



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE HIDALGO



INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ÁREA ACADÉMICA DE COMPUTACIÓN Y ELECTRÓNICA

---

MAESTRÍA EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

IMPLEMENTACIÓN DE UN SISTEMA BCI EN EL CONTROL DE ROBOTS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

**PRESENTA:**

**ING. JESÚS GARCÍA BLANCAS**

ASESORES:

DR. LUIS ENRIQUE RAMOS VELASCO

DR. OMAR ARTURO DOMÍNGUEZ RAMÍREZ

PACHUCA HGO. MÉXICO, SEPTIEMBRE 2016



Ing. Jesús García Blancas

## **Implementación de un sistema BCI en el control de robots**

*A mis padres y hermanos,  
quienes me han dado todo su apoyo,  
su comprensión, sus consejos y su paciencia  
para culminar mis proyectos de manera exitosa.*

Gracias a

**CONACYT** por la beca de Maestría  
otorgada durante el periodo  
Julio 2014 - Julio 2016, con número  
de registro 625144.

# Agradecimientos

En esta sección es mi deseo agradecer de forma breve a todos mis familiares, catedráticos y amigos que de alguna manera contribuyeron de manera personal y/o profesional en el desarrollo de esta tesis.

Agradezco a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, institución que me ha proporcionado los medios y conocimientos necesarios para culminar de manera exitosa la *Maestría en Automatización y Control*.

Especialmente doy gracias a dios por darme la oportunidad de contar con mis padres Antonio García Ávila y Alvara Blancas Ixtulco así como a mi hermana Ma. Esmeralda García Blancas y mi hermano J. Víctor García Blancas, quienes han sido grandes pilares en mi vida al darme siempre su amor y apoyo incondicional, por siempre alegrarse de mis triunfos y escuchar atentamente mis fracasos para poder aconsejarme y alentarme a culminar satisfactoriamente todos mis proyectos. Por su gran ejemplo de temple, honestidad y perseverancia que me dieron a lo largo de mi vida.

Igualmente agradezco a el Dr. Luis Enrique Ramos Velasco y al Dr. Omar Arturo Domínguez Ramírez, director y codirector, respectivamente, de este trabajo de investigación por su tiempo y conocimientos brindados, los cuales; me permitieron realizar satisfactoriamente este proyecto. Así mismo les agradezco por su amistad la cual me ayudo a crecer personal y profesionalmente.

A los sinodales el Dr. Pablo Antonio López Pérez, y el Dr. Omar López Ortega por su tiempo invertido y las grandes aportaciones de su parte en la revisión de este trabajo de tesis.

Aprovecho para agradecer al Doctor Vicente Parra Vega y a la Doctora Dulce Citlalli Martínez Peón por las grandes aportaciones a esta tesis y su amistad incondicional durante la estancia realizada en Cinvestav Unidad Saltillo.

Finalmente, agradezco a todas la personas que directa e indirectamente contribuyeron en este trabajo, a mis compañeros y amigos de generación, quienes siempre tuvieron algo que aportar a esta tesis.

# Resumen

## Implementación de un sistema BCI en el control de robots

En el presente trabajo de tesis se hace uso de una Interfaz Cerebro-Computadora (BCI) para el análisis de señales electroencefalográficas (EEG) para el control de robots, las señales son extraídas con un dispositivo no invasivo de la marca Emotiv Epoc, el dispositivo consta de 14 electrodos de adquisición de datos y dos de referencia, la tasa de muestreo es de 128[Hz] y un ancho de banda de 0.2 a 45[Hz] [1], el casco está conformado por un bajo número de sensores y cuenta con poca resolución comparado con un dispositivo de uso médico, con estas características técnicas es suficiente para cumplir los objetivos de esta tesis.

Para el procesamiento de las señales EEG se utiliza la herramienta matemática de análisis multiresolución también conocida como codificación sub-banda basada en teoría *wavelet*, con esto logramos descomponer las señales EEG en distintas bandas tiempo-frecuencia, las señales EEG son generadas por el movimiento voluntario de las extremidades corporales en específico la del pie derecho, el propósito del procesamiento de las señales es generar un comando de referencia para el control de un dispositivo robótico. Primeramente, se hace el control de posición de un motor de corriente directa mediante el procesamiento de la señal EEG que resulta de mover hacia arriba o hacia abajo del pie derecho, para poder decidir el comando de referencia se emplea una instrucción *if A then B* donde *A* es la condición de entrada y *B* es la consecuencia de comando para poder decidir si existió el movimiento del pie y mandar una consigna de referencia.

La ley de control que se aplica es también obtenida de un proceso de descomposición multiresolución de la señal de error de seguimiento, donde la señal de error se descompone en sus componentes de alta, mediana y baja frecuencia, lo cual a su vez dichas componentes son ponderadas por ganancias a ser propuestas por el diseñador, el controlador que resulta se le llama control proporcional multiresolución (CPM) [38]. Dicho controlador no requiere de derivadas del error (velocidades) ni aceleraciones además se asume que el modelo de la planta no se conoce, la implementación de los algoritmos obtenidos se realiza en la plataforma de LabVIEW.

# Abstract

## Implementation of a BCI system in robot control

In this thesis use of a Brain-Computer Interface (BCI) for the analysis of electroencephalographic (EEG) signals to control robots, signals are extracted with a non-invasive device Emotiv Epoc, It consists of 14 data acquisition electrodes and two reference, the sampling rate is 128 [Hz] and a bandwidth from 0.2 to 45 [Hz], It consists of a low number of sensors and has low resolution compared to a medical device. For the EEG signal processing mathematical analysis tool multiresolution also known as sub-band coding based on wavelet theory it is used, EEG signals are generated by voluntary movement of bodily specific tips on the right foot, the purpose of signal processing is to generate a reference command for controlling a robotic device.

The control law applied is also obtained from a multi-resolution decomposition process of tracking error signal, the error signal is decomposed into its components of high, medium and low frequency, which in turn such components are weighted by gains, the resulting control law is called proportional multiresolution control (CPM), the implementation of the algorithms is done in LabVIEW platform.

# Índice general

Agradecimientos . . . . .	V
Resumen . . . . .	VII
Abstract . . . . .	IX
Índice general . . . . .	XI
Índice de figuras . . . . .	XV
Índice de tablas . . . . .	XIX
<b>Notación</b>	<b>XXI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	4
1.2. Hipótesis . . . . .	5
1.3. Planteamiento del problema . . . . .	5
1.4. Propuesta de solución . . . . .	5
1.5. Justificación . . . . .	5
1.6. Objetivos . . . . .	6
1.7. Metodología . . . . .	6
1.8. Aportaciones . . . . .	8
1.9. Organización de la tesis . . . . .	9
<b>2. Estudio del estado del arte</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción . . . . .	11
2.2. Sistemas BCI . . . . .	12
2.3. Procesamiento de señales EEG . . . . .	13
2.4. Teoría <i>wavelet</i> para señales EEG . . . . .	13
2.5. Control multiresolución . . . . .	14
2.6. Paradigmas utilizados en BCI . . . . .	15
2.7. Regiones cerebrales de interés para BCI . . . . .	16
2.7.1. Regiones corticales . . . . .	16
2.7.2. Secuenciación de actividades neuronales . . . . .	16
2.7.3. Secuencia del paradigma MI . . . . .	17

2.8. Comentarios . . . . .	17
<b>3. Análisis multiresolución <i>wavelet</i></b>	<b>19</b>
3.1. Introducción . . . . .	19
3.2. Análisis multiresolución . . . . .	20
3.3. Análisis sub-banda . . . . .	22
3.3.1. Análisis de descomposición . . . . .	24
3.3.2. Síntesis de descomposición . . . . .	26
3.4. Comentarios . . . . .	28
<b>4. Análisis multiresolución de señales EEG</b>	<b>29</b>
4.1. Adquisición de señales EEG . . . . .	29
4.2. Procesamiento de señales EEG . . . . .	32
4.2.1. Señales EEG para sistemas BCI . . . . .	32
4.2.2. Procesamiento de señales EEG . . . . .	33
4.2.3. Pre-Procesamiento . . . . .	33
4.2.4. Extracción de características . . . . .	34
4.3. Comentarios . . . . .	41
<b>5. Diseño de control multiresolución</b>	<b>43</b>
5.1. Introducción . . . . .	43
5.2. Control multiresolución, caso SISO . . . . .	44
5.2.1. Simulación de plataforma experimental . . . . .	46
5.3. Control multiresolución caso MIMO . . . . .	52
5.3.1. Esquema de identificación <i>wavenet</i> . . . . .	53
5.3.2. Controlador multiresolución . . . . .	54
5.3.3. Autosintonización . . . . .	56
5.3.4. Modelo del robot . . . . .	56
5.3.5. Simulación de un robot de dos grados de libertad dentro de un sistema BCI . . . . .	58
5.4. Comentarios . . . . .	62
<b>6. Conclusiones</b>	<b>63</b>
6.1. Contribuciones . . . . .	63
6.2. Limitaciones . . . . .	64
6.3. Trabajos futuros . . . . .	64
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>
<b>Glosario</b>	<b>73</b>

<b>A. Teoría <i>wavelet</i></b>	<b>77</b>
A.1. Introducción . . . . .	77
A.2. Análisis de Fourier . . . . .	78
A.2.1. Funciones periódicas . . . . .	78
A.2.2. Coeficientes y series de Fourier . . . . .	78
A.2.3. Transformada de Fourier . . . . .	80
A.2.4. Limitaciones del análisis de Fourier . . . . .	80
A.2.5. Transformada de Fourier ventaneada . . . . .	81
A.3. Teoría <i>wavelet</i> . . . . .	82
A.3.1. Transformada <i>wavelet</i> . . . . .	85
A.3.1.1. Transformada <i>wavelet</i> continua . . . . .	85
A.3.1.2. Transformada <i>wavelet</i> discreta . . . . .	88
A.4. Comentarios . . . . .	89
<b>B. Conceptos previos</b>	<b>91</b>
B.1. Conceptos generales . . . . .	91
B.2. Comentarios . . . . .	105
<b>C. Dispositivo Emotiv EPOC</b>	<b>107</b>
C.1. Especificaciones técnicas . . . . .	107
C.2. Aplicación de sistemas BCI y señales EEG . . . . .	108
C.2.1. Métricas de rendimiento y Estados Emocionales . . . . .	108
C.2.2. Expresiones Faciales . . . . .	108
C.2.3. Comandos mentales . . . . .	109
C.3. Modo de uso de Emotiv Epoc . . . . .	109
C.4. Comentarios . . . . .	111
<b>D. Algoritmo del análisis multiresolución</b>	<b>113</b>
D.1. Codificación sub-banda con coeficientes <i>wavelet</i> Daubechies . . . . .	113
D.2. Proceso de reconstrucción . . . . .	114

# Índice de figuras

1.1.	Representación esquemática de las partes principales del cerebro [2]. . . . .	2
1.2.	Colocación de casco Emotiv Epoc sobre el cuero cabelludo. . . . .	3
1.3.	Representación de un sistema BCI básico. . . . .	4
1.4.	Adquisición de señales EEG con dispositivo Emotiv Epoc, donde la colocación de los sensores se aprecia en la Figura 4.1. . . . .	7
1.5.	DWT de las señales EEG. . . . .	8
3.1.	Plano tiempo-frecuencia para diferentes bases ortogonales: a) base de Fourier, b) base de Gabor y c) base <i>wavelet</i> . . . . .	20
3.2.	Análisis de descomposición de la función $f[n]$ . . . . .	23
3.3.	Síntesis de descomposición de la señal $f[n]$ . . . . .	23
3.4.	Diagrama de una convolución seguida de una decimación a dos, donde $c_{i-1}[n]$ , $c_{i,k}[n]$ y $v_{i,k}[n]$ son la señal de entrada, la señal de salida y la señal resultante de la convolución entre la entrada y el filtro conjugado $\overline{h[k]}$ de longitud $\kappa$ . . . . .	25
3.5.	Diagrama de una convolución seguida de una decimación a dos, donde $d_{i-1}[n]$ , $d_{i,k}[n]$ y $v_{i,k}[n]$ son la señal de entrada, la señal de salida y la señal resultante de la convolución entre la entrada y el filtro conjugado $\overline{g[k]}$ de longitud $\kappa$ . . . . .	25
3.6.	Diagrama de una interpolación a dos seguida de una convolución, donde $c_i[n]$ , $c'_{i,k}[n]$ y $\xi_{i,k}[n]$ son la señal de entrada, la señal de salida y la señal resultante de la interpolación a dos de la entrada, y $g[k]$ es el filtro de longitud $\kappa$ . . . . .	26
3.7.	Diagrama de una interpolación a dos seguida de una convolución, donde $d_i[n]$ , $d'_{i,k}[n]$ y $\zeta_{i,k}[n]$ son la señal de entrada, la señal de salida y la señal resultante de la interpolación a dos de la entrada, y $g[k]$ es el filtro de longitud $\kappa$ . . . . .	27
4.1.	Colocación de los electrodos [1]. . . . .	30
4.2.	Señales crudas adquiridas del dispositivo Emotiv Epoc. . . . .	30

4.3. Diagrama de Caja y Bigotes de los 14 electrodos del casco Emotiv Epoc [3]. . . . .	31
4.4. Señales de los sensores $F3$ y $F4$ respectivamente adquiridas con el casco de Emotiv Epoc. . . . .	32
4.5. Señal del sensor $F3$ pasada por la etapa de pre-procesamiento. . . . .	34
4.6. Representación de los coeficientes de detalle y coeficiente de aproximación de la señal del sensor $F3$ con cinco niveles de descomposición. . . . .	40
4.7. Coeficientes <i>wavelet</i> correspondientes a la banda <i>Beta</i> del segundo nivel de descomposición de la señal original del sensor $F3$ . . . . .	40
5.1. Esquema de control clásico, donde $r$ es el ruido de la variable medida. . . . .	44
5.2. Esquema de codificación sub-banda de la señal $e(t)$ para tres niveles de descomposición. . . . .	45
5.3. Diagrama a bloques del CPM. . . . .	46
5.4. Señal normalizada del sensor $F3$ . . . . .	49
5.5. Primer nivel de descomposición donde $c_1$ es el primer nivel de detalle y $d_1$ es el primer nivel de aproximación. . . . .	49
5.6. Segundo nivel de descomposición donde $c_2$ es el segundo nivel de detalle y $d_2$ es el segundo nivel de aproximación. . . . .	50
5.7. Posición del motor a 10 <i>rad</i> equivalente a 1.6 vueltas aplicando un CPM comparado con un control PID. . . . .	51
5.8. Señal de error del sistema con CPM comparado con un control PID. . . . .	51
5.9. Señal de control del sistema con CPM comparado con un control PID. . . . .	52
5.10. Esquema de Controlador Multiresolución . . . . .	53
5.11. Diagrama de la red neuronal <i>wavenet</i> . . . . .	54
5.12. Estructura del filtro IIR. . . . .	54
5.13. Robot de dos grados de libertad. . . . .	57
5.14. Señal de referencia para un robot de dos grados de libertad, donde la frecuencia de la señal esta dada por $y_{ref_N} = \Omega \cdot U$ que se obtiene de las señales EEG de ejecución de fuerza de las manos. . . . .	59
5.15. Respuesta del sistema con la señal de referencia mostrada en la Figura 5.14. . . . .	59
5.16. Posición del efector final del robot de dos grados de libertad. . . . .	60
5.17. Error de seguimiento del sistema. . . . .	60
5.18. Señal de control que se requiere para hacer que el sistema converja a la referencia. . . . .	60
5.19. Parámetros de la red neuronal <i>wavenet</i> . . . . .	61
5.20. Ganancias del CPM para el estabón 1. . . . .	62
5.21. Ganancias del CPM para el estabón 2. . . . .	62

---

A.1. Representación de una función periódica $f(x)$ , con período $P$ . . . . .	78
A.2. Representación gráfica de (A.13), donde $g(t)$ es la función de Gauss, $t$ es el tiempo, $\sigma$ es el factor de desplazamiento. . . . .	81
A.3. Gráficas de las <i>wavelets</i> madre dadas en la Tabla A.1. . . . .	85
C.1. Equipo de Electroencefalografía Emotiv EPOC Neuroheadset [1]. . . . .	107
C.2. Carga de batería del Emotiv Epoc [1]. . . . .	109
C.3. Hidratación de almohadillas de fieltro [1]. . . . .	109
C.4. Colocación de sensores [1]. . . . .	110
C.5. Colocación de Auricular [1]. . . . .	110

# Índice de tablas

3.1. ALGORITMO: Algoritmo de análisis de descomposición . . . . .	25
3.2. ALGORITMO: Algoritmo de síntesis de descomposición . . . . .	27
5.1. Función <i>wavelet</i> Daubechies, donde $m$ es el orden de la <i>wavelet</i> [32]. .	47
5.2. Coeficientes del filtro Daubechies 4 con $m = 2$ . . . . .	47
5.3. Ganancias del CPM . . . . .	50
5.4. Variabes que intervienen en cada una de las etapas. . . . .	53
A.1. Algunos ejemplos comunes de <i>wavelets</i> madre. . . . .	84
C.1. Especificaciones técnicas Emotiv EPOC Neuroheadset. Tabla adaptada de [1] . . . . .	108

# Notación

Smbolo	Descripción
$A \triangleq B$	$A$ es por definición igual a $B$ .
$a \in A$	$a$ es un elemento de $A$ .
$A^{-1}$	Inversa de la matriz $A$ .
$A^{n \times m}$	$A$ es una matriz real de dimensión $n \times m$ .
$A \subset B$	$A$ es un subconjunto propio de $B$ .
$A \subseteq B$	$A$ es un subconjunto de $B$ .
$A^T$	$A$ transpuesta.
$\mathbb{C}$	Espacio de todos los números complejos.
$\mathbf{F}$	Campo.
$\mathbf{J}$	Conjunto de todos los números enteros positivos.
$\bar{x}$	Complejo conjugado de $x$ .
$\neq$	Desigualdad.
$A \sim B$	$A$ es equivalente a $B$ .
$\mathbb{K}$	Es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ .
$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$	Espacio con producto interno.
$(X, d)$	Espacio métrico.
$e^x$	Exponencial de $x$ .
$f : A \rightarrow B$	$f$ mapea el dominio $A$ en $B$ .
$I$	Matriz identidad.
$\mathbf{i}$	$\sqrt{-1}$ .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto interno.
$\cap$	Intersección.
$\mathbb{N}$	Campo de todos los números naturales.

<b>Smbolo</b>	<b>Descripción</b>
$b \notin A$	$b$ no es un elemento de $A$ .
$\forall$	Para todo.
$A \perp B$	$A$ es perpendicular a $B$ .
$\mathbb{Q}$	Campo de todos los números racionales.
$\mathbb{R}$	Espacio de todos los números reales.
$\mathbb{R}^n$	Espacio vectorial de los reales de dimensión $n$ .
$\sum$	Sumatoria.
$\oplus$	Sumatoria directa de subespacios.
$x \rightarrow x_n$	$x$ tiende a $x_n$ .
$\cup$	Unión.
$\emptyset$	Conjunto vacío.
$\hat{x}$	$x$ estimada.

# Capítulo 1

## Introducción

El cerebro humano es una máquina biológica muy compleja que contiene millones de neuronas (“procesadores” elementales). El cerebro es la computadora de mayor capacidad de almacenamiento de información del mundo (280 trillones de Bytes). La unidad anatómica y funcional del cerebro es la neurona (célula del sistema nervioso). El cerebro humano pesa menos de 1.5 Kg, y contiene unas 10,000 millones de neuronas, cada una de ellas establece entre 10,000 y 50,000 contactos con las células vecinas, pueden recibir hasta 200,000 mensajes [4]. No solo los neurocientíficos se han dado a la tarea de estudiar y entender su funcionamiento, al igual otras disciplinas se han interesado y esto ha permitido desarrollar sistemas artificiales con gran desempeño y eficacia, el cerebro es uno de los órganos esenciales del cuerpo humano dado que controla las funciones vitales como la respiración, vista, tacto, movimientos, temperatura, así como todos los procesos que regulan nuestro cuerpo. Este órgano está en el interior del cráneo y se compone de tres partes: el tronco cerebral, el cerebelo y el cerebro cuya superficie externa es conocida como corteza cerebral [54]. La Figura 1.1 muestra la composición del cerebro.

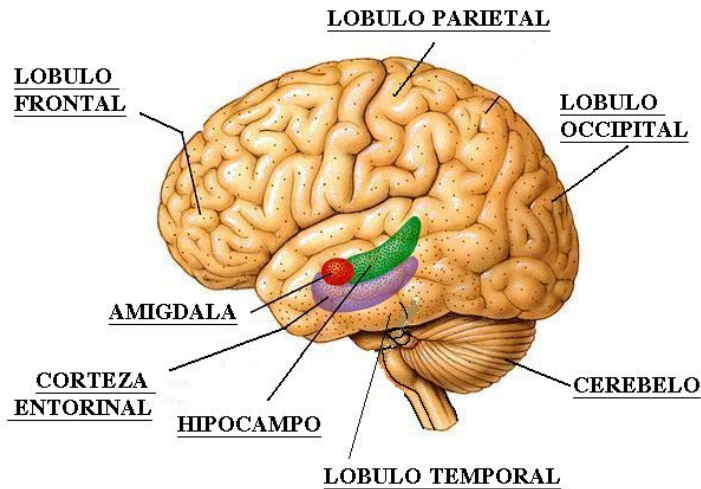


Figura 1.1: Representación esquemática de las partes principales del cerebro [2].

Dentro de las funciones del tronco cerebral o tallo encefálico están la de controlar funciones vitales como el ritmo cardiaco, la digestión, respiración, presión arterial; además comunica el cerebro con el resto del cuerpo por medio de la medula espinal.

El cerebelo se encarga de mantener el equilibrio y la postura, es el responsable de que los movimientos sean realizados de manera coordinada y precisa.

La corteza cerebral realiza las funciones de alto nivel como el pensamiento abstracto. Está dividido en dos hemisferios: derecho e izquierdo. La parte derecha del cerebro controla la parte izquierda del cuerpo y la parte izquierda del cerebro el lado derecho del cuerpo. Cada hemisferio a su vez se subdividen en cuatro lóbulos: frontal, parietal, temporal y occipital [54], dicha subdivisión se aprecia en la Figura 1.1.

A continuación se describen las funciones de los lóbulos cerebrales:

1. **Lóbulo frontal**, procesa el pensamiento consciente, en estas áreas se resuelven los problemas.
2. **Lóbulo parietal**, se encarga de la percepción de los estímulos relacionados al tacto, presión, temperatura y dolor.
3. **Lóbulo temporal**, se encarga de la percepción y reconocimiento de los estímulos auditivos y relacionados con la memoria.
4. **Lóbulo occipital**, está relacionado con la percepción de los estímulos visuales.

El lóbulo de importancia para la obtención de las señales EEG es el lóbulo relacionado con la actividad cerebral de movimientos imaginados y reales. El sistema nervioso central (SNC) está formado por células gliales y células nerviosas. Un potencial de polaridad negativa que se encuentra entre 60 y 70 mV cambia con la actividad sináptica que se genera en el SNC, estas corrientes sinápticas son debidas a la transferencia de actividad entre axones y dendritas. Los axones transmiten un impulso eléctrico y las dendritas reciben la información transmitida por los axones. Si el potencial sináptico llega a cierto umbral entonces se produce un potencial de acción. La actividad eléctrica que llega a la corteza cerebral es la que podemos registrar como señales EEG. La sincronía que se produce genera frecuencias que se han dividido en bandas denominadas: *alfa*( $8 - 13Hz$ ), *theta*( $4 - 8Hz$ ), *beta*( $13 - 30Hz$ ), *delta*( $0.5 - 4Hz$ ), *gamma*( $25 - 100Hz$ ) y *mu*( $8 - 13Hz$ ) [75]. Debemos recordar que con las señales EEG se mide la actividad cerebral mediante electrodos colocados en el cuero cabelludo como se muestra en la Figura 1.2.



Figura 1.2: Colocación de casco Emotiv EPOC sobre el cuero cabelludo.

Las señales obtenidas son amplificadas y mostradas como ondas cerebrales. Existen diferentes paradigmas que pueden ser utilizados en BCI, uno de los más utilizados es el de imaginación visual, por ejemplo imaginar el movimiento de un dispositivo, esto no debe confundirse con la imaginación motriz que es la imaginación de movimientos motrices que igual son utilizados en BCI, y además existe el paradigma de imaginación cinestésica [75]. La funcionalidad del análisis de señales EEG basados en BCI puede ser dividido en cuatro subsistemas: adquisición de señal, procesamiento de señal, extracción de características y aplicación [23], el modelo es mostrado en la Figura 1.3.

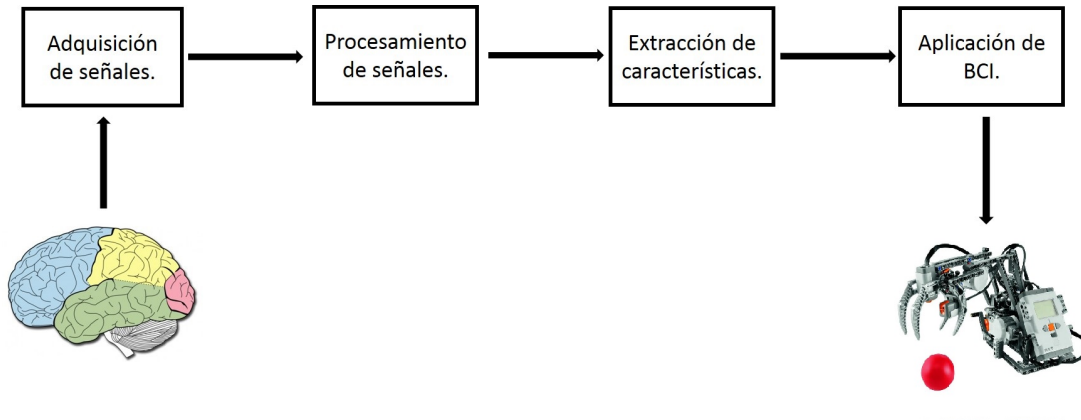


Figura 1.3: Representación de un sistema BCI básico.

En la parte de procesamiento de señales y extracción de características se hace uso de análisis multiresolución de las señales para obtener la *Transformada Wavelet Discreta* (DWT) y adquirir las características que sean de utilidad para ejecutar la etapa final de la aplicación del sistema BCI que es el control de dispositivos robóticos.

## 1.1. Motivación

Recientemente en la comunidad científica se ha despertado el interés de distintas disciplinas en el estudio del comportamiento de la actividad cerebral [23, 45, 89], esta inquietud ha beneficiado gran parte en aplicaciones de ingeniería y en algunas otras áreas de aplicación biomédica para la rehabilitación de pacientes con alguna discapacidad motriz [6], particularmente en control automático nace la inquietud de procesar las señales EEG a partir del dispositivo Emotiv EPOC, obtenidas las señales de la actividad cerebral se pasa por un procesamiento para clasificar las señales que contienen información útil, de la misma manera desechar las señales que se consideran como ruido, en esta etapa existe un número considerable de investigaciones que atacan el tema pero han tenido problemas por el alto costo computacional y en este tema de investigación se emplea un análisis multiresolución que se basa en la teoría *wavelet* [85, 37], con esta herramienta se soluciona el problema del costo computacional y con esto nos permite hacer un proceso en línea, teniendo una señal limpia de ruido se pasa a la etapa final que es la implementación, en esta etapa entra el interés del control automático el cual se basa en la señal obtenida que se usa como comando de referencia para sistemas que se les desea implementar una ley de control, de esa manera poder facilitar algunos aspectos por ejemplo la rehabilitación de personas con discapacidad motriz.

Con base a estas observaciones se puede plantear la hipótesis y otros puntos importantes de este trabajo de tesis.

## 1.2. Hipótesis

Es posible extraer características de las señales EEG mediante técnicas de procesamiento multiresolución de señales que emplean la teoría *wavelet*, con la finalidad de extraer un comando que sirva como señal de referencia para mover un dispositivo robótico.

## 1.3. Planteamiento del problema

El problema que se plantea en este trabajo de investigación es: Cómo obtener las características principales de una señal EEG para poder enviar un comando que sirva como referencia para el control de dispositivos robóticos.

## 1.4. Propuesta de solución

La solución que se propone al problema planteado es aplicar un esquema BCI como se muestra en la Figura 1.3. Primeramente, se hace la adquisición de las señales EEG mediante el casco Emotiv EPOC colocado sobre la superficie del cuero cabelludo, posteriormente, se usa análisis multiresolución basada en funciones *wavelet* para el procesamiento y extracción de características de las señales EEG, una vez que se tienen las características de las señales EEG se pasa por un proceso de clasificación con la finalidad de conservar las señales que sirvan como comando de referencia  $y_{ref}$  para la manipulación de un dispositivo robótico, posteriormente, teniendo dicha señal de referencia y la variable de salida del robot  $y$  se calcula la señal de error de seguimiento definida como  $e(t) = y_{ref} - y$ . Finalmente, se aplica el esquema de descomposición multiresolución a la señal de error de seguimiento para obtener las distintas componentes del error, de esta manera se puede hacer la implementación de un control proporcional multiresolución (CPM) y lograr que el dispositivo robótico llegue a la referencia proporcionada por el sistema BCI.

## 1.5. Justificación

Desde el punto de vista del control, existe un gran número de controles que son alimentados por una señal de error, esta variable necesita conocer la referencia y la variable del proceso [63], la señal de referencia es introducida de forma manual

según la acción que se desee de los sistemas, en esta parte de la señal de referencia a despertado un gran interés por el estudio de poder conectar una señal EEG a través de un sistema BCI a un lazo de control de esta manera proporcionar la señal de referencia, en el caso particular de este tema de investigación la señal de referencia obtenida se enviara a un sistema robótico para que ejecute el comando enviado por medio de un sistema BCI.

## 1.6. Objetivos

### Objetivo general

Implementar un esquema BCI para el control de un dispositivo robótico, mediante la aplicación de la descomposición multiresolución *wavelet*.

### Objetivos específicos

Los objetivos específicos de este tema de investigación son los siguientes:

- Análisis de un sistema BCI para la adquisición y procesamiento de las señales EEG.
- El estudio de la teoría *wavelet* para la clasificación de las características principales de las señales EEG.
- Aplicación de un control multiresolución a partir de la descomposición de las señales de error.

## 1.7. Metodología

El método que se utiliza en para lograr los objetivos es básicamente en análisis multiresolución de señales e implementación de sistemas BCI el describimos a continuación:

1. **Adquisición de señales EEG.** En esta etapa del trabajo se realizan estudios experimentales para el conocimiento de de las señales EEG, con el propósito de familiarizarse con el comportamiento bajo ciertas circunstancias como son el movimiento de los ojos, el movimiento de las extremidades corporales, la percepción visual e intentar conocer las señales de movimientos imaginados, se comenzó con el ejemplo que proporciona el dispositivo Emotiv Epoc que viene bajo la plataforma de LabVIEW 2014, con respecto al conocimiento de

las señales se modificó a modo que fuera más simple para interpretar las señales y facilitar el trabajo, en la Figura 4.2 se muestra la adquisición de las señales sin ninguna técnica de tratamiento de señales.

