

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Escuela Superior de Ciudad Sahagún

Licenciatura en Ingeniería Industrial

**Desarrollo de un modelo matemático para la optimización de la
planeación agregada en el sector metal -mecánico.**

TESIS

Para obtener el título de
Licenciado en Ingeniería Industrial

Presenta

Crisol Yamericzy Ramos Lara

Director de tesis

Dra. Francisca Santana Robles

Fray Bernardino de Sahagún,
Tepeapulco, Hgo., septiembre 2025.





Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Escuela Superior de Ciudad Sahagún
Campus Sahagún

CLII-052-25
Asunto: Autorización digital

**P.D.L.I.I. C. Crisol Yamericzy Ramos Lara
Presente**

Por este conducto le comunico que el jurado que le fue asignado a su trabajo de "TESIS" con el nombre: **"Desarrollo de un modelo matemático para la optimización de la planeación agregada en el sector metal-mecánico"**, y que después de revisarlo en reunión de sinodales han decidido autorizar la digitalización del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación se anotan las firmas de conformidad de los integrantes del jurado:

Presidente	Dr. Rafael Granillo Macías
Primer vocal	Dra. Francisca Santana Robles
Secretario	Dr. Salvador Bravo Vargas
Primer suplente	Dr. Ricardo Martínez López

Sin otro particular, me es grato reiterar a usted la seguridad de mi atenta consideración y respeto.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"
Fray Bernardino de Sahagún, Hgo., a 30 de septiembre de 2025

Dra. Francisca Santana Robles
Coordinadora de la Licenciatura en Ingeniería Industrial



c.c.p.- Expediente
FSR

Carr. Otumba-Ped. Sahagún No. 7, Colonia
Legaspi, Zona Industrial, Ciudad Sahagún, Hidalgo,
México C.P. 43998
Teléfono: 52 (771) 7172000 Ext. 50201
essahagun@uaeh.edu.mx

"Amor, Orden y Progreso"



2025



uaeh.edu.mx

Contenido

Índice de ilustraciones	3
Índice de tablas	4
Índice de ecuaciones	5
Capítulo 1: Construcción del objeto de estudio	8
1. Introducción	8
2. Antecedentes del problema	9
3. Planteamiento del problema	10
5. Objetivos de la investigación	11
i.5.1 General	11
i.5.2 Específicos	11
6. Preguntas de investigación	12
7. Hipótesis	12
9. Plan metodológico	12
9.1 Descripción de la metodología	13
Capítulo 2: Estado del arte	15
2.1 Marco conceptual	15
2.1.1 Planeación agregada	15
2.1.2 Objetivos de la planeación agregada	15
2.1.3 Estrategias de la planeación agregada	16
2.1.4 Concepto de plan maestro de producción	16
2.1.5 Definición de programación lineal	17
2.1.6 Elementos de un modelo de programación lineal	17
2.1.7 Concepto de variables de decisión	17
2.1.8 Concepto de parámetros	18
2.1.9 Concepto de función objetivo	18
2.1.10 Concepto de restricciones	18
2.1.11 Ventajas y limitaciones de la programación lineal	19
2.1.12 Concepto de modelo matemático	19
2.1.13 Tipos de modelos matemáticos	20
2.1.14 Ventajas y desventajas de los modelos matemáticos	23
2.1.15 Aplicaciones de los modelos matemáticos en la planeación agregada	23
2.1.16 Tipos de modelos matemáticos utilizados en la planeación agregada	24
2.1.17 Problemas básicos en los modelos de planeación agregada	24

2.2	Marco teórico	25
2.2.1	Planeación agregada de la producción	25
2.2.2	Características principales de la planeación agregada	26
2.2.3	Aspectos de la planeación agregada	27
2.2.4	Técnicas de planeación agregada	29
2.2.5	Criterios de evaluación para una planeación agregada	29
2.2.6	Modelos de planeación agregada	30
2.3	Conclusión	34
Capítulo 3.	Propuesta de intervención	35
3.1	Definición del problema del caso de estudio	35
3.2	Recolección de datos	36
3.3	Formulación del modelo matemático	39
3.3.1	<i>Definición de parámetros y variables del modelo</i>	40
3.3.2	<i>Definición de función objetivo</i>	42
3.3.3	<i>Definición de restricciones</i>	43
3.3.4	<i>Solución del modelo matemático en Excel</i>	45
3.3.4.1	<i>Variables de decisión</i>	45
3.3.4.2	<i>Restricciones</i>	46
3.4	Interpretación de resultados	49
3.5	Conclusión	58
	Referencias bibliográficas	61
	Anexos	64
	Anexo 1. Estrategias de trabajo.	64
	Plan de producción 1	64
	Plan de producción 2	64
	Plan de producción 3	65
	Plan de producción 4	65

Índice de ilustraciones

Ilustración 1.	Metodología propuesta para abordar el problema planteado en esta tesis.	13
Ilustración 2.	Clasificación de un modelo matemático según su naturaleza	20
Ilustración 3.	Clasificación de un modelo matemático según su estructura	21

Ilustración 4. Clasificación de un modelo matemático según su forma de representación.	22
Ilustración 5. Clasificación de otros tipos de modelos matemáticos.	22
Ilustración 6. Niveles de planeación en una compañía.	27
Ilustración 7. Grupos estructurales para modelos de planeación agregada.	31
Ilustración 8. Diagrama de Ishikawa	37
Ilustración 9. Variables de decisión.	46
Ilustración 10. Restricciones.	46
Ilustración 11. Costos del plan agregado.	47
Ilustración 12. Cuadro de dialogo "Parámetros de Solver"	49
Ilustración 13. Grafica del indicador interno.	55

Índice de tablas

Tabla 1. Problemas básicos en los modelos de planeación agregada	25
Tabla 2. Modelos matemáticos aplicados a la optimización	32
Tabla 3. Costos por contratar y despedir	38
Tabla 4. Costos por mantener y costos desabasto de inventario	39
Tabla 5. Costo por tiempo regular y tiempo extra	39
Tabla 6. Costos incurridos del maquinado de las piezas	41
Tabla 7. Demanda	45
Tabla 8. Fórmulas de restricciones	47
Tabla 9. Fuerza laboral durante el horizonte de planeación	49
Tabla 10. Comportamiento de unidades en inventario del periodo 1 al 12	51
Tabla 11. Costos totales	51
Tabla 12. Comparativa de fuerza laboral y producción	52
Tabla 13. Comparativa de unidades en tiempo extra, subcontratación y desabasto	53
Tabla 14. Relación del status de entregas	54
Tabla 15. Comparativa de las unidades en inventario, subcontratación y desabasto	56
Tabla 16. Costo total actual	57
Tabla 17. Comparativa de costos totales	57

Índice de ecuaciones

Ecuación 1. Función objetivo	42
Ecuación 2. Restricciones de fuerza de trabajo, contratación y despido.	43
Ecuación 3. Restricciones de capacidad.	44
Ecuación 4. Restricciones de balance de inventario.....	44
Ecuación 5. Restricciones sobre el límite de tiempo extra.....	45

Resumen

La planeación agregada es un proceso vital en la gestión de operaciones, pues busca armonizar la producción con la demanda a gran escala, maximizando el uso de recursos. Su importancia radica en asegurar la eficiencia operativa y la competitividad empresarial.

El problema central identificado en una empresa de Ciudad Sahagún, Hidalgo, son las graves deficiencias en la planeación de la producción. Estas fallas impactan directamente la productividad y se evidencian en el incumplimiento sistemático de indicadores clave (como la productividad, entregas a tiempo y respuesta a la demanda), afectando negativamente la rentabilidad de la organización. Históricamente, las decisiones en esta área se han tomado intuitivamente, basándose en pedidos pasados, lo cual es inadecuado dada la complejidad actual de los factores involucrados.

La metodología aplicada inició con una investigación y análisis profundo del área de planeación de la empresa, lo que permitió no solo identificar las deficiencias existentes (como el bajo rendimiento operacional y la baja satisfacción del cliente) sino también cuantificar el grado de incumplimiento de los indicadores establecidos (como la productividad mensual, entregas a tiempo e índice de satisfacción del cliente).

Los principales resultados obtenidos de estas deficiencias (como cuellos de botella en procesos, toma de decisiones erróneas, excesos o faltantes en inventarios) confirman la necesidad de implementar un modelo matemático para la toma de decisiones, permitiendo así que la empresa pueda responder de manera ágil e inmediata a las variaciones de la demanda, lo que a su vez optimizará su productividad y rentabilidad en el mercado.

Agradecimientos

A mi familia, por su apoyo incondicional, paciencia y confianza durante todo este proceso académico. Su comprensión y motivación constante fueron fundamentales para la culminación de este trabajo.

A la Dra. Francisca Santana Robles, mi tutora de tesis, por su orientación, compromiso y valiosas aportaciones que enriquecieron de manera significativa este proyecto. Su guía y acompañamiento han sido esenciales para mi formación académica y profesional.

Capítulo 1: Construcción del objeto de estudio

1. Introducción

Las empresas del sector metal - mecánico en México enfrentan una serie de retos que ponen a prueba su capacidad de adaptación y resiliencia. Entre los desafíos más relevantes se encuentra la variación de los precios de la materia prima, la escasez de mano de obra calificada, la presión por reducir costos y tiempos de entrega y la fluctuación de la demanda en el mercado; estos retos han obligado a las empresas a replantear sus estrategias de producción y buscar soluciones para mantenerse en el mercado competitivo.

El presente proyecto de investigación tiene como objetivo mejorar los procesos de planeación de la producción, implementando un modelo matemático enfocado en planeación agregada que busca ser una herramienta que permita a las compañías tomar decisiones más acertadas y eficientes en cuanto a los niveles de producción, la gestión de inventarios y la capacidad de respuesta a las fluctuaciones del mercado. Esta propuesta puede contribuir en la toma de decisiones que permitan la competitividad de las PyMEs del sector metal – mecánico; en un entorno empresarial cada vez más dinámico y exigente atendiendo las necesidades de los consumidores a un costo competitivo.

Las PyMEs (Pequeñas y Medianas Empresas) son una parte fundamental de la economía del país, debido a que promueven la generación de empleos, con el propósito de atender las necesidades específicas de las pequeñas y medianas empresas del sector metal - mecánico, la propuesta de este trabajo considera las características particulares de este sector, como por ejemplo altos niveles de rotación de personal debido a los salarios bajos y condiciones no adecuadas de trabajo; altos costos de tiempo extra y jornadas laborales extensas lo que permitirá a las PyMEs mejorar sustancialmente su capacidad de respuesta a las demandas del mercado, reducir los costos operativos y optimizar la utilización de sus recursos productivos.

La ausencia de una planeación rigurosa en las pequeñas y medianas empresas suele traducirse en una serie de dificultades operativas y financieras. Con frecuencia, estas compañías no cuentan con estimaciones precisas de los costos asociados a la gestión de inventarios, lo que puede generar sobre costos por almacenamiento o pérdidas por obsolescencia. Asimismo, la falta de una planeación adecuada de la producción puede derivar en escasez de productos y, en consecuencia, la pérdida de oportunidades de venta. Además, la omisión de aspectos como la remuneración justa de los trabajadores, la optimización del diseño de la planta y la evaluación de la capacidad productiva puede impactar negativamente en la productividad, la calidad de los productos y la satisfacción de los clientes. Esta carencia de una visión integral y sistemática de la operación empresarial suele generar ineficiencias, incrementar los costos y limitar el crecimiento sostenible.

2. Antecedentes del problema

En la actualidad, las empresas se enfrentan a grandes retos para mantenerse en un mercado competitivo que les exige hacer uso de manera óptima de sus recursos. Uno de los retos es competir en el tiempo de entrega, el cual dependerá de la capacidad de la planta para cumplir con la demanda de los clientes. En este sentido, la planeación agregada es de gran relevancia debido a que permite tomar decisiones para el uso óptimo de los recursos productivos y realizar una proyección a mediano plazo sobre cómo una empresa puede satisfacer la demanda de los clientes a un costo bajo y, de esta manera obtener utilidades.

El presente proyecto de investigación propone el uso de modelos matemáticos para optimizar los recursos materiales y económicos de una empresa en el proceso de planeación agregada, a partir de un estudio de caso. Estos modelos se basan en la técnica de la programación lineal que permite plantear modelos para resolver problemas cuando el uso de los recursos es limitado o bien se requiere maximizar ganancias (Chopra y Meindl, 2013; Taha, 2012).

3. Planteamiento del problema

El trabajo actual propone el desarrollo de un modelo matemático para evaluar estrategias de planeación agregada. Este modelo se concibe como una herramienta fundamental para optimizar la toma de decisiones en el uso eficiente de los recursos empresariales.

Las empresas del sector metal-mecánico en Tepeapulco, Hidalgo, se enfrentan a un entorno de demanda variable. Sin embargo, sus procesos de toma de decisiones en producción a menudo se basan en métodos poco sistemáticos, lo que genera notables ineficiencias operativas y, en consecuencia, afecta directamente la viabilidad económica de estas organizaciones en un mercado cada vez más exigente.

La implementación de un modelo matemático no solo permitirá minimizar costos, sino que también ofrecerá la capacidad de explorar y aplicar diversas estrategias de planeación agregada. Esto es crucial para dotar a las empresas de la eficiencia y efectividad necesarias en sus procesos, garantizando una respuesta más ágil y óptima a los desafíos del mercado.

4. Justificación

En la actualidad, las empresas de cualquier tipo de industria enfrentan el desafío de planificar su producción de manera eficiente y eficaz. Este desafío se debe a una serie de factores externos, como la fluctuación de la demanda y/o la incertidumbre de los costos, e igualmente por factores internos que impiden la optimización de sus recursos. Estos factores están relacionados con la gestión y el aprovechamiento de los recursos y la información disponible, manifestándose en la falta de personal capacitado y en una recolección inadecuada de datos precisos sobre aspectos vitales como el volumen de producción, niveles de inventario, tiempos de ciclo y el rendimiento real de la maquinaria.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, se pretende desarrollar un estudio de caso en donde se construya un modelo matemático para abordar la problemática de planeación agregada en cualquier tipo de industria, siendo esta una herramienta

para adoptar decisiones tácticas y operativas respecto a los niveles adecuados de fabricación y servicio con el objeto de obtener las cantidades óptimas a producir de cada tipo de producto, por consiguiente, la cantidad de material a utilizar, cantidad de horas de mano de obra regular y extra a emplear y cantidad de productos para subcontratar.

