tras una exposición a los pesticidas en comparación con la función de mortalidad lineal.

Asímismo, al evaluar el impacto de mortalidad que tienen las abejas a los pesticidas Clorotalonil, Fluvalinato, Coumafós, Clorpirifos y Solventes, se muestra que los dos primeros son los que presentan mayor riesgo de colapso de colonia, mientras que Clorpirifos y los solventes permiten una recuperación poblacional, acercándose a la capacidad de carga. Finalmente, se sugiere una extensión para considerar factores adicionales y tener un escenario biológicamente más realista.

# Introducción

Las abejas, en particular, *Apis mellifera*, desempeñan un papel fundamental en la polinización de cultivos y plantas silvestres; este servicio ecosistémico apoya el mantenimiento de la biodiversidad. De igual manera, son uno de los polinizadores más importantes económicamente en los cultivos agrícolas, debido a que contribuyen a la producción de frutos, verduras o cultivos especiales de gran valor, tanto en México como en Estados Unidos. Sin embargo, en las últimas décadas se ha detectado la disminución de su población, llamándole a esto el Trastorno de Colapso de Colonias (CCD por sus siglas en inglés, Colony Collapse Disorder), el cual está relacionado con factores como enfermedades por parásitos o virus, cambio climático y, especialmente, por exposición a pesticidas [1].

Diversos estudios experimentales han demostrado que los pesticidas afectan directamente la salud de las abejas, reduciendo su tasa de supervivencia, alterando su comportamiento y afectando el desarrollo de las crías. Por ejemplo, en [2] se demostró que dosis subletales de Neonicotinoide afectan la pérdida de memoria, impidiendo que puedan regresar a la colmena. De forma similar, en [1] se observó que hay efectos subletales en larvas tras exponerlas a los pesticidas más comunes, afectando su peso corporal, morfología y glándulas.

En este contexto, el uso de modelos matemáticos se considera una herramienta útil para comprender la dinámica poblacional de las abejas y evaluar los efectos de diversos factores. Los modelos descritos en [3] y [4] han explorado los factores de nutrición, parásitos, virus, edad y estructura. En particular, en [5] y [6] se desarrollaron modelos específicos para evaluar el trastorno de colapso de colonias (CCD) derivado del uso de pesticidas en cultivos, encontrando umbrales críticos que determinan la supervivencia de la población.

El objetivo de este trabajo es proponer y analizar un modelo matemático que describe el crecimiento poblacional de abejas bajo el efecto directo de pesticidas, combinando el modelo de crecimiento poblacional con una función de mortalidad dependiente del tiempo. Se consideran dos tipos de funciones: una lineal y una constante, para modelar esta mortalidad, simulando los escenarios más realistas de fumigación; fueron evaluadas con parámetros publicados en el artículo [7], donde mencionan diferentes pesticidas como Clorotalonil, Fluvalinato, Coumafós, Clorpirifos y los solventes .

Al modelo que se propone en este trabajo se probó la existencia de soluciones a través de la teoría de soluciones de Filippov, las cuales no son únicas; después se analizó la estabilidad de los puntos de equilibrio por intervalos, así como el impacto de las diferentes tasas de mortalidad para cada pesticida. Con estos resultados, se realizó una comparación cuantitativa sobre qué función de mortalidad permite que la población de abejas se recu-

pere más rápido y, de igual manera, se observó como afecta la viabilidad de la colonia.

Con este trabajo, se busca sentar las bases para crear modelos más complejos en los que se integren factores adicionales como ciclos de vida, estacionalidad y periodicidad en la función de mortalidad, los cuales afectan y benefician el desarrollo poblacional de las abejas.

## 1.1. Importancia de las abejas en el ecosistema y en la economía

La polinización por insectos es uno de los servicios que los ecosistemas nos proporcionan de forma gratuita. Cuando los insectos se alimentan de néctar y/o polen, involuntariamente transfieren granos de polen a las flores, facilitando su fertilización. Por lo que, la polinización y las interacciones planta-polinizador son fundamentales para el éxito reproductivo y la producción de frutos en las plantas que los producen; este servicio ecosistémico apoya el mantenimiento de la biodiversidad de las plantas, ver [8]. Desafortunadamente, la población de las abejas ha disminuido a nivel global. Los parásitos, muertes, desnutrición, pesticidas y cambio climático contribuyen en gran medida a la crisis mundial de pérdida de colonias de abejas, ver [9].

De acuerdo con la revisión de literatura, en [10] se concluye que la polinización realizada por abejas proporciona una variedad de beneficios para la humanidad; por ejemplo, contribuye al procesamiento de alimentos, materias primas, medicinas, mantenimiento de la biodiversidad y protección al medio ambiente. Además, tiene efectos directos en la rentabilidad y productividad en los cultivos a nivel mundial, incluyendo hortalizas, semillas, nueces, así como algunos productos agrícolas de alto valor, como el café, el cacao y la colza.

Actualmente, entre el 5% y el 8% de toda la producción agrícola se perdería sin los servicios de polinización proporcionados por las abejas (ver [11]). Pues, como menciona Ashworth et al. en su artículo publicado en 2009 (ver [12]), los cultivos dependientes de polinizadores permiten obtener mayor cantidad de alimento por unidad de superficie generando una mayor ganancia económica por unidad de área, que los cultivos no dependientes de polinizadores. Y estos polinizadores están enfrentando numerosos desafíos que pueden alterar sus vidas, incluidos cambios en el uso de suelo, cambio climático, los pesticidas, la genética y la gestión de cultivos.

El uso de pesticidas es perjudicial para la salud humana, debido a que son mezclas de químicos que contienen ingredientes activos como Organofosfatos, Carbamato y Organoclorado. Este último se distingue por su notable estabilidad química, su baja solubilidad en agua, su elevada solubilidad en disolventes orgánicos y su resistencia tanto a la degradación química como biológica. Estas propiedades favorecen a que se bioacumulen y biomagnifiquen en el tejido graso animal. La exposición a pesticidas está relacionada con el desarrollo de cáncer, infertilidad, alteraciones en la función metabólica, enfermedades neurodegenerativas, entre otras más, ver [13].

Las abejas (*Apis Mellifera*) son los polinizadores más valiosos económicamente de los cultivos agrícolas en el mundo; en [14] se menciona que esta especie de abeja es la única que mantiene comercialmente a los Estados Unidos, pues contribuye a la producción de una amplia gama de frutos de alto valor, verduras, nueces de árbol, cultivos forrajeros, algunos cultivos de campo y otros cultivos especiales.

En México, la mayoría de los polinizadores utilizados comercialmente son especies introducidas, una de ellas es la *Apis mellifera* que, es la abeja mas reconocida y empelada para fines comerciales, debido a su fácil manejo y valor económico en los productos que genera como la miel y el propóleo.

Por otro lado, las abejas sin aguijón, abejas nativas que han sido empleadas en México desde antes de la llegada de los españoles, han demostrado tener eficacia en determinados cultivos y condiciones específicas. Además su manejo por parte de comunidades locales las posiciona como una alternativa importante ante el crecimiento de la demanda de productos dependientes de polinizadores. Pero la falta de información y el limitado interés en su aprovechamiento han hecho que pasen a segundo plano frente a otros polinizadores comerciales, ver [15].

El servicio de polinización puede cuantificarse monetariamente en función del nivel dependiente de cada cultivo al servicio de polinización [16]. Por ejemplo, para el año 2010 se reportó que el valor económico total del servicio de polinización de 103 especies de plantas cultivadas en México fue de 43 mil millones de pesos [17]; cultivos nativos como el aguacate, jitomate y pimiento tuvieron el mayor valor económico neto en 2018, de estos tres cultivos, el valor económico del polinizador fue mayor en el aguacate con \$20,687,000,000 de pesos mexicanos. Esto sugiere que la pérdida de polinizadores puede afectar gravemente la producción y el ingreso económico que se obtienen de estos cultivos. Así mismo, la producción e ingresos de especies nativas como el cacao, calabazas y especies introducidas como el café, sandía, zarzamora y mando que tienen alta dependencia del servicio de polinización están amenazadas totalmente por el declive y desaparición de polinizadores, ver [15].

En [18] se realizó un estudio estadístico donde encuestaron a 6795 apicultores. Los encuestados gestionaban 427,652 colonias el 1 de octubre de 2015 y de acuerdo con estimaciones del USDA - National Agriculture Statistics Services (USDA-NASS), representan el 16.1 % de todas las colonias productoras de miel gestionadas en EE.UU. durante el verano de 2016, obteniendo como resultado, del total de colonias perdidas en 2015-2016 fue 23.6 % en verano, 26.9 % en invierno y 40.9 % anual. Además, los apicultores reportaron tres factores de riesgo más comunes asociados con la mortalidad de colonias: fallo de reina, el ácaro *Varroa destructor* y pesticidas, experimentando una pérdida total de 91.3 % de colonias durante el invierno. Una pregunta de la encuesta indagó específicamente si el apicultor perdió colonias con el síntoma “no hay abejas muertas en la colmena”, un síntoma conocido Trastorno de Colapso de Colonias (Colony Collapse Disorder, CCD) y de acuerdo a 3675 respuestas válidas a esta pregunta, 1619 apicultores reportaron que este síntoma fue causa importante de muerte de colonias en su operación, donde la pérdida promedio fue del 58.8 %.

## 1.2. Pesticidas como posible causante del Trastorno de Colapso de Colonias

El trastorno de colapso de colonias es un síndrome misterioso, debido a la ausencia de una causa conocida [19], donde el síntoma principal es un bajo número de abejas adultas en la colmena [20].

Los pesticidas son una causa controversial y debatida en la disminución de abejas. Si se usan adecuadamente, los pesticidas proporcionan un beneficio económico, pero ponen el bienestar de las abejas en conflicto directo con la agricultura industrial [21] y además varios autores mencionan que las concentraciones encontrados en productos como la miel superan los niveles máximos de residuos (MRL) establecidos por la Unión Europea; por lo que es crucial monitorear y regular el usos de pesticidas para garantizar la seguridad y salud tanto de los consumidores como de las abejas [22].

Una posible causa del CCD es el uso de pesticidas, fungicidas e insecticidas en cultivos donde se utiliza principalmente como medio de polinización a las abejas. Se han realizado diferentes estudios para poder comprender si esto es posible.

En [23] se realizó un estudio con 653 abejas donde se les colocó un dispositivo para rastrearlas, si regresaban a la colmena o no. Para simular intoxicación diaria, recibieron una dosis subletal de Tiametoxám, un neonicotinoide utilizado en cultivos, combinado con sacarosa. Se seleccionaron dos grupos, un grupo de abejas que sería liberado en un cultivo que ya conocían y el otro sería liberado en un lugar desconocido para ellas. Concluyó que el 10.2% del primer grupo no regresó a la colmena y del segundo grupo fue el 31.6%, mostrando que la exposición de abejas forrajeras a una dosis no letal pero común afecta su supervivencia, debido a que los neonicotinoides están relacionados con la pérdida de memoria, rendimiento de aprendizaje y actividad anormal de forrajeo.

En [24] se realizó un estudio similar para evaluar el efecto de fungicidas, herbicidas, insecticidas Organofosfatos y Neonicotinoide. Utilizó entre 30 a 40 individuos y realizó dos experimentos: el primero fue la prueba de alimentación, donde fueron alimentadas primeramente por una solución que contenía sacarosa contaminada por pesticida y después por otra solución de sacarosa libre de pesticida. El segundo experimento fue la prueba de contacto, donde la jaula donde se encontraban fue rociada con diferentes concentraciones de pesticidas y después fueron medidas y pesadas para estimar la cantidad de pesticida consumido. En ambos experimentos se observaron comportamientos anormales y mortalidad a la 1 h, 3 h, 6 h, 12 h, 24 h, 48 h, después del tratamiento. Finalmente, realizando un análisis estadístico los autores concluyeron que para Neonicotinoide hay una alta mortalidad después de 24 h del tratamiento de prueba de alimentación y solo con grandes concentraciones se tiene una toxicidad efectiva por la prueba de contacto. Para insecticidas Organofosfatos hay mayores efectos tóxicos mediante la alimentación que por exposición y para fungicidas y herbicidas hubo una baja mortalidad menor al 10% aún con altas concentraciones de pesticida.

En 2020, Tome y colaboradores en [1] mencionan que utilizaron el método *in vitro* para criar larvas de abejas para estudiar cómo los seis pesticidas más comunes: Imidacloprid,

Clorpirifos, Amitraz, Coumafos, Fluvalinato, Clorotalonil y el herbicida Glifosato afectan al desarrollo de las abejas durante su etapa larvaria; para esto las sometió a una dieta artificial contaminada por pesticidas durante 6 días. Obtuvo como resultado que la supervivencia se ve significativamente afectada por casi todos los pesticidas, especialmente el Fluvalinato debido a que ninguna larva sobrevivió. De igual manera, afecta su tiempo de desarrollo, pues hubo retraso en la pupación y en la emergencia de adultos. También hubo efectos subletales mostrando un 15% más bajo de su peso corporal y cambios en la morfología de sus antenas y glándulas.

En la ciudad de Tapachula, ubicada en el estado de Chiapas, en el sur de México, Ruiz-Toledo y colaboradores [25] realizaron una investigación donde recolectaron muestras de polen y miel de *A. mellifera* y *S. mexicana*, dos especies utilizadas en la polinización de cultivos. Fueron analizadas mediante el estudio de cromatografía. En general, detectaron 15 compuestos Organoclorado de los 16 que tenían contemplados. Encontraron que el 22.22% de polen, el 88.33% de miel de *S. mexicana*, el 100% de polen y el 94.4% de miel de *A. mellifera* fueron positivos para al menos un Organoclorado. De acuerdo con esto, los autores concluyen que hay una presencia amplia de Organoclorado, a pesar de que no se utilizan en Chiapas desde el 2000, pues han sido prohibidos durante décadas en muchos países, incluidos México, ver [25].

Colima se destaca por su marco económico, que es el sector primario que abarca las actividades agrícolas, ganaderas, forestales, de caza y pesqueras, y la agricultura se destaca como la más significativa económicamente. La apicultura en Colima produce 240 toneladas de miel anualmente de 15.000 colonias registradas operadas por 163 productores [26].

La investigación que realiza Rodríguez-Aguilar et al. en 2024 [22], consiste en recolectar muestra de abejas y miel de apicultores, en todo el estado de Colima, durante las estaciones húmedas y secas, con el objetivo de evaluar la ocurrencia, la variabilidad temporal, la variabilidad espacial y el riesgo potencial de las abejas y el consumo humano de miel contaminada con pesticidas. Dentro de los resultados se encontró un total de 12 pesticidas en las muestras de miel, se detectaron al menos un pesticida y un máximo de 8 pesticidas en mezclas de muestras de miel y respecto a las muestra de abejas, encontraron un total de 18 pesticidas. De igual manera, reportaron que durante la estación húmeda, se intensifica su uso, por lo que se observan concentraciones elevadas en comparación con la estación seca. Y dentro de la evaluación de riesgos para la salud humana por el consumo de miel contaminada con pesticidas, se determinó que las concentraciones detectadas no presentan un riesgo de efectos no cancerígenos para niños y adultos. Sin embargo, para las abejas si hay un riesgo potencial por el consumo de miel contaminada con pesticidas donde se mostraron que las altas concentraciones de permetrina tienen el potencial de afectar letalmente a las abejas en un corto período de tiempo.