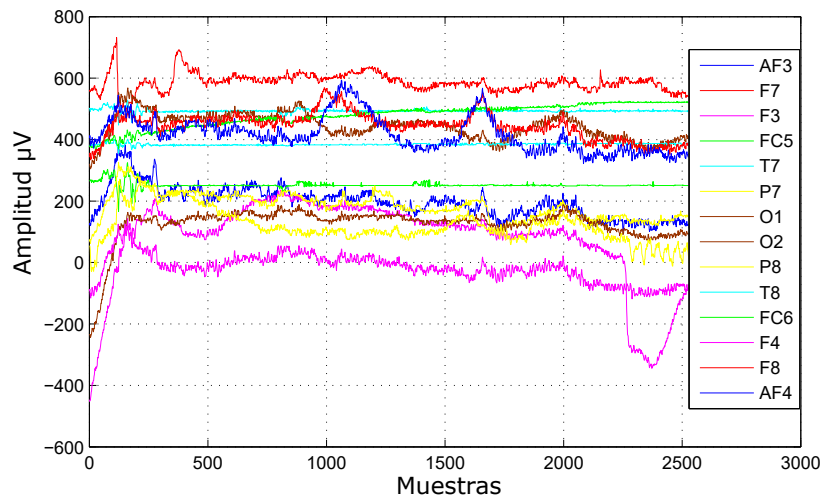


Figura 1.4: Adquisición de señales EEG con dispositivo Emotiv Epoc, donde la colocación de los sensores se aprecia en la Figura 4.1.

- 2. Procesamiento de las señales EEG.** Aquí se hace uso del análisis multiresolución basado en la teoría *wavelet*, para extraer las características de las señales que nos van a ayudar a pasar a la etapa final, de igual forma el procesamiento nos ayuda a realizar la DWT para conocer la banda de frecuencia donde ocurre el movimiento motriz voluntario, en la Figura 1.5 se muestra la gráfica de la DWT de un canal que entrega el dispositivo Emotiv Epoc donde el número total de muestras tiene que ser par o de potencia dos para poder tener una buena aproximación de la DWT [32].

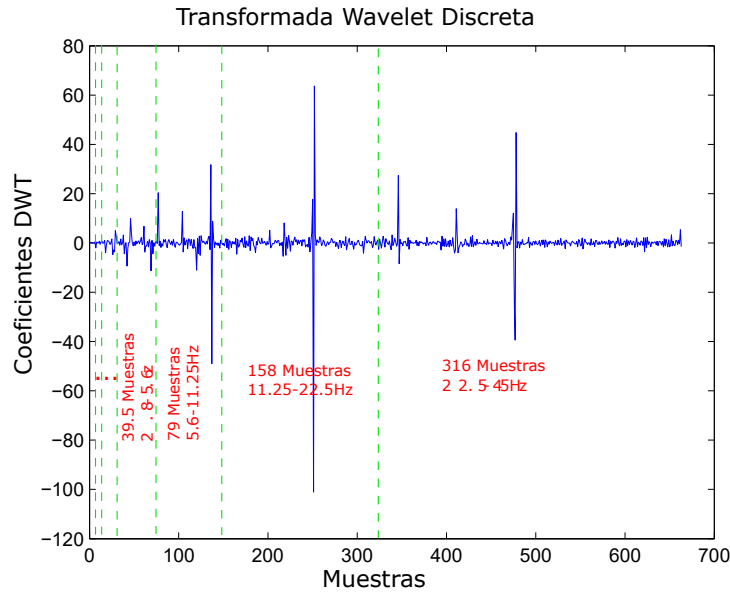


Figura 1.5: DWT de las señales EEG.

3. **Implementación del sistema BCI.** Es la etapa final del proceso que se trata en este tema de investigación, donde se aplica una ley de control CPM, en la cual se descompone la señal del error de seguimiento en distintas bandas de frecuencia para compensar las incertidumbres de la planta, el comando de referencia se obtiene de la etapa anterior calculando un umbral a partir de una serie de experimentos y poder discriminar umbrales que no proporcionan información sobre las señales que adquiridas, es así como se cierra el lazo de control entre un esquema BCI y un sistema robótico a partir las señales EEG.

## 1.8. Aportaciones

En el tema de sistemas BCI existe un gran número de aplicaciones en el área de biomédica pero presentan un problema por el alto costo computacional lo cual dificulta la implementación de los sistemas en tiempo real, en este tema de investigación se trabaja con funciones *wavelet* con las cuales resuelven el problema y nos facilita implementarlo en tiempo real para el control de dispositivos robóticos para ayudar al avance de técnicas automáticas para la rehabilitación de personas con alguna discapacidad motriz.

Por otro lado, se encontró que trabajar con un sensor bien identificado que para este caso de estudio es el *F3* y trabajar con los catorce sensores del casco Emotiv

Epochs entregan la misma información, de esta manera nos ayuda a reducir aun más en costo y tiempo computacional.

## 1.9. Organización de la tesis

En el Capítulo 2, *Estudio del estado del arte*, se analizan los trabajos relacionados con el desarrollo de investigación en sistemas BCI y control multiresolución. En el Capítulo 3, *Análisis multiresolución wavelet*, se presenta el contenido detallado del análisis multiresolución para en desarrollo de este tema de tesis. En el Capítulo 4, *Análisis multiresolución de señales EEG*, se presenta el análisis multiresolución de las señales EEG con el algoritmo *wavelet* y el Capítulo 5, *Diseño de control multiresolución*, se desarrolla el control multiresolución y las simulaciones del control de posición de un motor de CD. Finalmente, en el Capítulo 6 *Conclusiones*, se presentan las conclusiones de la implementación de un sistema BCI con un esquema de control de igual manera presentamos limitaciones, ventajas y trabajos futuros sobre el tema tratado de sistemas BCI dentro de un esquema de control.

# Capítulo 2

## Estudio del estado del arte

El contenido de este capítulo presenta los principales trabajos de investigación que están estrechamente relacionados con esta investigación. Existe una amplia gama de libros y artículos que abordan sistemas BCI por un lado y por otro control automático, estos dos temas son de gran interés para el control de robots que presentamos como uno de los objetivos principales de este trabajo de investigación. Las áreas que serán abordadas para comprender el desarrollo de este tema de investigación son: procesamiento de señales EEG, sistemas BCI, teoría *wavelet* para señales EEG y análisis multiresolución, y dispositivos de adquisición de señales EEG.

La organización del presente capítulo consta de la Sección 2.1, donde se mencionan en general las áreas de énfasis utilizadas en el desarrollo de la presente tesis, en las siguientes secciones se detallan los trabajos realizados en dichas áreas, en la Sección 2.2 se describe algunos trabajos relacionados a sistemas BCI para la comunicación del cerebro humano con el mundo exterior, en la Sección 2.3 se presentan técnicas de procesamiento de señales EEG, posteriormente, en la Sección 2.4 se detallan los trabajos relacionados con la teoría *wavelet* para el análisis de señales EEG, también en la Sección 2.5 se habla de los trabajos donde se aplica control multiresolución, en la Sección 2.6 se presentan los paradigmas BCI para la adquisición de las señales EEG, En la Sección 2.7 se describen las regiones de activación y la secuencia en la que se da cuando se ejecuta una tarea y finalmente en la Sección 2.8 se describe los comentarios de este capítulo.

### 2.1. Introducción

Actualmente existen un número considerable de investigaciones relacionadas con las áreas que se utilizan en este trabajo de investigación, estas áreas han sido aplicadas de distintas formas y en distintos dispositivos para objetivos variados [60, 35, 89], todo esto con el propósito de mejorar diseños existentes o la creación de tecnologías

[59, 74], en general el tema de tesis es un campo de investigación muy amplio para buscar soluciones y aplicaciones en el sentido del procesamiento de señales EEG por medio de funciones *wavelet* para el control de dispositivos robóticos [32, 53, 68, 75, 90] y otra área de gran interés como es la rehabilitación de personas con discapacidad motriz [81], estas áreas serán citados cada uno de ellos con una breve explicación de su aportación.

## 2.2. Sistemas BCI

En el campo de los sistemas BCI tenemos que en [62] se propone un método para detectar patrones de disparo ante un movimiento voluntario con el propósito de crear robots de asistencia para adultos y personas con problemas de movimientos motrices. El propósito final en el trabajo es el desarrollo de sistemas de rehabilitación que puedan asistir ejercicios de deambulación y ser usados en el monitoreo de pacientes en recuperación funcional. Para esto se necesita el conocimiento de las características relacionadas a los movimientos voluntarios, enfocándose en la combinación de extracción de características en tiempo real y así cumplir con el propósito final. En [24] se muestra una recopilación de información de las oscilaciones tal como funciones cognitivas y actividad sensorial que son reflejados en la respuesta de las bandas de Alfa, Teta y Delta, y de como estos procesos juegan un papel muy importante en la comunicación del cerebro con el mundo exterior. Siguiendo en el mismo contexto de BCI es importante mencionar sobre información referida a sensores para el estudio de las señales cerebrales tal como en [73] presenta a detalle algunos tipos de sensores de más utilidad acompañado de las características de cada uno de estos dispositivos y también se muestra dispositivos de amplificación de las señales y al final presenta una serie de algoritmos para el procesamiento de señales adquiridas de los sistemas BCI. También en [45] se presenta una prueba con personas sanas, para esta prueba se propone un modelo de predicción del rendimiento de la selección de técnicas de un sistema BCI basado en el protocolo P300. Estos modelos están basados en modelos de Márkov, y depende de un número de parámetros visuales necesarios. En [23] se trabaja con un sistema BCI que conecta un cerebro humano con el mundo exterior usando control de señales EEG. Otra de las metas de los sistemas BCI es adquirir y analizar las señales bioeléctricas como se ve en [89] que es crear un canal de comunicación entre el cerebro humano y un dispositivo del exterior, este documento presenta un P300 en línea basado en un sistema BCI aplicado en la toma de fotos fuera del espacio para su posterior análisis de la información adquirida por este dispositivo. Para finalizar en [75] se describe las señales EEG y su procesamiento de igual manera encontramos la explicación de un sistema BCI y la actividad cerebral a nivel neuronal.

## 2.3. Procesamiento de señales EEG

En la teoría de procesamiento de señales encontramos un amplio contenido de señales extraídas de la actividad cerebral presentando algún aporte científico como en [49] que hace uso de las características extraídas del fenómeno neurológico como un cambio de potencial relacionado con el movimiento o un cambio de energía en los ritmos Mu y Beta durante la actividad cognitiva del cerebro. Por otro lado, el estado de resistencia de las señales EEG basada en sobre carga de trabajo con una clasificación contra estrés se plantea en [16], además se desarrolla un protocolo experimental en el cual se maneja el contexto afectivo, esto se realiza mientras los participantes hacen una tarea con dos niveles de sobrecarga de trabajo, se hace una autoevaluación a los participantes para validar el protocolo. El estudio en la oscilación de Gama analizando las oscilaciones relacionadas a eventos para la comunicación entre neuronas y conjunto de neuronas. También encontramos en [35] recientes investigaciones que proponen métodos para la rehabilitación de funciones de discapacidad motriz. Una de estos métodos es alimentar el cerebro con una comunicación no-muscular y canales de control. Este documento presenta un sistema BCI basado en señales EEG asociados con tres movimientos del brazo, las señales serán obtenidas de un sujeto por medio de un dispositivo Emotiv Epoc y la clasificación de las características se hace con un perceptrón multicapa y las técnicas usadas para extraer las características son una transformada *wavelet*, una transformada de Fourier rápida y análisis de componente principal, los resultados experimentales muestran que tuvieron una alta tasa de desempeño en comparación con otras técnicas.

## 2.4. Teoría *wavelet* para señales EEG

El análisis de las señales es importante para la extracción de las características en las señales EEG y se usan métodos como la transformada *wavelet* estacionaria seguida por un filtrado, por cada canal de la señal EEG son clasificadas por una máquina de soporte vectorial (SVM)[49]. Para cada fenómeno neurológico, un sistema clasificador múltiple (MCS) combina las salidas de los SMV entre otras combinaciones de las salidas. En este artículo proponen un algoritmo genérico híbrido (HGA) para seleccionar características simultáneas para un óptimo rendimiento. Un sistema BCI crea un nuevo canal no-muscular para controlar dispositivos con la intención de la persona, tal como computadoras u otros dispositivos, también estos sistemas los aplica para aplicaciones de asistencia a personas con problemas motrices, este desarrollo se hace usando teoría *wavelet* para extraer las características de las señales de la actividad cerebral. Un estudio comparativo de técnicas de extracción de información contenida en diferentes bandas de frecuencia de una señal real en especial en la imaginación de

movimientos por un sistema BCI se presenta en [6], el propósito es inferir en el estado mental del usuario. Otro estudio preliminar muestra en [77] de señales EEG en niños con déficits de atención y desorden hiperactivo. El análisis de las señales se hace con una descomposición *wavelet* discreta multicapa, la clasificación se realiza en orden de la discriminante de atención presentada en la actividad eléctrica del cerebro del niño usando las técnicas de coeficientes *wavelet* en la entrada de las características, se recopilan los resultados dependiendo de la extracción de las características y éstas varían dependiendo de la función *wavelet*, en este trabajo la función SIM7 garantiza mejor resultado. Finalmente, en [37] encontramos el control de robots por medio de señales oculares a través de una transformada *wavelet*.

## 2.5. Control multiresolución

En años recientes se ha desarrollado un nuevo controlador, el cual se basa en el análisis de la señal del error, mismo que es descompuesto en diferentes niveles de resolución, el cual se nombra PID *wavelet*. El PID *wavelet*, nombrado así por tener ciertas similitudes con el control PID clásico (Proporcional-Integral-Derivativo), considera la señal de error (diferencia entre la señal de referencia y la señal de salida del sistema) para procesarla (obtener la derivada, la integral y una parte proporcional de la señal de error) y entregar una señal de control en función del error y una serie de ganancias previamente calculadas [63]. Por otra parte el control PID *wavelet* no contempla solamente tres términos, sino que es posible obtener tantos como se requiera dependiendo del nivel de resolución al que se someta la señal de error [74]. Por otra parte, los controles multiresolución (categoría en el que recaen no solo el PID *wavelet* sino una gran variedad de controles que utilizan técnicas de análisis multiresolución basada en la teoría *wavelet* por ejemplo, control *wavelet* auto-sintonizado con una *wavenet*, control PD-Wavelet+I, control P-*wavelet*+I, control de modos deslizantes+filtro *wavelet*, PID *wavenet*) permiten un mejor análisis de la señal de error, al descomponer a diversos niveles de escala-frecuencia dicha señal [22]. Es por ello que uno de los beneficios que han brindado estos controles es la inmunidad al ruido, lo que permite entregar una señal de control más suave que aquella entregada en otro tipo de control sin la necesidad de una etapa de filtrado y que a su vez garantiza prolongar la vida útil de los actuadores de la planta debido al libre chattering [25].

Después de su aparición y gracias a estos beneficios ha sido implementado para el control de diversos sistemas como en [22]. En esencia, un control multiresolución toma la señal de error, mediante técnicas de análisis multiresolución, descompone esta señal en diversas señales en el espacio de escala-frecuencia, estas señales posteriormente son escaladas y sumadas para obtener la señal de control [22, 41]. En [39] se encuentra un método de cancelación de ruido por medio de un PID multiresolución y la compara-

tiva de su desempeño con otros controladores como un PID clásico. De igual manera en [70] se encuentra la aplicación de controles multiresolución para la estimación de parámetros de sistemas SISO y sistemas MIMO, entre otras aplicaciones importantes se pueden ver en [31, 74].

## 2.6. Paradigmas utilizados en BCI

Existen diferentes paradigmas utilizados en los sistemas BCI, entre los que encontramos el P300, el potencial evocado visual de estado estacionario (SSVEP), imaginación visual (VI), imaginación motriz (MI) e imaginación kinestésica motriz (MIK), entre otros [9, 43].

El P300/P3 es un pico positivo que se manifiesta después de 300 ms de que un estímulo se presenta. La desventaja del P300 es que se requiere que el usuario esté atento continuamente y además se ha demostrado que en pacientes con parálisis es usualmente intolerable [14, 27, 33, 69, 76].

El SSVEP es un señal de respuesta debida a una estimulación visual en una frecuencia específica; la desventaja es que se requiere dejar una frecuencia para cada tipo de estímulo SSVEP [21].

El paradigma VI corresponde a la capacidad cognitiva del sujeto para imaginar la visualización de objetos, [71], en el cual la perspectiva de la persona juega un papel principal. Si se realiza la imaginación visual desde primera persona, el usuario se involucra de manera activa con la tarea y en algunas ocasiones se le pide que imagine la acción conforme transcurre el tiempo como en un vídeo. Por otro lado, la perspectiva de tercera persona corresponde a que el usuario fuera solo un espectador [9].

El paradigma MI puede definirse como el proceso cognitivo de imaginar un movimiento de nuestro propio cuerpo sin físicamente realizado. Se ha demostrado que la imaginación motriz ayuda a las terapias de rehabilitación, [88], utilizando imaginación de movimiento de manos, pies y dedos [42]. Por otro lado, a los sujetos no se les dificulta el entrenamiento de este paradigma debido a que es intuitivo [44]. Las ventajas que ofrece este paradigma como lo son el poco entrenamiento y claridad de como ejecutarlo hacen que sea un buen candidato para comando BCI [44].

En el paradigma MIK los sujetos imaginan a uno de sus miembros ejerciendo fuerza. Tiene la ventaja de contar con la propiocepción, la cual le da información de la ubicación espacial de sus extremidades relativas a un punto de referencia exterior o interior [9, 88].

Para esta tesis se seleccionaron los paradigmas asíncronos y MI como comandos BCI por las ventajas que ofrecen. Estos paradigmas EEG se han implementado en diferentes sistemas BCI y la combinación de estos ha sido utilizado en rehabilita-

ción [46]. Sin embargo, para aplicaciones de usuario final falta investigación de cómo emplear estos comandos en línea, es decir, para que puedan ser utilizados de forma continua. Por otro lado, otra problemática es que la caracterización de estos paradigmas se hace fuera de línea, aun cuando se sabe que en los comandos sincrónicos disminuye la varianza de las señales [12].

## 2.7. Regiones cerebrales de interés para BCI

La actividad cerebral toma lugar en ciertas estructuras del cerebro, dependiendo de la tarea que se este realizando, es decir, no solamente en una área se activa sino que pueden activarse diferentes regiones; aunque también depende de otros factores relativos al sujeto tales como la experiencia, los antecedentes médicos, el estado físico y el estado psicológico, [20]. Por ello, es necesario conocer las regiones de activación para la selección espacial de los electrodos. También se debe definir el tipo de paradigma que será utilizado ya que de éste dependen las regiones de activación. Una vez seleccionado el paradigma, se analiza qué regiones corticales se activan, a qué frecuencia y en qué momento. La detección de un paradigma de forma espacio-temporal ha sido propuesto en sistemas BCI, [15, 61], sin embargo, se requiere la detección de la emisión del paradigma cuando es voluntario y en línea.

### 2.7.1. Regiones corticales

La actividad eléctrica de las regiones corticales es medida a través de los electrodos sobre el cuero cabelludo por lo que, realmente se mide una mezcla de señales debido a la pobre resolución espacial de los electrodos. Se ha demostrado que las regiones de activación del paradigma MI y VI son diferentes, [72]. El paradigma MI involucra las cortezas prefrontal, premotora y parietal, [5], aunque existe controversia con el involucramiento de la corteza motriz, [10]. Durante la atención y visión las regiones de activación son la parietal y la occipital respectivamente. Solo algunos sistemas BCI consideran utilizar señales EEG sobre la región relacionada a la tarea, utilizarlas de está manera hace necesario desunificar las señales para encontrar las fuentes.

### 2.7.2. Secuenciación de actividades neuronales

Los modelos de interacción entre regiones cerebrales, tal como lo estudia la dinámica funcional, indican que existe una actividad secuencial entre regiones cuando se ejecuta una tarea, [13, 26, 29, 83, 84], lo cual se ha demostrado con evidencia neurofisiológica y psicológica que soporta que las habilidades motrices están consolidadas a través de secuencias de patrones de aprendizaje motriz [48].

### 2.7.3. Secuencia del paradigma MI

La secuencia que se lleva a cabo durante el paradigma MI es similar a la secuencia motriz, sin embargo no existe la ejecución de la tarea por parte de alguno de los miembros del cuerpo, por lo que el análisis de las regiones que se activan, así como la secuencia que se sigue ha sido sometida a discusiones entre los expertos de rehabilitación motriz y neurociencias [82, 87].

La secuencia para el paradigma MI involucra las cortezas prefrontal, premotora y parietal, [5], tal que se lleva a cabo primero en la corteza prefrontal, posteriormente en la premotora y finalmente en la parietal, [40]. Esta activación secuencial fue detectada con medición EEG por Kuramoto. utilizando el paradigma MI de las piernas, [61], y las regiones de las que midieron actividad EEG fueron la prefrontal, la temporal y la premotora. Sin embargo, se ha demostrado que para este paradigma MI también existe actividad en la región parietal, [7, 50], en donde se determina la activación relativa a la atención.

## 2.8. Comentarios

Como se puede observar existen un gran número de publicaciones de procesamiento de señales, control de robots, teoría *wavelet* y control multiresolución, y de aplicaciones de cada uno de estas áreas. La contribución que se presenta en este trabajo de tesis es la unión de sistemas BCI, teoría *wavelet* y control automático con aplicaciones en robótica.

# Capítulo 3

## Análisis multiresolución *wavelet*

El contenido de este capítulo es el corazón de la tesis ya que presenta las bases matemáticas sobre la teoría *wavelet*, principalmente en análisis multiresolución y codificación sub-banda. Por lo tanto, el objetivo de este capítulo es presentar a detalle el análisis multiresolución *wavelet* de señales.

La organización de este capítulo se presenta de forma que se comprenda el proceso de descomposición de las señales EEG, la Sección 3.1 se da una breve introducción del análisis de señales, en la Sección 3.2 se presenta el análisis multiresolución basado en *wavelets*, posteriormente, en la Sección 3.3 se presenta la teoría de codificación sub-banda que se utilizara para la descomposición de las señales EEG y de las señales de error de seguimiento para el diseño del CPM, y finalmente se da un breve comentario sobre este capítulo.

### 3.1. Introducción

El análisis multiresolución, que como lo dice su nombre es un análisis de la señal a estudiar de tal modo que cada componente de frecuencia es analizado con una resolución diferente. Esto es una alternativa más sobre la transformada en tiempo corto de Fourier (TTCF) que analiza todas las componentes de frecuencia a una misma resolución dada.

En la Figura 3.1 los ejes que se manejan son tiempo y frecuencia, aquí se ejemplifica lo que se mencionó anteriormente. Cabe señalar que para la transformada de tiempo corto de Fourier (TTCF) las ventanas son de igual tamaño para todos los casos ya que la función utilizada para ese análisis no se dilata ni se contrae (ver Figura 3.1a), lo que representa una ventaja de la transformada *wavelet* sobre la TTCF, ya que se puede tener mayor detalle del comportamiento de la señal, dada la resolución que puede alcanzar.

La función base  $e^{i\omega_k t}$  (empleada en la transformada de Fourier) representa líneas

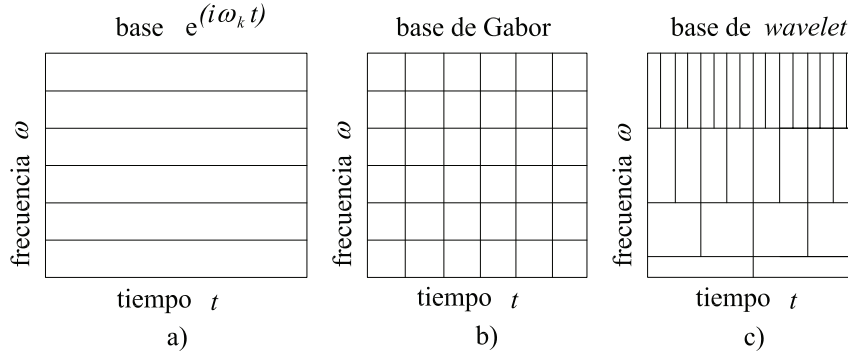


Figura 3.1: Plano tiempo-frecuencia para diferentes bases ortogonales: a) base de Fourier, b) base de Gabor y c) base *wavelet*.

horizontales, infinitamente pequeñas y rectángulos infinitamente largos. La base *wavelet* corresponderá a rectángulos finitos, estrechos y altos; rectángulos delgados para altas frecuencias, y anchos y pequeños para bajas frecuencias, como se muestra en la Figura 3.1c,

Una primera tentativa de alcanzar tal objetivo es dada por la transformada ventaneada de Fourier o por la TTCF. Aquí las funciones de la base  $e^{i\omega t}$  se substituyen por versiones ventaneadas  $\psi_{\omega,b}(t) = g(t-b)e^{i\omega t}$ , donde  $g$  es una ventana. En el caso de la transformada Gabor la correspondiente ventana es  $g(t) = e^{(-t^2)}$ , cuyo plano tiempo frecuencia es una cuadrícula mostrada en la Figura 3.1b.

## 3.2. Análisis multiresolución

El propósito de esta sección es familiarizarse con los terminos matemáticos de álgebra lineal [80], análisis real [55] y de herramientas necesarias para el el análisis multiresolución *wavelet* que permite obtener aproximaciones consecutivas de una señal en niveles de resolución más finos [32].

Para el análisis multiresolución basado en *wavelets*, se tiene que: Sea  $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  la cual se llama la *función de escalonamiento*. Definiendo las siguientes funciones

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\phi(2^{-j}x - k); \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (3.1)$$

donde la base

$$\{\phi_{j,k}(x) | k \in \mathbb{Z}\}, \quad (3.2)$$

es estándar y ortonormal,  $j$  y  $k$  son la dilatación y traslación de la función de escalonamiento, respectivamente.

Ahora, sea  $V_j$  el subespacio escalado de  $L^2(\mathbb{R})$  generado con la base ortonormal estándar, es decir, una cadena anidada de subespacios cerrados

$$\cdots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots, \quad (3.3)$$

tal que

$$\bigcap_j V_j = \{0\}, \quad (3.4)$$

$$\text{cl} \left\{ \bigcup_j V_j \right\} = L^2(\mathbb{R}), \quad \text{cl} = \text{clausura}, \quad (3.5)$$

donde  $V_j$  es el subespacio generado por  $\{\phi_{j,k}\}_{k=0}^\infty$ .

Para obtener un subespacio ortonormal complementario de  $V_j$ , es decir

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j; \quad V_j \perp W_j; \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.6)$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j. \quad (3.7)$$

El análisis multiresolución cumple con la propiedad

$$V_0 = V_1 \oplus W_1 = V_2 \oplus W_2 \oplus W_1 = V_3 \oplus W_3 \oplus W_2 \oplus W_1 = \cdots, \quad (3.8)$$

y

$$V_j = \text{span}\{2^{-\frac{j}{2}}\phi(2^{-j}x - k)\}; \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.9)$$

$$W_j = \text{span}\{2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}x - k)\}; \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3.10)$$

Entonces existe una función  $\psi(x) \in W_0$  tal que el conjunto

$$\{\psi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}, \quad (3.11)$$

cuyas funciones

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}x - k); \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (3.12)$$

se hace para obtener una base estándar ortonormal de  $W_0$ . Tradicionalmente se llama a  $\psi$  función *wavelet* o función madre. Ahora se emplea este andamiaje matemático para la representación de funciones dada las bases estándares construidas previamente. Para efectuar dicha representación se proponen dos formas distintas de acuerdo con (3.6 - 3.7).

Dada  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  se puede descomponer por:

(a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x), \\
f(x) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

(b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_{J,k}(x) \rangle \phi_{J,k}(x) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x), \\
f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{J,k} \phi_{J,k}(x) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Lo importante aquí es que la descomposición de la función  $f(x)$  para valores lo suficientemente grandes de  $J$ , puede ser aproximada arbitrariamente cerca de  $V_J$ . Esto que  $\exists$  algún  $\epsilon > 0$

$$\|f(x) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{J,k} \phi_{J,k}(x)\| < \epsilon. \tag{3.15}$$

La aproximación por el truncamiento de la descomposición *wavelet* puede ser aproximada como:

$$f(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{J,k} \phi_{J,k}(x). \tag{3.16}$$

Esta expresión indica que algunos componentes finos de frecuencias altas que pertenecen al espacio *wavelet*  $W_j$  para la función  $f(x)$  son eliminados y los componentes de frecuencias bajas que pertenecen al espacio escalado  $V_j$  son preservados para aproximar la función original a una escala  $J$ . En realidad, la mayoría de los procesos dinámicos son en general pasa bajos.

Entonces (3.16) nos dice que cualquier función  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  puede ser aproximada por una combinación lineal finita.

### 3.3. Análisis sub-banda

Una forma eficiente para realizar el análisis multiresolución basada en *wavelets* es desarrollarla en una estructura de codificación sub-banda, la condificación sub-banda

fue propuesta por Croisier, Esteban y Galand [8], usando una clase especial de filtros llamados filtros de espejo de cuadratura (FEC), y por Crochiere, Webber y Flanagan [8], esto permitió el estudio de banco de filtros de reconstrucción perfecta. Un banco de filtro puede ser usado bajo ciertas condiciones para generar bases *wavelets*, como lo mostró I. Daubechies [19], los cuales permiten realizar un descomposición de una señal  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ .

El proceso requerido para el análisis multiresolución empleando el esquema de codificación sub-banda, está compuesto de dos etapas: El análisis de descomposición mostrado en la Figura 3.2, y la síntesis de descomposición mostrado en la Figura 3.3.

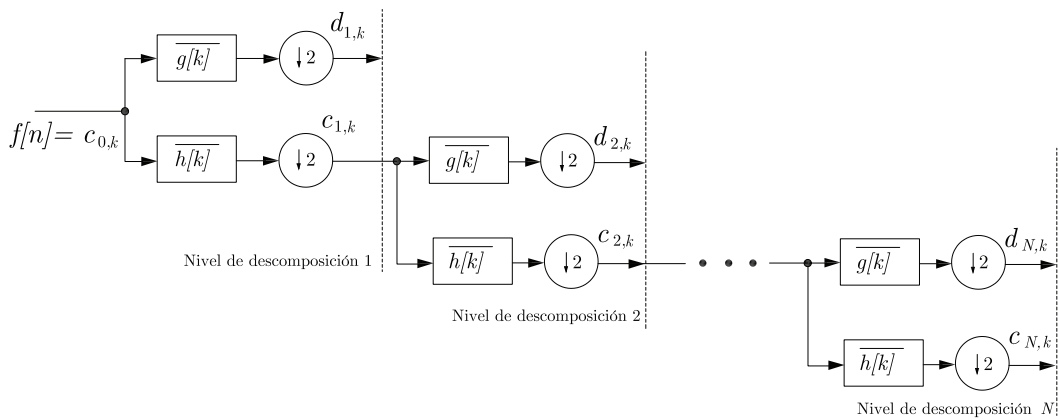


Figura 3.2: Análisis de descomposición de la función  $f[n]$ .