Sin embargo, la falta de un modelo matemático de planeación agregada puede generar una serie de problemas para las empresas, se espera que los resultados de este proyecto de investigación contribuyan al desarrollo de métodos de planeación agregada más eficientes y efectivos. En particular, se espera que los modelos desarrollados permitan a las empresas encontrar soluciones que minimicen sus costos, sin comprometer la satisfacción de la demanda de los clientes.

5. Objetivos de la investigación

i.5.1 General

- Desarrollar un modelo matemático de optimización para abordar un problema de planeación agregada a través de la técnica de programación lineal que permita a las empresas encontrar una solución que minimice sus costos y satisfaga la demanda de los clientes.

i.5.2 Específicos

- Realizar la búsqueda de información en la empresa estudiada para conocer información relacionada con la demanda, mano de obra y recursos necesarios.
- Desarrollar un modelo de programación lineal que permita evaluar diferentes estrategias de planeación agregada a partir de datos obtenidos de empresa en estudio.
- Resolver el modelo propuesto usando el software “Solver” en una hoja de cálculo en Excel.

6. Preguntas de investigación

¿El modelo matemático propuesto permite visualizar el comportamiento de los costos en relación a las estrategias de planeación agregada?

¿Cómo se puede maximizar la utilidad de una empresa productora de bienes o servicios utilizando un modelo de programación lineal para evaluar estrategias de planeación agregada?

7. Hipótesis

La planeación agregada es un proceso de planificación a largo plazo que tiene como objetivo determinar la cantidad de productos o servicios que se deben producir y la capacidad de producción que se necesita para satisfacer la demanda prevista.

Para este proyecto la hipótesis de investigación es la siguiente:

El desarrollo de un modelo matemático permitirá evaluar diferentes estrategias de planeación agregada para minimizar los costos de producción en un periodo de mediano plazo, atendiendo la demanda a costo mínimo.

8. Delimitación y alcance

Los modelos propuestos están desarrollados para una empresa en particular del sector metal – mecánico.

9. Plan metodológico

La metodología para abordar en este proyecto de investigación se compone de cuatro etapas: (1) Definición del problema de estudio de caso, (2) Recolección de datos, (3) Desarrollo del modelo, (4) Solución e interpretación de los resultados. La ilustración 1 muestra las etapas de la metodología abordada.

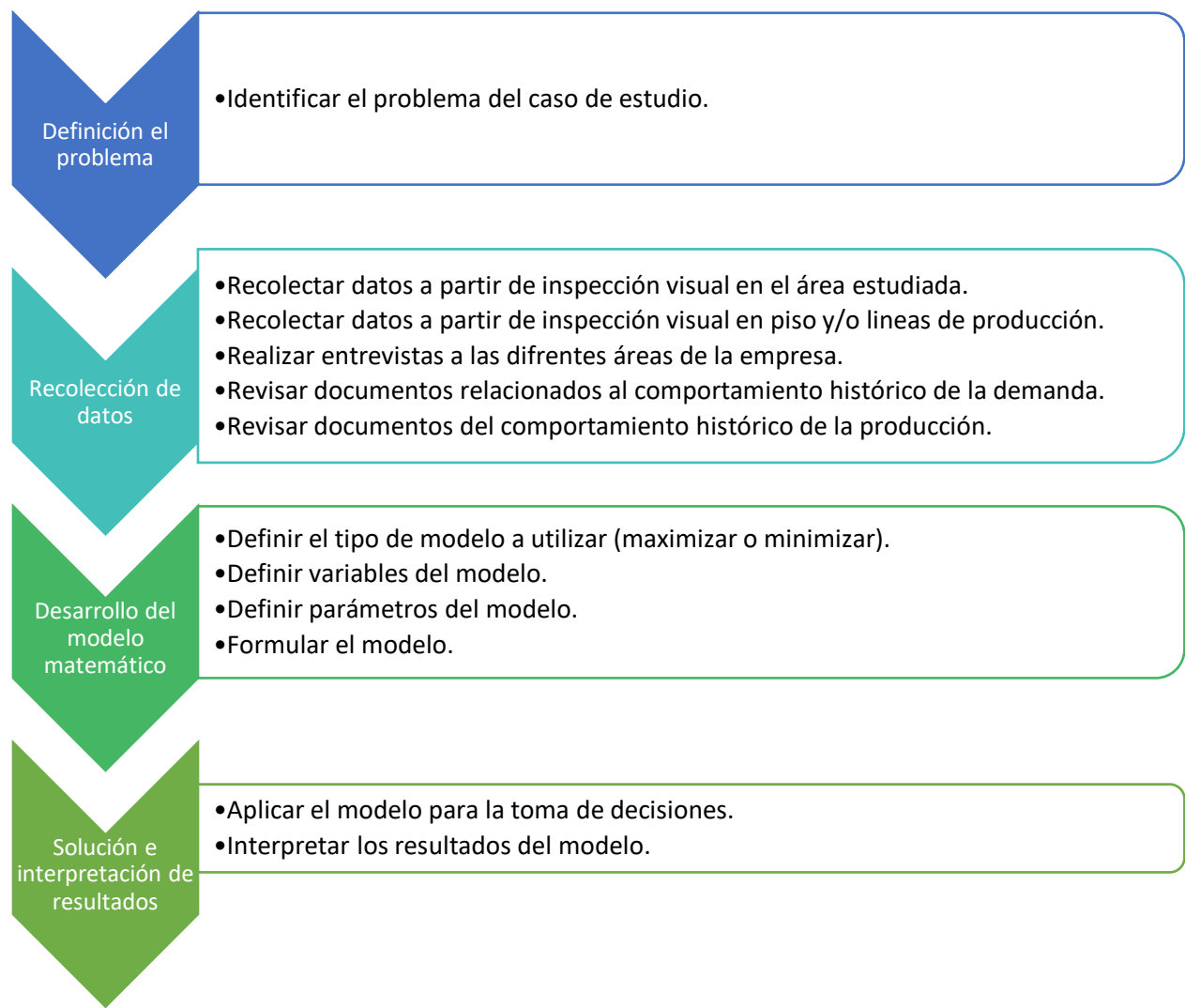


Ilustración 1. Metodología propuesta para abordar el problema planteado en esta tesis.

Fuente: elaboración propia.

9.1 Descripción de la metodología.

Paso 1. Definición del problema: La fase inicial implica la recopilación de información para establecer una base sólida de las necesidades, deficiencias y/o carencias que impactan negativamente a la empresa estudiada.

Paso 2. Recolección de datos: La segunda fase involucra la recolección de datos, los cuales abarcan los pronósticos de la demanda, la capacidad de producción, costo de contratar, capacitar y despedir, costos de tiempo regular y tiempo extra, costo de mantener inventario, costo de desabasto, costo de los materiales, costos

de subcontratación, entre otros datos, como los días laborales, y políticas de la empresa. Posteriormente, hacer la rectificación de los datos recopilados para garantizar un análisis confiable.

Paso 3. Desarrollo del modelo: La tercera fase hace referencia en agrupar de los datos recolectados por periodos, construir las variables que intervienen en el modelo, formular la función objetivo, establecer del conjunto de restricciones que debe cumplir.

Paso 4. Solución e interpretación de resultados: La cuarta fase se encarga de buscar herramientas (software) para la solución óptima del modelo propuesto.

Capítulo 2: Estado del arte

En este capítulo se presenta un fundamento teórico de la investigación relacionado a la planeación agregada, con la finalidad de proporcionar un marco conceptual para abordar las siguientes etapas de la investigación.

2.1 Marco conceptual

2.1.1 Planeación agregada

De acuerdo a Heizer & Render (2014), la planeación agregada es un proceso para la toma de decisiones que permiten optimizar el uso de los recursos productivos, por lo tanto, se puntualiza en una proyección a mediano plazo a menudo con un adelanto de 3 a 18 meses, la cual busca determinar la cantidad y tiempos de producción óptimos, implicando los recursos e insumos necesarios, lo cual conlleva a un proceso dinámico y continuo, ya que diversos factores se actualizan de manera continua y a su vez, se presentan nuevas oportunidades dentro del proceso.

La planeación agregada es procedimiento mediante el cual una empresa determina los niveles de capacidad, producción, subcontratación, inventario, desabasto e incluso precios durante un horizonte temporal específico, a través de un plan maestro de producción (Chopra & Meindl, 2013).

Por otro lado, puede definirse como un plan de producción a mediano plazo, que es factible desde el punto de vista de la capacidad, el cual permite lograr el plan estratégico de la forma más eficaz posible en relación con los objetivos tácticos del subsistema de operaciones (Quintero et al., 2004).

2.1.2 Objetivos de la planeación agregada

El objetivo es construir un plan que satisfaga la demanda y maximice las ganancias, además de minimizar costos de mano de obra, costos por mantener inventarios, costos de tiempo extra, entre otros, del mismo modo, maximizar la estabilidad laboral, el control sobre la producción y el cumplimiento de pedidos (Chopra & Meindl, 2013).

2.1.3 Estrategias de la planeación agregada

Existen esencialmente tres estrategias distintas de planeación agregada para lograr el equilibrio entre los costos. Estas estrategias implican compensaciones entre inversión de capital, tamaño de la fuerza laboral, horas de trabajo, inventario y retrasos/ventas perdidas (Chopra & Meindl, 2013).

- a) La estrategia de persecución busca alinear la tasa de producción con las fluctuaciones de la demanda. Para conseguirlo, se ajusta la capacidad de la maquinaria o se modifica la fuerza laboral, lo que implica contratar o despedir empleados según sea necesario. Si bien esta estrategia resulta en bajos niveles de inventario y altos niveles de cambio en la capacidad y la fuerza laboral.
- b) La estrategia de flexibilidad es aplicable cuando existe un exceso de capacidad de las máquinas (es decir, no se utilizan las 24 horas del día, los siete días de la semana) y la fuerza laboral demuestra flexibilidad en su programación. Con esta estrategia, la plantilla se mantiene estable, pero la cantidad de horas trabajadas varía para sincronizar la producción con la demanda. Esto resulta en bajos niveles de inventario, aunque implica una menor utilización promedio de la máquina.
- c) La estrategia de nivel mantiene una capacidad de máquina y una fuerza laboral estables, operando a una tasa de producción constante. Bajo este enfoque, la producción no se sincroniza directamente con la demanda, lo que provoca que los niveles de inventario fluctúen con el tiempo, generando periodos de escasez y de excedente.

2.1.4 Concepto de plan maestro de producción

Es un plan detallado que establece la cantidad específica y las fechas exactas de fabricación de los productos, debe proporcionar las bases para establecer los compromisos de envío al cliente, utilizar eficazmente la capacidad de la planta, lograr los objetivos estratégicos de la empresa y resolver las negociaciones entre la fabricación de diferentes productos (Yancunta, 2020).

2.1.5 Definición de programación lineal

Una gran variedad de problemas puede ser formulados o aproximados como modelos lineales, esto no sería una ventaja si no existiría una buena manera de resolverlos, en general, estos problemas de programación lineal involucran el uso o asignación de recursos limitados (materiales, máquinas, tiempo, mano de obra, etc.) de la mejor manera posible de tal modo que los costos sean minimizados o en su defecto que las ganancias sean maximizadas (Ayuso, 2007).

Por otra parte, la programación lineal es una técnica matemática que busca maximizar un beneficio o minimizar un costo satisfaciendo las limitaciones que enfrenta la empresa. Su objetivo es determinar la cantidad a producir para obtener la mayor ganancia posible bajo ciertas restricciones; la programación lineal representa situaciones del mundo real, como la producción, el tiempo de trabajo y los recursos disponibles en el momento, y se encarga de optimizar teniendo en cuenta varios factores y limitaciones, utilizando datos y fórmulas para la toma de decisiones más informadas y eficientes (Taha, 2012).

2.1.6 Elementos de un modelo de programación lineal

A continuación, se enlistan los elementos obligatorios que debe contener un modelo de programación lineal (Dantzig, 2002):

- Variables de decisión
- Parámetros
- Función objetivo
- Restricciones

2.1.7 Concepto de variables de decisión

Las variables de decisión son incógnitas que se establecen en el modelo y cuyos valores se determinan al desarrollarlo.

A continuación, se presenta una lista de las variables de decisión que más se utilizaron en los modelos matemáticos aplicados en el nivel de producción (Dantzig, 2002):

- Costo de mano de obra regular.

- Costo de mano de obra por horas extras.
- Costo de contratación y despido.
- Costo de mantener inventario.
- Costo de desabastecimiento de inventario.
- Costo de los materiales.
- Costo de subcontratación.

2.1.8 Concepto de parámetros

Es una constante o valor fijo que caracteriza o define las propiedades específicas de un modelo. Los parámetros son valores conocidos y establecidos que no cambian durante el análisis (Dantzig, 2002).

2.1.9 Concepto de función objetivo

La función objetivo es una relación matemática entre las variables de decisión y los parámetros definidos en el modelo. Es la medida cuantitativa del funcionamiento del sistema que se desea optimizar (maximizar o minimizar) un factor específico (Taha, 2012),

Como ejemplo de funciones objetivo se pueden mencionar las siguientes:

- La minimización de los costos variables de operación de un sistema
- La maximización de los beneficios netos de venta de ciertos productos
- La minimización del material utilizado en la fabricación de un producto

2.1.10 Concepto de restricciones

Las restricciones son limitantes presentes en los modelos, como la relación entre las variables de decisión y la función objetivo. Es importante identificar y comprender que estas desempeñan un papel fundamental en la planeación y optimización de la producción.

A continuación, se enlistan algunas restricciones más utilizadas en los modelos matemáticos de planeación agregada (Castillo et al., 2011):

- A. Capacidad de almacén
- B. Demanda
- C. Mano de obra
- D. Capacidad de producción
- E. Subcontratación

2.1.11 Ventajas y limitaciones de la programación lineal

A continuación, se enlistan algunas limitaciones de la programación lineal (Castillo et al., 2011):

- Linealidad: Asume relaciones lineales entre variables, lo cual puede no ser realista en todos los casos.
- Certeza: Asume que los parámetros del modelo son conocidos con certeza.
- Tamaño del problema: Problemas de gran escala pueden ser difíciles de resolver.

