



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería.

Área Académica de Matemáticas y Física

Influencia de la deformación en la energía de enlace de
núcleos atómicos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE :

LICENCIADO EN FÍSICA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

P R E S E N T A :

Ezequiel Martínez Reséndiz

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Jorge G. Hirsch Ganievich

Dra. Victoria Elizabeth Cerón Angeles

Mineral de la Reforma Hgo.
Agosto 2025



Mineral de la Reforma, Hgo., a 29 de agosto de 2025

Número de control: ICBI-D/1572/2025

Asunto: Autorización de impresión.

**MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH**

Con Título Quinto, Capítulo II, Capítulo V, Artículo 51 Fracción IX del Estatuto General de nuestra Institución, por este medio, le comunico que el Jurado asignado al egresado de la Licenciatura en Física y Tecnología Avanzada **Ezequiel Martínez Reséndiz**, quien presenta el trabajo de titulación "**Influencia de la deformación en la energía de enlace de núcleos atómicos**", ha decidido, después de revisar fundamento en lo dispuesto en el Título Tercero, Capítulo I, Artículo 18 Fracción IV; dicho trabajo en la reunión de sinodales, **autorizar la impresión del mismo**, una vez realizadas las correcciones acordadas.

A continuación, firman de conformidad los integrantes del Jurado:

Presidente: Dr. Omar Pedraza Ortega

Secretario: Dra. Victoria Elizabeth Cerón Ángeles

Vocal: Dr. Jorge Gustavo Hirsch

Suplente: Dr. Luis Alberto López Suárez

Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

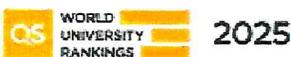
Mtro. Gabriel Vergara Rodríguez
Director del ICBI



GVR/YCC

Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: 771 71 720 00 Ext. 40001
direccion_icbi@uaeh.edu.mx, vergarar@uaeh.edu.mx

"Amor, Orden y Progreso"



uaeh.edu.mx

Índice general

1. Introducción	8
1.1. Fórmula de Bethe-Weizsäcker	10
1.2. Modelo LDM	12
1.3. Modelo de capas	13
2. Modelos	15
2.1. Modelo 1	15
2.2. Modelo 2	16
3. Ajuste	18
3.1. Tabla de masas atómicas	18
3.2. Minimización	20
4. Resultados	24
4.1. Parámetros	24
4.2. Deformación cuadrupolar	29
5. Conclusiones	33
A. Código del modelo M2	35

Índice de figuras

1.1.	Energía de enlace por nucleón (E_L/A) respecto al número de nucleones A. (adaptado de: [1])	9
1.2.	Energía de enlace por nucleón en MeV correspondiente al modelo de gota líquida de Weizsäcker considerando los parámetros reportados en la tabla 1.1	13
3.1.	Tabla que muestra Iminuit al terminar el ajuste, donde presenta si el ajuste es valido, el tiempo de computo, RMS, ademas de los parámetros.	21
3.2.	Valores mínimos de los parámetros de volumen y paridad encontrados al ajustar el modelo (2.2) utilizando los datos del AME2020.	22
3.3.	Error en el ajuste en el parámetro de simetría.	22
4.1.	Energía de enlace por nucleón del modelo M1 experimental (en color negro) y teórica (en color rojo) utilizando los parámetros mostrados en la tabla 4.1.	25
4.2.	Energía de enlace por nucleón del modelo M2 implementando los parámetros reportados en la tabla 4.1 para obtener la energía de enlace teórica (en puntos de color verde).	26
4.3.	Diferencia ente las energías de enlace experimentales y teóricas del modelo M1 (en color rojo) y modelo M2 (en color verde) implementando los parámetros reportados en la tabla 4.1.	27
4.4.	Diferencia de la energía de enlace teórica y experimental del modelo M1 calculada a partir de la información de la tabla 4.1.	28
4.5.	Diferencia de la energía de enlace teórica y experimental del modelo M2 calculada a partir de la información de la tabla 4.1.	29
4.6.	Regiones de deformación cuadrupolar, separadas considerando la tabla 4.2.	30
A.1.	Código de los términos de volumen, superficie y Coulomb.	35
A.2.	Código correspondiente al término de simetría.	35
A.3.	Código del término de paridad.	36
A.4.	Cálculo de N_c , N_{med} , N_{min} y N_{max} para los neutrones.	36
A.5.	Z_c , Z_{med} , Z_{min} y Z_{max} para protones.	37
A.6.	Código de η , $\langle n_v \rangle$ ($v \rightarrow \nu$), $\langle n_p \rangle$ ($p \rightarrow \pi$), $\langle n_v \rangle^2$, $\langle n_p \rangle^2$, además de F y FF.	37
A.7.	Código del modelo M2.	38

Índice de tablas

1.1. Parámetros y RMS para el modelo LDM	12
4.1. Parámetros y RMS (keV) para los modelos M1 y M2	24
4.2. Grupos de deformación cuadrupolar.	30
4.3. Parámetros por grupo para el modelo M1.	31
4.4. Parámetros por grupo para el modelo M2.	31
4.5. Valores del RMS (keV) para los diferentes grupos de núcleos del modelo M2.	32

Agradecimientos

Durante el desarrollo de la investigación que inició con la intención de convertirse en un artículo que eventualmente paso a ser una tesis recibí el apoyo de diversas personas a quienes quiero expresar mi gratitud.

Quiero agradecer a la Dra. Victoria Elizabeth Cerón Angeles y al Dr. Jorge Gustavo Hirsch Ganievich, por su valiosa orientación, paciencia y compromiso durante todo este proceso. Su experiencia y disposición fueron fundamentales para superar los retos que surgieron en el camino.

Quiero agradecer a mis padres y a mi hermano por su amor incondicional, su comprensión y constante motivación. Sin su apoyo, este logro no habría sido posible.

A mis amigos, por su compañía, consejos y por compartir tantas horas de estudio y ocio.

A todos quienes, de una forma u otra, contribuyeron a la realización de este proyecto, mi más profundo agradecimiento.

A los organizadores del XIV Latin American Symposium on Nuclear Physics and Applications por su atención en el evento realizado en 2024, de la misma forma al proyecto PAPIIT-UNAM IN109523 por la financiación parcial para la participación en el LXVII congreso Nacional de Física 2024.

Resumen

El efecto de la deformación y paridad en la energía de enlace de los núcleos atómicos es estudiado usando dos extensiones del modelo de gota líquida. Uno de estos modelos tiene modificaciones en algunos términos, mientras que el segundo agrega una parametrización para la existencia de las capas cerradas. Los núcleos son clasificados en grupos de acuerdo con su deformación cuadrupolar y la paridad del número de protones y neutrones. La calidad de los ajustes para la energía de enlace para cada modelo y cada grupo de núcleos es estimada calculando la raíz del error cuadrático medio (RMS) entre los valores medidos y calculados. Se observa que, en ambos modelos, las predicciones son más precisas para los núcleos con gran deformación, y la mayor dispersión en los datos ocurre en los núcleos mágicos o semi mágicos.

Abstract

The effect of deformation and parity on the binding energies of atomic nuclei is studied using two extensions of the liquid drop model. One of these models refines some of the terms, while the second adds a parametrization for the existence of closed shells. The nuclides are classified into groups according to their quadrupole deformation and the parity of the number of protons and neutrons. The quality of the fit for the binding energies for each model and each group of nuclei is estimated by calculating the root mean square (RMS) deviation between the measured and calculated values. It is observed that in both models, the predictions are much more accurate for nuclei with higher deformation, and the greatest dispersion in the data occurs in magic or semi-magic nuclei.

Capítulo 1

Introducción

El estudio de las masas nucleares es un tema fundamental en los cursos de física nuclear básica. Esto ayuda a entender cómo la energía se genera en los procesos de fisión y fusión nuclear, además juega un rol vital en la descripción de la nucleosíntesis estelar [2, 3, 4]. A continuación, se presenta una extensión de estos conceptos, incluyendo el papel de la deformación nuclear. Los resultados incluidos aquí amplían la descripción de las masas nucleares, empleando la más reciente compilación de información experimental [5] para proporcionar un análisis novedoso en dos modelos modernos.

La energía de enlace se refiere a la cantidad de energía que se necesita para poder separar nucleones (protones y neutrones) de un núcleo atómico, también podemos interpretar esta energía como la fuerza de cohesión que mantiene unidos a los nucleones dentro del núcleo [3].

Cuando los nucleones se unen para formar un núcleo, se libera energía, esta energía liberada es la energía de enlace que proviene de la fuerza fuerte que es la interacción encargada de mantener unidos los nucleones dentro del átomo [3].

De la energía de enlace podemos interpretar que la suma de las masas de las partículas que conforman un átomo debe ser mayor a la masa del átomo, ya que al unir estas partículas como se mencionó anteriormente se libera energía.

En la fórmula (1.1) la energía de enlace (BE) es la suma de la masa de los protones (m_p) y neutrones (m_n) multiplicada por la velocidad de la luz al cuadrado menos la masa

nuclear (M_N) por la velocidad de la luz al cuadrado

$$BE = (Zm_p + Nm_n)c^2 - M_Nc^2 \quad (1.1)$$

Es más común escribir la BE en términos de masas atómicas.

$$BE = (ZM_H + Nm_n) - M_a \quad (1.2)$$

donde M_H es la masa del átomo de Hidrógeno y M_a es la masa atómica.

Experimentalmente se encuentra que al ir aumentando el número de nucleones la energía de enlace también aumenta, esto sucede hasta alcanzar un punto máximo, después de eso la energía de enlace empieza a descender. Como puede observarse en la figura 1.1.