### 1.3. Modelos sobre la dinámica de las abejas con diversos factores

Ahora con la finalidad de dar a conocer los modelos que ya han sido explorados para modelar la dinámica de la población de abejas melíferas y los factores que afectan su supervivencia, se hace mención de algunos artículos publicados y recopilaciones en esta

sección.

Algunos de los modelos matemáticos recopilados en el artículo [9], donde se modela la dinámica poblacional de las abejas con factores que son: la edad/ etapa, los recursos de comida o factores de nutrición, parásitos o virus, y pesticidas, son presentados en las siguientes subsecciones.

### 1.3.1. Modelo de dinámica poblacional

En [3] los autores proponen un modelo matemático que permite explorar de manera cuantitativa la dinámica poblacional y la fuerza en la colmena. Dicho modelo tiene el potencial de hacer predicciones sobre los resultados de varias manipulaciones y permite explorar un problema preliminar antes de invertir en un trabajo experimental.

Es un modelo de compartimientos simple, el cual únicamente considera a las abejas hembra, donde  $H$  es el número de abejas que trabajan dentro de la colmena y  $F$  es el número de abejas que trabajan fuera de la colmena, es decir, las forrajeras. Por lo que  $N = H + F$  es el número total de abejas trabajadoras en la colmena. Se asume que solo hay dos clases de abejas, las que trabajan dentro de la colmena y las que salen a forrajear. Los supuestos básicos del modelos son: las abejas no mueren dentro de la colmena, las abejas forrajeras mueren en una tasa constante  $m$ , las abejas emergen a partir de las pupas a una tasa  $E(H, F)$  y se convierten en forrajeras a una tasa  $R(H, F)$

Las ecuaciones diferenciales del modelo propuesto en [3] se describen así:

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= E(H, F) - HR(H, F) \\ \frac{dF}{dt} &= HR(H, F) - mF\end{aligned}\tag{1.1}$$

La primera ecuación representa la ganancia de abejas que emergen y la pérdida de las que se van a forrajear y la segunda ecuación representa el aumento de abejas forrajeras por reclutamiento y la disminución por muerte.

La eclosión de nuevas abejas que esta determinada por  $E(H, F) = L \frac{H+F}{w+H+F}$  depende del tamaño total de la población de abejas  $N$ , pero hay un limite determinado por la capacidad de puesta de la reina  $L$ , que aproximadamente toma un valor de 2000 huevos/día y  $w$  es el número de abejas a partir del cual la tasa de eclosión se aproxima a  $L$ .

El reclutamiento de abejas forrajeras esta determinado por  $R(H, F) = \alpha - \sigma \left(\frac{F}{H+F}\right)$ , donde  $\alpha$  es la tasa máxima de reclutamiento si no hay forrajeras y  $\sigma$  es la fuerza de inhibición social, lo que significa que si hay muchas abejas forrajeras, entonces las abejas jóvenes tardan en volverse forrajeras.

Khoury y colaboradores realizaron el análisis de estabilidad lineal estándar y el plano fase para analizar las ecuaciones, obteniendo que hay un estado estable global  $(H_0, F_0)$  donde

$$F_0 = \frac{L}{m} - w \frac{J}{J+1}, \quad H_0 = \frac{1}{J} F_0 \quad \text{con}$$

$$J = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\alpha}{m} - \frac{\sigma}{m} - 1 \right) + \sqrt{\left( \frac{\alpha}{m} - \frac{\sigma}{m} - 1 \right)^2 + 4 \frac{\alpha}{m}} \right]$$

cuando

$$m < \frac{L}{2w} \left( \frac{\alpha + \sigma + \sqrt{(\alpha - \sigma)^2 + 4\frac{L\sigma}{m}}}{\alpha - \frac{L}{w}} \right) \quad \text{y} \quad \alpha - \frac{L}{w} > 0.$$

Por lo tanto, dentro de la parte de resultados del artículo publicado, el modelo presenta una bifurcación en el parámetro de la tasa de mortalidad  $m$  de tal manera que, cuando la tasa de mortalidad está por debajo del umbral crítico, en sus simulaciones el valor crítico es  $m = 0.335$ , la población alcanza un punto de equilibrio, pero cuando la tasa de mortalidad está por encima de este umbral, la población disminuye a cero y la colonia falla. Este punto de bifurcación representa el punto en el que la colonia no puede mantener la producción de cría a un ritmo suficiente para reemplazar las pérdidas.

Por último, el autor comenta que el modelo predice las disminuciones iniciales rápidas en la población de las abejas, pero que el modelo no tiene la capacidad de representar efectivamente el abandono absoluto de la colonia, que es un diagnóstico de CCD.

### 1.3.2. Modelos que incorporan los diferentes estadios de las abejas

Dentro de la parte de edad o estructura, el estudio de Chen et al. en 2020 [27] desarrolla modelos de ecuaciones diferenciales con retardo para describir la dinámica de una colonia de *Apis mellifera*, donde considera dos etapas principales: la población de crías denotada por  $B(t)$  y la población de abejas adultas denotada por  $H(t)$ . El modelo considera a  $r$  como la tasa de puesta de huevos diaria por la reina,  $\sqrt{K}$  indica el tamaño de la colonia donde la tasa de supervivencia de las crías es la mitad de la máxima,  $\alpha$  son los efectos de la regulación de las crías y  $d_b$  y  $d_h$  representan la mortalidad de las abejas en etapa de cría y de adulto, respectivamente, por último,  $\tau$  indica el tiempo de maduración desde el estado de cría hasta el estado de abeja adulta. Además incorpora el efecto de la estacionalidad en la tasa de puesta de la reina, modelada con una función periódica.

Se proponen dos modelos diferentes con estructura de edad. El primero asume que las abejas sobreviven de los huevos, mientras que el segundo modelo asume que las abejas adultas sobreviven desde la etapa de cría en lugar desde la etapa de huevo. Son los siguientes:

- Primer modelo

$$\frac{dB}{dt} = \frac{rH^2}{K + H^2 + \alpha B} - e^{-d_b\tau} \frac{rH^2(t - \tau)}{K + H^2(t - \tau) + \alpha B(t - \tau)} - d_b B,$$

$$\frac{dH}{dt} = e^{-d_b\tau} \frac{rH(t - \tau)^2}{K + H(t - \tau)^2 + \alpha B(t - \tau)} - d_h H.$$

- Segundo modelo

$$\frac{dB}{dt} = \frac{rH^2}{K + H^2 + \alpha B} - e^{-d_b\tau} B(t - \tau) - d_b B,$$

$$\frac{dH}{dt} = e^{-d_b\tau} B(t - \tau) - d_h H.$$

Los resultados que obtuvieron fueron que ambos siempre admiten un equilibrio estable  $E_e = (0, 0)$ , donde su estabilidad depende de los parámetros  $r$ ,  $K$ ,  $\tau$ ,  $d_h$ ,  $d_b$  y  $\alpha$ . Por otro lado, los autores concluyeron que para que exista un equilibrio inestable se debe de tener que  $\tau$  sea lo suficientemente grande, los valores de  $d_h$  y  $d_b$  deben ser pequeños y los valores de  $\alpha$  y  $K$  sean moderados; esto se resume en desigualdades explícitas que los autores deducen, ver [27].

En cuanto a la comparación de los dos modelos, se concluye que en el segundo modelo la maduración  $\tau$  puede provocar cambios de estabilidad y provocar oscilaciones, mientras que el primer modelo  $\tau$  tiene un menor efecto sobre la estabilidad de los equilibrios.

En base al modelo (1.1), Booton et al. en 2017 [28] proponen un modelo que representa la dinámica de las abejas de colmena definida por  $H$  y las abejas forrajeras definida por  $F$  con un estrés externo para investigar cómo es el impacto en el proceso de reclutamiento a abejas forrajeras, si hay cambios en la inhibición social y en la tasa de puesta de huevos por la reina.

Este artículo destaca la importancia de incluir la estructura etaria como la estacionalidad para modelar adecuadamente la dinámica de la población de las abejas y los factores que influyen en su estabilidad.

Las ecuaciones diferenciales que propone Booton et al. en [28] son las siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= L \frac{H + F}{H + F + \omega} - H \left[ \alpha - \sigma \left( \frac{F}{F + H} \right) \right] - H \frac{\mu}{H + F + \phi} - H \gamma(H + F) \\ \frac{dF}{dt} &= H \left[ \alpha - \sigma \left( \frac{F}{F + H} \right) \right] - d_f F - F \frac{\mu}{H + F + \phi}\end{aligned}$$

El término que representa el estrés externo es  $H \frac{\mu}{H + F + \phi}$ , donde  $\mu$  representa la tasa de estrés y  $\phi$  la baja mortalidad de la colonia. La función  $\gamma(H + F)$ , es una función limitante de altas densidades, donde se elige que el efecto de alta densidad,  $\gamma$ , se extramadamente pequeño.

Para analizar el modelo utilizaron métodos estándar de teoría de sistemas dinámicos, donde encontraron dos puntos de equilibrio que son el trivial y  $(H^*, F^*)$  y después de ver su comportamiento, los autores concluyeron que el estrés genera efectos del tipo Allee lo que lleva a un colapso en la población de abejas. Además demostraron que la CCD puede desencadenarse por pequeñas perturbaciones en las funciones regulatorias de la colmena, lo que indica que la colmena es altamente sensible a los cambios que generan estrés que son dependientes de la densidad poblacional.

### 1.3.3. Modelos que incorporan los recursos de comida o nutrición

Dentro de la parte de los modelos que consideran la dinámica de las abejas con los efectos de la comida o la nutrición, está el modelo que desarrollo Khoury et al. en 2013 [29] el cual es una extensión del modelo (1.1) publicado en [3], en donde se observa que si los recursos alimentarios son limitados en la colonia, entonces las abejas de la colmena serán reclutadas para convertirse en abejas forrajeras en una etapa precoz, lo que acortaría la vida útil de las trabajadoras, lo cual conlleva a la afectación de la estructura de edad en

la colonia y la cantidad de crías que pueden criar. Esto está representado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dH} &= L \frac{f^2}{f^2 + b^2} \frac{H}{H + v} - \phi B(t) \\ \frac{dH}{dt} &= \phi B(t - \tau) - H \left( \alpha_{min} + \alpha_{max} \frac{b^2}{b^2 + f^2} - \sigma \frac{F}{F + H} \right) \\ \frac{dF}{dt} &= H \left( \alpha_{min} + \alpha_{max} \frac{b^2}{b^2 + f^2} - \sigma \frac{F}{F + H} \right) - d_f F \\ \frac{df}{dt} &= cF - \gamma_b B - \gamma_h H - \gamma_f F\end{aligned}$$

donde  $B$  representa la población de crías,  $H$  la población de abejas de colmena,  $F$  la población de abejas forrajeras,  $f$  representa la disponibilidad de alimento que se almacena en la colmena.

La primera ecuación representa la tasa de cambio del número de crías, donde  $b$  y  $v$  son parámetros que determinan que tan rápido  $\frac{f^2}{f^2+b^2} \frac{H}{H+v}$  tiende a uno a medida que  $f$  y  $H$  aumentan, respectivamente.

La segunda ecuación representa la tasa de cambio de las abejas de la colmena, donde  $\phi B(t - \tau)$  es la tasa a la que las abejas adultas emergen de la pupación, es decir, las abejas que emergen en momento  $t$  son las mismas que entraron a pupación en  $t - \tau$ .

La tercera ecuación representa la tasa de cambio de las abejas forrajeras, donde  $\alpha_{min}$  es la tasa con la que las abejas de la colmena se convierten en forrajeras cuando hay suficiente alimento almacenado pero no existen abejas forrajeras activas;  $\alpha_{max}$  representa cuánto influye la escasez de alimento sobre la transición de abejas de colmena a forrajeras; y  $b$  regula qué tan rápido disminuye los efectos asociados al alimento conforme aumentan las reservas. Así como en el modelo (1.1), hay una inhibición social que está relacionada con la proporción de abejas forrajeras dentro de la población de abejas adultas, y su intensidad esta controlada por  $\phi$ .

Por último, la cuarta ecuación representa la razón de cambio en la disponibilidad de alimento, donde  $c$  representa la cantidad promedio de alimento recolectado por día y el consumo de alimento almacenado por crías, abejas de colmena y forrajeras esta determinado por  $\gamma_B$ ,  $\gamma_H$  y  $\gamma_F$ , respectivamente.

Dentro de los resultados, los autores mencionan que el modelo sugiere que, cuando las tasas de mortalidad de las abejas cortejadoras son bajas, entonces hay baja disponibilidad de alimentos, lo que limita la cantidad de alimentos acumulados en la colonia y provoca que disminuya el tamaño de la población. Pero si se aumenta la disponibilidad de alimentos, aumenta la cantidad de alimentos acumulados y, por tanto, la población total de abejas aumenta.

Esto sugiere que si hay baja mortalidad y alta disponibilidad de alimentos, el modelo predice una cantidad infinita de alimentos almacenados en la colonia. Obviamente, esto está fuera de la realidad, pero refleja hasta cierto punto, lo que es ideal para que un apicultor pueda cosechar miel sin comprometer a la colonia.

Por lo tanto, con diferentes tasas de mortalidad para abejas forrajeras se pueden obtener tres resultados generales: una población estable con un exceso de almacenamiento de comida, una población estable con alimentos limitados y una población cero con almacenes de comida residuales.

Luego, Perry et al. en 2015 [30] extendieron el modelo anterior publicado en [29], donde se asume que el almacenamiento de alimentos depende de los viajes de forrajeo, los cuales, a su vez depende de la edad a la que inician a forrajear. Pero el forrajeo precoz reduce el forrajeo efectivo y la longevidad de los polinizadores, lo que conduce a una alta tasa de mortalidad y bajas reservas de alimento. El objetivo del artículo [30] es identificar las estrategias más efectivas para mejorar la resiliencia de las colonias, por lo tanto, el modelo que se propone es el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dt} &= L \frac{f^2}{f^2 + b^2} \frac{H}{H + v} - \phi B(t) \\ \frac{dH}{dt} &= \phi B(t - \tau) - H \left( \alpha_{min} + \alpha_{max} \frac{b^2}{b^2 + f^2} - \sigma \frac{F}{F + H} \right) \\ \frac{dF}{dt} &= T(a)H \left( \alpha_{min} + \alpha_{max} \frac{b^2}{b^2 + f^2} - \sigma \frac{F}{F + H} \right) - d_f M(a)F \\ \frac{df}{dt} &= c_T N(a)F - \gamma_b B - \gamma_a (H + F)\end{aligned}$$

donde  $c_T$  es la cantidad de comida recolectada en un solo viaje,  $N(a)$  representa la cantidad de viajes que realiza una abeja forrajera por día de acuerdo a su edad a la que inició a polinizar y  $\gamma_a$  y  $\gamma_b$  es el peso del alimento consumido por una abeja por día dependiendo de la etapa en la que se encuentre; también asumen que la cantidad de viajes realizados y la supervivencia transicional  $T(a)$  son una función de la edad al inicio del forrajeo y  $M(a)$  representa la tasa de muerte de abejas forrajeras en una colmena sana en función de la edad  $a$  a la que inició a ser polinizadora.

