Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Área Académica de Matemáticas y Física

Recursos que utilizan docentes de primaria para apoyar el aprendizaje inicial de fracciones

T E S I S

que para obtener el título de

licenciada en matemáticas aplicadas

P R E S E N T A

Claudia Gisell Salas Cervantes

DIRECTORES

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Dra. Anna Tarasenko

Mineral de la Reforma, Hidalgo, junio 2025

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
School of Engineering and Basic Sciences

Mineral de la Reforma, Hgo., a 22 de agosto de 2025

Número de control: ICBI-D/1555/2025
Asunto: Autorización de impresión.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

Con Título Quinto, Capítulo II, Capítulo V, Artículo 51 Fracción IX del Estatuto General de nuestra Institución, por este medio, le comunico que el Jurado asignado a la egresada de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas **Claudia Gisell Salas Cervantes,** quien presenta el trabajo de titulación **"Recursos que utilizan docentes de primaria para apoyar el aprendizaje inicial de fracciones",** ha decidido, después de revisar fundamento en lo dispuesto en el Título Tercero, Capítulo I, Artículo 18 Fracción IV; dicho trabajo en la reunión de sinodales, **autorizar la impresión del mismo**, una vez realizadas las correcciones acordadas.

A continuación, firman de conformidad los integrantes del Jurado:

Presidente: Dra. María Guadalupe Simón Ramos

Secretario: Dra. Anna Tarasenko

Vocal: Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Suplente: Dr. Carlos Arturo Soto Campos

Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
ICBI
DIRECCIÓN

Mtro. Gabriel Vergara Rodríguez
Director del ICBI

GVR/YCC

Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: 771 71 720 00 Ext. 40001
direccion_icbi@uaeh.edu.mx, vergarar@uaeh.edu.mx

Dedicatoria ...

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a todas las personas que contribuyeron a la realización de esta tesis y la culminación de esta etapa de mi vida.

Primeramente a Dios, por darme la fuerza y sabiduría en cada paso de este camino académico.

A mi hermano, por ser uno de los pilares más importantes en mi vida. Desde que nació supe que daría todo por él. Gracias por siempre estar a mi lado apoyandome, haciéndome reír, compartiendo todas esas tardes y madrugadas haciendo tarea y platicando de miles de cosas y, claro, por enseñarme a diario lo fuerte, inteligente y valiente que eres. Te amo infinitamente.

A mi mamá y papá, quienes a pesar de la distancia, nunca me faltó un "Buenos días princesa", estando presentes en todo momento apoyándome, motivándome y que siempre creyeron mucho más en mí de lo que yo misma lo hacía, porque es más fácil ser valiente cuando sé que están a mi lado. Espero que se sientan tan afortunados de ser mis padres como yo me siento afortunada de ser su hija.

Gracias a mi asesor y coasesora, el Dr. Aarón y la Dra. Anna, por su dedicación, confianza y paciencia que me tuvieron durante todo el proceso, guiándome siempre en este camino. Sus enseñanzas han sido fundamentales en este crecimiento académico y profesional.

Agradezco a la Dra. Guadalupe y al Dr. Carlos por la revisión de mi trabajo, por sus comentarios y sugerencias, los cuales permitieron mejorar el contenido.

Resumen

Se identifican estrategias y recursos didácticos que utilizan profesores de primaria multigrado, ubicadas en zonas rurales del estado de Hidalgo, para apoyar el aprendizaje inicial de sus estudiantes en el tema de fracciones. El marco conceptual de la tesis está integrado por el principio de mediación instrumental (Lev Vygotsky), los cinco subconstructos de una fracción (Susan Lamon) y la teoría de representaciones (Raymond Duval). Se realizaron entrevistas semi-estructuradas a tres profesores voluntarios. Algunas entrevistas se grabaron en audio y otras en video. Además, algunos de los participantes compartieron evidencia documental y la autora de la tesis elaboró notas de campo, durante y después de las entrevistas. Las grabaciones se transcribieron y dichas transcripciones integran la información básica que fundamenta los resultados y conclusiones de este trabajo. El análisis se llevó acabo mediante la organización de los datos con base en las siguientes categorías a priori: (a) representaciones, (b) material didáctico, (c) tipo de unidades (individuales y compuestas), (d) subconstructos de la fracción. Entre los resultados se destaca la prevalencia del pizarrón como herramienta didáctica y de las representaciones gráficas para iniciar la enseñanza de las fracciones.

Palabras clave: Docente de escuela primaria, aritmética, escuela comunitaria, métodos de enseñanza.

Abstract

This study identifies the didactic strategies and resources employed by multi-grade elementary school teachers in rural areas of Hidalgo, Mexico, for supporting the initial learning of fractions. The research is grounded on instrumental mediation (Lev Vygotsky), Susan Lamon's framework of the five subconstructs of fractions, and Raymond Duval's theory of representations. Using a qualitative approach, semi-structured interviews were conducted with three voluntarily participating teachers. Data collection included audio and video recordings of the interviews, supplemented by the researcher's field notes. The recordings were transcribed, and these transcriptions served as the primary data for analysis. The findings were organized according to the following apriori categories: (a) representations, (b) didactic materials, (c) types of units (individual and compound), and (d) fraction subconstructs. Key results highlight the prevalent use of the blackboard as a central didactic tool and the emphasis on graphical representations to introduce the concept of fractions.

Keywords: Primary school teacher, arithmetic, community school, teaching methods.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Introducción

En el primer capítulo de la tesis se revisa la literatura de investigación enfocada en la enseñanza de fracciones en la educación primaria; particularmente, las formas en que los profesores abordan por primera vez este tema con los estudiantes. La revisión tiene la finalidad de enmarcar la problemática en el contexto de las investigaciones que han abordado este tema. Se explica cuáles son las áreas de oportunidad que se atienden con la tesis, además de formular y justificar la pregunta de investigación.

En el segundo capítulo se explica qué es un marco de investigación, así como su función en la realización de una tesis. Se describen las características más relevantes de cada uno de los tres tipos de marco: (a) teórico, (b) práctico y (c) conceptual. Posteriormente, se indican cuáles son los constructos utilizados para comprender y, tal vez, explicar cómo los materiales, interpretaciones y representaciones que se utilizan para enseñar fracciones, por primera vez, determinan las características del aprendizaje que los estudiantes construyen.

En el tercer capítulo se describen las características de la investigación cualitativa y específicamente el diseño de la tesis basado en un estudio colectivo de casos. Se explica qué es un caso y se bosquejan algunas tipologías de los diseños basados en casos. Se explican, también, aspectos relacionados con el proceso de recolección y análisis de la información empírica; indicando cómo se llevó a cabo la selección de los participantes; informando sobre aspectos relevantes del contexto sociocultural (primarias multigrado ubicadas en zonas rurales de Hidalgo), cuáles son las fuentes de recolección de información, y cómo se llevó a cabo el análisis de la información empírica.

En el cuarto capítulo se exponen los resultados derivados del análisis de las entrevistas realizadas a los docentes, organizando la información en términos de una narrativa interesante en la que se destacan los recursos, estrategias y representaciones que utilizan los participantes para enseñar, por primera vez, a los estudiantes el tema de fracciones.

En el quinto capítulo se presentan los patrones de significado identificados en el capítulo previo, los cuales permiten responder a la pregunta de investigación. Además, se comparan los resultados obtenidos en esta tesis, con los de investigaciones similares de la literatura revisada. Finalmente, se reflexiona sobre los alcances y limitaciones del trabajo, así como propuestas a futuro para fortalecer la línea de investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones.

Capítulo 1

El problema de investigación

1.1. Introducción

La importancia de las fracciones se extiende más allá de las clases de matemáticas y de la educación escolarizada, ya que la habilidad para operar con fracciones e interpretar los resultados de tales operaciones es importante en las ciencias físicas, biológicas, químicas y sociales (Lortie-Forgues et al., 2015); así como en una amplia gama de ocupaciones como la ingeniería, economía, psicología, medicina, nutrición, enfermería, carpintería o mecánica automotriz (Jordan et al., 2013).

Como referente internacional, la iniciativa de *Estándares Estatales Básicos Comunes* de los Estados Unidos (CCSSI, 2010), expresa que los estudiantes de tercer y cuarto grado de primaria deben comprender las magnitudes fraccionarias; los estudiantes de cuarto, quinto y sexto grado desarrollan competencias para la solución de problemas que requieran realizar operaciones aritméticas con fracciones; mientras que los estudiantes de sexto y séptimo grado pueden aplicar las fracciones para resolver problemas que involucran razones, tasas y proporciones. Sin embargo, los resultados de pruebas estandarizadas, como la *Evaluación Nacional del Progreso Educativo*, en los Estados Unidos, del año 2004, reportan severas dificultades en la comprensión de las fracciones. Por ejemplo, el 50 % de los estudiantes estadounidenses de octavo grado no logran ordenar tres fracciones ($\frac{2}{7}, \frac{5}{9}, \frac{1}{12}$) de menor a mayor, a pesar de que esta es una habilidad que se construye desde el tercer grado de primaria (Tian & Siegler, 2016). Se buscaron resultados más recientes respecto a la *Evaluación Nacional del Progreso Educativo* encontrando uno del año 2024, pero no se muestran resultados específicos sobre el tema de las fracciones, y lo único que se presenta, son puntajes y porcentajes de las pruebas globales de matemáticas.

Algunos educadores matemáticos consideran que el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones es una de las áreas más problemáticas en la educación primaria (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Además, el tema de fracciones es considerado como uno de los más desafiantes que los maestros de primaria deben de enseñar (Kor et al., 2018), pero estos docentes, generalmente, tienen conocimientos limitados sobre el tema (Newton, 2008).

1.2. Fracciones en los planes y programas de estudio

En 2024 se desarrolló el *Plan de Estudios para la Educación Preescolar, Primaria y Secundaria*, que es aplicable y obligatorio para las escuelas primarias de todo el país. Esta propuesta curricular es una tarea colectiva en permanente construcción que incluye: (a) Plan y Programas de Estudio de educación preescolar, primaria y secundaria, así como los libros de texto gratuitos; (b) un programa de formación docente; (c) codiseño de los programas de estudio, para atender el carácter regional, local, contextual y situacional del proceso de enseñanza y aprendizaje; (d) desarrollo de estrategias nacionales y (e) transformación administrativa y de gestión (SEP, 2024).

En matemáticas, dentro del mapa curricular, se da prioridad a la solución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático a partir de situaciones prácticas, el aprendizaje de las matemáticas debe de tener un sentido humano para niñas, niños y adolescentes, el cuál sólo se desarrolla en el marco de relaciones significativas entre la familia, la escuela y la comunidad.

En la Nueva Escuela Mexicana (NEM), la educación básica está estructurada en seis fases, de la siguiente manera: (1) educación inicial, (2) educación preescolar 1º, 2º y 3º, (3) educación primaria 1º y 2º, (4) educación primaria 3º y 4º, (5) educación primaria 5º y 6º, (6) educación secundaria 1º, 2º y 3º. Por lo antes mencionado, hay un cuaderno de apoyo curricular para la práctica docente, *Desarrollo de habilidades. Matemáticas. Primaria. Fase 4*, a partir de esta fase se introduce el tema de fracciones. De acuerdo con este cuaderno de apoyo, para el tema de fracciones se proponen los siguientes puntos:

- Introducir la noción de fracción como resultado de una medición precisa (longitud, capacidad, masa), así como de repartos equitativos y exhaustivos, en los que el "todo", el que se reparte, esté formado por un solo elemento (un pliego de papel entre cuatro niños, un pastel entre 10 personas, un chocolate entre dos niñas) o por varios elementos (tres naranjas entre cuatro niños, nueve niñas y niños en tres equipos, seis litros de jugo en cuatro envases iguales).

- Para obtener una fracción se deben cumplir dos principios: todas las partes resultantes deben ser iguales *(equitatividad)* y, del "todo" , "entero" o unidad dividida, debe quedar nada *(exhaustividad)*.

- Trabajar prematuramente el lenguaje simbólico de las fracciones, de manera aislada, fuera de contexto o en situaciones que están fuera del alcance de las y los estudiantes, tiene como consecuencia que no logren apropiarse de los significados de estos números. Por lo que es necesario proponer diversas situaciones a través de las cuáles conozcan, representen, interpreten, escriban, comparen y ordenen fracciones, con el apoyo de materiales concretos y modelos gráficos.

- Conviene planear situaciones problemáticas que impliquen identificar fracciones, de forma que la figura está dividida en una cantidad de partes distintas a la que indica el denominador de la fracción, con la intención de que los estudiantes deben realizar trazos auxiliares para identificar la fracción representada y en las que se solicite determinar la unidad a partir de una fracción.

En la fase 5, se considera que desde grados anteriores los estudiantes han identificado y generado fracciones equivalentes para expresar la misma cantidad de diversas formas. Ahora se trata de que establezcan y utilicen la propiedad que caracteriza a las fracciones equivalentes y que permite generarlas: multiplicar o dividir el numerador y denominador por un mismo número natural. Comprender las fracciones conlleva pensar en nuevas relaciones entre cantidades, en el uso de nuevos sistemas de símbolos para representar dichas relaciones y en la ampliación del sistema decimal: en situaciones de medida, con el significado de parte de un todo o de un conjunto de objetos, en situaciones de reparto, con el significado de cociente, índice comparativo (razón) o como operador.

Para tener una idea amplia de cómo las fracciones están incluidas en propuestas curriculares no solo nacionales sino aquellas con impacto internacional, se revisaron los *Principios y Estándares para la Matemática Escolar* propuesta elaborada por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (NCTM, 2000). En esta propuesta se enfatiza la enseñanza que fomentar y desarrollar la comprensión y el pensamineto matemático de los estudiantes. Los estudiantes de los grados 3-5 desarrollan una comprensión de las fracciones como partes de unidades enteras, como partes de una colección, como ubicaciones en líneas numéricas y como divisiones de números enteros. También son capaces de usar modelos, puntos de referencia y formas equivalentes para juzgar el tamaño de las fracciones, hasta llegar a reconocer y generar formas equivalentes de fracciones, decimales y porcentajes de uso común.

A través de la revisión y el estudio de diversas interpretaciones (cómo se relacionan las fracciones entre sí y con la unidad de referencia) y modelos (cómo se representan las fracciones), los estudiantes pueden desarrollar habilidades para comparar fracciones al utilizar puntos de referencia como $\frac{1}{2}$ o 1. También deben considerar números menores que cero y a través de modelos familiares como un termómetro o una recta numérica. Continuando con los temas empiezan a comprender la equivalencia de fracciones, decimales y porcentajes, así como la información que trasmite cada tipo de representación. Para comprender las fracciones como partes de un todo y como división, necesitan considerar y explorar una variedad de modelos de fracciones, centrándose principalmente en mitades, tercios, cuartos, quintos, sextos, octavos y décimos. Deben desarrollar estrategias para ordenar y comparar fracciones, a menudo usando puntos de referencia como $\frac{1}{2}$ y 1, como por ejemplo la estrategia de las rectas numéricas paralelas. Por esto, se debe de dedicar una cantidad significativa de tiempo de instrucción sobre los números racionales en estos grados. El enfoque debe de estar centrado en desarrollar la comprensión conceptual de los estudiantes sobre fracciones y decimales (qué son, cómo se representan y cómo se relacionan con los números enteros).

1.3. Revisión de literatura

En esta sección se revisan trabajos de investigación relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones, incluyendo aquellas que indagan cómo los docentes abordan, por primera, vez este tema con los estudiantes. Se sintetizan los elementos principales de artículos de investigación empírica o de revisión, con la finalidad de obtener un panorama amplio de la investigación que se ha realizado sobre el tema, e identificar áreas en las que se pueda aportar al desarrollo de conocimiento científico en esta línea de investigación. La revisión de literatura también tiene la finalidad de fundamentar y justificar la relevancia del problema que aborda la tesis; así como su importancia científica.

Las fracciones son un tema importante en los planes y programas de estudio de matemáticas; sin embargo, existe un grave problema con el entendimiento de este concepto, de las relaciones de orden y de las operaciones aritméticas con estos números (Bentley & Bosse, 2018; Jiang et al., 2021; Satsangi & Raines, 2022).

En línea con las ideas previas, Tian y Siegler (2016) se interesaron en conocer por qué las fracciones son tan difíciles de entender para los estudiantes en general, y ¿por qué los estudiantes con *dificultades matemáticas* (DM en lo subsecuente) van rezagados de sus compañeros de la misma edad?, ¿qué se puede hacer para mejorar el conocimiento de las fracciones de los niños con DM? Se considera que un estudiante con DM, es aquel cuyos resultados se encuentran en el 35 % de más bajas puntuaciones en pruebas estandarizadas. La investigación se sustentó en la *teoría del desarrolo numérico integrado* (Siegler & Lortie-Forgues, 2014), la cual especifica diversas dificultades durante el aprendizaje de las fracciones. La investigación es cuantitativa, basada en un diseño experimental. Se llevó a cabo una intervención con estudiantes de cuarto y quinto grado, quienes ya habían revisado las operaciones con números enteros mediante la recta numérica. Estos estudiantes recibieron instrucción sobre fracciones, y sus operaciones, utilizando la recta numérica como apoyo. Se implementaron 19 lecciones (no consecutivas). Los resultados indican que, comparados con el grupo de control, los estudiantes que recibieron la intervención obtuvieron puntuaciones más altas en las pruebas de fin de unidad, que se realizaron inmediatamente después de la intervención y en las pruebas de fin de año (cinco meses después de la intervención). Los resultados sugieren que la competencia en el tema de fracciones de los niños con DM se puede mejorar desarrollando su conocimiento de la magnitud de las fracciones al utilizar la recta numérica como sistema de representación.

En un artículo de revisión Lortie-Forgues et al. (2015) exponen lo que se conoce sobre la aritmética con fracciones y decimales, para saber por qué el aprendizaje de la aritmética con estos números es difícil para los estudiantes. Se discuten dos tipos de dificultades: (a) inherentes a la aritmética fraccionaria y decimal y (b) de carácter cultural que podrían solventarse con una mejor instrucción y una ampliación de los recursos de los estudiantes. Se concluye con una discusión de los elementos comunes de tres intervenciones orientadas a fortalecer la aritmética fraccionaria y decimal. Una de las investigaciones comentadas se llevó a cabo con 120 alumnos (grados 6 y 8) de tres escuelas públicas en Pensilvania, E.U. Los estudiantes abordaron 16 ejercicios en donde se incluian las cuatro operaciones artiméticas con fracciones (denominadores iguales y diferentes). Los alumnos respondieron correctamente solo el 41 % (sexto grado) y el 57 % (octavo grado) de los ejercicios. El rendimiento fue mayor para la suma y resta de fracciones, seguido de la multiplicación y la división. Estos mismos problemas se propusieron a estudiantes chinos quienes obtuvieron un 90 % de aciertos. La notación de fracciones hace que la aritmética con estos números sea difícil, ya que una fracción tiene tres componentes, un numerador, denominador y una línea que separa los dos números; por lo que algunos estudiantes interpretan a las fracciones como dos números enteros distintos, por ejemplo $\frac{1}{2}$, lo interpretan como 1 y 2; también la interpretan como una operación entre esos números, como 1+2; o como un solo número entero, por ejemplo 12. Así, la aritmética de fracciones requiere aprender: los cuatro procedimientos aritméticos de números enteros, simplificar fracciones, convertir fracciones a números mixtos y viceversa, así como comprender cuándo se mantienen denominadores iguales en la suma y resta, etcétera.

Por otra parte, Siegler et al. (2011) proponen una teoría sobre el desarrollo de comprensión de los números enteros y las fracciones, basada en el hecho de que todos los números tienen magnitudes que se pueden ordenar y, por ende, es posible establecer una relación biunívoca entre los números y los puntos de una recta numérica. Los participantes fueron 24 estudiantes de once años de edad y 24 estudiantes de trece años de edad de dos distritos escolares públicos de ingresos medios, en los Estados Unidos; quienes tenían una habilidad matemática ligeramente por encima del promedio estatal. Los participantes abordaron, individualmente, tres pruebas sobre estimación, comparación de magnitudes de fracciones, y problemas aritméticos (una sesión de 30 minutos). Cada estimación se realizó sobre una recta numérica diferente, que aparecia sobre la pantalla de una computadora, en la cual solo se indicaban los extremos del intervalo, ya sea $[0, 1]$ o $[0, 5]$, sin marcas adicionales. Los fracciones propuestas son $\frac{1}{19}, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{5}{6}$ y $\frac{12}{13}$, en el caso del intervalo $[0, 1]$; y $\frac{1}{19}, \frac{4}{7}, \frac{7}{5}, \frac{13}{9}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{10}{3}, \frac{7}{2}, \frac{17}{4}, \frac{9}{2}$, para el caso del intervalo $[0, 5]$. Los números aparecieron en la pantalla de forma aleatoria. Los participantes compararon $\frac{3}{5}$, con alguna de las siguientes fracciones, presionando una tecla si la fracción era mayor y otra tecla si la fracción era menor que el número de referencia: $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{2}{9}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{3}$. Las operaciones aritméticas que realizaron los estudiantes son: $\frac{8}{9} + \frac{1}{2}, \frac{3}{5} + \frac{2}{5}, \frac{3}{5} - \frac{1}{2}, \frac{3}{5} - \frac{2}{5}, \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right), \frac{3}{5} \div \frac{1}{2}, \frac{3}{5} \div \frac{2}{5}$. Se obtuvieron informes verbales de las estrategias después de cada estimación y cada problema aritmético, para relacionar el uso de la estrategia con la velocidad y precisión de la respuesta. También se obtuvieron los puntajes de las pruebas de rendimiento estatal en matemáticas para examinar su relación con las tres medidas del conocimiento de la magnitud y con el dominio de la aritmética de fracciones. Se examinaron tres aspectos de las estimaciones: precisión, linealidad y estrategias. Se concluye que la precisión está estrechamente relacionada con el dominio de la aritmética de fracciones.