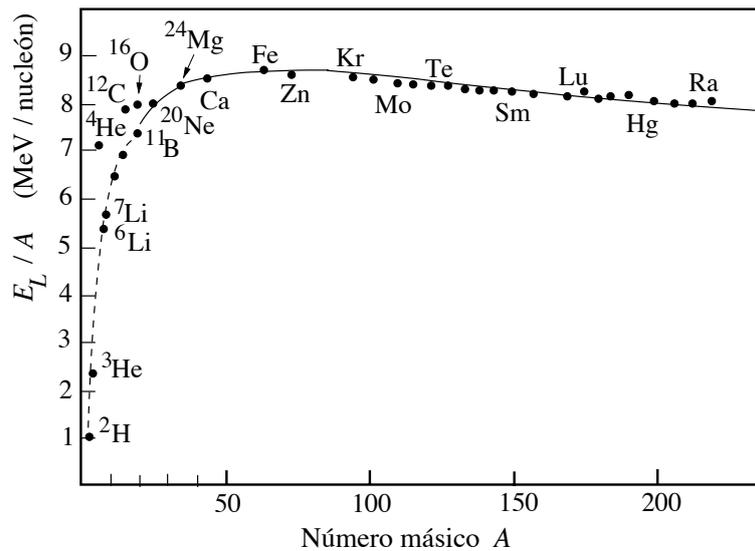


Figura 1.1: Energía de enlace por nucleón (E_L/A) respecto al número de nucleones A. (adaptado de: [1])

Este punto máximo está en los isótopos de hierro con $A = 56$ donde su energía de enlace es de 8.79 MeV, esto nos indica que alrededor de esta región encontraremos los núcleos más estables solo si consideramos a la energía de enlace como medida de estabilidad. Con ayuda de la energía de enlace podemos hablar sobre la fisión y fusión nuclear, la fisión nuclear es un proceso en el que un núcleo pesado es fragmentado y libera energía al igual que en la fusión a excepción que en este proceso se unen núcleos ligeros para formar uno

más pesado [3]

1.1. Fórmula de Bethe-Weizsäker

La fórmula de Bethe-Weizsäker es usada para aproximar las masas de los núcleos atómicos donde se utilizó el número de protones y neutrones. Esta fórmula representa el modelo de gota líquida propuesta por George Gamow [6], quien trató a los núcleos como una gota de un fluido incompresible con una densidad muy grande, unida por la fuerza nuclear fuerte.

El término de “modelo de gota” se refiere a un modelo teórico utilizado para explicar el comportamiento al igual que las propiedades de los núcleos atómicos. En 1935 C. V. Weizsäker propuso una fórmula semiempírica para obtener la energía de enlace por nucleón, la cual consta de cinco términos [7]

$$BE = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - s_v \frac{(A - 2Z)^2}{A} \pm a_p \frac{\delta}{A^{1/2}} \quad (MeV) \quad (1.3)$$

en la cual $a_v=15.8$, $a_s = 17.8$, $a_c = 0.71$, $s_v = 23.7$ y $a_p = 34$ para δ consideramos $\delta = 1$ si A es par y 0 en caso contrario, además esta cantidad será positiva si N y Z son pares por otro lado si N y Z son impares delta es negativa.

Términos del modelo de la gota

Se considera la forma del núcleo atómico como una gota esférica de densidad alta y constante, pues es la forma más eficiente en términos de energía además de tener la menor superficie en relación con su volumen. Se hace una aproximación con el radio del núcleo, donde se plantea que $R = r_0 A^{1/3}$, el radio del núcleo es proporcional al número de nucleones elevado a un tercio y $r_0 \approx 1,2-1,3$ fm. También hay que considerar que el núcleo debe tener carga positiva, ya que está compuesta por protones y neutrones. Dónde la fuerza fuerte es la encargada de mantener unidos a los nucleones [3].

En la fórmula semiempírica de C. V. Weizsäker se consideran diversos factores, en el primer término encontramos el “**efecto volumétrico**” donde el volumen del núcleo está

linealmente relacionado con el número de nucleones, el volumen de una esfera esta dada como $\frac{4}{3}\pi R^3$ donde el radio es $R = r_0 A^{1/3}$, sustituyendo y definiendo $a_v = \frac{4}{3}\pi r_0^3$ tenemos a “ $a_v A$ ”, entonces la energía de enlace permanece constante para todos los nucleones, $BE = 15.8$ MeV. Además, en el término volumétrico consideramos que los nucleones están completamente rodeados de otros nucleones, lo cual no se cumple para los nucleones sobre la superficie, así que se agrega una corrección.

Se introduce un término asociado a la “**energía superficial**” que realiza una corrección al “efecto volumétrico”. Para calcular el número de nucleones en la superficie debemos obtener primero el área de la superficie ya que estas dos cantidades están directamente relacionadas. Se considera el área de la superficie de la esfera, en este caso del núcleo que se calcula como $4\pi R^2$, sustituimos R que depende del número de nucleones, $4\pi r_0^2 A^{2/3}$. Reescribimos el término como “ $a_s A^{2/3}$ ”.

La repulsión electrostática entre los protones también es considerada en este modelo y tiende a disminuir la energía de enlace. El término de “**repulsión electrostática de Coulomb**” es la responsable de la tendencia de los núcleos a desintegrarse en presencia de un número excesivo de protones. Por lo tanto, está relacionado con la cantidad de posibles combinaciones entre los protones [8]. Para un núcleo de Z protones con carga e y radio R podemos calcular la energía de repulsión E . Para ello calculamos $E = \frac{1}{2} \int \phi(R) dq$, donde $\phi(r) = \frac{Ze}{R} (\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2})$ [9] que es la distribución del potencial en el interior de la esfera cargada ($r \leq R$) y $dq = 3Ze \frac{r^2}{R^2}$, sustituyendo en E llegamos a

$$E = \frac{1}{2} \frac{3Ze}{4\pi R^3} \int_0^R \int_0^{4\pi} \frac{Ze}{R} (\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}) r^2 d\Omega dr = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R} \quad (1.4)$$

Recordando que $R = r_0 A^{1/3}$ y $r_0 = 1,2-1,3$ fm se puede obtener una aproximación del parámetro de Coulomb a_c .

$$E = [0,67-0,72] \frac{Z^2}{A^{1/3}} MeV \quad (1.5)$$

Este término debido a la repulsión de Coulomb, donde $a_c \approx 0,7$ es un valor que se busca obtener cuando se ajustan los parámetros usando Iminuit. Sí el núcleo tiene una cantidad distinta de protones y neutrones aumentará la inestabilidad, pero si estas cantidades son

las mismas su estabilidad se maximizará, este efecto es más importante para los núcleos ligeros y menos significativo en los núcleos pesados. El término de ”**simetría**” se puede expresar como: $\frac{(A-2Z)^2}{A}$, Cuando N y Z sean iguales el efecto de la simetría no afectará a la energía de enlace ya que se anulará.

El último término de (1.3) es el **término de “apareamiento”** que es únicamente correctivo y puede aumentar, disminuir o mantener la energía de enlace dependiendo de la paridad del núcleo, si los protones y neutrones en el núcleo son pares entonces aumentará la energía de enlace y disminuirá cuando N y Z son impares, cuando A es impar este término se anula [8].

1.2. Modelo LDM

Se usará como el modelo LDM (modelo de gota líquida) cuya fórmula esta dada en (1.3) y sus parámetros fueron publicados en [10] usando los datos de AME2020.

Tabla 1.1: Parámetros y RMS para el modelo LDM

Modelo	a_v	a_s	a_c	a_p	S_v	RMS (keV)
LDM	15.54	16.96	0.704	12.5	23.04	3073

En la tabla 1.1 se reportan los cinco parámetros que optimizan el modelo (1.3) conseguidos mediante un ajuste usando Iminuit, además del RMS de 3073 keV. Al utilizar datos del AME2020 se encuentran parámetros distintos a los propuestos por Weizsäcker. También se presenta la figura 1.2 que se obtiene de la BE del LDM, donde se observa la similitud con la gráfica 1.1.

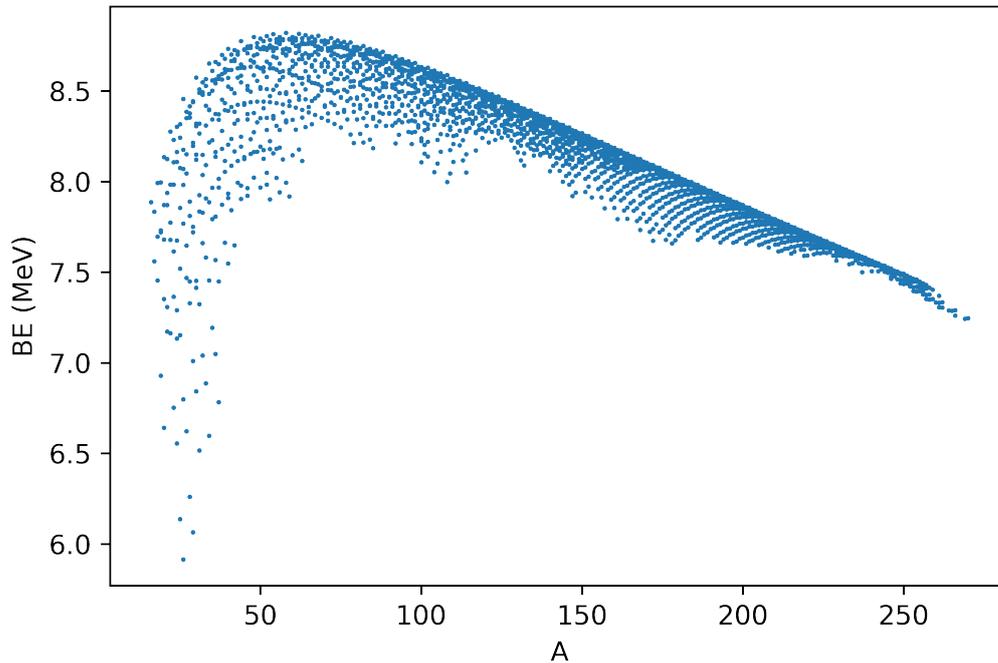


Figura 1.2: Energía de enlace por nucleón en MeV correspondiente al modelo de gota líquida de Weizsäcker considerando los parámetros reportados en la tabla 1.1