La suposición de que el almacenamiento de alimento depende de los viajes de forrajeo, esto resultó en una ruptura de división del trabajo y la pérdida de población adulta en la colmena. Este trabajo da como resultado cuál puede ser uno de los procesos que pueden llevar a la despoblación de una colonia, por lo que probaron varias estrategias para prevenir el fracaso de las colonias, como son: la alimentación suplementaria, la cual fue la más efectiva, agregar más crías a la colmena, lo que fue de ayuda al principio, pero luego comenzaban a tener estrés, y por último, la inhibición del forrajeo precoz a través de feromonas, pero esto no tuvo un buen resultado debido a que recogían menor cantidad de alimento.

### 1.3.4. Modelos que incorporan la dinámica con parásitos o virus

Ahora se presentaron los modelos que están relacionados con los parásitos o virus. Los ácaros como el *Varroa destructor*, están asociados al síndrome del colapso de las colmenas; este ácaro afecta a las abejas durante dos fases: la forética y la reproductiva; y entre las enfermedades que afectan a las abejas están: Loque americana, Loque europea, Cría de cal, Cría de piedra, Nosemosis, Acariosis y Varroasis, entre otras [31].

Por lo que, Messan et al. en 2021 en su artículo [32] dieron un modelo de interacción de abeja y ácaros de tres dimensiones, en el cual considera a  $B(t)$ ,  $H(t)$  y  $M(t)$  la población total de crías, de abejas adultas y de ácaros al tiempo  $t$ , respectivamente, y donde  $\tau > 0$  es el intervalo de tiempo en el que la población entra en un ambiente homogéneo, igual transcurrido el tiempo de huevo hasta adulto. Los supuestos que considera el modelo son: se supone que las poblaciones tienen una tasa de mortalidad natural proporcional a la

población existente, que es detonada por los parametros  $d_b$  para las crías,  $d_h$  para las abejas adultas y  $d_m$  para los ácaros; las población de crías y abejas adultas disminuyen por el parasitismo de los ácaros, por lo que en las ecuaciones se define a  $a$  como el tamaño de la población de crías o de abejas adultas y los parámetros  $\alpha_b$  y  $\alpha_h$  miden la tasa de parasitismo a la población de crías y adultas; La población de ácaros aumenta a través del parasitismo de la cría, por lo que  $c$  representa el factor de conversión de la cría a la población y de ácaros. Por ultimo, la constante  $r$  representa la tasa máxima de huevos que pone la reina. Considerando esto, el modelo propuesto es el siguiente:

Para  $t \in (0, \tau]$ ,

$$\frac{dB}{dt} = \underbrace{\frac{rH^2}{K+H^2}}_{\text{producción de huevos}} - \alpha_b \underbrace{\frac{B}{a+B} M}_{\text{probabilidad de que } M \text{ se una } B} - \underbrace{d_b B}_{\text{muerte natural}} - \underbrace{e^{-\int_{t-\tau}^t [d_b + \frac{\alpha_b M(s)}{a+B(s)}] ds} B_0(t-\tau)}_{\text{maduración de huevo a adultas}},$$

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{e^{-\int_{t-\tau}^t [d_b + \frac{\alpha_b M(s)}{a+B(s)}] ds} B_0(t-\tau)}_{\text{transición dr cría}} - \alpha_h \underbrace{\frac{H}{a+H} M}_{\text{probabilidad de que } M \text{ se una } H} - \underbrace{d_h H}_{\text{muerte natural}},$$

$$\frac{dM}{dt} = \underbrace{c\alpha_b \frac{B}{a+B} M}_{\text{recién nacidos de parasitismo de crías}} - \underbrace{d_m M}_{\text{muerte natural}}.$$

Para  $t > \tau$

$$\frac{dB}{dt} = \underbrace{\frac{rH^2}{K+H^2}}_{\text{producción de huevos}} - \alpha_b \underbrace{\frac{B}{a+B} M}_{\text{probabilidad de que } M \text{ se una } B} - \underbrace{d_b B}_{\text{muerte natural}} - \underbrace{\frac{e^{-\int_{t-\tau}^t [d_b + \frac{\alpha_b M(s)}{a+B(s)}] ds} rH(t-\tau)^2}{K+H(t-\tau)^2}}_{\text{maduración de huevo a adultas}},$$

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\frac{e^{-\int_{t-\tau}^t [d_b + \frac{\alpha_b M(s)}{a+B(s)}] ds} rH(t-\tau)^2}{K+H(t-\tau)^2}}_{\text{transición dr cría}} - \alpha_h \underbrace{\frac{H}{a+H} M}_{\text{probabilidad de que } M \text{ se una } H} - \underbrace{d_h H}_{\text{muerte natural}},$$

$$\frac{dM}{dt} = \underbrace{c\alpha_b \frac{B}{a+B} M}_{\text{recién nacidos de parasitismo de crías}} - \underbrace{d_m M}_{\text{muerte natural}}.$$

Con condiciones iniciales  $B(t) = B_0(t) > 0, t \in [-\tau, 0], H(0) > 0, M(0) \geq 0$ , donde  $B_0 \in \mathcal{C} := C([-\tau, 0], [0, +\infty])$  es la población de crías en  $t \in [-\tau, 0]$ .

Los equilibrios que obtuvieron de este sistema son  $E_{000} = (0, 0, 0)$  y  $E_{B_i^*, H_i^*, 0} = (B_i^*, H_i^*, 0)$  donde  $B_i^* = \frac{d_h[e^{d_b-1}-1]}{d_b} H_i^*$  y  $H_i^* = \frac{e^{-d_b\tau} (d_b r \pm \sqrt{(d_b r)^2 - 4d_b^2 K e^{2d_b\tau}})}{2d_b d_h}$  con  $i = 1, 2$  y proponen lo siguiente:

**Teorema 1.3.1 (Dinámica de equilibrios en la frontera)** : *El modelo siempre tiene un equilibrio de extinción  $E_{000}$  el cual siempre es localmente asintóticamente estable. Si  $d_h < \frac{r e^{-d_b\tau}}{2\sqrt{K}}$  el modelo tiene dos equilibrios adicionales de frontera  $E_{B_1^* H_1^* 0}$  y  $E_{B_2^* H_2^* 0}$  donde el primero es inestable y el segundo es localmente asintóticamente estable cuando  $d_m > \frac{c\alpha_b B_2^*}{a+B_2^*}$  y es inestable cuando  $d_m < \frac{c\alpha_b B_2^*}{a+B_2^*}$*

**Teorema 1.3.2 (Estabilidad Global del sistema)** : *Si  $d_h < \frac{r e^{-d_b\tau}}{2\sqrt{K}}$  y  $d_m > c\alpha_b$ , el equilibrio de extinción  $E_{000}$  es globalmente asintóticamente estable.*

Con estos dos resultados se tiene una explicación biológica en donde puede suceder que todas las poblaciones desaparezcan debido al tamaño inicial y, por lo tanto, el equilibrio  $E_{000}$  es estable. Por otro lado, como tenemos un parasitismo por parte de los ácaros, si el término  $\frac{c\alpha_b B_2^*}{a+B_2^*}$  es menor que la tasa de mortalidad de los ácaros  $d_m$ , este no podría sobrevivir y se tendrá una colonia con crías y abejas adultas, pero si  $d_m < \frac{c\alpha_b B_2^*}{a+B_2^*}$ , puede desestabilizar el sistema. Y el segundo teorema indica que cuando el promedio total de abejas adultas es menor que la población crítica de abejas adultas y la tasa de mortalidad natural de ácaros es mayor que la eficiencia del parasitismo, entonces toda la población morirá independientemente de su tamaño inicial. Las simulaciones numéricas indican que, sin ácaros, la colonia alcanza un equilibrio estable, mientras que con infestación aparecen oscilaciones y, para altos valores de  $\tau$  o de la tasa de parasitismo ( $\alpha_b$ ), la colonia colapsa.

Para el lector interesado en leer la demostración de estos teoremas y otros más que propusieron en función del modelo, se encuentran en [32].

En el artículo [4] se realiza un estudio de investigación donde se aborda el escenario en el cual el CCD es provocado por un patógeno transmisible o contaminación introducida por las abejas que salen a polinizar; esto para entender cómo el colapso de la colmena podría ocurrir con una perturbación en la dinámica normal de la colmena.

El modelo define a  $H$  como el número de abejas que trabajan en la colmena, a la  $F$  como el número de abejas que salen a forrajear y a las  $I$  como el número de abejas infectadas o contaminadas, por lo que se tienen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= L \frac{H}{H + \Omega} - \gamma H - \alpha H \frac{\Phi}{F + I + \Phi} \\ \frac{dF}{dt} &= \gamma H + \alpha H \frac{\Phi}{F + I + \Phi} - \mu_1 F - \beta F \frac{I}{I + K} \\ \frac{dI}{dt} &= \beta F \frac{I}{I + K} - \mu_2 I \end{aligned}$$

donde  $L$  representa la tasa constante de huevos que pone la reina,  $\Omega$  es el número de abejas de colmena necesarias para que la tasa de emergencia alcance  $\frac{1}{2}L$ ,  $\gamma$  representa la tasa en la que las abejas de colmena se vuelven abejas forrajeras, la tasa máxima de maduración

adicional está dada por  $\alpha$ ,  $\Phi$  es el número de abejas forrajeras en la cual su tasa máxima de maduración adicional es  $\frac{\alpha}{2}$ , se asume que las abejas mueren de forma natural en una tasa  $\mu_1$ ,  $\beta$  es la tasa de infección de las abejas, con  $K$  como la constante de media saturación, y por último,  $\mu_2$  es la tasa per cápita de mortalidad por infección, por lo que  $\mu_2 \geq \mu_1$

Analizando el modelo, Kribs y Mitchell llegaron a la conclusión de que hay hasta cinco tipos de equilibrios: equilibrio de extinción, dos de equilibrio libre de enfermedad y dos de equilibrio endémico.

- equilibrio de extinción, donde todas las poblaciones son ceros, este equilibrio siempre existe y se mantiene estable cuando  $L$  es muy bajo a comparación de la tasa de maduración y muerte;
- equilibrio libre de enfermedad, donde la población de infectados es igual a cero. En un caso, el equilibrio existe y es estable cuando  $R_0 < 1$  y en el otro caso el equilibrio es inestable y aparece cuando hay un efecto Allee<sup>1</sup>;
- equilibrio endémico se tiene que todas la poblaciones son positivas, si el equilibrio existe, es inestable.

Y esto corresponde a tres resultados para la colmena: colapso de la colonia, una colmena sana o supervivencia en un estado endémico, por lo que el autor concluye que la condición principal para que la colmena sobreviva sin importar el tamaño inicial es que la tasa de puesta de huevos exceda la tasa máxima de reclutamiento de abejas forrajeras en el umbral de media saturación de la puesta de huevos. Si este criterio falla, siempre es posible una extinción, pues es una vulnerabilidad para el CCD, ya que la infección acelera la pérdida de forrajeras, lo que a su vez acelera el reclutamiento de abejas de colmena para reemplazarlas, lo que genera que menos abejas cuiden a las crías, llegando así a un colapso.

Otro artículo que propone un modelo con ecuaciones diferenciales parciales de la interacción de abejas con virus es el publicado en [34], que es el siguiente:

$$\frac{\partial H_S}{\partial t} + \frac{\partial H_S}{\partial a} = -u(a)H_S - \beta \hat{N}H_S$$

$$\frac{\partial H_I}{\partial t} + \frac{\partial H_I}{\partial a} = \beta \hat{N}H_S - u(a)H_I - d_H(a)H_I$$

$$\frac{\partial F_S}{\partial t} + \frac{\partial F_S}{\partial a} = u(a)H_S - \mu(a)F_S - \beta \hat{N}F_S$$

$$\frac{\partial F_I}{\partial t} + \frac{\partial F_I}{\partial a} = u(a)H_I + \beta \hat{N}F_S - (\mu(a) + d_F(a))F_I$$

donde  $H_S(a, t)$  y  $H_I(a, t)$  son el número de abejas de colmena susceptibles e infectadas, respectivamente, a la edad  $a$  en el tiempo  $t$  y  $u(a)$  es la tasa de reclutamiento a forrajeo dependiente de la edad, el segundo termino de la primera ecuación representa la dinámica

---

<sup>1</sup>Cuando el tamaño inicial de la población esta por debajo de un valor umbral  $K_0$ , la población tiende a extinguirse. A esto se le llama **Efecto Allee** [33]

de la enfermadas dentro de la colonia, donde se asume que la abejas de colmena y las forrajeras transmiten la infección entre o dentro de las clases a una tasa  $\beta$  y el número total de abejas infectadas esta denotado por  $\hat{N} = \int (H_I + F_I) da$ , por otro lado,  $F_S(a, t)$  y  $F_I(a, t)$  son el número de abejas forrajeras susceptibles e infectadas, respectivamente, a la edad  $a$  y en el tiempo  $t$  y  $\mu(a)$  es la muerte natural dependiente de la edad de abejas de colmena susceptibles que fueron reclutadas para ser forrajeras y, por último,  $d_H(a)$  y  $d_F(a)$  son las tasas de mortalidad de abejas de colmena e infectadas, respectivamente.

Dado que consideran la estructura de la edad como una variable dependiente, en particular una tasa de reclutamiento dependiente de la edad, obtienen como resultados que hay efectos críticos en la supervivencia de las abejas melíferas; de hecho, predicen que el polietismo por edad en una colonia de abejas tiene el efecto de impedir la propagación de alguna enfermedad o infección, por lo que cualquier perturbación en la estructura de edad natural puede aumentar la gravedad de la infección dentro de la colmena.

### 1.3.5. Modelos sobre la dinámica de las abejas con distintos pesticidas

Como último factor a considerar son los pesticidas, lo cual es de mayor interés en este trabajo, por lo que los únicos modelos hasta el momento que hablan sobre la dinámica de las abejas con los pesticidas son los siguientes:

Magal et. al en 2019 [5] analizaron un modelo de CCD derivado de la contaminación por pesticidas. Su modelo es una ecuación en diferencias de tiempo discreto que rastrea a las abejas forrajeras al salir y regresar a la colmena diariamente. El modelo describe únicamente a las abejas forrajeras y la unidad de tiempo es de un día. Una clave importante que consideran es el llamado efecto Allee, el cual colocan en el término correspondiente a la producción de nuevas abejas forrajeras, a medida que pasan de la eclosión, maduración y diferenciación a la funcionalidad de forrajera.