En una investigación realizada por Bouck et al. (2018) se identificó el papel de manipulativos como soporte para el entendimiento de fracciones en estudiantes con discapacidades. Participaron tres estudiantes de una escuela pública, ubicada en una comunidad rural en los Estados Unidos. Los manipulativos incluyeron bloques de fracciones y un iPad con una aplicación de *Fraction Tiles*. Durante cada sesión, los participantes abordaron una prueba con cinco problemas de suma de fracciones con denominadores diferentes. Los manipulativos manejaban medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, octavos, décimos y doceavos. La evaluación de conocimientos se realizó mediante la prueba KeyMath-3 y cinco problemas. Hubo una capacitación previa individual para ambos tipos de manipulativos. En la fase de intervención, los estudiantes alternaron entre tres condiciones: manipulativo físico, manipulativo virtual y sin manipulativos. En la evaluación posterior a las quince sesiones de intervención, cada estudiante completo tres sesiones. El mejor tratamiento para cada estudiante se determinó calculando el porcentaje de datos no superpuestos. En el tratamiento de generalización, cada estudiante completó dos sesiones de generalización después de su última sesión de mejor tratamiento. Después de todas estan sesiones por las que pasaron los tres estudiantes informaron que disfrutaron tanto de los manipulativos basados en aplicaciones como de los bloques de concreto, aunque una de las estudiantes expresó su fuerte preferencia por el manipulativo basado en aplicaciones, ya que sintió que el manipulativo basado en la aplicación era más fácil. Los estudiantes fueron igualmente exitosos en términos de precisión y las diferencias fueron mínimas. Al comparar los dos tipos de manipulativos, dos estudiantes fueron más independientes con el material concreto y uno con el manipulativo virtual.

Steenbrugge et al. (2015) analizaron cómo se enseñan las fracciones en el cuarto grado de una escuela primaria ubicada en la región de Flandes, Bélgica. Específicamente buscaron responder ¿cómo la enseñanza de fracciones refleja las recomendaciones contemporáneas de la investigación? y ¿qué factores, incluidos los materiales curriculares, influyen en las prácticas de enseñanza y el contenido o los estudiantes particulares en cuestión, contribuyen a la alineación o desviación de estas recomendaciones? El fundamento teórico incluye el marco de resolución de problemas, particularmente la consideración de múltiples soluciones al resolver problemas y la importancia de la justificación en matemáticas; el concepto de entendimiento, reflejado en la relevancia de conectar representaciones. También se consideran aspectos de una perspectiva epistemológica sociocultural y la modelación, al resaltar la importancia del trabajo colaborativo al abordar situaciones reales. Se analizaron 88 episodios instruccionales, seleccionados de 24 lecciones videograbadas, así como los referentes correspondientes en la guía del maestro. El análisis consistió en relacionar la instrucción descrita en la guía del profesor, la instrucción durante la fase de enseñanza grupal y la instrucción durante la fase de práctica individual. Entre las conclusiones se destaca que las lecciones observadas sobre fracciones reflejaban, en cierta medida las recomendaciones contemporáneas de la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de fracciones. El aprendizaje colaborativo sobre fracciones apenas ocurrió durante las partes de la cadena de implementación del currículo estudiado. Se identificaron, además, algunos factores que contribuyeron a una desviación de estas recomendaciones.

Gearhart et al. (1999) bucaron determinar ¿cómo se pueden documentar oportunidades de aprendizaje alineadas con los estandares NCTM?, y ¿cómo se pueden apoyar a los maestros de primaria para brindar tales oportunidades? El marco del estudio incluye los principios y estándares propuestos por la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas en los Estados Unidos (NCTM, 2000), así como el concepto de *oportunidades de aprendizaje*. Se considera que hay cuatro elementos críticos para una instrucción efectiva: (a) los maestros necesitan una comprensión profunda de las matemáticas que enseñan, (b) los maestros necesitan una comprensión profunda de las formas en que los niños aprenden matemáticas, (c) los maestros requieren pedagogías que provoquen y contruyan sobre la base del pensamiento de los estudiantes, y (d) los docentes necesitan involucrarse en una reflexión analítica sobre su práctica. En dos grupos de clases se implementaron las unidades de instrucción para los últimos grados de primaria en California, denominadas *Seeing Fractions* y *My Travels With Gulliver*, las cuales están basadas en una perspectiva de resolución de problemas. Las unidades se enfocan en fortalecer las habilidades de resolución de problemas y el entendimiento conceptual; mediante relaciones matemáticas representadas en forma gráfica; principalmente parte-todo en el contexto de modelos de área (cuadrados y círculos), modelos de distribución justa (brownies cuadrados o galletas circulares) y modelos lineales (comparar tiras de fracciones). En un tercer grupo se implementó una enseñanza basada en libros de texto que enfatizan habilidades (skills). Se analizaron grabaciones en video y notas de campo. También se revisaron las producciones de los estudiantes antes y después de la instrucción. El análisis de la información se realizó mediante la creación de tres escalas para estimar las oportunidades de los estudiantes para aprender con base en el grado en que: (a) las prácticas en el aula suscitan y desarrollan el pensamiento de los estudiantes, (b) en que se abordan cuestiones conceptuales al resolver problemas y (c) se permite a los estudiantes utilizar e interpretar representaciones numéricas que los ayudan a comprender conceptos matemáticos. El análisis de la instrucción sobre fracciones de 21 clases de primaria proporcionó evidencia de la calidad técnica de los indicadores propuestos, y que se requiere fortalecer el conocimiento de los docentes para la implementación de un currículo basado en la perspectiva de resolución de problemas.

Olanoff et al. (2014) analizaron artículos de investigación, revisados por pares, enfocados en conocer cuál es el contenido matemático sobre fracciones de profesores de primaria en formación. El marco teórico está integrado por las categorías del conocimiento del profesor propuestas por Shulman: (a) conocimiento de la disciplina, (b) conocimiento pedagógico y (c) conocimiento curricular. También se incluye el marco del conocimiento matemático para la enseñanza, propuesto por Ball et al. (2008). Se revisaron 43 artículos de investigación agrupados en tres periodos antes de 1998, 1998-2011 y 2011-2013. Los resultados de los artículos son consistentes al señalar que el conocimiento procedimental asociado con fracciones es sólido, pero falta flexibilidad para ir más allá de los procedimientos y pensar numéricamente con fracciones. También se identifican problemas para entender el significado detrás de los procedimientos o por qué los procedimientos funcionan. Las tendencias de investigación han transitado de investigar casi exclusivamente el entendimiento de las operaciones con fracciones de los futuros profesores, particularmente la multiplicación y la división, a estudios más balanceados que integran tanto las operaciones como los conceptos asociados con fracciones. Lo que hace falta en la mayoría de esos estudios son formas de fortalecer el conocimiento matemático sobre fracciones de los futuros docentes.

Felmer et al. (2017) exploraron la forma en que un curso de desarrollo profesional para profesores de primaria, llamado *Fracciones con resolución de problemas*, contribuye al desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en los futuros profesores. Específicamente se preguntaron ¿qué características del curso influyen en el conocimiento de los docentes y de qué manera influyen? Se consideraron dos dominios principales de conocimiento para la enseñanza: el conocimiento de la materia y el conocimiento del contenido pedagógico, cada uno de estos dominios se subdivide en tres dominios, conocimiento de la materia se divide en: conocimineto de contenido común (CCK), conocimiento del contenido del horizonte y conocimiento del contenido especializado (SCK); el conocimiento del contenido pedagógico se divide en conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS), conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT) y conocimiento del contenido y plan de estudios. El curso se implementó durante una semana, con sesiones de cinco horas por día (25 horas). La estructura del curso fue la siguiente: (a) primeras sesiones dedicadas al concepto de fracciones en sus diferentes facetas, (b) sumas y restas con fracciones, (c) noción de mínimo común denominador y (d) significado conceptual de producto y división de fracciones. La investigación es cualitativa basada en un estudio de caso. Los participantes trabajaron en grupos de dos o tres integrantes, supervisados por un monitor cuya función principal fue estimular la discusión grupal, las explicaciones matemáticas, el razonamiento y la comprensión conceptual. La última hora de cada sesión se dedicó a una discusión de los resultados en plenaria. Las fuentes de recolección de la información incluyeron dos cuestionarios, grabaciones de video y de audio de las sesiones de trabajo en las que aparece el estudiante John, quien es el caso. Así como las producciones escritas elaboradas por el participante. Los resultados permitieron identificar cuáles características del curso constribuyeron al fortalecimiento de los conocimientos del profesor, así como la forma en que lo fortalecieron.

Basturk (2016) investigó cuál es el conocimiento pedagógico del contenido sobre fracciones de futuros maestros de primaria. El fundamento teórico del trabajo incluye el concepto de *conocimiento pedagógico del contenido*, propuesto por Shulman (1986); así como los diversos subconstructos de una fración: (a) parte-todo, (b) división, (c) medida, (d) operador y (e) razón. La investigación fue descriptiva. La información se recolectó mediante una encuesta de 14 preguntas abiertas y cerradas, pero en el artículo solo se analizan tres preguntas. En el estudio participaron 126 estudiantes (91 mujeres y 35 hombres) del departamento de formación docente de primaria de la Univerisidad de Sinop, Turquia. En la primera pregunta, indicaron las ideas que se les venia a la mente al decir fracciones. En la segunda pregunta se solicitó describir una introducción a las fracciones, especificando las figuras y ejemplos de la vida cotidiana utilizados. En la tercera pregunta describieron las dificultades más frecuentes de sus alumnos para comprender fracciones y cómo superarlas. Las respuestas se analizaron mediante un proceso de codificación abierta. Los resultados indican que la mayoría de los participantes relacionan la palabra fracción con la interpretación parte-todo o con división. Además, la mayoría de los participantes introducen las fracciones utilizando materiales y ejemplos de la vida cotidiana, como dividir un pastel, una manzana, etcétera. La mayor dificultad de los estudiantes se presenta al momento de ordenar fracciones.

Julie et al. (2013) buscaron determinar cuáles contextos pueden dar significado a la multiplicación de fracciones y cómo se pueden usar esos contextos para que los estudiantes comprendan el significado de la multiplicación de fracciones. El marco teórico de la investigación es el de la educación matemática realista (Gravemeijer, 1994). La metodología se basa en un *diseño de investigación* (research design). En el artículo se analiza el primer ciclo de la metodología, el cual incluye la elaboración e implementación piloto de los materiales instruccionales basados en la matemática realista. Los participantes fueron cuatro estudiantes de quinto grado de primaria, de una escuela privada en Indonesia. Los contextos de los problemas se asocian a situaciones donde los estudiantes deben repartir piezas de pan, pasteles o un terreno entre varias personas. Las fuentes de recolección de la información incluyeron grabaciones en video del proceso de instrucción, así como las producciones escritas de los estudiantes. Para analizar las preguntas se puso énfasis en desarrollar la comprensión del significado de $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Los resultados indican que los estudiantes fueron capaces de construir un entendimiento de la multiplicación de fracciones. Se requiere de más experiencias a través de actividades de exploración y resolver otros problemas para fortalecer el conocimiento de los estudiantes sobre la multiplicación de fracciones.

Nillas (2003) centró su investigación en la división de fracciones, indagando respecto de los procesos de solución de problemas que exhiben docentes en formación, para poder determinar su comprensión conceptual y procedimental de la división de fracciones, para eso se preguntó ¿qué estrategias utilizan los profesores para resolver problemas de división de fracciones? y ¿difieren estas estrategias según las situaciones de divisón de fracciones?, basó su investigación en la importancia de tener una buena comprensión matemática profunda, para aprender a enseñar matemáticas. Se emplearon métodos cualitativos, que incluyeron revistas y análisis de respuestas escritas sobre tareas de resolución de problemas. En este estudió participaron diez futuros profesores de primaria, cada uno de los participantes respondió cinco preguntas de resolución de problemas, diseñadas para evaluar su comprensión conceptual y procedimental sobre la división de fracciones, cada una de estas preguntas mostraba diferentes maneras de interpretar la división de fracciones, como medición, partitivo, tasa unitaria, inverso de la multiplicación e inverso de un producto cartesiano. Los resultados respaldaron la idea inicial que se tenía sobre la importancia de que los maestros comprendan estos temas, para esto se deben de capacitar a los futuros profesores con énfasis en la comprensión, tanto conceptual como experimental, se mostró que los futuros docentes utilizan diversas estrategias para resolver los problemas de fracciones, sin embargo, su capacidad para resolver los problemas no garantiza una comprensión conceptual del tema, para esto sugieren ofrecer fomentar el uso de representaciones múltiples para resolver problemas, diseñar tareas que evalúen la comprensión procedimental y conceptual, promover el uso de preguntas para plantear problemas y ofrecer diversas situaciones de resolución de problemas al enseñar la divisón de fracciones.

Bobos y Sierpinska (2017) realizaron una investigación basada en un *diseño de experimentos* en un curso de "Enseñanza de las Matemáticas" para futuros docentes de primaria, donde se busca desarrollar un enfoque de medición de fracciones, este curso pretende lograr que los futuros profesores piensen de manera teórica sobre las fracciones, el experimento se inspiró en un enfoque homónimo, pero dirigido a niños, desarrollado por el psicólogo V. V. Davydov. El marco teórico se compone de una perspectiva vygotskiana sobre los propósitos de la educación y el desarrollo de contenidos, un modelo de pensamientos teóricos y un concepto de razonamiento cuantitativo. Para llevar a cabo el curso se inicio con la fase de reflexión sobre las fuentes de significado del contenido matemático, con base a esta experiencia inicial, se diseño el curso completo de ocho semanas. Lo que se observó a lo largo del curso fue que la conexión entre las concepciones materiales y formales de las fracciones sigue siendo difícil de lograr, también muestra que el enfoque de medición expone la desconexión y, por lo tanto, brinda al instructor y a los estudiantes la oportunidad de tomar conciencia de ella e intentar superarla.

Toluk-Uçar (2009) investigó el efecto de la formulación de problemas en la comprensión de los conceptos de fracciones por parte de futuros maestros de primaria. Se recopilaron datos de futuros docentes de primaria inscritos en un curso de métodos de enseñanza en matemáticas. Se implementaron dos versiones del curso, la versión experimental que se denominaría la del autor y la versión típica del curso que consistía en que los futuros docentes planificaran e impartieran una lección sobre matemáticas. Las principales fuentes de datos del estudio fueron una prueba de fracciones que constaba de 10 preguntas abiertas, una pregunta abierta sobre cuánto creían saber de fracciones y los diarios semanales de matemáticas de los futuros docentes. Se mostró que la formulación de problemas tuvo un efecto positivo impactando en la comprensión de las fracciones por parte de los futuros docentes, así como sus opiniones sobre lo que significa saber matemáticas, considerando así que los cursos de métodos con estrategias de enseñanza apropiadas son buenos sitios para ayudar a los futuros docentes a reconsiderar y modificar sus conocimientos y creencias, es necesario ofrecer más cursos centrados en el desarrollo conceptual de los conceptos matemáticos primarios.

Empson (2003) presentó un análisis de la experiencia con dos estudiantes de bajo rendimiento de primer grado, orientada a la enseñanza de las matemáticas para la comprensión. El fundamento teórico del estudio incluye constructos de la sociolingüistica interaccional y el análisis de tareas de desarrollo. Para analizar la participación de los alumnos se utilizaron *marcos de participación* como lente teórica. Se realizaron pruebas previas y posteriores a la instrucción que documentan el aprendizaje y el análisis de las interacciones en el aula. Se llevo a cabo una serie de instrucciones sobre las actividades que llevarían a cabo los alumnos, antes y después de la instrucción se entrevistó a los participantes, de acuerdo a estas entrevistas se seleccionaron problemas preinstrucción, en donde se ve involucrada la parte de reparto equitativo, operador, comparación/orden y representación de fracciones, también se dieron problemas posterior a la instrucción agregando resta y comparación/equivalencia. Después de las pruebas realizadas se propone que influyeron tres fractores principales que explican el éxito de estos dos estudiantes: el uso de tareas que suscitaron la comprensión previa de los estudiantes, la creación de una variedad de marcos de participación en los que los estudiantes fueron tratados como matemáticamente competentes y la frecuencia de oportunidades para interacción que mejoran la identidad.

Saxe et al. (1999) presentan un análisis de la relación entre el rendimiento estudiantil en el dominio de las fracciones y el grado en que las prácticas en el aula se alinean con los principios recomendados por los marcos de reforma actuales. Los documentos de reforma en educación matemática recomiendan complementar la práctica y memorización de procedimientos matemáticos con el desarrollo de entendimiento conceptual mediante la resolución de problemas. No se encontraron trabajos elaborados por investigadores mexicanos enfocados en el desarrollo de marcos enfocados en el aprendizaje y entendimiento de las fracciones. El estudio de Saxe et al. (1999) se basó en los tratamientos constructivistas del desarrollo cognitivo, al igual en cómo las prácticas en el aula pueden apoyar de manera diferente las metas emergentes de los niños. En el estudio participaron 23 profesores voluntarios cada uno con su aula, los profesores se dividieron en dos grupos, los criterios para participar en el grupo tradicional: compromiso manifestado con el uso de libros de texto, falta de experiencia con el currículo de reforma y acuerdo para usar libros de texto durante el año del proyecto. Los criterios para el segundo grupo: experiencia en la enseñanza de ambas unidades antes de ingresar al estudio, acuerdo para enseñar estas unidades durante el año de proyecto y acuerdo para implementar los métodos discutidos en las reuniones de desarrollo del personal. La información obtenida se recopiló en cintas de video y notas de campo. Mostrando la importancia de las prácticas en el aula que se basan en el pensamiento de los estudiantes y apoyan su compromiso con las cuestiones conceptuales en la resolución de problema, así como el valor de los principios de reforma como guía para una práctica efectiva.

1.3.1. Problemas, marcos, metodologías y resultados

En la literatura revisada destacan las investigaciones interesadas en identificar por qué el aprendizaje de las fracciones es difícil para los estudiantes, algunas de esas investigaciones se enfocan en estudiantes con rendimiento menor que el promedio. Otros artículos han sido trabajos de revisión, uno de los cuales explora los conocimientos matemáticos de profesores en formación en tres periodos históricos. También existen trabajos interesados en conocer las oportunidades de aprendizaje sobre fracciones que se ofrecen en escuelas primarias del estado de California. Se identificaron diversos trabajos que analizan los conocimientos de futuros profesores de matemáticas sobre fracciones, pero solo un par de artículos se interesan en lo que los profesores en servicio hacen en su salón de clase.

La literatura revisada evidencia que una línea importante de investigación se centra en analizar cómo los docentes abordan la enseñanza inicial de las fracciones. Estos estudios destacan la relevancia de que los profesores posean un conocimiento profundo y estructurado sobre este contenido matemático, ya que ello determina su capacidad para facilitar el aprendizaje en los estudiantes. En este sentido, diversas investigaciones examinan tanto el dominio conceptual que los docentes tienen sobre las fracciones como la amplitud de su conocimiento didáctico.

Se ha demostrado que el nivel de comprensión del docente sobre este tema incide directamente en el aprendizaje de los alumnos, lo que ha motivado estudios que evalúan los conocimientos adquiridos por los estudiantes durante su instrucción en fracciones. No obstante, la literatura reporta que muchos docentes carecen de formación especializada en este ámbito. Ante esta problemática, algunos autores proponen la implementación de talleres dirigidos tanto a profesores en servicio como a futuros docentes, con énfasis en la enseñanza de las matemáticas y, particularmente, en el tema de fracciones.

Diversos investigadores señalan que el dominio del contenido sobre fracciones por parte del docente es un requisito necesario, pero no suficiente, para garantizar su enseñanza efectiva. Para lograr un aprendizaje significativo, resulta fundamental una planeación didáctica estructurada, aspecto ampliamente analizado en investigaciones recientes. Estos estudios examinan las estrategias pedagógicas empleadas por los docentes, destacando su impacto directo en el rendimiento académico de los estudiantes. Ahora bien, como ocurre con otros conceptos matemáticos introductorios, el aprendizaje de fracciones presenta dificultades específicas. Entre algunas de las dificultades se encuentran los problemas en operaciones con fracciones como la multiplicación y la división, por esto en algunos de los artículos revisados se muestran resultados en específico sobre la comprensión conceptual y procedimental de la multiplicación y división de fracciones. A pesar de que algunos artículos no tiene como objetivo analizar la multiplicación o división de fracciones, se menciona la importancia de conocer más sobre este tema y resolver las dudas y problemáticas que llegan a presentarse.