1.3. Modelo de capas

El modelo de capas considera que los neutrones y protones en el núcleo atómico se acomodan por niveles o capas, una capa cerrada sucede cuando $N, Z = 2, 8, 28, 50, 82$ y 126 , estas cantidades son conocidas como números mágicos. Los núcleos con capas cerradas tienen una mayor estabilidad en comparación a los demás núcleos.[3]

Un núcleo con capa cerrada tiende a tener una forma esférica y un núcleo al ser esférico carece de momento cuadrupolar, pues el espín nuclear está dado por la suma del momento angular intrínseco de los protones, el momento angular intrínseco de los neutrones y el momento orbital de los nucleones. Cuando en el núcleo la cantidad de neutrones y protones son pares el espín nuclear es de cero. Si el momento cuadrupolar es positivo el núcleo tendrá una forma oblata, por otro lado, cuando sea negativo el núcleo será de forma prolato.[8]

El modelo de capas permite describir las propiedades nucleares a partir de la inter-

acción entre un protón o electrón y un potencial. Se ha encontrado que resolviendo la ecuación de Schrödinger con el potencial de Saxon-Woods se consiguen replicar los números mágicos ($Z, N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$)[1]

En este trabajo, en el capítulo 2 se presenta una descripción de dos modelos basados en LDM (modelo de gota líquida) que se muestra en la fórmula (1.3), el primero introduce modificaciones en la simetría y el término de Coulomb, mientras que el segundo añade dos términos asociados con los efectos de capa nuclear. En el capítulo 3 se describe el programa utilizado para obtener los parámetros del modelo, así como la base de datos empleada. El capítulo 4 presenta los resultados para las energías de enlace y un análisis regional utilizando el parámetro de deformación cuadrupolar, junto con un estudio basado en la paridad en Z y N . El capítulo final proporciona las conclusiones extraídas de los análisis realizados en este trabajo.

Capítulo 2

Modelos

Se han estudiado en la literatura diversas modificaciones a la fórmula de Bethe-Weizsäcker, desde ajustes a los parámetros utilizando las medidas experimentales actuales las cuales como sabemos se actualizan aproximadamente cada cinco años, así como los que realizan diversas modificaciones a los términos ya conocidos para un mejor ajuste a los valores reportados. Aquí analizaremos dos modelos particularmente sencillos, el primero que incluye modificaciones al parámetro de Coulomb y de simetría y el segundo, el cual agrega términos que incluyen efectos de capas.

2.1. Modelo 1

Este modelo considera los cinco términos usuales del modelo de gota líquida: los términos de volumen y superficie se mantienen sin cambios. Por otro lado, los términos de Coulomb y simetría son modificados, considerando los efectos del isospín [11].

$$\mathbf{M1} = a_v A - a_s A^{2/3} - a_{sym} I^2 A - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} (1 - Z^{-2/3}) + a_p \frac{\delta_{np}}{A^{1/3}} \quad (2.1)$$

Donde a_v , a_s , a_c , a_p , c_{sym} , y k son parámetros del modelo, δ_{np} depende de la paridad de los neutrones y protones en el núcleo, se define como:

$$\delta_{np} = \begin{cases} 2 - |I| : & N \text{ y } Z \text{ par,} \\ |I| : & N \text{ y } Z \text{ impar,} \\ 1 - |I| : & N \text{ par, } Z \text{ impar, y } N > Z, \\ & N \text{ impar, } Z \text{ par, y } N < Z, \\ 1 : & N \text{ par, } Z \text{ impar, y } N < Z, \\ & N \text{ impar, } Z \text{ par, y } N > Z. \end{cases}$$

I se define como $I = (N - Z)/A$, mientras que el término de simetría esta dado por $a_{sym} = c_{sym} \left[1 - \frac{k}{A^{1/3}} + \frac{2-|I|}{2+|I|A} \right]$. En este modelo es importante si el número de nucleones es par o impar, es decir si Z y N son pares se obtiene el valor de 2 para δ_{np} en casos contrarios su valor va disminuyendo y puede llegar hasta 0.

2.2. Modelo 2

El segundo modelo utilizado también es una versión modificada del modelo de gota líquida. Las modificaciones se encuentran en el término de simetría y en dos términos extra donde se consideran los números de valencia del neutrón n_ν y del protón n_π . Estos términos incluyen los efectos del modelo de capas. También se puede notar como los términos correspondientes para el volumen, superficie y coulomb no presentan modificaciones. [12]

$$\mathbf{M2} = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_p \frac{\delta(N,Z)}{A^{1/2}} - \frac{S_v}{1+y_s A^{-1/3}} \frac{4T(T+r)}{A} - a_f F + a_{ff} FF. \quad (2.2)$$

Los términos F y FF se escriben como:

$$F = \left(\frac{n_\nu + n_\pi}{2} \right) - \left\langle \frac{n_\nu + n_\pi}{2} \right\rangle; \quad FF = \left(\frac{n_\nu + n_\pi}{2} \right)^2 - \left\langle \left(\frac{n_\nu + n_\pi}{2} \right)^2 \right\rangle.$$

Para calcular n_ν y n_π se deben considerar

$$n_\nu = N - N_c \text{ cuando } N \leq N_{med}$$

$$n_\pi = N_{c+1} - N \text{ cuando } N > N_{med}$$

Donde N_c corresponde a los números mágicos $N_c = 8, 14, 28, 50, 82, 126, 184, 258$; c indica la posición en la lista, $c = 1, 2, 3, \dots$, de igual forma se utilizan los núcleos con capas semi-cerradas $N_{med} = 11, 21, 39, 66, 104, 155, 221$. Para elegir N_c se selecciona el número mágico inferior más cercano a N , de la misma forma se aplica a los protones. Al calcular N_{med} se utiliza el número que se encuentre entre N y N_c .

También se requiere calcular una semi degeneración, correspondiente al número de protones, se calcula con la siguiente relación:

$$\eta_c = \frac{N_{c+1} - N_c}{2}$$

Con la semi degeneración se calculan los números de valencia nucleares para el neutrón y protón. Con esta información se consigue calcular el término de F.

$$\langle n_\nu \rangle = \langle n_\pi \rangle = \frac{\eta_c}{2}$$

Para FF se determina primero a $\langle n^2 \rangle$, que se obtiene con la semi degeneración

$$\langle n_\nu^2 \rangle = \frac{2\eta_c^2 + 1}{6}$$

$$\langle n_\pi^2 \rangle = \frac{2\eta_c^2 + 1}{6}$$

Obtenidos los números de valencia al cuadrado finalmente se puede calcular FF

$$\langle \left(\frac{n_\nu + n_\pi}{2} \right)^2 \rangle = \frac{\langle n_\nu^2 \rangle + \langle n_\pi^2 \rangle + 2\langle n_\nu \rangle \langle n_\pi \rangle}{4}$$

En (2.2) T está dado por $T = |N - Z|/2$, por otro lado, δ es igual a 0 cuando A es impar, 1 cuando N y Z son pares y -1 si N y Z son impares.

En comparación con el modelo anterior se agregan los parámetros r , a_f , a_{ff} , y_s y S_v , además no se consideran la k ni el c_{sym}

Capítulo 3

Ajuste

3.1. Tabla de masas atómicas

El pionero en la espectrometría de masas fue Francis Aston, un estudiante de J. J. Thomson, quien en 1919 descubrió y midió la masa de los isótopos de hidrógeno, logrando observar la energía de enlace nuclear. Más tarde, Arthur Eddington presentó la equivalencia entre masa y energía, así como su importancia en astrofísica para explicar la gran cantidad de energía producida por las estrellas. En las décadas siguientes el campo de la medición de masas creció significativamente junto a los estudios de reacciones y decaimiento nuclear. Como resultado, surgió la necesidad de una lista con los datos de los núcleos medidos, por lo que empezaron a publicarse compilaciones con información de la espectrometría de masas, reacciones nucleares y decaimiento. Estas tablas comenzaron a publicarse en 1973 por Milton Stanley y Hans Albrecht Bethe [13].

A inicios de 1950, Aaldert H. Wapstra descubrió que numerosas relaciones predeterminaban los valores de masa de muchos nucleidos, de esta manera fue el primero en realizar un análisis crítico de la evaluación de datos relacionada con las masas atómicas. Además, estableció el procedimiento del método de mínimos cuadrados, que comenzó a aplicarse en las tablas desde 1955. Wapstra continuó con la evaluación de las masas nucleares experimentales (específicamente de las masas atómicas) que ahora conocemos como Evaluación de Masas Atómicas (AME). Wapstra y sus colaboradores continuaron

la actualización de procesos por otros 25 años [14, 15].

El conjunto de estas tablas con propiedades de los estados fundamentales de los núcleos conocidos se encuentran en NUBASE [16, 17]. Con el paso de los años las mediciones de las propiedades de los núcleos han mejorado gracias a la construcción de nuevos espectrómetros, que han aumentado el poder de resolución y han contribuido tanto a la explicación como al descubrimiento de nueva física. Algunas de estas contribuciones incluyen: la naturaleza de los rayos cósmicos, la estimación de la edad del sol, el descubrimiento del defecto de masa, la verificación experimental de la equivalencia de masa-energía y el descubrimiento de los números mágicos, entre otros.