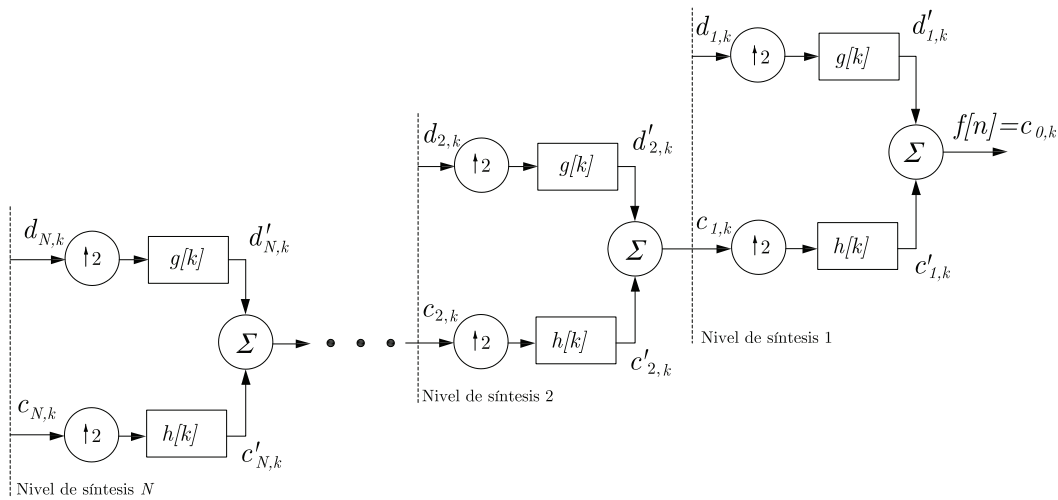


Figura 3.3: Síntesis de descomposición de la señal  $f[n]$ .

En el análisis de descomposición la señal de entrada  $f[n]$  (donde  $f[n]$  es la señal

muestreada de  $f(x)$  es pasada a través de un filtro pasa bajas  $\overline{h[k]}$  y el otro es un filtro pasa altas  $\overline{g[k]}$  (que son los filtros conjugados de  $h[k]$  y  $g[k]$ ), los cuales manejan la mitad del ancho de banda de la señal de entrada  $f[n]$ . El símbolo  $\downarrow 2$  representa la operación de decimación a dos (*down sampling*). La salida del filtro pasa bajas se vuelve a enviar a otro par de filtros de las mismas características. De este modo se va reduciendo el ancho de banda de la señal y eso se traduce en la reducción a la mitad de la resolución. Lo que significa que a mayor número de etapas de filtrado se tendrá una mayor resolución [67].

En la síntesis de descomposición se recupera la señal  $f[n]$  a través de las señales descompuestas  $c_{m,k}$  y  $d_{m,k}$ , pasando primero por una interpolación a dos (*up sampling*) representado por el símbolo  $\uparrow 2$ , seguida de un filtro pasa bajas  $h[k]$  para  $c_{m,k}$  y un filtro pasa altas  $g[k]$  para  $d_{m,k}$ .

A continuación se desglosa un poco más estas etapas, para tratar con la convolución seguida de una decimación (como se muestra en la Figura 3.2) la cual es requerida para la descomposición de la señal, la interpolación a dos seguida de una convolución (como se muestra en la Figura 3.3) requerida para la recuperación de la señal.

### 3.3.1. Análisis de descomposición

El proceso del análisis de descomposición consiste en tomar una señal  $f[n]$  y descomponerla hasta un nivel de descomposición  $N$ . Pasando la señal  $f[n]$  a través de un par de filtros conjugados  $\overline{h[k]}$  y  $\overline{g[k]}$ , generando  $c_{1,k}$  y  $d_{1,k}$ , para posteriormente tomar la señal  $c_{1,k}$  y pasarla a través de un par de filtros conjugados de las mismas características que los anteriormente mencionados, generando las señales  $c_{2,k}$  y  $d_{2,k}$ , y así hasta obtener las señales  $c_{N,k}$  y  $d_{N,k}$  en el nivel de descomposición  $N$ , como se muestra en la Figura 3.2. De manera general el proceso consiste de tomar una señal  $c_{i-1,k}$  pasarla a través del par de filtros conjugados  $\overline{h[k]}$  y  $\overline{g[k]}$  y entregar las señales  $c_{i,k}$  y  $d_{i,k}$ . Estos pasos son repetitivos en cada nivel de descomposición, además el proceso de tomar la señal y pasarla a través del filtro conjugado, también es repetitivo.

Dado  $i = 1, 2, \dots, N$ , donde  $N$  es el nivel de descomposición. Para un nivel de descomposición  $i$ , se tiene que,  $c_{i-1,k}$  es la señal de entrada y  $\overline{h[k]}$  el filtro conjugado, que genera la señal  $c_i$  (para generar la señal  $d_{i,k}$  se emplea el filtro conjugado  $\overline{g[k]}$ ) como se muestra en la Figura 3.4.

El diagrama mostrado en la Figura 3.4, es una convolución seguida de una decimación a dos, cuya representación matemática puede ser expresada como:

$$c_i[n] = \{c_{i-1,k}[n] * \overline{h[n]}\}_{\downarrow 2}, \quad (3.17)$$

donde  $c_i$  es la señal de salida después de ser descompuesta,  $c_{i-1,k}$  es la señal de entrada a ser descompuesta,  $\overline{h[k]}$  es filtro conjugado de longitud  $\kappa$ . Si  $\nu_i[n]$  es la salida de la convolución entre  $c_{i-1}[n]$  y  $\overline{h[n]}$  representado matemáticamente como [32]:

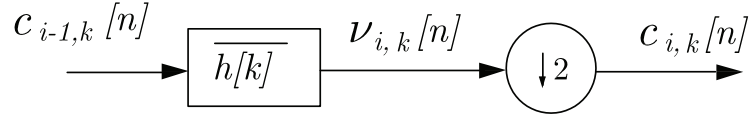


Figura 3.4: Diagrama de una convolución seguida de una decimación a dos, donde  $c_{i-1}[n]$ ,  $c_{i,k}[n]$  y  $\nu_{i,k}[n]$  son la señal de entrada, la señal de salida y la señal resultante de la convolución entre la entrada y el filtro conjugado  $\overline{h[k]}$  de longitud  $\kappa$ .

$$\nu_{i,k}[n] = \sum_{k=0}^{\kappa-1} \overline{h[k]} c_{i-1,k}[n-k], \quad (3.18)$$

entonces la decimación a dos de  $\nu_{i,k}[n]$  es:

$$c_i[n] = \nu[2n] = \sum_{k=0}^{\kappa-1} \overline{h[k]} c_{i-1,k}[2n-k], \quad (3.19)$$

de la misma forma para calcular  $d_{i,k}$  se calcula como (3.20) y la Figura 3.5 muestra su diagrama para el proceso.

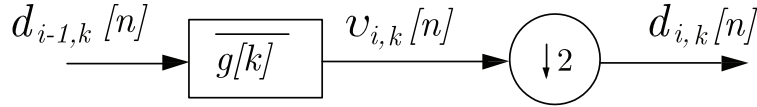


Figura 3.5: Diagrama de una convolución seguida de una decimación a dos, donde  $d_{i-1}[n]$ ,  $d_{i,k}[n]$  y  $v_{i,k}[n]$  son la señal de entrada, la señal de salida y la señal resultante de la convolución entre la entrada y el filtro conjugado  $\overline{g[k]}$  de longitud  $\kappa$ .

$$d_i[n] = v[2n] = \sum_{k=0}^{\kappa-1} \overline{g[k]} c_{i-1,k}[2n-k], \quad (3.20)$$

donde

$$v_{i,k}[n] = \sum_{k=0}^{\kappa-1} \overline{g[k]} c_{i-1,k}[n-k]. \quad (3.21)$$

Para el caso en que el  $i = 1$  considera a  $c_{0,k}$  como  $f[n]$ . El algoritmo para el análisis de descomposición es dado por el Algoritmo 3.1.

<b>ALGORITMO 3.1:</b> Algoritmo de análisis de descomposición
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Se toma la señal <math>f[n]</math> y se calcula <math>c_{1,k}[n]</math> y <math>d_{1,k}[n]</math> con (3.19) y (3.20), respectivamente. Considerando a <math>f[n] = c_{0,k}</math>.</li> <li>2. Ahora se toma <math>c_{i-1,k}[n]</math>, y se calcula <math>c_i[n]</math> y <math>d_i[n]</math> con (3.19) y (3.20), respectivamente, para <math>i = 2, 3, \dots, N</math>.</li> </ol>



### 3.3.2. Síntesis de descomposición

El proceso de la síntesis de descomposición consiste en tomar las señales  $c_{N,k}$  y  $d_{N,k}$  desde el nivel de descomposición para recuperar la señal  $c_{N-1}$ , posteriormente ahora tomar las señales  $c_{N-1}$  y  $d_{N-1}$  para obtener  $c_{N-2}$  y así hasta obtener  $f[n]$ , como se muestra en la Figura 3.3. Para la elaboración de este proceso en cada nivel de síntesis se requiere de hacer una interpolación a dos seguida de una convolución. Ésto para recuperar la señal  $c_{i,k}$  y  $d_{i,k}$  y obtener  $c_{i-1,k}$  en un nivel de síntesis  $i$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ .

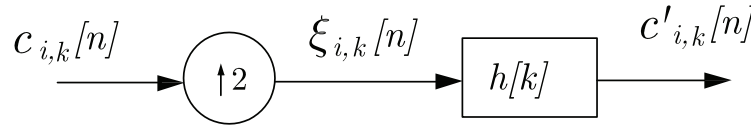


Figura 3.6: Diagrama de una interpolación a dos seguida de una convolución, donde  $c_i[n]$ ,  $c'_{i,k}[n]$  y  $\xi_{i,k}[n]$  son la señal de entrada, la señal de salida y la señal resultante de la interpolación a dos de la entrada, y  $g[k]$  es el filtro de longitud  $\kappa$ .

En la Figura 3.6, se muestra una interpolación a dos seguida de una convolución, cuya representación matemática es dada por:

$$c'_{i,k} = \{h[k] * c_{i,k}\}_{\uparrow 2}, \quad (3.22)$$

donde  $c'_{i,k}$  es la señal de salida,  $h[k]$  es el filtro de longitud  $\kappa$ ,  $c_{i,k}$  es la señal señal de entrada (para el caso de  $d'_{i,k}$  como salida y  $c_{i,k}$  como entrada el filtro utilizado es  $g[n]$ ). Si  $v_{i,k}[n]$  es el resultado de interpolar a dos a  $c_{i,k}$ , y cuya representación matemática es:

$$\xi_{i,k}[n] = \begin{cases} c_{i,k}[\frac{n}{2}], & \text{para } n = 2\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.23)$$

por lo que la salida  $c'_{i,k}$  es dada por:

$$c'_{i,k}[n] = \sum_{k=0}^{\kappa-1} h[k]\xi_{i,k}[n-k]. \quad (3.24)$$

Para  $d'_{i,k}$  se recupera de la misma forma con (3.25), y la Figura 3.7 muestra el diagrama para el proceso

$$d'_{i,k}[n] = \sum_{k=0}^{\kappa-1} g[k]\zeta_{i,k}[n-k], \quad (3.25)$$

donde

$$\zeta_{i,k}[n] = \begin{cases} d_{i,k}[\frac{n}{2}], & \text{para } n = 2\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.26)$$

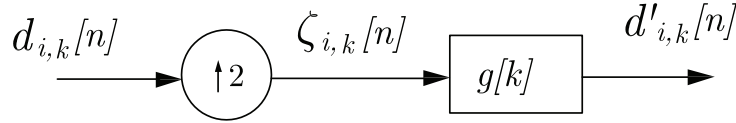


Figura 3.7: Diagrama de una interpolación a dos seguida de una convolución, donde  $d_i[n]$ ,  $d'_{i,k}[n]$  y  $\zeta_{i,k}[n]$  son la señal de entrada, la señal de salida y la señal resultante de la interpolación a dos de la entrada, y  $g[k]$  es el filtro de longitud  $\kappa$ .

Una vez calculadas  $c'_{i,k}[n]$  y  $d'_{i,k}[n]$ , la señal recuperada  $c_{i-1,k}[n]$  para el siguiente nivel de síntesis, es obtenida por:

$$c_{i-1,k}[n] = c'_{i,k}[n] + d'_{i,k}[n]. \quad (3.27)$$

ALGORITMO 3.2: Algoritmo de síntesis de descomposición
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Se toma la señal <math>c_{N,k}[n]</math> y <math>d_{N,k}[n]</math> y se calcula <math>c_{N-1,k}</math>, con (3.23) - (3.27).</li> <li>2. Ahora se toma <math>c_{i,k}</math> y <math>d_{i,k}[n]</math>, y se calcula <math>c_{i-1}[n]</math> y <math>d_{i-1}[n]</math> con (3.23) - (3.27), para <math>i = 1, 2, 3, \dots, N - 1</math>.</li> </ol>

El algoritmo para recuperar un señal desde el nivel de síntesis  $N$ , es dado en el Algoritmo 3.2.

En la siguiente sección se emplea esta herramienta de descomposición *wavelet* para señales EEG para la extracción de características que se utilizan como comando de referencia en un sistema de control.

### 3.4. Comentarios

El análisis multiresolución *wavelet* es una herramienta con grandes ventajas para el análisis de señales EEG, ya que es una herramienta que nos proporciona tanto en frecuencia como en tiempo.

# Capítulo 4

## Análisis multiresolución de señales EEG

En este capítulo se describe el procedimiento para la adquisición y procesamiento de las señales EEG que serán interpretadas en señales de referencia para un CPM. El contenido de este capítulo está organizado de la siguiente manera, en la Sección 4.1 se describe la adquisición de las señales EEG desde la colocación de los sensores hasta la selección del sensor que proporciona información suficiente para el desarrollo de este tema de investigación, en la Sección 4.2 se detallan las etapas de pre-procesamiento y procesamiento de las señales EEG, también se describe el proceso de análisis multiresolución y codificación sub-banda para la extracción de las características principales para después convertirlas en comando de referencia para la ley de control detallada en el siguiente capítulo y finalmente en la Sección 4.3 se presentan los comentarios del capítulo.

### 4.1. Adquisición de señales EEG

La adquisición y almacenamiento de datos de señales EEG no es una tarea trivial, debido que el proceso presenta señales de ruido y perturbaciones que no son deseadas, las señales que se pueden registrar son por interferencia eléctrica, por aparatos electrónicos cercanos o por el contacto entre el cuero cabelludo con los sensores, lo que hace necesario realizar un gran número de experimentos con diferentes usuarios voluntarios sanos para poder identificar y conocer el comportamiento de las señales bajo ciertas circunstancias físicas y mentales, la adquisición de las señales EEG se obtienen con el dispositivo Emotiv Epoc, las especificaciones técnicas y forma de uso se describen en Anexo C. El procedimiento de la adquisición se empieza verificando que el casco Emotiv Epoc funcione correctamente y para esto se verifica en el panel de control que proporciona el distribuidor del dispositivo, en la Figura 4.1 se puede

apreciar que la mayoría de los sensores se muestran de color verde eso nos indica que tiene una buena conducción de la señales EEG, así es como se desea que estén todos los sensores para una buena adquisición de datos.

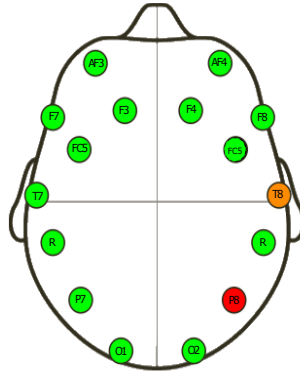


Figura 4.1: Colocación de los electrodos [1].

Teniendo en cuenta que el casco Emotiv Epoc se encuentra funcionando correctamente se procede a adquirir señales EEG para poder familiarizarse con su comportamiento, los datos obtenidos se visualizan en la plataforma de LabVIEW 2014, se opta por esta plataforma ya que cuenta con un programa demo que facilita la adquisición, los datos que se obtienen son guardados en un archivo con extensión *\*.txt* para su análisis fuera de línea, este proceso se realiza en Matlab[referenciar], en la Figura 4.2 se muestran las señales de cada uno de los sensores del casco que fue colocado a un usuarios.

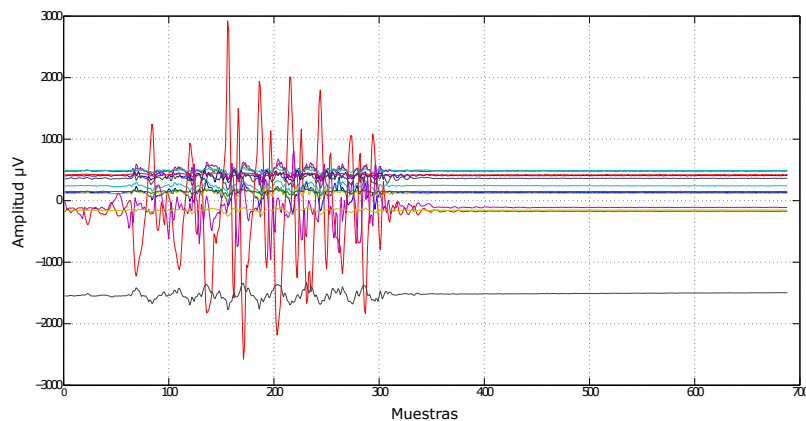


Figura 4.2: Señales crudas adquiridas del dispositivo Emotiv Epoc.

Como se puede apreciar en la Figura 4.2 las señales están acompañadas de ruido, la causa del ruido es por la acción motriz que se realiza de cualquier extremidad, movimiento ocular, entre otras acciones corporales que se registran sobre toda la capa cortical [75], por el cual se procede a realizar experimentos para identificar cuáles son los sensores que entregan la mayor cantidad de información de la actividad de movimiento motriz, en la Sección 2.7 se muestra una breve descripción de las zonas cerebrales que se activan con la actividad motriz, de igual manera como se menciona en [11] los sensores que favorecen la adquisición de los datos son el  $F3$  y  $F4$  que se encuentran colocados en la zona del lóbulo frontal, se trabaja solo con estos dos sensores para ahorro de recursos computacionales y por cuestiones prácticas, una forma de comprobar estos resultados se hace uso de la herramienta de diagramas de Caja y Bigotes para encontrar características importantes [3], tales como la dispersión y simetría el la Figura 4.3 se muestran estos resultados el cual comprueba que el sensor  $F3$  es el que contiene mayor información, región donde se registran movimientos tanto imaginados como realizados, que son de interés para el desarrollo de esta tesis en la Figura 4.4 se muestran las señales de los sensores seleccionados para la adquisición de los datos.

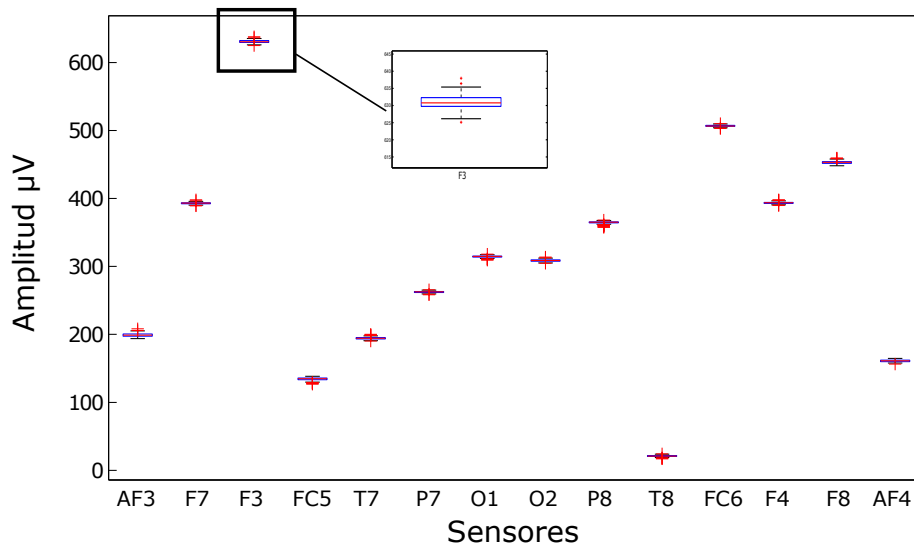


Figura 4.3: Diagrama de Caja y Bigotes de los 14 electrodos del casco Emotiv Epoc [3].

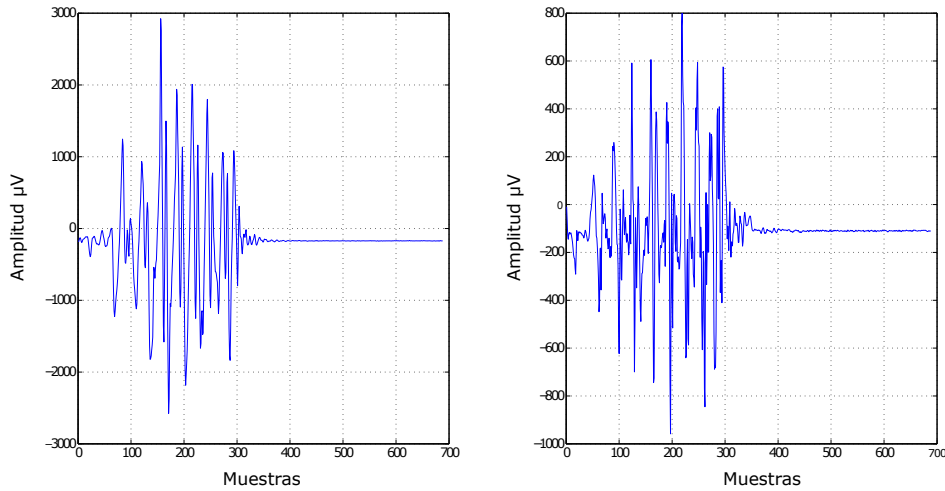


Figura 4.4: Señales de los sensores  $F3$  y  $F4$  respectivamente adquiridas con el casco de Emotiv Epoc.

Así se concluye la etapa de reconocimiento y adquisición de las señales EEG que se ocuparán para el comando de un sistema BCI.

## 4.2. Procesamiento de señales EEG

Un sistema BCI requiere del conocimiento de las señales EEG para determinar un comando de referencia para propósitos de control automático de un sistema robótico, siendo éste el objetivo central de la tesis. El algoritmo implementado en esta tesis para el procesamiento de señales EEG es análisis de descomposición multiresolución basado en *wavelets*.

Generalmente como se mencionó en la Sección 2.6, los protocolos utilizados en BCI son sincrónicos y asíncronos. Esta tesis centra su interés en los asíncronos con la finalidad de permitir al usuario generar tareas voluntarias sin necesidad de tener un estímulo externo y evitar algún problema de frustración, estrés o carga mental.

### 4.2.1. Señales EEG para sistemas BCI

Las señales EEG son adquiridas a través de sensores no invasivos colocados sobre el cuero cabelludo [66]. Ya medidas las señales crudas, se acondicionan para atenuar el ruido, entre los que se encuentran los potenciales eléctricos que provienen de otras fuentes, como son movimiento de ojos y músculos. Las frecuencias de las señales que provienen del movimiento de los ojos son frecuencias menores a  $5Hz$  y su amplitud

es de  $\pm 500\mu V$ , en el caso de las señales debidas a movimientos musculares son mayores a  $20Hz$  y la amplitud se encuentra en rangos de  $mV$  [66], los algoritmos para atenuar tales componentes deben garantizar la conservación de información útil para los sistemas BCI. Los dispositivos de adquisición de señales EEG, como el casco Emotiv Epoc, cuenta con pre-amplificación y filtrado de ruido, por lo que entrega una señal apropiada para las etapas de procesamiento, extracción de características, clasificación e implementación en un lazo de control de un dispositivo robótico.

### 4.2.2. Procesamiento de señales EEG

Las señales EEG son altamente no estacionarias y no Gaussianas, por lo anterior los algoritmos empleados en el procesamiento lo debe considerar para caracterizar, clasificar y obtener un comando de referencia para un sistema de control en un enfoque de sistemas BCI.

Las etapas de procesamiento de señales EEG, incluyen un transductor después de la obtención de las señales, pre-amplificación, amplificación y filtrado, digitalización, extracción de características y clasificación, [66]. El casco Emotiv Epoc cuenta con las primeras etapas de procesamiento. El algoritmo empleado para el procesamiento de señales EEG en este trabajo de tesis es análisis multiresolución basado en teoría *wavelet* para descomponer la señal en diferentes bandas de tiempo-frecuencia, con previo pre-procesamiento que consta de un filtro para atenuar las señales mayores a  $60Hz$  provenientes de agentes externos, la señal obtenida se trata por el algoritmo de análisis multiresolución, encontrando la banda se procede a encontrar un patrón para determinar la referencia de control. A continuación se describen a detalle estos algoritmos.

### 4.2.3. Pre-Procesamiento

El objetivo de esta etapa es atenuar señales de altas frecuencias, mayores a  $60Hz$ , que son las provenientes de fuentes externas como son las líneas de la energía eléctrica y hacer las señales de media cero para tener señales normalizadas. El algoritmo utilizado en este trabajo de tesis es un diferenciador con un filtro Notch a  $62.5Hz$  [30]

$$Y[n] = f[n] - f[n - 4], 4 < n < N \quad (4.1)$$

donde,  $N$  es el número de muestras entregadas por el casco Emotiv Epoc, en la Figura 4.5 se muestra la señal del sensor  $F3$  pasada por la etapa de pre-procesamiento.

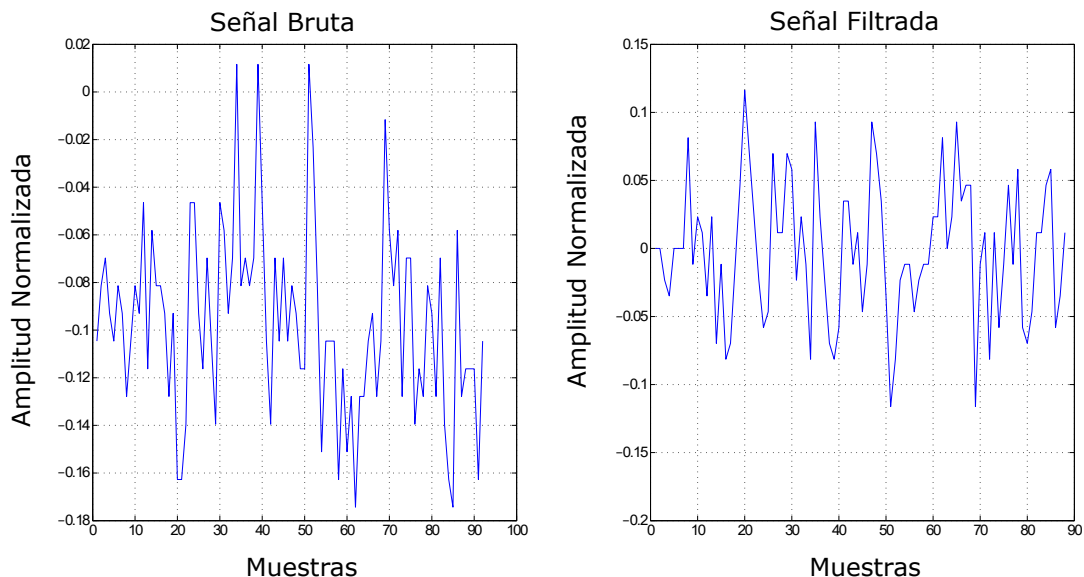


Figura 4.5: Señal del sensor  $F3$  pasada por la etapa de pre-procesamiento.

#### 4.2.4. Extracción de características

La extracción de características consiste en encontrar un modelo que describa el comportamiento de la señal, para este caso de estudio se basa en el cálculo de un umbral para poder decidir si se utiliza como comando de control. En general, para el modelado se utiliza herramientas de multiresolución y  $DWT$  [6, 23, 77].

##### Análisis Multiresolución

Aún cuando la transformada *wavelet* continua (CWT) puede evaluarse computacionalmente de manera discretizada, esto no constituye realmente una transformada discreta, sino una serie *wavelet* o la versión muestreada de la CWT, con la desventaja que la información que entrega es altamente redundante para la reconstrucción de la señal. Esta redundancia significa además un aumento significativo del tiempo de cálculo. Por este motivo se realiza la DWT que es capaz de entregar suficiente información tanto para el análisis como para la síntesis de una señal con una significativa reducción de tiempo de procesamiento, además, es mucho más fácil su implementación que la CWT [67].

Para ser útil, la teoría de *wavelets* debe disponer de algoritmos rápidos para su bajo costo computacional, es decir, un método similar a la FFT para encontrar los coeficientes *wavelets* y para reconstruir la función que representan. Existe una familia

rápida de algoritmos basados en análisis multiresolución. El análisis multiresolución, se desarrolló para descomponer señales de tiempo discreto. La idea es la misma que en la CWT, obtener una representación tiempo-escala de una señal discreta. En este caso, filtros con distintas frecuencias de corte son usados para analizar la señal en diferentes escalas. La señal se pasa a través de filtros pasa altas para analizar los componentes de alta frecuencia, y se pasa a través de filtros pasa bajas para analizar componentes de baja frecuencia. Estas operaciones cambian la resolución de la señal, y la escala se cambia mediante operaciones de interpolación y submuestreo [32].

El análisis de multiresolución de *Mallat* [53] está relacionado con este algoritmo piramidal. En este caso, se incluyen filtros de espejo en cuadratura. Por lo tanto, la representación tiempo-escala de una señal digital se obtiene usando técnicas de filtrado digital. El proceso de descomposición comienza pasando la secuencia discreta correspondiente a la señal a través de un filtro pasa bajas con respuesta al impulso  $h_0[k]$ . El filtrado de la señal corresponde a la operación matemática de convolución de ésta con  $h_0[k]$ . Este filtro atenúa las componentes frecuenciales situadas por encima de la mitad del ancho de banda de la señal.

### Codificación sub-banda

La idea básica es la misma que se emplea en la CWT, es decir obtener una representación tiempo-escala de una señal usando técnicas de filtrado digital. Recordar que la CWT puede interpretarse como una medida de similitud que existe entre la *wavelet* con diferentes escalas con la señal. La CWT se evalúa modificando la escala de la ventana de análisis, desplazando la ventana en el tiempo, multiplicándola por la señal e integrándola en el tiempo. En el caso discreto, se utilizan filtros con diferentes frecuencias de corte para analizar la señal a diferentes escalas; de este modo la señal se pasa a través de una serie de filtros pasa altas para analizar las altas frecuencias y de filtro pasa bajas para analizar las bajas frecuencias.

La resolución, que es una medida de la cantidad de detalle de la señal, varía por la operación de filtrado, mientras que la escala varía mediante operaciones de submuestreo (interpolación, submuestreo), que consiste en reducir la tasa de muestreo o eliminar algunas muestras de la señal. Por ejemplo, submuestrear por dos significa tomar una de cada dos muestras de la señal. El submuestreo por un factor “ $n$ ” reduce el número de muestras de la señal “ $n$ ” veces.

Interpolación de una señal significa incrementar la tasa de muestreo agregando nuevas muestras a la señal. Por ejemplo, interpolación por “2” significa agregar una nueva mues-

tra, usualmente un cero o un valor interpolado entre dos muestras de la señal. Por lo tanto, interpolar una señal por un factor de de “ $n$ ” aumenta el número de las muestras en la señal por un factor “ $n$ ”.

Aun cuando es la única elección posible los coeficientes de la DWT comúnmente se calculan mediante una escala diádica como lo podemos apreciar en la Sección A.3.1 del Anexo A, es decir los parámetros de escala y traslación son elegidos tal que  $a, b$  son solamente valores discretos  $a = a_0^m$ ,  $b = kb_0a_0^m$ , donde  $a_0 > 1$ ,  $b_0 > 0$  son valores fijos. Como la señal ahora es una función discreta en el tiempo, los términos función y secuencia se usarán indistintamente en este análisis y la señal se denotará como  $f[n]$  [32].