El primer modelo representa el CCD sin contaminación por pesticidas,

$$U(n+1) = \frac{\beta U(n)^2}{\tilde{X} + U(n)^2} + e^{-\mu} U(n), \quad n \geq 0$$

$$U(0) = U_0$$

donde  $\mu > 0$  representa la tasa de mortalidad natural de abejas forrajeras y  $\beta$  es la tasa máxima de nuevas abejas forrajeras producidas por día.

De acuerdo con esta ecuación, 0 siempre es un equilibrio, estrictamente un equilibrio positivo  $\bar{U}$ , que satisface la siguiente igualdad  $\frac{\tilde{\beta}\bar{U}}{\tilde{X}^2 + \bar{U}^2} = 1$ , con  $\tilde{\beta} := \frac{\beta}{(a - e^{-\mu})}$  y  $\tilde{X}^2 = X^2 e^{2\mu}$ , con esto obtienen que  $R_0 = \frac{\tilde{\beta}}{2\tilde{X}}$ , el cual mide la capacidad reproductiva efectiva de la colonia frente a la mortalidad natural, con esto, los autores proponen el siguiente lema y lo demuestran:

**Lema 1.3.1** (I) Si  $R_0 < 1$ , el único equilibrio es 0. Además, 0 es estable y cada solución que comience desde  $U_0 \geq 0$  converge a 0

(II) Si  $R_0 > 1$ , se tienen tres equilibrios no negativos:

▪ 0

$$\begin{aligned} \blacksquare \bar{U}_- &:= \frac{\hat{\beta} - \sqrt{\hat{\beta}^2 - 4\hat{X}^2}}{2} \\ \blacksquare \bar{U}_+ &:= \frac{\hat{\beta} + \sqrt{\hat{\beta}^2 - 4\hat{X}^2}}{2} \end{aligned}$$

se tiene que  $0 < \bar{U}_- < \bar{U}_+$ . Además,  $0$  es localmente estable y cada solución que comience en  $U_0 \in [0, \bar{U}_-)$  converge a  $0$ . Además,  $\bar{U}_+$  es localmente estable y cada solución que comienza desde  $U_0 \in (\bar{U}_-, \infty)$  converge a  $\bar{U}_+$ .

De acuerdo a esto, el modelo explica por que colonias pequeñas o debilitadas pueden colapsar, incluso sin exposición química, debido al efecto Allee.

Por otro lado, el siguiente modelo también descrito en [5] representa el CCD con contaminación por pesticidas, donde se asume que la contaminación está en el ambiente y el primer día de abejas contaminadas y no contaminadas son  $U(0) = U_0 \geq 0$ ,  $C(0) = C_0 \geq 0$

$$U(n+1) = \frac{\beta V(n)^2}{X^2 + V(n)^2} + e^{-(\mu+\alpha)}U(n),$$

$$C(n+1) = pe^{-\mu}C(n) + pe^{-\mu}[1 - e^{-\alpha}]U(n)$$

donde  $V(n) := pe^{-\mu}C(n) + [pe^{-\mu} + (1-p)e^{-(\alpha-\mu)}]U(n)$ ,  $p \in [0, 1]$  es la fracción de abejas contaminadas cuando regresan y  $\alpha > 0$  es la tasa de contaminación por día.

Se tiene que  $(0, 0)$  siempre es un equilibrio y el segundo equilibrio  $(\bar{U}, \bar{C})$  que satisface la siguiente ecuación  $\bar{C} = pe^{-\mu}\{\bar{C} + [1 - e^{-\alpha}\bar{U}]\} \Leftrightarrow \bar{C} = k_1\bar{U}$ , donde  $k_1 = \frac{pe^{-\mu}[1 - e^{-\alpha}]}{1 - pe^{-\mu}}$ , con esto obtienen que  $R_1 = \frac{\hat{\beta}}{2\hat{X}}$ , que representa la capacidad de regeneración de la colonia bajo los efectos de la contaminación, donde  $\hat{\beta} = \frac{\beta}{1 - e^{-(\mu+\alpha)}}$  y  $\hat{X} = \frac{X}{e^{-(\mu+\alpha)}[1 + pk_2]}$  con  $k_2 = \frac{e^{\alpha} - 1}{1 - pe^{-\mu}}$ . Para este modelo, enuncia otro lema, dos proposiciones y las demuestra:

**Lema 1.3.2** (I) Si  $R_1 < 1$ , entonces  $(0, 0)$  es el único equilibrio del sistema

(II) Si  $R_1 > 1$ , entonces el sistema tiene tres equilibrios:

- $(0, 0)$
- $(\bar{U}_-, \bar{C}_-)$
- $(\bar{U}_+, \bar{C}_+)$

donde  $\bar{C}_{\pm} = k_1\bar{U}_{\pm}$  y se tiene que

$$(0, 0) \ll (\bar{U}_-, \bar{C}_-) \ll (\bar{U}_+, \bar{C}_+),$$

**Proposición 1.3.1** Asume que  $R_1 < 1$ . Entonces el equilibrio trivial  $(0, 0)$  es globalmente asintóticamente estable, esto es,  $(0, 0)$  es localmente estable y cada solución no negativa converge a  $(0, 0)$

**Proposición 1.3.2** Asume que  $R_1 > 1$ . Las siguientes afirmaciones se mantienen:

- (I) El equilibrio  $(0, 0)$  es asintóticamente estable. Si  $U_0 \in [0, \bar{U}_-)$  y  $C_0 \in [0, \bar{C}_-)$ , entonces la solución correspondiente  $(U(n), C(n))$  del sistema converge a  $(0, 0)$ .
- (II) El equilibrio  $(\bar{U}_+, \bar{C}_+)$  es asintóticamente estable. Si  $U_0 \in (\bar{U}_-, \infty)$   $C_0 \in (\bar{C}_-, \infty)$ , entonces la solución correspondiente  $(U(n), C(n))$  del sistema converge a  $(\bar{U}_+, \bar{C}_+)$ .

Con esto y otras proposiciones más, concluyen que si la población de abejas se encuentra por debajo del umbral, se extinguirá rápidamente, pero por encima, la población se acerca a un nivel estable. También, concluyen que la contaminación ambiental por pesticidas tiene un efecto subletal en las abejas melíferas y no causa directamente CCD. Más bien, la contaminación perjudica a las abejas forrajeras contaminadas en regresar a la colmena, lo que interrumpe su contribución al sustento de abejas más jóvenes en la colmena.

Para el lector interesado, las demostraciones de los lemas y proposiciones enunciados y algunos otros resultados más los puede encontrar en [5].

Un año después, en [6] extienden el análisis del modelo descrito en [5], donde consideran un factor significativo: la heterogeneidad espacial de las ubicaciones de contaminación y la variabilidad de abejas forrajeras en sus patrones de regreso; esto con la justificación de que la heterogeneidad espacial influye en la capacidad de supervivencia más allá del umbral que fue determinante. Es más, el umbral depende de la variabilidad de abejas forrajeras.

Hay dos estrategias que utilizan las abejas para buscar recursos en su entorno espacial: usan la información que otras abejas les comunican a través de la danza waggle, que determina la distancia y dirección del lugar de su preferencia, y la otra es usando la información memorizada para volar a los lugares preferidos familiares. Por lo que, en este modelo asumen que las colmenas están localizadas en un ambiente con un gradiente de recursos limitados igual en todas direcciones, donde la información social comunicada por el baile waggle es de poca importancia, y por último asumen una proporción  $q$  de abejas forrajeras que memorizan la información espacial de sus ubicaciones preferidas y van repetidamente a estas ubicaciones. La proporción restante  $1 - q$  es de abejas que viajan en direcciones aleatorias para buscar nuevos recursos.

Este modelo está diseñado en particular para su aplicación a colonias administradas en entornos agrícolas industriales, donde estas condiciones espaciales son comunes.

El modelo donde consideran el efecto de los pesticidas en el ambiente en la dinámica de las abejas obreras es el siguiente: sea  $u(t, x, y)$  y  $c(t, x, y)$  la densidad de abejas no contaminadas y contaminadas en el tiempo  $t$  y la locación  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , respectivamente, se tiene que la distribución inicial es  $u(0, x, y) = u_0(x, y)$  y  $c(0, x, y) = c_0(x, y)$  donde  $u_0, c_0 \in L^1_+(\mathbb{R}^2)$ . Con esto, la dinámica espacial de la población de las abejas forrajeras en  $t \in [0, 1)$  está descrita por:

$$\partial_t u(t, x, y) = \epsilon \Delta u(t, x, y) - \mu(x, y)u(t, x, y) - \alpha(x, y)u(t, x, y)$$

$$\partial_t c(t, x, y) = \epsilon \Delta c(t, x, y) - \mu(x, y)c(t, x, y) + \alpha(x, y)u(t, x, y)$$

donde  $\epsilon > 0$  es la tasa de difusión,  $\mu(x, y)$  es la tasa de mortalidad y  $\alpha(x, y)$  es la tasa de contaminación de abejas forrajeras por pesticidas. Al final del día, la proporción de abejas contaminadas que regresan a la colmena está dada por  $p$ , así la fracción restante  $1 - p$  corresponde a las abejas contaminadas que fallan en el regreso a la colmena. Asumen que  $\alpha$  y  $\mu$  son funciones no negativas continuas acotadas en  $\mathbb{R}^2$ .

De igual forma, ellos consideran el efecto Allee para modelar la contribución de las abejas que regresan a la colmena para cuidar de las crías:

$$B = \frac{\beta(U + pC)^2}{X^2 + (U + pC)^2}$$

Después de realizar simulaciones, llegaron a las siguientes conclusiones: El parámetro  $p$  determina cuál es el umbral crítico de población para que no ocurra el CCD, por lo que si la población está por encima de este parámetro se evita el CCD; el parámetro  $q$  que está relacionado a la fracción de abejas que regresan a ubicaciones anteriores, si el ambiente es una zona muy contaminada y el valor de  $q$  es alto, entonces una mayor proporción de abejas se contaminan. Por lo tanto, las variaciones en los parámetros  $p$  y  $q$  determinan si se puede producir un colapso en la colmena o no.

En este trabajo, analizaremos un modelo para el Trastorno de Colapso de Colonias derivado por pesticidas. El modelo es una ecuación diferencial que combina el crecimiento logístico con un término adicional que representa la tasa de pérdida poblacional por mortalidad a los pesticidas.

## 2.1. Ecuaciones diferenciales

Primeramente en esta sección se darán a conocer definiciones, teoremas y resultados clásico que son utilizados para garantizar la existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales continuas; dicho contenido se encuentra enunciado y demostrado en [35]. Además de mencionar los modelos clásicos utilizados para estudiar el crecimiento poblacional.

Una **ecuación diferencial** de primer orden es una ecuación para una función  $f(t, y)$  en términos de su derivada. La ecuación cuenta con tres tipos de variables: la independiente, la dependiente y los parámetros.

La forma estándar para una ecuación diferencial de primer orden es

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

Dentro de las ecuaciones diferenciales, suelen tener condiciones iniciales, a este tipo de ecuaciones se le llama **problema de valor inicial**. La forma usual de un problema de valor inicial es

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Nos podemos preguntar si existe solución de ecuaciones diferenciales. Para eso existe un teorema de la existencia.

**Teorema 2.1.1** *Supongamos que  $f(t, y)$  es una función continua en un rectángulo de la forma  $\{(t, y) \mid a < t < b, c < y < d\}$  en el plano  $t$ - $y$ . Si  $(t_0, y_0)$  es un punto en este rectángulo, entonces existe un  $\epsilon > 0$  y una función  $y(t)$  definida para  $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$  que resuelve el problema de valor inicial.*

Ahora es natural preguntarse si la solución que se obtiene para el problema de valor inicial es única o existen más de una solución, pues de haber más de una solución, esto indicaría que hay predicciones completamente distintas para el mismo modelo. Para esto existe un teorema que garantiza que las soluciones de los problemas de valor inicial son únicas.

**Teorema 2.1.2** *Supongamos que  $f(t, y)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  son continuas en un rectángulo de la forma  $\{(t, y) \mid a < t < b, c < y < d\}$  en el plano  $t$ - $y$ . Si  $(t_0, y_0)$  es un punto en este rectángulo, entonces existe un  $\epsilon > 0$  y si  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  son dos funciones que resuelven el problema de valor inicial para toda  $t$  en el intervalo  $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$ , entonces  $y_1(t) = y_2(t)$  para  $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$ . Es decir, la solución al problema de valor inicial es única.*

De igual manera, hay una restricción más débil para poder determinar si las soluciones de una ecuación diferencial con problema de valor inicial son únicas y es con el siguiente teorema, publicado en [36]:

**Teorema 2.1.3** *Supongamos que  $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$  y que  $f(x)$  satisface la condición global de Lipschitz*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

*para todo  $x, y \in \mathbf{R}^n$ . Entonces para  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ , el problema de valor inicial tiene solución única  $x(t)$  definida para toda  $t \in \mathbf{R}$ .*

En base a las ecuaciones diferenciales ordinarias y la existencia única de sus soluciones, introducimos los modelos precursores, para después dar paso al modelo que utilizaremos.

## 2.2. Modelo básico de crecimiento poblacional

Un modelo elemental del crecimiento de una población se basa en la hipótesis:

- la velocidad de crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la población.

Las cantidades implicadas son:

$t$  = tiempo,

$P$  = población,

$k$  = constante de proporcionalidad.

Expresando la hipótesis, tenemos que la tasa de crecimiento de la población  $P$  es la derivada  $\frac{dP}{dt}$ ; dado que es proporcional a la población, se expresa como el producto  $kP$  de la población  $P$  y la constante  $k$  de proporcionalidad. Por lo tanto, el modelo se expresa de la siguiente manera con condición inicial  $P(0) = P_0$

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad P(0) = P_0$$

En otras palabras, tenemos que la razón de cambio de  $P$  es proporcional a  $P$ .

La solución al problema de valor inicial es una función  $P(t)$  que satisface ambas ecuaciones. Por lo que dicha función es  $P(t) = \exp(kt)$

## 2.3. Modelo denso-dependiente

En base al modelo de la sección anterior, se hace un ajuste en el crecimiento exponencial de la población, tomando en cuenta un entorno y recursos limitados, agregando las hipótesis:

- si la población es pequeña, la razón de crecimiento de la población es proporcional a su tamaño;
- si la población es demasiado grande para ser soportada por su entorno y recursos, la población disminuirá. Es decir, la razón de crecimiento es negativa.

Para este modelo se usan las mismas cantidades que el modelo anterior:

$t$  = tiempo,

$P$  = población,

$k$  = constante de proporcionalidad.

Dado que en la hipótesis se considera recursos limitados, cuando la población es “demasiado grande”, se convierte en un segundo parámetro, denotado por  $N$ , que se llama “capacidad de soporte” del entorno, es decir, se supone que  $P(t)$  crece si  $P(t) < N$  y  $P(t)$  decrece cuando  $P(t) > N$ . Con esto podemos reescribir las hipótesis, como:

- si  $P$  es pequeña,  $\frac{dP}{dt} \approx kP$ ;
- si  $P > N$ ,  $\frac{dP}{dt} < 0$ .