Los datos usados en este trabajo fueron obtenidos de las tablas publicadas en el AME2020 [5], donde se reporta información experimental de 3558 núcleos. De esta lista, los núcleos con N y $Z < 8$ fueron excluidos, este es un corte aplicado por varios autores con el objetivo de eliminar la dispersión de los núcleos ligeros, así trabajamos en una base de datos de 2457 núcleos. En el AME2020 la energía de enlace es reportada por nucleón en keV, junto al exceso de masa e información sobre la energía de desintegración beta, entre otros. Tradicionalmente, la masa de los núcleos se mide para átomos neutros, por lo tanto, los valores reportados corresponden a la masa de un átomo y no como la masa del núcleo. La energía de enlace BE_{exp} puede ser calculada usando la masa atómica como

$$BE_{exp}(N, Z) = BE_{exp}^{AME}(N, Z) + Z B_{el}(1)m_e - B_{el}(Z) \quad (3.1)$$

Donde m_e es la masa del electrón y B_{el} corresponde a la energía de enlace del electrón, que se puede calcular como:[18]

$$B_{el}(Z) = 14,33 Z^{2,39} eV.$$

El tratamiento para las energías de enlace obtenidas se realiza mediante un ajuste de mínimos cuadrados. Con este método, pueden probarse varios modelos teóricos mediante un ajuste a los datos experimentales, posteriormente se determinó cuál modelo ofrece una mejor predicción de las masas nucleares.

Para hacer este ajuste, se utilizó la paquetería de Iminuit [19], que es una adaptación

a Python de Minuit. Esta paquetería permite ajustar modelos multiparámetros, identificando los casos donde el valor del RMS es mínimo, y así obtener la predicción más eficiente del modelo. El ajuste toma en cuenta la energía de enlace teórica y experimental, y la divide entre el número de núcleos usados.

$$RMS = \left\{ \frac{1}{N_{nucl}} \sum [BE_{exp}(N, Z) - BE_{teo}(N, Z)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

Como análisis inicial, el ajuste se aplica a los 2457 núcleos. Después, los núcleos son separados dependiendo de su deformación cuadrupolar (Q_z), que está asociada a la forma del núcleo. Se considera que si $Q_z = 0$, el núcleo es esférico; para valores $Q_z > 0$ tiene forma prolato, y para $Q_z < 0$ es oblato. En base a esto, se clasificó a los núcleos en 7 grupos dependiendo de su nivel de deformación cuadrupolar [20]. En el último análisis, la paridad del núcleo es tomada en cuenta, separándolos en valores pares e impares de N y Z, clasificando los núcleos en 4 grupos: par-par, impar-impar, par-impar e impar-par.

3.2. Minimización

Para ajustar los parámetros de los modelos M1 y M2 se utilizaron las paqueterías numpy, pandas e Iminuit en Python. Con pandas cargamos la base de datos que están almacenados en un archivo de tipo csv. La base de datos contiene la energía de enlace experimental en MeV y keV, además de la cantidad de neutrones (N), protones (Z) y nucleones (A) para cada uno de los 2457 núcleos.

```
import numpy as np
import pandas as pd
from iminuit import Minuit

MD = pd.read_csv('BE_NUCLEAR_2021.csv', usecols=['N', 'Z', 'A', 'EL',
        'BE_EXP', 'BE_INT', 'BE_nuc', 'BE_nuc_kev'])
```

Se utiliza la clase LeastSquare de Iminuit, en la cual se le pasan las variables, en este caso A, N y Z, además de las energías de enlace experimentales. En esta misma clase

asignamos el tipo de ajuste que se va a aplicar, para analizar la capacidad predictiva de los modelos M1 y M2 se le aplicara un ajuste de RMS

```
return = np.sqrt( (np.sum((self.y - ym)**2))/Nu)
```

donde np es la librería de numpy que nos ayuda a realizar operaciones matemáticas, la función sqrt regresa la raíz cuadrada, mientras que sum realiza la suma, self.y llama los valores de la energía de enlace experimental, mientras que ym son las variables N, Z y A, finalmente Nu es la cantidad de nucleones que serán ajustados.

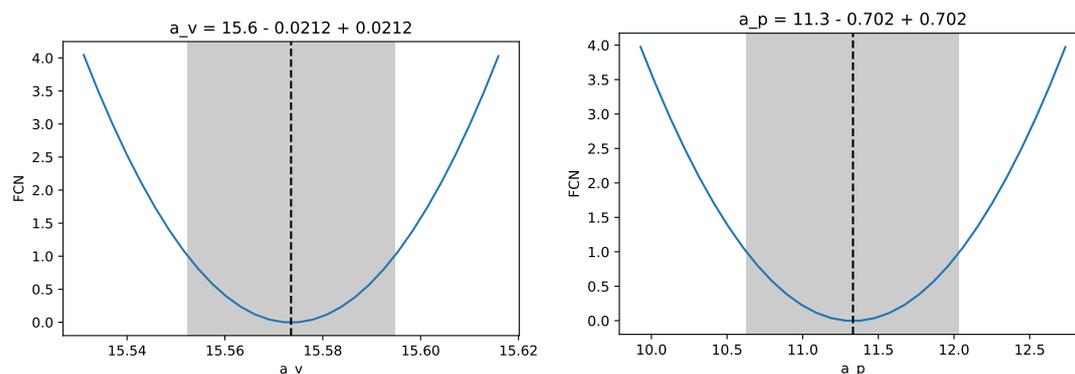
Se debe programar el modelo para posteriormente aplicarlo a la clase EvenBetterLeastSquares de Iminuit (los detalles del código del modelo M2 se encuentran en el apéndice A), donde nos permite asignar valores iniciales a los parámetros correspondientes de los modelos, así como los límites.

Para el modelo M2 se consideraron los valores iniciales de $a_v = 15$, $a_s = 17.3$, $s_v = 37$, $y = 0$, $a_c = 0$, $a_p = 11$, $r = 1$, $a_f = 2$, $a_{ff} = 0.04$ con los límites (0, 170), (0, 180), (0,45), (0,6), (0,1), (-15,13), (0,3), (0,2), (0,0.1), teniendo estas condiciones iniciales logramos tener un buen ajuste de los parámetros que Iminuit nos reporta en la siguiente tabla, donde podemos notar que el valor mínimo es considerado válido por el minimizador Migrad.

Migrad										
FCN = 1264 ($\chi^2/\text{ndof} = 0.5$)					Nfcn = 1075					
EDM = 2.31e-05 (Goal: 0.0002)					time = 3.8 sec					
Valid Minimum					Below EDM threshold (goal x 10)					
No parameters at limit					Below call limit					
Hesse ok					Covariance accurate					
Name	Value	Hesse	Error	Minos	Error-	Minos	Error+	Limit-	Limit+	Fixed
0 a_v	15.574	0.021						0	170	
1 a_s	17.48	0.07						0	180	
2 s_v	37.1	0.9						0	45	
3 y	3.93	0.26						0	6	
4 a_c	0.6972	0.0015						0	1	
5 a_p	11.3	0.7						-15	13	
6 r	1.43	0.09						0	3	
7 a_f	1.48	0.04						0	2	
8 a_ff	0.0534	0.0018						0	0.1	

Figura 3.1: Tabla que muestra Iminuit al terminar el ajuste, donde presenta si el ajuste es valido, el tiempo de computo, RMS, ademas de los parámetros.

En la tabla 3.1 podemos observar que FCN es el RMS correspondiente al modelo, en la columna “name” se encuentran los parámetros y en la columna “value” nos presentan los valores que minimizan el RMS. Iminuit nos permite observar el perfil de cada parámetro que podemos revisar para garantizar que el parámetro ajustado realmente se encuentre en un mínimo



(a) Perfil del parámetro a_v correspondiente al modelo 2.2 con mínimo en 15.6 (b) Perfil del parámetro a_p con mínimo en 11.3

Figura 3.2: Valores mínimos de los parámetros de volumen y paridad encontrados al ajustar el modelo (2.2) utilizando los datos del AME2020.

Se muestra el perfil de los parámetros a_v y a_p correspondientes al término volumétrico y de paridad, donde podemos observar que los valores asignados en efecto se encuentran en un mínimo, además de una zona sombreada de color gris que representa el margen de error del ajuste.

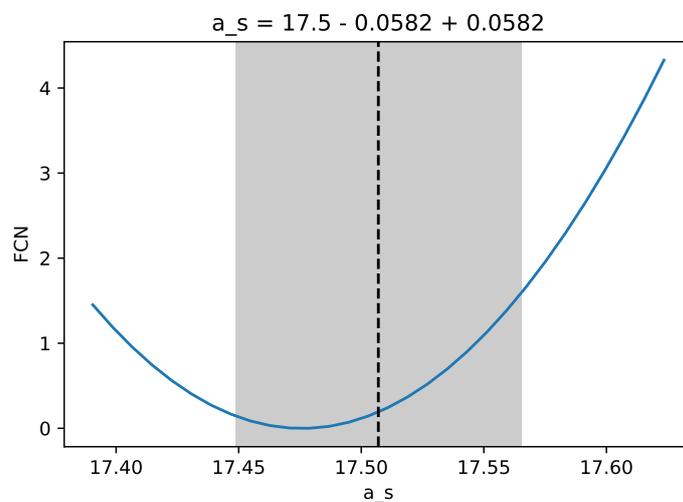


Figura 3.3: Error en el ajuste en el parámetro de simetría.

Si el parámetro se encuentra próximo al mínimo se verá como en la figura 3.3 , también podría verse una pendiente en lugar de una parábola, lo que indicaría que el ajuste no es adecuado y se encuentra lejos del mínimo. En ambos casos se deberá de modificar los valores iniciales de los parámetros o los límites si fuera necesario.

Capítulo 4

Resultados

El ajuste de los diferentes parámetros para los modelos M1 y M2 son presentados, haciendo uso de la rutina Iminuit para minimizar el RMS de las energías de enlace. Seis parámetros son ajustados para el modelo M1 y nueve para el modelo M2, como se muestra en las ecuaciones (2.1) y (2.2).