También se presentan resultados en donde la atención se centra en alumnos de bajo rendimiendo, para comparar cómo abordan las tareas en comparación con los estudiantes de rendimiento promedio. En otro artículo se muestra el uso de manipulativos para enseñar fracciones, en uno de ellos se presenta un buen resultado cuando los alumnos trabajan de la mano con los manipulativos, mientras que en otro artículo solo se usan para la explicación de los problemas por parte del docente.

En la mayoría de los artículos para recabar información empírica se emplearon diversos problemas sobre las fracciones, en los cuales se incluyeron diferentes subconstructos de una fracción: parte-todo, división, medida, operador y razón, estos problemas se realizaron principalmente con papel y lápiz. Solo en uno de ellos se aplicó una comparación en donde algunos alumnos realizaban sus problemas con manipulativos y otros con una aplicación en un iPad, haciendo uso de la aplicación

Fraction Tiles.

1.4. Pregunta de investigación

Con base en la revisión de la literatura se identificó la dificultad para aprender y enseñar el tema de fracciones en primaria. También existe evidencia de que los manipulativos pueden apoyar el aprendizaje de las fracciones.

Hay pocos trabajos que indaguen con suficiente profundidad las actividades que los profesores de primaria llevan a cabo en las aulas para enseñar fracciones por primera vez. Por otra parte, también es importante profundizar en los procesos de reflexión que llevan a cabo los estudiantes al utilizar manipulables como apoyo para el desarrollo de entendimiento matemático; así como los procesos de conexión entre acciones con los manipulables y las representaciones empleadas en ambientes de lápiz y papel.

Así, con base en las ideas expresadas en el párrafo previo, la pregunta de investigación que orienta el desarrollo de la tesis es: ¿cuáles son los recursos didácticos, así como los subconstructos y representaciones de una fracción que utilizan docentes que trabajan escuelas primarias rurales multigrado para abordar por primera vez este tema con sus estudiantes?

A pesar de la relevancia de la educación multigrado en México, hay pocos estudios en los que el docente sea el foco de atencion (Schmelkes & Aguila, 2019)

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

2.1. Introducción

Los elementos teóricos de esta tesis están integrados por diversos constructos, organizados en un marco conceptual. Los constructos o conceptos teóricos son herramientas que ayudan al investigador a entender, explicar o predecir el funcionamiento de un fenómeno. Un constructo es una abstracción que no puede observarse directamente, pero que es útil para interpretar datos empíricos y para la construcción de teoría (Ary et al., 2009). En este capítulo se explica qué es un marco de investigación y cuáles son los principales tipos de marco. Además se detallan los componentes del marco conceptual de este trabajo.

Aguilar (2013) argumenta que existen diferentes formas en las que la teoría puede integrarse en una investigación. La teoría no siempre está conformada por varios conceptos y definiciones, ya que algunas veces solo se utiliza un concepto o dos. La teoría puede estar integrada además de conceptos (*contrato didáctico* o *concepto-imagen*), por afirmaciones sobre un dominio; tales como los conocimientos o resultados que se han generado con base en observaciones empíricas. Así, la teoría no debe imaginarse únicamente como un conjunto de conceptos o definiciones; también puede ser concebida como un conjunto de ideas, distinciones o afirmaciones asociadas a una situación o fenómeno didáctico.

2.2. Tipos de marcos de investigación

En esta sección se explican las características de cada uno de los tres diferentes marcos que se pueden utilizar para orientar un trabajo de investigación: (a) marco teórico, (b) marco práctico, y (c) marco conceptual (Lester, 2005).

Un *marco teórico* guía las actividades de investigación basándose en una teoría formal, es decir, una teoría que se ha desarrollado utilizando una explicación coherente y establecida de ciertos fenómenos y relaciones, tales como la epistemología genética de Piaget o la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. Este tipo de marco tiene al menos cuatro problemas: (a) los marcos teóricos obligan a las investigaciones a explicar sus resultados por "decreto" y no con base en la evidencia empírica; (b) los datos tienen que "viajar" en el sentido de que se despojan con demasiada frecuencia de su contexto y significado local para ajustarse a la teoría; (c) los estándares para el discurso basado en teoría no son útiles en la práctica del día a día; (d) al utilizar una teoría se omite la triangulación teórica, la cual se refiere al proceso de comparar y resaltar las interpretaciones y explicaciones de un fenómeno desde diferentes perspectivas teóricas. La triangulación teórica permite evaluar fortalezas, debilidades e idoneidad de una investigación (Eisenhart, 1991).

Un *marco práctico* guía la investigación utilizando "lo que funciona", es decir la experiencia práctica de las personas directamente involucradas en cierto fenómeno o actividad. Este tipo de marco no está integrado por una teoría formal, sino por el conocimiento acumulado a partir de la experiencia de una persona. Aunque este tipo de marco tiene al menos una ventaja sobre los marcos teóricos, que es su aplicabilidad en la práctica, tiene una limitación sería, que consiste en su bajo potencial de generalización. Este marco tiende a ser, en el mejor de los casos, sólo generalizable localmente; es decir, el investigador descubre "lo que funciona" bajo ciertas condiciones y limitaciones específicas, pero aprende poco o nada que vaya más allá del contexto específico. Otro inconveniente de los marcos prácticos es que dependen de las perspectivas de los participantes locales de una situación o fenómeno.

Un *marco conceptual* es "una estructura esquelética de justificación, más que una estructura esquelética de explicación" (Eisenhart, 1991). Un marco conceptual está integrado, además de ciertos conceptos teóricos y sus relaciones, por argumentos que explican por qué tales conceptos y relaciones son apropiados y útiles para comprender o explicar el fenómeno de interés. Al igual que los marcos teóricos, los marcos conceptuales se basan en investigaciones previas, pero los marcos conceptuales se construyen a partir de una amplia variedad de fuentes. Eisenhart (1991) argumenta que los marcos conceptuales no están construidos como vigas de acero, hechas a partir de proposiciones teóricas o experiencias prácticas, sino como varas de bambú que se adaptan tanto a los puntos de vista de los observadores externos, como de los participantes de un fenómeno o situación.

2.3. Elementos del marco conceptual

El marco conceptual de esta tesis está integrado por tres componentes básicos: (a) principio de mediación instrumental (Moreno-Armella, 2001, 2002), (b) los diferentes subconstructos asociados con las fracciones (Lamon, 2006) y (c) elementos de la teoría de representaciones (Duval, 2017). El marco se integró de esta manera, ya que en la mayoría de los trabajos de investigación en el ambito anglosajon, los cinco subconstructos de una fracción constituyen el elemento teórico mayormente utilizado para comprender las problemáticas de aprendizaje asociadas con el concepto de fracción y sus operaciones, aunado a que Susan Lamon es una de las expertas más reconocidas a nivel internacional en el tema de fracciones. El principio de mediación instrumental ayuda a explicar cómo el tipo de herramientas utilizadas durante el proceso construcción del conocimiento determinan las características del aprendizaje de los estudiantes. En este sentido, el término *herramienta* se refiere a cualquier producción cultural, incluyendo el lenguaje y demás formas de representación, así como a herramientas materiales entre las que se encuentran la computadora, manipulativos físicos, regla y compás, papel y lápiz, entre otros. Los cinco subconstructos de una fracción se incluyen en el marco conceptual ya que la literatura de investigación indica que esta diversidad de interpretaciones es uno de los factores que dificulta el aprendizaje de las fracciones, dado que durante el proceso de instrucción se enfatiza en la interpretación parte-todo, dejando de lado el resto de las interpretaciones, las cuales son necesarias para una comprensión profunda del concepto de fracción y de las operaciones con fracciones. La teoría de representaciones se utiliza, ya que estas, al ser producciones culturales, influyen en las carscterísticas del aprendizaje de los estudiantes. Entonces, las oportunidades de aprendizaje brindadas por los profesores, dependen del tipo de representaciones y de las operaciones entre representaciones que se promueven en los salones de clase.

2.3.1. Principio de mediación instrumental

La idea de *mediación instrumental* fue concebida, desde el punto de vista psicológico, por Lev Vygotski (Moreno-Armella, 2002), quien argumenta que la dimensión principal de la mente humana es social, por lo que la psicología debería centrarse en los procesos mentales superiores propios del ser humano (tales como el pensamiento verbal, la memoria lógica y la atención selectiva). De acuerdo con Kozulin (1994), en *La Pisicología del Arte*, Vygotski expresa que el desarrollo y composición de los procesos mentales superiores humanos y, en general, las acciones humanas dependen de las formas específicas de mediación semiótica de las que se disponga, las cuales pueden ser tan sencillas como un gesto o tan complejas como un texto literario.

Una actividad que genera procesos mentales superiores es una actividad mediada socialmente significativa. La fuente de mediación reside, ya sea en una herramienta material, en un sistema de símbolos o en la conducta de otro ser humano. Para que se forme una función mental superior se requiere de un proceso de *internalización*. Lo que inicialmente aparece como un mediador simbólico externo o una comunicación interpersonal, posteriormente se convierte en un proceso psicológico interno. Entonces, de acuerdo con Vygotski, el conocimiento es primero un producto social, que mediante un proceso de internalización se convierte en un producto personal (Kozulin, 1994).

El *principio de mediación instrumental* expresa que "todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico" (Moreno-Armella, 2001, p. 67); lo cual significa que el desarrollo de producciones culturales, que incluye tanto herramientas materiales como sistemas de representación externa, ha permitido al ser humano ir más allá de los límites impuestos por la biología. Mediante la producción de herramientas el ser humano ha alterado su estructura cognitiva y adquirido nuevos *órganos artificiales* que han apoyado su proceso de adaptación al mundo exterior (Moreno-Armella, 2001).

En esta línea de ideas, Bruner (2018) argumenta que el desarrollo del funcionamiento intelectual depende de producciones culturales, de las cuales el lenguaje es el principal exponente; basandose en descubrimientos fósiles a partir de los cuales se puede concluir que "el tamaño del cerebro, en la medida que puede estimarse a partir de la capacidad craneana, se ha triplicado a raíz de la fabricación y empleo de utensilios y herramientas" (Bruner, 2018, p. 53).

El impacto de las herramientas sobre la actividad cognitiva se puede ilustrar mediante el desarrollo de las ciencias naturales y las matemáticas. Por ejemplo, el desarrollo de la biología o de la astronomía no sería concebible sin la aparición de herramientas como el microscopio y el telescopio, las cuales permitieron al ser humano acceder a otros niveles de la realidad (al mundo microscópico y al de la escala cósmica) que no son accesibles a través de sus capacidades biológicas. Este acceso a nuevos niveles de la realidad trajo aparejado el desarrollo de los cuerpos conceptuales que son la base del desarrollo científico actual. Esto es, los instrumentos de mediación tienen un impacto determinante en la arquitectura de la mente humana. Por ejemplo, la escritura ha producido cambios en la estructura funcinal de la memoria, ya que el disponer de registros escritos cambia la organización funcional de la memoria, permitiendo al ser humano reflexionar sobre sus propias ideas, lo cual no sería posible, con el mismo nivel de profundidad, sin la existencia de esta herramienta (Moreno-Armella, 2002).

En resumen, las acciones cognitivas están mediadas por los instrumentos y, por tanto, los conocimientos producidos permanecen intrínsecamente vinculados a dichos instrumentos (Moreno-Armella, 2001). El funcionamiento mental está delineado o incluso definido por los mediadores que se utilizan para llevar a cabo una tarea. (Wertsch, 1993)

2.3.2. Cinco subconstructos para interpretar una fracción

Lamon (2020) explica que las fracciones son un concepto difícil de entender por diversas razones. Primero, las fracciones son símbolos bipartitos que se escriben de la siguiente manera $\frac{a}{b}$. El número que se encuentra en la parte superior de la línea horizontal se llama numerado y el número inferior se llama denominador, el orden de estos números es importante. Por lo tanto las fracciones se pueden pensar como pares ordenados de números enteros por lo que $\frac{3}{4}$ no es lo mismo que $\frac{4}{3}$. Otro punto importante es que el número cero puede aparecer en el numerador de una fracción, pero no en el denominador.

En segundo lugar se encuentra en la relación entre las fracciones y los números racionales. Todos los números racionales se pueden escribir en forma de fracción $\frac{3}{4}$, $\frac{\sqrt{4}}{3}$ (generalmente se escribe como $\frac{2}{3}$), $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$ (usualmente se escribe como $\frac{2}{1}$) estas son todas fracciones y números racionales; pero no todos los números escritos en froma de fracción son racionales, $\frac{\pi}{2}$ no es un número racional aunque esta escrito en forma de fracción. Cada fracción no corresponde a un número racional diferente y existe un número racional diferente para cada una de las tres fracciones $\frac{2}{3}, \frac{6}{9}$ y $\frac{10}{15}$. Un solo número racional subyace a todas las formas equivalentes de una fracción. Los números racionales se pueden escribir como fracciones, pero también se puede escribir en otras formas. Los decimales terminales son números racionales, los decimales periódicos y no terminales son números racionales, los porcentajes son números racionales, los decimales no terminales ni periódicos no son números racionales, las razones y las tasas son números racionales.

En el contexto de los números naturales, cada natural tiene un único predecesor y sucesor, pero en el conjunto de los números racionales siempre hay infinitos racionales entre otros dos racionales cualesquiera. Además, cada número natural está representado por un símbolo único (en el sistema decimal indoarábigo), pero cada número racional puede representarse por infinitas expresiones equivalentes (por ejemplo, 4/1, 8/2, 4.0, 4.00), etcétera. Sin embargo es importante ayudar a los estudiantes a comprender que, a pesar de las muchas diferencias entre los números naturales y racionales, todos comparten la característica común de expresar magnitudes que pueden ubicarse y ordenarse en una recta numérica (Siegler et al., 2011).

En esta misma línea de ideas, la aritmética de fracciones brinda a los niños la oportunidad de aprender que las operaciones aritméticas sobre las magnitudes tienen un efecto diferenciado que depende de los números con los que se opera. Por ejemplo, al multiplicar números naturales nunca se disminuye la magnitud de los factores, pero al multiplicar dos fracciones o dos números decimales entre cero y uno, siempre se obtiene un producto menor que cualquiera de los multiplicandos. De manera similar, al dividir una magnitud por un número natural siempre se obtiene un cociente menor que el dividendo, pero dividir por una fracción o decimal entre cero y uno, siempre se obtiene un cociente mayor que el dividendo. Por lo tanto, aprender aritmética de fracciones y decimales brinda la oportunidad de obtener una comprensión más profunda de las operaciones aritméticas, particularmente la multiplicación y la división. En esta línea de ideas, Siegler y Lortie-Forgues (2014) sugieren que el desarrollo numérico puede verse como la ampliación progresiva del conjunto de números cuyas propiedades, incluidas sus magnitudes y los efectos de las operaciones aritméticas sobre esas magnitudes, pueden representarse con precisión (Lortie-Forgues et al., 2015).

De acuerdo con Lamon (2006), existen cinco formas de interpretar o entender una fracción: (a) parte todo, (b) cociente, (c) razón, (d) medida y (e) operador.

Interpretación de una fracción como parte-todo. Se considera un rectángulo dividido en cinco partes iguales, donde 3 de ellas estan sombreadas ($\frac{3}{5}$ partes sombreadas). Ahora podríamos pensar que este mismo rectángulo está compuesto por 20 cuadrados pequeños, ahora la parte sombreada estaría representada por $\frac{12}{20}$. Si pensamos que el réctangulo esta compuesto por pequeños rectángulos los cuales estan formados por dos de los pequeños cuadrados, el área sombreada es la siguiente $\frac{6}{10}$, aquí unitizar nos ayuda a generar nombres equivalentes para la misma cantidad. Lo que se debe de cuidar es la parte sombreada; es decir, nosotros podemos elegir piezas del tamaño que queramos, siempre conservando el área sombreada que originalmente se nos da. Del ejercicio anterior se muestran las siguientes equivalencias:

1. $\frac{3}{5}$ particiones en columnas

2. Ahora si tomamos a pares las columnas $\frac{1\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}}$

3. Tomando paquetes de 3 columnas $\frac{1}{1\frac{2}{3}}$

4. Al dividir en cuadritos la parte sombreada es $\frac{12}{20}$

5. Si se toma a pares los cuadrados $\frac{6}{10}$

6. Al formar paquetes de 4 cuadrados $\frac{3}{5}$

7. Y por último con paquetes de 6 cuadrados, la parte sombreada es $\frac{2}{1\frac{1}{3}}$

Notando que el punto uno es igual al punto dos, al mismo tiempo es igual al punto tres y así sucesivamente. Por otro lado, también se presentan algunos problemas cuando se realiza el dibujo y el sombreado, a veces la unidad no se divide en partes iguales, ejemplo si tienen la fracción $\frac{7}{8}$ y dividen en el dibujo solo una columna de las partes sombreadas, ahora tendrán $\frac{8}{9}$ creyendo así que $\frac{7}{8} = \frac{8}{9}$, por esto es importante saber el significado del símbolo $\frac{a}{b}$ (tomamos a partes iguales de b), una forma más simple de entender este símbolo es haciendo un dibujo simple como un rectángulo y dividirlo en las partes que se deseen.

El término *unitizar* se refiere a la asignación cognitiva de una unidad de medida; se refiere al tamaño del entero que uno construye mentalmente el cual se divide equitativamente para dar lugar a una fracción determinada (Lamon, 1996). Por ejemplo, al tener una caja de refrescos de 24 piezas, la podemos pensar también como dos cajas de 12 o cuatro cajas de 6 refrescos. Siguiendo con la idea de Lamon (2006), cuando las imagenes no son útiles se acude a la *unitización* para abordar los problemas sobre fracciones parte-todo, unitizar e interpretar los resultados de una imagen ayuda a los estudiantes a prepararse para la suma y resta de las fracciones. Para apoyar la comparación de fracciones mediante la interpretación parte-todo, a los estudiantes se les puede sugerir que generen fracciones equivalentes para obtener denominadores iguales y así poder decidir cuál de las dos fracciones es mayor. Lo anterior también es una buena estrategia para realizar con facilidad las operaciones de suma y resta.

Interpretación de una fracción como cociente. Para entender a las fracciones como cocientes, se pueden proponer problemas como el siguiente, los cuales propone Lamon, no siendo exactamente los únicos: siete personas deben repartir tres pizzas de pepperoni idénticas, siguiendo las siguientes instrucciones:

1. Haz un dibujo que muestre cómo será la parte de cada persona.

2. Nombra la cantidad de pizza en una porción.

3. ¿Qué parte del total de la pizza es una porción?

Aquí lo que se aplica es una división ya que tenemos un objeto que queremos repartir entre ciertas personas. Se nos pide primero realizar un dibujo que muestre cómo será la parte de cada persona, iniciamos solo tomando 1 pizza de las tres que se nos da, esta pizza debe de ser partida en siete trozos del mismo tamaño, de esta pizza cada persona obtiene una porción de $\frac{1}{7}$ de pizza, pero como tenemos tres pizzas, cada persona en general recibe $\frac{3}{7}$ de pizza, pero tenemos que recalcar que la porción siempre será la misma para cada una de las siete personas, la porción es de $\frac{1}{7}$, aunque se tengan 300 pizzas, así que para este caso de las pizzas, el símbolo $\frac{a}{b}$ representa a pizzas por b personas, tenemos otro ejemplo en donde son 4 pizzas entre seis personas, aquí entra el tema de equivalencias, ya que para este problema los niños que participaron en la investigacion de Lamon dieron diferentes posibilidades de como se podria repartir, una de ellas fue repartir tres de las pizzas a la mitad y la cuarta pizza en seis partes, así cada persona obtiene de pizza $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$, la otra forma es partir cada una de las pizzas en seis partes teniendo así para cada persona $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$, pero sin importar la forma en la que fuera representada la cantidad, en cada caso posible cada persona obtendría la misma cantidad de pizza. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$, $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$. Pero para problemas en donde involucren más particiones,como en el siguiente problema:

Un grupo de 24 personas fueron a un restaurante y se pidieron 18 pizzas de queso. El restaurante tenía una mesa para 12 personas, una mesa para seis personas, otra mesa para cuatro personas y una última mesa para dos personas. ¿Cómo debe distribuir el camarero las pizzas? ¿Cuánta pizza recibe cada persona?, primero si tenemos 18 pizzas y 24 personas, tenemos lo siguiente $\frac{18}{24}$, se va a ir dividiendo tanto el numerador como el denominador para encontrar la cantidad de pizzas que se debe de poner por mesa, si dividimos primero entre 2, obtenemos $\frac{9}{12}$ y $\frac{9}{12}$, si uno de estos $\frac{9}{12}$ volvemos a dividir entre 2 obtenemos $\frac{4\frac{1}{2}}{6}$ y $\frac{4\frac{1}{2}}{6}$ y el otro $\frac{9}{12}$ dividirlo entre 3, se obtiene $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{3}{4}$ y cada uno de esto $\frac{3}{4}$ dividirlos entre 2 se tiene $\frac{1\frac{1}{2}}{2}$ y $\frac{1\frac{1}{2}}{2}$, como el denominador indica el número de personas, ya se logró obtener las 24 personas para una mesa, 6, 4 y 2 personas.