El procedimiento para obtener la DWT comienza pasando la señal (secuencia) a través de un filtro digital de pasa bajas con respuesta impulso  $\overline{h[k]}$ , este proceso de filtrado consiste en realizar matemáticamente la convolución de la secuencia con la respuesta impulso del filtro, lo cual se define como:

$$f[n] * \overline{h[n]} = \sum_k f[k] \cdot \overline{h[n-k]} \quad (4.2)$$

Un filtro pasa bajas atenúa todas las frecuencias que están por encima de la mitad de la mayor frecuencia de la señal, por ejemplo, si la señal tiene como máximo una componente de  $60Hz$ , este filtro atenúa todas las frecuencias sobre los  $30Hz$

En señales discretas la frecuencia se expresa en radianes, por lo que la frecuencia de muestreo de la señal es igual a  $2\pi$  en términos de la frecuencia radial. Es decir, la componente de mayor frecuencia que existe en la señal será de  $\pi$  radianes si el muestreo se realiza a la frecuencia de Nyquist, que corresponde al doble de la máxima frecuencia que existe en la señal; de este modo la frecuencia de Nyquist corresponde a  $\pi \text{ rad/s}$ , en el dominio discreto de la frecuencia, por esta razón no es apropiado el uso de  $Hz$  para señales discretas [86]. Sin embargo, puede expresarse la frecuencia en  $Hz$  a fin de clarificar el análisis, dado que es muy común pensar en frecuencia en términos de  $Hz$ .

Una vez que la señal ha pasado por el filtro pasa bajas, la mitad de las muestras se pueden eliminar de acuerdo a la regla de Nyquist [32], ya que la señal ahora tiene la mayor frecuencia en  $\pi/2$  radianes. Con este propósito se elimina una de cada dos muestras de la señal (submuestreo por 2) con lo cual se reduce el número de puntos a la mitad y la escala de la señal se duplica. Obsérvese que el filtrado pasa bajas atenúa la información de alta frecuencia, pero deja la escala invariable, puesto que solamente el proceso de submuestreo la altera. Por otra parte, como la resolución

está relacionada con la cantidad de información en la señal, ésta es alterada por las operaciones de filtrado. El filtrado pasa bajas atenúa la mitad de las frecuencias, lo que puede interpretarse como pérdida de la mitad de la información. Sin embargo, el proceso de submuestreo luego del filtrado no afecta a la resolución, ya que atenúa la mitad de las componentes espectrales, la mitad del número de muestras se hacen redundantes también, de este modo la mitad del número de las muestras pueden eliminarse sin ninguna pérdida de información. En resumen, el filtrado pasa bajas reduce a la mitad la resolución, pero no altera la escala. Posteriormente la señal es submuestreada por dos, puesto que la mitad del número de muestras son redundantes, esta operación duplica la escala.

El procedimiento anterior matemáticamente puede expresarse como:

$$c_i[n] = \sum_{k=0}^{\kappa-1} \overline{h[k]} c_{i-1,k}[2n - k], \quad (4.3)$$

Con lo cual ahora puede analizarse cómo se evalúa la DWT. La DWT analiza la señal descomponiéndola en un nivel de aproximación y en un nivel detalle, considerando diferentes bandas de frecuencias con distintas resoluciones para cada nivel. Con este propósito se emplean dos conjuntos de funciones denominadas: funciones de escalamiento y funciones *wavelet*, las que están asociadas a filtros pasa bajas y pasa altas, respectivamente. La descomposición de la señal en diferentes bandas de frecuencia se obtiene mediante un sucesivo filtrado de pasa bajas y pasa altas, por lo tanto la señal original  $f[n]$  se pasa a través de un filtro pasa altas  $\overline{g[k]}$  y de un filtro pasa bajas  $\overline{h[k]}$ ; después de este filtrado pueden eliminarse la mitad de las muestras de acuerdo a la regla de Nyquist, ya que la señal de ahora tiene una frecuencia superior de  $\pi/2$  radianes en vez de  $\pi$ , para ello se eliminan una de cada dos muestras (submuestreo por 2). De esta manera se ha constituido el primer nivel de descomposición, lo que matemáticamente puede expresarse como: (ver la Sección 3.3.1 para mas detalle)

$$d_i[n] = \sum_{k=0}^{\kappa-1} \overline{g[k]} c_{i-1,k}[2n - k],$$

$$c_i[n] = \sum_{k=0}^{\kappa-1} \overline{h[k]} c_{i-1,k}[2n - k],$$

donde  $d_i[n]$  y  $c_i[n]$  son las salidas de los filtros pasa altas y pasa bajas, respectivamente, después del submuestreo por 2.

Esta descomposición reduce a la mitad la resolución en el tiempo, como consecuencia de la reducción a la mitad del número de de muestras originales que caracterizan a la señal. Sin embargo, esta misma operación duplica la resolución en frecuencia ya

que ahora la banda de frecuencia de la señal abarca solo la mitad de la banda de frecuencias anteriores, lo que efectivamente reduce la incertidumbre en la frecuencia a la mitad. El procedimiento anterior se denomina codificación sub-banda y puede repetirse para conseguir una mayor descomposición, en este caso en cada etapa, el filtrado y el submuestreo darán como resultado una disminución a la mitad en número de muestras y de la banda de frecuencia abarcadas. En la Figura 3.2 muestra el procedimiento, donde  $f[n]$  es la señal original que se va a descomponer y  $\bar{h}[k]$  y  $\bar{g}[k]$  son los filtros pasa bajas y pasa altas respectivamente.

En este caso particular de estudio se analiza una señal de  $n$  muestras y una frecuencia en el rango de  $[0, 60]Hz$ . En el primer nivel de descomposición, la señal  $f[n]$  se pasa a través de los filtros pasa altas  $\bar{g}[k]$  y pasa bajas  $\bar{h}[k]$ , continuando con un submuestreo por dos.

La salida del filtro pasa altas tendrá  $n/2$  muestras con lo cual la resolución en el tiempo se ha dividido a la mitad, pero la frecuencia abarca ahora la banda entre  $[30, 60Hz]$  es decir, la resolución en frecuencia se ha duplicado. Estas  $n/2$  muestras constituyen el primer nivel de los coeficientes de la DWT.

La salida del filtro pasa bajas también tendrá  $n/2$  muestras, pero con una frecuencia que abarca el rango entre  $[0, 30Hz]$ , esta señal de salida se sigue descomponiendo pasándola nuevamente por filtros pasa altas y pasa bajas, así sucesivamente hasta obtener el nivel de resolución deseado, para este caso de estudio el nivel de descomposición es 5. La DWT de la señal original se obtiene concatenando todos los coeficientes de detalle que corresponden a la salida de los filtros pasa altas, comenzando desde el último nivel de descomposición, la DWT tendrá entonces el mismo número de coeficientes que la señal original.

Las frecuencias que son más dominantes en la señal original aparecerán como altas amplitudes en la región de la DWT que incluye esas frecuencias [32]. La diferencia entre la FT Y la DWT es que con la DWT no se pierde la localización en el tiempo de estas frecuencias. Sin embargo, la localización en el tiempo tendrá una resolución que dependerá del nivel en el que aparezca, de este modo si la información principal contenida en la señal está en altas frecuencias, como sucede a menudo, entonces la localización en el tiempo será más precisa, puesto que estarán caracterizadas por un mayor número de muestras. Por otro lado, si la información principal está a muy bajas frecuencias entonces su localización en el tiempo no podrá ser muy precisa, dado que existirán muy pocas muestras para caracterizar la señal a estas frecuencias.

En resumen, el procedimiento descrito ofrece una buena resolución en el tiempo para las altas frecuencias y una buena resolución en frecuencia para bajas frecuencias.

Las bandas de frecuencia que no son dominantes en la señal  $f[n]$  darán origen a coeficientes de la DWT muy pequeños, los cuales pueden despreciarse sin mayor pérdida de información, pero si con una importante reducción de datos.

Una propiedad importante de la DWT es la relación entre las respuestas impulso de los filtros pasa altas y pasa bajas. Estos filtros no son independientes entre sí y están relacionados a través de la siguiente ecuación:

$$g[\kappa - 1 - n] = (-1)^n \cdot h[k] \quad (4.4)$$

donde  $g[k]$  es un filtro pasa altas,  $h[k]$  es un filtro pasa bajas y  $\kappa$  es la longitud del filtro expresada en número de puntos. La conversión de pasa bajas a pasa altas se hace a través del factor  $(-1)^n$ , los filtros que satisfacen esta característica se conoce como filtros espejos en cuadratura (QMF).

Los dos filtrados y la operación de submuestreo puede expresarse como [32]

$$d_i[n] = \sum_{k=0}^{\kappa-1} f[n] \cdot \overline{g[-n + 2k]}$$

$$c_i[n] = \sum_{k=0}^{\kappa-1} f[n] \cdot \overline{h[-n + 2k]} \quad (4.5)$$

La forma más compacta de describir este proceso así como de representar los procesos para determinar los coeficientes *wavelet*.

Estas ecuaciones representan el filtrado de la señal mediante los filtros digitales  $\overline{h[k]}$ ,  $\overline{g[n]}$ , el factor  $2k$  representa el submuestreo.

La DWT puede ser resumida en una sola línea como:

$$DWT \rightarrow (d_{i-1}, d_{i-2}, \dots, d_1, d_0, c_0) \quad (4.6)$$

donde  $d_{i-1}, d_{i-2}, \dots, d_1, d_0$  se denominan coeficientes de detalle y  $c_0$  coeficiente de aproximación como se muestra en la Figura 4.6. Los detalles y aproximación se obtienen de forma iterativa.

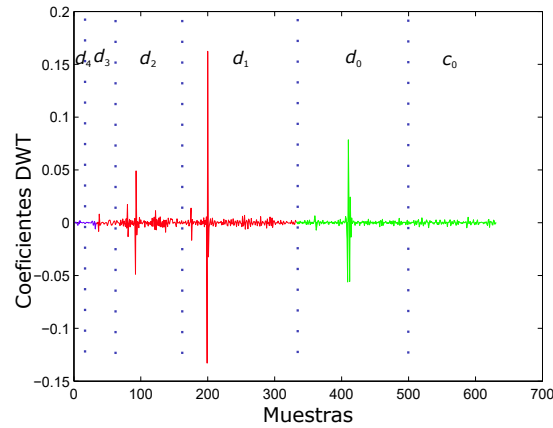


Figura 4.6: Representación de los coeficientes de detalle y coeficiente de aproximación de la señal del sensor  $F3$  con cinco niveles de descomposición.

Como observa en la Figura 4.6 los coeficientes de mayor cantidad de información de la señal original del electrodo  $F3$  se encuentran en la banda *Beta* y *Alpha* que corresponden a los movimientos realizados [75], conociendo esta información se puede calcular un umbral [30] para decidir si existe comando y con esto definir un rango de umbral y mandar la señal de control.

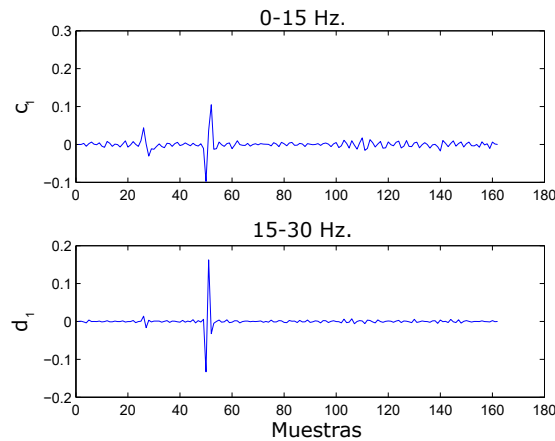


Figura 4.7: Coeficientes *wavelet* correspondientes a la banda *Beta* del segundo nivel de descomposición de la señal original del sensor  $F3$ .

En la Figura 4.7 se muestra la banda de *Beta* en la cual se calcula el umbral, el rango del umbral es entre  $[0.04, 0.08]$ , estos valores fueron seleccionados realizando experimentos con distintos usuarios y sacando los promedios de cada una de las pruebas, cabe mencionar que con estas señales se diseña el controlador que será utilizado

para cerrar el lazo del sistema BCI, en el siguiente capítulo se explicara a detalle la implementación de la ley de control a partir de la referencia enviada de esta etapa del proceso.

### **4.3. Comentarios**

Como se puede observar de este capítulo el análisis multiresolución en señales EEG es una gran herramienta para conocer su comportamiento en el plano tiempo-frecuencia a partir de la DWT, a partir esto poder diseñar un sistema BCI asíncrono para personas que se encuentren dentro del sistema y evitar algún tipo de estrés o frustración y modificar el desempeño del sistema.

# Capítulo 5

## Diseño de control multiresolución

En este capítulo se describe el diseño de un control multiresolución para los casos de sistemas SISO y sistemas no lineales MIMO, de igual manera se presenta los resultados de la simulación de cada uno de los controles.

La organización de este capítulo es, la Sección 5.1 se presenta una breve introducción al control multiresolución, posteriormente en la Sección 5.2 se presenta el procedimiento detallado para el diseño de un CPM para el caso SISO, también se presentan los resultados de la simulación de la implementación de un CPM para un motor de CD, así como también se dan los comentarios del desempeño del CPM para este tipo de sistemas, en la Sección 5.3 se presenta la estructura general de un control multiresolución para sistemas no lineales MIMO, también se presenta la identificación de los parámetros de la planta, así como el diseño del CPM y la sintonización de sus ganancias y finalmente en la Sección 5.4 se dan los comentarios de este capítulo.

### 5.1. Introducción

Con la aparición de la era digital en la década de los 60's la implementación de controladores PID discretos ha crecido de gran manera [47], lo cual ha permitido que diversa teorías se combinen con la finalidad de mejorar su desempeño y convergencia, entre las que podemos encontrar un PID robusto, PID difuso, PID no lineal, entre otros para el caso del PID multiresolución *wavelet* para el control de sistemas dinámicos [64], básicamente lo que hace es tomar la señal de error de seguimiento y emplear técnicas de análisis multiresolución para descomponer esta señal en diversas señales de alta, medias y bajas frecuencias que posteriormente son escaladas y sumadas para obtener la señal de control. Nosotros consideramos que este controlador PID multiresolución como lo llaman en [64] es en realidad un controlador proporcional multiresolución es por esta razón que hemos decidido adoptar este nombre en el desarrollo de esta tesis.

## 5.2. Control multiresolución, caso SISO

La Figura 5.1 muestra un esquema de control clásico, donde el controlador empleado es un PID. Si se puede obtener un modelo matemático de la planta, es posible aplicar diversas técnicas de diseño con el fin de determinar los parámetros del controlador que cumpla las especificaciones del transitorio y del estado estacionario del sistema en lazo cerrado [63].

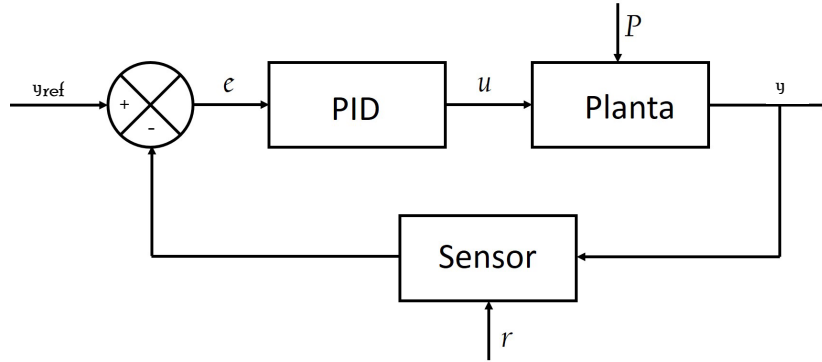


Figura 5.1: Esquema de control clásico, donde  $r$  es el ruido de la variable medida.

Un sistema de control clásico básicamente consiste de tres partes importantes las cuales son: la planta, que puede ser afectada por perturbaciones externas  $P$ , el bloque de sensores, y finalmente el control que hace que la planta se desempeñe de manera predeterminada con la finalidad de que la salida  $y$  se aproxime a  $y_{ref}$ .

En general, un control PID toma como entrada la señal de error  $e(t)$  y genera una señal de control  $u(t)$  [63],

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau + k_D \dot{e}(t) \quad (5.1)$$

donde  $k_p$ ,  $k_I$  y  $k_D$  son las ganancias del PID, y  $e(t)$  es la señal de error definida como,

$$e(t) = y_{ref}(t) - y(t) \quad (5.2)$$

La forma discreta del PID es [41]:

$$u(k) = u(k-1) + k_p[e(k) - e(k-1)] + k_I e(k) + k_D[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)], \quad (5.3)$$

Tomando las ganancias  $k_P$ ,  $k_I$  y  $k_D$  como parámetros ajustables, entonces (5.3) puede ser descrita como

$$u(k) = u(k-1) + \sum_{i=0}^2 k_i e(k-i), \quad (5.4)$$

o equivalente

$$\Delta u(k) = \sum_{i=0}^2 k_i e(k-i), \quad (5.5)$$

donde  $k_0 = k_P + k_I + k_D$ ,  $k_1 = -k_P - 2k_D$  y  $k_2 = k_D$ .

Sin embargo, si la planta es muy compleja que no es fácil obtener su modelo matemático, tampoco es posible un método analítico para el diseño de un controlador PID. En este caso, se debe recurrir a procedimientos experimentales para la sintonía de los controladores PID o recurrir a otro tipo de control como es el caso del CPM.

A partir de (5.5), se puede observar que la ley de control de un PID clásico es una descomposición lineal del error que consta de tres términos, esto hace la diferencia entre el PID clásico y el CPM [41], donde aquí el número de descomposición puede ser infinito, el método del CPM descompone la señal de error en alta, medianas y baja frecuencias, haciendo uso del análisis multiresolución de la señal de error de seguimiento  $e(t)$  como se muestra en la Figura 5.2.

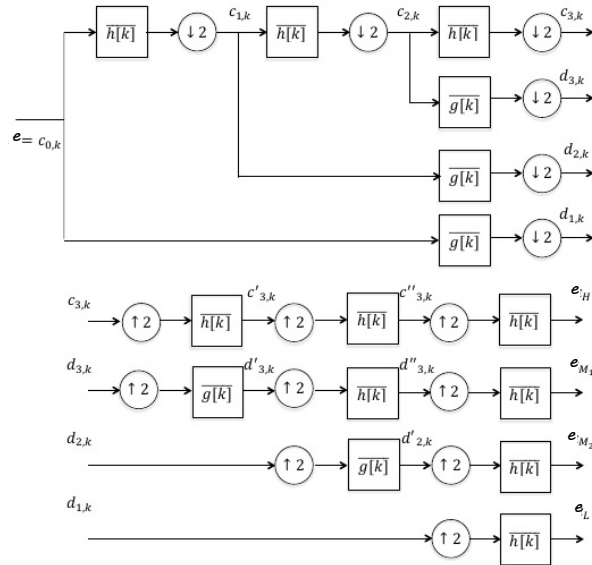


Figura 5.2: Esquema de codificación sub-banda de la señal  $e(t)$  para tres niveles de descomposición.

Cada una de estas componentes de la salida del síntesis multiresolución son escaladas con sus respectivas ganancias y finalmente sumadas para generar la señal de control  $u(t)$  correspondiente, como se muestra a continuación,

$$u(t) = K_H e_H + K_{M_1} e_{M_1} + K_{M_2} e_{M_2} + \dots + K_{M_{N-1}} e_{M_{N-1}} + k_L e_L \quad (5.6)$$

$$u(k) = KE \quad (5.7)$$

donde

$$K = [K_H \ K_{M_1} \ \dots \ K_{M_{N-1}} \ K_L] \quad (5.8)$$

$$E = [e_H \ e_{M_1} \ \dots \ e_{M_{N-1}} \ e_L]^T \quad (5.9)$$

donde  $N$  es el nivel de descomposición del CPM, los parámetros del CPM depende de los niveles de descomposición de la señal de error de la planta, puede tener dos o más parámetros dependiendo de  $N$  [41].

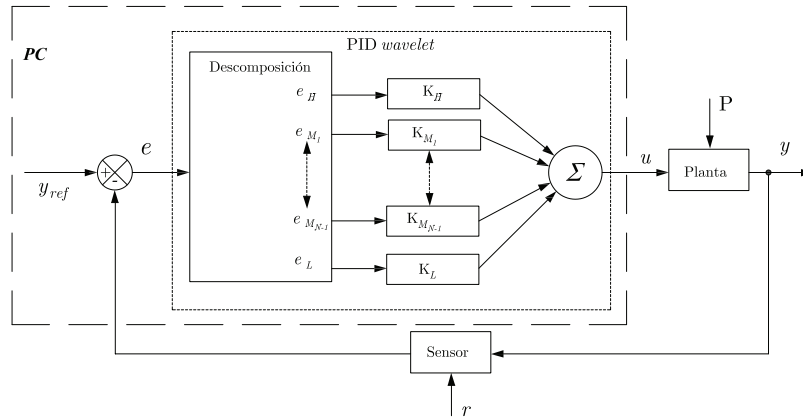


Figura 5.3: Diagrama a bloques del CPM.

### 5.2.1. Simulación de plataforma experimental

En esta Sección se presenta el modelo de un motor de CD que se utiliza para la implementación del sistema BCI, se asume que la *wavelet* a utilizar es la Daubechies 4 de orden 2 como se muestra en (5.10),

$$P(y) = \sum_{k=0}^{m-1} C_k^{m-1+k} y^k; \quad (5.10)$$

donde  $C_k^{m-1+k}$  son coeficientes binomiales,  $m = 2$  es el orden de la *wavelet*, en la Tabla 5.1 se muestra los coeficientes para algunos filtros Daubechies, donde  $m$  toma el valor según sea el orden de la función *wavelet*.

$n$	$g_0[n] = g_0[-n]$	$n$	$g_0[n] = g_0[-n]$	$n$	$g_0[n] = g_0[-n]$
	$m = 2$		$m = 5$		$m = 7$
0	0.6830127018922193	0	0.2264189825835584	0	0.1100994307456160
1	1.1830127018922192	1	0.8539435427050283	1	0.5607912836254882
2	0.3169872981077807	2	1.0243269442591967	2	1.0311484916361415
3	-0.1830127018922192	3	0.1957669613478087	3	0.6643724822110735
	$m = 3$	4	-0.3426567153829353	4	-0.2035138224626306
0	0.4704672077841636	5	-0.0456011318835469	5	-0.3168350112806179
1	1.1411169158314436	6	0.1097026586421339	6	0.1008464650093839
2	0.6503650005262323	7	-0.0088268001083583	6	0.1008464650093839
3	-0.1909344155683274	8	-0.0177918701019542	7	0.1140034451597351
4	-0.1208322083103963	9	0.0047174279390679	8	-0.0537824525896852
5	0.0498174997368837		$m = 6$	9	-0.0234399415642046
	$m = 4$	0	0.1577424320027466	10	0.0177497923793598
0	0.3258034280512982	1	0.6995038140774233	10	0.0177497923793598
1	1.0109457150918286	2	1.0622637598801890	11	0.0006075149954022
2	0.8922001382609015	3	0.4458313229311702	12	-0.0025479047181871
3	-0.0395750262356447	4	-0.3199865989409983	13	0.0005002268531225
4	-0.2645071673690398	5	-0.1835180641065938		
5	0.0436163004741772	6	0.1378880929785304		
6	0.0465036010709818	7	0.0389232097078970		
7	0.0149869893303614	8	-0.0446637483054601		
		9	0.0007832511506546		
		10	0.0067560623615907		
		11	-0.0015235338263795		

Tabla 5.1: Función *wavelet* Daubechies, donde  $m$  es el orden de la *wavelet* [32].

Para el análisis multiresolución de la señal de error  $e(t)$  el nivel de descomposición es  $N = 3$ . Los coeficientes del filtro Daubechies están dados por la Tabla 5.2.

$g[k]$	[0.6830127018922193; 1.1830127018922192; 0.3169872981077807; -0.1830127018922192]
$\overline{g[k]}$	$(-1)^k \cdot g[N - 1 - k]$
$h[k]$	$\frac{(-1)^k \cdot g[k]}{2}$
$\overline{h[k]}$	$\frac{(-1)^{(k+1)} \cdot g[k]}{2}$

Tabla 5.2: Coeficientes del filtro Daubechies 4 con  $m = 2$

Se aplica un CPM para el control de la posición de un motor de CD, la función de transferencia que modela el motor está dada por [41],

$$G(s) = \frac{b}{s(Js + c)} \quad (5.11)$$

donde  $b = 22Nm/volts$  que representa la constante de torque, el coeficiente de fricción está dado por  $c = 4Kgm^2/segrad$  y la inercia total del motor  $J = 1Kgm^2/rad$  [41].

## Diseño del experimento

Las pruebas experimentales se diseñan con diferentes usuarios, donde se les indica deben permanecer en estado de relajación y con los ojos cerrados con la finalidad de evitar ruido de señales externas a la actividad del movimiento del pie, después se les da una etapa de entrenamiento indicándoles la forma de realización de la tarea, que consiste en hacer el movimiento del pie hacia arriba y hacia abajo, finalmente se realiza la prueba para calcular el intervalo del umbral sin involucrar la ley de control, y así poder diseñar la plataforma para cerrar el lazo entre un sistema BCI y un esquema de control.

## Implementación del sistema BCI

Para la implementación del sistema BCI se considera el modelo del motor para introducirlo en el lazo del sistema, cabe mencionar que la ejecución del sistema completo donde interviene la actividad cerebral del usuario se realiza de manera asíncrona para evitar carga mental y no exponer a estrés al usuario durante la ejecución de la actividad. La forma de conectar el sistema BCI con el esquema de control es por medio de una función que define un umbral para la detección de comando BCI, en la Figura 5.4 se muestra la señal del sensor  $F3$  que es utilizada para el procedimiento de detección de comando BCI y obtención de  $y_{ref}$  para el esquema de control.

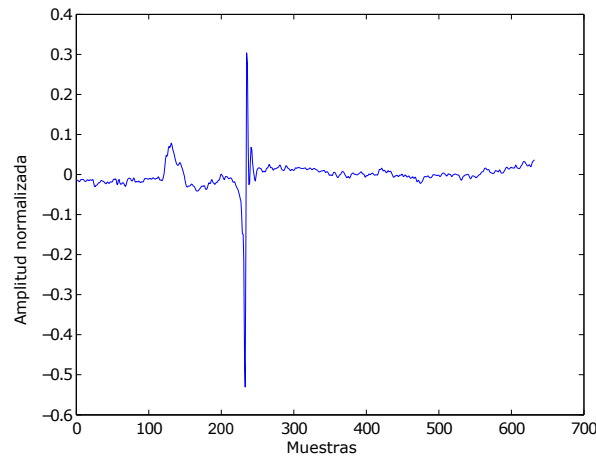


Figura 5.4: Señal normalizada del sensor  $F3$ .

En la Figura 5.5 se muestra el primer nivel de descomposición de la señal del sensor  $F3$  como se muestra en la Figura 3.2, donde  $d_1$  contiene frecuencias entre  $[30 - 60 \text{ Hz}]$  que pertenecen la banda *Gamma*, éstas son señales que pertenecen a la atención visual del usuario y a algunas componentes de ruido [75].

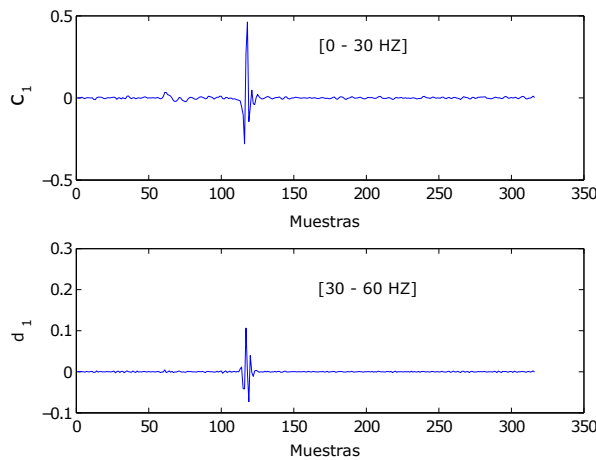


Figura 5.5: Primer nivel de descomposición donde  $c_1$  es el primer nivel de detalle y  $d_1$  es el primer nivel de aproximación.

En la Figura 5.6 se presenta el segundo nivel de descomposición, que corresponde a la descomposición de la señal de detalle  $c_1$  del primer nivel de descomposición, donde  $d_2$  corresponde a la banda *Beta* que contiene frecuencias entre  $[15 - 30 \text{ Hz}]$  que corresponde a la imaginación y ejecución de movimientos de las extremidades

corporales, siendo la ejecución de movimientos el caso de estudio de este tema de tesis, los coeficientes que están en las frecuencias de  $[0 - 15 \text{ Hz}]$  que pertenecen a la componente de detalle  $c_2$  corresponden a actividades como movimientos oculares, atención auditiva, estados de relajación, entre otros [75].

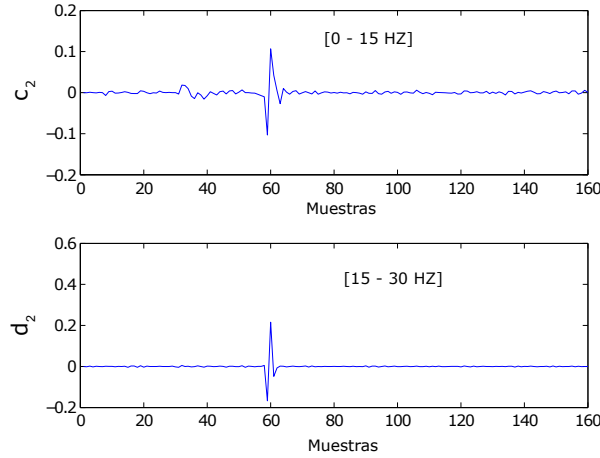


Figura 5.6: Segundo nivel de descomposición donde  $c_2$  es el segundo nivel de detalle y  $d_2$  es el segundo nivel de aproximación.

Conociendo la banda donde se registra la actividad de interés se calcula un umbral de la forma [30]

$$U = 0.3 \cdot \max(d_2) \quad (5.12)$$

donde  $U$  está entre  $[0.04, 0.08]$  la obtención del intervalo es calculada de forma experimental, cabe mencionar que los parámetros de  $U$  son calculados en línea, la referencia para el esquema de control es de la forma

$$y_{ref} = \Omega \cdot U \quad (5.13)$$

donde  $\Omega = 62.5$  se propone de manera que el valor máximo de  $y_{ref}$  corresponda a dos vueltas del motor, éste resultado es utilizado para el diseño de una ley de control (CPM).

Para el diseño del control CPM se toman las ganancias de [41], que se muestran en la Tabla 5.3,

$K_H$	$K_{M1}$	$K_{M2}$	$K_L$
2	4	10	0

Tabla 5.3: Ganancias del CPM

En la Figura 5.7 se muestra la posición de salida del motor representada en *rad* y en las Figuras 5.8 y 5.9 se muestran la señal de error y la señal del CPM respectivamente.