2.1.12 Concepto de modelo matemático

Es una representación mediante fórmulas que establece una relación directa entre variables para plantear un problema, haciendo uso de expresiones matemáticas, con el fin de brindar la solución óptima y que mejor se ajuste al problema planteado (Ochoa, 2017).

Se denomina modelo matemático a la combinación de la función objetivo en conjunto con las restricciones, este conjunto puede resolverse mediante una técnica de optimización, la cual permitirá hallar los valores de las variables definidas, con soluciones óptimas (Salas, 2022).

Permite tomar decisiones acertadas sobre cómo y cuándo se deben implementar las diferentes herramientas, en el cual se determinan los niveles de productividad, medición del desperdicio y su relación con los costos de producción. De la misma manera, gestiona el flujo de la producción entre los centros de trabajo (Muñoz Guevara et al., 2022).

2.1.13 Tipos de modelos matemáticos

Existen muchos tipos de modelos matemáticos, cada uno con sus propias características, ventajas y desventajas.

En la ilustración 2, 3, 4 y 5, se muestra una clasificación general con sus características principales, del mismo modo en que se hace mención de su ventaja y desventaja del mismo.

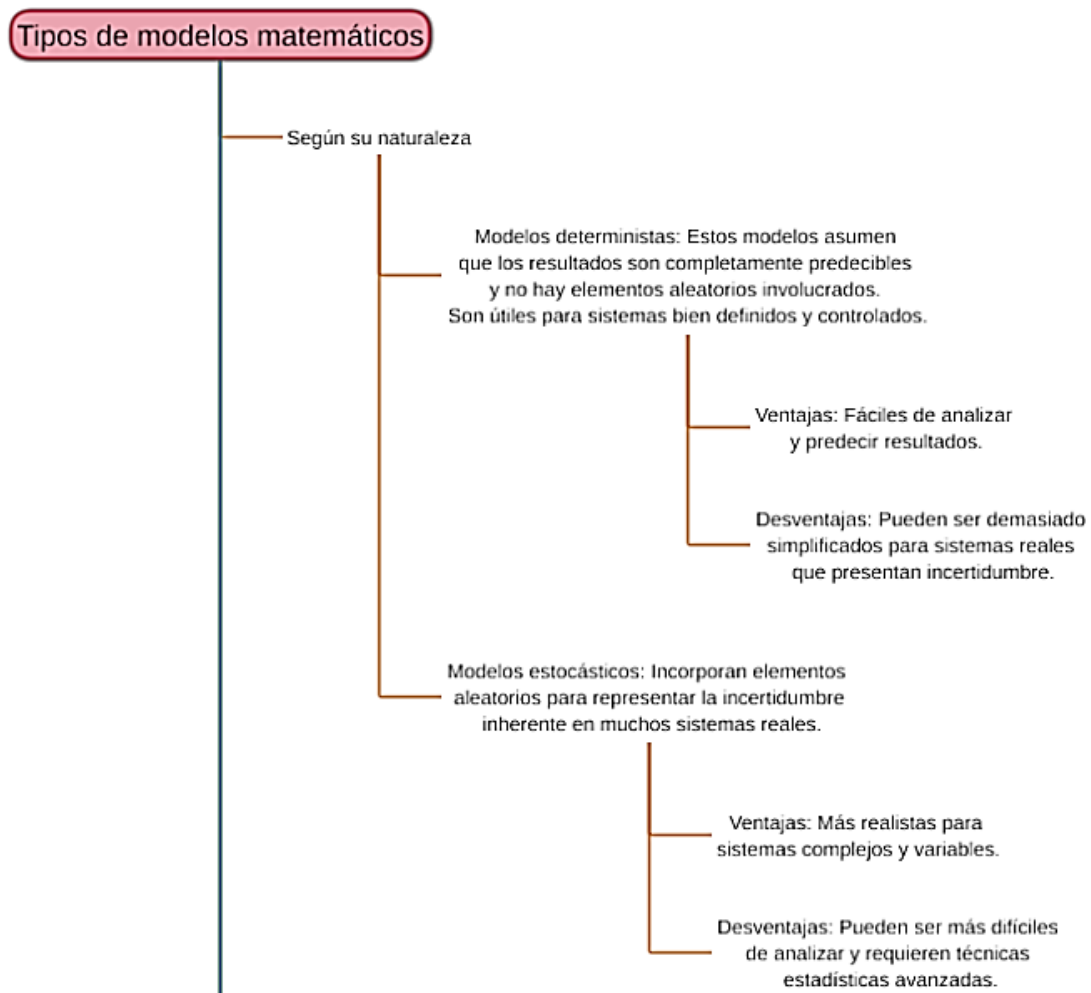


Ilustración 2. Clasificación de un modelo matemático según su naturaleza.

Tipos de modelos matemáticos

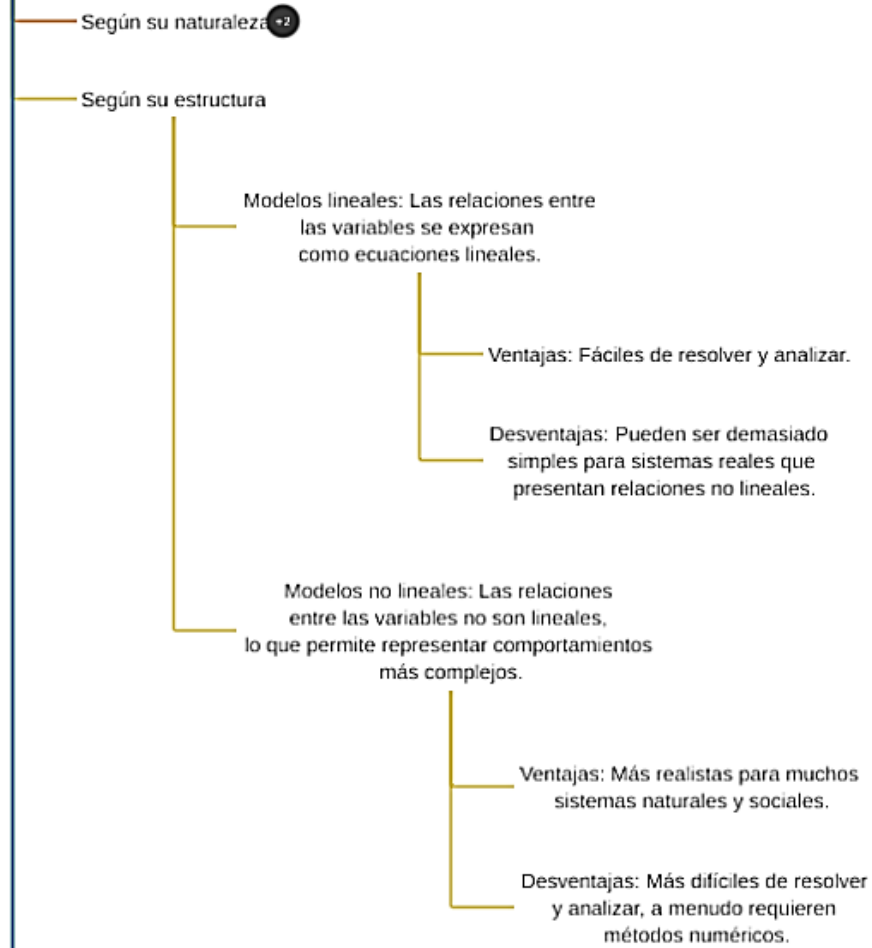


Ilustración 3. Clasificación de un modelo matemático según su estructura.

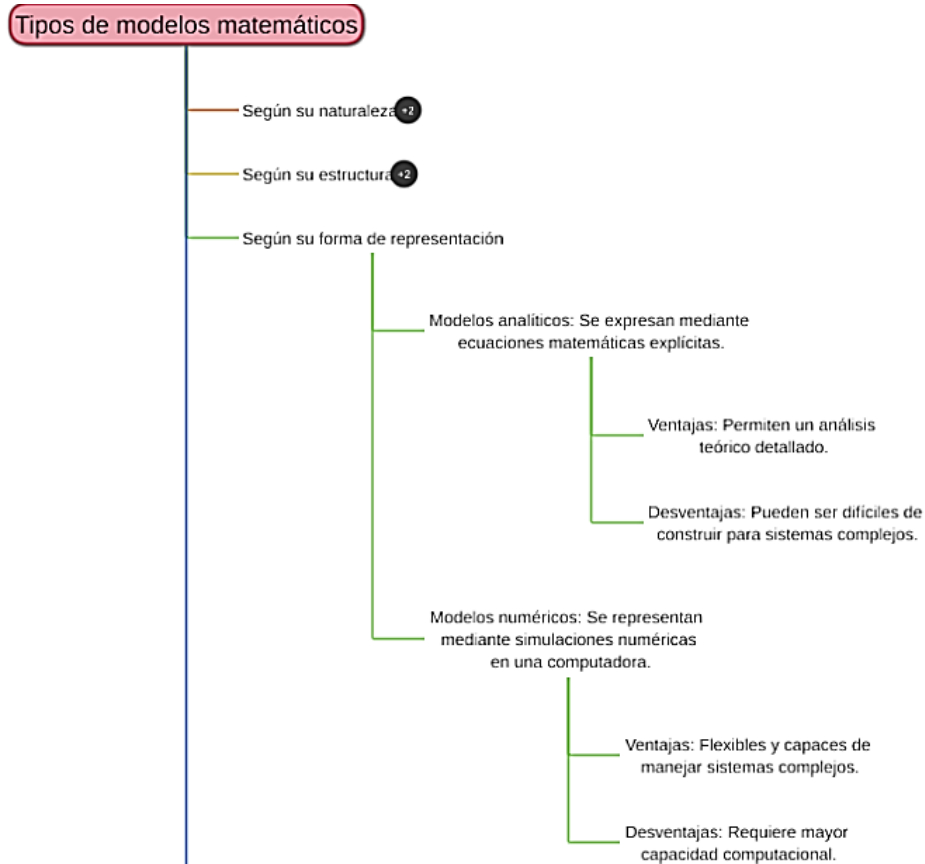


Ilustración 4. Clasificación de un modelo matemático según su forma de representación.

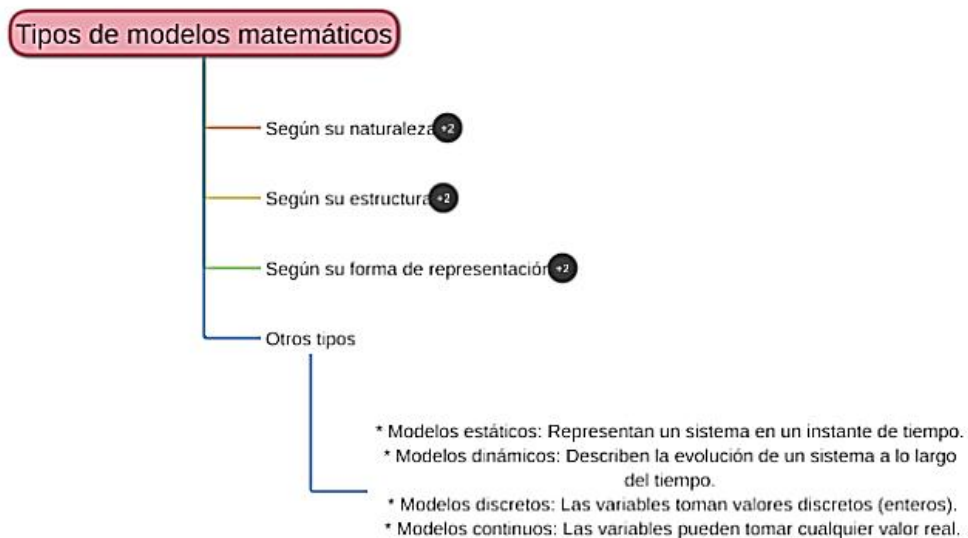


Ilustración 5. Clasificación de otros tipos de modelos matemáticos.

Fuente: Elaboración propia a partir de la información de (Ramos et al., 2010).

2.1.14 Ventajas y desventajas de los modelos matemáticos

A continuación, se mencionan algunas de las ventajas y desventajas de los modelos matemáticos (Dantzig, 2002):

Ventajas

Los modelos son herramientas esenciales que simplifican sistemas complejos, predicen su comportamiento futuro, optimizan soluciones y facilitan tanto la comprensión como la comunicación de fenómenos complejos. La utilidad de los modelos radica en su capacidad de simplificar sistemas complejos, predecir su comportamiento, optimizar soluciones, y facilitar la comprensión y comunicación de fenómenos complejos.

Desventajas

A pesar de su utilidad, los modelos siempre implican simplificaciones de la realidad e incertidumbre al no considerar todas las variables, y pueden presentar limitaciones. Su validez depende crucialmente de la calidad de los datos y las suposiciones, por lo que la elección del tipo de modelo adecuado debe basarse en la naturaleza del sistema, la precisión requerida y la disponibilidad de datos.

2.1.15 Aplicaciones de los modelos matemáticos en la planeación agregada

1. Optimización de recursos:

- **Minimización de costos:** Los modelos pueden identificar la combinación óptima de producción, mano de obra, inventario y subcontratación para reducir los costos totales.
- **Maximización de beneficios:** Ayudan a determinar los niveles de producción que maximizan las ganancias, considerando los costos variables y fijos.

2. Planeación de la producción:

- **Determinación de la capacidad:** Calcular la capacidad de producción necesaria para satisfacer la demanda proyectada.
- **Nivelación de la producción:** Ayudar a suavizar las fluctuaciones en la producción, reduciendo los costos de contratación y despido.

- Gestión de inventarios: Optimizar los niveles de inventario para minimizar costos de almacenamiento y evitar roturas de stock.

3. Toma de decisiones:

- Evaluación de escenarios: Simular diferentes escenarios futuros para evaluar el impacto de distintas decisiones en los resultados.
- Selección de estrategias: Ayudar a seleccionar la estrategia de producción más adecuada, considerando factores como la demanda, los costos y las restricciones de capacidad.

4. Análisis de sensibilidad:

- Evaluar el impacto de cambios: Analizar cómo cambios en los parámetros del modelo (demanda, costos, etc.) afectan los resultados.
- Identificar riesgos: Identificar los factores que tienen un mayor impacto en los resultados y tomar medidas para mitigar los riesgos.