La siguiente forma es el *razonamiento con fracciones*, antes de que se les de a los estudiantes una forma de como es que deben de resolver un problema, ellos deben de desarrollar la intuición, de relacionarlo con temas que ellos ya dominan, un ejemplo es cuando se tienen fracciones con el mismo denominador, si queremos saber quien es más grande si $\frac{2}{5}$ o $\frac{3}{5}$, se observa que las fracciones tienen el mismo denominador, de esta manera la forma en la que se puede observar cuál de las fracciones es mayor es en los numeradores, los cuales son 2 y 3, al identificar cual de los numeradores es mayor ya tendríamos la respuesta. Dentro de este capítulo, Lamon también presentó un ejercicio, en donde se pedía encontrar 3 fracciones entre $\frac{1}{9}$ y $\frac{1}{8}$, el método que uno de los estudiantes realizó, fue el uso de fracciones equivalentes, de la siguiente manera, a $\frac{1}{9}$ lo pensó como $\frac{\frac{8}{8}}{9}$ y pensó en $\frac{1}{8}$ como $\frac{1\frac{1}{8}}{9}$. Luego si se mantiene el 9 en el denominador, cualquier fracción que se encuentre entre 1 y $1\frac{1}{8}$ podría usarse en el numerador, y estas fracciones son las que son menores que $\frac{1}{8}$ y agregandole 1:

$$1\frac{1}{9}, 1\frac{1}{10}, 1\frac{1}{11}$$

Después escribió los números mixtos como fracciones

$$\frac{10}{9}, \frac{11}{10}, \frac{12}{11}$$

y finalmente, dividió por 9 multiplicando cada denominador por 9.

$$\frac{10}{81}, \frac{11}{90}, \frac{12}{99}$$

Otra forma de pensar es con actividades visuales, ya que son útiles sin la necesidad de utilizar algoritmos, por ejemplo imaginándonos una barra de chocolate rectangular que tiene cinco divisiones, se nos viene a la cabeza diferentes preguntas como: ¿cuántas piezas son la mitad de la barra de chocolate?, ¿2 de estas divisiones que parte de la barra representa?, ¿cuántas veces cabe $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{2}$?, cada una de estas preguntas y cualquier otra que se nos llegue a ocurrir, se resuleve con las cuatro operaciones que conocemos para fracciones.

Interpretación de las fracciones como medida. Dentro de esta interpretación las fracciones miden distancia, según la interpretación de la medida, una fracción suele ser la medida asignada a algún intervalo o región, dependiendo si se utiliza un modelo unidimensional o bidimensional. En un espacio unidimensional, un número racional mide la distancia de cierto punto en la recta numérica al cero. La unidad siempre es un intervalo de longitud 1, esto si se está trabajando en una recta numérica y en un espacio bidimensional, un número racional mide un área. Una unidad de medida siempre se puede dividir en subunidades, estas subdivisiones de la unidad las podemos observar en una recta numérica, en un vaso graduado, una regla, una taza medidora o en un termómetro. Estas subdivsiones nos ayudan ya que si lo que deseamos medir no se puede realizar con un metro, podemos dividirlos en decímetros, si aún no sirve así, se puede dividir en centímetros o milímetros. En esta sección se presenta la imagen de una tortuga simulando que esta en una carrera, con punto de inicio en 0 y la meta en 1, acompañado de la siguiente pregunta: ¿a qué distancia del punto de partida se encuentra la tortuga?, para determinar la posición en la que se encuentra la tortuga se requiere de particiones sucesivas, hasta que una de sus marcas caiga en donde se encuentra la tortuga, en estos casos se suele utilizar la notación de flechas, el objetivo de estas actividades es que los estudiantes adquieran una idea de como se relacionan los números fraccionarios entre sí. Así que en general los estudiantes entienden como medida de los números racionales cuando: (a) se sienten cómodos realizando particiones de cualquier tamaño, (b) son capaces de encontrar cualquier número de fracciones entre dos fracciones dadas, (c) y son capaces de comparar dos fracciones cualesquiera.

Interpretación de las fracciones como operadores. Interpretar las fracciones como operadores involucra pensar en las fracciones como funciones. En esta función, los números racionales actúan como asignaciones, tomando un conjunto o región y asignándolo a otro conjunto o región. Dicho de otra manera la noción de operador de los números racionales se refiere a la reducción y el aumento, o la multiplicación y la división. Los operadores son transformadores que: alargan o acortan segmentos de línea, aumentar o disminuir el número de elementos en un conjunto de objetos discretos (objetos que tienen límites conocidos y definibles) y tomar una figura en el plano geométrico, como un triángulo o un rectángulo, y mapearla sobre una figura más grande o más pequeña de la misma forma.

Así que un operador es un conjunto de instrucciones para llevar a cabo un proceso. Por ejemplo, $\frac{2}{3}$ es un operador que indica que multiplique por 2 y divida el resultado por 3, el operador $\frac{2}{3}$ puede verse como una operación única sobre una cantidad Q, o puede verse como una multiplicación realizada sobre una división de una cantidad Q, o como una división realizada sobre una multiplicación de una cantidad Q:

$$\frac{2}{3}(Q) = 2(\frac{Q}{3}) = \frac{2Q}{3}$$

Por otra parte Lamon (2001) tomó en cuenta el número racional $\frac{3}{4}$ para explicar las diferentes formas de entenderlo.

1. Parte-todo «3 partes de 4 partes iguales»: el $\frac{3}{4}$ significa 3 partes de 4 partes iguales de la unidad, con equivalentes fracciones encontradas, como las siguientes

$$\frac{3}{4} = \frac{12}{16} = \frac{1\frac{1}{2}}{2}$$

Algunas actividades dentro del sálon de clases: razonamiento, encontrar fracciones equivalentes.

2. Operador «$\frac{3}{4}$ de algo»: $\frac{3}{4}$ da una regla que indica cómo opera sobre una unidad, multiplica por 3 y divide el resultado entre 4 o divide entre 4 y multiplica el resultado por 3. Algunas actividades que se pueden realizar dentro del salón: estirarse y encogerse con maquinas y fotocopiadoras, papel pegable, usar modelos de área para

multiplicación y división.

3. Porciones y tasas «3 partes a 4 partes» por cantidades 3:4 : 3:4 significa que 3 partes de A se comparan con 4 partes de B, donde A y B son de igual medida o 3 unidades de A por 4 unidades de B, donde A y B son de diferentes medidas.

Las actividades que se pueden llevar a cabo dentro de un salón de clases, aplica el razonamiento, hacer tablas de razones, analizar gráficos y hacer aritmética de razones.

4. Cociente «3 dividido por 4» : $\frac{3}{4}$ es la cantidad que recibe cada persona cuando 4 personas comparten 3 unidades de algo, esto se puede aplicar en actividades como: dividir conjuntos de objetos discretos y conjuntos.

5. Medida «3 ($\frac{1}{4}$ unidades)» : $\frac{3}{4}$ significa una distancia de 3 ($\frac{1}{4}$ unidad) desde 0 en la recta numérica o 3 ($\frac{1}{4}$ de unidad) de un área dada, ya que si bien la interpretación como medida se ve fuertemente relacionada con la recta numérica por esto se toma como el total el intervalo [0,1], sin embargo se pueden tomar para otros modelos, como al medir un ingrediente en una receta, como leche para un pastel, los alumnos pueden realizar actividades como: dividir sucesivamente rectas numéricas, áreas y volúmenes o lectura de medidores y manómetros.

Para estas diferentes interpretaciones Lamon (2005) discute diferentes actividades.

1. Razón: para esta parte se sugieren los siguientes problemas.

a) Decide cuál de las dos fracciones de cada par representa una cantidad mayor usando únicamente razonamiento. No se utilizarán denominadores comunes ni estrategias de multiplicación cruzada.

- $\frac{3}{7}, \frac{5}{8}$ - $\frac{4}{9}, \frac{5}{11}$ - $\frac{3}{7}, \frac{2}{5}$ - $\frac{2}{5}, \frac{5}{9}$ - $\frac{3}{8}, \frac{5}{9}$
- $\frac{3}{7}, \frac{5}{12}$ - $\frac{6}{11}, \frac{7}{12}$

b) Responda las siguientes preguntas de ¿puedes ver? usando una figura de un cuadrado el cual esta dividido en 5 partes iguales, las preguntas son las siguientes: ¿puedes ver $\frac{3}{5}$ de algo?, ¿puedes ver $\frac{5}{3}$ de algo?, ¿puedes ver $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$?, ¿puedes ver $\frac{5}{3}$ de $\frac{3}{5}$?, ¿puedes ver $1 \div \frac{3}{5}$?, ¿puedes ver $\frac{3}{5} \div 2$?, ¿puedes ver $\frac{5}{4} \div \frac{3}{4}$?

2. Parte-todo: a) ¿10 centavos es qué parte de un dólar? Encuentra 3 formas diferentes de nombrar la parte de un dólar. b) Sombrea 5/6 de este rectángulo y nombra tantas fracciones equivalentes como puedas ver. (el rectángulo que se muestra,

esta dividido en 36 cuadritos pequeños del mismo tamaño)

3. Cociente: a) Alice y Brad compartirán una galleta grande. ¿Hay alguna manera de dividir la galleta de modo que un niño reciba dos pedazos y el otro tres pedazos, pero ambos reciban la misma cantidad?

b) Si 4 personas comparten 6 barras de chocolate, ¿cuántos dulces recibirá cada una?

c) Si 4 personas comparten 6 barras de chocolate, ¿cuánto caramelo recibirá cada una?

4. Operador:

a) Reducir una unidad a la mitad de su tamaño y luego triplicar el resultado en tamaño equivale a:

b) (Se muestra la imagen de un círculo dividido en 4 partes iguales, donde solo 3 de esas partes estan sombreadas) Sombrea $\frac{1}{6}$ de la parte sombreada de esta imagen. ¿Cuánto es $\frac{1}{6}$ de $\frac{3}{4}$?

5. Medida: a) (Se presenta el dibujo de un reloj de manecillas) En el reloj de la derecha, dibuja la ubicación de la manecilla de la hora y del minuto cuando sea exactamente la 1:25. Explica cómo supiste hacia dónde apuntar las manos. b) Usa la partición para encontrar dos fracciones entre las dadas. $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{5}$, $\frac{9}{10}$ y 1

Petit et al. (2022) al igual que otros autores mencionan que la forma usual de enseñar fracciones es mediante la interpretación parte-todo. Aunque es una interpretación importante, una fracción interpretada como parte-todo no comunica la idea fundamental de que una fracción es un número con una magnitud específica. La fracción $\frac{3}{4}$ interpretada como parte de un todo, se representa como un cuadrado dividido en cuatro partes iguales, de las cuales solo tres se encuentran sombreadas. Por otro lado, esa misma fracción interpretada como un número con magnitud específica se representa como un punto ubicado en una recta numérica.

Petit et al. (2022) resalta la importancia de los modelos visuales construidos por los estudiantes (bocetos, dibujos o diagramas), tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas. Al construir modelos visuales de fracciones, es posible que los estudiantes consideren aspectos como el tamaño del todo y el proceso de dividir equitativamente el modelo en partes iguales. Como ejemplo se muestra el modelo visual propuesto por una estudiante (Jessie de nueve años de edad) para ordenar cuatro fracciones de menor a mayor ($\frac{7}{3}, \frac{7}{5}, \frac{7}{6}, \frac{7}{12}$). Jessie utilizó la representación de la recta numérica del 0 al 3 para ubicar las fracciones solicitadas, comenzó dividiendo al intervalo $[0, 1]$ en 12 partes iguales, para ahí poder ubicar a la fracción $\frac{7}{12}$. El intervalo $[1, 2]$ lo dividió en 6 partes, para ahí ubicar las fracciones $\frac{7}{6}$ y $\frac{7}{5}$. Por último, al intervalo $[2, 3]$ lo dividió en tres partes iguales para poder ubicar a $\frac{7}{3}$. Jessie tuvo que considerar el tamaño (la longitud) de cada entero representado en este modelo y dividirlo en 3, 5, 6 y 12. Este modelo visual proporciona evidencia del desarrollo de una comprensión relacionada con la comparación y el orden de las fracciones.

Existen tres categorías generales de modelos visuales con los que los estudiantes interactúan al abordar el tema de fracciones: modelos de áreas, modelos de conjuntos y rectas numéricas.

Modelos de áreas. En esta categoría se incluyen objetos o dibujos como cuadrículas, geoplanos, papel doblado y bloques de patrones. Estos modelos visuales utilizan el contexto de un área o región para comunicar una fracción, un ejemplo que se presenta, es el de un rectángulo, el cual esta dividido a la mitad y solo una de las mitades esta sombreada, así que la región sombreada cubre $\frac{1}{2}$ del área de todo el rectángulo. Por lo tanto, esta es una interpretación de área de la fracción $\frac{1}{2}$, es importante señalar que las características clave de los modelos de área es el área de las piezas, no la forma de las piezas.

Modelos de conjuntos. Estos modelos implican considerar la parte fraccionaria de un conjunto de objetos contables. Algunas de las colecciones de objetos que utilizan los niños en las escuelas son botones, caramelos, fichas o canicas. Si se presenta un conjunto formado, por ejemplo, por nueve rombos, estos objetos integran un conjunto completo, así que si se pide representar $\frac{1}{3}$ del conjunto, esta fracción esta representada por tres rombos. Para que a los estudiantes no se les complique la identificación de la fracción, los objetos se colocan en forma de una matriz, para así estar ordenados y poder identificar mejor lo que se solicita. Dentro de estos modelos también se encuentran los conjuntos compuestos, los cuales se componen de subgrupos u objetos que estan agrupados; por ejemplo, una caja de refrescos agrupada en paquete de seis. Algunas preguntas relevantes para los estudiantes son: ¿qué fracción de un paquete de seis refrescos son dos refrescos?, ¿cuántos paquetes de seis hay en media caja de refrescos? y ¿qué fracción de una caja son 3 paquetes de seis?

Rectas numéricas. En este caso se deben de tomar en cuenta aspectos tales como la distancia lineal y la ubicación de un punto en una recta numérica. Esta representación se diferencia de los modelos de áreas y conjuntos por varias razones, empezando por la definición del todo o la unidad. En un modelo de conjunto, el total es el número de objetos del conjunto, en un modelo de área, el todo es el área de una región determinada y el todo en una recta numérica esta definido por la longitud del intervalo $[0, 1]$. Otra característica definitoria de la recta numérica es la forma en que se representa a los números enteros. Los números enteros se encuentran en la misma representación de la recta numérica; pero están como elementos separados en los modelos de área o de conjunto. Esto nos permite que los números mayores y menores que 1 se representen más claramente en la recta numérica que en los otros modelos.

De los tres modelos visuales que se analizaron, la recta numérica es el único cuyo significado requiere integrar un componente visual (la recta) con los números, ya que no solo podemos colocar un número en la recta numérica o identificar el valor de un punto en una recta numérica si se proporcionan otros dos números.

De acuerdo con Lamon (2001) la interpretación parte-todo es una de las vías menos valiosas para que los estudiantes desarrollen un entendimiento profundo de los números racionales. Por otro lado, la interpretación parte-todo con unitización y la interpretación de medida han mostrado ser particularmente sólidas para promover el entedimiento conceptual y la fluidez procedimental al operar con fracciones. Existe evidencia empírica de que la unitización y la interpretación como medida (y sus representaciones correspondientes) son herramientas poderosas para ayudar a los niños para transitar de los números naturales a los racionales, porque estas interpretaciones amplian los principios de medición con los que los niños estan familiarizados desde la infancia.

2.3.3. Marco de las representaciones semióticas

En las secciones previas se ha discutido sobre las diversas formas en cómo se puede representar una fracción; dividiendo figuras geométricas, objetos, conjuntos, etcétera; representadas como puntos en una recta; así como mediante numerales, pero abordados y explicados de forma separada. Para considerar una visión unificada de las representaciones se consideran ideas de Duval (2017) quien argumenta que para entender el trabajo matemático mediante el uso de representaciones es necesario reconocer, en primer lugar, las unidades de significado, es decir, las datos o informaciones matemáticamente relevantes en el contenido de la representación dada. En segundo lugar, es necesario transformar estas unidades de significado, ya sea convirtiéndolas en otro registro o realizando las operaciones de tratamiento dentro del mismo registro. El interés de modelar el funcionamiento cognitivo del pensamiento en términos de registros no es teórico, sino en primer lugar metodológico. Proporciona las herramientas para analizar las dos condiciones requeridas para comprender y hacer matemáticas.

Principalmente una representación semiótica, lo matemáticamente esencial no es la representación en sí, sino todas sus posibles transformaciones en otras representaciones semióticas.

Se tienen dos tipos heterogéneos de sistemas semióticos: los códigos y los registros, los códigos cumplen con una función comunicativa, porque permite transmitir la información, o cambiar el medio físico de comunicación como, por ejemplo, los alfabetos que permiten ir y venir entre el habla y la escritura. Pero hay otros que cumplen en primer lugar, o esencialmente, las funciones cognitivas de objetivación (tomar conciencia de algo que desconociamos), pensamiento creativo mediante el uso de transformaciones internas de representaciones semióticas, las representaciones semióticas son, en el lenguaje natural, las oraciones y no las palabras; en el lenguaje matemático, las ecuaciones y no los números y las letras; en la vizualización geométrica, la configuración de unidades figurativas y no los puntos o las líneas rectas. Las representaciones semióticas poseen dos características que no se encuentran en las unidades elementales de significado que llamamos **signos**. Así los sistemas numéricos

Comparación de registros y códigos	Implementación	Tipo de representación
Registros	lenguaje, figuras, gráficos, etc.	Contenido que articula varias unidades de significado según dos o tres niveles de organización
Códigos	código binario, alfabetos, etc.	Secuencia de caracteres a carácter de la secuencia resulta de la elección de la codificación de datos y no de la regla de combinación

Cuadro 2.1: Tipos de sistemas semióticos.

son registros y no códigos.

Se introdujo la noción de registro de representación semiótica para dar cuenta de los dos tipos de transformación de las representaciones semióticas que distinguen la actividad matemática de todas las demás formas de actividades intelectual. Un registro es, por supuesto, un sistema semiótico, pero un sistema particular que no funciona ni como código ni como un sistema formal. Se caracteriza esencialmente por las operaciones cognitivas específicas para cuya realización proporciona los medios. Todos los registros son sistemas semióticos cognitivamente creativos. Esto significa que, para que un sistema semiótico se considere un registro, es necesario identificar las operaciones específicas de producción y transformación de representaciones que permite realizar. Estas operaciones creativas caracterizan un registro, no las reglas de combinaciones válidas para un sistema formal ni los signos utilizados para un código.

Los registros son discursivos o no discursivos. Entre los registros discursivos es importante aclarar que el lenguaje natural no se ubica en el mismo tipo de representación que los lenguajes formales o los escritos simbólicos. De igual manera, entre los registros no discursivos, las configuraciones geométricas no se ubican en el mismo tipo de representación que los gráficos cartesianos, los diagramas o las imágenes dibujadas a mano. Los registros son multifuncionales o monofuncionales. Los registros monofuncionales son específicos de las matemáticas. Los registros multifuncionales cumplen fuera de las matemáticas. El pensamiento matemático siempre moviliza al menos dos registros, aunque todos los problemas que presentan situaciones reales, como los problemas aditivos y multiplicativos, también movilizan tres registros: el lenguaje natural, las expresiones numéricas con el uso de símbolos de operación e implícitamente los diagramas, también es necesario coordinar los registros de forma que funcionen en sinergia.

Así que para fines de la investigación, se consideraron los registros, que son herramientas que nos permiten analizar toda la producción matemática, y principalmente aquella destinada a la enseñanza. La primera de las condiciones es la coordinación entre dos registros cuyo desarrollo da la capacidad de *convertir* cualquier representación dada desde su registro original A en otra del mismo objeto en un segundo registro B. La segunda es la internalización de las operaciones intrínsecas de cada uno de los dos registros. En general el procedimiento llamado *tratamiento* se realiza dentro del mismo registro. Por ejemplo, en el campo de la aritmética, al hacer la transformación de $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{4}$. Por otra parte, una *conversión* es una transformación entre diferentes registros; por ejemplo entre el registro aritmético y la gráfica, al representar la fracción $\frac{1}{2}$ mediante un círculo dividido a la mitad. Una visión general de todos los pares de registro que la actividad matemática puede movilizar es indispensable para analizar la actividad matemática mediante el uso de estas herramientas. Como aportación personal, dentro del tema de fracciones considero que principalmente los registros empleados son de la forma gráfica y aritmética, sin embargo la recta numérica que se deja a un lado debería de emplearse más dentro de este tema.

Las conversiones y los tratamientos, que se requieren para resolver problemas, pueden depender de pares de registros muy diferentes según las características de los problemas. Es por eso que una clasificación de registros es esencial para usarlos como herramientas para determinar el nivel de comprensión matemática desarrollada por los estudiantes.