4.1. Parámetros

Se reportan los parámetros obtenidos de los modelos M1 y M2 en la tabla 4.1, donde se incluye también el RMS. Se observa una gran diferencia entre los parámetros de simetría (a_s) y paridad (a_c), con una diferencia de 1.376 y 4.433 respectivamente, en contraste los términos de volumen (a_v) y Coulomb (a_c) son parecidos, con el resto de parámetros no es posible hacer una comparación ya que son diferentes para cada modelo. En el modelo M1 se obtiene un RMS de 2422 keV y para el modelo M2 se consigue un mejor ajuste con un RMS de 1264 keV. Haciendo uso de los parámetros obtenidos, la energía de enlace teórica y experimental de ambos modelos se grafican.

Tabla 4.1: Parámetros y RMS (keV) para los modelos M1 y M2

Modelo	a_v	a_s	a_c	a_p	S_v	y	c_{sym}	K	r	a_f	a_{ff}	RMS
M1	15.691	18.851	0.718	6.899	30.08	1.581	-	-	-	-	-	2422
M2	15.573	17.475	0.697	11.332	-	-	37.078	3.932	1.430	1.482	0.053	1264

En la figura 4.1 se presenta una comparación entre los valores experimentales de la

energía de enlace nuclear (indicados en puntos negros) y los valores obtenidos a partir del modelo teórico M1 (en puntos rojos). Ambos conjuntos de datos están representados mediante una gráfica de dispersión, en el eje horizontal se encuentra el número de nucleones A , mientras que el eje vertical representa la energía de enlace (en unidades de MeV).

Se observa que el modelo M1 reproduce de forma satisfactoria la tendencia global de la energía nuclear. La curva general muestra un incremento en la energía de enlace total con un número de masa de 57 donde se encuentra un máximo, seguido por una caída progresiva para núcleos más pesados, lo cual concuerda con el comportamiento esperado de la energía de enlace.

En la región intermedia (que corresponde a núcleos de masa media), el modelo M1 muestra un ajuste especialmente bueno respecto a los datos experimentales. Sin embargo, se pueden apreciar pequeñas desviaciones locales, en particular en las regiones de núcleos más ligeros. Además de no poder reproducir los picos que se forman en la parte superior de la gráfica.

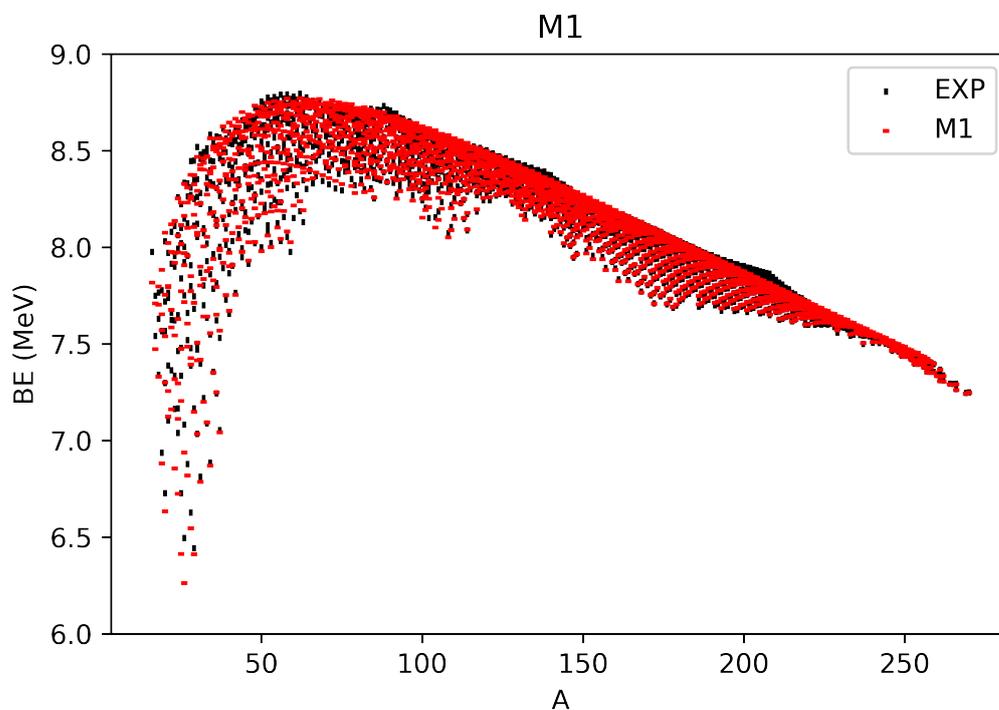


Figura 4.1: Energía de enlace por nucleón del modelo M1 experimental (en color negro) y teórica (en color rojo) utilizando los parámetros mostrados en la tabla 4.1.

En la figura 4.2 tenemos nuevamente una comparación entre la energía de enlace experimental (que se muestra en puntos de color negro) y teórica correspondiente al modelo M2 (mostradas en puntos de color verde) donde se ha considerado el efecto del modelo de capas. En el eje x tenemos la cantidad de nucleones (A) de forma ascendente, por otro lado, en el eje y se muestra la energía de enlace (BE) por nucleón en unidades de MeV.

Al graficar la energía de enlace por nucleón se consigue obtener la curva característica correspondiente. Al tener una gráfica de dispersión se observa una discrepancia entre los datos en la zona de núcleos mas ligeros, mientras que para la zona media y para núcleos pesados se consigue un ajuste muy bueno, ademas de replicar las curvas de la parte superior de la gráfica a pesar de no conseguirlo por completo.

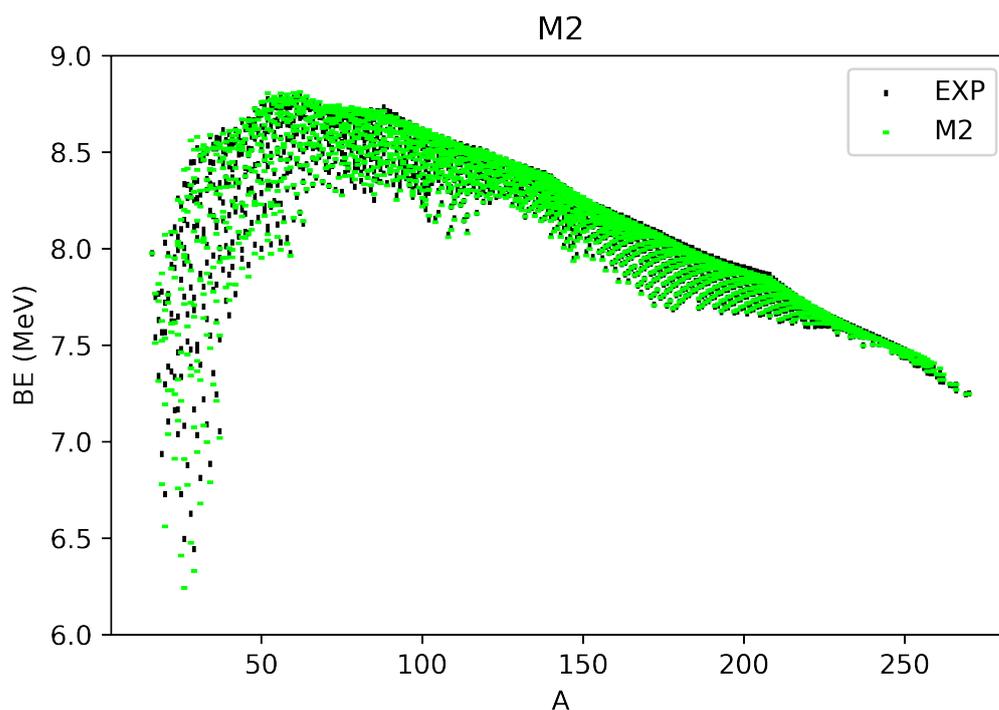


Figura 4.2: Energía de enlace por nucleón del modelo M2 implementando los parámetros reportados en la tabla 4.1 para obtener la energía de enlace teórica (en puntos de color verde).

En el siguiente análisis se gráfica la diferencia entre la energía de enlace experimental y la teórica correspondiente del modelo M1 (en puntos de color rojo) y el modelo M2 (en puntos de color verde). Si la predicción de las masas nucleares por parte de los modelos

fuera perfecta encontraríamos todos los puntos en el plano de energía de enlace igual a cero.

Se presenta una gráfica de dispersión tridimensional en la figura 4.3, se gráfica la diferencia de energía de enlace (BE) en MeV a lo largo del eje z, además del número de neutrones (N) en el eje x, mientras que el eje y muestra el número de protones (Z). Adicionalmente se marca el plano correspondiente a BE igual a cero con color gris claro a modo de referencia.

Al presentar la información de los modelos M1 y M2 de esta manera se puede visualizar una serie de picos de diferentes tamaños, los cuales son más pronunciados para el modelo M1 en la zona media mientras que para el modelo M2 los picos se ubican en los mismos lugares con la diferencia de ser menos amplios. Para los núcleos más ligeros no se consigue un patrón claro, sino mucha dispersión para ambos modelos, en contraste, con los núcleos pesados se observa un comportamiento oscilante sobre la energía de enlace igual a cero.