2.1.16 Tipos de modelos matemáticos utilizados en la planeación agregada

A continuación, se mencionan los tipos de modelos matemáticos que son más utilizados en la programación agregada (Dantzig, 2002):

- Programación lineal: Es uno de los modelos más utilizados, ya que permite optimizar una función objetivo (como el costo o la ganancia) sujeto a restricciones lineales (demanda, capacidad, etc.).
- Simulación: Permite modelar sistemas complejos y evaluar el impacto de diferentes decisiones a través de experimentos computacionales.
- Redes neuronales: Pueden utilizarse para predecir la demanda futura y ajustar los planes de producción en consecuencia.
- Modelos de optimización entera: Son útiles cuando las variables de decisión deben tomar valores enteros (por ejemplo, número de unidades a producir).

2.1.17 Problemas básicos en los modelos de planeación agregada

La tabla 1, muestra algunos problemas básicos que se discuten en cada modelo de planeación agregada junto con una breve descripción de los mismos.

Tabla 1. Problemas básicos en los modelos de planeación agregada. Fuente: Elaboración propia a partir de la información de (Cheraghalikhani et al., 2019).

Problema básico	Definición
Demanda	La demanda para cada período que debe ser satisfecha por producto, inventario o pedido pendiente.
Inventario	Productos que se mantienen en stock en cada período, Parte de la demanda que no ha sido satisfecha en cada período
Capacidad de producción	Cantidad máxima de productos que se pueden producir en cada período por sistema (para máquina y mano de obra)
Espacio de almacén	La capacidad del almacén para el inventario de almacenamiento
Costos de producción	Los costos de producción consisten en el tiempo regular y las horas extraordinarias de producción y los costos de arrastre de inventario y pedidos pendientes
Subcontratación	Contratar temporalmente la capacidad de otras empresas para fabricar los componentes o productos
Nivel laboral	Número de trabajadores en cada período, incluye trabajadores regulares y horas extras
Costo de contratación y despido	Es necesario contratar trabajadores adicionales para manejar la carga de producción adicional y trabajadores despedidos para reducir los gastos generales

2.2 Marco teórico

2.2.1 Planeación agregada de la producción

La planeación agregada se enfoca a determinar la producción óptima y los niveles de fuerza de trabajo de cada periodo sobre un horizonte de planeación en un periodo a mediano plazo, de esta manera, busca seleccionar los niveles de planeación totales para cada familia de producto para hacer frente a la demanda fluctuante en un futuro cercano.

Cheraghalikhani et al. 2019, señala la relevancia de la planeación agregada en el ámbito productivo. Esta referencia permite subrayar la trascendencia de esta disciplina dentro del ámbito de la producción. El autor destaca la variedad de modelos existentes, caracterizados por diferentes estructuras, problemáticas y enfoques de solución, con el fin de delinear las tendencias y futuras líneas de investigación en la materia, además de destacar la diversidad de características que presentan los modelos de planeación agregada, incluyendo sus estructuras, problemáticas inherentes y las diversas estrategias de resolución (Cheraghalikhani et al., 2019).

2.2.2 Características principales de la planeación agregada

En la actualidad, las empresas emplean sistemas de planeación de recursos empresariales (ERP) y de planeación de requerimientos de materiales (MRP) para optimizar sus procesos productivos, si bien ambos sistemas son valiosos, su enfoque difiere.

Los sistemas MRP son diseñados para gestionar la producción en grandes lotes, son especialmente útiles en entornos de producción push. Esto significa que los productos se fabrican con anticipación a la demanda, lo que a menudo resulta en elevados niveles de inventario. (Chopra y Meindl, 2013).

Por otro lado, el enfoque busca minimizar el inventario y la producción excesiva. Aunque el MRP puede parecer contraintuitivo para este modelo, se adapta bien a la planeación a largo plazo y a la gestión de datos en empresas que buscan optimizar sus procesos. Al calcular de manera precisa las cantidades de materiales necesarias y los tiempos de entrega, el MRP se convierte en una herramienta fundamental para garantizar la disponibilidad de los recursos sin generar excedentes innecesarios (Chopra y Meindl, 2013).

Al elaborar un plan agregado de producción, es fundamental considerar diversos factores, especialmente el horizonte temporal de la planeación, los criterios de evaluación, las variables relevantes y las limitaciones que deben abordarse. La ilustración 6, muestra los niveles de planeación en una compañía.



Ilustración 6. Niveles de planeación en una compañía.

Fuente: elaboración propia.

2.2.3 Aspectos de la planeación agregada

Según Sipper & Bulfin (1998) los tres aspectos más importantes de la planeación agregada son la capacidad, las unidades agregadas y los costos.

A continuación, se hará un breve análisis de cada uno.

2.2.3.1 Capacidad

La capacidad se refiere a la cantidad máxima que un sistema de producción puede fabricar en un periodo determinado. Aunque la forma de medirla varía según el sistema.

Es crucial que la capacidad de un sistema sea mayor que la demanda para poder satisfacerla. Sin embargo, tener un exceso de capacidad significativo es costoso, debido a que el equipo ocioso representa una inversión desperdiciada.

Los cambios en la capacidad pueden ser a mediano o a largo plazo. En el mediano plazo, los ajustes son pequeños, como el uso de horas extras y/o la subcontratación. Por otro lado, los cambios a largo plazo son más grandes y se realizan en incrementos discretos, como la construcción de una nueva planta o la adición de maquinaria.

2.2.3.2 Unidades agregadas

Las unidades agregadas simplifican la planeación al consolidar la información de múltiples productos en una sola medida, lo que facilita la toma de decisiones estratégicas sobre la capacidad y la producción.

2.2.3.3 Costos

Los costos que influyen en la planeación agregada se pueden dividir en tres categorías principales: costos de producción, costos de inventario y costos de cambio en la capacidad.

- **Costos de producción:** Incluyen los gastos directos como materiales, mano de obra (incluyendo horas extra) y subcontratación.
- **Costos de inventario:** Los costos de inventario se dividen en dos categorías: el costo de mantenimiento, que incluye gastos como seguros, impuestos y espacio de almacenamiento para las mercancías, y el costo por faltantes, que ocurre cuando no hay suficientes productos para satisfacer la demanda. Este último genera pérdidas en ventas, daña la reputación de la empresa y acarrea los costos de gestionar las órdenes atrasadas. En un contexto de fabricación, un faltante podría incluso paralizar la producción por completo.
- **Costos de cambio en la capacidad:** Estos costos están relacionados con los ajustes en la fuerza laboral: el costo de contratación el cual incluye los gastos de reclutamiento y capacitación de nuevos empleados y el costo por despido lo cual implica los costos directos de indemnización y la potencial

pérdida de reputación de la empresa, lo que puede dificultar futuras contrataciones.

2.2.4 Técnicas de planeación agregada

Se han estado estudiando y analizando diferentes técnicas entre las cuales destacan (1) los métodos de ensayo y error, además de que varios investigadores criticaron las limitaciones de los métodos existentes para resolver problemas de planeación agregada.

Entre las técnicas estudiadas se identificaron algunas que de igual manera se utilizaron constantemente, entre ellas, (2) técnicas gráficas, (3) planeación paramétrica de la producción, (4) heurística de cambio de producción, (5) programación lineal, (6) programación por objetivos, (7) programación entera mixta, (8) método de transporte y (9) modelos de simulación. Además, analizaron las debilidades y fortalezas de cada técnica (Cheraghalikhani et al., 2019).

2.2.5 Criterios de evaluación para una planeación agregada

La elaboración de una planeación agregada requiere la consideración de los criterios que se detallan a continuación:

2.2.5.1 Criterios económicos

Busan la maximización del beneficio cuando el ingreso es constante, es equivalente a minimizar los costos. Entre los costos se suelen considerar lo siguiente:

- Mano de obra
 - Conforme aumenta el nivel de producción, es necesario un mayor volumen de mano de mano de obra directa, por lo tanto, mayores costos en salarios.
 - El aumento de producción requiere turnos extras, por lo tanto, una plantilla de personal mayor.
 - Entrevistas y selección, investigación, referencias y comprobaciones, exámenes de aptitud física, adiestramiento del nuevo personal, despidos, horas extras, subcontratación.

- Stock
 - Mantenimiento del espacio físico para su contención (uso de espacios propios o alquiler).
 - Costos por daños, deterioro de los mismos.
- Desabasto
 - Esto ocurre cuando el stock y la producción no son suficientes para cumplir con los pedidos. En estos casos puede recurrirse a perder demanda o a diferir la demanda o parte de ella, esto es dependiendo de los tiempos que los clientes acepten esperar.
- Otros criterios

Se pueden mencionar algunos otros que, de forma indirecta, también tienen influencia en la economía de la empresa:

- Minimizar las demoras en las entregas de los pedidos
- Minimizar las variaciones en el nivel de fuerza de trabajo
- Minimizar las variaciones en el nivel de producción

2.2.6 Modelos de planeación agregada

Existen 2 tipos de modelos de planeación agregada, los cuales se dividen en modelos determinísticos y modelos inciertos, a su vez los modelos determinísticos se dividen en dos grupos de objetivos, simples y múltiples, por otro lado, los modelos inciertos se dividen en dos categorías; modelos difusos y modelos estocásticos, de igual manera, como en la categoría anterior se dividen en dos grupos de objetivos, simples y múltiples. La ilustración 7, muestra los grupos estructurales para modelos de planeación agregada. (Cheraghalikhani et al., 2019).

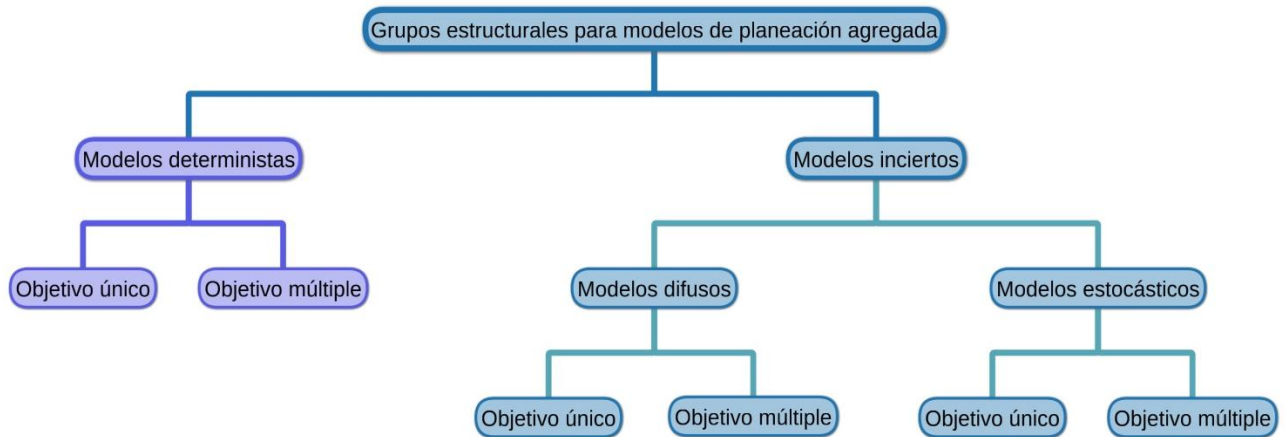


Ilustración 7. Grupos estructurales para modelos de planeación agregada.

Fuente: elaboración propia.

2.2.6.1 Modelos determinísticos

Se refiere a cualquier modelo de planeación en el cual incluye los siguientes parámetros como la demanda, los costos de producción (esto engloba los costos de contratación, costos de despido, costo de subcontratación, costos de inventario, etc.), las restricciones, la capacidad de producción e ingresos por ventas del producto (costo del producto al mercado), estos parámetros se utilizan en las funciones objetivo y las restricciones, es por eso que estos se deben conocer antes del proceso de planeación, debido a que estos parámetros pueden ser cambiantes en cuanto a los problemas que se enfrentan en el mundo real.

2.2.6.2 Modelos inciertos

Hace referencia a que los modelos son inciertos debido a la diferencia que se tiene de la información requerida y la información obtenida, como resultado, en el mundo real este es un factor que impacta significativamente en un proceso de producción (Galbraith, 2007).

Los parámetros como la demanda, los costos, las restricciones, la capacidad de producción, entre otros, no son precisos, debido a que se obtiene información incompleta o errónea. Para abordar la incertidumbre en los modelos, se empleó la teoría de conjuntos difusos y la programación estocástica.

2.2.6.2.1 Modelos difusos

Estos modelos interactúan principalmente en el área en donde el juicio, la evaluación y la toma de decisiones son importantes, debido a que esto puede llevar al método prueba y error, se utilizan en las situaciones mal definidas, por ejemplo, demandas confusas, tiempos de producción indefinido o impreciso.

2.2.6.2.2 Modelos estocásticos

Estos modelos se basan en el concepto de aleatoriedad y en la probabilidad, estos se han centrado con un solo objetivo, el minimizar: costos, niveles de inventario, fuerza laboral, uso de horas extras, uso de subcontratación, cambios en los niveles de producción, tiempo de inactividad de planta/personal, y maximizar ganancias, servicio al cliente, utilización de máquinas, ventas, etc.

En la tabla 2, se presenta un resumen de los artículos encontrados en la literatura que exploran enfoques en modelos matemáticos de programación lineal y optimización, junto con los métodos de solución y la solución encontrada, algunos de los cuales se han aplicado en casos del mundo real en las empresas.

Tabla 2. Modelos matemáticos aplicados a la optimización. Fuente: elaboración propia a partir de la información de (Caicedo-Rolón Jr. et al., 2019), (R. et al., 2008), (Gonzalez et al., 2018), (Zotelo et al., 2017), (E. et al. 2015), (Gomez et al., 2017), (Santana-Robles et al., 2024).

Autor	Problema abordado	Método de solución	Solución encontrada
(Caicedo-Rolón Jr, Criado Alvarado, & Morales Ramón, 2019)	Combinación óptima entre la tasa de producción, la fuerza de trabajo y los inventarios.	Modelo matemático de programación lineal.	El modelo permite la minimización los costos del plan agregado de producción, lo que permitió tomar decisiones operacionales.
(R., Chacón, & Ponce, 2008)	Satisfacer la demanda esperada con los costos operativos mínimos manteniendo un nivel laboral permanentemente mínimo.	Modelo matemático de optimización.	El modelo permite reducir los costos de producción manteniendo una fuerza laboral permanente.