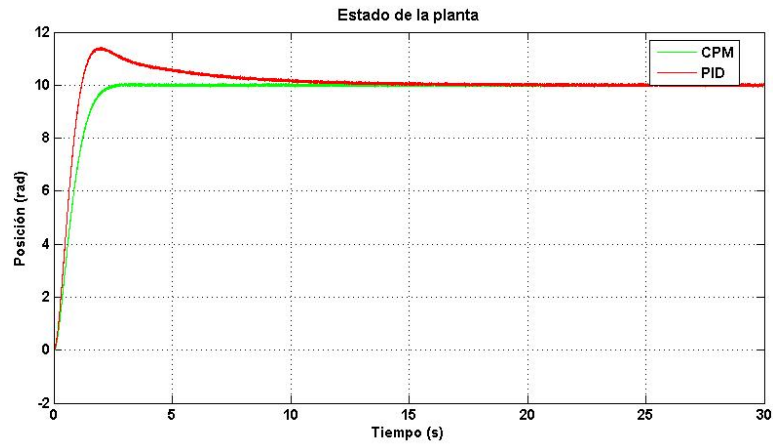


Figura 5.7: Posición del motor a 10 *rad* equivalente a 1.6 vueltas aplicando un CPM comparado con un control PID.

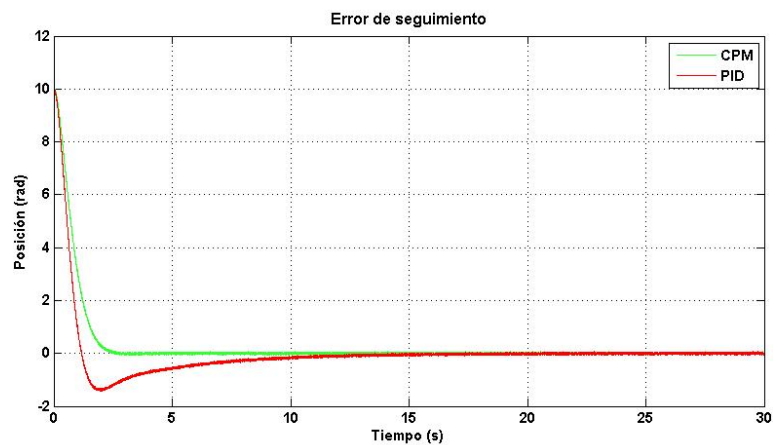


Figura 5.8: Señal de error del sistema con CPM comparado con un control PID.

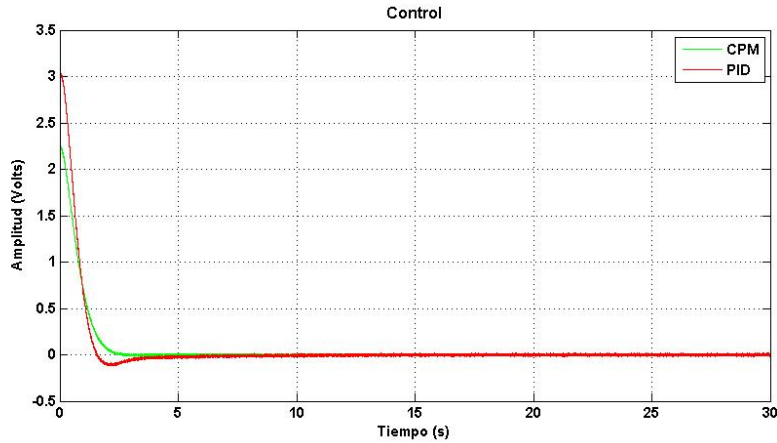


Figura 5.9: Señal de control del sistema con CPM comparado con un control PID.

Con el propósito de tener un estudio comparativo se implementa para el mismo sistema y en las mismas condiciones de operación un control PID clásico, la forma de sintonizar las ganancias  $K_P$ ,  $K_I$  y  $K_D$  fue de manera automática con la herramienta de *Auto-Tuning* de Matlab.

Como se puede observar el comportamiento del sistema a cada entrada de control se puede concluir que el desempeño del control CPM es mejor que el del PID clásico, ofreciendo grandes ventajas para la implementación en sistemas BCI por el tiempo de establecimiento del sistema.

La aplicación de análisis multiresolución para el control de dispositivos en este caso particular en control de posición de un motor de CD nos da la ventaja de una rápida convergencia a la referencia deseada, esto lo logramos por la manipulación de las ganancias [64] según sean las necesidades de la aplicación. Uno de los problemas que se presenta en este tipo de controladores es la sintonización de las ganancias  $K_H$ ,  $K_{M1}$ ,  $K_{M2}$ ,  $K_L$ . Para resolver este problema se propone en la Sección 5.3 un método de adaptación.

### 5.3. Control multiresolución caso MIMO

El esquema de control mostrado en la Figura 5.10 corresponde a un controlador multiresolución, propuesto para control de un sistema MIMO, en el cual se muestran los elementos que lo componen. Como se puede ver, este controlador cuenta con tres bloques importantes que son: Identificación, autosintonización y control multiresolución. En la Tabla 5.4 se muestran las distintas variables que intervienen en cada etapa del controlador.

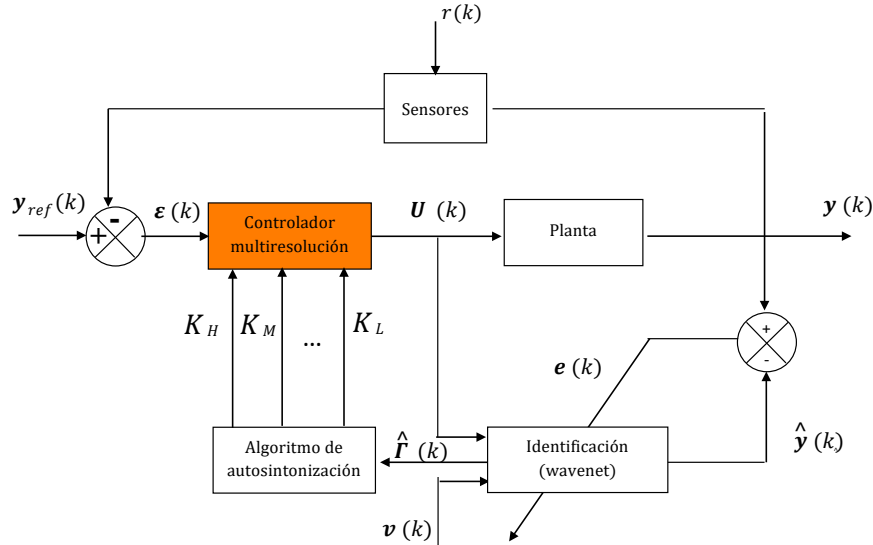


Figura 5.10: Esquema de Controlador Multiresolución

Tabla 5.4: Variables que intervienen en cada una de las etapas.

$\mathbf{y}_{ref}(k)$	Referencia deseada
$\varepsilon(k)$	Error de seguimiento
$\mathbf{u}(k)$	Señal de control
$r(k)$	Señal de ruido
$\mathbf{y}(k)$	Salida de la planta
$\hat{\mathbf{y}}(k)$	Salida estimada
$\mathbf{e}(k)$	Error de estimación
$v(k)$	Señal de persistencia

Cada uno de los tres esquemas mencionados se describen en las secciones siguientes. La identificación del sistema se realiza por medio del uso de una red neuronal del tipo *wavenet* en conjunto con un filtro *IIR*, la autosintonización aplica la descomposición del error y el parámetro  $\hat{\Gamma}[kT]$ , resultado de la identificación, finalmente el controlador multiresolución realiza la descomposición del error para definir la ley de control a aplicar en la planta.

### 5.3.1. Esquema de identificación *wavenet*

El esquema de identificación del sistema esta basado en redes neuronales del tipo *wavenet*; es decir, redes neuronales de base radial con funciones de activación *wavelet*

$\psi(\tau)$ . Para esta aplicación se utilizan funciones *wavelet* hijas  $\psi(\tau_l)$ , la estructura propuesta se muestra en la Figura 5.11.

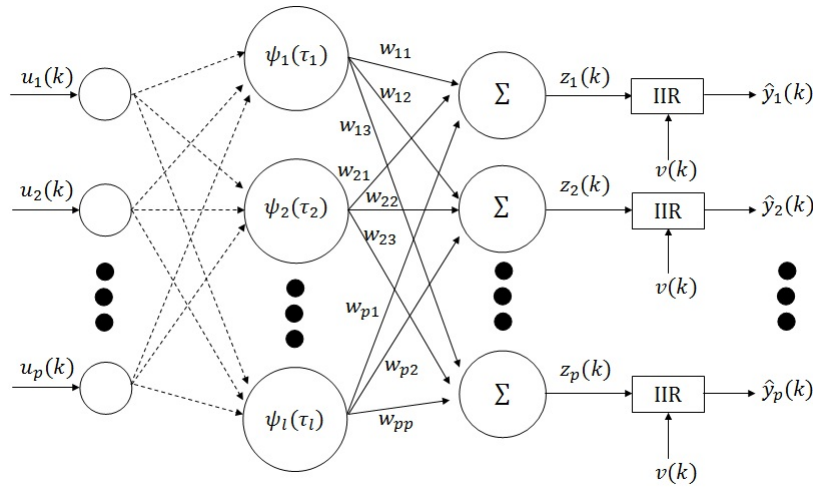


Figura 5.11: Diagrama de la red neuronal wavenet.

Se hace uso también de la estructura del filtro IIR, mostrado en la Figura 5.12.

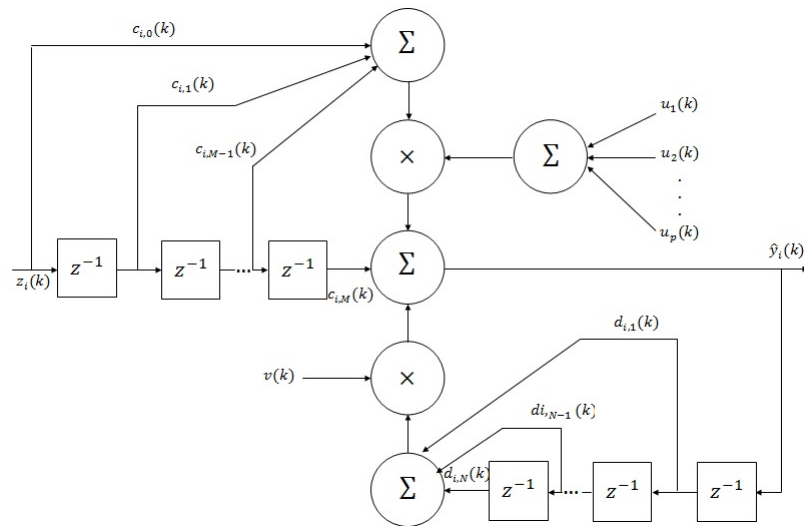


Figura 5.12: Estructura del filtro IIR.

### 5.3.2. Controlador multiresolución

El controlador CMW descompone la señal de error  $\varepsilon(x)$  para obtener las componentes del error en altas, medias y bajas frecuencias, haciendo uso del análisis

multiresolución para la descomposición. Así cada uno de estos componentes son escalados con sus respectivas ganancias y adicionados todos juntos para generar la señal de control  $u$ , como sigue:

$$u = K_H \varepsilon_H + K_{M_1} \varepsilon_{M_1} + \cdots + K_{M_i} \varepsilon_{M_i} + \cdots + K_{M_{N-1}} \varepsilon_{M_{N-1}} + K_L \varepsilon_L \quad (5.14)$$

donde:

$$u = [\text{diag}\{K_{H_1} \ K_{M_{1,1}} \ \cdots \ K_{M_{1,N-1}} \ K_{L_1}; K_{H_2} \ K_{M_{2,1}} \ \cdots \ K_{M_{2,N-1}} \ K_{L_2}; \quad (5.15)$$

$$\cdots ; K_{H_i} \ K_{M_{i,1}} \ \cdots \ K_{M_{i,N-1}} \ K_{L_i}; \cdots ; K_{H_m} \ K_{M_{m,1}} \ \cdots \ K_{M_{m,N-1}} \ K_{L_m}\}$$

$$[\varepsilon_{H_1} \ \varepsilon_{M_{1,1}} \ \cdots \ \varepsilon_{M_{1,N-1}} \ \varepsilon_{L_1}; \varepsilon_{H_2} \ \varepsilon_{M_{2,1}} \ \cdots \ \varepsilon_{M_{2,N-1}} \ \varepsilon_{L_2}; \cdots ; \varepsilon_{H_i} \ \varepsilon_{M_{i,1}} \ \cdots \ \varepsilon_{M_{i,N-1}} \ \varepsilon_{L_i}]$$

$$u = \mathbf{K} \mathbf{E} \quad (5.16)$$

donde

$$\mathbf{K} = [\text{diag}\{K_{H_1} \ K_{M_{1,1}} \ \cdots \ K_{M_{1,N-1}} \ K_{L_1}; K_{H_2} \ K_{M_{2,1}} \ \cdots \ K_{M_{2,N-1}} \ K_{L_2}; \quad (5.16)$$

$$\cdots ; K_{H_i} \ K_{M_{i,1}} \ \cdots \ K_{M_{i,N-1}} \ K_{L_i}; \cdots ; K_{H_m} \ K_{M_{m,1}} \ \cdots \ K_{M_{m,N-1}} \ K_{L_m}\}]$$

$$\mathbf{E} = [\varepsilon_{H_1} \ \varepsilon_{M_{1,1}} \ \cdots \ \varepsilon_{M_{1,N-1}} \ \varepsilon_{L_1}; \varepsilon_{H_2} \ \varepsilon_{M_{2,1}} \ \cdots \ \varepsilon_{M_{2,N-1}} \ \varepsilon_{L_2}; \cdots ; \varepsilon_{H_i} \ \varepsilon_{M_{i,1}} \ \cdots \ \varepsilon_{M_{i,N-1}} \ \varepsilon_{L_i}]$$

donde  $N$  es el nivel de descomposición del CPM. Mientras que un control PID clásico en su forma discreta tiene tres parámetros para ser sintonizado  $k_P$ ,  $k_I$  y  $k_D$ , el control CPM posee dos ó más parámetros y este número de parámetros depende del nivel de descomposición que se aplica a la señal del error  $e$ . El diagrama esquemático de una planta usando un CPM es mostrado en la Figura 5.3. Como puede verse en el Apéndice A, existe un gran número de *wavelets* diferentes, la selección de la *wavelet* afecta el funcionamiento del controlador. Por eso, existen características que se deben tomar en cuenta, tales como:

- El tipo de representación del sistema (continuo o discreto).
- Las propiedades de la *wavelet* a ser empleada.
- Las dinámicas del sistema.

Para mayores detalles sobre la selección de la *wavelet*, ver [32]. En la construcción del MRWC, en este capítulo se emplea la transformada *wavelet* Daubechies, basado en los resultados de [65], al encontrarse muy conveniente para control automático de

un sistema de control de movimiento. Todos los sistemas físicos están sujetos a algún tipo de señales externas o ruidos durante la operación. Por lo tanto, al diseñar un sistema de control, se debe considerar si el sistema proporcionará mayor sensibilidad al ruido o a las perturbaciones. En la práctica, las perturbaciones y comandos son algunas veces señales de baja frecuencia y el ruido es de alta frecuencia, con un control multiresolución se puede manipular las señales, sintonizando las ganancias del mismo casi de una manera directa. Por ejemplo: ajustando la ganancia de la escala baja a cero  $K_L = 0$ , se logra producir una señal de control que reduzca los efectos del ruido en la salida de la planta  $y$ , y por lo tanto la señal suave de control produce un esfuerzo mínimo mejorando la vida de los actuadores y todo el comportamiento de la planta [47, 63].

### 5.3.3. Autosintonización

Con base en la descomposición del error y haciendo uso de  $\hat{\mathbf{\Gamma}}[kT]$ , donde éste es una parte de la identificación del sistemas, las reglas de autosintonización son propuestas como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_H[kT] &= (\mathbf{K}_H[(k-1)T]T + \mu_H \hat{\mathbf{\Gamma}}[kT] \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_H[kT])/T \\
\mathbf{K}_{M_1}[kT] &= (\mathbf{K}_{M_1}[(k-1)T]T + \mu_{M_1} \hat{\mathbf{\Gamma}}[kT] \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{M_1}[kT])/T \\
&\vdots \\
\mathbf{K}_{M_{(N-1)}}[kT] &= (\mathbf{K}_{M_{(N-1)}}[(k-1)T]T + \mu_{M_{(N-1)}} \hat{\mathbf{\Gamma}}[kT] \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{M_{(N-1)}}[kT])/T \\
\mathbf{K}_L[kT] &= (\mathbf{K}_L[(k-1)T]T + \mu_L \hat{\mathbf{\Gamma}}[kT] \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_L[kT])/T
\end{aligned}$$

donde

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_\iota[kT] = \boldsymbol{\varepsilon}_\iota[kT] - \boldsymbol{\varepsilon}_\iota[(k-1)T], \iota \in \{L, M_1, \dots, M_{N-1}, H\},$$

el parámetro  $\mu_\iota$  es la constante de la razón de aprendizaje, y la función  $\hat{\mathbf{\Gamma}}[kT]$  es determinada por

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}[kT] = \sum_{i=0}^M c_i z(k-i) \mathbf{u}[kT] \quad (5.17)$$

### 5.3.4. Modelo del robot

Para la implementación del CPM en el caso de sistemas MIMO se utiliza un robot de dos grados de libertad como se muestra en la Figura 5.13.

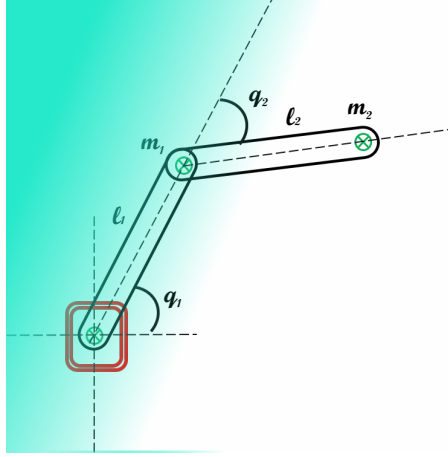


Figura 5.13: Robot de dos grados de libertad.

La ecuación (5.18) muestra la representación dinámica para el caso general de un robot,

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (5.18)$$

Donde  $\dot{q}$  es un vector de  $n \times 1$  de las velocidades articulares,  $\ddot{q}$  es un vector de  $n \times 1$  de las aceleraciones articulares y  $\tau$  es un vector de  $n \times 1$  de los pares aplicados.  $G(q)$  es un vector de  $n \times 1$  denominado vector gravitacional.  $H(q)$  es la matriz de inercias de  $n \times n$  que debe ser simétrica definida positiva.  $C(q, \dot{q})$  es la matriz centrífuga o de Coriolis también de  $n \times n$ .

donde,

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$H(q) = \begin{bmatrix} \frac{l_1 m_1 + l_2 m_2}{12} + \frac{l_1^2 m_1 + l_2^2 m_2}{4} + l_1^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 \cos(q_2) & \frac{l_2 m_2 (3l_2 + 6l_1 \cos(q_2) + 1)}{12} \\ \frac{l_2 m_2 (3l_2 + 6l_1 \cos(q_2) + 1)}{12} & \frac{l_2 m_2 (3l_2 + 1)}{12} \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \frac{-l_1 l_2 m_2 \dot{q}_2 \sin(q_2)}{2} & \frac{-l_1 l_2 m_2 \dot{q}_1 \sin(q_2) - l_1 l_2 m_2 \dot{q}_2 \sin(q_2)}{2} \\ \frac{l_1 l_2 m_2 \dot{q}_1 \sin(q_2)}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} \frac{9.81(l_1 m_1 \cos(q_1) + 2l_1 m_2 \cos(q_1) + l_2 m_2 \cos(q_1 + q_2))}{200} \\ \frac{9.81 l_2 m_2 \cos(q_1 + q_2)}{200} \end{bmatrix}$$

donde,

$$l_1 = 0.15m, \quad m_1 = 1.5Kg$$

$$l_2 = 0.15m, \quad m_2 = 0.7Kg$$

Cabe mencionar que el modelo dinámico del robot se utiliza solo para motivos de simulación, ya que el CPM para sistemas no lineales MIMO no necesita del modelo, las ganancias se sintonizan a partir del error de identificación de la planta, lo cual hace que este tipo de control sea robusto ante perturbaciones y nos da beneficios para sistemas de rehabilitación donde incluye dinámicas no modeladas de los usuarios dentro del sistema BCI.

### 5.3.5. Simulación de un robot de dos grados de libertad dentro de un sistema BCI

Utilizando el mismo procedimiento para la extracción de características de las señales EEG y encontrando que la mayor cantidad de información de la ejecución de fuerza de las manos se encuentra en la banda *Beta* ( $\beta$ ), el umbral  $U$  se define como en la ecuación (5.12).

Donde  $U$  está entre  $[0.5, 1.8]$ , entonces se tiene que,

$$y_{refN} = \Omega \cdot U \quad (5.19)$$

donde para el eslabón 1,  $\Omega = 5000$  para el eslabón 2,  $\Omega = 4000$  y  $N$  indica el número de entradas del sistema para este caso particular  $N = 2$ , quedando la señal de referencia como,

$$Y_{ref}(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \sin(y_{ref1} \cdot t) \\ (l_1 + l_2) \cdot \sin(y_{ref2} \cdot t) \end{bmatrix}$$

Definida la señal de referencia  $Y_{ref}(t)$  se sierra el sistema BCI con la ley de control CPM para sistemas MIMO obteniendo los siguientes resultados,

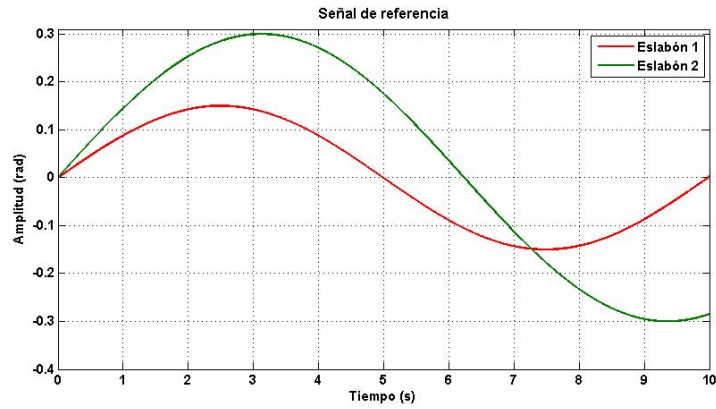


Figura 5.14: Señal de referencia para un robot de dos grados de libertad, donde la frecuencia de la señal esta dada por  $y_{ref_N} = \Omega \cdot U$  que se obtiene de las señales EEG de ejecución de fuerza de las manos.



Figura 5.15: Respuesta del sistema con la señal de referencia mostrada en la Figura 5.14.

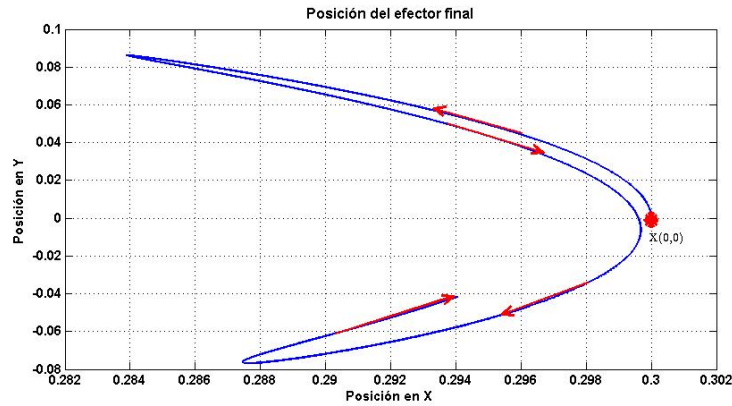


Figura 5.16: Posición del efector final del robot de dos grados de libertad.

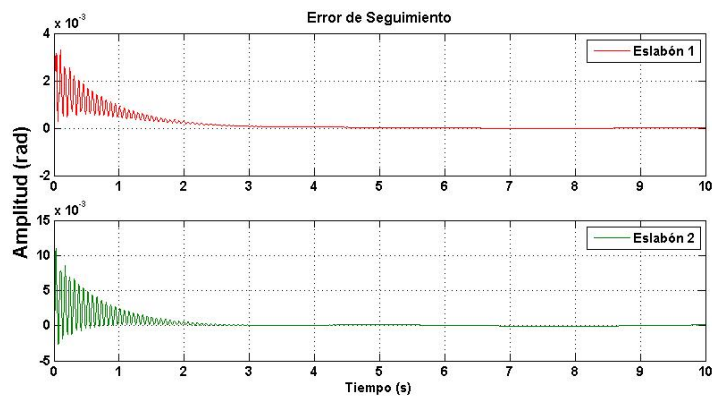


Figura 5.17: Error de seguimiento del sistema.

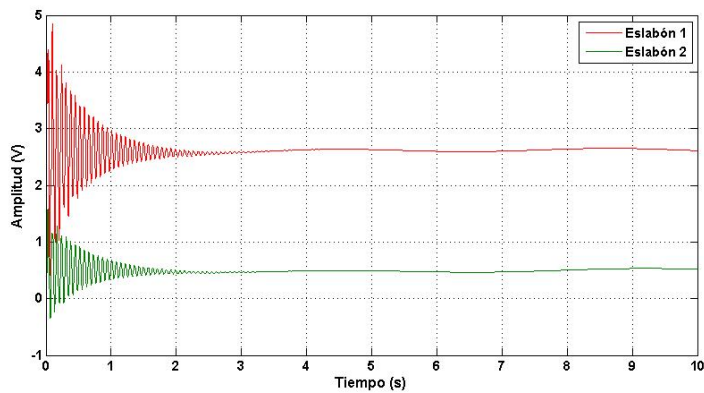


Figura 5.18: Señal de control que se requiere para hacer que el sistema converja a la referencia.

Los resultados mostrados en las Figura 5.15 y en la Figura 5.16 se obtuvieron mediante la autosintonización de las ganancias de la red neuronal *wavenet* como se muestra en la Figura 5.19 y en la Figura 5.20 y en la Figura 5.21 se muestra la actualización de las ganancias del controlador.

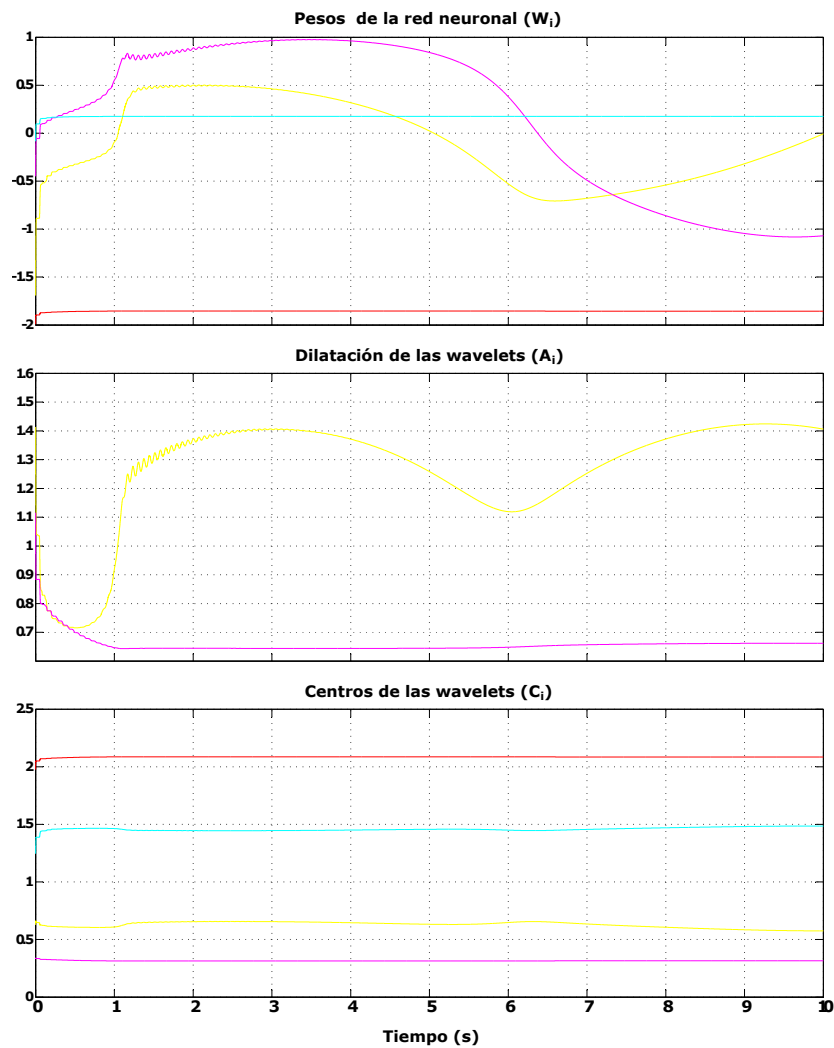


Figura 5.19: Parámetros de la red neuronal *wavenet*.

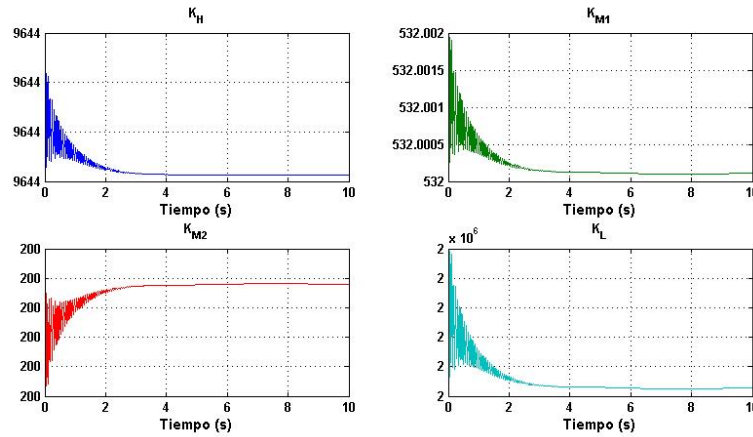


Figura 5.20: Ganancias del CPM para el estabón 1.

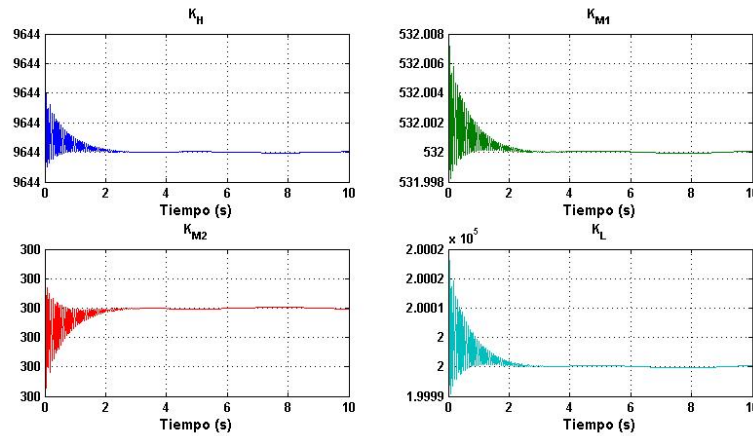


Figura 5.21: Ganancias del CPM para el estabón 2.

Con estos resultados podemos concluir que el CPM autosintonizable para el caso de sistemas MIMO tiene un tiempo de respuesta rápido lo cual hace que el sistema converja a la referencia rápidamente.