Con esto tenemos el modelo con condición inicial.

$$\frac{dP}{dt} = k \left( 1 - \frac{P}{N} \right) P, \quad P(0) = P_0,$$

conocido como el **modelo logístico de la población** donde la expresión  $1 - \frac{P}{N}$  muestra que si  $P$  es pequeña, la expresión tiende a 1, pero si  $P > N$  es una expresión negativa, cumpliendo con las hipótesis.

La solución del modelo es  $P(t) = \frac{NP_0}{P_0 + (N - P_0)e^{-kt}}$ .

## 2.4. Modelo propuesto

De acuerdo con esto, el modelo que se utilizará en este trabajo está basado en el modelo logístico de crecimiento poblacional, agregando las hipótesis:

- si la población es pequeña, la razón de crecimiento de la población es proporcional a su tamaño;
- si la población es demasiado grande para ser soportada por su entorno y recursos, la población disminuirá. es decir, la razón de crecimiento es negativa;
- la población está en continuo contacto con un factor del entorno, que afecta su tasa de mortalidad, por lo que la población de abejas se verá impactada.

Para este modelo se utilizan las variables:

$t$  = tiempo,

$r$  = constante que representa la tasa de control del crecimiento poblacional,

$K$  = constante que representa la capacidad de carga,

$c(t)$  = tasa de mortalidad de abejas por contacto con pesticidas en el tiempo  $t$ .

Con lo cual, expresando las hipótesis tenemos la razón de cambio en el tamaño de la población de abejas *Apis mellifera* respecto al tiempo es  $\frac{d}{dt}A(t)$ , por lo tanto, el modelo es:

$$\frac{dA}{dt} = rA(t) \left( 1 - \frac{A(t)}{K} \right) - c(t)A(t) = f(A, t) \quad (2.1)$$

### 2.4.1. Tipos de tasas de mortalidad

Definimos a  $c(t)$  como una función que determina la mortalidad de abejas por contacto con cultivos que contienen pesticida. En este trabajo se considerará a esta función de las siguientes maneras.

$c(t)$  es una función a trozos

La primera función que se considera es que en el primer tiempo, de  $t_0$  a  $t_1$ , la población de abejas se encuentra en un ambiente no contaminado; después, en el segundo tiempo, que es de  $t_1$  a  $t_2$ , los agricultores comienzan la aplicación continua de pesticida, por lo que la mortalidad de las abejas se mantiene de forma lineal y, por último, en el tercer tiempo, que es de  $t_2$  a  $t_3$ , las abejas vuelven a estar en un ambiente no contaminado.

En esta función se hace la suposición de que la contaminación desaparece instantáneamente después de la aplicación, se sabe que esto no sucede en la realidad pero es una aproximación al caso en que existiera un mecanismo donde se pudiera aplicar pesticida de forma lineal y continua.

La función se define de la siguiente manera:

$$c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_0 \leq t < t_1 \\ \mu(t - t_1) & \text{si } t_1 \leq t < t_2 \\ 0 & \text{si } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases} \quad (2.2)$$

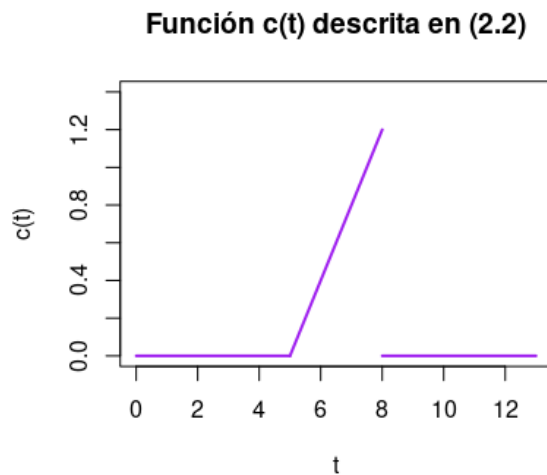


Figura 2.1: Representación de la función  $c(t)$  lineal con valores de  $t_1 = 5$ ,  $t_2 = 8$  y  $\mu = 0.4$   $1/t^2$ , fueron elegidos de manera arbitraria

La segunda función a trozos que se considera se asemeja más a la realidad, es cuando en el primer tiempo no hay presencia de pesticida y luego, en el segundo tiempo, los agricultores fumigan de manera constante, por lo que la mortalidad es de manera constante y, por último, en el tercer tiempo, deja de haber fumigación.

$$c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_0 \leq t < t_1 \\ m & \text{si } t_1 \leq t < t_2 \\ 0 & \text{si } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases} \quad (2.3)$$

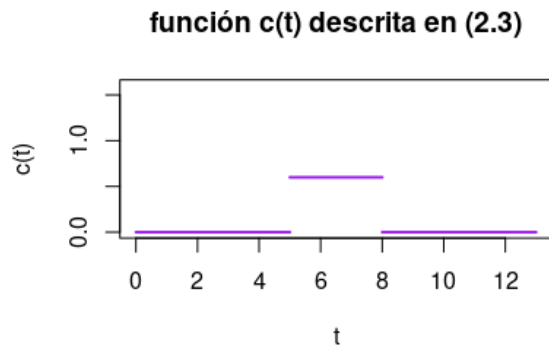


Figura 2.2: Representación de la función  $c(t)$  constante con valores  $t_1 = 6$ ,  $t_2 = 8$ ,  $t_3 = 13$  y  $m = 0.6$   $1/t$ , elegidos de manera arbitraria.

En la primera función (2.2),  $\mu > 0$  representa la tasa de cambio de la mortalidad por pesticidas y tiene unidades de  $1/t^2$ , mientras que en la segunda función (2.3),  $m > 0$  representa la tasa constante de mortalidad por pesticidas y tiene unidades de  $1/t$ . Y para ambas funciones  $r$  tiene unidades de  $1/t$ . Esto con la finalidad de que las unidades de tiempo sean consistentes, tengan validez en el modelo y sea relevante su significado biológico.

### 2.4.2. Soluciones de Filippov

El modelo propuesto (2.1) combina el modelo logístico clásico con una tasa de mortalidad discontinua; por lo que, se tiene una ecuación diferencial con lado derecho discontinuo: De este modo, es adecuado utilizar soluciones de Filippov.

Para ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{x} = f(t, x)$$

donde  $f$  es discontinua, Filippov propuso reemplazar la ecuación por una **inclusión diferencial**:

$$\dot{x} \in F(t, x)$$

Donde  $F(t, x)$  es un conjunto que contiene todos los puntos  $(t, x)$  donde la función  $f$  es continua.

En las superficies de discontinuidad,  $F(t, x)$  es el casco convexo de los valores límite de  $f$  por ambos lados de la discontinuidad [37].

Para garantizar la existencia de soluciones, se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 2.4.1 ([38])** Sea  $t$  en casi  $[t_0, t_0 + a]$  y para cada  $|x - x_0| \leq b$ ,

- 1) el conjunto  $F(t, x)$  es no vacío, cerrado y convexo;
- 2) la función  $F$  es semicontinua superiormente en  $x$ ;
- 3) existe una función vectorial de valor único  $f(t, x) \in F(t, x)$  que es medible en  $t$  para todo  $x$ ;
- 4) existe una función integrable  $q(t)$  tal que  $|f(t, x)| \leq q(t)$ .

Entonces, en el intervalo  $t_0 \leq t \leq t_0 + d$ , existe una solución al problema

$$\dot{x} \in F(t, x) \quad x(t_0) = x_0.$$

Para el modelo propuesto, la inclusión diferencial es:

$$\dot{A} \in F(t, A) = \begin{cases} \{rA(1 - \frac{A}{K})\} & t \in [t_0, t_1) \\ \{rA(1 - \frac{A}{K}) - c(t)A\} & t \in [t_1, t_2) \\ \{rA(1 - \frac{A}{K})\} & t \in [t_2, t_3) \end{cases}$$

A continuación hacemos la verificación detallada de las hipótesis del Teorema 2.4.1:

1. **Conjunto no vacío, cerrado y convexo:** Para cada  $(t, A)$  el conjunto  $F(t, A)$  contiene exactamente un punto, al ser unitario es cerrado y también convexo.
2. **Semicontinuidad superior:** Para cada  $t$  fijo  $F(t, A) = \{f(t, A)\}$ , donde  $f(t, A) = rA(1 - \frac{A}{K}) - c(t)A$ , esta función es continua en  $A$ , por lo que  $F(t, A)$  es semicontinuo superiormente.
3. **Función medible:** Tomando  $f(t, A) = rA(1 - \frac{A}{K}) - c(t)A$  es medible, porque  $c(t)$  es una función seccionalmente continua, por lo que es Lebesgue medible y se preserva la medibilidad
4. **Acotamiento:** Por hipótesis  $|A - A_0| \leq b$ , tenemos que  $A \in [P_0 - b, P_0 + b]$ , entonces

$$\begin{aligned} |f(t, A)| &= |r - A(1 - \frac{A}{K}) - c(t)A| \\ &\leq |rA(1 - \frac{A}{K})| + |c(t)A| \\ &\leq |rA| + |\frac{r}{K}A^2| + |c(t)||A| \\ &\leq r|A| + \frac{r}{K}|A^2| + |c(t)||A| \\ &\leq r(A_0 + b) + \frac{r}{K}(A_0 + b)^2 + m(A_0 + b) \\ &\leq r(A_0 + b) + \frac{r}{K}(A_0 + b)^2 + m(t_3 - t_0)(A_0 + b) \end{aligned}$$

Tomando a  $q(t) = r(A_0 + b) + \frac{r}{K}(A_0 + b)^2 + m(t_3 - t_0)(A_0 + b)$  que es una función constante y por lo tanto integrable, se cumple que  $|f(t, A)| \leq q(t)$ .

De acuerdo a lo demostrado anteriormente, el modelo tiene existencia de soluciones, pero no son únicas.

Sabiendo que hay existencia de soluciones, se puede analizar la dinámica poblacional de las abejas bajo el efecto de los pesticidas.

### 2.4.3. Resolución numérica del modelo

El modelo propuesto en este trabajo se define mediante funciones por tramos, lo cual genera una ecuación diferencial con lado derecho discontinuo en los puntos donde cambia la dinámica. De acuerdo con Stewart en su artículo publicado en 1990 [39], este tipo de ecuaciones deben resolverse dividiendo el dominio en regiones donde la ecuación es suave y resolviendo cada región por separado, tratando los puntos de cambio como “puntos de conmutación”. Esta formulación garantiza que las soluciones numéricas son correctas y que la gráfica obtenida al unir las soluciones tramo por tramo conserva el orden de exactitud del método utilizado dentro de cada intervalo. Por lo tanto, la estrategia empleada para graficar las soluciones del modelo es matemáticamente consistente con la teoría de ecuaciones diferenciales con discontinuidades.

### 3.1. Análisis del modelo propuesto

En este capítulo se analiza el comportamiento del modelo propuesto bajo las diferentes definiciones de la función de mortalidad  $c(t)$ , asociada a la exposición de las abejas a pesticidas. Esto a través de un análisis de estabilidad.

En la práctica, las soluciones se construyen resolviendo la ecuación en cada intervalo de continuidad y empalmado continuamente en los puntos de discontinuidad.

De forma general, para el modelo propuesto (2.1) determinamos sus puntos de equilibrio, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(A^*, t) &= rA^* \left(1 - \frac{A^*}{K}\right) - c(t)A^* \\ &= rA^* - \frac{rA^{*2}}{K} - c(t)A^* \\ &= A^* \left(r - c(t) - \frac{rA^*}{K}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Con esto, los puntos de equilibrio son:  $A_1^* = 0$  y  $A_2^* = K(1 - \frac{c(t)}{r})$

La estabilidad de estos puntos se determina a partir de la derivada de  $f(A, t)$  respecto a  $A$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = r\left(1 - \frac{A}{K}\right) - \frac{rA}{K} - c \tag{3.1}$$

en los casos donde  $c(t)$  hace que la ecuación diferencial sea autónoma.

#### 3.1.1. Función de mortalidad lineal

Realizando el análisis de la función (2.1) considerando a  $c(t)$  como en (2.2), donde hay mortalidad lineal, tenemos lo siguiente:

En el primer tiempo, la ecuación se comporta como un modelo logístico, pues  $c(t) = 0$ , por lo que los puntos de equilibrio son  $A_1^* = 0$  y  $A_2^* = K$ . Evaluando estos puntos en (3.1), obtenemos lo siguiente:

- Si  $r > 0$  entonces  $A_1^*$  es un equilibrio inestable y el punto  $A_2^*$  es localmente asintóticamente estable

Durante el segundo tiempo, que es el intervalo  $(t_1, t_2)$ , la ecuación diferencial esta dada por

$$\frac{dA}{dt} = rA(t) \left( 1 - \frac{A(t)}{K} \right) - \mu(t - t_1)A(t) \quad (3.2)$$

la cual es no autónoma debido al término  $c(t) = \mu(t - t_1)$ . En consecuencia, la noción clásica de equilibrio no es aplicable en este intervalo, pues los equilibrios requieren que la solución sea constante en el tiempo.

En lugar de ello, consideremos la función

$$A_2^*(t) = K \left( 1 - \frac{\mu(t - t_1)}{r} \right)$$

la cual no representa un punto de equilibrio, sino una solución de referencia de la ecuación (3.2), ver [40]. El objetivo es estudiar la estabilidad de esta solución en el sentido de Lyapunov.

Para estudiar esta propiedad se emplea el método directo de Lyapunov para sistemas no autónomos, por lo que enunciamos el siguiente teorema:

**Teorema 3.1.1** ([41]) *Si en una bola  $B_{R_0}$  alrededor de la solución  $\bar{x}(t)$ , existe una función escalar  $V(x, t)$  con derivadas parciales continuas, tal que*

1.  $V$  es positiva definida,
2.  $\dot{V}$  es negativa semidefinida,

entonces la solución  $\bar{x}(t)$  es estable en el sentido de Lyapunov.

Consideremos a la función  $V(A, t) = \frac{1}{2}[A - A_2^*]^2$ . Se verifica que  $V(A_2^*, t) = 0$  y dado que  $A \neq A_2^*$  se tiene que  $V(A, t) \geq 0$ .

Ahora calculando

$$\dot{V}(A, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial A} \frac{dA}{dt} = -[A - A_2^*] \frac{dA_2^*}{dt} + [A - A_2^*] \frac{dA}{dt},$$

evaluando  $A_2^*$ , se tiene

$$\dot{V}(A, t) = \left[ A - K \left( 1 - \frac{\mu(t - t_1)}{r} \right) \right] \left[ \frac{dA}{dt} + \frac{K\mu}{r} \right]. \quad (3.3)$$

Del análisis de (3.3) se obtiene:

- Si  $\mu(t - t_1) < r$  se verifica que  $\dot{V}(A, t) \leq 0$ , cumpliendo la hipótesis del teorema, por lo que  $A_2^*$  es estable en el sentido de Lyapunov.
- Si  $\mu(t - t_1) > r$  no se cumple la hipótesis de que  $\dot{V}(A, t)$  sea negativa semidefinida, por lo que  $A_2^*$  es inestable.