(Gonzalez, y otros, 2018)	Maximización de la utilidad de una fábrica utilizando la cantidad óptima de materiales necesarios.	Modelo matemático de programación lineal.	El modelo permite obtener la cantidad de docenas óptimas que se deben producir para que la utilidad de la empresa sea mayor.
(Zotelo, Mula, Díaz-Madroñero, & González, 2017)	Minimizar los costes de producción, inventario y demanda diferida. Minimizar el tiempo ocioso y extra de cada recurso productivo.	Modelo matemático de programación lineal entera.	El modelo ayudo a definir las cantidades a producir, los niveles de inventario, la demanda diferida y los costes derivados, generando una mayor confianza en la toma de decisiones.
(E., C., Barroso-Moreno, & Pico-González, 2015)	Calcular un índice global de desempeño corporativo (IGDC).	Modelo matemático de programación lineal.	Permite una medición eficaz del desempeño corporativo que permite lograr su optimización a través de técnicas de control estadístico.
(Gómez, Armas, Toapanta, & Sinchiguano, 2017)	Optimización de la cadena mediante la asignación de cantidades de productos distribuidos para cada distrito de la red, mientras se satisface un conjunto de restricciones que incluye: Capacidad de las plantas, y de los centros de distribución.	Modelo matemático de programación lineal.	El modelo permite la optimización de las cadenas de abastecimiento.

(Santana- Robles, Hernández- Gress, Martínez-López, & González- Hernández., 2024)	Minimizar los costos y planificar de manera colaborativa los recursos esenciales, incluida la determinación del número y la ubicación de los refugios en función de los cálculos de la población afectada y el establecimiento de rutas para entregar la ayuda a estos refugios.	Modelo matemático de optimización de programación lineal entera.	El modelo permite la asignación óptima de cada uno de los municipios afectados (centros de concentración de víctimas) a los diferentes albergues, y al mismo tiempo se determinó la distribución óptima de la ayuda.
--	--	--	--

2.3 Conclusión

La implementación de un modelo de programación lineal en la industria metal-mecánico no solo marca un cambio significativo en la toma de decisiones, sino que también valida la superioridad de un enfoque cuantitativo y basado en la optimización matemática frente a las metodologías intuitivas. Los resultados de este estudio demuestran que el modelo no solo permite la asignación óptima de personal y la mezcla de productos, sino que cuantifica la reducción de costos y la maximización de la rentabilidad.

Específicamente, este modelo se convierte en una herramienta estratégica esencial al calcular las cantidades precisas de cada producto, integrando las restricciones de costos de materia prima, mano de obra y tiempo de maquinaria.

Capítulo 3. Propuesta de intervención

En el presente capítulo se desarrollan cada uno de los pasos que compone la metodología propuesta para dar solución al problema planteado en el Capítulo 1.

3.1 Definición del problema del caso de estudio

En la fase inicial, se llevó a cabo una investigación en una empresa ubicada en Ciudad Sahagún, Hidalgo. En donde se realizó un análisis profundo del área de planeación de la producción, el cual reveló deficiencias significativas que impactan negativamente en la productividad. Específicamente, se identificó un incumplimiento constante de los indicadores internos clave, tales como el índice de productividad mensual, las entregas a tiempo, el tiempo de respuesta a cambios en la demanda y el índice de satisfacción del cliente. El deterioro de estos indicadores no solo afecta la eficiencia operativa, sino que también compromete directamente la rentabilidad de la empresa en el mercado.

¿Por qué abordar este problema con un enfoque planeación agregada?

La empresa está experimentando dificultades en su proceso productivo debido a la falta de una estrategia de planeación a mediano plazo. Al no ajustar la producción de acuerdo con la demanda real del mercado, se generan costos adicionales asociados a la sobreproducción, o la necesidad de realizar ajustes constantes.

Por lo que, se requiere de herramientas que le permitan optimizar los recursos y analizar los indicadores de productividad y satisfacción al cliente, para obtener una visión completa del desempeño de la misma, y con esto identificar las áreas que requieren mayor atención; de la misma manera, al contar con una perspectiva más amplia y detallada del desempeño de la empresa, se pueden tomar decisiones más informadas y estratégicas.

Para solucionar este problema, se propondrá un modelo de optimización que permita analizar múltiples variables y encontrar la combinación óptima de producción, inventario y recursos, asegurando así una mayor eficiencia y rentabilidad.

Al crear un escenario con un modelo matemático, ayudará a conocer las cantidades de inventario y producción que deberían de considerarse en cada periodo para dar respuesta a la demanda; además de tomar en cuenta los costos de contratación, despido, inventario o subcontratación para minimizar el costo total de atender la demanda solicitada por los clientes.

3.2 Recolección de datos

Como segundo paso se ejecutó un análisis exhaustivo considerando opiniones relevantes de los trabajadores (administrativos y de producción), se consideró que la mejor opción para realizar este análisis sería a través de entrevistas y diálogos acerca de su opinión sobre los factores que involucran un atraso en los tiempos de entrega, puesto que ellos cuentan con una visión diferente desde su área de trabajo.

La información obtenida de las entrevistas muestra que la empresa no cuenta con una planeación de la producción de acuerdo a la capacidad real de la empresa, como resultado se deriva una serie de consecuencias negativas como las que se mencionan a continuación:

1. El hecho de realizar una mala estimación de la capacidad de planta, la falta de organización en la planeación y la falta de comunicación a los diferentes niveles jerárquicos de la empresa, induce a retrasos en las entregas y la recepción incompleta de materiales, de igual manera, genera cuellos de botella en las diferentes áreas de trabajo, como resultado de esto, obtenemos el incumplimiento de los compromisos y entregas con los clientes, mismo que genera rentabilidad deficiente de la empresa en el mercado.
2. Una inadecuada o errónea recepción en la materia prima o materiales de complemento origina que el inventario no se gestione de manera eficiente. De igual manera, una ineficaz planeación con los recursos de alta rotación o la obtención recursos materiales de mala calidad, crea situaciones de desabasto y como resultado se obtiene una producción ineficiente y/o de mala calidad y esto plasma pérdidas económicas para la empresa.
3. Una inestabilidad de mano de obra, exige realizar ajustes constantes en la producción. Esto se ocasiona por contrataciones temporales, la alta

6. El descuido del mantenimiento preventivo y correctivo de las máquinas aumenta la probabilidad de averías, asimismo, reduce su vida útil y pone en riesgo la seguridad de los trabajadores, tal como la falta de información y/o fichas técnicas de las mismas. La ilustración 8 muestra los factores que provocan un atraso en la producción.



Con el propósito de realizar un análisis profundo y detallado, esta investigación se focalizará en un único diseño de producto. De esta manera, se podrán estudiar a fondo los aspectos operativos, costos de producción y demás factores relevantes.

Por otra parte, en base a la información proporcionada por el área de Recursos Humanos, se calcularon los costos de contratar, y despedir mano de obra, esto se estableció de acuerdo al sueldo que ofrece la empresa más el costo del proceso de contratación (el proceso de contratación se refiere a la publicación de las vacantes, las entrevistas y la capacitación que se les otorga a los nuevos operarios), el costo del proceso de contratación es igual al 5% del sueldo. Con respecto al costo por despedir, éste se obtuvo a partir del cálculo de realizar un finiquito en el cual se consideraron 22 días laborales más la parte proporcional del aguinaldo, lo que corresponde a 1 mes de trabajo. La tabla 3 muestra los datos obtenidos sobre los costos de contratación y despido.

Tabla 3. Costos por contratar y despedir.

Costo por contratar		Costo por despedir	
Sueldo semanal	\$2200	S.D.I	\$440
Proceso de contratación 5%	\$110	Días trabajados al mes	22
Total:		Aguinaldo	\$398
\$2310		Total:	\$2600

Respecto al cálculo de los costos de mantener inventarios y de desabasto, se hizo una relación de costos basándose en el valor de la pieza. Por lo que, de esta manera, el costo de mantener una pieza en el inventario es igual al 20% del valor total de la pieza y el costo por desabasto de la misma, es igual al 35% del valor total. La tabla 4 muestra la relación de los costos por mantener y por el desabasto de inventario.

Tabla 4. Costos por mantener y costos desabasto de inventario.

Costo por unidad
\$650
Costo por mantener 20%
\$130
Costo por desabasto 35%
\$228

Asimismo, se calcularon los costos de horas en tiempo regular y costos de horas en tiempo extra, los cuales se obtienen al dividir el salario que ofrece la empresa entre las horas laborales a la semana. La tabla 5 muestra los costos por hora en tiempo regular y en tiempo extra.

Tabla 5. Costo por tiempo regular y tiempo extra.

Costo por tiempo regular	\$55
Costo por tiempo extra	\$110

Respecto a los costos de los materiales, la empresa estudiada no compra la materia prima, ya que, el cliente la otorga de acuerdo a sus especificaciones y requerimientos; sin embargo, cuando una placa se daña la empresa debe reponerla.

El costo de los materiales es de \$350 y se obtuvo a partir del costo de los materiales requeridos, por otro lado, el costo de subcontratación es de \$975, se hizo una relación de costos basándose en el valor de la pieza.

3.3 Formulación del modelo matemático

En diciembre de 2022, se estudió el área de planeación de la producción en una empresa metal – mecánica, y se detectó un problema que está relacionado con el índice de productividad por mes, debido a que, los costos de contratar y despedir mano de obra superan un 5% en relación al costo por orden de compra del cliente. Sin embargo, la empresa cree que pagar tiempo extra es una alternativa factible debido a la escasez de mano de obra y los atrasos en las entregas finales.

La planeación de la producción se realiza por semana, misma que se basa en una proyección de acuerdo al ritmo de producción del cliente, la cual es fluctuante porque varía cada semana; lo que provoca un aumento o disminución en la demanda sin previo aviso.

Aunado a lo anterior, cabe resaltar que la empresa trabaja por proyectos con diferentes clientes, como resultado de eso, la carga de trabajo puede variar en cuanto a tiempo de entrega. Por otro lado, la empresa no cuenta con un inventario de seguridad para responder a demandas elevadas, pues la producción únicamente busca satisfacer la demanda del periodo en curso. Para la empresa ya no es factible esta estrategia (subcontratar), debido a que, el costo total que se genera por los costos de contratar o despedir rebasa al costo total de la producción. La empresa busca minimizar costos de producción al mismo tiempo que desea tener la mano de obra requerida para cubrir toda la demanda de los clientes, buscando ser rentable.

Para la formulación del modelo matemático se tomó como referencia el modelo propuesto por (Chopra & Meindl, 2013) incluyendo características propias del estudio de caso abordado en este trabajo de tesis.

El modelo se estructura con la identificación y los antecedentes aportados por el estudio que se realizó en la empresa, como el nivel de producción con los costos de producción, inventarios excedentes o faltantes y fuerza laboral. Se evalúan 4 estrategias de trabajo relacionadas con las variables antes mencionadas, y se determina cuál es la mejor opción de acuerdo con el compromiso de la empresa ***(estrategias evaluadas usando la hoja de cálculo de Excel, ver Anexo 1)***.

Las estrategias basadas en combinaciones de las variables fuerza laboral (por política de la empresa), se consideró que la fuerza laboral es una variable significativa para la planeación de la producción, manteniendo un número máximo de obreros permanentes con independencia del nivel de demanda y producción, pero al menor costo.

3.3.1 Definición de parámetros y variables del modelo

A continuación, se describirán los parámetros y variables del modelo.

Identificación del conjunto de variables de decisión, cuyos valores se determinarán como parte del plan agregado, las cuales se definen de la siguiente manera:

FL t = Número de trabajadores requeridos al inicio del mes t , $t = 1, \dots, 12$.

EC t = Número de empleados contratados al inicio del mes t , $t = 1, \dots, 12$.

ED t = Número de empleados despedidos al inicio del mes t , $t = 1, \dots, 12$.

UP t = Número de unidades producidas en el mes t , $t = 1, \dots, 12$.

IF t = Número de unidades en inventario al final del mes t , $t = 1, \dots, 12$.

UD t = Número de unidades en desabasto al final del mes t , $t = 1, \dots, 12$.

US t = Número de unidades subcontractadas para el mes t , $t = 1, \dots, 12$.

TO t = Número de horas de tiempo extra trabajadas durante el mes t , $t = 1, \dots, 12$.

UP t = Número de unidades producidas para el mes t . $t = 1, \dots, 12$.

Es importante destacar que t representa el número de periodos considerados, que son los 12 meses del año.

El objetivo del modelo es encontrar un plan agregado que minimice el costo total incurrido durante el horizonte de planeación, la tabla 6, muestra los costos incurridos del maquinado de las piezas.

Tabla 6. Costos incurridos del maquinado de las piezas.

Costos	
Materiales	\$350
Mantener inventario	\$228
Desabasto	\$130
Contratar	\$2310
Despedir	\$2600
Horas requeridas	2 c/u
Tiempo regular	\$55
Tiempo extra	\$110
Subcontratar	\$975

3.3.2 Definición de función objetivo

La función objetivo es minimizar el costo total (equivalente a maximizar la utilidad total ya que se debe satisfacer toda la demanda) incurrido durante el horizonte de planeación.

Estos costos se evalúan de la siguiente manera, considerar la información de la tabla 6.

Ecuación 1. Función objetivo

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{12} \$9,680FL_t + \sum_{t=1}^{12} \$110TE_t + \sum_{t=1}^{12} \$2,310EC_t + \sum_{t=1}^{12} \$2,600ED_t + \sum_{t=1}^{12} \$228IF_t \\ + \sum_{t=1}^{12} \$130UD_t + \sum_{t=1}^{12} \$350UP_t + \sum_{t=1}^{12} \$975US_t \quad (1) \end{aligned}$$

La ecuación (1) representa la función objetivo que minimiza los costos, es la suma de todos los costos antes mencionados. Costos de contratar y capacitar, los costos de despedir, los costos de las horas en tiempo real y en tiempo extra, costos de mantener inventario y de desabasto, asimismo el tiempo que se tarda en realizar una pieza en producción, los costos del material y de subcontratación.