2.3.4. Conocimiento docente y características del aprendizaje

Carpenter et al. (1993) resaltan la relevancia del pensamiento del docente para ayudar a los estudiantes a aprender sobre fracciones. El maestro debe de seleccionar y construir modelos que puedan fomentar el desarrollo matemático de los estudiantes. El *conocimiento pedagógico del contenido* incluye comprensiones de los docentes sobre lo que los estudiantes encuentran interesante y difícil (Carpenter et al., 1993). Al enseñar fracciones, el profesor debe de tener en cuenta las ventajas relativas de proporcionar a los estudiantes materiales representativos estructurados (como barras de fracciones que ya están divididas en ciertos conjuntos de particiones fijas) de esta manera los estudiantes tienen presentes los modelos existentes y pueden llegar a desarrollar sus propias representaciones (por ejemplo, dibujar regiones circulares y subdividir partes de la misma) tomando como ejemplo la idea de unidad, que es fundamental para el estudio de fracciones.

Como ejemplo, en la investigación de Carpenter et al. (1993), los estudiantes comparan $\frac{4}{4}$ con $\frac{4}{8}$, las barras de fracciones los obligarán a responder, correctamente, que $\frac{4}{4}$ es mayor que $\frac{4}{8}$. Un estudiante consideró para ambas fracciones los rentángulos del mismo tamaño, así que ambos pintaban 4 rectángulos, solo que en la fracción de $\frac{4}{8}$ sobraban 4 retángulos que no estaban sombreados, otro de los alumnos argumentó que en realidad no importaba el tamaño de los rectángulos porque se podía ver que $\frac{4}{4}$ ocupaba todo el rectángulo, mientras que $\frac{4}{8}$ solo ocupaba la mitad, así que sin importar que tan grande o pequeño fuera el rectángulo en donde se esta tomando los $\frac{4}{4}$, siempre se observará que se ocupa el rectángulo completo, sin dejar a un lado que las partes en las que se esta dividiendo deben de ser iguales, ya que estamos en el tema de fracciones. Esta discusión probablemente no hubiera surgido si los estudiantes hubieran usado barras de fracciones proporcionadas por el maestro.

Los estudiantes al construir sus propias representaciones se convencen de que algo es falso o verdadero más fácilmente Por lo anterior, se sugiere prestar mayor atención al desarrollo de significado de notaciones simbólicas como los símbolos de fracciones, desarrollar conceptos como el orden y la equivalencia que son importantes para el tema de las fracciones. A partir de la reflexión personal, al presentarse la situación en donde los estudiantes se dan cuenta que lo propuesto es erróneo, el profesor puede acudir a los contraejemplos, para que así ellos logren darse cuenta en qué se equivocaron al construir su propia representación. Como conclusión, es importante que el maestro varíe cuidadosamente los aspectos de los números racionales que se muestran durante el proceso de instrucción, asegurándose de que no se limite a una sola interpretación de las fracciones (Carpenter et al., 1993). También es importante que la instrucción sobre las operaciones con fracciones se base en la comprensión intuitiva de las fracciones por parte de los niños, así como en acciones sobre objetos concretos, en lugar de basarse únicamente en la manipulación de símbolos, de acuerdo con un conjunto de reglas y procedimientos .

Para apoyar a los estudiantes para que desarrollen un entendimiento matemático Ball et al. (2005) afirman que el nivel de conocimientos de las matemáticas por parte de los docentes es fundamental para que utilicen apropiadamente los materiales didácticos, evaluar el progreso de los estudiantes y formar conclusiones sólidas. La calidad de la enseñanza de las matemáticas depende de el conocimiento por parte de los profesores. De acuerdo con Lamon (2001) los profesores y los investigadores desde hace muchos años saben que la enseñanza tradicional en fracciones no fomenta un desempeño significativo en la mayoría de los estudiantes. En general, los contenidos sobre fracciones en los planes de estudio consisten de un conjunto específico de procedimientos o algoritmos con fines computacionales que proporcionan alguna base para manipular expresiones simbólicas, pero existen amplias evidencias para cuestionar la eficacia de esta forma de enseñar fracciones. La interpretación de las fracciones como parte-todo, por sí sola, no proporciona un punto de inicio adecuado para comprender con profundidad el concepto de número racional. Cuando los niños empiezan a estudiar fracciones, encuentran muchas diferencias con el sistema de números enteros y sus operaciones, que requieren grandes saltos cognitivos. La enseñanza actual de fracciones subestima enormemente lo que los niños pueden hacer sin ayuda, ya que ellos tienen una gran capacidad para crear soluciones ingeniosas cuando se les plantea un desafío. Formular a los niños preguntas desafiantes a menudo revela su capacidad para idear y manejar ideas matemáticas complejas.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Introducción

En esta sección se describe qué es una investigación cualitativa, destacando aquellos aspectos de mayor relevancia, los cuales incluyen el tipo de datos que se recolectan y el objetivo de las investigaciones que se elaboran bajo dicho paradigma, los cuales, generalmente, consisten en la identificación de patrones de significado. De acuerdo con Taylor y Bogdan (1994), la *metodología* designa un modo sistemático de enfocar los problemas y buscar respuestas; particularmente a cómo procede un investigador. La metodología incluye un examen filosófico de suposiciones y principios; así como del proceso de justificación de técnicas y procedimientos (Schwandt & Gates, 2017).

Esta tesis es de corte cualitativo. La investigación cualitativa se caracteriza porque la información recolectada consiste principalmente en palabras que expresan ideas o significados, esto con ayuda de la aplicación de las extrevistas semi-estructuradas, aunque la información puede presentarse en forma de imágenes, dibujos, fórmulas, gestos, etcétera. La palabra *cualitativo* hace referencia a un énfasis en las cualidades o características de entidades, en sus procesos y significados (Duran, 2015). La investigación cualitativa se utiliza para comprender las experiencias y situaciones humanas, así como las culturas, creencias y valores de los individuos. La investigación cualitativa es útil para explorar fenómenos complejos que son difíciles de medir con estudios cuantitativos (Kalu & Bwalya, 2017).

La investigación cualitativa es naturalista, porque estudia los fenómenos en ambientes naturales; además es interpretativa, pues intenta encontrar sentido o significado a la información que proviene de un fenómeno. En una investigación cualitativa, un objetivo general consiste en identificar patrones de significado. La información obtenida en una investigación cualitativa tiene la finalidad de comunicar ideas y significados. La investigación cualitativa busca responder preguntas del tipo: ¿Qué piensa la gente sobre un fenómeno como la falta de agua, la gentrificación, la calidad educativa, las dificultades para acceder a la universidad o para conseguir empleo?, ¿cómo viven o experimentan las personas un cambio en sus hábitos y costumbres?, ¿cómo se sienten las personas ante los cambios que se generan en su entorno?, ¿cómo es la participación de las personas en actividades tales como campañas políticas, votaciones, actividades religiosas, actividades de consumo o de esparcimiento? (Nava et al., 2013)

3.2. Estudios de caso

No existe una visión unificada de lo que constituye un *estudio de caso* o de qué es un *caso*, ya que las definiciones varían considerablemente entre disciplinas y campos de estudio. Además, los estudios de caso pueden ser tanto cualitativos como cuantitativos (Schwandt & Gates, 2017; Stake, 2005). En lo que respecta a la investigación educativa, un estudio de caso se refiere a un diseño de investigación *intensiva*, en la que el investigador se enfoca en uno o en unos pocos ejemplos específicos del fenómeno que le interesa estudiar, los cuales se analizan a profundidad. Cada ejemplo se estudia como parte de su contexto específico y en gran detalle. Esta aproximación intensiva proporciona ideas tentativas acerca del comportamiento del fenómeno social que se estudia, a partir del conocimiento del evento, persona, organización o país específico que constituye el caso (Swanborn, 2010).

Un estudio de caso involucra un examen profundo de una o algunas pocas personas. El objetivo de un estudio de caso es proporcionar descripciones completas y precisas del caso, enmarcadas en el contexto donde ocurre el fenómeno. Los estudios de caso analizan profundamente una unidad de forma holística. Los estudios de caso requieren de la recolección volúmenes considerables de información empírica, de modo que las conclusiones están basadas en un conjunto amplio y detallado de datos (Marczyk et al., 2005). Un estudio de caso constituye, entonces, una forma adecuada de responder preguntas amplias de investigación, que proporciona una comprensión profunda de cómo se desarrolla un fenómenos social a partir del análisis de un ejemplo concreto (Swanborn, 2010).

De acuerdo con Kazdin (1982) en un estudio de caso: (a) se analiza de forma profunda e intensiva a un individuo, familia, grupo, institución u otro nivel que pueda concebirse como una unidad; (b) la información es detallada, completa y, por lo general, los resultados se expresan de forma narrativa; (c) se enfatiza en la transmisión de los matices del caso, incluidos contexto, influencias externas y detalles idiosincrásicos especiales. Un estudio de casos puede ser de algunos de tres tipos: (1) estudio de caso intrínseco, el cual se centra en un caso particular el cual puede ser de interés personal o porque el investigador busca entenderlo profundamente; (2) estudio de caso instrumental, donde se estudia un caso específico para proporcionar información sobre un tema más amplio o para generalizar sobre una cuestión en particular; (3) estudio de caso colectivo, son múltiples casos que se analizan para explorar un fenómeno en común. En este trabajo se llevó a cabo un estudio de caso colectivo, con la finalidad de explorar un fenómeno común: el tipo de recursos didácticos que utilizan docentes de primarias multigrado en zonas rurales de Hidalgo, para apoyar el aprendizaje de las fracciones (Stake, 2005).

Stake (2005) resalta la importancia de estudiar un caso dentro del contexto de la investigación, es decir, el investigador debe interpretar los datos y contar la historia del caso, seleccionando los detalles que se van a incluir y cómo se van a organizar, y se debe de mantener una postura reflexiva y ética. Por lo que, el objetivo principal del estudio de casos es comprender la particularidad del caso. La triangulación, comparación con otros casos y la reflexión crítica son esenciales para la validez de los hallazgos. La triangulación se refiere al uso de diferentes métodos, fuentes de información, perspectivas o teorías para explorar un fenómeno y corroborar las interpretaciones, en esta investigación se utilizan, las producciones escritas de los estudiantes, las video-grabaciones de las exposiciones en plenarias y las transcripciones de estas.

3.3. Los participantes y su contexto sociocultural

Los participantes fueron tres profesores de primaria, quienes laboran en escuelas multigrado ubicadas en zonas rurales del Estado de Hidalgo, México, específicamente en la región de la Sierra Gorda. Los profesores se eligieron por conveniencia, ya que son conocidos de la autora de la tesis. La autora conoce a los profesores, porque ella cursó sus estudios de primaria en una escuela multigrado de una zona rural de Hidalgo. Los participantes han impartido clase en todos los grados de educación primaria, dado que cada ciclo escolar se implementan cambios al interior de cada escuela o los docentes cambian de lugar de trabajo. A los participantes se les asigno un seudónimo para mantener la confidencialidad de sus identidades. Al maestro con quien se realizó la prueba piloto se le asigno el seudónimo de Juan. La primera entrevista se realizó con la maestra Lidia y la segunda entrevista se llevó a cabo con la maestra Esperanza.

Los participantes cursaron su formación de licenciatura en la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). El maestro Juan en la Licenciatura en Pedagogía, la maestra Lidia en la Licenciatura en Psicología Educativa y la maestra Esperanza en la Licenciatura en Educación Indígena. Todos los participantes son maestros en escuelas bilingües, ya que crecieron en familias en las cuales se hablaba hñähñu. El maestro Juan creció hablando solo hñähñu ya que su mamá se comunicaba con él en esta lengua. El maestro aprendió español al iniciar con sus estudios en la primaria, la maestra Lidia y Esperanza crecieron hablando español y hñähñu, todos los profesores entrevistados son originarios de la región de la Sierra Gorda del estado de Hidalgo.

3.3.1. Regiones del Estado de Hidalgo

Se enlistan las diversas regiones geográficas del estado de Hidalgo, así como algunas de sus características. Dado que no se proporciona información del municipio en el que se ubican las escuelas en las que laboran los participantes en la investigación, solo se mencionará la región en la que se ubica la escuela como medio de contextua-

Figura 3.1: Las 10 regiones geográficas de Hidalgo

lización y para mantener la confidencialidad de la información de este trabajo. De acuerdo con el INEGI, el estado de Hidalgo tiene una superficie de 20 813.57 km^2 y representa el 1.06 % de la superficie del país. En la Figura 3.1 se muestran las regiones geográficas en que se divide: Huasteca, Sierra Alta, Sierra Gorda, Sierra Baja, Valle del Mezquital, Comarca Minera, Sierra de Tenango, Valle de Tulancingo, Cuenca de México, Altiplanicie Pulquera.

La *Huasteca* es una franja larga y angosta de abundante vegetación, presenta una superficie poco accidentada, salvo por algunos picos y cerros carece de montañas notables, es una región rica en historia y cultura. Tiene una economía que se basa principalmente en la agricultura, ganadería y el comercio, destacando los cultivos de maíz, frijol, café, cítricos y plantas ornamentales. En esta región se presenta el mayor grado de marginación y pobreza, por ello existe una excesiva deserción escolar, ya que las familias no pueden solventar los gastos de la educación de sus hijos. Respecto a la lengua, en esta región se habla la lengua náhuatl, por otro lado la alfarería y el bordado de prendas de vestir son actividades artesanales tradicionales. *La Sierra*

Alta es una región en donde destacan bruscas elevaciones que forman parte de la Sierra Madre Occidental, las principales actividades económicas son la agricultura, cría y explotaciones de animales, además de industrias manufactureras, minería y servicios financieros. A pesar de la economía diversificada, tiene un nivel económico relativamente bajo en comparación con otras regiones de Hidalgo. En la *Sierra Baja* su paisaje no es de cerros elevados ni montañas picudas, sino de una llanura que de pronto parece que se hunde por sus barrancas y cañones. Entre sus actividades económicas predomina la agricultura de temporada, con cultivos de maíz, frijol y otros alimentos básicos, así como la minería, con extracción de azufre, zinc y plomo, en esta región se presentan salarios promedio relativamente bajos. En la *Sierra Gorda* se encuentran superficies muy accidentadas como montañas ásperas y boludas, presentando las partes más húmedas de la sierra. Sus sectores económicos más importantes son el comercio al por menor, la minería. La *Sierra de Tenango* también denomidada Sierra Otomí-Tepehua es una región de montañas menos abruptas y tiene pequeños llanos intramontañosos, en la región se habla otomí (variante Ñuhu) y náhuatl(Mexikatl). La economía se basa principalmente en la agricultura de temporada, con cultivos de maíz, frijol, plátano, café y frutas. El *Valle de Tulancingo* se caracteriza por la presencia de algunas formaciones rocosas de origen volcánico, en su economía destaca la agricultura, ganadería, industria textil, comercio y servicios, además de contar con un importante potencial turístico. La *Comarca Minera* tiene relieve de serranía es una zona rica en yacimientos de metales como plomo, oro y la plata, tiene como actividades económicas la minería, la agricultura y el turismo, tiene un nivel socioeconómico diverso, influenciado por la historia minera y el turismo, con una economía que se basa en la minería, el turismo y la agricultura, y que presenta desafíos como la desigualdad y la contaminación ambiental. La *Altiplanicie pulquera* cuenta con paisajes de cultivo especialmente el maguey pulquero. Se caracteriza por un índice de analfabetismo relativamente bajo, también es conocida por su gastronomía, que incluye platillos como agua de tuna, caracoles, cáscara de tuna enchilada, salsa de chinicuiles, pollo relleno de escamoles, pulque, salsa de chinicuil y sopa de malvas con chinicuiles. La *Cuenca de México* corresponde a llanos semiáridos alta-mente aprovechables para actividades agrícolas, dentro de sus actividades económicas predomina el comercio, construcción, industria alimentaria, servicios inmobiliares y de alquiler de bienes muebles e intangibles. Las lenguas indígenas más habladas son el náhuatl, el otomí y el tepehua. El *Valle del Mezquital* se encuentra conformado por diversos valles y llanos, limitados por sierras volcánicas aisladas y derrames basálticos, comprende una superficie de extrema aridez. En esta región se habla la lengua hñähñu conocida como otomí del Valle del Mezquital, dentro de sus actividades económicas estan la agricultura, la ganadería y el comercio, con un crecimiento reciente en el sector turístico, especialmente balnearios termales y parques ecoturísticos.

3.3.2. Educación multigrado en México y en el mundo

Las escuelas multigrado tienen su propia especificidad pedagógica y están muy extendidas en términos geográficos. La creciente bibliografía sobre enseñanza multigrado señala que, para lograr una enseñanza multigrado efectiva, se requiere de ciertos componentes metodológicos básicos que se articulen entren sí. Se resaltan en particular: la necesaria planificación de las clases, el trabajo en grupos así como el interaprendizaje (aprendizaje entre pares), el autoaprendizaje, estrategias de manejo de las clases que combinen diversos modos de atención y el reconocimiento del rol activo del estudiante y de los conocimientos y saberes previos con los que llega a la clase (Ames, 2004).

Ureña et al. (2022) compararon los resultados de aprendizaje que obtienen estudiantes en clases multigrado de escuelas primarias rurales del Distrito de Cabrera, con sus pares en clases unigrado en el mismo distrito, en la República Dominicana. Los investigadores verificaron los resultados de investigaciones previas las cuales señalan que el desempeño de los estudiantes en clases multigrado pueden diferir en función de los grados. En primer ciclo de primaria (grados 1º, 2º y 3º), las diferencias en los resultados de aprendizaje entre los estudiantes en multigrado y unigrado fueron mínimas, sin embargo, en el segundo ciclo (grados 4º, 5º y 6º) los resultados de aprendizaje fueron significativamente mayores para los que estaban en multigrado, por esto se concluye que el tamaño de las aulas parece tener alguna influencia.

En una investigación realizada en Veracruz se trabajó con un grupo de docentes de escuelas primaria multigrado que trabaja mayoritariamente en escuelas unitarias y bidocentes. Los profesores opinan que se requiere de una política integral de atención en las escuelas multigrado, enfocada al equipamiento, la infraestructura, la presencia de educación preescolar en las localidades y de programas de formación inicial y continua de docentes, por la cantidad de escuelas multigrado que existen. Sugieren que sería deseable contar con una licenciatura enfocada en la educación multigrado (Ruíz, 2021).

La educación multigrado tiene el potencial de mejorar la calidad del aprendizaje; sin embargo, los docentes multigrado enfrentan diversos desafíos referidos a la organización curricular, la sobrecarga de trabajo, la gestión del aula, el rendimiento del alumnado y la falta de apoyo. Hacen falta de docentes especializados en educación multigrado. En cuanto al aprendizaje, los estudiantes en clases multigrado deben competir por el espacio en el aula y los materiales de aprendizaje. Por ello, los docentes implementan estrategias como la agrupación, conformando grupos de estudiantes adecuados a cada actividad de aprendizaje (Hargreaves et al., 2001); sin embargo, Benveniste y McEwan (2000) consideran que las escuelas multigrado, en la que conviven, en cada grupo, estudiantes con edades y capacidades mixtas, son un medio para mejorar el rendimiento estudiantil y ampliar el acceso a la educación en los países pobres. (Cookey & Maduike, 2021).

En general, los trabajos de investigación sobre la educación multigrado, no se centran en un tema en específico como las fracciones, sino que abordan el tema de las matemáticas en términos generales. Por la razón anterior es que trabajos como el desarrollado en esta tesis resultan relevantes.

3.3.3. Las primarias multigrado en México

La organización escolar basada en agrupar estudiantes de la misma edad o nivel de avance surgió en el siglo XVIII, consolidandose en el siglo XIX como forma preferente de organización escolar debido, en gran parte, a la masificación de la educación elemental, concebida como un derecho de todo ciudadano (Martínez-Rizo, 2006).

Una escuela multigrado, en educación básica, "es aquella en la que algún maestro atiende a más de un grado escolar" (Schmelkes & Aguila, 2019, p. 14). En el caso de las primarias, por el número de docentes, pueden clasificarse en unitarias, bidocentes o tridocentes. En todos los casos, al menos algún docente de las escuelas multigrado funge como director, ya que con base en la normatividad vigente, solo se asigna un director exclusivo a una primaria, cuando en esta existen al menos seis grupos. La mayoría de las escuelas multigrado se encuentran en poblaciones indígenas, áreas rurales o marginadas y sitios de llegada de grupos de población migrante trabajadora en actividades agrícolas. Las escuelas multigrado tienen el objetivo de brindar cobertura educativa y, a su vez, dar respuesta a la necesidad de atender y acabar con el analfabetismo y rezago educativo en las zonas en que se ubican.