En el tercer tiempo, volvemos a tener  $c(t) = 0$  como en el primer tiempo, por lo que los puntos de equilibrio y su estabilidad es de la misma manera.

**Observación 3.1.1** *Para las simulaciones de las soluciones y diagramas de fases, el valor de  $r$  que se considerará es de 0.161, el cual fue obtenido de [42]. El valor de  $m$  que representa la probabilidad de muerte por el pesticida, fue obtenido del artículo [7], donde se menciona cuál es la toxicidad condicional crónica de las larvas de las abejas a ciertos pesticidas. Para los pesticidas Clorotalonil, Fluvalinato y Coumafos se consideró una exposición de 6 días durante la etapa larvaria y para el pesticida Clorpirifos y solventes se consideró una exposición de 4 días durante la etapa larvaria. Cabe mencionar que estos valores de  $m$ , están dados en condiciones de laboratorio, es decir, valores experimentales.*

*Por otro lado, se consideraron los siguientes valores para los intervalos de tiempo: Para la simulación respecto al clorpirifos y solventes son  $t_1 = 15$ ,  $t_2 = 19$  y  $t_3 = 33$ , y para las simulaciones respecto al clorotalonil, fluvalinato y coumafos son  $t_1 = 15$ ,  $t_2 = 21$  y  $t_3 = 35$ . Esto con la justificación de que es usual que se apliquen pesticidas en intervalos de 15 días [43].*

*Dado que  $m$  y  $\mu$  tienen distintas unidades de tiempo, para poder hacerlas comparables se necesita que el impacto del pesticida sea similar, por lo que el valor de  $\mu$  se obtiene a partir del valor de  $m$ , de la siguiente manera  $\mu = \frac{2m}{t_2-t_1}$ ; y se supone que los días de exposición son los mismos.*

Pesticidad	$m$	$\mu$
Clorotalonil	0.58 1/t	0.193 1/t <sup>2</sup>
Fluvalinato	0.69 1/t	0.230 1/t <sup>2</sup>
Coumafos	0.54 1/t	0.180 1/t <sup>2</sup>
Clorpirifos	0.33 1/t	0.165 1/t <sup>2</sup>
solventes	0.07 1/t	0.035 1/t <sup>2</sup>

Cuadro 3.1: Mortalidad de abejas a cada pesticida

*De igual manera, el valor de  $K$  que se considerará es de 40, que se refiere a que hay 40 mil abejas obreras utilizadas en la polinización de cultivos, el cual es el promedio de abejas que se menciona en [44].*

Las siguientes gráficas representan el gráfico de solución con campo de direcciones en cada intervalo de tiempo del modelo con función de mortalidad lineal a cada uno de los pesticidas.

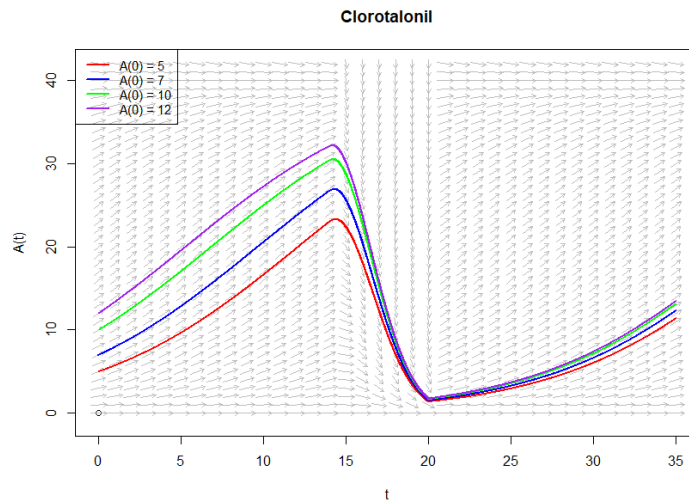


Figura 3.1: Gráfico de solución con campo de direcciones en cada intervalo de tiempo de la ecuación 2.2, tomando como parámetros  $r = 0.161$ ,  $K = 40$  y  $\mu = 0.193 \text{ 1/t}^2$  correspondiente a Clorotalonil.

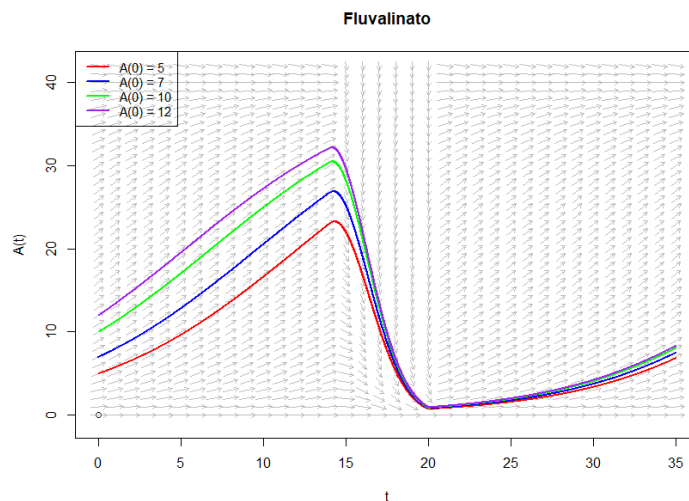


Figura 3.2: Gráfico de solución con campo de direcciones en cada intervalo de tiempo de la ecuación 2.2, tomando como parámetros  $r = 0.161$ ,  $K = 40$  y  $\mu = 0.23 \text{ 1/t}^2$  correspondiente a Fluvalinato.

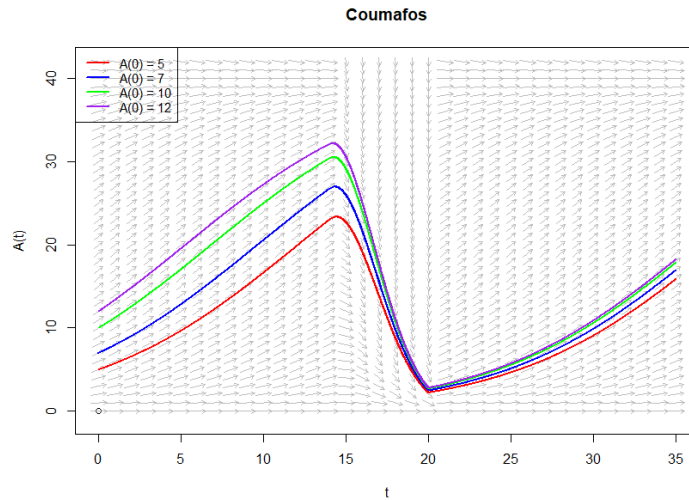


Figura 3.3: Gráfico de solución con campo de direcciones en cada intervalo de tiempo de la ecuación 2.2, tomando como parámetros  $r = 0.161$  ,  $K = 40$  y  $\mu = 0.18 \text{ 1/t}^2$  correspondiente a Coumafes.

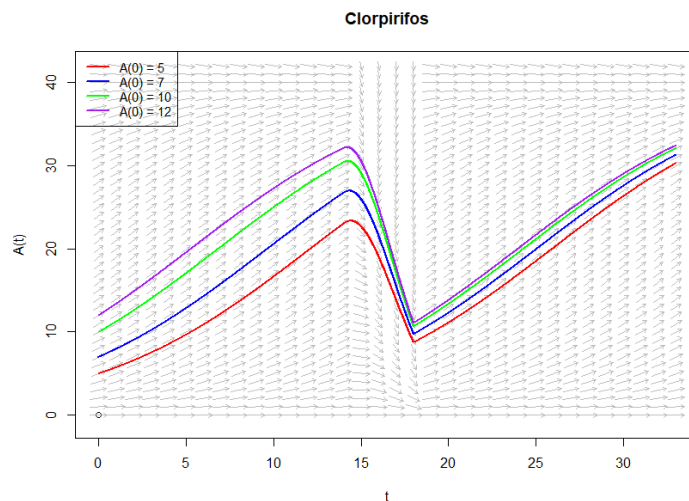


Figura 3.4: Gráfico de solución con campo de direcciones en cada intervalo de tiempo de la ecuación 2.2, tomando como parámetros  $r = 0.161$  ,  $K = 40$  y  $\mu = 0.165 \text{ 1/t}^2$  correspondiente a Clorpirifos.

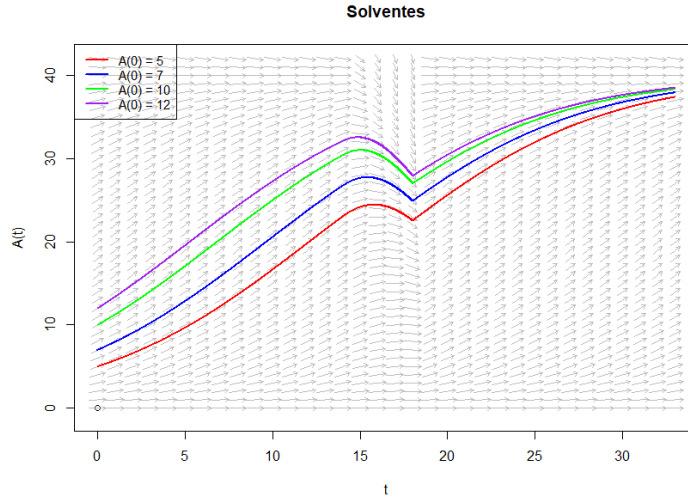


Figura 3.5: Gráfico de solución con campo de direcciones en cada intervalo de tiempo de la ecuación 2.2, tomando como parámetros  $r = 0.161$ ,  $K = 40$  y  $\mu = 0.035 1/t^2$  correspondiente a los Solventes.

### 3.1.2. Función de mortalidad constante

Para esta función tenemos equilibrios constantes que no dependen del tiempo, por lo que utilizamos la siguiente definición y teorema para el análisis de estabilidad.

**Definición 3.1.1** ([45]) *Las soluciones constantes de la ecuación diferencial  $y' = f(y)$  son precisamente los ceros de la función  $f(y)$ . Es decir, para un número dado  $y^*$ ,  $y = y^*$  es una solución constante de  $\frac{dy}{dt} = f(y)$  si y solo si  $f(y^*) = 0$ . Esta solución es llamado equilibrio o punto fijo de la ecuación diferencial.*

**Teorema 3.1.2** ([45]) *Un equilibrio  $y^*$  de  $y' = f(y)$  con  $f'(y) < 0$  es (local) asintóticamente estable; un equilibrio  $y^*$  con  $f'(y^*) > 0$  es inestable*

Realizando el análisis de la función (2.1) considerando a  $c(t)$  como en (2.3) donde hay mortalidad constante, tenemos lo siguiente:

El primer y tercer tiempo se tiene que  $c(t) = 0$  y el cálculo es igual al que se realizó anteriormente con la función (2.2), por lo que se hará el análisis cuando se tienen  $c(t) = m$ , que corresponde al segundo tiempo de la función; los puntos de equilibrio para este caso son  $A_1^* = 0$  y  $A_2^* = K(1 - \frac{m}{r})$ . Notemos que  $A_2^*$  solo existe biológicamente cuando es positivo.

Por lo que evaluando en (3.1) se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial A}(A_1^*) = r - m \text{ y } \frac{\partial}{\partial A}(A_2^*) = m - r, \text{ entonces}$$

- Si  $r > m$ , el punto  $A_1^*$  es inestable y el punto  $A_2^*$  es localmente asintóticamente estable.
- Si  $r < m$ , el punto  $A_1^*$  es globalmente estable

Las siguientes gráficas representan el gráfico de solución con campo de direcciones en cada intervalo de tiempo del modelo con función de mortalidad constante a cada uno de los pesticidas.

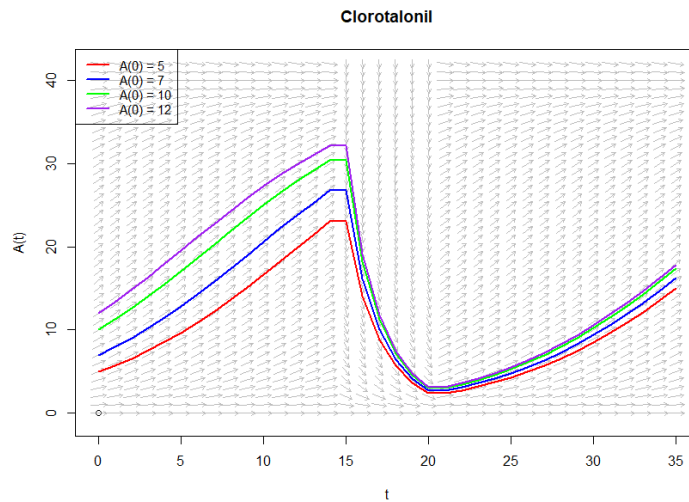


Figura 3.6: Gráfico de solución con campo de direcciones en cada intervalo de tiempo, tomando como parámetros  $r = 0.161$  ,  $K = 40$  y  $m = 0.58$   $1/t$  correspondiente a Clorotalonil

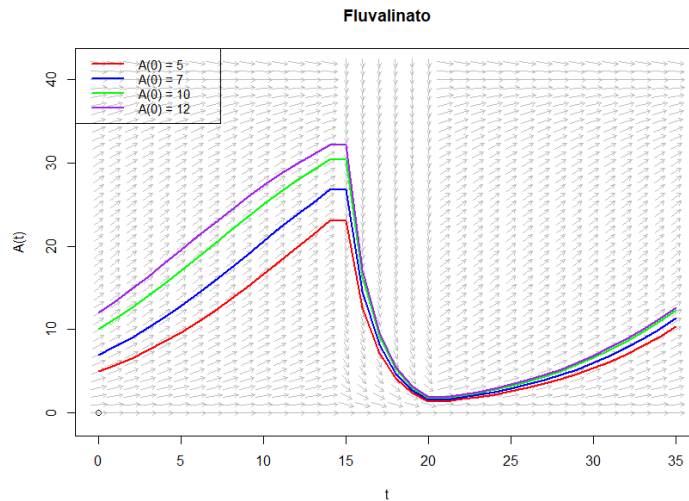


Figura 3.7: Gráfico de solución con campo de direcciones en cada intervalo de tiempo, tomando como parámetros  $r = 0.161$  ,  $K = 40$  y  $m = 0.69$   $1/t$  correspondiente a Fluvalinato