5. Costo de mano de obra en tiempo regular. Se considera el salario que se paga a los trabajadores en su jornada laboral. El salario mensual por trabajador es de \$9,680 para una jornada de 8 horas al día por 22 días trabajados. FL_t es el número de trabajadores en el período t .

$$\sum_{t=1}^{12} \$9,680FL_t$$

6. Costo de tiempo extra, establece el costo de las horas extras en cada periodo \$110 por hora (véase la tabla 6). TE_t representa el número de horas extras trabajadas en el período t .

$$\sum_{t=1}^{12} \$110TE_t$$

7. Costo de contratar y despedir. El costo de contratar y capacitar a un trabajador es de \$2,310 y el costo de despedir a un trabajador es de \$2,600. EC_t y ED_t representan el número de trabajadores contratados y el número de trabajadores despedidos en el período t .

$$\sum_{t=1}^{12} \$2,310EC_t + \sum_{t=1}^{12} \$2,600ED_t$$

8. Costo de mantener y desabasto de inventario. El costo por cada unidad que se almacena en inventario tiene un costo asociado de \$228 y por cada unidad faltante se incurre en un costo de \$130. IF_t y UD_t representan las unidades en inventario y las unidades en desabasto en el período t .

$$\sum_{t=1}^{12} \$228IF_t + \sum_{t=1}^{12} \$130UD_t$$

9. Costo de materiales y subcontratación. El costo de producción por unidad es de \$350 y el costo de subcontratación por unidad es de \$975/unidad. UP_t representa la cantidad por traslado de material y US_t representa la cantidad subcontratada en el período t .

$$\sum_{t=1}^{12} \$350UP_t + \sum_{t=1}^{12} \$975US_t$$

3.3.3 Definición de restricciones

Las restricciones del modelo son las siguientes:

1. *Restricciones de fuerza de trabajo, contratación y despido.* El tamaño de la fuerza laboral FL_t en el periodo t se calcula como la suma de la fuerza laboral del periodo anterior FL_{t-1} , más las nuevas contrataciones EC_t , menos los despidos ocurridos en el periodo actual ED_t , como se muestra en seguida:

Ecuación 2. Restricciones de fuerza de trabajo, contratación y despido.

$$FL_t = FL_{t-1} + EC_t - ED_t \quad (2)$$

2. *Restricciones de capacidad.* La capacidad de producción de la empresa está limitada por los recursos disponibles, principalmente las horas de trabajo. Esta capacidad se define como el máximo número de unidades que pueden producirse internamente en un periodo dado, considerando tanto las horas regulares como las extras. La producción subcontratada, al realizarse fuera de la planta, no está condicionada por esta restricción, según los datos de productividad (véase la tabla 4) se obtiene la siguiente ecuación: Las unidades producidas UP_t deben ser igual o menor a 88 unidades al mes por trabajador FL_t en tiempo regular, dedicando 2 horas por unidad, y una unidad adicional por cada 2 horas en tiempo extra TE_t .

Ecuación 3. Restricciones de capacidad.

$$UP_t \leq 88FL_t + \frac{TE_t}{2} \quad (3)$$

3. *Restricciones de balance de inventario.* Al finalizar cada periodo, se realiza un ajuste del inventario para garantizar que se cumpla con la demanda de los clientes. La demanda total de un periodo se calcula sumando la demanda del periodo actual D_t y el desabasto no cubierto del periodo anterior UD_{t-1} . Para satisfacer esta demanda, se utilizan tres fuentes: la producción interna UP_t , la producción subcontratada US_t y el inventario existente del periodo anterior IF_{t-1} (si la producción supera la demanda, se genera un excedente de inventario que se traslada al siguiente periodo). En caso contrario, si se produce un desabasto se acumula y debe ser cubierto en el siguiente periodo UD_t . Esta relación se expresa en la siguiente ecuación:

Ecuación 4. Restricciones de balance de inventario.

$$IF_{t-1} + UP_t + US_t = D_t + UD_{t-1} + IF_t - UD_t \quad (4)$$

4. El inventario inicial es de 100 unidades. Una de las condiciones del modelo es que el nivel de inventario al finalizar el último periodo analizado (periodo 12) no debe ser inferior a 100 unidades. Esto significa que se debe garantizar un stock mínimo al final del horizonte de planeación. Por otro lado, se asume que al inicio del proceso productivo no existe desabasto.

5. *Restricciones sobre el límite de tiempo extra.* Para garantizar condiciones laborales justas y evitar la sobrecarga de los empleados, se impone una restricción de 40 horas extras como máximo por trabajador al mes, denotado por FL_t . Esta limitación impacta directamente en la cantidad total de horas extras disponibles para la producción TE_t . Esta restricción se establece de la siguiente manera.

Ecuación 5. Restricciones sobre el límite de tiempo extra.

$$TE_t \leq 40FL_t \quad (5)$$

3.3.4 Solución del modelo matemático en Excel

Para la solución del modelo matemático se usó la hoja de cálculo de Excel mediante Solver. Los datos de la demanda, que son requeridos para alimentar el modelo fueron recopilados del caso de estudio y se presentan en la Tabla 7.

Tabla 7. Demanda.

Periodo	Demanda
1	320
2	180
3	240
4	160
5	260
6	280
7	200
8	210
9	300
10	320
11	250
12	230

3.3.4.1 Variables de decisión

Como se muestra en la ilustración 9, las variables de decisión están contenidas en las celdas B5 a I16, y cada celda corresponde a una variable de decisión. Por ejemplo, la celda D12 corresponde al tamaño de la fuerza laboral en el Período 8. Se inicia asignando un valor de 0 a todas las variables de decisión, la columna J contiene la demanda real, la información de la demanda se incluye porque es necesaria para calcular el plan agregado.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	VARIABLES DE DECISIÓN									
2	PERIODO	CONTRADOS (EC)	DESPEDIDOS (ED)	FUERZA LABORAL (FL)	TIEMPO EXTRA (TE)	INVENTARIO FINAL (IF)	DESABASTO (UD)	SUBCONTRATACIÓN (US)	PRODUCCIÓN (UP)	DEMANDA
4	0	0	0	6	0	100	0	0	0	
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	320
6	2	0	0	0	0	0	0	0	0	180
7	3	0	0	0	0	0	0	0	0	240
8	4	0	0	0	0	0	0	0	0	160
9	5	0	0	0	0	0	0	0	0	260
10	6	0	0	0	0	0	0	0	0	280
11	7	0	0	0	0	0	0	0	0	200
12	8	0	0	0	0	0	0	0	0	210
13	9	0	0	0	0	0	0	0	0	300
14	10	0	0	0	0	0	0	0	0	320
15	11	0	0	0	0	0	0	0	0	250
16	12	0	0	0	0	0	0	0	0	230

Ilustración 9. Variables de decisión. Fuente: Elaboración propia.

3.3.4.2 Restricciones

La columna M contiene las restricciones de fuerza de trabajo (Ecuación 2), la columna N contiene restricciones de capacidad (Ecuación 3), la columna O contiene restricciones de saldo de inventario (Ecuación 4) y la columna P contiene restricciones de horas extra (Ecuación 5). Estas restricciones se aplican a cada uno de los períodos.

	L	M	N	O	P
1	RESTRICCIONES				
2	PERIODO	FUERZA LABORAL (FL)	PRODUCCIÓN (UP)	INVENTARIO FINAL (IF)	TIEMPO EXTRA (TE)
4	0				
5	1	-6	0	-220	0
6	2	0	0	-180	0
7	3	0	0	-240	0
8	4	0	0	-160	0
9	5	0	0	-260	0
10	6	0	0	-280	0
11	7	0	0	-200	0
12	8	0	0	-210	0
13	9	0	0	-300	0
14	10	0	0	-320	0
15	11	0	0	-250	0
16	12	0	0	-230	0

Ilustración 10. Restricciones. Fuente: Elaboración propia.

La tabla 8 muestra las fórmulas que se utilizaron para crear la tabla de restricciones, la información de las celdas consideradas en cada formula se muestra en la ilustración 10.

Tabla 8. Fórmulas de restricciones.

Celda	Formula	Ecuación	Copiar a las celdas
M5	=D5-D4-B5+C5	2	M5:M16
N5	=88*D5+(E5/2)-I5	3	N5:N16
O5	=F4-G4+I5+H5-J5-F5+G5	4	O5:O16
P5	=-E5+40*D5	5	P5:P16

Para cada restricción se requiere indicar un símbolo de igualdad, menor o igual o mayor o igual de acuerdo a los requerimientos de la restricción, es decir del uso de los recursos, como se muestra a continuación:

$$\text{Valor de celda} \{ \leq, = \text{ o } \geq = 0 \}$$

Nuestras restricciones serán:

$$M5:M16 = 0, N5:N16 \geq 0, O5:O16 = 0, P5:P16 \geq 0$$

Para el modelo matemático del presente proyecto, el área para los cálculos de los costos se muestra en la ilustración 11. Por ejemplo, la celda B21 contiene los costos de contratación incurridos en el Período 1. La fórmula en la celda B21 es el producto de la celda B5 y la celda que contiene el costo de contratación por trabajador, que se obtiene de la Tabla 4.

Las demás celdas se llenan de manera similar. La celda B34 contiene la suma de las celdas B21 a I32, que representan el costo total.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
18	COSTOS DEL PLAN AGREGADO								
19	PERIODO	CONTRADOS (EC)	DESPEDIDOS (ED)	FUERZA LABORAL (FL)	TIEMPO EXTRA (TE)	INVENTARIO FINAL (IF)	DESABASTO (UD)	SUBCONTRATACIÓN (US)	PRODUCCIÓN (UP)
21	1	0	0	0	0	0	0	0	0
22	2	0	0	0	0	0	0	0	0
23	3	0	0	0	0	0	0	0	0
24	4	0	0	0	0	0	0	0	0
25	5	0	0	0	0	0	0	0	0
26	6	0	0	0	0	0	0	0	0
27	7	0	0	0	0	0	0	0	0
28	8	0	0	0	0	0	0	0	0
29	9	0	0	0	0	0	0	0	0
30	10	0	0	0	0	0	0	0	0
31	11	0	0	0	0	0	0	0	0
32	12	0	0	0	0	0	0	0	0
33	TOTAL	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
34	COSTO TOTAL	\$ -							

Ilustración 11. Costos del plan agregado. Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se muestra el procedimiento utilizado para resolver el modelo usando Solver:

Paso 1: Establecer celda de destino: B34

Paso 2: Seleccionar la opción de minimizar.

Paso 3: Seleccionar las celdas: B5:I16

Sujeto a las restricciones:

1.- La celda B5 a C16 = entero, hace referencia a que el número de trabajadores contratados o despedidos debe ser un número entero.

2.- La celda B5:I16 ≥ 0 , todas las variables de decisión son no negativas.

3.- F16 ≥ 100 , el inventario al final del período 12 es de al menos 100 unidades.

4.- G16 = 0, el desabasto al final del período 12 es igual a 0.

La ilustración 12, muestra las restricciones en el cuadro de dialogo.

Parámetros de Solver

Establecer objetivo:

Para: ☐ Máx ☒ Mín ☐ Valor de:

Cambiando las celdas de variables:

Sujeto a las restricciones:

-
-
-
-
-
-
-
-

☒ Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución:

Método de resolución

Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

Ayuda Resolver Cerrar

Ilustración 12. Cuadro de dialogo "Parámetros de Solver". *Fuente: Cuadro de diálogo en Excel.*

Al hacer clic en resolver, obtendremos una solución óptima.

3.4 Interpretación de resultados

La fuerza de trabajo se mantiene relativamente estable a lo largo de los períodos, con algunas variaciones menores debido a contrataciones y despidos aunado a lo anterior, el uso de horas extra varía significativamente entre los períodos, puesto que la empresa ajustará su producción de acuerdo a la variación de la demanda. La tabla 9 muestra el comportamiento de la fuerza laboral a lo largo de los periodos.

Tabla 9. Fuerza laboral durante el horizonte de planeación.

PERIODO	CONTRADOS (EC)	DESPEDIDOS (ED)	FUERZA LABORAL (FL)	TIEMPO EXTRA (TE)	INVENTARIO FINAL (IF)	DESABASTO (UD)	SUBCONTRATACIÓN (US)
0	0	0	6	0	100	0	0
1	0	3	3	0	0	0	0
2	0	1	2	8	0	0	0
3	0	0	2	80	0	24	0
4	0	0	2	8	0	4	0
5	1	0	3	0	0	0	0
6	0	0	3	32	0	0	0
7	0	1	2	48	0	0	0
8	0	0	2	68	0	0	0
9	1	0	3	72	0	0	0
10	0	0	3	84	0	14	0
11	0	0	3	0	0	0	0
12	1	0	4	0	100	0	0

A continuación, se explican los resultados obtenidos en relación a la evolución de la gestión de la fuerza de trabajo, la producción y el inventario a lo largo de doce periodos, mostrando las decisiones tomadas y sus impactos en la satisfacción de la demanda.

Al inicio del periodo 0, la operación contaba con 6 empleados a tiempo regular y un inventario inicial de 100 piezas. En el periodo 1, se realizó un ajuste significativo con el despido de 3 trabajadores. A pesar de esta reducción, la demanda del periodo fue cubierta gracias a las 100 unidades disponibles en inventario. La estrategia de ajuste continuó en el periodo 2, con el despido de un operario adicional, resultando en una fuerza de trabajo de solo 2 operarios. Esta

reducción requirió una producción de 4 unidades en tiempo extra para atender las necesidades del periodo.

Para el periodo 3, la fuerza de trabajo se mantuvo con 2 operarios lo que generó una requisición considerable de 40 unidades en tiempo extra. Sin embargo, esta producción no fue suficiente, resultando en un desabasto de 24 unidades para el siguiente periodo. En el periodo 4, con la misma fuerza de trabajo de 2 operarios, se produjeron 4 unidades en tiempo extra, pero el desabasto persistió, con 4 unidades faltantes para el siguiente ciclo.

Ante las dificultades para cubrir la demanda, el periodo 5 marcó un punto de inflexión: la producción regular fue insuficiente, lo que llevó a la contratación de un operario adicional. Esta medida fue clave para lograr satisfacer la demanda del periodo. Con una fuerza de trabajo de 3 operarios en el periodo 6, se implementó una producción de 16 unidades en tiempo extra, logrando cumplir con la demanda.

Para el periodo 7, a pesar de considerar el despido de un operario, la decisión se ajustó para realizar una requisición de 24 unidades en tiempo extra, asegurando la cobertura de la demanda. La fuerza de trabajo se mantuvo en 2 operarios en el periodo 8, lo que demandó una producción de 34 unidades en tiempo extra para cumplir con las necesidades del periodo. El periodo 9 vio la contratación de un operario adicional, con una requisición de 36 unidades en tiempo extra.