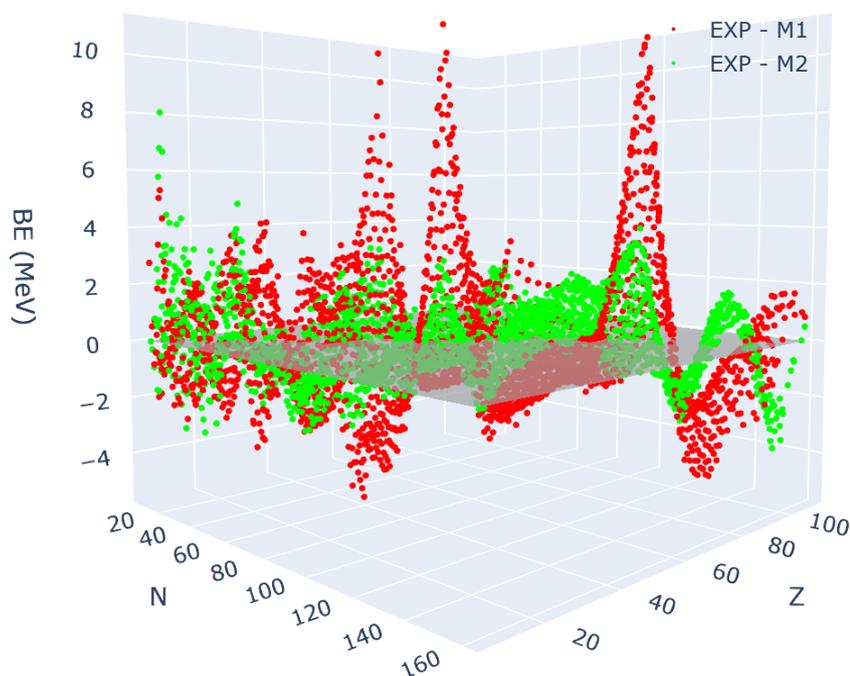


Figura 4.3: Diferencia ente las energías de enlace experimentales y teóricas del modelo M1 (en color rojo) y modelo M2 (en color verde) implementando los parámetros reportados en la tabla 4.1.

Continuando con el análisis anterior tenemos la diferencia de las energías de enlace experimentales y teóricas en el eje vertical, para el modelo M1 (con puntos de color rojo) en la figura 4.4 y para el modelo M2 (con puntos de color verde) en la figura 4.5, mientras que el eje horizontal tenemos la cantidad de protones (Z) en la gráfica superior y neutrones (N) para la gráfica inferior. Se marca con una línea negra donde la resta de las energías es igual a cero. Asimismo, se utilizan líneas de color negro para marcar los puntos con la diferencia máxima de las energías, estos puntos coinciden con N y Z igual a 2, 8, 28, 50, 82 y 126.

En ambas figuras se observa que los puntos rojos y verdes se concentran alrededor de la línea negra aunque se tiene una mayor concentración en la figura 4.5, pues en la figura 4.4 se presenta una mayor dispersión. Comparando las figuras notamos que la escala de las energías de enlace de la figura 4.4 es el doble de la figura 4.5, además en las cuatro gráficas se consigue un mejor ajuste de los datos entre las regiones de números mágicos.

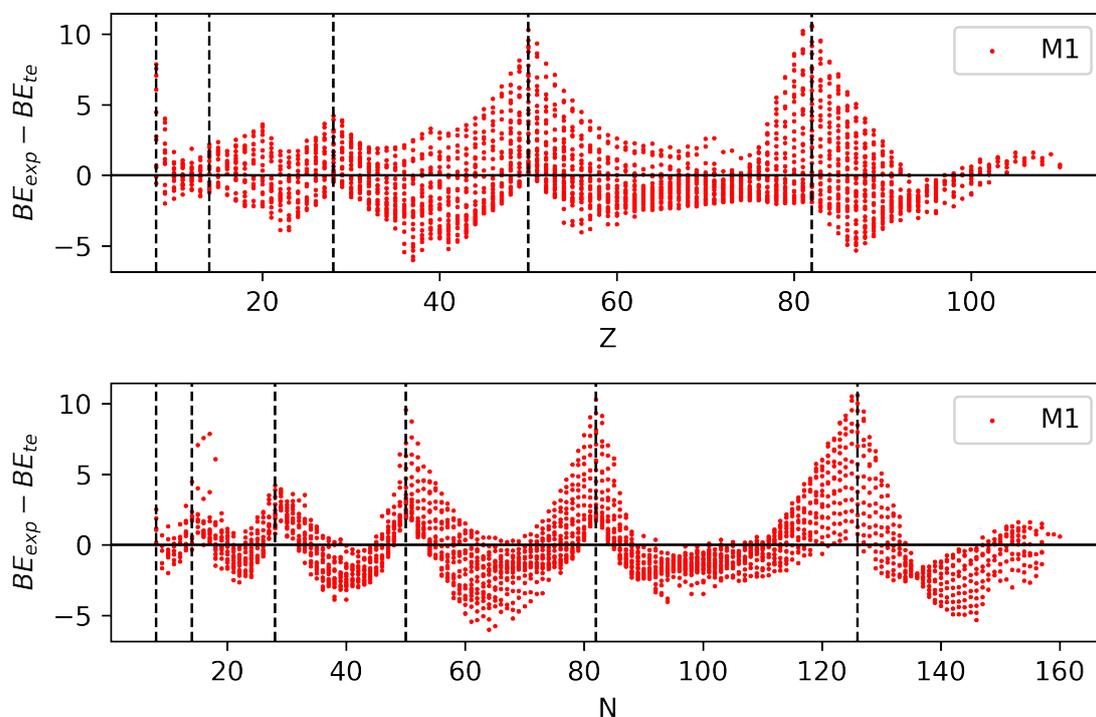


Figura 4.4: Diferencia de la energía de enlace teórica y experimental del modelo M1 calculada a partir de la información de la tabla 4.1.

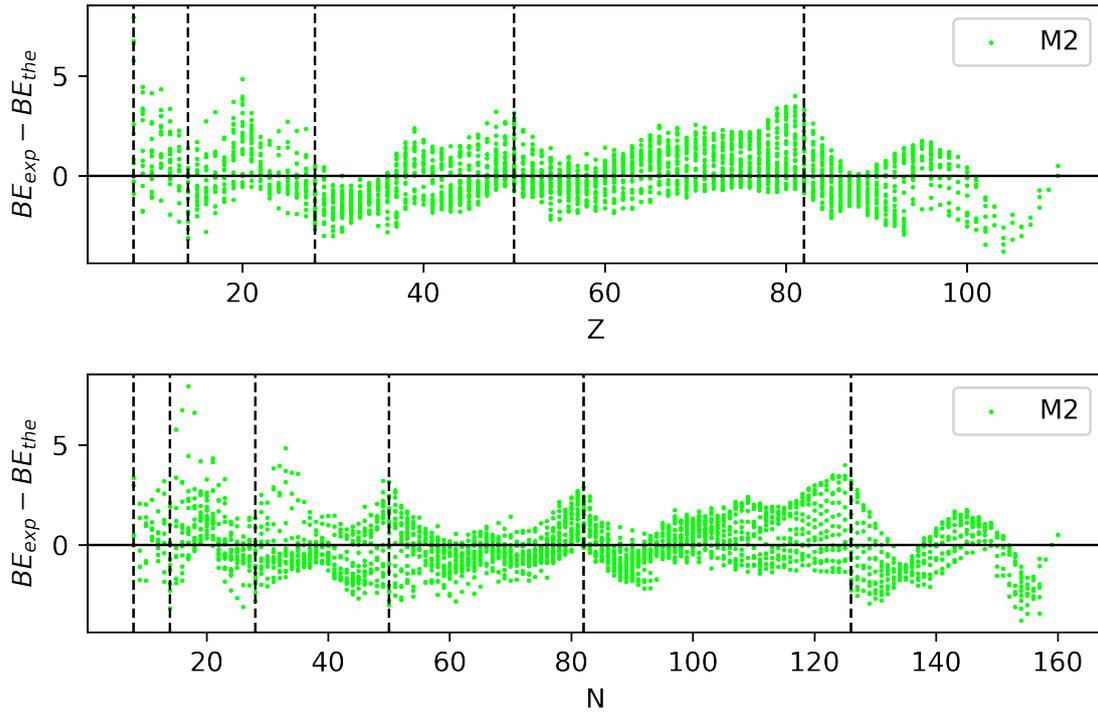


Figura 4.5: Diferencia de la energía de enlace teórica y experimental del modelo M2 calculada a partir de la información de la tabla 4.1.

4.2. Deformación cuadrupolar

La influencia de la desviación de la forma esférica en las masas nucleares fue incluida en estudios macroscópicos-microscópicos fue de Möller y Nix hace más de 40 años. Una descripción detallada de las etapas iniciales, así como los desarrollos recientes se puede encontrar en [21]. La deformación cuadrupolar está incluida en los potenciales microscópicos, y obtenidas después de un proceso sofisticado de minimización.

A continuación, se extenderá el análisis de los dos modelos, para investigar en qué regiones de deformación los modelos describen con mayor precisión la energía de enlace. Para esta propuesta, los núcleos son divididos en 9 regiones, definidos por el valor de su deformación cuadrupolar [20], como se reporta en la Tabla 4.2

Tabla 4.2: Grupos de deformación cuadrupolar.

Grupos	todos	1	2	3	4	5	6	7	semi- mági- cos
e_2 min	-0.65	-0.65	-0.11	0.00	0.04	0.12	0.18	0.23	
e_2 max	0.65	-0.11	0.00	0.04	0.12	0.18	0.23	0.65	
Núcleos	2457	294	276	359	327	347	427	427	192

La separación de los núcleos de acuerdo a su nivel de deformación, como está dada en la tabla 4.2, se presenta gráficamente en la figura 4.5 donde están los 7 grupos de núcleos con puntos de diferentes colores, además de los núcleos con N o Z mágicos en puntos de color negro. En el eje horizontal están los neutrones (N) de forma ascendente y en el eje vertical están los protones (Z).