## 5.4. Comentarios

El uso de este tipo de controles ofrece grandes ventajas para los sistemas BCI por tener un buen tiempo de respuesta y bajo costo computacional, ya que éste tipo de sistemas requieren una respuesta rápida por su tipo de aplicación, además es robusto ante perturbaciones ya que el control es capaz de adaptarse según los cambios que existan en la planta.

# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo de tesis se emplea el casco Emotiv Epoc que consta de de catorce electrodos de adquisición de las señales cerebrales y dos electrodos de referencia, la forma de uso y colocación muestra en el Apéndice C, a partir del análisis multiresolución *wavelet* de cada una de las señales y de las catorce señales juntas y basados en [11] se encuentra que el sensor *F3* contiene la mayor cantidad de información de las señales de la actividad ejecutada para encontrar un comando BCI y aplicarlo como referencia para el control de dispositivos, el paradigma que se utilizo es el de movimiento voluntario (asíncrono) para el control en línea de los dispositivos robóticos dentro del sistema BCI, buscando que no se generará alta carga de trabajo durante la interacción Cerebro-Computadora. Los resultados obtenidos son factibles para su implementación en tiempo real, ya que es un algoritmo que no utiliza operaciones matriciales que generen alto costo computacional.

### 6.1. Contribuciones

Al emplear análisis multiresolución basado en *wavelets*, podemos atenuar el ruido que pertenece a movimiento muscular y movimiento facial, y eliminar señales no deseadas como son los armónicos de la línea eléctrica.

Otra aportación es que solo necesitamos la señal de un solo electrodo, el cual fue localizado a base de experimentos, que a diferencia con otros métodos se necesita el conocimiento de los catorce electrodos que componen el casco Emotiv Epoc.

Finalmente cumpliendo con el objetivo de la tesis fue posible conectar un sistema BCI por medio de la señal de referencia  $y_{ref}$  a un esquema de control y con ello contribuir al diseño de controladores para mejorar el desempeño de los sistemas considerando dentro del lazo de control la actividad cerebral de una persona.

## 6.2. Limitaciones

Las limitaciones del experimento pueden ser por el dispositivo que se utiliza para la adquisición de las señales EEG, cuenta con baja resolución comparado con dispositivos médicos y cuenta con un bajo número de electrodos, lo que nos lleva a no cubrir todas las áreas cerebrales, pero esto no causa un problema mayor por la conexión interna de la corteza cerebral, en general son las desventajas que tenemos con el dispositivo Emotiv EPOC.

Por otro lado hablando del algoritmo wavelet, para el análisis multiresolución necesita un arreglo de valores de la señal EEG de dimensiones superiores a 400 muestras que corresponde a más de 3 *seg* de adquisición de señales, pero por el tiempo de respuesta de los dispositivos en el caso del motor son lentos ofrece la facilidad de implementar el algoritmo en tiempo real.

Otro de las limitaciones más importantes que se tienen que cuidar en la implementación y puesta en marcha al usuario final es el estado de ánimo de los sujetos de prueba, ya que el estado en el que se encuentren será la amplitud de las señales y la aparición de otros fenómenos como ruido en la captura de los datos. Estas son las limitaciones más importantes que se pueden observar para la implementación de un sistema BCI.

## 6.3. Trabajos futuros

Los trabajos para la mejora del rendimiento de los sistemas son:

- Fusificación de las señales cerebrales para mejorar la clasificación del tipo de actividad que se está realizando.
- Caracterización de las señales cerebrales a partir de una red *wavenet*.

# Bibliografía

- [1] <https://emotiv.com/epoc.php>.
- [2] <http://www.actualizarmiweb.com/sites/meamomecuido/index.php>.
- [3] <http://www.estadisticaparatodos.es/taller/graficas/cajas.html>.
- [4] <http://www.javeriana.edu.co/Facultades/Ciencias/neurobioquimica/libros/neurobioquimica/CEREBRO.htm>.
- [5] Imagery of motor actions: Differential effects of kinesthetic and visuomotor mode of imagery in single-trial EEG, author = C. Neuper, R. Scherer, M. Reiner, and G. Pfurtscheller, journal = *Cognitive Brain Research*, Elsevier, year = 2005, pages = 668-677.
- [6] F. Lecuyer A. Brodu, N. Lotte. Comparative study of band-power extraction techniques for motor imagery classification. In *Computational Intelligence Cognitive Algorithms Mind and Brain*, pages 1–6, 2011.
- [7] P. Kahane A. Brovelli, J. Lachaux and D. Boussanoud. High gamma frequency oscillatory activity dissociates attention from intention in the human premotor cortex. *Neuroimage*, pages 154–164, 2005.
- [8] D. Esteban A. Croisier and C. Galand. Perfect channel splitting by use of interpolation decimation tree decomposition techniques. In *International Conference on Inform Sciences and Systems*, pages 443–446, 1976.
- [9] V. Nguyen F. Malouin C. Richards A. Guillot, C. Collet and J. Doyon. Brain activity during visual versus kinesthetic imagery: An fMRI study. *Human Brain Mapping*, 2009.
- [10] V. Nguyen F. Malouin C. Richards A. Guillot, C. Collet and J. Doyon. Brain activity during visual versus kinesthetic imagery: An fMRI study. *Human Brain Mapping*, pages 2157–2172, 2009.

- 
- [11] M. Pelc P. Piatek A. Kawala-Janik, M. Podpora and J. Baranowski. Implementation of an inexpensive EEG headset for the pattern recognition purpose. In *Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems (IDAACS)*, pages 399–403, 2013.
- [12] P. Hagmann A. Ponce-Alvarez, B. He and G. Deco. Task-driven activity reduces the cortical activity space of the brain: Experiment and whole-brain modeling. *Plos Biology*, 2015.
- [13] B. Amsel. Tracking real-time neural activation of conceptual knowledge using single-trial event-related potentials. *Neuropsychologia*, pages 970–983, 2011.
- [14] R. Poli C. Cinel, L. Citi and F. Sepulveda. P300-based BCI mouse with genetically-optimized analogue control. *Transactions Actions on Neuronal Systems and Rehabilitation Engineering*, 2008.
- [15] K. Choi. Electroencephalography EEG based neurofeedback training for Brain-Computer Interface BCI. *Experimental Brain Research*, pages 351–365, 2013.
- [16] CamilleJeunet ChristianMhl and FabienLotte. EEG-based workload estimation across affective contexts. *Frontiers NEUROSCIENCE*, 2014.
- [17] R. Churchill. *Series de Fourier y problemas de contorno*. McGraw-Hill, 1978.
- [18] I. Daubechies. *Othonormal bases of compactly supported wavelets*. Commun. on Pure and Appl. Math., 1988.
- [19] I. Daubechies. *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis*. IEEE Trans. Inf. Theory, 1990.
- [20] J. Doyon and H. Benali. Reorganization and plasticity in the adult brain during learning of motor skills. *Current Opinion in Neurobiology*, pages 161–167, 2005.
- [21] C. Finucane R. Burke R. Smith R. Reilly E. Lalor, S. Kelly and G. McDarby. Steady-state vep-based Brain-Computer Interface control in an immersive 3D gaming environment. *Journal on Applied Signal Processing*, 2005.
- [22] A. Jarillo-Silva J. Pacheco-Mendoza E. Mendoza-Monjaraz, J. A. Cruz-Tolentino. Implementación de un control multiresolución empleando un dispositivo háptico. *Research in Computing Science*, 2015.
- [23] Nidal Kamel Selman Eltaf Abdalsalam Mohamed, Mohd Zuki B. Yusoff and Aamir Saeed Malik. Enhancing EEG signals in brain computer interface using wavelet transform. *International Journal of Information and Electronics Engineering*, 2014.

- [24] Sirel Karakas Martin Schurmann Erol Basar, Canan Basar-Eroglu. Gamma, alpha, delta, and theta oscillations govern cognitive processes. *International Journal of Psychophysiology*, 2001.
- [25] F. A. Diaz-L and L. E. R. Velasco and O. A. D. Ramirez and V. Parra-Vega. Multiresolution wavenet PID control for global regulation of robots. In *Asian Control Conference (ASCC)*, pages 1–6, 2013.
- [26] G. Segovia F. Mora and A. Arco. Aging, plasticity and environmental enrichment: Structural changes and neurotransmitter dynamics in several areas of the brain. *Brain Research Reviews Elsevier*, pages 78–88, 2007.
- [27] P. Tonin K. Priftis S. Giove S. Silvoni-G. Palmas F. Piccione, F. Giorgi and F. Beverina. P300-based Brain-Computer Interface: Reliability and performance in healthy and paralysed participants. *Clinical Neurophysiol*, 2006.
- [28] J. Fourier. *Theorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot, 1822.
- [29] T. Behrens G. Hadjipavlou, P. Dunckley and I. Tracey. Determining anatomical connectivities between cortical and brainstem pain processing regions in humans: A diffusion tensor imaging study in healthy controls. *Pain*, pages 169–178, 2006.
- [30] M. A. Jadallah S. L. Yates G. M. Friesen, T. C. Jannett, S. R. Quint, and H. T. Nagle. A comparison of the noise sensitivity of nine QRS detection algorithms. *Transactions on Biomedical Engineering*, pages 85–98, 1990.
- [31] A. Girard. Towards a multiresolution approach to linear control. *Transactions on Automatic Control*, pages 1261–1270, 2006.
- [32] J. Goswami and A. Chan. *Fundamentals of wavelets-theory, algorithms and applications*. John Wiley And Sons, 1999.
- [33] R. Groningen. Multichannel EEG visualization. *Wiskunde*, 2010.
- [34] A. Grossman and J. Morlet. *Decomposition of hardy funtions into squared integrable wavelets of constant shape*. Math. Annal.
- [35] M.F. Issa H.A. Shedeed and S.M. El-Sayed. Brain EEG signal processing for controlling a robotic arm. In *International Conference on Computer Engineering Systems (ICCES)*, pages 152–157, 2013.
- [36] A. Haar. *Zur theorie der orthogonalen funktionsysteme*. Math. Annal, 1910.

- [37] Choi Kyoung ho and Sasaki M. Brain-wave bio potentials based mobile robot control: wavelet-neural network pattern recognition approach. In *Systems, Man, and Cybernetics*, pages 322–328, 2001.
- [38] K. Holewa and A. Nawrocka. Emotiv Epoc neuroheadset in Brain-Computer Interface. In *International Carpathian Control Conference (ICCC)*, pages 149–152, 2014.
- [39] E.A. Hosseini and H. Sadjadian. Noise resistant design of wavelet based multi-resolution control. In *American Control Conference (ACC)*, 2015.
- [40] M. E. Ioffe. Brain mechanisms for the formation of new movements during learning: The evolution of classical concepts. *Neuroscience and Behavioral Physiology*, pages 5–18, 2004.
- [41] L. Enrique Ramos Velasco y O. Arturo Domínguez Ramírez J. Alberto Cruz Tolentino, Alejandro Jarillo Silva. Wavelet PID and wavenet PID: theory and applications. 2015.
- [42] M. Jeannerod J. Decety and C. Prablanc. The timing of mentally represented actions. *Behavioural Brain Research*, 1989.
- [43] B. Lorey J. Munzert and K. Zentgraf. Cognitive motor processes: The role of motor imagery in the study of motor representations. *Brain Research Reviews*, 2009.
- [44] C. Boronat J. Schwoebel and H. Branch-Coslett. The man who executed imagined movements: Evidence for dissociable components of the body schema. *Brain and Cognition*, 2002.
- [45] Fabien Lotte Jean-Baptiste Sauvan, Anatole Lecuye and Gery Casiez. A performance model of selection sechniques for P300-based Brain-Computer Interfaces. *Proceedings of the Conference on Human Factors in Computing Systems*, 2009.
- [46] A. Kumar. Textbook of movement disorders. *Jaypee Brothers Medical Publisers*, 2012.
- [47] B. Kuo. *Sistemas de control digital*. C.E.C.S.A., 1997.
- [48] J. Doyon L. Ungerleider and A. Karni. Imaging brain plasticity during motor skill learning. *Neurobiology of Learning and Memory*, pages 553–564, 2002.
- [49] R K Ward M Fatourechi and G E Birch. A self-paced Brain-Computer Interface system with a low false positive rate. *Journal of Neuronal Engineering*, 2007.

- 
- [50] T. Gruber M. Muller and A. Keil. Modulation of induced gamma band activity in the human EEG by attention and visual information processing. *International Journal of Psychophysiology*, pages 283–299, 2000.
- [51] S. Mallat. *A theory multiresolution signal decomposition: The wavelet representation*. Pattern Annal Machine Intell, 1989.
- [52] S. Mallat. *Multiresolution aproximations and wavelet orthonormal bases*. Trans. Amer. Math. Soc., 1989.
- [53] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Prentice Hall PTR, New York, 1999.
- [54] Mario Alberto Magandez. *Procesamiento de ses EEG para aplicaciones de control de robots*. PhD thesis, Universidad Politica de Pachuca, 2015.
- [55] Jerrold Marsden and Anthony J. Tromba. *Vector calculus*. W. H. Freeman and Company, 1976.
- [56] The MathWorks. *The wavelet toolbox version 3.0*, 1995-2004.
- [57] Y. Meyer. *Methodes temps-frequence et methodes temps-echelle en traitement du signal et de limagen*. INRIA lectures, 1990.
- [58] Y. Meyer. *Ondelettes et operateurs*. 1990.
- [59] Y. Meyer. *Wavelets, algorithms and applications*. SIAM, 1993.
- [60] S. Micera, L. Citi, J. Rigosa, J. Carpaneto, S. Raspopovic, G. Di Pino, L. Rossini, K. Yoshida, L. Denaro, P. Dario, and P.M Rossini. Decoding information from neural signals recorded using intraneural electrodes: Toward the development of a neurocontrolled hand prosthesis. *Proceedings of the IEEE*, pages 407–417, 2010.
- [61] K. Sato N. Kuramoto, S. Ito and S. Fujisawa. Electroencephalogram analysis of mechanisms underlying brain activity during voluntary movement. *International Journal of Bioscience, Biochemistry and Bioinformatic*, pages 49–56, 2013.
- [62] Katsuya Sato Nobuhisa Kuramoto, Shin-Ichi Ito and Shoichiro Fujisawa. Electroencephalogram analysis of mechanisms underlying brain activity during voluntary movement. *International Journal of Bioscience, Biochemistry and Bioinformatics*, 2014.
- [63] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Quinta edición, 2010.

- 
- [64] S. Parvez and Zhiqiang Gao. A wavelet-based multiresolution PID controller. *IEEE Transactions on Industry Applications*, pages 537–543, 2005.
- [65] Shahid Parvez and Zhiqiang Gao. A wavelet-based multiresolution PID controller. *IEEE Transactions on Industry Applications*, pages 537–543, 2005.
- [66] Dulce Citlalli Martínez Peón. Comando robusto en Interfaz Cerebro-Computadora basada en EEG para robots dinámicos. Master’s thesis, Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional Unidad Monterrey, 2015.
- [67] R. Polikar. *The wavelet tutorial*. Dept. of Electrical and Computer Engineering, Rowan University, 1996.
- [68] J. Proakis. *Introduction to digital signal processing*. Macmillan publishing, 1988.
- [69] P. Shenoy R. Chalodhorn C. Bell and R. Rao. Control of a humanoid robot by a noninvasive Brain-Computer interface in humans. *Journal of Neural Engineering*, 2008.
- [70] T.K. Das R. Ganesan and K.M. Ramachandran. A multiresolution analysis-assisted reinforcement learning approach to run-by-run control. *Transactions on Automation Science and Engineering*, pages 182–193, 2007.
- [71] P. Roland and B. Gulyas. Visual imagery and visual representation. *Trends Neuroscience*, 1994.
- [72] P. Roland and B. Gulyas. Visual imagery and visual representation. *Trends Neuroscience, Elsevier*, pages 281–287, 1994.
- [73] Engelbert Grnbacher Rupert Ortner and Christoph Guger. State of the art in sensors, signals and signal processing. Technical report, g.tec medical engineering GmbH, 2019.
- [74] A. Safacas S. Tsotoulidis and E. Mitronikas. Multiresolution PID control of Brushless DC motor in fuel cell electric vehicles. In *International Conference on Renewable Energy Research and Applications (ICRERA)*,, pages 611–616, 2013.
- [75] Saeid Sanei and J.A. Chambers. *EEG Signal processing*. Centre of Digital Signal Processing Cardiff University, 2007.
- [76] E. Sellers and E. Donchin. A P300-based Brain-Computer Interface: Initial tests by ALS patients. *Clinical Neurophysiol*, 2006.

- [77] Won-Seok Kang Yunhee Shin Seung-Hyun Lee, B. Abibullaev and Jinung An. Analysis of attention deficit hyperactivity disorder in EEG using wavelet transform and self organizing maps. In *International Conference on Control Automation and Systems (ICCAS)*, pages 2439–2442, 2010.
- [78] Y. Sheng. *The transforms and applications Handbook*. CRC Press, 1996.
- [79] M. Spiegel. *Teoría y problemas de análisis de Fourier*. McGraw-Hill serie de compendios Shaum, 1981.
- [80] Grossman S. Stanley I. and José Job Flores Godoy. *Álgebra lineal*. Mc Graw-Hill, 2012.
- [81] Julien Kronegg Steven Manson and Jane Huggins. *Evaluating the performance self-paced Brain-Computer Interface technology*. 2001.
- [82] J. Stevens and M. Phillips Stoykov. Motor imagery and stroke rehabilitation: A critical discussion. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*, pages 190–192, 2003.
- [83] A. Walden T. Medkour and A. Burgess. Graphical modelling for brain connectivity via partial coherence. *Journal of Neuroscience Methods*, pages 93–96, 2000.
- [84] T. Matsuoka T. Mima and M. Hallett. Functional coupling of human right and left cortical motor areas demonstrated with partial coherence analysis. *Neuroscience Letters, Elsevier*, pages 93–96, 2000.
- [85] Ayhan Tuba and Seker S. Detemination of decision moments in EEG signals using DWT. In *Innovations in Intelligent Systems and Applications (INISTA)*, pages 268–271, 2011.
- [86] M. Vetterli. *Wavelets and subband coding*. Prentice Hall, 2007.
- [87] S. Vries and T. Mulder. Motor imagery and stroke rehabilitation: A critical discussion. *Journal of Rehabilitation Medicine*, pages 5–13, 2007.
- [88] S. Vries and T. Mulder. Using motor imagery in the rehabilitation of hemiparesis. *Journal Rehanilitation Medicine*, 2007.
- [89] Genghuang Yang, Li Zhao, Shigang Cui, Yuliang Liu, Longteng Xiao, and Xuelian Xu. Brain-Computer Interface based camera carrier in aerospace. In *International Conference on Automation and logistics Automation and Logistics*, pages 1877–1882, 2009.

- [90] S. Zarantonello. *Theory and application of wavelets*. Santa Clara University, 1997.

# Glosario

**Época.** Presentación completa del conjunto de entrenamiento a la red neuronal.

**Actuador.** Dispositivo capaz de convertir energía eléctrica, hidráulica u otro tipo de energía en movimiento.

**Algoritmo.** Conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema.

**Aprendizaje no supervisado.** También conocido como aprendizaje auto-supervisado, no se requiere influencia externa para ajustar los pesos de las conexiones entre sus neuronas. No se recibe ninguna información por parte del entorno que indique si la salida generada en respuesta a una determinada entrada es correcta o no.

**Aprendizaje supervisado.** Tipo de aprendizaje basado en una respuesta preprogramada para una entrada particular. Es decir, cada par de entrenamiento está compuesto por los valores de entrada a la red y los valores de salida deseados para tales entradas.

**Aprendizaje.** Proceso por el cual los parámetros libres de una red neuronal son adaptados a través de estimulaciones generadas por el entorno en el cual la red neuronal está empotrada.

**Arquitectura.** En redes neuronales consiste en la organización y disposición de las neuronas formando capas y la forma en que se conectan entre sí. En este sentido, los parámetros fundamentales de la red que constituyen su arquitectura son: el número de capas, el número de neuronas por capa, el grado de conectividad y el tipo de conexiones entre neuronas.

**Automatización.** Ciencia que trata de sustituir en un proceso el operador humano por un determinado dispositivo, generalmente electromecánico.

**Control adaptable.** Esquema de control en el cual los parámetros del controlador se ajustan ante cambios de la planta, de manera que el comportamiento en lazo cerrado conserva las características deseadas de diseño. El control adaptable es inherentemente no lineal. Se aplica a sistemas con parámetros que varían lentamente en el tiempo.

**Control.** Proceso mediante el cual un sistema es llevado a parámetros preestablecidos.

**Convergencia.** Es la propiedad de algunas sucesiones y series de tender progresivamente a un límite. Entonces, acertar la convergencia de una sucesión significa que hay un límite para tal sucesión.

**Dendrita.** Prolongación protoplásmica ramificada de la célula nerviosa (neurona).

**Energía.** Capacidad de realizar un trabajo.

**Entrenamiento.** Se refiere al proceso consiente y planeado de transferir conocimiento, habilidades y capacidades.

**Espacio de estado.** Espacio de  $n$  dimensiones, donde cualquier estado de un sistema dado puede ser representado como un punto.

**Estado.** Conjunto mínimo de variables de un sistema dado (variables de estado), tal que, conociendo su valor en un instante dado, permiten conocer la respuesta del sistema ante cualquier señal de entrada o perturbación.

**Función de activación.** Sirve para limitar la amplitud de la neurona de salida. La función de activación limita el rango de amplitud permisible de la señal de salida a algún valor finito.

**Función suave.** La función  $f$  se dice que es suave si sus derivadas parciales de cualquier orden existen y son continuas.

**Función wavelet hija.** Es una función wavelet resultado de dilatar o contraer y trasladar una función wavelet madre.

**Función wavelet madre.** Es una función wavelet que se puede dilatar o contraer y trasladar, generando funciones wavelet hijas.

**Función Wavelet.** Es una función de onda oscilatoria de duración muy corta, también se le llama ondoleta.

**Generalización.** Se refiere a que una red neuronal produce salidas razonables para entradas no encontradas durante el entrenamiento (aprendizaje).

- Grados de libertad pasivos.** Grados de libertad que no se encuentran actuados.
- Grados de libertad.** Número de coordenadas que describen de manera única la posición de todos los eslabones de un sistema.
- Identificación.** Conjunto de métodos para la obtención de modelos matemáticos a partir de datos experimentales de las entradas y salidas de un sistema. Evitándose la obtención de un modelo a partir de complejas leyes.
- Incertidumbre.** En teoría de la información, la certidumbre es el grado cómo la información se puede considerar verdadera, completa y digna de fe. La incertidumbre se origina a partir de elementos de datos falsos o de un equívoco, a partir de datos incompletos o de un contexto ambiguo.
- Modelo matemático.** Es la representación por medio de ecuaciones de la dinámica de un sistema. Es el tipo de modelo más importantes para la ciencia y la tecnología.
- Neurona** Célula nerviosa, elemento fundamental de la arquitectura nerviosa. Es una unidad de procesamiento de información que es fundamental para la operación de una red neuronal.
- Perceptrón.** Dicese de una arquitectura de red neuronal estática multicapa, cuyos nodos ocultos tienen una función de activación suave (sigmoideal), mientras que los nodos de salida poseen una función de activación lineal.
- Perturbación.** Variable no deseada aplicada a un sistema y la cual tiende a afectar adversamente el valor de una variable controlada. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina interna, en tanto que una perturbación externa se produce fuera del sistema y es una entrada.
- Punto de equilibrio.** El estado  $\mathbf{x}^*$  se dice que es un punto de equilibrio del sistema  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  si  $\mathbf{x}(t)$  es igual a  $\mathbf{x}^*$ , para todo  $t \geq t_0$ .
- Redes neuronales.** Procesador distribuido masivamente paralelo constituido de unidades de procesamiento simples, el cual tiene una tendencia natural a almacenar conocimiento experimental y hacerlo viable para su posterior uso.
- Regla Delta.** Regla de ajuste hecho al peso sináptico de una neurona, el cual es proporcional al producto de la señal de error y la señal de entrada de la sinapsis en cuestión.

**Retroalimentación.** En el proceso de control consiste en la reinyección de la salida (o algunas salidas) a la entrada del sistema, con el fin de mantener cierto desempeño.

**Retropropagación.** Algoritmo de entrenamiento basado en el método del descenso del gradiente.

**Robot.** Dispositivo generalmente mecánico, que desempeña tareas automáticamente, ya sea de acuerdo a supervisión humana directa, a través de un programa predefinido o siguiendo un conjunto de reglas generales. Generalmente estas tareas reemplazan, asemejan o extienden el trabajo humano, como ensamble en manufactura, manipulación de objetos pesados o peligrosos, trabajo en el espacio, etc.

**Sinapsis.** Son uniones especializadas mediante las cuales las células del sistema nervioso envían señales de unas a otras y a células no neuronales como las musculares o glandulares. Son la estructura elemental y unidad funcional que regulan la interacción entre neuronas.

**Sistema dinámico.** Sistema cuya respuesta depende de entradas presentes y pasadas (e incluso futuras), dicho sistema puede ser representado mediante ecuaciones diferenciales dinámicas.

**Sistema lineal.** Se dice que un sistema es lineal si cumple con los principios de homogeneidad y superposición.

**Sistema no lineal.** Se dice que un sistema es lineal si no cumple con los principios de homogeneidad o superposición.

**Sistema subactuado.** Sistema con menos actuadores que grados de libertad.

**Software.** Se dice de todos los componentes intangibles de una computadora, es decir, al conjunto de programas y procedimientos necesarios para hacer posible la realización de una tarea específica.

**Variables de estado.** Conjunto más pequeño de variables que determinan el estado de un sistema dinámico.

**Vector de estado.** Si se necesitan  $n$  variables para describir el estado de un sistema dado, entonces estas  $n$  variables se pueden considerar como los componentes de un vector  $\mathbf{x}$ .

# Apéndice A

## Teoría *wavelet*

El objetivo de este anexo es presentar la teoría *wavelet*, necesaria para el procesamiento de señales cerebrales para el control de un dispositivo robótico y un controlador *wavelet* multiresolución, siendo éste último el objetivo principal de la tesis. La organización del presente anexo es de la siguiente forma: en la Sección A.1 se da una introducción a la transformada *wavelet*, en la Sección A.2 se ve de manera breve el análisis de Fourier, la teoría *wavelet* es presentada en la Sección A.3 y por último en la Sección A.4 se dan algunos comentarios referente al capítulo presentado.

### A.1. Introducción

Este capítulo se enfoca a la teoría de la transformada *wavelet*, que es una herramienta matemática generada a mediados de los 80's. Siendo ésta muy eficiente para el análisis local de señales no estacionarias y de rápida transitoriedad, mapea la señal en una representación tiempo-escala que provee un análisis multiresolución con ventanas dilatadas, similar a una transformada de Fourier ventaneada, pero el análisis de frecuencias de mayor rango se realiza usando ventanas angostas y el análisis de las frecuencias de menor rango se hace utilizando ventanas anchas, y no fijas como se realiza en la transformada de Fourier. Además la transformada *wavelet* no es solamente local en frecuencia, sino también en tiempo.

Dentro de los usos de esta poderosa herramienta se puede nombrar, además del análisis local de señales no estacionarias, el análisis de señales EEG, sísmicas, de sonido, de radar, así como también es utilizada para la compresión y procesamiento de imágenes y reconocimiento de patrones, etc.

## A.2. Análisis de Fourier

Jean Baptiste J. Fourier matemático y físico francés quien demostró que una función podía ser desarrollada en términos de series trigonométricas convergentes llamadas Series de Fourier, publicando en 1807, desarrolló esta teoría cuando estudiaba la ecuación del calor el cual fue publicado en 1822 en su celebre "Théorie Analytique de la Chaleur" (Teoría Analítica del Calor) [28].

### A.2.1. Funciones periódicas

Dado que los términos de las series trigonométricas son periódicas es lógico deducir que las funciones que se van a desarrollar mediante dichas series deben ser también periódicas. Se dice que una función  $f(x)$  tiene un período  $P$  o es periódica con un período  $P$  si para todo  $x$ ,  $f(x + P) = f(x)$ , donde  $P$  es una constante Positiva, en la Figura A.1 se muestra una señal periódica. El menor valor de  $P > 0$  se llama el período mínimo o período fundamental de  $f(x)$  [79].

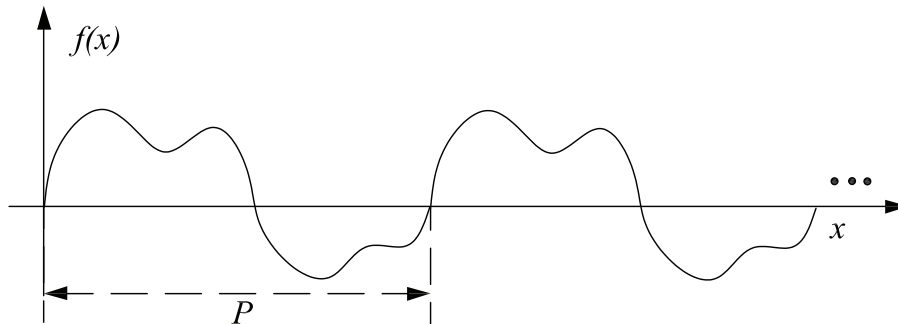


Figura A.1: Representación de una función periódica  $f(x)$ , con período  $P$ .

### A.2.2. Coeficientes y series de Fourier

Los desarrollos en series de Fourier, tienen dos aplicaciones fundamentales:

- Representar una función  $f(x)$  definida en el intervalo  $(-c, c)$ , para los valores de  $x$  en ese intervalo.
- Representar una función periódica con un período  $2c$  para todos los valores de  $x$ .

La función  $f(x)$  puede ser proyectada en una base ortonormal de funciones  $\{\phi_k(x)\}$ , de la siguiente forma [17]:

$$\hat{f}(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \dots + c_k\phi_k(x) + \dots, \quad (-c < x < c); \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.1})$$

se espera que el desarrollo de  $\hat{f}(x)$  converja a la función original  $f(x)$ .

Se puede demostrar que los coeficientes  $c_k$  de la suma son los coeficientes de Fourier de  $f(x)$  con respecto a la base ortonormal  $\{\phi_k(x)\}$ . Estos coeficientes pueden expresarse como:

$$c_k = \int_{-c}^c f(x) \overline{\phi_k(x)} dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.2})$$

siendo  $\hat{\phi}$  el complejo conjugado de  $\phi$ .

La serie de (A.1) con estos coeficientes es la serie de Fourier genérica correspondiente a la función  $f(x)$ , y se define como:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x), \quad (\text{A.3})$$

si  $f(x)$  está definida en el intervalo  $(0, 2\pi)$  y determinada fuera de ese intervalo por  $f(x + 2\pi) = f(x)$ , esto es,  $f(x)$  tiene periodo  $2\pi$ , la serie de Fourier que corresponde a  $f(x)$  sobre la base ortogonal de senos y cosenos se define como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (\text{A.4})$$

donde los coeficientes de Fourier  $a_k$  y  $b_k$  se definen como:

$$\begin{cases} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, \end{cases} \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.5})$$

Puede observarse que los coeficientes de Fourier de la función transformada representan la contribución de cada función seno y coseno para cada frecuencia [79].