En el periodo 10, con 3 operarios, la producción de 42 unidades en tiempo extra no fue suficiente, generando un desabasto de 14 unidades para el siguiente periodo. En contraste, en el periodo 11 mantuvo la fuerza de trabajo de 3 operarios, logrando esta vez cubrir la demanda sin incidentes. Finalmente, en el periodo 12, se optó por la contratación de un operario adicional con el doble objetivo de satisfacer la demanda del periodo y al mismo tiempo lograr mantener un inventario final de 100 unidades.

La tabla 10 muestra el comportamiento de los inventarios con relación a la producción y a la demanda a lo largo de los periodos.

Tabla 10. Comportamiento de unidades en inventario del periodo 1 al 12.

PERIODO	INVENTARIO FINAL (IF)	DESABASTO (UD)	SUBCONTRATACIÓN (US)	PRODUCCIÓN (UP)	DEMANDA (D)
0	100	0	0	0	
1	0	0	0	220	320
2	0	0	0	180	180
3	0	24	0	216	240
4	0	4	0	180	160
5	0	0	0	264	260
6	0	0	0	280	280
7	0	0	0	200	200
8	0	0	0	210	210
9	0	0	0	300	300
10	0	14	0	306	320
11	0	0	0	264	250
12	100	0	0	330	230

El resultado de la función objetivo del modelo fue de \$1,458,162, esta cantidad representa el costo total de atender la demanda en los 12 periodos considerados. La tabla 11 muestra los costos totales obtenidos durante el horizonte de planeación.

Tabla 11. Costos totales.

PERIODO	CONTRADOS (EC)	DESPEDIDOS (ED)	FUERZA LABORAL (FL)	TIEMPO EXTRA (TE)	INVENTARIO FINAL (IF)	DESABASTO (UD)	SUBCONTRATACIÓN (US)	PRODUCCIÓN (UP)
1	-	7,800	29,040	-	22,800	-	-	77,000
2	-	2,600	19,360	880	912	-	-	63,000
3	0	-	19,360	8,800	-	-	-	75,600
4	-	0	19,360	880	-	3,120	-	63,000
5	2,310	-	29,040	-	-	520	-	92,400
6	-	-	29,040	3,520	-	-	-	98,000
7	-	2,600	19,360	5,280	-	-	-	70,000
8	-	-	19,360	7,480	-	-	-	73,500
9	2,310	-	29,040	7,920	-	-	-	105,000
10	-	-	29,040	9,240	-	-	-	107,100
11	-	0	29,040	-	-	1,820	-	92,400
12	2,310	-	38,720	-	22,800	-	-	115,500
TOTAL	\$ 6,930	\$ 13,000	\$ 309,760	\$ 44,000	\$ 46,512	\$ 5,460	\$ -	\$ 1,032,500
COSTO TOTAL	\$ 1,458,162							

El modelo desarrollado sugiere que la estrategia más conveniente para la empresa es adoptar un plan de producción a corto plazo ajustando eficientemente la producción a las fluctuaciones de la demanda, lo que requeriría la flexibilidad en el uso de horas extra, manteniendo la mano de obra medianamente estable para optimizar tiempo y los recursos.

En cuanto a los niveles de inventario se considera que su gestión podría ser un área de mejora de tal manera que se mantengan costos bajos, esto le permitiría a la empresa tener una plantilla laboral más estable y sacrificar costos de inventario.

Asimismo, al dividir la producción total entre la fuerza de trabajo, se podrá hacer una evaluación sobre la productividad de cada empleado y con el resultado se puede detectar posibles ineficiencias o posibles mejoras.

A continuación, se muestran una serie de comparativas entre los resultados obtenidos del modelo matemático y los datos reales de la empresa, esto para identificar si el modelo propuesto es viable para realizar los cambios requeridos en la producción.

Tabla 12. Comparativa de fuerza laboral y producción.

PERIODO	Metodo de trabajo actual		Modelo propuesto	
	FUERZA LABORAL (FL)	PRODUCCIÓN (UP)	FUERZA LABORAL (FL)	PRODUCCIÓN (UP)
1	2	176	3	220
2	3	264	2	184
3	1	88	2	196
4	3	264	2	196
5	2	176	3	264
6	2	176	3	280
7	3	264	2	176
8	3	264	2	234
9	1	88	3	268
10	3	264	3	352
11	2	176	3	250
12	3	264	4	330

Se considera que la fuerza laboral es una variable significativa para la planeación de la producción. En la actualidad, la empresa cuenta con la política de mantener un número máximo de obreros permanente independientemente del nivel de demanda; sin embargo, actualmente no está cumpliendo con dicha política, ya que se realizan ajustes en la fuerza de laboral de acuerdo a la demanda, esto para no considerar tiempos muertos o tiempo ocio en los operarios. Asimismo, de acuerdo a los resultados del modelo, pudo observarse que esta política es viable

para la empresa, ya que la empresa requiere de personal con experiencia para realizar actividades de maquinado de piezas, lo que complicaría al proceso de reclutamiento para poder conseguir personal con dichas características.

En la tabla 13 se hizo una comparación respecto al tiempo extra, subcontratación y desabasto, por lo que nos da los siguientes resultados:

Cuando la fuerza laboral es baja, se vuelve necesario trabajar en tiempo extra y subcontratar unidades, lo que, a su vez, incrementa los costos y en algunas ocasiones, genera gastos debido a la escasez de inventario. Sin embargo, si la fuerza laboral es medianamente estable, la subcontratación de piezas ya no sería una opción considerada.

Tabla 13. Comparativa de unidades en tiempo extra, subcontratación y desabasto.

Metodo de trabajo actual				
PERIODO	SUBCONTRATACIÓN (US)	TIEMPO EXTRA (TE horas)	TIEMPO EXTRA (TE unidades)	DESABASTO (UD)
1	20	40	20	4
2	0	0	0	0
3	25	20	10	41
4	0	0	0	0
5	20	56	28	10
6	46	60	30	38
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	80	32	16	36
10	30	120	60	2
11	50	42	21	5
12	41	60	30	0
Modelo propuesto				
PERIODO	SUBCONTRATACIÓN (US)	TIEMPO EXTRA (TE horas)	TIEMPO EXTRA (TE unidades)	DESABASTO (UD)
1	0	0	0	0
2	0	8	4	0
3	0	80	40	24
4	0	8	4	4
5	0	0	0	0
6	0	32	16	0
7	0	48	24	0
8	0	68	34	0
9	0	72	36	0
10	0	84	42	14
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0

El principal motivo por el que se decidió proponer el modelo matemático en la empresa estudiada, es para monitorear el índice de cumplimiento a sus clientes. Dado que, la empresa se enfrenta a una alta competencia y depende de la calificación que le otorguen sus clientes (relacionada al cumplimiento de entregas en tiempo y forma) para mantener la asignación de órdenes de trabajo. Con el modelo propuesto, se busca identificar alternativas de planeación de la producción que optimicen el cumplimiento de la demanda, manteniendo los costos bajos.

La Tabla 14 detalla la relación entre las piezas programadas para entrega (demanda) y las piezas efectivamente entregadas. Esta comparación se realizó aplicando tanto el método de trabajo actualmente utilizado por la empresa como el modelo desarrollado en el presente proyecto. Asimismo, en la Ilustración 13 se muestra una relación del comportamiento del indicador mediante una gráfica.

Tabla 14. Relación del status de entregas.

Método de trabajo actual				Modelo propuesto		
PERIODO	DEMANDA (D)	UNIDADES ENTREGADAS	STATUS DE ENTREGA	DEMANDA (D)	UNIDADES ENTREGADAS	STATUS DE ENTREGA
1	320	316	INCOMPLETA	320	320	COMPLETA
2	180	180	COMPLETA	180	180	COMPLETA
3	240	200	INCOMPLETA	240	216	INCOMPLETA
4	160	160	COMPLETA	160	156	INCOMPLETA
5	260	245	INCOMPLETA	260	260	COMPLETA
6	280	239	INCOMPLETA	280	280	COMPLETA
7	200	188	INCOMPLETA	200	200	COMPLETA
8	210	210	COMPLETA	210	210	COMPLETA
9	300	280	INCOMPLETA	300	300	COMPLETA
10	320	300	INCOMPLETA	320	306	INCOMPLETA
11	250	245	INCOMPLETA	250	250	COMPLETA
12	230	230	COMPLETA	230	230	COMPLETA

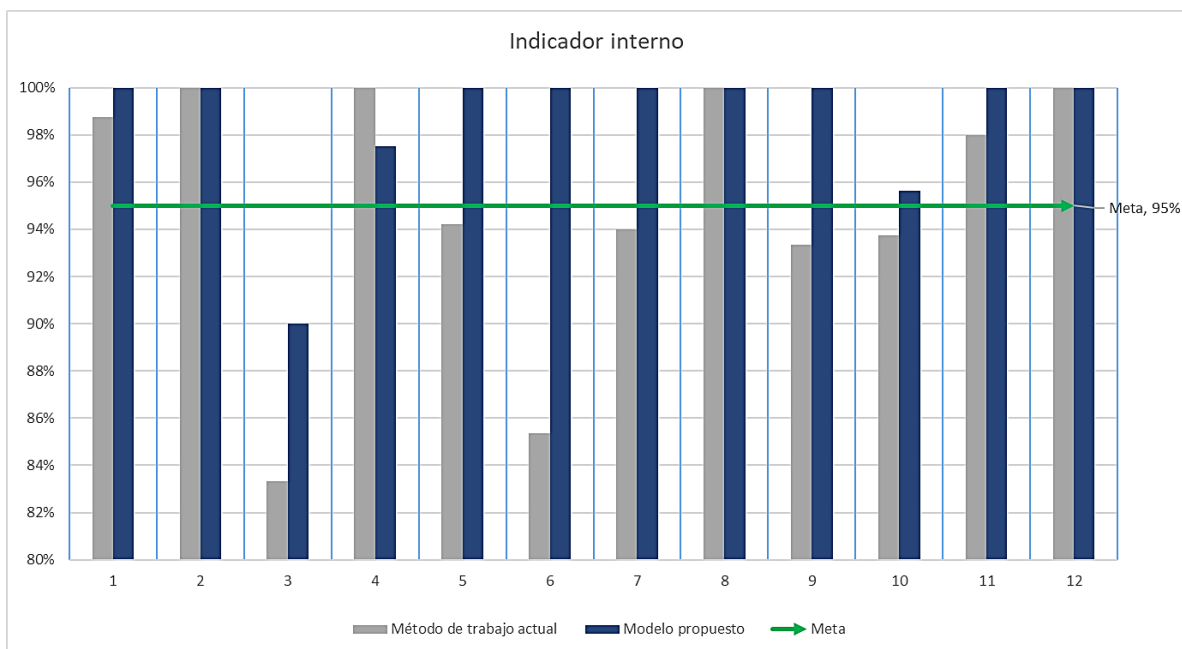


Ilustración 13. Grafica del indicador interno. Fuente: Elaboración propia.

Una de las partes importantes de la planeación agregada son los inventarios, en la tabla 15, se muestra la comparativa de las unidades en inventario, unidades subcontratadas y unidades en desabasto.

Tabla 15. Comparativa de las unidades en inventario, subcontratación y desabasto.

Metodo de trabajo actual			
PERIODO	INVENTARIO FINAL (IF)	SUBCONTRATACIÓN (US)	DESABASTO (UD)
1	100	20	4
2	0	0	0
3	76	25	41
4	0	0	0
5	26	20	10
6	0	46	38
7	0	0	0
8	26	0	0
9	80	80	36
10	0	30	2
11	0	50	5
12	100	41	0
Modelo propuesto			
PERIODO	INVENTARIO FINAL (IF)	SUBCONTRATACIÓN (US)	DESABASTO (UD)
1	100	0	0
2	4	0	0
3	0	0	24
4	0	0	4
5	0	0	0
6	0	0	0
7	0	0	0
8	0	0	0
9	0	0	0
10	0	0	14
11	0	0	0
12	100	0	0

Es importante hacer mención en que las piezas que están en desabasto se agregan como parte de la demanda a entregar para el siguiente periodo, por consiguiente, la demanda para el siguiente periodo seguirá incrementando.

Aunado a lo anterior, la tabla 16 expone la relación del costo total que conlleva la metodología de trabajo vigente en la empresa estudiada. Asimismo, la tabla 17 ilustra la relación del costo total que implica la implementación del modelo propuesto en la empresa estudiada.

Tabla 16. Costo total actual.

PERIODO	CONTRADOS (EC)	DESPEDIDOS (ED)	FUERZA LABORAL (FL)	TIEMPO EXTRA (TE)	INVENTARIO FINAL (IF)	DESABASTO (UD)	SUBCONTRATACIÓN (US)	PRODUCCIÓN (UP)
1	-	10,400	19,360	4,400	22,800	-	19,500	61,600
2	2,310	-	29,040	-	-	520	-	92,400
3	-	5,200	9,680	2,200	17,328	-	24,375	30,800
4	4,620	-	29,040	-	-	5,330	-	92,400
5	-	2,600	19,360	6,160	5,928	-	19,500	61,600
6	-	-	19,360	6,600	-	1,300	44,850	61,600
7	2,310	-	29,040	-	-	4,940	-	92,400
8	-	-	29,040	-	5,928	-	-	92,400
9	0	5,200	9,680	3,520	18,240	-	78,000	30,800
10	4,620	-	29,040	13,200	-	4,680	29,250	92,400
11	-	2,600	19,360	4,620	-	260	48,750	61,600
12	4,620	-	29,040	6,600	22,800	650	39,975	92,400
TOTAL	\$ 18,480	\$ 26,000	\$ 271,040	\$ 47,300	\$ 93,024	\$ 17,680	\$ 304,200	\$ 862,400
COSTO TOTAL	\$ 1,640,124							

En la Tabla 17 se presenta un análisis comparativo de los costos totales entre el método actual y el modelo propuesto. Los resultados indican que el modelo propuesto reduce los costos en un 11.09% en comparación con el enfoque tradicional

Tabla 17. Comparativa de costos totales.

COSTO TOTAL	\$ 1,640,124	Actual
COSTO TOTAL	\$ 1,458,162	Propuesto

Conclusión

En este proyecto se abordó un modelo matemático de optimización para evaluar diferentes estrategias de planeación agregada a través de un caso de estudio del sector metal -mecánico el cual considera varios factores para determinar la capacidad óptima que permita atender la demanda de sus clientes de manera oportuna a un costo competitivo.