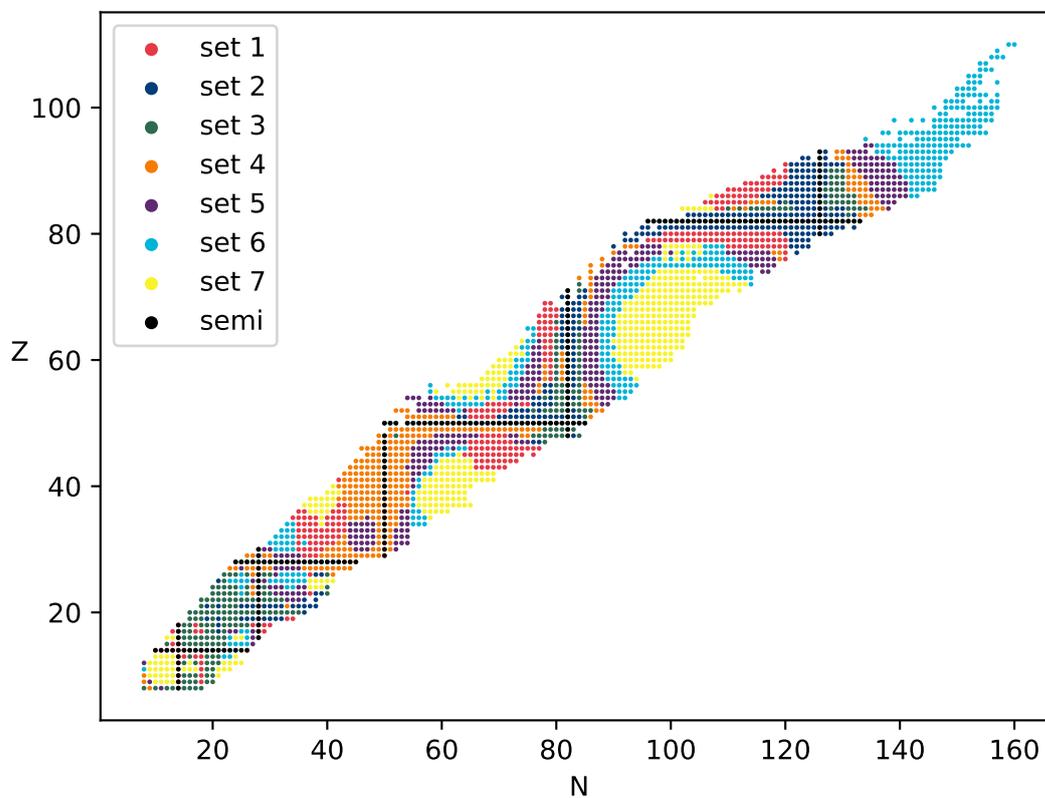


Figura 4.6: Regiones de deformación cuadrupolar, separadas considerando la tabla 4.2.

En la Figura 4.6, se puede observar un patrón claro de las diferentes regiones asociadas con el parámetro cuadrupolar. Se nota que los nucleones con cierta deformación no están localizados necesariamente en un área específica, sino están distribuidos a lo largo de toda la gráfica. El grupo de números mágicos se muestra con puntos negros que forman líneas horizontales y verticales, estas regiones son de gran interés.

Los resultados de los parámetros fueron ajustados usando IMinuit para cada una de las regiones definidas en la tabla 4.2, y son reportados en las tablas 4.3 y 4.4 para los dos modelos estudiados. Los parámetros que se minimizan son mostrados con el valor del RMS, además de la cantidad de núcleos que contiene cada grupo.

Tabla 4.3: Parámetros por grupo para el modelo M1.

	a_v	a_s	a_c	a_p	c_{sym}	k	RMS (keV)	Núcleos
Grupo 1	15.444	18.16	0.7003	6.9	26.92	1.302	1344	294
Grupo 2	15.775	18.98	0.7302	6.8	26.92	1.19	1797	276
Grupo 3	15.913	19.42	0.7381	6.8	30.49	1.615	2137	359
Grupo 4	15.61	18.48	0.7137	4.4	30.9	1.688	1871	327
Grupo 5	15.659	18.68	0.7186	6	30.41	1.616	1045	347
Grupo 6	15.453	18.16	0.6992	6	29.88	1.613	882.1	427
Grupo 7	15.52	18.48	0.7023	6.36	28.09	1.396	758	427
SM	15.634	18.35	0.7248	5.1	26.46	1.15	2172	192

Tabla 4.4: Parámetros por grupo para el modelo M2.

	a_v	a_s	a_c	S_v	y_s	a_p	r	a_f	a_{ff}	RMS (keV)	Núcleos
Grupo 1	15.549	17.49	0.6936	31.2	2.4	11.2	0.99	1.62	0.07	1049	294
Grupo 2	15.482	17.14	0.6925	32.2	2.79	9.9	1.26	2.08	0.106	1020	276
Grupo 3	15.45	17.14	0.6866	41.3	5.22	9.8	1.49	1.71	0.073	1193	359
Grupo 4	15.737	17.89	0.709	36.7	3.73	10.9	1.75	1.73	0.078	866.5	327
Grupo 5	15.591	17.52	0.6974	35.8	3.68	12.7	1.62	1.82	0.096	709.5	347
Grupo 6	15.434	17.06	0.6874	36.7	4.0	11.3	1.59	0.15	0.0085	696	427
Grupo 7	15.342	16.93	0.6785	29.5	2.08	10.3	0.87	0.89	0.039	768.4	427
SM	15.925	18.75	0.7163	32	2.18	12.7	0.73	2.38	0.116	1185	192

En la tabla 4.3, se reportan los parámetros para cada grupo del modelo M1, con

aproximadamente 300-400 núcleos por grupo. Los parámetros asociados se calculan y luego se utilizan para determinar el RMS correspondiente. Una discrepancia de hasta dos unidades se observa en los parámetros de simetría y paridad, por otro lado, la discrepancia de los demás parámetros es alrededor de 0.5. Permitiendo que los parámetros se ajusten independientemente en cada región, los valores del RMS son significativamente menores que el RMS global de 2422 keV reportados en la tabla 4.1 y de 3073 keV de la tabla 1.1. Las reducciones del RMS más significativas son de 1664 keV, encontrada para el grupo 7, le sigue el 6, ambas con una gran deformación. En contraste, para el grupo de los semi mágicos (SM), la reducción del RMS es de 250 keV.

En la tabla 4.4, se muestran los resultados obtenidos de los diferentes parámetros de cada grupo usando el modelo M2. El parámetro S_v muestra una gran variación respecto a los demás grupos, mientras que el parámetro de Coulomb a_c es el más estable. Observando el RMS, notamos que todos los valores son menores al reportado en la tabla 4.1, que fue de 1264 keV, el mismo comportamiento visto en el modelo M1, la reducción de RMS más notable ocurre para los núcleos con gran deformación, como los grupos 5, 6 y 7, por otro lado, el menos significativo se encuentra en el grupo de los semi mágicos.

Tabla 4.5: Valores del RMS (keV) para los diferentes grupos de núcleos del modelo M2.

	Todos	1	2	3	4	5	6	7	SM
Par	1281	965.1	738.7	1291	680.9	834.8	606.2	666.3	1235
Impar	1236	1010	925.9	764.5	1009	698.1	729.9	792.7	-
Par N-Impar Z	1206	1104	922.1	1005	790.7	567.3	729.6	661.9	1052
Impar N-Par Z	1296	853.6	854.3	1075	730.4	673.8	668.5	814.1	885.2

En la tabla 4.5 se presentan los valores del RMS para cada grupo en algunos casos es similar mientras que en otros es mucho menor que el encontrado globalmente, además de ligeramente menor que los presentados en las tablas anteriores donde se clasificó respecto a la deformación cuadrupolar, se encuentra el mayor valor del RMS en el grupo 3 con núcleos par-par, con 1291 keV, le sigue el grupo de núcleos semi mágicos, por otro lado, el valor más bajo de RMS se obtiene para los grupos con gran deformación, como el grupo 5 con núcleos de neutrones pares y protones impares, con 567 keV.

Capítulo 5

Conclusiones

Se reporta una descripción de la energía de enlace nuclear, a través de un ajuste de parámetros de los modelos M1 y M2, usando la base de datos AME2020. Los valores reportados en este trabajo son consistentes con los obtenidos para modelos modificados de la gota líquida previamente reportada en [10]. Esto confirma que el modelo M2, que incluye correcciones del modelo de capas logra disminuir el RMS mejor que otros modelos reportados en la literatura.

En las figuras 4.1 y 4.2 se muestra gráficamente que los valores teóricos obtenidos se ajustan bastante bien a los valores experimentales. En la figura 4.3, se muestran las diferencias entre los valores teóricos y experimentales de ambos modelos, donde el modelo M2 presenta una menor dispersión, aunque todavía persisten regiones de mayor dispersión en ambos modelos. En la figura 4.4 se identifican regiones con gran dispersión, donde los valores de N y Z son cercanos a 28, 50, 82, etc., y pueden asociarse con los números mágicos nucleares. En ambos modelos, la menor precisión se encuentra en los núcleos semi mágicos.

También se realizó un análisis más detallado dividiendo los núcleos en siete grupos según la deformación cuadrupolar y ajustando los parámetros del modelo para cada grupo. Los valores del RMS obtenidos usando los parámetros por grupo es menor que el RMS encontrado de forma global, como se muestra en la tabla 4.1, por lo que, las predicciones basadas en los grupos permiten ajustes más precisos, a costa de requerir conjuntos de

parámetros para cada grupo.

Finalmente, se realizó un análisis clasificando los núcleos en cuatro grupos de acuerdo con la paridad de N y Z . combinando ambas clasificaciones, se encontraron valores del RMS menores a las reportadas en las tablas 4.3 y 4.4, con un mínimo de 567 keV para los núcleos del grupo 5 con N par y Z impar, donde su deformación cuadrupolar corresponde a una deformación de tipo prolato.