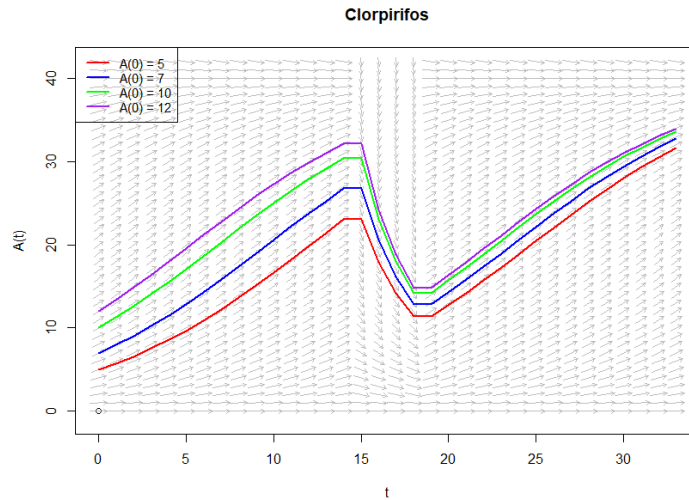


Figura 3.9: Gráfico de solución con campo de direcciones en cada intervalo de tiempo, tomando como parámetros  $r = 0.161$ ,  $K = 40$  y  $m = 0.33$   $1/t$  correspondiente a Clorpirifos

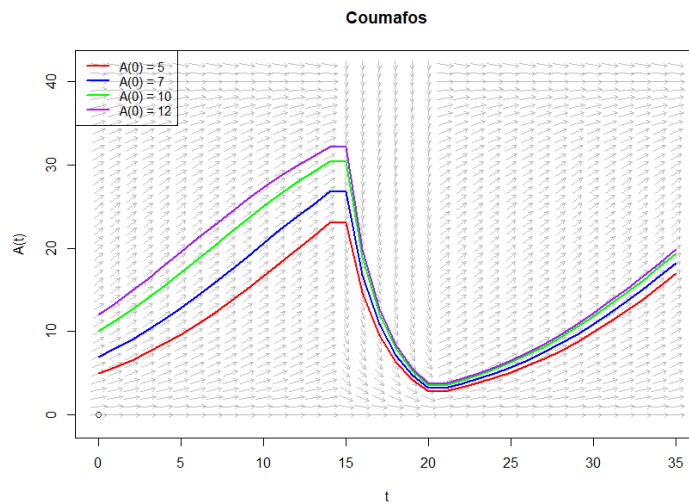


Figura 3.8: Gráfico de solución con campo de direcciones en cada intervalo de tiempo, tomando como parámetros  $r = 0.161$ ,  $K = 40$  y  $m = 0.54$   $1/t$  correspondiente a Coumafos

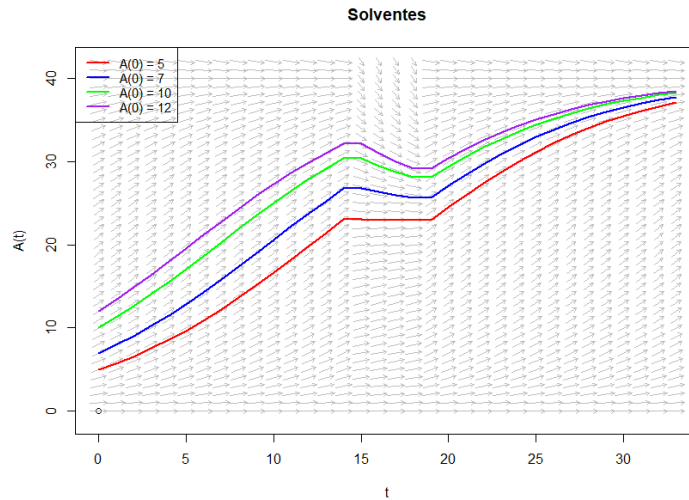


Figura 3.10: Gráfico de solución con campo de direcciones en cada intervalo de tiempo, tomando como parámetros  $r = 0.161$ ,  $K = 40$  y  $m = 0.07$   $1/t$  correspondiente a los Solventes

El análisis mostró que el modelo es sensible al tipo de función utilizada para representar la tasa de mortalidad. La función constante y la función lineal producen resultados cualitativamente similares, pero con la función constante se observa que la población se recupera en menos tiempo en comparación con la función lineal, debido a que hay mortalidad con retraso, ya que la contaminación es gradual y va en aumento. Además, con las simulaciones se puede observar como es el impacto de cada pesticida en las abejas.

## Discusión y Conclusiones

En este trabajo se propuso un modelo matemático basado en el crecimiento logístico, agregando un término adicional, el cual es una función que representa la tasa de mortalidad provocada por pesticidas. Se analizaron dos tipos de funciones a trozos para modelar la tasa de mortalidad: una lineal y otra constante durante el período de exposición. Estas funciones fueron evaluadas utilizando parámetros de toxicidad asociados a diferentes pesticidas documentados en la literatura. Al agregar este término adicional, resultó en obtener una ecuación diferencial con lado derecho discontinuo, por lo que se usó la teoría de soluciones de Filippov para probar la existencia de soluciones las cuales no son únicas.

En primer lugar, cuando consideramos la ecuación diferencial (2.1) con la función  $c(t)$  descrita en (2.2), en las simulaciones de solución que son la figura (3.1) hasta la figura (3.5), se observa que en el primer tiempo la población crece, pero para el segundo tiempo la población empieza a decaer, debido a que hay una mortalidad lineal, donde el pesticida no mata de inmediato, pues su toxicidad aumenta conforme pasa el tiempo de exposición, el cual refleja que hay una acumulación progresiva o efecto retardado, donde el daño se puede ir acumulando en los tejidos o en larvas. Finalmente, para el 3er tiempo el pesticida deja de actuar y la colonia vuelve a crecer, se acerca a la capacidad de carga pero le toma más tiempo.

Si se considera el modelo con esta función descrita  $c(t)$ , puede ser útil cuando los datos muestran un retardo claro entre la exposición y el máximo impacto, de igual manera, cuando el pesticida es de acción lenta o cuando el contacto no es instantáneo.

En segundo lugar, cuando se considera la ecuación diferencial (2.1) con la función  $c(t)$  descrita en (2.3), observando las simulaciones que corresponden a la figura (3.6) hasta la figura (3.10), su comportamiento se asemeja más a la realidad cuantitativamente, debido a que, después de un decrecimiento poblacional por una tasa de mortalidad constante que no se acerca a cero, tras cesar la exposición al pesticida, la población se empieza a recuperar gradualmente y puede llegar a acercarse a la capacidad de carga.

Esto sugiere que una tasa constante durante períodos definidos de fumigación representa de forma más adecuada los efectos subletales que modelamos en este problema, además de permitir que la población se acerque a la capacidad de carga en menos tiempo.

En cuanto al impacto diferencial de los pesticidas evaluados, se observaron importantes variaciones:

- Clorotalonil y Fluvalinato son los que tienen mayor impacto, causando curvas decrecientes más pronunciadas, donde la población decae rápidamente, lo que genera que haya un alto riesgo de colapso poblacional. Esto se debe a que cuanto mayor sea el valor  $m$  o  $\mu$ , mayor es la velocidad de colapso de la colmena.

- Coumafós, tiene un efecto grave, pero ligeramente menor que los dos anteriores, se observa que hay una caída notoria de población.
- Clorpirifos y los solventes presentan un efecto menos agresivo, aunque afectan a la población, permiten su recuperación. Esto se debe a que el valor  $m$  y  $\mu$  son más pequeños que la tasa de control de crecimiento poblacional, por lo que,  $A(t)$  tiende a un punto de equilibrio positivo, aunque más bajo que la capacidad de carga.

Haciendo una comparación entre las funciones  $c(t)$  propuestas, la función lineal produce efectos acumulativos más agresivos si el tiempo de exposición es largo y, por otro lado, la función constante muestra un efecto abrupto pero por un corto tiempo, permitiendo una posible recuperación.

Con esto, podemos realizar la siguiente observación: La importancia que tiene la duración de exposición a los pesticidas, un valor moderado de  $m$  o  $\mu$  con larga duración puede ser tan perjudicial como un valor alto con corta duración.

El trastorno de colapso de colonias (CCD) representa un problema ecológico y agrícola a nivel mundial, el cual aún requiere investigación para entender mejor sus causas y cómo prevenirlo. En este trabajo, se enfocó en la contaminación ambiental por pesticidas como un factor que provoca el CCD en las abejas *Apis mellifera*. El uso de pesticidas en la agricultura industrial es un tema complejo, ya que contribuye a la economía del sector en lo que respecta al control de plagas. Tiene como ventajas el aumento de productividad y la reducción en la pérdida de cosechas; sin embargo, conlleva consecuencias significativas para el ambiente, riesgos para la salud humana e impactos en los polinizadores. Por lo que considero, es necesario limitar su uso o buscar alternativas.

El modelo con mortalidad dependiente del tiempo permite evaluar los efectos de diferentes pesticidas sobre la población de abejas, donde se considera una tasa de mortalidad constante en el tiempo, reproduciendo mejor la dinámica de recuperación poblacional esperada en comparación con una tasa de mortalidad lineal. Lo que permite comparar escenarios y evaluar riesgos, lo que puede ser útil en la toma de decisiones agrícolas.

Una de las limitaciones que presenta el modelo (2.1), es que las colmenas reales si presentan un efecto Allee, donde, si la población cae por debajo de un umbral, esto podría suceder por no tener suficientes abejas obreras y forrajeras en la colmena, provocando que la población no se pueda recuperar. Por lo tanto, las simulaciones mostradas respecto a los pesticidas fluvalinato, clorotalonil y coumafós indican que la población de abejas cae a niveles muy bajos y luego se recupera, lo cual no refleja la realidad probable.

Además, no se incorpora el factor de estacionalidad, pese a que puede ser crítico para el comportamiento y supervivencia de las abejas. Pero se puede adaptar para considerar la estacionalidad o los ciclos de vida. Esto se podría realizar con la modificación de los tiempos de duración en la función  $c(t)$  y en la capacidad de carga  $K$ , proponiéndola como una función a trozos que depende del tiempo. Y también es importante tener en cuenta que la aplicación de pesticidas se realiza de manera periódica, por lo que una posible ampliación de este estudio debería considerar un modelo en el que la función  $c(t)$  sea una función periódica.

Por último, en el capítulo 2, haciendo referencia a la función de mortalidad lineal (2.2); se menciona que esta la suposición en que la contaminación desaparece instantáneamente después de la aplicación de pesticida. Como futuro trabajo, se puede considerar una

función donde, después de la aplicación, haya un decaimiento lineal con pendiente mayor que la de crecimiento de mortalidad, es decir, mayor al valor  $\mu$ , o en el mejor de los casos, considerar que hay un decaimiento de forma exponencial.

Con estas mejoras, el modelo podría convertirse en una herramienta para evaluar el impacto de prácticas agrícolas sobre la salud de las abejas y contribuir a la conservación de estos importantes polinizadores.

## Glosario

- Acariosis** Esta enfermedad es una parasitosis interna causada por el ácaro *Acarapis woodi*, un parásito microscópico que vive en las tráqueas ubicadas en el tórax de las abejas. 35
- Amitraz** Acaricida e insecticida amidina para uso en frutales de pepita, plantas ornamentales y algunas hortalizas. También tiene aplicaciones veterinarias [46]. 4, 35
- Carbamato** Son una clase de insecticidas estructural y mecánicamente similares a los insecticidas organofosforados (OP)[47]. 1, 35
- Clorotalonil** Un herbicida obsoleto, de aplicación al suelo y posterior a la emergencia. Utilizado en cultivos de alfalfa [46]. III, IV, 4, 26, 27, 30, 33, 35
- Clorpirifos** Insecticida y acaricida organofosforado de amplio espectro utilizado para el control de plagas del suelo y del follaje. Utilizado en plagas como la cochinilla, gusano de la mazorca, cortadores, de la raíz, cucarachas, etc., en los cultivos de cereales como la cebada y el trigo, frutas o verduras [46]. III, IV, 4, 26, 28, 31, 34, 35
- Coumafos** Se define como un compuesto organofosforado sintético utilizado como nematocida e insecticida, conocido por sus residuos tóxicos que pueden contaminar el medio ambiente y los alimentos [46]. III, IV, 4, 26, 28, 31, 34, 35
- Cría de cal** Es una enfermedad fúngica de la abeja melífera causada por el hongo *Ascosphaera apis*. El hongo que causa la ascosferosis afecta principalmente a larvas, pero también a las pupas de las abejas [48]. 9, 35
- Cría de piedra** También conocida como cría petrá, Aspergilosis es una enfermedad infectocontagiosa de origen fangal que afecta tanto a las larvas como a las abejas adultas [49]. 9, 35
- Fluvalinato** Un insecticida utilizado para controlar una amplia gama de plagas, como polillas, pulgones, escarabajos, cigarras. Utilizando en cultivos de algodón, cereales o arboles frutales [46]. III, IV, 4, 26, 27, 30, 33, 35
- Glifosato** Un herbicida de amplio espectro utilizado en una amplia gama de cultivos, aplicaciones industriales y situaciones comerciales para el control de amplio espectro de malezas y gramíneas [46]. 4, 35
- Imidacloprid** Insecticida a base de clonicotina utilizado para controlar insectos chupadores y del suelo. También se usa como tratamiento contra las pulgas en mascotas [46]. 3, 35

**Loque americana** La loque americana (LA) (*Paenibacillus larvae*) es una enfermedad bacteriana que afecta a las abejas (*Apis mellifera*), en particular a la etapa larvaria, y puede causar graves efectos sobre la salud de las colmenas. Las esporas pueden mantenerse en forma latente en la miel sin desarrollar síntomas, por lo que es posible realizar su aislamiento en colmenas aparentemente sana [50]. 9, 35

**Loque europea** La Loque Europea es una enfermedad de las larvas de las abejas causada por la bacteria Gram positiva *Melissococcus plutonius*. Afecta principalmente la cría no perculada, ocasionando su muerte [51]. 9, 35

**Neonicotinoide** Son una familia de insecticidas que se caracterizan por su alta efectividad en el uso contra plagas en diversos cultivos, y su baja toxicidad en mamíferos [52]. IV, 3, 35

**Nosemosis** Enfermedad causada por el microsporidio *Nosema spp* que parasita el intestino medio de abejas melíferas adultas, es mortal en su forma aguda [53]. 9, 35

**Organoclorado** Son plaguicidas químicos sintéticos altamente tóxicos y persistentes que, si bien se utilizaban para el control de mosquitos, ahora están prohibidos en muchos países debido a sus efectos nocivos para la salud y el medio ambiente [46]. 1, 4, 35

**Organofosfatos** Son compuestos químicos que se forman mediante el proceso de esterificación entre el ácido fosfórico y el alcohol. Estos compuestos son componentes principales de herbicidas, plaguicidas e insecticidas, y tienen una amplia aplicación en la fabricación de plásticos y disolventes [54]. 1, 3, 35

**Tiametoxám** Insecticida sistémico de amplio espectro utilizado para controlar una gran variedad de plagas comunes. También actúa como bioestimulante para aumentar la masa radicular y la fortaleza general de la planta. Se utiliza en cultivos de hortalizas, césped, plantas ornamentales contra plagas de pulgones, moscas blancas, hormigas rojas, etc [46]. 3, 35