El objetivo principal de este modelo matemático es encontrar la mejor combinación de factores para alcanzar los objetivos de la empresa, como por ejemplo maximizar las ganancias incrementando los ingresos y reduciendo los costos, minimizar los tiempos de entrega, optimizar el uso de los recursos, reducir el desperdicio, aumentar la eficiencia de la mano de obra y aumentar la flexibilidad adaptándose a los cambios del mercado. Al considerar una amplia gama de factores, este modelo podría ayudar a las empresas a encontrar el equilibrio óptimo entre la eficiencia, la rentabilidad y la sostenibilidad.

Los resultados del modelo matemático, confirman que la política de mantener al mayor número de empleados es sostenible a largo plazo, siempre que las condiciones del mercado permanezcan estables. Esto minimizará los ajustes de personal y reducirá los impactos negativos en la producción, aunado a lo anterior al implementar una administración optimizada de inventarios y subcontratación podría reducir los costos asociados a entregas tardías e incompletas, al mismo tiempo, mejoraría el índice de cumplimiento de entregas, fortaleciendo la relación con los clientes y aumentando la competitividad.

En general, los resultados del modelo respaldan la hipótesis inicial, indicando que es posible evaluar diferentes estrategias para optimizar la capacidad de producción de la empresa mediante una planeación más eficiente de sus recursos, logrando atender la demanda a un costo mínimo. Si bien la búsqueda de eficiencia y la optimización de recursos son principios fundamentales en cualquier entorno industrial, la creciente volatilidad del mercado (el aumento de la competencia y la necesidad de ser más sostenibles) ha marcado la urgencia de ir más allá de las prácticas tradicionales. Este modelo no solo reitera la importancia de estos

principios, sino que ofrece una metodología concreta que permite la toma de decisiones estratégicas basadas en datos robustos. La flexibilidad identificada en la capacidad de producción y en los procesos internos de la empresa es precisamente el factor que marca la pauta para su aplicación inmediata.

Para determinar la capacidad óptima, es crucial considerar varios factores. En primer lugar, es fundamental analizar la demanda histórica y proyectar las necesidades futuras de los clientes, lo que permitirá ajustar la producción a las fluctuaciones del mercado. En segundo lugar, se deben evaluar los recursos disponibles (maquinaria, equipos y mano de obra) así como las limitaciones físicas de las instalaciones, con el objetivo de satisfacer la demanda sin generar sobre costos. Adicionalmente, es imprescindible considerar todos los costos asociados a la producción, incluyendo materias primas, mano de obra directa e indirecta, mantenimiento y desabasto de inventarios. Otro aspecto importante es evaluar la capacidad de la empresa para adaptarse a cambios en la demanda, nuevos productos y/o modificaciones en los procesos. Finalmente, se deben analizar los tiempos de ciclo y los tiempos de entrega con el fin de cumplir con las cantidades establecidas por los clientes y minimizar los plazos de entrega.

A partir de la solución del modelo matemático, se identificaron hallazgos clave que refuerzan la viabilidad y los beneficios de su implementación. En el análisis de la fuerza de trabajo, los resultados sugieren que la política de la empresa de mantener un número elevado de empleados es sostenible a largo plazo, siempre y cuando persistan las condiciones actuales del mercado. Esto se logra al minimizar los ajustes de personal, lo que, a su vez, mitiga los impactos negativos en la producción. Adicionalmente, el estudio del tiempo extra indica que es posible sostener el límite de 40 horas mensuales por operador mediante una optimización de la programación de la producción y una asignación estratégica de dicho tiempo.

Con relación a los inventarios, el modelo muestra que una gestión optimizada de la subcontratación, combinada con un control eficiente del inventario, podría reducir significativamente los costos asociados a entregas tardías o incompletas. Esta mejora en la gestión se traduciría en un aumento del índice de cumplimiento

de entregas, fortaleciendo así la relación con los clientes y la competitividad de la empresa. Finalmente, el análisis de los costos totales resalta que la implementación del modelo propuesto generaría beneficios tangibles para la empresa en estudio, dada la flexibilidad inherente en su capacidad productiva y en sus procesos internos, la cual facilita la adaptación a los cambios sugeridos por el modelo.

Referencias bibliográficas

- Ayuso, M. (2007). *Introducción a la programación lineal*. UNAM.
- Boiteux, O. D., Corominas Subias, A., & Lusa García, A. (2007). Estado del arte sobre planificación agregada de la producción. *Universidad Politécnica de Cataluña*.
- Caicedo-Rolón Jr, A., Criado Alvarado, A. M., & Morales Ramón, K. J. (2019). *Modelo matemático para la planeación de la producción en una industria metalmecánica*. Scientia et technica.
- Castillo, E., Conejo, A. J., Pedregal, P., Garcia, R., & Alguacil, N. (2011). *Building and solving mathematical programming models in engineering and science*. John Wiley & Sons.
- Cheraghalikhani, A., Khoshalhan, F., & Mokhtari, H. (2019). *Aggregate production planning: A literature review and future research directions*. International Journal of Industrial Engineering Computations.
- Chopra, S., & Meindl, P. (2013). *SUPPLY CHAIN MANAGEMENT. Strategy, Planning and Operation*. Pearson Education.
- Dantzig, G. B. (2002). Linear programming. *Operations research*, 42-47.
- E., D.-C. E., C., D.-R., Barroso-Moreno, L. A., & Pico-González, B. (2015). Desarrollo de un modelo matemático para procesos multivariados mediante Balanced Six Sigma. *Ingeniería, investigación y tecnología*, 419-430.
- Escobar, M., & Manuel, H. (2004). *Programación lineal*. Colombia: Universidad Nacional.
- Gómez, B. A., Armas, H. A., Toapanta, H. M., & Sinchiguano, B. E. (2017). Diseño de un modelo matemático aplicado a la planeación de la producción y distribución de productos de consumo masivo. *Revista Publicando*, 348-364.
- Gonzalez, V. H., D., S. V., K., B. V., Oñate Guerrero, K., Murillo Garcia, D., & Zambrano Carrillo, G. (2018). *Modelo de programación lineal aplicado a una*

- empresa Pyme de calzado*. Lima, Perú: Proceedings of the 16th LACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education and Technology.
- Heizer, J., & Render, B. (2014). *Administración de operaciones, enfoque de la cadena de valor*. México: Pearson Educación.
- Kumar, P. (2015). *Industrial Engineering and Management*. India: Pearson Education Services.
- Linfati-Medina, R., Pradenas-Rojas, L., & Ferland, J. (2016). Planificación agregada en la cosecha forestal: Un modelo de programación matemática y solución. *Maderas. Ciencia y tecnología*, 18(4), 555-566.
- Muñoz Guevara, J. A., Zapata Urquijo, C. A., & Medina Varela, P. D. (2022). *Lean Manufacturing : Modelos y herramientas*. Universidad Tecnológica de Pereira.
- Ortiz-Licon, A., Tuoh-Mora, J. C., & Montufar-Benítez, M. A. (2020). Aplicación del Algoritmo de Búsqueda Gravitacional para Optimizar un Problema de Planeación Agregada de la Producción. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 8(15), 1-6.
- Othman, M., Bhuiyan, N., & Gouw, G. J. (2011). *A new approach to workforce planning*. International Journal of Computer and Systems Engineering.
- Quintero, R. S., Espinal, A. C., & Aristizábal, J. A. (2004). *Un enfoque de análisis multiobjetivo para la planeación agregada de producción*. Dyna.
- R., D. S., Chacón, I., & Ponce, M. (2008). *Plan agregado de producción en barracas madereras: Estudio de caso para una pequeña industria*. Maderas. Ciencia y tecnología.
- Ramos, A., Sánchez, P., Ferrer, J. M., Barquín, J., & Linares, P. (2010). *Modelos matemáticos de optimización*. Publicación técnica.
- Salas, H. G. (2022). *Programación lineal aplicada-3da edición*. Ecoe Ediciones.

- Santana-Robles, F., Hernández-Gress, E. S., Martínez-López, R., & González-Hernández, I. J. (06 de Enero de 2024). Quick-Response Model for Pre- and Post-Disaster Evacuation. *Academic Editor: Robert Handfield*, pág. 21.
- Taha, H. A. (2012). *Investigación de operaciones*. México: PEARSON EDUCACIÓN.
- Taylor, B. W. (2016). *Introducción a la gestión de operaciones*. Pearson Educación.
- Yancunta, E. A. (2020). *Análisis del plan maestro de producción en una empresa de rubro electrónico, una revisión sistemática*. Universidad privada del norte.
- Zotelo, Y. R., Mula, J., Díaz-Madroñero, M., & González, E. G. (2017). Ian maestro de producción basado en programación lineal entera para una empresa de productos químicos. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, 24, 147-168.
- Sippner, D., & Bulfin, R. L., Jr. (1998). *Planeación y control de la producción*. McGraw-Hill.
- Heizer, J., Render, B., & Munson, C. (2020). *Operations management: Sustainability and supply chain management*. Pearson Education Limited.

Anexos

Anexo 1. Estrategias de trabajo.

Plan de producción 1: *producción exacta, fuerza de trabajo variable.*

Plan de producción 1: producción exacta, fuerza de trabajo variable						
	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	SUMA
Requerimientos de producción	300	145	255	140	285	
Horas de producción requeridas (requerimiento de producción x 2 h/unidad)	600	290	510	280	570	
Días hábiles por mes	22	20	25	20	23	
Horas al mes por trabajador (días hábiles x 8 h/día)	176	160	200	160	184	
Trabajadores requeridos (horas de producción requeridas / horas al mes por trabajador)	3	2	3	2	3	
Trabajadores contratados (suponiendo que la fuerza de trabajo inicial sea igual al requerimiento de 6 trabajadores del primer mes)	0	0	1	0	1	
Costo de contratación (nuevos trabajadores contratados x costo de contratación)	\$ -	\$ -	\$ 2,310	\$ -	\$ 2,310	\$ 4,620
Despido de trabajadores	3	1	0	1	0	
Costo de despido (trabajadores despedidos x costo de despido)	\$ 7,800	\$ 2,600	\$ -	\$ 2,600	\$ -	\$ 13,000
Costo de tiempo regular (horas de producción requeridas x costo de tiempo regular)	\$ 33,000	\$ 15,950	\$ 28,050	\$ 15,400	\$ 31,350	\$ 123,750
Costo total						\$ 141,370

Plan de producción 2: fuerza de trabajo constante, varían inventario e inventario agotado.

Plan de producción 2: fuerza de trabajo constante, variación en inventario e inventario agotado						
	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	SUMA
Inventario inicial	100	2	24	36	78	
Días hábiles por mes	22	20	25	20	23	
Horas de producción disponibles (días hábiles por mes x 8 h/día x 3 trabajadores)	444	404	505	404	464	
Producción real (horas de producción disponibles/ 2 h/unidad)	222	202	252	202	232	
Inventario final (inventario inicial + producción real - pronóstico de la demanda)	2	24	36	78	51	
Unidades en escasez (producción real + inventario inicial + inventario de seguridad - pronóstico de la demanda) soló si la cantidad es negativa	78	21	24	-38	14	
Costo de escasez (unidades faltantes x 130 pesos)	\$ -	\$ -	\$ -	\$ 4,980	\$ -	\$ 4,980
Unidades en exceso (inventario final - inventario de seguridad) sólo si la cantidad es positiva	-78	-21	-24	38	-14	
Costo de inventarios (unidades en exceso x 228 pesos)	\$ -	\$ -	\$ -	\$ 8,735	\$ -	\$ 8,735
Costo de tiempo regular (horas de producción disponibles x 55 pesos)	\$ 24,431	\$ 22,210	\$ 27,763	\$ 22,210	\$ 25,542	\$ 122,156
Costo total						\$ 135,871

Plan de producción 3: fuerza de trabajo baja, y constante; subcontratación de producción.

Plan de producción 3: fuerza de trabajo baja, y constante; subcontratación de producción						
	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	SUMA
Requerimiento de producción	300	145	255	140	285	
Días hábiles por mes	22	20	25	20	23	
Horas de producción disponibles (días hábiles x 8 h/día x 2 trabajadores)	308	280	350	280	322	
Producción real (horas de producción disponibles / 2 h por unidad)	154	140	175	140	161	
Unidades subcontratadas (requerimientos de producción - producción real)	146	5	80	0	124	
Costo por unidades subcontratadas (Unidades subcontratadas x 300 pesos)	\$ 43,800	\$ 1,500	\$ 24,000	\$ -	\$ 37,200	\$ 106,500
Costo del tiempo regular (horas de producción disponibles x 55 pesos)	\$ 16,940	\$ 15,400	\$ 19,250	\$ 15,400	\$ 17,710	\$ 84,700
Cantidad mínima de trabajadores = (140*2hrs)/(20*8hrs)	2				Costo total	\$ 191,200

Plan de producción 4: fuerza de trabajo constante; tiempo extra.

Plan de producción 4: fuerza de trabajo constante; tiempo extra						
	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	SUMA
Inventario inicial	100	-44	-64	-104	-104	
Días hábiles por mes	22	20	25	20	23	
Horas de producción disponibles (días hábiles x 8 h/día x 2 trabajadores)*	352	320	400	320	368	
Producción de turno regular (horas de producción disponibles / 2 h por unidad)	176	160	200	160	184	
Pronóstico de la demanda	320	180	240	160	260	
Unidades disponibles antes del tiempo extra (inventario inicial + producción de turno regular - pronóstico de la demanda)	-44	-64	-104	-104	-180	
Tiempo extra de las unidades	44	64	104	104	180	
Costo del tiempo extra (tiempo extra de las unidades x 110 pesos por hora extra)	\$ 5,720	\$ 8,320	\$ 13,520	\$ 13,520	\$ 23,400	\$ 64,480
Inventario de seguridad	80	45	60	40	65	
Unidades en exceso (unidades faltantes antes del tiempo extra - inventario de seguridad)	-124	-109	-164	-144	-245	
costo de inventarios (unidades en exceso x 228 pesos)	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
costo del tiempo regular (horas de producción disponibles x 55 pesos)	\$ 19,360	\$ 17,600	\$ 22,000	\$ 17,600	\$ 20,240	\$ 96,800
*Trabajadores determinados mediante pruebas y movimientos	2				Costo total	\$ 161,280.00