Usando la formula de Euler:  $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$  se puede escribir la serie de Fourier de  $f(x)$  como una combinación lineal de funciones exponenciales complejas:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad (\text{A.6})$$

donde las funciones  $\phi_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$  constituyen un conjunto ortonormal [90].

Los coeficientes de Fourier de  $f(x)$ , respecto de esta base, pueden expresarse como:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (\text{A.7})$$

Es evidente que la serie de Fourier, (A.3), no puede representar una función para todos los valores de  $x$  si la función no es periódica.

### A.2.3. Transformada de Fourier

Para obtener una representación que pueda ser válida para todos los valores de  $x$  cuando  $f(x)$  no es periódica, es natural intentar extender la representación anterior dejando que  $c$  tienda a infinito, lo que da lugar a la transformada de Fourier [17].

La transformada de Fourier de una función no periódica  $f(x)$  esta definida por

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx, \quad (\text{A.8})$$

donde  $w$  es una variable compleja continua.

La función puede ser reconstruida a partir de sus componentes de Fourier, por medio de la transformada inversa de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwx} dw \quad (\text{A.9})$$

La transformada de Fourier en  $L^2(\mathbb{R}) [-\infty, \infty]$  satisface las siguientes propiedades:

- Es una Transformación de Fourier uno-a-uno de  $L^2(\mathbb{R}) [-\infty, \infty]$  en sí mismo
- Preserva la norma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \|F(w)\|^2 dw \quad (\text{A.10})$$

- Preserva el producto interno

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) * g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(w) * G(w) dw \quad (\text{A.11})$$

### A.2.4. Limitaciones del análisis de Fourier

La transformada de Fourier es ampliamente utilizada en el procesamiento y análisis de señales y con resultados satisfactorios en los casos en que estas señales son periódicas y lo suficientes regulares, pero no ocurre lo mismo para el análisis de señales cuyo espectro varía con el tiempo (señales no estacionarias) [68].

Tomando el caso en el que la función  $f$  a descomponer es una señal dependiente del tiempo, puede decirse que las funciones de la base de Fourier son de duración infinita en el tiempo, pero locales en frecuencia.

La transformada de Fourier detecta la presencia de una determinada frecuencia pero no brinda información acerca de la evolución en el tiempo de las características

espectrales de la señal. Muchos aspectos temporales de la señal, tales como el comienzo y el fin de una señal finita y el instante de aparición de una singularidad en una señal transitoria, no puede ser analizados adecuadamente por el análisis de Fourier.

Para los casos de señales no estacionarias y transitorias se utiliza generalmente la transformada de Fourier ventaneada.

### A.2.5. Transformada de Fourier ventaneada

Una forma de analizar una señal no estacionaria es realizar un análisis espectral dependiente del tiempo. Una señal estacionaria es dividida en una secuencia de segmentos de tiempo en los cuales la señal puede ser considerada como una cuasi-estacionaria y la transformada de Fourier es aplicada a cada segmento local de la señal. Gabor, en 1940, fue el primero en introducir la transformada de Fourier de tiempo corto, conocida como la transformada de Fourier con ventana deslizante, definida como

$$S_f(\omega, \sigma) = \int f(t) * g(t - \sigma) e^{-i\omega t} dt, \quad (\text{A.12})$$

donde  $g(t)$  es una ventana deslizante, la cual tiene un ancho fijo y cambia a lo largo del eje  $x$  por un factor  $\sigma$  [78], la función está definida como (A.13). Así, propuso a la función Gaussiana como la función ventana  $g(t)$  y demostró que la transformada de Fourier de una ventana Gaussiana continúa siendo Gaussiana [78].

$$g(t) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{\pi t^2}{\sigma^2}} \quad (\text{A.13})$$

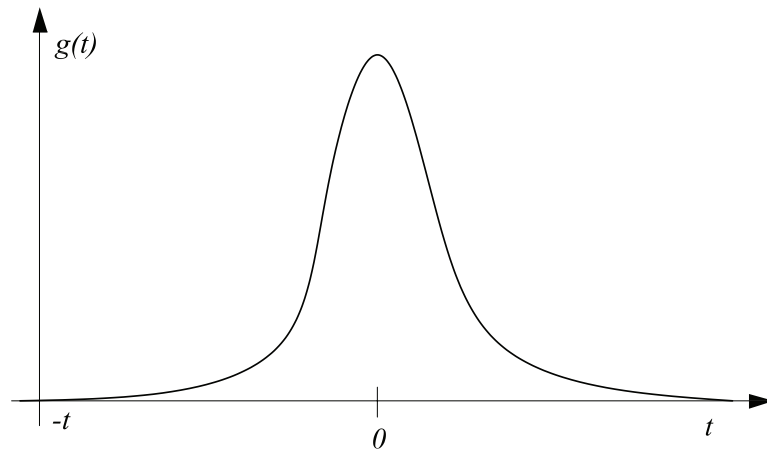


Figura A.2: Representación gráfica de (A.13), donde  $g(t)$  es la función de Gauss,  $t$  es el tiempo,  $\sigma$  es el factor de desplazamiento.

Con la transformada de Fourier ventaneada se logra una mejor localización de la aparición de una singularidad en una señal. Pero solo conocerá en que intervalo de tiempo se produce la singularidad, debido a que la localización depende del ancho elegido para la función ventana. Además, los eventos no podrán ser resueltos si aparecen muy cerca unos de otros, ya que no será posible distinguir diferentes comportamientos dentro de una misma amplitud de ventana [86]. Dada las desventajas que se presenta con la transformada de Fourier ventaneada, surge la transformada *wavelet* como alternativa a Fourier.

### A.3. Teoría *wavelet*

Aunque la primera *wavelet* que se conoce fue descubierta en 1910, Alfred Haar, un matemático Húngaro, descubre una “base” de funciones que se reconocen actualmente como las primeras *wavelets*, denominadas “*wavelets* de Haar”[36]. Tiempo después, el ingeniero petrolífero Jean Morlet en 1981, desarrolló su propia forma de analizar las señales sísmicas para crear componentes que estuvieran localizados en el espacio, a los que denominó “*wavelets* de forma constante”, actualmente se conocen como “*wavelets* de Morlet”, independientemente de que los componentes se dilaten, compriman o desplacen en el tiempo, mantienen la misma forma. Alex Grossmann, un físico de Marsella, trabajó con Morlet durante un año para confirmar que las ondas se podían reconstruir a partir de sus descomposiciones en *wavelets*. Demostrando, que la transformada *wavelet* funciona mucho mejor que la transformada de Fourier, porque eran mucho menos susceptibles a pequeños errores de cómputo. Un error o un truncamiento indeseados de los coeficientes de Fourier pueden transformar una señal suave en una saltarina o viceversa; las *wavelets* evitan tales consecuencias desastrosas. Publicó su artículo [34] en 1984, en el cual se utilizó por primera vez la palabra “*wavelet*”.

En 1985, Yves Meyer, reconocido ampliamente como uno de los fundadores de la teoría *wavelet* [57, 58, 59], descubre las primeras *wavelets* ortogonales suaves. “Ortogonalidad” significa que la información capturada por una *wavelet* es completamente independiente de la información capturada por otra. En 1986, Stéphane Mallat, un antiguo alumno de Meyer, vinculó la teoría de *wavelets* a la literatura existente sobre codificación de subbanda y filtros de duplicación de cuadratura, que son las versiones de las *wavelets* de la comunidad de procesamiento de imágenes. La idea del análisis multiresolución (es decir, la observación de señales a distintas escalas de resolución) ya era familiar para los expertos en procesamiento de imágenes. Mallat, en colaboración con Meyer, demostraron que las *wavelets* están implícitas en el procesos del análisis multiresolución [52, 51].

Gracias al trabajo de Mallat, las *wavelets* se convirtieron en algo mucho más sencillo. Ya se podía hacer un análisis con las *wavelets* sin necesidad de conocer la fórmula

de una *wavelet* madre. El proceso se redujo a sencillas operaciones, el lenguaje de las *wavelets* también resulto más cómodo para los ingenieros eléctricos, que adoptaron términos familiares como “filtros”, “altas frecuencias” y “bajas frecuencias”[53].

En 1987, Ingrid Daubechies, descubrió una clase completamente nueva de *wavelets* [18, 19], que no sólo eran ortogonales (como las de Meyer) sino que también se podían implementar mediante sencillas ideas de filtrado digital. Las nuevas *wavelets* eran casi tan sencillas de programar y utilizar como las *wavelets* de Haar, pero eran suaves, sin los saltos de las *wavelets* de Haar. Los procesadores de señales disponían ahora de una herramienta de ensueño: una manera de descomponer datos digitales en contribuciones de diversas escalas. Al combinar las ideas de Daubechies y Mallat, se disponía de una transformación ortogonal y sencilla que se podía calcular rápidamente en las modernas computadoras digitales.

Los trabajos importantes surgidos en la década de los 80's, dieron origen a lo que hoy en día se le conoce como la Teoría *wavelet*.

Literalmente el término *wavelet* significa pequeña onda u ondoleta. Dentro de un contexto más general, una *wavelet* es una función que satisface las condiciones:

- tiene una explosión concentrada pequeña de energía finita en el dominio del tiempo, y
- exhibe una cierta oscilación en el tiempo.

La primera condición hace que la *wavelet* sea pequeña en el sentido que es bien localizada en el tiempo, mientras que la segunda condición permite observar la ondulación que la hace ser así llamada *wavelet*. Existen algunas características importantes de las *wavelets*, tales como el soporte compacto, que es la propiedad de que la *wavelet* sea de duración finita, lo que permite una menor complejidad en los cálculos, mejor resolución en el tiempo y pobre resolución en frecuencia. Otra característica para ser empleada con filtros digitales es la simetría que permite que los filtros sean de fase lineal.

Después de haber dado un poco de historia sobre las *wavelets*, se procede a dar la teoría *wavelet* de forma formal, por lo que primero se da la definición de función *wavelet*.

**Definición 1** [*Función wavelet,  $\psi$* ] Una función wavelet es una función  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  que cumple con la siguiente condición de admisibilidad

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (\text{A.14})$$

La función wavelet es tradicionalmente llamada wavelet madre, por que a partir de ella se pueden generar una familia de funciones de doble índice llamadas funciones wavelet hijas.

A continuación se dan algunos ejemplos de funciones *wavelets* madre más comunes, entre estas se encuentran: Haar, Mexican hat, Morlet, Meyer, Daubechies, Shannon [53, 56]. La definición y la gráfica correspondiente a cada una de dichas *wavelets* madre se muestran en la Tabla A.1 y en la Figura A.3.

Nombre	Definición
Haar	$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ -1, & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$
Mexican hat	$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1 - t^2) e^{-\frac{1}{2}t^2}$
Morlet	$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t)$
Meyer	$\psi(\omega) = \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i\omega}{2}} \sin(\frac{\pi}{2} v (\frac{3}{2\pi}  \omega  - 1)), & \text{si } \frac{2\pi}{3} \leq  \omega  \leq \frac{4\pi}{3} \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i\omega}{2}} \cos(\frac{\pi}{2} v (\frac{3}{4\pi}  \omega  - 1)), & \text{si } \frac{4\pi}{3} \leq  \omega  \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$ $v = a^4(35 - 84a + 70a^2 - 20a^3), \quad a \in [0, 1]$
Daubechies	$P(y) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k^{N-1+k} y^k;$ $C_k^{N-1+k}$ son coeficientes binomiales, N es el orden de la <i>wavelet</i>
Shannon	$\psi(t) = \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2}t)}{\frac{\pi}{2}t} \cos(\frac{3\pi}{2}t)$

Tabla A.1: Algunos ejemplos comunes de *wavelets* madre.

**Definición 2 [función wavelet hija,  $\psi_{a,b}$ ]** Una función wavelet hija, es una función generada a partir de la dilatación-contracción y traslación de una función wavelet madre, y se denota como

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a > 0; \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.15})$$

donde la variable escala “a” permite hacer dilataciones y las contracciones de la señal, y la variable de traslación “b” permite el desplazamiento en el tiempo.

El factor de normalización  $(\sqrt{a})^{-1}$  ha sido seleccionada tal que

$$\|\psi_{a,b}\| = \|\psi\|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

por lo que se puede asumir que  $\|\psi\| = 1$ .

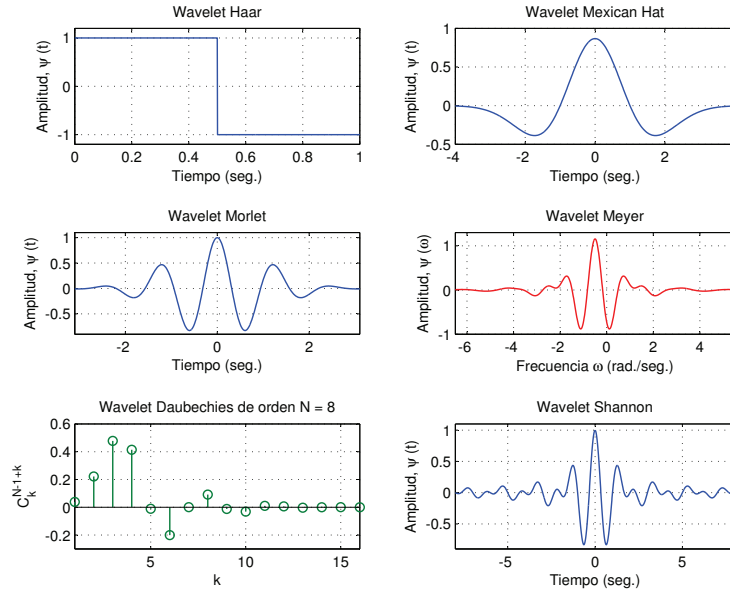


Figura A.3: Gráficas de las *wavelets* madre dadas en la Tabla A.1.

### A.3.1. Transformada *wavelet*

Existen diferentes tipos de transformada *wavelet*, todas parten de las *wavelets* básicas anteriores. Principalmente, se distingue entre transformada *wavelet* continua y transformada *wavelet* discreta y dentro de ésta última se clasifican los sistemas discretos redundantes o frames y las bases *wavelets* ortonormales. Las funciones bases *wavelets* ortonormales inducen el análisis multiresolución, que nos permiten descomponer una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , lo cual es muy importante en el desarrollo del control *wavelet*.

Antes de tratar el análisis multiresolución basada *wavelet*, trataremos la transformada *wavelet* continua y la transformada *wavelet* discreta,

#### A.3.1.1. Transformada *wavelet* continua

Sea  $V_1$  y  $V_2$ , espacios Hilbert, la transformada *wavelet* continua,  $W_f(a, b)$  es descrita como un mapeo

$$\begin{aligned} W_f &: V_1 \rightarrow V_2 \\ f(t) &\mapsto \langle f, \psi_{a,b} \rangle \end{aligned}$$

donde  $f \in L^2(\mathbb{R}) = V_1$  y  $\psi_{a,b}$  es una función *wavelet* hija. Es decir, la transformada *wavelet* continua es definida como un mapeo  $W_f(a, b)$  que es dependiente de las especificaciones de una función *wavelet* madre  $\psi$ .

A continuación se da la definición formal

**Definición 3 [Transformada wavelet continua]**

La transformada wavelet continua de una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  correspondiente a una determinada wavelet  $\psi$  es

$$W_f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) dt. \quad (\text{A.16})$$

Para este caso específico los parámetros de dilatación  $a$  y traslación  $b$  varían continuamente sobre  $\mathbb{R}$ , con la restricción  $a \neq 0$ . El parámetro  $b$  es utilizado para trasladar en el tiempo la función *wavelet* madre, tal que para un valor fijo de  $a$ , la transformada *wavelet* puede ser vista como una convolución de  $f(t)$  y la *wavelet* escalada con el tiempo invertido, de la siguiente manera

$$W_f(a, t) = |a|^{-\frac{1}{2}} f(t) \psi_a(t); \quad \psi_a(t) = \psi\left(\frac{-t}{a}\right).$$

El efecto de desplazamiento produce como resultado que la transformada *wavelet* realice un efecto de ampliación en fenómenos de alta frecuencia y de muy breve duración, tal como en transiciones de la señal o singularidades en funciones.

**Observaciones.** De la definición de la transformada *wavelet* se dan las siguientes observaciones:

- El análisis *wavelet* es frecuentemente llamado análisis tiempo-escala mientras que en Fourier es llamado análisis tiempo-frecuencia.
- La correspondencia  $f(t) \rightarrow W_f(a, b)$  indica un cambio de una función de una variable por una función a dos variables, dentro de los cuales son construidos porciones de correlaciones. Esta redundancia de la representación es explotada en una aplicación conocida como concepto esqueleto de una señal extraída de la transformada *wavelet* continua, la cual puede ser usada para filtrado no lineal [86].

**Propiedades**

A continuación se mencionan algunas de las propiedades que posee la transformada *wavelet* continua, todas ellas surgen como relación directa de la base matemática en la que se apoya la transformada *wavelet*.

Considerando funciones arbitrarias  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , y escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , se satisfacen las siguientes propiedades

$$[\mathbf{P}_1] \quad W[\alpha f + \beta g](a, b) = \alpha W_f(a, b) + \beta W_g(a, b); \quad (\text{Linealidad})$$

$$[\mathbf{P}_2] \quad W_{f'}(a, b) = W_f\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}\right); \quad \text{para } f' = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f\left(\frac{t}{\alpha}\right); \quad (\text{Escalando})$$

- [P<sub>3</sub>]  $W_{f'}(a, b) = W_f(a, b - b_0)$ ; para  $f' = f(t - b_0)$ ; (Traslación en el tiempo)
- [P<sub>4</sub>]  $\sum_{a,b \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_{a,b}, f \rangle|^2 = \|f\|^2$ ; (Igualdad de Parseval)
- [P<sub>5</sub>] Para localizar los valores de  $W_g(a, b)$  que contengan información alrededor del tiempo  $t_0$ , dada una *wavelet*  $\psi(a, b)$  y una función  $g = f(t_0)$ ; en la escala  $a$ , los coeficientes *wavelets* que satisfacen el índice  $b$  serán influenciados  $(-b_1 + b) 2^a \leq t_0 \leq (b_2 + b) 2^a$  o bien en término de  $b$ ,  $2^{-a}t_0 - b_2 \leq b \leq 2^{-a}t_0 + b_1$ ; (Localización en el tiempo)
- [P<sub>6</sub>] Para localizar los valores de  $W_f(a, b)$  que contengan información alrededor de una componente de frecuencia  $\omega_0$ , dada una *wavelet*  $\psi(a, b)$  y una función  $f(t)$ ; en la escala  $a$ , los coeficientes *wavelets* que satisfacen el siguiente rango de escalas son afectados  $\frac{\omega_{min}}{2^a} \leq \omega_0 \leq \frac{\omega_{max}}{2^a}$  dado en término de  $a$ ,  $\log_2(\frac{\omega_{min}}{\omega_0}) \leq a \leq \log_2(\frac{\omega_{max}}{\omega_0})$ ; (Localización en la frecuencia)
- [P<sub>7</sub>]  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W_f(a, b)|^2 \frac{da db}{a^2}$ , donde  $C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$  y  $\Psi(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $\psi$ ; (Conservación de la energía)
- [P<sub>8</sub>] Para asegurar la perfecta reconstrucción, la transformada *wavelet* deberá cumplir  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$ , donde  $\Psi(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $\psi$  y  $\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ . (Admisibilidad)

Una vez que se comprende el proceso de análisis de la transformada *wavelet*, así como sus propiedades, es importante conocer el proceso inverso que nos permite reconstruir la señal. Se considerarán dos variantes de transformadas *wavelets* continuas que difieren en la forma de realizar la reconstrucción. Específicamente una reconstrucción integral desde un plano completo de tiempo-frecuencia y una reconstrucción semi-discreto. Aquí se da a conocer la reconstrucción integral.

El producto interno de dos señales  $f(t)$  y  $y(t)$  está relacionado a el producto interno de su transformada *wavelet* como:

$$\langle f, y \rangle = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(a, b) \overline{W_y(a, b)} \frac{da db}{a^2}, \quad (\text{A.17})$$

con

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

Dado el producto interno, se obtiene una ecuación de síntesis, de la siguiente manera:

Primeramente, definiendo

$$y_t(t') = \delta(t' - t), \quad (\text{A.18})$$

porque además la siguiente relación se cumple

$$\langle f, y_t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \delta(t' - t) dt' = f(t), \quad (\text{A.19})$$

substituyendo (A.18), en (A.17), se obtiene

$$\langle f, y_t \rangle = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(a, b) |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t' - t) \psi\left(\frac{t' - b}{a}\right) dt' \frac{da db}{a^2}, \quad (\text{A.20})$$

de aquí obtenemos la fórmula de reconstrucción

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(a, b) \psi\left(\frac{t - b}{a}\right) \frac{da db}{a^2}, \quad (\text{A.21})$$

### A.3.1.2. Transformada *wavelet* discreta

Para *wavelets* discretas los parámetros de escala y traslación son elegidos tal que en el nivel  $m$  la *wavelet*  $a_0^m \psi(a_0^{-m}t)$ , es  $a_0^m$  veces el ancho de  $\psi(t)$ . Esto significa que el parámetro de escala es  $a = a_0^m$  :  $m \in \mathbb{Z}$  y el parámetro de traslación  $b = kb_0 a_0^m$  :  $m, k \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto la familia de *wavelets* está dada por

$$\psi_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi(a_0^{-m}t - kb_0). \quad (\text{A.22})$$

A partir de estas consideraciones se formula la definición de la transformada discreta, que se da a continuación.

**Definición 4** [*Transformada wavelet discreta*] La transformada *wavelet* discreta, se obtiene de la restricción de que  $a, b$  son solamente valores discretos  $a = a_0^m$ ,  $b = kb_0 a_0^m$ , donde  $a_0 > 1$ ,  $b_0 > 0$  son valores fijos. Dada una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  su transformada *wavelet* discreta se define como

$$W_f[m, k] = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t}{a_0^m} - kb_0\right) dt; \quad m, k \in \mathbb{Z}$$

donde  $\psi$  es una *wavelet* madre.

Para recuperar  $f(t)$  de los coeficientes  $W_f[m, k]$  debe existir la siguiente condición de estabilidad,

$$A \|f(t)\|^2 \leq \frac{2}{A+B} \sum_m \sum_k |W_f[m, k]|^2 \leq B \|f(t)\|^2 \quad (\text{A.23})$$

es decir, que la norma al cuadrado de la señal original está acotada por arriba y por abajo para  $A > 0$  y  $B < \infty$  para todas las señales  $f(t)$  en  $L^2(\mathbb{R})$ . Entonces la fórmula de reconstrucción está determinada por

$$f(t) \approx \frac{2}{A+B} \sum_m \sum_k W_f[m, k] \psi_{m,k}(t), \quad (\text{A.24})$$

entre más cercanos sean los valores de  $A$  y  $B$  más aproximada será la reconstrucción. Cuando  $A = B = 1$  la familia de *wavelets* es ortonormal.

## A.4. Comentarios

En este apéndice se presentan los fundamentos básicos de la teoría *wavelet*, que son necesarios para el entendimiento de la descomposición multiresolución de una señal, que en el caso de control clásico es la señal de error, que permite el desarrollo de un control PID multiresolución. Además, se puede observar que la aproximación de una función 3.16 está dada como una combinación lineal de *wavelets* ponderadas por los coeficientes  $c_i$ , esta representación permite tener una estructura de una red neuronal *wavelet*.

# Apéndice B

## Conceptos previos

### B.1. Conceptos generales

Para una mayor comprensión sobre el tema de la teoría *wavelet*, se resumen en este apéndice algunos conceptos matemáticos necesarios.

**Definición 5 [Relación de equivalencia]** Si existe un mapeo 1-1 de  $A$  sobre  $B$ , se dice que  $A$  y  $B$  se pueden poner en **correspondencia** ó que  $A$  y  $B$  tienen el mismo **número de cardinalidad** ó simplemente, que  $A$  y  $B$  son **equivalentes**, y se escribe  $A \sim B$ . Esta relación tiene las siguientes propiedades:

- Ésta es reflexiva:  $A \sim B$ .
- Ésta es simétrica: si  $A \sim B$ , entonces  $B \sim A$ .
- Ésta es transitiva: si  $A \sim B$  y  $B \sim C$ , entonces  $A \sim C$ .

cualquier relación con estas tres propiedades se llama una **relación de equivalencia**.

**Definición 6 [Conjuntos contables]** Para algún entero positivo  $n$ , sea  $J_n$  el conjunto cuyos elementos son los enteros  $1, 2, \dots, n$ ; sea  $J$  el conjunto de todos los enteros positivos. Para algún conjunto  $A$ , se dice:

- (a)  $A$  es finito si  $A \sim J_n$  para algún  $n$ .
- (b)  $A$  es infinito si  $A$  es no finito.
- (c)  $A$  es contable si  $A \sim J$ .
- (d)  $A$  es no contable si  $A$  es no finito.

Los **conjuntos contables** son algunas veces llamados **conjuntos enumerables**.

**Ejemplo 1** Sea  $A$  el conjunto de todos los enteros. Entonces  $A$  es **contable**. Para ésto considere los siguientes arreglos de los conjuntos  $A$  y  $J$ :

$$\begin{aligned} A &= \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots \} \\ J &= \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \} \end{aligned}$$

donde se puede observar que existe una correspondencia 1-1 entre los elementos de ambos conjuntos.

**Definición 7 [Campo]** Es una colección de elementos de un conjunto  $\mathbf{F}$  que posee dos operaciones binarias, llamadas suma y producto, tal que el resultado de estas operaciones de dos elementos cualquiera de  $\mathbf{F}$  da un elemento también de  $\mathbf{F}$ ,  $(\alpha + \beta) \in \mathbf{F}$  y  $(\alpha \cdot \beta) \in \mathbf{F}$ , es decir, es cerrado bajo las operaciones de suma y producto. Además un **campo** cumple con los siguientes axiomas:

1. Operación binaria **adición**, satisfaciendo:

- La adición es conmutativa,  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{F}$ .
- La adición es asociativa,  $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ ,  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{F}$ .
- Existe un elemento neutro único, llamado neutro aditivo y denotado por 0, tal que  $\alpha + 0 = \alpha$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{F}$ .
- Existe un elemento llamado inverso aditivo, único a cada elemento del campo  $\alpha \in \mathbf{F}$ , tal que  $\alpha + (-\alpha) = 0$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{F}$ .

2. Operación binaria **producto**, satisfaciendo:

- El producto es conmutativo,  $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{F}$ .
- El producto es asociativo,  $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ ,  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{F}$ .
- Existe un elemento único, llamado neutro multiplicativo y denotado por 1, tal que  $\alpha \cdot 1 = \alpha$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{F}$ .
- Existe un elemento llamado inverso multiplicativo único para cada elemento del campo  $\alpha \in \mathbf{F}$ , tal que,  $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$ ,  $\forall \alpha, \alpha^{-1} \in \mathbf{F}$ .

3. El **producto** es distributivo con respecto a la **adición**, es decir

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma), \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{F}.$$

**Observación 1**    ▪ Usualmente se escribe (en cualquier campo)

$$\alpha - \beta, \frac{\alpha}{\beta}, \alpha + \beta + \gamma, \alpha\beta\gamma, \alpha^2, \alpha^3, 2\alpha, 3\alpha, \dots$$

en lugar de

$$\alpha + (-\beta), \alpha \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right), \alpha + (\beta + \gamma), \alpha\alpha, \alpha\alpha\alpha, \alpha + \alpha, \alpha + \alpha + \alpha, \dots$$

- Ejemplos de campos son: los números reales  $\mathbb{R}$ ; los números racionales  $\mathbb{Q}$ ; los números complejos  $\mathbb{C}$ .

Un espacio vectorial puede ser definido sobre cualquier campo  $\mathbf{F}$ , sólo que para propósitos de esta tesis los campos a considerar son los reales y los complejos, es decir  $\mathbf{F}\mathbb{R}$  ó  $\mathbf{F}\mathbb{C}$ , dando como resultado un espacio vectorial lineal real y un espacio vectorial lineal complejo, respectivamente.

**Definición 8 [Espacio vectorial lineal]** Un **espacio vectorial lineal real**  $\mathbb{R}$  (espacio lineal complejo  $\mathbb{C}$ , respectivamente) es un conjunto cuyos elementos  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  son llamados vectores que junto con las operaciones de adición

$$(+): V \times V \rightarrow V$$

y multiplicación

$$\begin{aligned} (\cdot): \mathbb{R} \times V &\rightarrow V \\ ((\cdot): \mathbb{C} \times V &\rightarrow V, \text{ respectivamente.}) \end{aligned}$$

cumplen con los siguientes axiomas  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$  y  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ,  $(c_1, c_2 \in \mathbb{C})$

1. Ley conmutativa,  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ ,
2. Ley asociativa,  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ ,
3. Ley asociativa con respecto a los elementos del campo,  $r_1 \cdot (r_2 \cdot \mathbf{x}) = (r_1 r_2) \mathbf{x}$ ,  
 $(c_1 \cdot (c_2 \cdot \mathbf{x})) = (c_1 c_2) \mathbf{x}$ , respectivamente)
4. Ley distributiva con respecto a los elementos del campo,  $r_1 \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = r_1 \cdot \mathbf{x} + r_1 \cdot \mathbf{y}$ ,  
 $(c_1 \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})) = c_1 \cdot \mathbf{x} + c_1 \cdot \mathbf{y}$ , respectivamente)
5. Ley distributiva con respecto a los elementos del campo,  $(r_1 + r_2) \cdot \mathbf{x} = r_1 \cdot \mathbf{x} + r_2 \cdot \mathbf{x}$ ,  
 $((c_1 + c_2) \cdot \mathbf{x}) = c_1 \cdot \mathbf{x} + c_2 \cdot \mathbf{x}$ , respectivamente)
6. Existe un elemento neutro único, llamado neutro aditivo y denotado por  $0_v \in V$ , tal que  $\mathbf{x} + 0_v = \mathbf{x}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in V$
7. Existe un elemento llamado inverso aditivo, único a cada elemento de  $V$ , tal que  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0_v$ ,

8. Existe un elemento llamado neutro multiplicativo, único a cada elemento de  $V$ , tal que  $\mathbf{x} \cdot 1 = \mathbf{x}$ .

Un espacio vectorial  $V$  es cerrado bajo las operaciones binarias de adición y producto por un escalar, es decir, una operación binaria de un vector  $\mathbf{x}$  y un elemento  $\alpha$  del campo  $\mathbb{R}$ .

Existen propiedades importantes de un espacio vectorial  $V$  que se obtienen de los axiomas de la definición, y se enuncian a continuación:

1.  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z}$ ,
2.  $\alpha \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{y}, \alpha \neq 0_v \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$ ,
3.  $\alpha \cdot \mathbf{x} = \beta \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \neq 0_v \Rightarrow \alpha = \beta$ ,
4.  $(\alpha - \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} - \beta \cdot \mathbf{x}$ ,
5.  $\alpha \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} - \alpha \cdot \mathbf{y}$ ,
6.  $\alpha \cdot 0_v = 0_v$ .

**Definición 9 [Subespacio]** Un subconjunto  $M$  de un espacio vectorial  $V$  es llamado **subespacio** de  $V$  si  $M$  satisface las siguientes condiciones  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$

1.  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$ ,
2.  $\alpha \cdot \mathbf{x} \in M$ ,

de manera equivalente  $\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \in M$ .