Para el ciclo escolar 2016-2017, a nivel nacional, había 30 624 primarias multigrado, en las que laboraban 56 639 docentes, quienes atendieron a una población de 1 259 312 estudiantes. En este mismo ciclo escolar, el número de primarias públicas generales multigrado fue de 23 905; mientras que hubo 6 719 primarias indígenas multigrado. En el caso del estado de Hidalgo, los números son 786 y 370, respectivamente. Con respecto al total de las escuelas primarias públicas generales multigrado se tiene que 64 % de estas contaba con una matrícula de entre 16 y 50 alumnos; 94.2 % se ubicaba en el ámbito rural; 68.2 %, en áreas de alta marginación; 44 % se ubicaba cerca de carreteras, mientras que 41.4 %, en localidades aisladas. En las primarias generales multigrado casi la mitad de sus docentes son hombres (48.5 %), mientras que en las primarias con los seis grados este porcentaje apenas llega a 32.5 %. Sin embargo, en las primarias indígenas multigrado la proporción de docentes varones es de 66.5 %, en comparación con el 56.9 % de las primarias con seis grados. Con respecto a la disponibilidad de computadoras solamente el 32.5 % y el 33.3 % de los estudiantes de primarias indígenas y generales multigrado tienen acceso, al menos, a una computadora que funciona; esto es, solo un estudiante de cada tres, por lo cual el desarrollo de habilidades digitales no es una realidad para las escuelas multigrado. En lo que respecta a la conectividad de internet, solo el 5.7 % de las escuelas indígenas multigrado tienen acceso a este servicio, y este porcentaje aumenta a 10.7 % en el caso de las primarias generales multigrado (Schmelkes & Aguila, 2019).

En diversos periodos históricos las autoridades educativas han intentado sustituir a las escuelas multigrado por escuelas "completas", pero sin éxito, "pues la organización escolar multigrado está directamente relacionada con las características sociodemográficas y culturales de las poblaciones que atiende" Schmelkes y Aguila, 2019, p. 43.

La información de la tesis se baso en las escuelas multigrado, debido a las características que distinguen a estas escuelas pero, sobre todo, por el poco conocimiento que se tiene sobre ellas, así poder dar a conocer más sobre como es la educación y como es la experiencia de los profesores al impartir clases en este tipo de instituciones.

3.4. Instrumentos de recolección de información

La fuente principal mediante la cual se recolectó la información de este trabajo fue a través de entrevista semi-estructuradas, las cuales se grabaron en audio o en video; aunque también se recolectaron documentos proporcionados por los docentes, en los cuales se encuentran ejemplos del tipo de materiales didácticos que utilizan para apoyar el aprendizaje de sus estudiantes en el tema de fracciones.

La información empírica que sustenta los resultados de esta tesis se recolectó por medio de entrevistas semi-estructuradas. Estas entrevistas constituyen un instrumento capaz de adaptarse a las diversas personalidades de cada entrevistado. Esta es una técnica que no conduce simplemente a recabar datos acerca de una persona, sino que intenta que el entrevistado hable para entenderlo desde su propia perspectiva o punto de vista (De Toscano, 2009). Este tipo de entrevista facilita la recolección y el análisis de saberes sociales critalizados en discursos, que han sido construidos por la práctica directa de los protagonistas.

Al utilizar entrevistas semi-estructuradas el investigador ofrece al entrevistado plena libertad de expresión, posibilitando que se resalte su punto de vista. Intenta mantener al entrevistado interesado, jugando un rol activo en la búsqueda de recuerdos y reflexiones, claramente la entrevista semi-estructurada no sería posible si el investigador no desarrolla sus habilidades de comprensión e interpretación en el momento de aplicarla. Para elaborar una entrevista de este tipo se debe elaborar un guión general. El trabajo investigativo puede ser organizado a partir de ejes temáticos de reflexión o a partir de preguntas orientadoras. Al no existir un cuestionario al cual ajustarse, es el entrevistador quien ha de tener una idea clara de los temas que le interesa abordar con el entrevistado, lo que se llama guión, el cual puede cambiar con el desarrollo de la conversación.

El guión se elabora teniendo en cuenta los objetivos de la investigación, pero no está organizado en una estructura fija y secuencial, ya que lo que interesa es que el entrevistado genere información sobre cada uno de los temas considerados. Para el registro de la información que se recaba en una entrevista semi-estructurada, se recomienda utilizar una grabadora, previo haber consultado con el entrevistado acerca de la utilización de esta herramienta y haber obtenido su aprobación. El hecho de estar con la persona en un escenario en el cual puede mirarse a los ojos, permite la captación por parte del investigador de aquellas expresiones faciales y gestos. De esta manera la entrevista semi-estructurada otorga un lugar protagónico a la observación y es así que el investigador está pendiente de lo que pasa con el entrevistado, no sólo de lo que el dice, en tanto palabras relacionadas a un mensaje, sino que de la manera en que lo dice, detectando de esta forma las emociones que cargan sus distintas expresiones orales.

3.4.1. Prueba piloto

Para iniciar con las entrevistas se realizó una prueba piloto con las siguientes preguntas, las cuales fueron propuestas considerando como base el objetivo de la investigación, principalmente tomando en cuenta que se busca conocer cómo enseñan los maestros el tema de fracciones por primera vez a los estudiantes de primaria:

1. ¿Cómo hace para enseñar por primera vez a sus alumnos el tema de fracciones?
2. ¿Utiliza algún material didáctico para enseñar este tema? ¿cuál?
3. ¿Qué problemas presentan los alumnos respecto al tema?

4. ¿Qué problemáticas presentan los alumnos, cuando les explica por primera vez el tema?

5. ¿Cuáles son las soluciones que propone para atender dichos problemas?

Este primer cuestionario se aplicó al profesor Juan, el cual atiende segundo y tercer grado, pero las respuestas fueron con base únicamente en el grupo de tercer grado. El profesor tuvo un poco de confusión en la primera pregunta, por lo que se decidió aclarar que el cuestionamiento se refiere a cualquier estudiante que no ha revisado el tema de fracciones, independientemente del grado que cursa. Por lo tanto se preguntaría, ¿cómo enseña a un niño por primera vez este tema, el cual no sabe nada sobre fracciones?.

Al responder a la primera pregunta el participante mencionó la frase *cantidades exactas*, así que se le solicitó aclarar, ¿a qué se refiere con cantidades exactas? A lo largo de la entrevista el profesor reitera que hace uso del pizarrón para dibujar cosas como naranjas, pizza, etcétera. Por esta razón se incluyeron las siguientes preguntas: ¿solo aborda el tema de fracciones con el apoyo de dibujos?, ¿cuándo utiliza el símbolo de fracciones? Cuando se formulen estas preguntas se decidió tener a la mano algún pizarrón o papel para que el participantes ejemplifique el contenido que aborda con sus alumnos en clase cuando les enseña lo que es una fracción.

De acuerdo con sus respuestas, el profesor solo hace uso de un pizarrón para mostrar ejemplos de algunas fracciones, no se apoya en algún otro material didáctico, aunque menciona que hace uso de videos para la enseñanza de este tema, preguntar si podria proporcionarnos algunos de los que el consulta, para poder analizarlos y saber si proporciona información adecuada o no. En relación con las problemáticas de entendimiento que se presentan, el docente mencionó el concepto de fracción; así que se le preguntó, ¿para usted qué es el concepto de fracción? y ¿qué significa que un alumno entienda el concepto de fracción?. Antes de la última pregunta se decidió agregar las siguientes:

- ¿En qué momento hace uso del símbolo de fracciones?

- ¿Cuándo introduce el tema de suma y producto de fracciones?
- ¿Hace comparación de fracciones (mayor que o menor que)?

Por último, para el tema de las soluciones que propone el docente, menciona el término de fracciones diferentes, a lo cual se le pregunta, ¿a qué se refiere con fracciones diferentes? y ¿a qué se refiere con fracciones más grandes?.

En la discusión sobre esta prueba piloto con directores, se realizó un dibujo en el pizarrón para observar lo que nos menciona el profesor en la entrevista y de aquí notamos como el uso del pizarrón para hacer ilustraciones no es tan efectiva, ya que no se muestra con claridad las partes de un objeto, como lo sería en un manipulativo, para que los niños lo pudieran tocar y comparar.

En la Figura 3.2 se puede observar como las ilustraciones en el pizarrón no son tan eficientes, las personas que ya tienen conocimientos sobre fracciones entenderian el porque $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, pero si un niño solo observa los dibujos en el pizarrón, puede llegar a tener una confusión.

Después de esta discusión, se sugieren las siguientes preguntas para la entrevista:

1. ¿Cómo enseña por primera vez este tema a un niño quien no sabe nada sobre fracciones?
2. Para explicar este tema, ¿empieza utilizando solo dibujos o combina esos dibujos con la representación numérica de las fracciones (por ejemplo, 2/3)?
3. ¿Utiliza algún material didáctico para enseñar el tema de fracciones? ¿cuál?
4. ¿En qué momento empieza a utilizar los símbolos numéricos de las fracciones?
5. ¿Cuándo inicia el estudio de la suma, resta, multiplicación y división de fracciones?
6. ¿En qué momento inicia la comparación de fracciones (mayor que o menor que)?
7. ¿Qué problemáticas presentan los alumnos cuando se les explica por primera vez el tema de fracciones?

8. ¿Qué problemáticas presentan los alumnos para realizar operaciones aritméticas con fracciones?

9. ¿Cómo ha abordado las dificultades o problemáticas de aprendizaje de sus alumnos en el tema de fracciones?

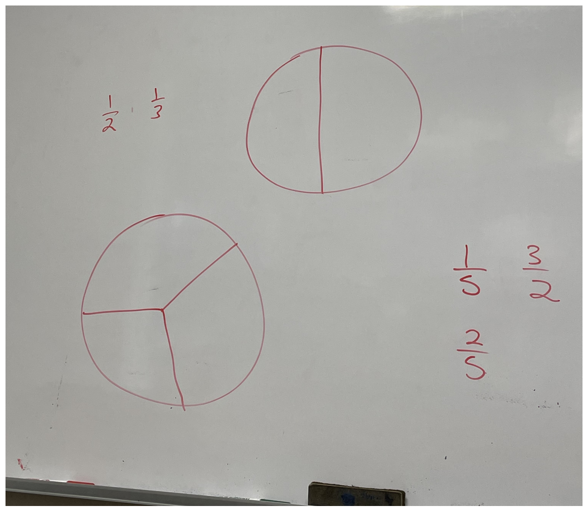

Figura 3.2: Imagen en pizarrón

Después de analizar los resultados de la prueba piloto, se reformularon algunas de las preguntas de la entrevista, ya que al estar trabajando con maestros que atienden a más de un grado, no sabían si las preguntas iban dirigidas a alumnos de una edad en específico, así que se tuvo que aclarar que la pregunta se refiere a cualquier niño que no sepa nada sobre fracciones.

Regresando a la prueba piloto, se mencionaba anteriormente que surgieron nuevas preguntas por algunos términos que ocupo el docente y no quedaron del todo claras, el primer término mencionado fue «cantidades exactas», a lo que es profesor explica que ocupa este término, ya que al referirse a las fracciones, nos dice que es dividir un objeto x en partes iguales, poniendo como ejemplo una pizza, si le vas a dar la mitad de pizza a dos personas, debe de ser exactamente la mitad de la pizza, no a una persona le puede tocar una parte de la pizza más grande que la otra.

3.4.2. Implementación de las entrevistas

Se entrevistó a cada participante de manera individual en diferentes fechas. A los participantes se les informó que los datos de las entrevistas se utilizarían para la elaboración de un trabajo de tesis, y que sus identidades y datos personales se mantendrían confidenciales, con la finalidad de cumplir con el aspecto ético del *consentimiento informado* (Carracedo et al., 2017). Las entrevistas se realizaron entre septiembre y diciembre de 2024.

La prueba piloto se realizó de manera virtual, ya que se realizó durante el transcurso del semestre de la autora de la tesis y por tiempos tanto de la autora como del maestro se realizó de manera virtual mediante Google Meet. Esta entrevista se dividió en dos partes, ya que las primeras preguntas que se propusieron generaron algunas dudas al maestro y tuvieron que modificarse y también se agregaron nuevas preguntas. La primera parte de la entrevista tuvo una duración de 9 minutos con 12 segundos. La segunda parte de la entrevista también se realizó de manera virtual y tuvo una duración de 10 minutos con 39 segundos

En la primera entrevista se llevo a cabo de manera presencial, en el domicilio de la autora de la tesis, teniendo un duración de 9 minutos con 7 segundos.

Para la segunda entevista, la cual tuvo lugar en el domicilio de la maestra, duró 17 minutos con 53 segundos. En general estas entrevistas fueron cortas, ya que los participantes se notaron, desde el inicio, un poco nerviosos. Esto puede deberse al miedo de que se les juzgue o califique su actuar o tener miedo a equivocarse en lo que iban a responder, por eso limitaron sus respuestas. La segunda entrevista fue la más larga. En este caso la maestra empezó a tener más confianza a lo largo de la entrevista, pero desafortunadamente sus respuestas fluyeron más al final. En el caso de la prueba piloto y en la primera entrevista desde antes de iniciar la grabación, los maestros comentaron que se sentian nerviosos por no saber si sus respuestas serían correctas o no sabrían qué responder.

Como se mencionó con anterioridad, todos los profesores estuvieron nerviosos durante las entrevistas, ellos se abocaron unicamente a las preguntas que les realicé, por lo que no surgieron nuevas preguntas, ni nuevos temas. Este nerviosismo puede deberse a que se sintieron evaluados y temieron dar respuestas incorrectas que pudieran ser fuente de críticas a su trabajo o desempeño, a pesar de que se les indicó que se mantendría confidencialidad sobre su información personal y nadie podría conocer sus identidades personales, ni de las escuelas donde laboran.

3.4.3. Evidencias documentales y digitales

Algunos de los profesores que participaron en la investigación compartieron algunos documentos físicos y digitales de los cuales recuperan información para apoyar el aprendizaje de los estudiantes.

Ya que los docentes comentaron que los materiales más ocupados en la enseñanza de las fracciones son el pizarrón, proyección de algunos videos en internet, así como actividades impresas y algún material físico. El maestro Juan nos proporcionó links de videos que obtiene de internet para proyectarle a sus alumnos en la sala de computo y así reforzar la información que el les da dentro del aula.

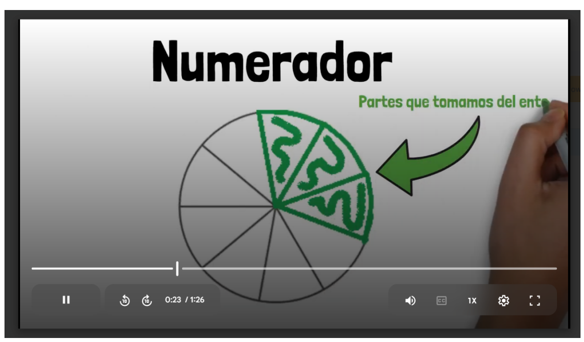

Figura 3.3: Video sobre fracciones

Asimismo, la maestra Lidia compartió el cuadernillo que ocupa como recurso de apoyo en sus clases, el cuadernillo contiene diversas actividades en donde se observan los subconstructos de una fracción, así como los tipos de representación, de este cuadernillo la maestra extrae algunos problemas para imprimirlos, y cada alumno al terminar la actividad la pega en su cuaderno.

De igual manera, la maestra Esperanza proporcionó a la autora las páginas de internet que utiliza regularmente, en donde adquiere diversas actividades que les

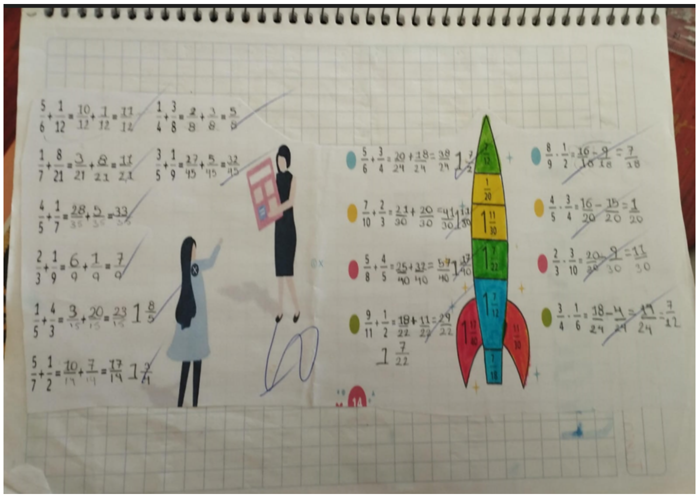

Figura 3.4: Actividad del cuadernillo

puede aplicar a sus alumnos o las ocupa para investigar sobre materiales didácticos que puede elaborar para hacer su clase más divertida, como el ejemplo de la pizza.

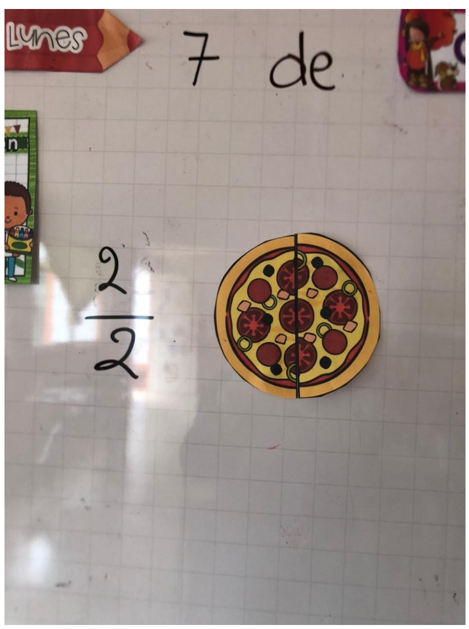

Figura 3.5: Material didáctico

3.4.4. Notas de campo

Adicional a las entrevistas, la autora de la tesis realizó notas de campo, en las cuales registró información contextual que no aparece en la información de las entrevistas videograbadas, pero que es de vital importancia para contextualizar los resultados de este trabajo de tesis.

De acuerdo con Burgess (1989), tomar notas es una actividad personal que depende del contexto de la investigación, de los objetivos y de la relación del investigador con los informantes. Las notas de campo deben de enfocarse en las principales observaciones, conversaciones y entrevistas que el investigador realiza. La toma sistemática de notas incluye listas de nombres, datos, lugares y eventos. En las notas de campo también es importante registrar detalles acerca de las circunstancias bajo las cuales se consiguen los datos. Es entonces importante registrar las impresiones personales al interactuar con los informantes, incluyendo impresiones emocionales.

3.5. Procedimiento de análisis

El procedimiento que se utilizó para realizar la reducción y organización de la información empírica, que es la base de los resultados obtenidos en este trabajo de tesis, incluye varias etapas. En primer lugar, las entrevistas se transcribieron y las transcipciones fueron la base para el análisis. A partir de las transcripciones se identificaron elementos sobre el tipo de materiales didácticos utilizados, los subconstructos de la fracción que se promueven, así como las representaciones y sus operaciones, además del tipo de unidades. Las secciones del texto en que se identificaron estos elementos se subrayaron de un color diferente como se muestra en la siguiente tabla:

Materiales didácticos	
Subconstructos de una fracción	
Tipo de unidades	
Representaciones	

Cuadro 3.1: Categorías de análisis

Posteriormente, el texto se organizó en términos de una narrativa que resultara interesante para el lector, intercalando información derivada de las notas de campo, así como de los materiales documentales proporcionados por los entrevistados.

3.6. Criterios de validez

En la investigación cualitativa los criterios de validez difieren de la investigación cuantitativa. En esta última los criterios de validez se vinculan estrechamente con los procesos de estandarización de las situaciones de investigación. El incremento de la validez interna requiere de un control estricto de los factores de confusión, mediante condiciones de laboratorio. La validez externa, referida a la generalización de los resultados se fundamenta en la selección de una muestra representativa de la población (Flick, 2014).

Sin embargo, en la investigación cualitativa se carece de una estandarización similar a la de la investigación cuantitativa, ya que la recopilación de información empírica no se realiza en condiciones de laboratorio ni se cuentan con muestras representativas de una población. En este contexto los criterios cualitativos de validez deben, necesariamente, diferir de los criterios cualitativos. Al respecto, Flick (2014) considera que la combinación de múltiples métodos, materiales empíricos, perspectivas y observadores en un estudio son estrategias que agregan rigor, amplitud y profundidad a cualquier investigación de corte cualitativo.

En cuanto a las investigaciones basadas en entrevistas, como el caso de esta tesis, se considera importante para asegurar la validez y confiabilidad de la investigación, transparentar la producción de los datos, de manera que se pueda verificar lo que es una declaración del entrevistado y lo que es una interpretación del investigador, lo cual se logra al hacer públicas las transcripciones de las entrevistas o conversaciones. Otro aspecto para fomentar la validez de los resultados consiste en implicar a los actores en el proceso de investigación ulterior, lo cual se puede hacer en una segunda reunión después de la entrevista, en la cual los entrevistados revisan el contenido de sus declaraciones, el cual se denomina validación comunicativa (Flick, 2014).

Para la elaboración de este trabajo de tesis, los criterios de validez considerados fueron la triangulación de fuentes, ya que se realizaron entrevistas, se tomaron los materiales didácticos que ocupan los docentes, así como evidencias fotográficas de los alumnos al trabajar con dichos materiales, para así verificar y afirmar los resultados presentados. Otro criterio que se incluyó fue el de el involucramiento de los participantes, ya que los participantes han leído las versiones preliminares de este trabajo, particularmente la sección de resultados, con la finalidad de que pudieran emitir una opinión respecto de lo que se escribió sobre las estrategias que emplean para enseñar fracciones y recibir comentarios o sugerencias en casos de malentendidos o para mejorar la calidad de la información descrita.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Introducción

En esta sección se describen los principales resultados del trabajo. Se lleva a cabo una descripción de las respuestas de los participantes entrevistados, destacando aquellos materiales didácticos, interpretaciones de la fracción y representaciones que utilizan para abordar el tema de fracciones con sus estudiantes. Se describen también aquellos materiales documentales que los participantes compartieron con la autora de la tesis. Así como elementos contextuales o de otro tipo capturados mediante las notas de campo que realizó la entrevistadora.