Al analizar los modelos es evidente que su capacidad predictiva para núcleos con capas cerradas es deficiente, por lo tanto, se puede implementar correcciones que permitan al modelo mejorar su precisión en estas zonas. De igual forma los análisis se pueden a extender a otros modelos, por ejemplo el modelo de Dufflo-Zucker. Otra propuesta es aplicar análisis de imágenes en los datos de la gráfica 4.6 para extraer información de los núcleos.

Apéndice A

Código del modelo M2

Se muestra el código empleado para los cálculos del modelo M2 que está dado en la fórmula (2.2) programada en Python, iniciamos con los términos de volumen, superficie y Coulomb ya que su codificación es poco extensa.

```
# Para los términos de volumen, superficie y coulomb
volumen = a_v*A
superficie = a_s*A**(2/3)
coulomb = a_c*((Z*(Z-1))/(A**(1/3)))
```

Figura A.1: Código de los términos de volumen, superficie y Coulomb.

Continuamos con el término de superficie, donde separamos la expresión original en dos, S_V1 y S_V2, además de obtener aparte a T.

```
#Para calcular el término de simetría
T = (abs(N-Z))/2
S_V1 = (s_v)/(1+y*(A**(-1/3))) # primera división del término de simetría
S_V2 = (4*T*(>T+r))/A # segunda división
simetria = S_V1*S_V2
```

Figura A.2: Código correspondiente al término de simetría.

donde $S_{V1} = \frac{S_v}{1 + y_s A^{-1/3}}$ y $S_{V2} = \frac{4T(T + r)}{A}$ son dos factores que, al multiplicarse, forman el término de simetría.

El término de paridad requiere de clasificar los núcleos por la cantidad de neutrones y protones que lo conforman, para ello primero los separamos y almacenamos en

mask_n_z_par, mask_n_z_impar o mask_a_impar, para posteriormente asignarles el valor de delta correspondiente.

```
#Término de paridad
delta = np.zeros_like(A)
    # Comparar elemento por elemento para saber si son pares o impares
mask_n_z_par = (N % 2 == 0) & (Z % 2 == 0)#par
mask_n_z_impar = (N % 2 != 0) & (Z % 2 != 0)#impar
mask_a_impar = A % 2 != 0 # A impar
    # Asignar los valores de delta según las condiciones
delta[mask_n_z_par] = 1
delta[mask_n_z_impar] = -1
delta[mask_a_impar] = 0
paridad = a_p*(delta/(A**(1/2)))
```

Figura A.3: Código del término de paridad.

Para calcular los términos F y FF se determina el número mágico más cercano a la cantidad de neutrones o protones de cada núcleo, esto se almacena en N_c o Z_c , también se obtiene N_{med} y Z_{med} que corresponde a las capas semi-cerradas.

```
# términos F y FF
    #N_c, N_med
N_c = np.array([8,14,28,50,82,126,184,258])
    # Determinar los valores de Nc y Nmed para cada nucleón
    # Primero para los neutrones
original_indices = np.arange(len(N))
sorted_N_c = np.sort(N_c)
idx = np.searchsorted(N_c,N,side='right')-1
idx[idx<0] = 0
Nc = sorted_N_c[idx][np.argsort(original_indices)]

idx_2 = np.searchsorted(N_c,N,side='right')
idx_2[idx_2<0] = 0
Nmax = sorted_N_c[idx_2][np.argsort(original_indices)]
Nmed = (Nc+Nmax)/2
N_v = np.zeros_like(N)
N_min = (N <= Nmed)
N_max = (N>Nmed)
N_v[N_min] = N[N_min]-Nc[N_min]
N_v[N_max] = Nmax[N_max]-N[N_max]
```

Figura A.4: Cálculo de N_c , N_{med} , N_{min} y N_{max} para los neutrones.

```

# Repetimos el procedimiento para los protones
# valores adecuados de Nc
original_indices_Z = np.arange(len(Z))
sorted_Z_c = np.sort(N_c)
idZ = np.searchsorted(N_c,Z,side='right')-1
idZ[idZ<0] = 0
Zc = sorted_Z_c[idZ][np.argsort(original_indices_Z)]
idz_2 = np.searchsorted(N_c,Z,side='right')
idz_2[idz_2<0] = 0
Zmax = sorted_N_c[idz_2][np.argsort(original_indices)]

Zmed = (Zc+Zmax)/2
Z_min = (Z <= Zmed)
Z_max = (Z>Zmed)
Z_v = np.zeros_like(Z)
Z_v[Z_min] = Z[Z_min]-Zc[Z_min]
Z_v[Z_max] = Zmax[Z_max]-Z[Z_max]

```

Figura A.5: Z_c , Z_{med} , Z_{min} y Z_{max} para protones.

Con N_c , Z_c , N_{med} , Z_{med} , además de N_{max} y Z_{max} que corresponde a N_{c+1} y Z_{c+1} se puede obtener el valor de la semi degeneración que es η_n y η_p , utilizada para determinar N_t y Z_t correspondientes a $\langle n_\nu \rangle$ y $\langle n_\pi \rangle$ así como sus cuadrados $\langle n_\nu \rangle^2$, $\langle n_\pi \rangle^2$ almacenados en N_{t2} y Z_{t2} . Finalmente esta información se implementa para calcular F y FF .

```

# Con lo calculado anteriormente se puede obtener
# la semidegeneración y los promedios
Eta_n = (Nmax-Nc)/2
Eta_p = (Zmax-Zc)/2
Nt = Eta_n/2 #<n_nu>
Zt = Eta_p/2#<n_pi>
Nt2 = (2*(Eta_n**2)+1)/(6)#<n_nu>**2
Zt2 = (2*(Eta_p**2)+1)/(6)#<n_pi>**2

#Utilizando lo anterior se puede calcular F y FF
F = ((N_v+Z_v)/(2))-((Nt+Zt)/(2))
FF = ((N_v+Z_v)/(2))**2 -((Nt2+Zt2+(2*(Nt*Zt)))/4

```

Figura A.6: Código de η , $\langle n_\nu \rangle$ ($\nu \rightarrow \nu$), $\langle n_p \rangle$ ($p \rightarrow \pi$), $\langle n_\nu \rangle^2$, $\langle n_p \rangle^2$, además de F y FF .

Al calcular todos los términos por separado se deben sumar para obtener la energía de enlace teórica que ofrece el modelo M2.

```
M2 = volumen -superficie - coulomb + paridad - simetria - a_f*F + a_ff*FF
```

Figura A.7: Código del modelo M2.

Bibliografía

- [1] Soria, A. F. Física nuclear y de partículas. (2020).
- [2] Eisberg, R. and Resnick, R. Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles. (1985).
- [3] Beiser, A. Concepts of modern physics. (2003).
- [4] Krane, K. S. Modern physics. (2019).
- [5] Wang, M., Huang, W. J., Kondev, F. G., Audi, G., and Naimi, S. (2021) The AME 2020 atomic mass evaluation (II). Tables, graphs and references. *Chin. Phys. C*, **45**(3), 030003.
- [6] Gamow, G. and Rutherford, E. (1930) Mass defect curve and nuclear constitution. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, **126**(803), 632–644.
- [7] Weizsacker, C. F. V. (1935) Zur Theorie der Kernmassen. *Z. Phys.*, **96**, 431–458.
- [8] Virgilio, A., Clydel, C., and Graham, B. Curso de física moderna. (1975).
- [9] Wangsness, R. K. Campos electromagnéticos. (2006).
- [10] Cerón Ángeles, V. E., Mendoza Martínez, E. P., Martínez Reséndiz, E., and Hirsch Ganievich, J. G. (abr., 2025) Energías de amarre nucleares en modelos de la gota líquida. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, **13**(Especial), 14–17.

- [11] Barbero, C., Hirsch, J. G., and Mariano, A. (2012) Deformation and shell effects in nuclear mass formulas. *Nucl. Phys. A*, **874**, 81–97.
- [12] Mendoza-Temis, J., Frank, A., Hirsch, J. G., López Vieyra, J. C., Morales, I., Barea, J., Van Isacker, P., and Velázquez, V. (2008) Nuclear masses and the number of valence nucleons. *Nucl. Phys. A*, **799**, 84–93.
- [13] Audi, G. (2006) The History of nuclidic masses and of their evaluation. *Int. J. Mass Spectr. Ion Process.*, **251**, 85–94.
- [14] Wapstra, A. H., Audi, G., and Hoekstra, R. (1988) Atomic masses from (mainly) experimental data. *Atom. Data Nucl. Data Tabl.*, **39**, 281–287.
- [15] Audi, G. and Wapstra, A. H. (1993) The 1993 Atomic mass evaluation. 1. Atomic mass table. *Nucl. Phys. A*, **565**, 1–65.
- [16] Augid, G., Bersillon, O., Blachot, J., and Wapstra, A. H. (1997) The NUBASE evaluation of nuclear and decay properties. *Nucl. Phys. A*, **624**, 1–124.
- [17] Audi, G., Wapstra, A. H., and Thibault, C. (2002) The Ame2003 atomic mass evaluation (II). Tables, graphs and references. *Nucl. Phys. A*, **729**, 337–676.
- [18] Lunney, D., Pearson, J. M., and Thibault, C. (2003) Recent trends in the determination of nuclear masses. *Rev. Mod. Phys.*, **75**, 1021–1082.
- [19] Dembinski, H. and et al., P. O. (Dec, 2020) scikit-hep/iminuit.
- [20] Moller, P., Nix, J. R., Myers, W. D., and Swiatecki, W. J. (1995) Nuclear ground state masses and deformations. *Atom. Data Nucl. Data Tabl.*, **59**, 185–381.
- [21] Moller, P., Sierk, A. J., Ichikawa, T., and Sagawa, H. (2016) Nuclear ground-state masses and deformations: FRDM(2012). *Atom. Data Nucl. Data Tabl.*, **109-110**, 1–204.