**Observación 2** Debido a que  $M \neq \emptyset \Rightarrow \exists \mathbf{x} \in M \Rightarrow (-1\mathbf{x} + 1\mathbf{x}) \in M$ , entonces

$$(-1 + 1)\mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} = 0 \in M,$$

es decir cualquier subespacio contiene el vector nulo.

**Definición 10 [Combinación lineal]** Una **combinación lineal** está formada por la suma de elementos de un espacio vectorial  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n \in V$  en combinación con escalares del campo  $\mathbf{F}$ , es decir

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \alpha_3 \mathbf{x}_3 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n.$$

Una combinación lineal es usada para construir un subespacio de un subconjunto arbitrario en un espacio vectorial. Una combinación lineal de un subespacio  $M$  está contenido en el mismo subespacio.

**Definición 11 [Generador o Span]** Sea  $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  un conjunto finito de vectores en un espacio vectorial  $V$ . El subconjunto  $W$  de  $V$  generado (spanned) por  $S$  es el conjunto de todas las combinaciones de  $S$ . Este conjunto es llamado **generador** ó **span** de  $S$  y se denota por:

$$[S] = \text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$$

**Teorema 1** El **generador** o **span** de cualquier conjunto finito  $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  de vectores en  $V$  es un subconjunto de  $V$ .

**Definición 12 [Dependencia lineal]** Un vector  $\mathbf{x}$  se dice **linealmente dependiente** de un conjunto finito de vectores  $S$ , si  $\mathbf{x}$  puede ser expresado como una combinación lineal de  $S \subset V$ , es decir

$$\mathbf{x} = \sum_i \alpha_i \mathbf{s}_i; \quad \mathbf{s}_i \in S.$$

**Definición 13 [Independencia lineal]** Un conjunto finito de vectores  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n\}$  es **linealmente independiente** si

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \alpha_3 \mathbf{x}_3 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$

implica que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Por negación de la Definición 12, un vector  $\mathbf{x}$  se dice **linealmente independiente** del conjunto  $S$  si no es linealmente dependiente de  $S$ .

**Definición 14 [El conjunto vacío,  $\emptyset$  es linealmente dependiente]**  $\emptyset$  es linealmente dependiente de cualquier conjunto de vectores.  $\emptyset$  es considerado un conjunto dependiente. El conjunto de un sólo elemento diferente de cero es linealmente independientes, es decir  $\{V \neq 0\}$  es un conjunto independiente.

**Teorema 2** El conjunto de vectores  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n\}$  son linealmente independientes si y sólo si  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_k = 0; \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

**Corolario 1** El conjunto de vectores  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n\}$  son linealmente independientes, si:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{x}_k = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{x}_k \Rightarrow \alpha_k = \beta_k; \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

**Definición 15 [Base]** Un conjunto finito de vectores  $S$  linealmente independiente se dice una **base** de  $V$  si  $S$  genera  $V$ , es decir:  $[S] \supset V$ .

**Definición 16 [Dimensión]** Un espacio vectorial  $V$  que tiene una base finita se dice **finito dimensional**, si no es finito dimensional se dice **infinito dimensional**.

**Teorema 3** Cualesquiera dos bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.

El número de vectores en una base es igual al número de dimensión.

**Definición 17 [Transformación]** Sean  $V$  y  $Y$  espacios vectoriales y  $D \subset V$

$$\begin{aligned} T : D &\longrightarrow Y, \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{y}, \end{aligned}$$

con  $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ , a  $T$  se llama una **transformación** de  $V$  a  $Y$  con dominio  $D$ .

**Definición 18 [Funcional]** Una transformación de un espacio vectorial  $V$  al espacio de los reales o los complejos es una **funcional** en  $V$ , es decir

$$f : V \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{es una funcional en } V.$$

donde  $\mathbb{K}$  representa el espacio real  $\mathbb{R}$  o el espacio complejo  $\mathbb{C}$ .

**Definición 19 [Transformación lineal]** Sean  $V$  y  $Y$  espacios vectoriales sobre el mismo campo  $\mathbf{F}$ . Se dice que  $T : V \longrightarrow Y$  es **lineal** si  $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$  y  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{F}$  se cumple

$$T(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) = \alpha_1 T(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{x}_2).$$

**Ejemplo 2** A continuación se dan algunos ejemplos de transformaciones lineales:

- Transformada de Laplace

$$L\{\cdot\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} dt \{\cdot\},$$

- Transformada de Fourier

$$F\{\cdot\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \{\cdot\},$$

- Transformada  $Z$

$$Z\{\cdot\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} \{\cdot\},$$

- *Transformada wavelet*

$$W\{\cdot\} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b}(t) dt \{\cdot\}.$$

Una vez dado una serie de definiciones sobre espacio vectorial como son: dependencia e independencia lineal, base, dimensión, serie, transformación, funcional y transformación lineal. Se observa en todas estas definiciones que no se hace uso de la noción de distancia, para esto es importante dotar al espacio vectorial de una forma de medir.

**Definición 20 [Métrica]** *X es cualquier conjunto no vacío, un **métrica** es una función de dos argumentos  $d(x, y)$ , llamada también función de distancia,*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

que satisface

- $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$  (*Positividad*)
- $d(x, y) = 0, \quad$  si y sólo si  $x = y,$
- $d(x, y) = d(y, x),$  (*Simetría*)
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$  (*Desigualdad del triángulo*).

**Definición 21 [Espacio métrico]** *Un espacio métrico es el par  $(X, d)$ , es decir un conjunto no vacío  $X$  donde se ha definido una métrica.*

*Sea  $X$  un un espacio métrico. Todos los puntos y conjuntos mencionados abajo se entiende elementos y conjuntos de  $X$ .*

- Una **vecindad** de un punto  $p$  es un conjunto  $N_r(p)$  conteniendo todos los puntos  $q$  tal que  $d(p, q) < r$ . El número  $r$  es llamado el **radio** de  $N_r(p)$ .
- Un punto  $p$  es un **punto límite** del conjunto  $E$  si cualquier vecindad de  $p$  contiene un punto  $q \neq p$  tal que  $q \in E$ .
- Si  $p \in E$  y  $p$  no es un punto límite de  $E$ , entonces  $p$  se llama un **punto aislado** de  $E$ .
- $E$  es **cerrado** si cualquier punto límite de  $E$  es un punto de  $E$ .
- La **clausura** de  $E$  es la unión de dicho conjunto con todos sus puntos límites.
- Un punto  $p$  es un **punto interior** de  $E$  si existe una vecindad  $N$  de  $p$  tal que  $N \subset E$ .

- (g)  $E$  es **abierto** si cualquier punto de  $E$  es un punto interior de  $E$ .
- (h) El **complemento** de  $E$  (denotado por  $E^c$ ) es el conjunto de todos los puntos  $p \in X$  tal que  $p \notin E$ .
- (i)  $E$  es **perfecto** si  $E$  es cerrado y cualquier punto de  $E$  es un punto límite de  $E$ .
- (j)  $E$  esta **acotado** si hay un número real  $m$  y un punto  $q \in X$  tal que  $d(p, q) < m$  para todo  $p \in E$ .
- (k)  $E$  es **denso** en  $X$  si cualquier punto de  $X$  es un punto límite de  $E$ , o un punto de  $E$  (o ambos).

**Definición 22 [Espacio normado]** Un **espacio normado** es un par ordenado  $(V, \|\cdot\|)$  donde  $V$  es un espacio vectorial real (o complejo) y  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  es una función valuada en los reales definida sobre  $V$  llamada norma que satisface los siguientes axiomas:

1.  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ;  $\|\mathbf{x}\| = 0$ , si y sólo si  $\mathbf{x} = 0$ ; (Definida positiva)
2.  $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ; (Homogénea)
3.  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ ; (Desigualdad del triángulo)

Una norma  $\|\cdot\|$  en  $V$  define una métrica  $d$  en  $V$  dada por  $d(x, y) = \|x - y\|$  y es llamada la métrica inducida por la norma.

A continuación se dan algunos ejemplos de espacios normados:

**Ejemplo 3** *Espacio Euclidiano y espacio unitario.* El espacio vectorial lineal real de  $n$ -tuplas ordenadas de números reales  $\mathbb{R}^n$  (o complejos  $\mathbb{C}$ ), donde para  $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$  junto con la función

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ (o } \|\cdot\|_2 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}), \text{ definida por}$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2},$$

en el caso real se llama  $n$ -espacio Euclidiano y se denota por  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$  y en el caso complejo  $n$ -espacio unitario y se denota por  $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ .

**Ejemplo 4** *Considere nuevamente el espacio vectorial lineal  $\mathbb{R}^n$  (o  $\mathbb{C}^n$ ), junto con la función*

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ (o } \|\cdot\|_p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}), \text{ definida por}$$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde  $p$  es cualquier número en el intervalo  $[1, \infty]$ . Si  $p = 1$ , entonces  $\|\cdot\|_p$  está dada por

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

mientras que si  $p \rightarrow \infty$ , entonces la norma  $\|\cdot\|_p$  se aproxima a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_\infty &= \text{máx}|x_i|, \quad 1 \leq i \leq n \\ &= \text{máx}\{|x_i| \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}. \end{aligned}$$

Una vez dada la definición de norma sobre un espacio vectorial, éste se ha dotado de una forma de medir y ahora se está en posición de estudiar conceptos como convergencia, continuidad, límite, etc.

**Definición 23 [Transformación continua]** Sean  $V$  y  $Y$  espacios normados, se dice  $T : V \rightarrow Y$  es **continuo** en  $\mathbf{x}_0 \in V$ , si  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ , tal que  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_V < \delta \Rightarrow \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)\|_Y < \epsilon$ .

Como se puede observar la continuidad depende de la norma en ambos espacios  $V$  y  $Y$ . Se debe notar que  $T$  tiene que estar definida en el punto  $\mathbf{x}_0$  para que sea continua en  $\mathbf{x}_0$ .

**Definición 24 [Sucesión]** Una **sucesión** de elementos de un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales o un subconjunto propio de  $\mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow V, \\ n &\mapsto x_n, \end{aligned}$$

y se escribe  $x_n = f(n)$ . Una sucesión teniendo dominio a un subconjunto finito de  $\mathbb{N}$  son llamados sucesiones finitas. Es común en la práctica una notación de subíndice para una sucesión y escribir  $f(n)$  como  $x_n$  denotando la sucesión por

$$\{x_n\} = x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Cualquier subconjunto infinito de  $S$  de números naturales puede ser representado como el rango de una subsucesión donde los términos preservan el orden de sistema de números naturales  $\mathbb{N}$ ; esto es, hay una función  $g$  que preserva el orden

$$\begin{aligned} S &\subset \mathbb{N}, \\ f : \mathbb{N} &\longrightarrow V, \\ f : \mathbb{N} &\longrightarrow S, \\ f \circ g(n) &= f(g(n)). \end{aligned}$$

**Definición 25 [Subsucesión]** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión en  $V$ . Sea  $\{x_{n_k}\} = n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$  una sucesión de enteros positivos que son estrictamente crecientes, es decir,  $n_j > n_k \quad \forall j > k$ .

Entonces la sucesión  $\{x_{n_k}\}$  se le llama una **subsucesión** de  $\{x_n\}$ .

**Definición 26 [Límite de la subsucesión]** Si la subsucesión  $\{x_{n_k}\}$  converge, entonces su límite se le llama el **límite de la subsucesión** de  $\{x_n\}$ .

**Definición 27 [Serie]** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión, se puede construir otra sucesión  $\{s_n\}$  considerando la suma de los primeros  $n$  términos.

$$s_n = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

A una sucesión obtenida así  $\{s_n\}$  se llama **serie** y se dice que  $s_n$  es su  $n$ -ésima suma parcial.

**Definición 28 [Serie convergente]** Dada una serie

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

se denotará mediante el símbolo  $x_n$ . Si la sucesión  $\{x_n\}$  es **convergente** y si existe el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

entonces la serie  $\sum_{i=1}^n x_i$  se llama **convergente** y se escribe

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots = x \quad \text{ó} \quad \sum_{i=1}^n x_n = x,$$

El vector  $x$  se denomina **suma** ó **límite** de la serie. Si es otro caso, la serie se llamará **divergente**.

**Observación 3** El conjunto de todos los puntos  $x_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) es el **rango** de  $\{x_n\}$ . El rango de una sucesión puede ser un conjunto finito o éste puede ser infinito. La sucesión  $\{x_n\}$  se dice **acotado** si su rango es acotado.

Empleando los conceptos de sucesiones es posible relacionar la definición de continuidad y convergencia, la cual está dada en la siguiente proposición.

**Proposición 1** Sea  $V, Y$  espacios normados, y sea  $T : V \rightarrow Y$ ;  $T$  es continuo, si y sólo si  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0 \Rightarrow T(\mathbf{x}_n) \rightarrow T(\mathbf{x}_0)$ .

**Definición 29 [Convergencia]** En un espacio vectorial normado  $V$ , una sucesión infinita de vectores  $\{\mathbf{x}_n\}$  se dice que **converge** a  $\mathbf{x}$ , si la sucesión de números reales  $\{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|\}$  converge a cero. Se escribe  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ .

Ya que se dotó al espacio vectorial de una forma de medir (norma), se estudian conceptos que involucran la forma de medir, sin embargo existen otros conceptos que son de vital importancia para el entendimiento del comportamiento de los elementos del espacio o de una sucesión. tal concepto se da a continuación.

**Definición 30 [Sucesión de Cauchy]** Una sucesión  $\{\mathbf{x}_n\}$  en un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  se dice sucesión de **Cauchy** si  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| \rightarrow 0$ , cuando  $n, m \rightarrow \infty$ ; es decir dado  $\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \epsilon,$$

si  $n \geq N$  y  $m \geq N$ .

**Observación 4** La diferencia entre la definición de convergencia y la definición de sucesión de Cauchy es que en el primer caso el límite está explícitamente especificado, mientras que en el caso de una sucesión de Cauchy no es así.

**Corolario 2** En un espacio normado toda sucesión convergente es de Cauchy, es decir, si  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ , entonces

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{x}_m\| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m\| \rightarrow 0.$$

En general una secuencia de Cauchy puede no ser convergente.

**Definición 31 [Espacio de Banach]** Un espacio normado  $V$  es completo si cada sucesión de Cauchy de  $V$  tiene un límite en  $V$ . Un espacio vectorial completo se le llama **espacio de Banach**.

Los espacios de Banach son importantes por dos razones:

- i) Si  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio Banach entonces todas sucesiones de Cauchy son convergentes. Esta propiedad provee un medio de prueba si una sucesión es convergente sin tener a la mano un candidato para el límite de la sucesión.
- ii) Aún si un espacio vectorial normado  $(V, \|\cdot\|)$  no es completo, este puede hacerse un espacio Banach añadiendo algunos elementos, por razones obvias, este proceso es conocido como *acompletar* el espacio.

En base al Corolario 2 se tiene que en un espacio completo las sucesiones de Cauchy y las convergentes son las mismas, es decir, una sucesión converge si y sólo si es de Cauchy. Análogamente en un espacio incompleto deben existir sucesiones de Cauchy no convergentes.

**Definición 32 [Producto interno]** Sea  $V$  un espacio vectorial. Una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  se llama **producto interno** si cumple con los siguientes axiomas para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$ :

$$[P_1] \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{x} = 0; \quad (\text{Definida positiva})$$

$$[P_2] \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}; \quad (\text{Hermítica})$$

$$[P_3] \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle; \quad (\text{Homogénea})$$

$$[P_4] \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle; \quad (\text{Aditiva ó lineal en } \mathbf{x})$$

**Definición 33 [Espacio con producto interior]** Un par  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interior en  $V$ , se llama **espacio con producto interior**.

La importancia de este tema es que todo espacio con producto interno  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  tiene una norma asociada a él, que es inducida por el producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Proposición 2** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio con producto interno. Entonces la función  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida  $\forall \mathbf{x} \in V$  por  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$  es una norma; es decir, se cumplen los 3 axiomas de la norma dadas en la Definición 22.

**Definición 34 [Espacio pre-Hilbert]** Un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  en el cual la norma  $\|\cdot\|$  es inducida por el producto interior, se llama **espacio pre-Hilbert**.

**Definición 35 [Espacio Hilbert]** Un espacio normado completo con producto interior se llama **espacio Hilbert**.

Un espacio Hilbert es un espacio pre-Hilbert completo (respecto a la norma asociada). Por lo tanto, todo espacio Hilbert es un espacio de Banach en el cual se ha definido un producto interior.

Un espacio de Banach  $(V, \|\cdot\|)$ , que a la vez es un espacio pre-Hilbert, se llama espacio Hilbert. En otras palabras, un espacio Hilbert es un espacio pre-Hilbert completo.

**Proposición 3** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio pre-Hilbert y sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto interior que induce la norma  $\|\cdot\|$ , si  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}$ , entonces

$$\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle \rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$

es decir, la función  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es continua en  $V \times V$ .

**Observación 5** Como se ha visto que no todos los espacios normados son espacios pre-Hilbert.

Ahora se da una condición necesaria y suficiente para que una norma sea inducida por un producto interior.

**Definición 36 [Elementos ortogonales]** Dado un espacio pre-Hilbert  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Sea  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ . Se dice que  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  son **ortogonales**, si

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0,$$

y se escribe  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ . Se dice que  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in V$  son ortogonales dos a dos si  $\mathbf{x}_i \perp \mathbf{x}_j$  para  $i \neq j$ .

**Definición 37 [Elemento ortonormal]** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio pre-Hilbert. Se dice que un elemento  $\mathbf{x} \in V$  es **ortonormal** si  $\|\mathbf{x}\| = 1$ .

**Definición 38 [Conjunto ortonormal]** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio pre-Hilbert. Sea  $A \subset V$ ,  $A \neq \emptyset$ . Se dice que  $A$  es **ortonormal** si  $A$  es ortogonal y además se tiene que  $\|\mathbf{x}\| = 1$  para cada  $\mathbf{x} \in A$ .

**Teorema 4** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio con producto interno. Si  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in V$  son no nulos y ortogonales dos a dos, entonces son **linealmente independientes**.

**Corolario 3** En un espacio con producto interior de dimensión  $n$ , se cumple

- (a) Cualquier colección de  $n$  vectores ortogonales no nulos constituyen una base.
- (b) No hay colección de vectores ortogonales no nulos con más de  $n$  elementos.

**Definición 39 [Base ortogonal y base ortonormal]** Una **base ortogonal** en un espacio con producto interno  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es una base que consta de vectores ortogonales dos a dos. Si además de ser ortogonales son ortonormales, entonces se llama una **base ortonormal**.

**Ejemplo 5** Dada una base ortogonal cualquiera  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  en un espacio con producto interior, es fácil obtener las coordenadas de cualquier vector.

Si  $\mathbf{x} \in V$ , entonces

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n, \quad (\text{B.1})$$

formando el producto interno por  $\mathbf{e}_i$  en ambos miembros, se obtiene

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \right\rangle, \quad (\text{B.2})$$

debido a que  $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$  si  $i \neq j$ , entonces  $\forall i = 1, 2, \dots, n$

$$\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle}{\|\mathbf{e}_i\|^2}. \quad (\text{B.3})$$

La expresión para  $\alpha_i$  se simplifica considerablemente si los vectores de la base son unitarios, es decir  $\|\mathbf{e}_i\| = 1$ , entonces

$$\alpha_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \quad (\text{B.4})$$

y sustituyendo (B.4) en (B.1) resulta

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i,$$

los términos  $\alpha_i$ , reciben un nombre especial dado en la siguiente definición.

**Definición 40 [Coeficiente de Fourier]** Sea  $V$  un espacio Hilbert,  $\{\mathbf{e}_n\}$  una sucesión ortogonal y  $\mathbf{x} \in V$ . A los elementos

$$\alpha_n = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle,$$

se les llama el **coeficiente de Fourier** de  $\mathbf{x}$ , relativo a  $\{\mathbf{e}_n\}$ .

Todos estos antecedentes matemáticos están formando la base, tal como ahora se puede observar que las series de Fourier son un caso particular de los Espacios de Hilbert. Así también como es conocida la Igualdad de Parseval, muy usada en el procesamiento de señales, la cual se puede interpretar con estos conocimientos.

**Definición 41 [Igualdad de Parseval]**  $\int_0^\infty |f(t)|^2 dt = \|\alpha\|^2$  En donde se observa que la energía no se altera en los 2 espacios, en el tiempo en el primer miembro de la ecuación y del espacio de la frecuencia en el segundo miembro. La conservación de energía está dada por los coeficientes de Fourier  $\alpha$ , una vez transformada la señal en el tiempo.

**Definición 42 [Espacio de funciones de cuadrado integrable]** Es el espacio vectorial de todas las funciones  $f(t)$  definidas sobre  $\mathbb{R}$ , es decir, están en el espacio  $L^2(\mathbb{R})$ , si  $\|f(t)\|^2$  es integrable, como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt < \infty,$$

por lo que, el espacio de funciones de cuadrado integrable se define como

$$L^2(\mathbb{R}) = \{f(t) : f \text{ es medible y } \int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|^2 dx < \infty\}.$$

## B.2. Comentarios

Los conceptos presentados en este apéndice son importantes para el entendimiento de la teoría *wavelet*, las redes neuronales y la teoría *wavenet*, empleadas para el desarrollo del control PID *wavenet* y el control PID *wavelet* multiresolución.

# Apéndice C

## Dispositivo Emotiv EPOC

### C.1. Especificaciones técnicas

El equipo de Electroencefalograma es necesario para medir la actividad bioeléctrica cerebral. Para medir esta actividad se necesita un equipo que registre rangos de medición de micro volts. Generalmente estos dispositivos cuentan con 32, 64 y hasta 128 electrodos para cumplir su misión. En este trabajo de tesis se contempla el uso del Neuroheadset EPOC desarrollado por la empresa Emotiv. Este dispositivo inalámbrico cuenta con 14 electrodos más dos de referencia y tiene como ventaja la facilidad en su uso y desarrollo. El tiempo que se emplea en su preparación también es considerablemente más bajo que un dispositivo de EEG convencional. En la figura C.1 se puede ver físicamente el Emotiv EPOC.



Figura C.1: Equipo de Electroencefalografía Emotiv EPOC Neuroheadset [1].

En la tabla C.1 es posible apreciar las especificaciones técnicas del dispositivo

Número de Canales	14 (más referencias CMS/DRL (posiciones P3/P4))
Canales (SP 10-20)	AF3, F7, F3, FC5, T7, P7, O1, O2, P8, T8, FC6, F4, F8, AF4
Método de muestreo	Muestreo secuencial.
Tasa de muestreo	128 SPS (2048 Hz)
Resolución	14 bits 1 USB = $0.51\mu V$
Rango Dinámico	$840\ \mu V$
Conectividad	Inalámbrica, 2.4GHz
Batería	12 Horas

Tabla C.1: Especificaciones técnicas Emotiv EPOC Neuroheadset. Tabla adaptada de [1]

## C.2. Aplicación de sistemas BCI y señales EEG

El Emotiv EPOC es un dispositivo de alta resolución, multi-canal, portable con el cual podemos realizar aplicaciones practicas.

La licencia de para el Software del banco de pruebas, el conjunto de herramientas y las bibliotecas de detección: Comandos Mentales, Métrica de Rendimiento, Estados Emocionales y Expresiones Faciales son proporcionados por el propietario del Software.

### C.2.1. Métricas de rendimiento y Estados Emocionales

En las interfaces se monitorea los estados emocionales del usuario en tiempo real como el aburrimiento, la emoción, la frustración y la meditación, dependiendo en el ambiente en el que se encuentre el usuario como escenas de música, iluminación, etc., estas son adaptadas por un personaje virtual, los estados pueden ser monitoreados por la plataforma y se adapta a la situación de cada usuario.

### C.2.2. Expresiones Faciales

Se utilizan las señales EEG medidas por el dispositivo Emotiv EPOC para interpretar las expresiones faciales en tiempo real, con esto nos ayuda a entender de forma natural y visible las acciones realizadas que son imitadas por el personaje virtual incluso antes de que se realice consiente mente la acción.

### C.2.3. Comandos mentales

La aplicación detecta e interpreta los pensamientos consientes y la intención del usuario, utilizando esta actividad se pueden manipular objetos virtuales y procesar las señales para distintos propósitos de investigación.

## C.3. Modo de uso de Emotiv Epoc

1. **Carga de Auricular.** Poner auricular en estado de *off* antes de conectarlo al cable de carga, dejándolo por un tiempo aproximado de cuatro horas. No se debe cargar colocado en la cabeza del usuario.

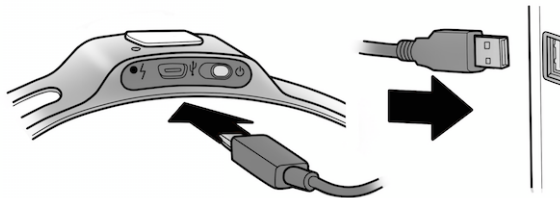


Figura C.2: Carga de batería del Emotiv Epoc [1].

2. **Hidratar los sensores.** Las almohadillas de fieltro siempre deben de estar completamente humectadas con una solución salina para una buena conductividad, se debe humectar en el porta-sensores para facilitar el proceso. La parte blanca del porta-sensores debe estar siempre seca para que a la hora de guardar los sensores se sequen y evitar la corrosión de los mismos.

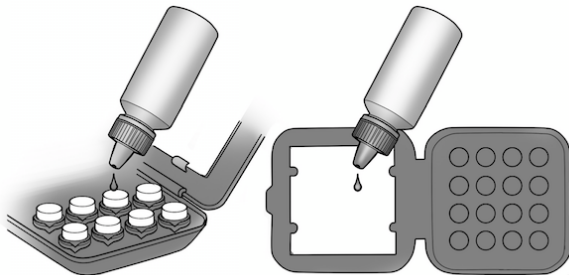


Figura C.3: Hidratación de almohadillas de fieltro [1].

3. **Instalación de los sensores.** Instale cada uno de los sensores en los brazos del auricular, girando suavemente a la derecha un cuarto de vuelta hasta que se

sienta un clic de ajuste. Los sensores deben ser colocados en el porta-sensores cuando no estén en uso para prolongar su vida útil.

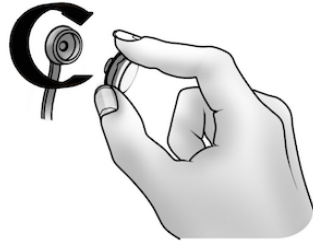


Figura C.4: Colocación de sensores [1].

4. **Colocación de auricular en el usuario.** Con las dos manos, deslice el auricular hacia abajo desde la parte superior de la cabeza. Los sensores de referencia se deben colocar en el hueso detrás de cada oreja. La correcta colocación de los sensores de referencia es fundamental para su correcto funcionamiento.

Los dos sensores delanteros deben estar aproximadamente en la línea del cabello o sobre la anchura de 3 dedos por encima de las cejas.

Presione y mantenga los sensores de referencia (que se encuentra justo por encima de y detrás de las orejas) durante unos 20 segundos para poder trabajar con el auricular.

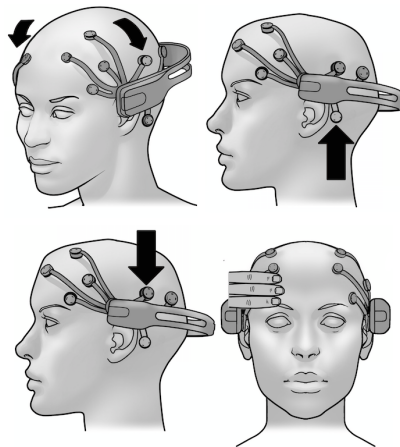


Figura C.5: Colocación de Auricular [1].

## **C.4. Comentarios**

El Emotiv Epoc es un dispositivo fácil de utilizar lo cual beneficia para el desarrollo de trabajos de investigación por su bajo costo comparado con los dispositivos clínicos convencionales y por ser portable se pueden realizar pruebas en ambientes distinto. La información ha sido obtenida de [1].

# Apéndice D

## Algoritmo del análisis multiresolución

### D.1. Codificación sub-banda con coeficientes *wavelet* Daubechies

Lectura de la señal de interés y normalización de la misma

```
s = load('F3.txt');  
l = length(s);  
s = s/norm(s);
```

Filtro pasa bajas, conservando señales superiores a 60Hz

```
for i = 1 : l - 4  
y(i) = s(i + 4) - s(i)  
end
```

Coefficientes *wavelet* Daubechies 4 (DB4)

```
g0 = [0.48296291314453; 0.83651630373781; 0.22414386804201; -0.12940952255126];  
k = [0; 1; 2; 3];  
g1[k] = (-1)k * g0[N - 1 - k]  
h0[k] = (g1[k] * (-1)k)/2  
h1[k] = (g0[k] * (-1)(k + 1))/2
```

Proceso de descomposición de la señal EEG

*Primer nivel*

```
x = conv(y, h0); convolución  
a1 = x(1 : 2 : length(x)); downsampling: Pasa-Bajas  
x = conv(y, h1);  
w1 = x(1 : 2 : length(x)); downsampling: Pasa-Altas
```

*Segundo nivel*

$x = conv(a_1, h0)$ ; convolución

$a_2 = x(1 : 2 : length(x))$ ; downsampling: Pasa-Bajas

$x = conv(a_1, h1)$ ;

$w_2 = x(1 : 2 : length(x))$ ; downsampling: Pasa-Altas

...

*N nivel*

$x = conv(a_{N-1}, h0)$ ; convolución

$a_N = x(1 : 2 : length(x))$ ; downsampling: Pasa-Bajas

$x = conv(a_{N-1}, h1)$ ;

$w_N = x(1 : 2 : length(x))$ ; downsampling: Pasa-Altas

Cálculo de DWT

$TW = [w_N; w_N; \dots w_1]$ ;

Cálculo de Umbral para la toma de decisión del comando de referencia

$U = 0.3 * max(w_2)$

*if*  $U \geq 0.04$  *and*  $U \leq 0.08$

$M = 1$ ;

*disp*('Mov.dePierna')

*else*

*disp*('NoMov.')

$M = 0$ ;

*end*

## D.2. Proceso de reconstrucción

*Reconstrucción N*

$x = zeros(2 * length(a_N), 1)$ ;

$x(1 : 2 : 2 * length(a_N)) = a1(1 : length(a1))$ ;

$y = zeros(2 * length(w_N), 1)$ ;

$y(1 : 2 : 2 * length(w_N)) = w_N(1 : length(w_N))$ ;

$x = conv(x, g0) + conv(y, g1)$ ;

$a_{0rec} = x(4 : length(x) - 4)$ ;

*Reconstrucción N-1*  $x = zeros(2 * length(a_{0rec}), 1)$ ;

$x(1 : 2 : 2 * length(a_{0rec})) = a1(1 : length(a_{0rec}))$ ;

$y = zeros(2 * length(w_{N-1}), 1)$ ;

```
y(1 : 2 : 2 * length(wn-1)) = wN-1(1 : length(wN-1));  
x = conv(x, g0) + conv(y, g1);  
a1,rec = x(4 : length(x) - 4);
```

...

```
y = zeros(2 * length(w1), 1);  
y(1 : 2 : 2 * length(w1)) = w1(1 : length(w1));  
x = zeros(2 * length(arec), 1);  
x(1 : 2 : 2 * length(arec)) = arec;  
x = conv(x, g0);  
y = conv(y, g1);  
y = x(1 : length(y)) + y;  
srec = y(4 : length(y) - 4);
```