4.2. Análisis de casos

Se aplicó una prueba piloto o preliminar, la cual ayudó a identificar cuales preguntas no se entendían con claridad o se entendían de forma diferente a la propuesta. En esta entrevista inicial el maestro Juan comentó que el medio que más utiliza para explicar el tema de fracciones es el pizarrón, mediante dibujos con marcadores. Cuando tiene la oportunidad de utilizar alguna computadora, lleva a los niños al salón de computo y ahí les proyecta algunos videos de YouTube sobre el tema.

En el caso de la maestra Lidia, comentó que se le complica a los alumnos entender los temas de matemáticas, porque tienen la creencia que son temas complicados. Por lo anterior, para introducir el tema de fracciones, la maestra emplea sinónimos, es decir, palabras que los niños utilizan cotidianamente como dividir, cortar, separar. La maestra resalta que, sin importar los sinónimos que se usen, los estudiantes siempre tienen que tener claro que al hablar de fracciones es importante cortar o dividir en partes iguales. La interpretación que le da a la fracción es la de parte-todo, en donde un entero lo divide en cierto número de pedazos. Para que los alumnos entiendan mejor, la maestra se apoya de material visual, como el pizarrón y marcadores. En el pizarrón hace uso de representaciones gráficas y numéricas. Además, la maestra lleva acabo actividades con frutas, con hojas blancas (doblandola) para ejemplificar de mejor manera el proceso de equipartición, ya que al dibujar en pizarrón, o incluso en la libreta cuadriculada, el dibujo que realizamos no suele ser exacto.

Para reforzar el tema la maestra hace uso de un cuadernillo en donde se pueden encontrar diversas actividades tales como: (a) identificar cuando una fracción está dividida correctamente, (b) reconocer en cuántas partes esta dividida la figura y cuánto represeta la parte sombreada; (c) teniendo la fracción representada graficamente se pide cambiar a la representación numérica; (d) teniendo la fracción representada numericamente, se muestran dos figuras ya divididas en las partes que se indican y se pide colorear la parte solicitada; (e) aparte de la representación gráfica, aritmética también se involucran actividades en donde se escribe el nombre de la fracción; (f) después de realizar actividades solo con figuras geométricas, se introdujeron actividades con unidades compuestas, como los vagones de un tren; (g) actividades para comparar fracciones; (h) ordenar fracciones de mayor a menor o de menor a mayor; (i) operaciones con fracciones (suma y resta).

En la mayoría de las actividades se involucraron unidades individuales. Al final del cuadernillo se proponen actividades en las que la fracción se convierte a un número decimal o en donde se ubica a la fracción en la recta numérica. La maestra no comentó que ella represente a la fracción en la recta numérica, quizá debido al tiempo, ya que comenta que es un tema complicado y en ocasiones no se cubren todos los temas. Lo anterior puede ser el origen de diversas problemáticas asociadas con la falta de entendimiento de temas tales como las operaciones con números naturales y enteros (suma, resta, multiplicación), ya que sin esos conocimientos básicos es difícil que los estudiantes logren una comprensión profunda del tema de fracciones.

Por otra parte, la maestra Esperanza comentó la existencia de problematicas similares. Esta maestra contempla una más amplia diversidad de actividades que los niños tengan más interes en aprender, ya que las actividades propuestas llegan a ser divertidas. Entre estas actividades destaca el uso de un memorama que la maestra compró, pero también utiliza manipulativos físicos; por ejemplo, una pizza que pegan en cartón y la enmican. La maestra Esperanza también emplea sinónimos para que los niños entiendan la fracción más fácil. Entre las dificultades que la maestra menciona es que los estudiantes muestras problemas para identificar el numerador y el denominador, así que los llaman «el número de arriba» y «el número de abajo». Durante la entrevista se identificó que este cambio conduce a que ella también cometa algunos errores al referirse a dichas partes de la fracción. Por todas las dificultades que se pudieran presentar en general lo que un maestro busca es una solución, nuevas estrategias, para obtener estas nuevas estrategias lo que la maestra hace es buscar en Google videos o textos pero solo para ella, intentando nutrirse de más información para después poder armar estrategias y poder compartirlas con sus alumnos.

4.2.1. Características de los casos

El maestro Juan trabaja en una escuela multigrado bilingüe, ubicada en una comunidad rural en la región de la Sierra Gorda, en el estado de Hidalgo. La principal actividad económica de la comunidad es la agricultura. En la escuela trabajan tres maestros. Una maestra únicamente atiende a primer grado, la otra maestra atiende a cuarto, quinto y sexto grado; mientras que el maestro Juan atiende a cuatro alumnos de segundo grado y cuatro de tercer grado. El total de los estudiantes en la escuela es de 25. En la comunidad no hay secundaria ni bachillerato, por lo que al culminar la primaria, los alumnos deben de dirigirse a otra comunidad para continuar con sus estudios. En esta comunidad se cuenta con una carretera principal de pavimento, en la cual los habitantes pueden tomar el transporte público para dirigirse a otras comunidades, otras calles entre casas y para llegar a la primaria son de encementado y de tierra. Esta comunidad se encuentra a pocos minutos de la cabecera municipal.

La maestra Lidia trabaja en una escuela primaria multigrado bilingüe (español-hñähñu), ubicada en una comunidad rural en la región de la Sierra Gorda, en el estado de Hidalgo. La actividad económica principal de la comunidad es la agricultura. En la escuela trabajan dos maestros, cada uno de los cuales atiende a tres grados. El total de estudiantes de la escuela es de 19. La maestra Lidia atiende a cuarto y sexto grado. El grupo de la maestra Lidia está integrado por siete estudiantes, dos que cursan el cuarto grado y cinco de sexto. En la comunidad no hay secundaria ni bachillerato, por lo que los pobladores se tienen que desplazar a otras comunidades para cursar estos niveles educativos. La comunidad cuenta con una carretera principal de pavimento, esta carretera conecta a la comunidad con la cebecera municipal. Las demás calles que conectan a la escuela con los hogares de los estudiantes son principalmente terracerías.

La maestra Esperanza trabaja en una escuela primaria multigrado bilingüe, ubicada en una comunidad rural en la región de la Sierra Gorda, en el estado de Hidalgo. En la escuela trabajan tres maestros, cada uno de los cuales atiende a dos grados. La maestra Esperanza atiende a tercer y cuarto grado. El total de estudiantes en la escuela es de 31. El grupo de la maestra Esperanza esta integrado por cuatro alumnos de tercer grado y otros cuatro alumnos en cuarto. En la comunidad se practica la agricultura, la cual se divide en dos tipos, la de temporada y las plantaciones de árboles frutales. La carretera a la comunidad únicamente es de terracería, en ocaciones los habitantes ocupan más las veredas para llegar más rápido a su destino.

4.2.2. El maestro Juan

El profesor Juan al introducir el tema de fracciones, ocupa ilustraciones en el pizarrón las cuales van de la mano con el símbolo de fracciones, antes de responder a esta pregunta sobre introducir el símbolo de fracciones el docentes no entendió a lo que me refería con el término «símbolo de fracción». Al ya explicar lo que es una fracción, el profesor Juan nos dice que para el, un alumno ya a entendido el concepto de fracciones cuando ya sabe sobre diferentes tipos de fracciones, cuando ya puede resolver problemas de fracciones, al decir diferentes tipos de fracciones se refiere a cuando hacen algunas operaciones como la suma, al tener el mismo denominador o diferente. Este tema sobre las sumas y producto de fracciones lo introduce cuando el alumno ya tiene claro el concepto de fracción, que sepa como debe de dividir correctamente el objeto, en las cantidades correctas.

Después de este tema se introduce el tema en donde se comparan las fracciones, es decir, cuando tenemos dos fracciones o más y queremos saber cual es mayor o cual es menor de ellas. En esta prueba piloto el maestro mencionó que acude a algunos videos de YouTube para el apoyo en la enseñanza del tema de fracciones, por esto nos proporcionó dos videos, el primero lleva por nombre *Fracciones desde cero*, primeramente notamos que en los primeros segundos del video se presenta el nombre de fracciones acompañado de un rectángulo el cual esta dividido 5 partes donde dos de ellas estan sombreadas y justo a un lado de esta ilustración se coloca la fracción correspondiente de la forma $\frac{a}{b}$, así al introducir el tema de fracciones, vemos que el símbolo de fracciones va de la mano con las ilustraciones.

A continuación se presentan más fracciones pero ahora solo como símbolos numéricos, sin ninguna ilustración. Esto para que el creador de contenido hiciera la siguiente pregunta: ¿sabes leer fracciones?, para hacer lo siguiente, colocó como ejemplo la fracción $\frac{5}{7}$ y mencionar que se lee como *cinco séptimos*, después de esta pequeña introducción nos dice que una fracción se encuentra compuesta por dos números, uno en la parte de arriba y otro por debajo de una línea a la cual nombra línea de fracción, de donde el número de arriba se llama numerador y el de abajo denominador, después de esto se presento una por una cada fracción desde cuando el numerador es 1 hasta 5 y para el denominador del 1 al 16. Estas fracciones las colocó para leerlas como se mencionaba anteriormente, al leer todas estas fracciones se presentan algunas figuras geométricas como el cuadrado, círculo, triángulo, rectángulo, y rombo, el narrador menciona que estas figuras se ocuparán para entender el concepto de entero-fracción, aclarando que se les dice a cada una de las figuras que es entero ya que no se encuentra dividido, no esta roto. Posteriormente se tomó una de estas figuras para dividirla, por ejemplo el rectángulo para poder identificar como es que se ve en el la fracción $\frac{5}{7}$, explicando que el 7 (denominador) nos indica en cuantas partes esta dividido el rectángulo entero y el 5 nos indica cuantas partes vamos a escoger, cuantas vamos a pintar de las siete partes que tenemos.

Al proponer varios ejemplos expresados mediante números se pedía a los estudiantes pasar a la representación gráfica, ahora se da la representación gráfica y se pide pasar a la representación aritmética, ejemplo: presenta un cuadrado el cual esta dividido en seis partes y tres de ellas estan pintadas, al presentarse esta ilustración lo que se espera es que el alumno escriba como es su representación aritmética. Al ya mostrar por separado como es que se ven las fracciones tanto en su representación artimética y gráfica, ahora presenta un rectángulo, el cual esta dividido en varias partes, pero estas partes estan sombreadas de cuatro colores diferentes, de la siguiente manera: el rectángulo se divide en 10 partes, donde tres de ellas estan sombredas de color amarillo, 1 de color rojo, dos de color verde y cuatro de color azul.

Se empieza notando los tres bloques que se pintaron de amarillo y la tarea es encontrar su representación aritmética, así que para la parte de color amarillo es $\frac{3}{10}$, para la parte roja es $\frac{1}{10}$, la de color verde $\frac{2}{10}$ y la de color azul $\frac{4}{10}$, observando que todas las fracciones que obtuvimos tienen el mismo denominador y sumandolas se obtiene el total de las partes en las que se dividió el entero, después de este ejemplo se presentaron algunas otras con figuras geométricas, pero después de esto se ocupo como ejemplo a un grupo de niños y niñas que se encuentran en un curso donde son siete niñas y cuatro niños, donde las niñas representan $\frac{7}{11}$ y los niños $\frac{4}{11}$, a partir de este ejemplo nos menciona que las fracciones las podemos encontar en nuestra vida diaria, como en la cocina cuando tenemos una canasta llena de frutas, supongamos que tiene una pera, tres manzanas y cuatro guayabas, la pera representa $\frac{1}{8}$, las manzanas $\frac{3}{8}$ y las guayabas $\frac{4}{8}$ o el ejemplo de un edificio con muchas ventanas, donde una parte estan apagadas y unas prendidas, ahí se tiene que ver que fracción representa las ventanas que tienen la luz prendida y las que tienen la luz apagada, notando así que en este video se empezó introduciendo las fracciones como unidades unitarias, para después pasar a las unidades compuestas como lo son la canasta de frutas o el edificio con varias ventanas.

Para el segundo video, el cual se denomina *Los elementos de una fracción*, aunque el video lleva por título lo antes mencionado, empieza preguntandose ¿Qué es una fracción?, a esto responde que una fracción es otra forma de representar una división, refiriendose a dividir en partes iguales una unidad o entero, ahora si los elementos que conforman una fracción son: (a) numerador o partes que tomamos del entero; (b) denominador que representa la cantidad de partes iguales en la que fue dividida esta unidad; (c) línea de fracción, que es la que divide al numerador y denominador. El ejemplo para explicar lo anterior es una pizza, la cual debe de dividirse en partes iguales para repartirla entre 6 personas, diciendo así que cada una le toca $\frac{1}{6}$ de la pizza. Notando así que en este video no ocupa unidades compuestas.

Se analizaron los videos que utiliza el maestro Juan para identificar la corrección de la información que se proporciona en dichos videos, así como conocer cuáles son los subconstructos de una fracción considerados, cuáles son los modelos visuales y registros de representación utilizados. También se buscó determinar si el maestro en realidad aplica las ideas revisadas en los videos, y conocer cómo los videos influyen en las actividades que el profesor implementa en su salón de clase, ya que si sus fuentes de apoyo (videos) no contienen información suficiente como lo es utilizar unidades compuestas, el profesor tampoco lo aplicará en clase.

4.2.3. La maestra Lidia

Para abordar el tema de fracciones, la maestra mencionó que utiliza sinónimos para introducir el contenido; es decir, palabras como: dividir, cortar o separar , siempre recordando que esta separación o división tiene que ser en partes iguales. Para explicar el tema de fracciones se apoya de imagenes y la representación numérica; es decir, la maestra coloca el dibujo de la fracción y a un lado coloca como se escribe la fracción ($\frac{1}{2}$). Otra cosa que la maestra agrega a esta explicación, es como se escribe el nombre de la fracción (como se lee), el único material que ocupa son impresiones, a veces llega a ocupar alguna fruta u hoja de papel, para representar el proceso de equipartición.

En la figura 4.1 se puede observar una de las actividades con impresiones que la maestra propone a sus estudiantes, estas actividades las obtiene de un cuadernillo el cual nos proporcionó y se encuentra en la carpeta de evidencias con el nombre de

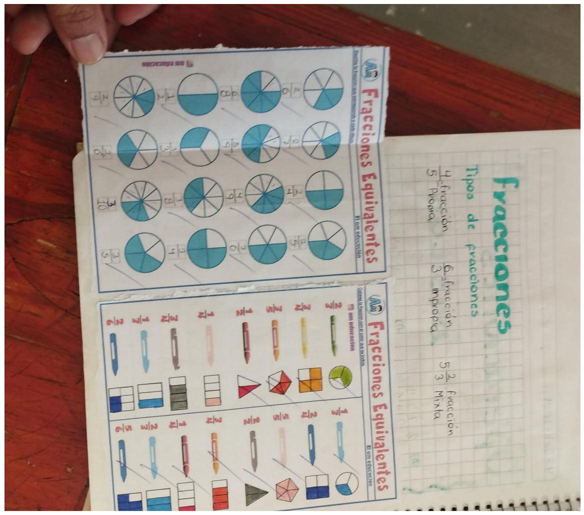

Figura 4.1: Actividades con impresiones

Figura 4.2: Actividades con hoja de papel

fracciones, como se muestra en la figura 4.3.

La maestra también mencionó que para captar la atención de los alumnos, en ocaciones, suele hacer juegos como un memorama de fracciones. Al pasar al tema de la suma, resta, multiplicación y división la maestra solo contempla la suma y resta para esto solo ocupa las fracciones con el mismo denominador, cuando hayan comprendido lo que pasa con este tipo de fracciones ya puede pasar a las de diferente denominador y por último pasa a la multiplicación y división. Al hacer la siguiente pregunta sobre la comparación de fracciones, la maestra nos comentó que esto lo hace durante todo el transcurso del tema, ya que si en sus ejemplos muestra dos fracciones diferentes, aprovecha para mencionar cual es mayor o menor que la otra,

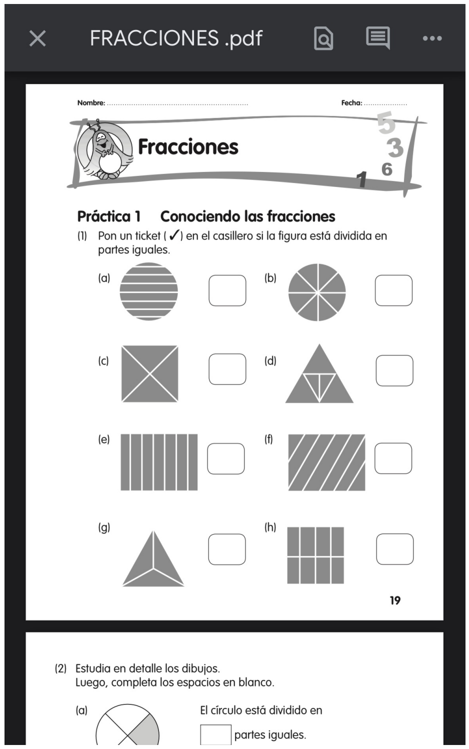

Figura 4.3: Cuadernillo de actividades

Al explicar por primera vez el tema una de las mayores problemáticas que la maestra Lidia a identificado es el miedo que presentan los alumnos al entrar en un nuevo tema, especialmente cuando se trata de matemáticas, ya cuando se a avanzado en el tema, por ejemplo al realizar operaciones con fracciones, se presentan problemáticas pero no necesariamente donde se ven involucradas las fracciones, ya que nos comenta que ella observa que a algunos de los alumnos se les dificulta desarrollar una suma, resta, no se saben las tablas de multiplicar o no saben dividir, lo cual les impide poder desarrollar correctamente el tema de las fracciones. A estas problemáticas la maestra Lidia propone unas actividades extras, al iniciar clases o después del receso, a estas actividades la maestra las llama *actividades permanentes*, las cuales se basan en fortaleces temas que se vieron durante la clase, haciendo algunos juegos mentales para empezar bien el día, estas actividades las realiza para todas sus materias, no exactamente para el tema de las fracciones. Estas mismas preguntas se le realizaron a la maestra Esperanza.

4.2.4. La maestra Esperanza

Para introducir la definición de fracción, la maestra mencionó que le gusta mucho trabajar con pizzas, es decir, con la ilustración de una pizza, pero una pizza completa, sin divisiones previas, ya que comenta que la ocupa para primero dividirla en medios, después en tercios y así sucesivamente, el uso de la pizza lo hace con el fin de captar la atención de los niños, ya que la tienen físicamente y pueden manipularla de una mejor manera como se puede ver la figura 4.4, aunque ese es uno de sus materiales favoritos también utiliza actividades impresas que obtiene de internet, en especial de grupos de Facebook en donde encuentra variedad de actividades y juegos como un memorama, el cual ella no realizó, lo compró, pero es una manera divertida de aprender, el memorama se centra en el tema de comparación de fracciones.

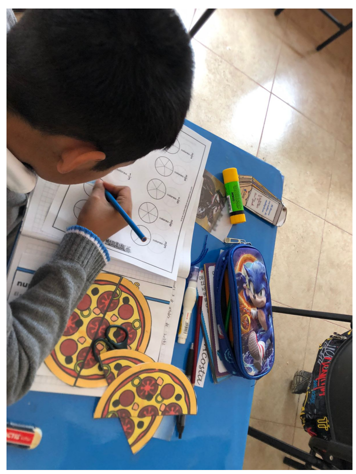

Figura 4.4: Actividad de la pizza

Por otra parte, al llegar al tema de las complicaciones que se pueden llegar a presentar, la maestra observa que al introducir el tema los alumnos no lograr identificar cual es el denominador y cual el numerador, pero la principal es que cualquier persona en general, al escuchar que el tema se trata de números lo relacionan como un tema difícil, solo por el hecho de que se trata de matemáticas y algunas problemáticas que se presentan a lo largo del tema son con las operaciones con fracciones, cuando se tienen fracciones con diferente denominador. La maestra al tener estas problemáticas a lo que recurre es buscar alguna orientación en Google, ya que nos menciona que nadie la prepara para este tipo de circunstancias.

Figura 4.5: Páginas de Facebook

4.3. Categorización de resultados

La información empírica se analizó al organizar los datos empíricos en categorías determinadas a priori, las cuales son:

- Tipo de material didáctico
- Interpretaciones de una fracción
- Representaciones y operaciones sobre las representaciones
- Tipos de unidades (individuales o compuestas)

Maestro	Material didáctico	Interpretación de la fracción	Representación	Tipo de unidades
Juan	pizarrón, videos de internet	parte-todo	gráfica, aritmética	unitarias
Lidia	pizarrón, impresiones, juegos (memorama)	parte-todo	gráfica, aritmética, conversiones entre registros	unitarias
Esperanza	manipulativo físico, juegos (memorama), impresiones, recortes en pizarrón, videos de internet	parte-todo	gráfica, aritmética, (tratamientos y conversiones entre registros)	unitarias

Estas categorías de análisis son apriori, ya que se definieron de forma previa al proceso de análisis de la información. Después de analizar las transcripciones de las entrevistas la información se sintetizó como se muestra en la tabla.