**Varroasis** Es una enfermedad causada por el ácaro externo *Varroa destructor* que afecta a las abejas obreras, reinas y zánganos, el origen de esta enfermedad está en un parásito de su hospedero natural la abeja asiática *Apis ceranae* y su distribución se limitaba al sureste de Asia. [55]. 9, 35

## Bibliografía

- [1] Hudson VV Tome, Daniel R Schmehl, Ashlyn E Wedde, Raquel SM Godoy, Samira V Ravaiano, Raul NC Guedes, Gustavo F Martins, and James D Ellis. Frequently Encountered Pesticides can Cause Multiple Disorders in Developing Worker Honey Bees. *Environmental Pollution*, 256:113420, 2020.
- [2] Mickaël Henry, Nicolas Cerrutti, Pierrick Aupinel, Axel Decourtye, Mélanie Gayraud, Jean-François Odoux, Aurélien Pissard, Charlotte Rüger, and Vincent Bretagnolle. Reconciling Laboratory and Field Assessments of Neonicotinoid Toxicity to Honeybees. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, 282(1819):20152110, 2015.
- [3] David S Khoury, Mary R Myerscough, and Andrew B Barron. A Quantitative Model of Honey Bee Colony Population Dynamics. *PloS One*, 6(4):e18491, 2011.
- [4] Christopher M Kribs-Zaleta and Christopher Mitchell. Modeling Colony Collapse Disorder in Honeybees as a Contagion. *Mathematical Biosciences & Engineering*, 11(6):1275–1294, 2014.
- [5] Pierre Magal, Glenn F Webb, and Yixiang Wu. An Environmental Model of Honey Bee Colony Collapse due to Pesticide Contamination. *Bulletin of Mathematical Biology*, 81:4908–4931, 2019.
- [6] Pierre Magal, Glenn F Webb, and Yixiang Wu. A Spatial Model of Honey Bee Colony Collapse due to Pesticide Contamination of Foraging Bees. *Journal of Mathematical Biology*, 80:2363–2393, 2020.
- [7] Wanyi Zhu, Daniel R Schmehl, Christopher A Mullin, and James L Frazier. Four Common Pesticides, their Mixtures and a Formulation Solvent in the Hive Environment have High Oral Toxicity to Honey Bee Larvae. *PloS One*, 9(1):e77547, 2014.
- [8] Giulia Papa, Roberto Maier, Alessandra Durazzo, Massimo Lucarini, Joannis K. Karabagias, Manuela Plutino, Elisa Bianchetto, Rita Aromolo, Giuseppe Pignatti, Andrea Ambrogio, Marcelo Pellecchia, and Ilaria Negri. The honey bee *apis mellifera*: An Insect at the Interface between Human and Ecosystem Health. *Biology*, 11(2):233, 2022.
- [9] Jun Chen, Gloria DeGrandi-Hoffman, Vardayani Ratti, and Yun Kang. Review on Mathematical Modeling of Honeybee Population Dynamics. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 18(6), 2021.
- [10] Shaden AM Khalifa, Esraa H Elshafiey, Aya A Shetaia, Aida A Abd El-Wahed, Ahmed F Algethami, Syed G Musharraf, Mohamed F AlAjmi, Chao Zhao, Saad HD

- Masry, Mohamed M Abdel-Daim, et al. Overview of Bee Pollination and its Economic Value for Crop Production. *Insects*, 12(8):688, 2021.
- [11] Marcelo A Aizen, Lucas A Garibaldi, Saul A Cunningham, and Alexandra M Klein. How much does Agriculture Depend on Pollinators? Lessons from Long-term Trends in Crop Production. *Annals of Botany*, 103(9):1579–1588, 2009.
- [12] Lorena Ashworth, Mauricio Quesada, Alejandro Casas, Ramiro Aguilar, and Ken Oyama. Pollinator-dependent Food Production in Mexico. *Biological Conservation*, 142(5):1050–1057, 2009.
- [13] John Tsiaoussis, Michael N Antoniou, Ioannis Koliarakis, Robin Mesnage, Constantine I Vardavas, Boris N Izotov, Anna Psaroulaki, and Aristidis Tsatsakis. Effects of Single and Combined Toxic Exposures on the Gut Microbiome: Current Knowledge and Future Directions. *Toxicology Letters*, 312:72–97, 2019.
- [14] Renée Johnson. *Honey Bee Colony Collapse Disorder*, volume 444. Congressional Research Service Washington, 2010.
- [15] Secretaría de Agricultura y Desarrollo Rural (AGRICULTURA), Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales (MEDIO AMBIENTE), Servicio Nacional de Sanidad, Inocuidad y Calidad Agroalimentaria (SENASICA), Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad (CONABIO), and Comisión Nacional de Áreas Naturales Protegidas (CONANP). *Diagnóstico. Situación actual de los polinizadores en México*. Gobierno de México, Ciudad de México, México, 2021. Primera edición. Producido con el apoyo de la GIZ en el marco del proyecto “Integración de la Biodiversidad en la Agricultura Mexicana (IKI-IBA)”.
- [16] Alexandra-Maria Klein, Bernard E Vaissière, James H Cane, Ingolf Steffan-Dewenter, Saul A Cunningham, Claire Kremen, and Teja Tscharntke. Importance of Pollinators in Changing Landscapes for World Crops. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, 274(1608):303–313, 2007.
- [17] Mauricio Quesada, Victor Rosas, L. Letelier, H. Rodríguez, L. Ashworth, R. Aguilar, S. Martén, F. Balvino, J. Bastida, and G. Sánchez. Evaluación de los impactos del cambio climático en polinizadores y sus consecuencias potenciales en el sector agrícola en México: Informe final del proyecto. Technical report, Instituto Nacional de Ecología y Cambio Climático (INECC), México, 2012.
- [18] Kelly Kulhanek, Nathalie Steinhauer, Karen Rennich, Dewey M Caron, Ramesh R Sagili, Jeff S Pettis, James D Ellis, Mikayla E Wilson, James T Wilkes, David R Tarpy, et al. A National Survey of Managed Honey Bee 2015–2016 Annual Colony losses in the USA. *Journal of Apicultural Research*, 56(4):328–340, 2017.
- [19] Dennis VanEngelsdorp, Jay D Evans, Claude Saegerman, Chris Mullin, Eric Haubruge, Bach Kim Nguyen, Maryann Frazier, Jim Frazier, Diana Cox-Foster, Yanping Chen, et al. Colony Collapse Disorder: a Descriptive Study. *PloS One*, 4(8):e6481, 2009.
- [20] Benjamin P Oldroyd. What’s Killing American Honey Bees? *PLoS Biology*, 5(6):e168, 2007.

- [21] Dave Goulson, Elizabeth Nicholls, Cristina Botías, and Ellen L Rotheray. Bee Declines driven by Combined Stress from Parasites, Pesticides, and lack of Flowers. *Science*, 347(6229):1255957, 2015.
- [22] Brian A Rodríguez-Aguilar, Alejandro A Peregrina-Lucano, Silvia G Ceballos-Magaña, Andrea Rodríguez-García, Raul Calderon, Paulina Palma, and Roberto Muñiz-Valencia. Spatiotemporal Variability of Pesticides Concentration in Honeybees (*Apis mellifera*) and their Honey from Western Mexico. Risk Assessment for Honey Consumption. *Science of The Total Environment*, 947:174702, 2024.
- [23] Mickaël Henry, Maxime Beguin, Fabrice Requier, Oriane Rollin, Jean-François Odoux, Pierrick Aupinel, Jean Aptel, Sylvie Tchamitchian, and Axel Decourtye. A Common Pesticide Decreases Foraging Success and Survival in Honey Bees. *Science*, 336(6079):348–350, 2012.
- [24] Delgermaa Ulziibayar and Chuleui Jung. Comparison of Acute Toxicity of Different Groups of Pesticides to Honey Bee Workers (*Apis Mellifera* L.). *The Apicultural Society of Korea*, 34(4):305–313, 2019.
- [25] Jovani Ruiz-Toledo, Rémy Vandame, Ricardo Alberto Castro-Chan, Rosa Patricia Penilla-Navarro, Jaime Gómez, and Daniel Sánchez. Organochlorine Pesticides in Honey and Pollen Samples from Managed Colonies of the Honey Bee *Apis mellifera* Linnaeus and the Stingless Bee *Scaptotrigona mexicana* Guérin from Southern, Mexico. *Insects*, 9(2):54, 2018.
- [26] Andrea Cruz Angón, Miguel A. Ortega Huerta, Erika Daniela Melgarejo, Héctor Perdomo Velázquez, and Ana Victoria Contreras. *La biodiversidad en Colima: estudio de estado*. Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad (CONABIO), México, 2016. Apéndices.
- [27] Jun Chen, Komi Messan, Marisabel Rodriguez Messan, Gloria DeGrandi-Hoffman, Dingyong Bai, and Yun Kang. How to Model Honeybee Population Dynamics: Stage Structure and Seasonality. *Mathematics in Applied Sciences and Engineering*, 1(2):91–125, 2020.
- [28] Ross D Booton, Yoh Iwasa, James AR Marshall, and Dylan Z Childs. Stress-mediated Allee Effects can Cause the Sudden Collapse of Honey Bee Colonies. *Journal of Theoretical Biology*, 420:213–219, 2017.
- [29] David S Khoury, Andrew B Barron, and Mary R Myerscough. Modelling Food and Population Dynamics in Honey Bee Colonies. *PloS one*, 8(5):e59084, 2013.
- [30] Clint J Perry, Eirik Søvik, Mary R Myerscough, and Andrew B Barron. Rapid Behavioral Maturation Accelerates Failure of Stressed Honey Bee Colonies. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(11):3427–3432, 2015.
- [31] Jesús Humberto Reyna-Fuentes, Juan Carlos Martínez-González, Amador Silva-Contreras, Daniel López-Aguirre, and Sonia Patricia Castillo-Rodríguez. Fitoterapia: una alternativa de control de plagas y enfermedades de abejas. *Journal of the Selva Andina Animal Science*, 8(2):114–123, 2021.

- [32] Komi Messan, Marisabel Rodriguez Messan, Jun Chen, Gloria DeGrandi-Hoffman, and Yun Kang. Population Dynamics of Varroa Mite and Honeybee: Effects of Parasitism with Age Structure and Seasonality. *Ecological Modelling*, 440:109359, 2021.
- [33] Fred Brauer and Carlos Castillo-Chavez. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, volume 2. Springer, 2012.
- [34] Matthew Betti, Lindi M. Wahl, and Mair Zamir. Age Structure is Critical to the Population Dynamics and Survival of Honeybee Colonies. *Royal Society Open Science*, 3(11):160444, 2016.
- [35] Paul Blanchard, Robert L. Devaney, and Glen R. Hall. *Differential Equations*. Brooks Cole, 2002.
- [36] Jack K Hale and Joseph P LaSalle. *Differential Equations and Dynamical Systems: Proceedings*. Academic Press, 1967.
- [37] Raúl Temoltzi-Ávila. *El problema de máxima desviación en el plano*. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, 2024.
- [38] Aleksei Fedorovich Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Side*. 1988.
- [39] David E Stewart. High accuracy Numerical Methods for Ordinary Differential Equations with Discontinuous Right-hand Side. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 42(1):169–170, 1990.
- [40] Hassan K Khalil and Jessy W Grizzle. *Nonlinear Systems*, volume 3. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [41] Jean-Jacques E Slotine, Weiping Li, et al. *Applied Nonlinear Control*, volume 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [42] Kirk Visscher and Reuven Dukas. Survivorship of Foraging Honey Bees. *Insectes Sociaux*, 44:1–5, 1997.
- [43] Aracelly Arévalo, Tito Bacca, and Alberto Soto. Diagnóstico del uso y manejo de plaguicidas en fincas productoras de cebolla junca *Allium fistulosum* en el municipio de Pasto. *Luna Azul*, (38):132–145, 2014.
- [44] Graciela Noemí Albo and Raúl Carlos Pérez. Polinización de cultivos de interés agronómico. *Editorial de la Universidad Nacional de La Plata (EDULP)*, pages 71–87, 2025.
- [45] Fred Brauer and Christopher Kribs. *Dynamical Systems for Biological Modeling: An Introduction*. CRC press, 2016.
- [46] University of Hertfordshire. PPDB - Pesticides Properties Database.
- [47] Jonathan Silberman and Adam Taylor. Carbamate toxicity. In *StatPearls*. StatPearls Publishing, Treasure Island (FL), 2023. Updated 2023 May 1.

- [48] Jose Maria Tapia-Gonzalez, Gustavo Alcazar-Oceguera, Jose Octavio Macías-Macías, Francisca Contreras-Escareño, José Carlos Tapia-Rivera, Tatiana Petukhova, and Ernesto Guzman-Novoa. Ascosferosis en abejas melíferas y su relación con factores ambientales en Jalisco, México. *Revista Mexicana de Ciencias Pecuarias*, 11:468–478, 2020.
- [49] Alejandro Álvarez-Ramírez, Lizeth Jiménez-González, Edgardo Ortiz-Muñoz, Idalia Ruíz-García, and Rogelio Orozco-Hernández. Influencia de las condiciones ambientales en la presentación de ascosferosis (*Ascosphaera apis*) o cría de cal en *Apis mellifera* (abeja), 2017.
- [50] Juan Pablo Campa, Ximena Salaverry, and Helena Katz. Monitoreo de loque americana (*Paenibacillus larvae*) en apiarios de la región este-noroeste del Uruguay. *Veterinaria (Montevideo)*, 60(222), 2024.
- [51] C. Invernizzi, K. Antúnez, J. P. Campa, J. Harriet, Y. Mendoza, E. Santos, and P. Zunino. Situación sanitaria de las abejas melíferas en Uruguay. *Veterinaria (Montevideo)*, 47(181):15–27, 2011.
- [52] Epifanio Salazar García, Luz Palomino Asencio, and Erwin García Hernández. Adsorción de neonicotinoides usando estructuras tipo fullereno: Un estudio DFT. *Nova Scientia*, 10(21):326–343, 2018.
- [53] José María Tapia-González, Gustavo Alcazar-Oceguera, José Octavio Macías-Macías, Francisca Contreras-Escareño, José Carlos Tapia-Rivera, Francisco Javier Chavoya-Moreno, and Juan Carlos Martínez-González. Nosemosis en abejas melíferas y su relación con factores ambientales en Jalisco, México. *Revista mexicana de ciencias pecuarias*, 8(3):325–330, 2017.
- [54] Adewale Adeyinka, Emmanuel Mucó, Ana C. Regina, and Louis Pierre. Organophosphates (archived). In *StatPearls*. StatPearls Publishing, 2023.
- [55] Secretaría de Agricultura y Desarrollo Rural. Una apicultura sana previene la varroasis. <https://www.gob.mx/agricultura/articulos/una-apicultura-sana-previene-la-varroasis>, May 2021. Gobierno de México.