4.4. Interpretación de resultados con base en la mediación instrumental

De acuerdo con la perspectiva sociocultural de Vygostsky, de donde se desprende el constructo de mediación instrumental, la interacción entre el sujeto y objeto que da lugar a la construcción del conocimiento se lleva a cabo no de forma directa, sino a través de mediadores, que no son sino producciones culturales, de las cuales la más importante es el lenguaje, pero también son los símbolos matemáticos y demás herramientas, ya sean físicas o simbólicas. El principio de mediación instrumental establece que no hay actividad cognitiva al margen de los sistemas de representación y que las características del conocimiento que construye una persona depende de las herramientas (mediadores) utilizadas durante el proceso de construcción. En este sentido, conocer cuáles son las herramientas y demás producciones culturales utilizadas por los docentes para favorecer el aprendizaje de los estudiantes permite establecer conjeturas respecto de cuáles pudiesen ser las características del conocimiento de los estudiantes que aprenden mediante la utilización de tales herramientas. Como parte de una investigación posterior se podría buscar validar o refutar las conjeturas que se formulan en este trabajo al analizar los entendimiento de compresiones desarrolladas por los estudiantes de los participantes en la investigación.

Como se expresó en las secciones previas, la herramienta más utilizada por los docentes para enseñar fracciones es el pizarrón, junto con las representaciones numéricas y las representaciones gráficas, prevaleciendo solo las conversiones entre dos registros de representación en un solo sentido, y prevaleciendo el subconstructo parte-todo. En este contexto, se conjetura que el entendimiento de los estudiantes sobre las fracciones estará limitado, como se ha reportado en diversos trabajos de investigación que se revisaron en el primer capítulo, dadas las limitaciones de materiales y representaciones utilizadas por los docentes, no habrá suficientes conexiones derivado de las observaciones que se realizaron de las entrevistas y del tipo de materiales proporcionados. Algunas dificultades específicas que conjeturamos pueden mostrar los estudiantes son dificultades para convertir representaciones gráficas en numéricas, ya que los participantes solo promueven la conversión en la dirección numérica gráfica, y dado que generalmente los problemas inversos siempre son, cognitivamente, más demandantes que los problemas directos (Marone, 2020).

Capítulo 5

Discusión y conclusiones

5.1. Introducción

En esta sección se describen los principales patrones de significado identificados a partir del análisis de los datos efectuados en el capítulo previo, también se llevó a cabo una discusión de los resultados, la cual consiste en comparar lo que se obtuvo en esta tesis con los resultados de las investigaciones revisadas en el primer capítulo. Se describen los alcances y limitaciones del trabajo, así como algunas propuestas a futuro.

5.2. Respuesta a la pregunta de investigación

La pregunta de investigación que orientó la elaboración de este trabajo de tesis es: ¿cuáles son los recursos didácticos, así como las subconstructos y representaciones de una fracción que utilizan docentes que trabajan en escuelas primarias rurales multigrado para abordar por primera vez este tema con sus estudiantes?

Con base en los datos empíricos obtenidos la respuesta es que el principal recurso didáctico utilizado por todos los entrevistados es el pizarrón. El cuál los docentes ocupan para dar la introducción y seguimiento del tema sobre las fracciones, ya que para ellos es más fácil y accesible el uso del pizarrón, es una manera en la que todos los alumnos pueden observar desde su lugar lo que el maestro esta explicando, sin embargo, el uso del pizarrón no es una de las mejores herramientas, ya que no es tan preciso al momento de dividir un entero y observar las partes que se obtiene. Si bien el uso de impresiones o materiales impresos es menos frecuente que el empleo del pizarrón en la enseñanza de fracciones, estos materiales cumplen con funciones específicas en el proceso de aprendizaje, empleandose como un complemento, en estas impresiones los alumnos realizan las actividades directamente en la hoja o también se presentan impresiones que constan de ilustraciones como pizzas, que los alumnos pueden recortar y así poder manipularlas mejor para tener una visión más amplia de lo que es una fracción.

En lo que respecta al uso de manipulativos físicos, solo dos de los tres docentes intentan implementarlos en sus clases, siendo un poco complicado por falta de información sobre formas adecuadas para utilizarlos. Para conocer estos manipulativos, los docentes tuvieron que acudir a páginas de internet para obtener ideas de como elaborarlos desde cero u obtener plantillas para imprimir. Otra opción a la que acudieron los docentes fue comprar un juego referente a las fracciones, como un memorama.

Dentro de los problemas que los docentes sugieren para sus alumnos, predominan donde se considera el subconstructo por parte-todo, sin embargo, se observa en el cuadernillo proporcionado por un docente, que si se presentan actividades en donde se emplean los demás subconstructos, pero en las evidencias proporcionadas y por lo que se comentó en la entrevista no se hace mención de ello. Lo mismo ocurre con los tipos de unidad, dentro de las actividades que los docentes buscan en internet si se observan unidades compuestas, pero los docentes no las aplican en las actividades o en los materiales que ellos diseñan.

5.3. Discusión

Los resultados obtenidos en este trabajo coinciden con resultados obtenidos en investigaciones previas, como es el caso de la investigación de Duval (2017), con las actividades que realiza la maestra Lidia durante el tema de fracciones, implementa los procedimientos de tranformación y conversión, dentro de este cuadernillo también se encuentra actividades en donde se observan las diferentes interpretaciones de la fracción como las menciona Lamon (2006), estas interpretaciones son: parte-todo (actividades con figuras geométricas), cociente y medida. Al llevar a cabo este tipo de actividades se ocupan diversos modelos visuales como los menciona Petit et al. (2022) en su investigación, los modelos más ocupados por los 3 maestros son los de área, dejando olvidados los demás modelos de conjuntos y las rectas numéricas, pudiendo acudir a la teoría de Siegler et al. (2011) basada en la recta numérica, es claro que con los modelos de área es más fácil que un alumno pueda entender más fácil y rápido el tema, pero los alumnos se van acostumbrando a estos modelos pensando que son los únicos, por esto deben de ir de la mano, tratar de introducir ambos, tener en cuenta que también tenemos las unidades compuestas, es lo mismo que pasa con el tema de llamar a las partes de la fracción por otro nombre y los alumnos se quedan con la idea de que así se les debe de llamar, cuando estas tienen un nombre en específico.

Revisando los programas de estudio de las licenciaturas de la que egresaron los participantes, no se encontraron asignaturas enfocadas en el tema de fracciones, solo se incluyen asignaturas como: estadística y procesamiento de la información numérica. Por lo tanto, se considera que esta puede ser una de las causas por la que los docentes dejan de lado la recta numérica, ya que no tienen al alcance los conocimientos necesarios para ello.

Por otro parte el maestro Juan y la maestra Esperanza comentan que hacen uso de algunos videos en la plataforma de YouTube, la diferencia de uso es que el maestro Juan los proyecta a los alumnos y la maestra Esperanza ve los videos para resolver dudas u obtener información útil para diseñar sus clases. Aunque estos videos contienen buena información, suelen ser videos cortos en donde se trata de meter toda la información posible y eso puede llegar a confundir a los alumnos, así que si es un buen recurso pero para los maestros, de ahí pueden obtener buenas ideas y distribuirlas de buena manera durante el transcurso de las sesiones de clase. Los problemas presentados con los alumnos de estos maestros son los mismos que los utilizados por Tian y Siegler (2016), principalmente cuando se introducen fracciones con diferente denominador, también se presentaron dificultades que no específicamente tiene que ver con las fracciones, sino en general con las matemáticas pero la maestra Esperanza lo resuelve de una manera creativa, estos son los juegos que ocupa, manipulativos físicos, ya que los alumnos así no solo se encuentran sentados frente al pizarrón viendo muchos números, que es lo que les causa miedo, así estan jugando con algún material y al mismo tiempo aprendiendo. Como Gaetano (2014) menciona que al usar materiales didácticos específicamente en la enseñanza de las fracciones, se obtienen mejores resultados, lo cual no estuvo muy presente en la dinámica que ocupan los profesores entrevistados, lo cual puede ser una causa, de que los niños no presenten interés al saber que se les enseñará un nuevo tema que involucra matemáticas.

Referente a las actividades que aplica la maestra Lidia basadas en un cuadernillo, comparandolo con el cuadernillo que nos proporciona Rasmussen (1980), donde el cuadernillo se divide en los siguientes temas: fracciones, nombrar partes fraccionarias, super partes fraccionarias, fracciones en medida, fracciones en problemas de palabras, vocabulario de fracciones, leer y escribir fracciones, fracciones iguales a uno, fracciones y rectas numéricas, fracciones mayores que uno, comparar fracciones, comparación de fracciones mediante rectas numéricas y fracciones iguales.

La parte del vocabulario de fracciones es una parte importante que se debe de implementar más en las actividades que se realizan en el salón de clases, evitando así el problema que presentan los alumnos al identificar los elementos de una fracción. Los maestros en la mayoría de las actividades basan los ejemplos en círculos o alguna otra figura geométrica, pero como muestra Rasmussen (1980) un punto importante es la comparación de fracciones mediante la recta numérica, ya que se presentan actividades en donde hay fracciones con el numerador más grande que el denominador, como en el tema de fracciones mayores que uno, y es ahí en donde los alumnos llegan a confundirse, sin embargo los profesores no lo implementaron. Saxe et al. (2007) analizó el uso de las rectas numéricas para apoyar la comprensión de fracciones en estudiantes de primaria y secundaria, argumentando que las rectas numéricas pueden apoyar la comprensión de los estudiantes sobre las propiedades importantes de las fracciones, específicamente en alumnos de quinto y sexto grado, ya que ocupan la recta como vehículo para comprender ideas como la unidad numérica. Desde el punto de vista de Robotti et al. (2016) las fracciones constituyen un salto importante dentro del dominio de la artimética porque representa un primer acercamiento hacia la idea de expresión del conjunto de los números naturales, en este sentido, las fracciones necesitan asumir una posición específica en la recta numérica. Se presentó la propuesta de realizar una secuencia de actividades, inicialmente con algunas hojas de papel, para después convertirlas a tiras como las del papel higiénico, para identificar la fracción indicada y como última actividad ya identificarla en la recta numérica, esto con la finalidad de iniciar con actividades tradicionales (áreas particionadas), para después pasar a franjas que gradualmente perdieron su grosor y se estrecharon hasta convertirse en segmentos que indican distancias desde el origen de la recta numérica.

5.4. Alcances y limitaciones

Al haber cursado la educación básica en una primaria multigrado, así como tener conocidos que se encuentran trabajando en escuelas de este tipo, fue accesible obtener información empírica para la realización de esta tesis, lo cual no siempre es posible, dada la renuencia de los profesores a proporcionar información de lo que ocurren en sus aulas por temor a que dicha información pueda utilizarse para criticar negativamente su trabajo o incluso que pueda tener repercusiones laborales.

Teniendo estas posibilidades se pudo haber entrevistado a más profesores, así como mejorar las preguntas que se aplicaron, ya que durante el transcurso del trabajo surgieron nuevas preguntas que ya no se pudieron llevar a cabo, ya que se había concluido la parte de las entrevistas. A pesar de tener esta limitación, al realizar la investigación sobre la enseñanza de las fracciones, se notaron situaciones que no imaginaba en la vida de un docente, como las dificultades al planear actividades para sus alumnos por la falta de recursos, el no saber a donde acudir para informarse sobre como proponer un material didáctico para resolver las dudas de sus alumnos o para interesarlos en el tema, ya que este fue uno de los problemas que los docentes comentaron con mayor frecuencia.

Para esto considero una buena propuesta, el elaborar y compartir materiales didácticos a docentes de primaria, que sean confiables, esto es capacitarme para diseñar materiales de buena calidad. Así, maestros que trabajan en comunidades rurales puedan tener acceso a material de apoyo, para complementar sus clases y así obtener mejores resultados en el aprendizaje de las fracciones. La propuesta de realizar materiales didácticos, es con objetivo de que los maestros no tengan que pagar por estos materiales para sus actividades, al proponer que se elaboren con material reciclado, proporcionando indicaciones claras de como utilizarlo, así como una explicación, con palabras simples y claras, de cuáles son los fundamentos teóricos involucrados en su elaboración. Considerando que algunas escuelas de zonas rurales no cuentan con internet, los docentes no pueden consultar páginas o en este caso el material propuesto, para implementarlo en sus clases. Me gustaría llevar este material a escuelas de los docentes entrevistados o incluso otras cercanas, para poder ponerlos en práctica y notar sus resultados, así como apoyar a estos docentes que no cuentan con los materiales necesarios.

5.5. Reflexiones finales

Durante la realización del trabajo de tesis, en un principio tenía algunas ideas sobre materiales que se pueden implementar para enseñar fracciones, sin embargo no sabía sobre los subconstructos de una fracción o como se podian representar, ya que en ocaciones solo se nos presentan problemas que involucran estas interpretaciones, pero sin especificar que existe una clasificación para las fracciones. Así como en la interpretación de las fracciones, desde pequeños se nos enseña a como podemos ver una fracción, si tomamos un círculo y lo dividimos y de ahí pasar a verlo de forma artimética o viseversa, de esto aprendí que al hacer estos cambios estamos hablando de los registros como lo menciona Duval.

Así que un punto importante a mencionar, es que para obtener esta información y toda la mencionada en el trabajo de tesis, aprendí a identificar artículos que me proporcionaran buenos resultados, que tuvieran una estructura adecuada y con la información de mi interés.

En el caso de los materiales didácticos que se pueden implementar para la enseñanza de las fracciones, en la mayoría de los casos no se implementan en las clases, no exactamente porque los maestros no quieran hacerlo, sino porque no tienen las herramientas para llevarlo a cabo. Al respecto, una de las maestras entrevistadas mencionó que como maestros no les dan las herramientas para saber como enseñar. Ellos tienen que investigar por su cuenta, sin saber si la información que obtienen es correcta o no. No encuentran fácilmente algún curso, materiales o clases que se les impartan a los profesores para que ellos tengan mayor conocimiento sobre estrategias a implementar, especialmente en temas de matemáticas.

Asimismo, durante el proceso de redacción de la información recopilada, inicialmente se presentaron dificultades para organizar y estructurar el contenido. Sin embargo, mediante la práctica constante, se logró mejorar progresivamente la calidad y fluidez de la escritura.

Referencias

Aguilar, M. S. (2013). Sobre los roles de la teoría en una investigación en didáctica de las matemáticas. *Actas del 4º Seminario Taller en Educación Matemática: La Enseñanza del Cálculo y las Componentes de su Investigación*, 13-21. https://acortar.link/ve73v1

Ames, P. (2004). *Las escuelas multigrado en el contexto educativo actual: desafíos y posibilidades*. Ministerio de Educación del Perú Lima.

Ary, D., Jacobs, L. C., Sorensen, C., & Razavieh, A. (2009). *Introduction to research in education*. Cengage Learning.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching. *American Educator*, *29*(3), 14-46. https://bit.ly/4cssLiw

Basturk, S. (2016). Primary student teachers' perspectives of the teaching of fractions. *Acta Didactica Napocensia*, *9*(1), 35-44. https://bit.ly/3E55iHL

Bentley, B., & Bosse, M. J. (2018). College students' understanding of fraction operations. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *13*(3), 233-247. https://doi.org/10.12973/iejme/3881

Benveniste, L. A., & McEwan, P. J. (2000). Constraints to implementing educational innovations: The case of multigrade schools. *International review of education*, *46*, 31-48.

Bobos, G., & Sierpinska, A. (2017). Measurement approach to teaching fractions: A design experiment in a pre-service course for elementary teachers. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *18*(2), 203-239. https://doi.org/10.4256/ijmtl.v18i2.65

Bouck, E. C., Shurr, J., Bassette, L., Park, J., & Whorley, A. (2018). Adding it up: Comparing concrete and app-based manipulatives to support students with disabilities with adding fractions. *Journal of Special Education Technology*, *33*(3), 1-13. https://doi.org/10.1177/1062643418759341

Bruner, J. S. (2018). *Desarrollo cognitivo y educación*. Morata.

Burgess, R. G. (1989). Keeping field notes. En R. G. Burgess (Ed.), *Field research: A sourcebook and field manual* (pp. 292-297). Routledge.

Carpenter, T. P., Fennema, E., & Romberg, T. A. (1993). *Rational numbers an integration of research*. Routledge.

Carracedo, M., Sánchez, D., & Zunino, C. (2017). Consentimiento informado en investigación. *Anales de la Facultad de Medicina*, *4*(1), 16-21. https://bit.ly/3Yu5g2T

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*, 293-316. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2

Cookey, P., & Maduike, M. (2021). Assessment of the challenges experienced by teachers of multi-grade classes in primary schools: A case of mathematics teaching. *Journal of Education and Society*, *11*(3), 1885-1892.

De Toscano, G. T. (2009). La entrevista semi-estructurada como técnica de investigación. *Graciela Tonon (comp.)*, *46*, 45-73.

Duran, M. M. (2015). El estudio de caso en la investigación cualitativa. *Revista Nacional de Administración*, *3*, 121-134. https://doi.org/10.22458/rna.v3i1.477

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking. The registers of semiotic representations*. Springer.

Eisenhart, M. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education research. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 202-219). PMENA. https://bit.ly/4hSuvDt

Empson, S. B. (2003). Low-performing students and teaching fractions for understanding: An interactional analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(4), 305-343. https://doi.org/10.2307/30034786

Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Randolph, V., & González, G. (2017). Problem solving as a professional development strategy for teachers: A case study with fractions. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*, *13*(3), 987-999. https://doi.org/DOI10.12973/eurasia.2017.00653a

Flick, U. (2014). *La gestión de la calidad en investigación cualitativa*. Morata.

Gaetano, J. (2014, mayo). *The effectivess of using manipulatives to teach fractions* [Master of Arts]. Rowan University. https://rdw.rowan.edu/etd/495

Gearhart, M., Sxe, G. B., Seltzer, M., Schlakman, J., Ching, C. C., Nasir, N., Fall, R., Rhine, T. B. S., & Sloan, T. F. (1999). Opportunities to learn fractions in elementary mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(3), 286-315. https://doi.org/10.2307/749837

Hargreaves, E., Montero, C., Chau, N., Sibli, M., & Thanh, T. (2001). Multigrade teaching in Peru, Sri Lanka and Vietnam: an overview. *International journal of educational development*, *21*(6), 499-520.

Jiang, Z., Mok, I. A. C., & Li, J. (2021). Chinese students' hierarchical understanding of part-whole and measure subconstructs. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *19*(1), 1441-1461. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10118-1

Jordan, N. C., Hansen, N., Fuchs, L. S., Siegler, R. S., Gersten, R., & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology*, *116*(1), 45-58. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.02.001

Julie, H., Suwarsono, S., & Juniati, D. (2013). The first cycle of developing teaching materials for fractions in grade five using realistic mathematics education. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, *4*(2), 172-187. https://bit.ly/3XSYxPT

Kalu, F. A., & Bwalya, J. C. (2017). What makes qualitative research good research? An exploratory analysis of critical elements. *International Journal of Social Science Research*, *5*, 43-56. https://doi.org/10.5296/ijssr.v5i2.10711

Kazdin, A. E. (1982). *Single-case designs: Methods for clinical and applied settings*. Oxford University Press.

Kor, K., Teoh, H., Mohamed, B., & Singh, P. (2018). Learning to make sense of fractions: Some insights from the Malaysian primary 4 pupils. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *14*(1), 169-182. https://doi.org/https://doi.org/10.29333/iejme/3985

Kozulin, A. (1994). *La psicología de Vygotski. Biografía de unas ideas*. Alianza Editorial. https://acortar.link/995VEq

Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: its rola in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 170-193. https://doi.org/https://doi.org/10.5951/jresematheduc.27.2.0170

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing from fractions to rational numbers. En A. A. Cuoco (Ed.), *The Role of representation in school mathematics, 2001 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 146-165). NCTM.

Lamon, S. J. (2005). *MORE. In-depth discussion of the reasoning activities in "teaching fractions and ratios for understanding"*. Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding*. Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding : essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM*, *37*(6), 457-467. https://doi.org/10.1007/BF02655854

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal rithmetic so difficult? *Developmental Review*, *38*(2015), 201-221. https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Marczyk, G., DeMatteo, D., & Festinger, D. (2005). *Essentials of research design methodology*. John Wiley & Sons.

Marone, L. (2020). On the kinds of problems tackled by science, technology, and professions: Building foundations of science policy. *Mεtascience*, (1), 79-95. https://philarchive.org/archive/MAROTKv2

Martínez-Rizo, F. (2006). *Las primarias comunitarias y su desempeño. Consideraciones a partir del estudio comparativo 2000-2005 del INEE. Cuaderno No.23*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. https://acortar.link/D9QEPZ

Moreno-Armella, L. E. (2001). Cognición, mediación y tecnología. *Avance y Perspectiva*, *20*(1), 65-68. https://bit.ly/3FYWW4P

Moreno-Armella, L. E. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En M. de Educación Nacional (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Tecnologías digitales en el Aula de Matemáticas* (pp. 81-86). MEN. https://bit.ly/3G2bXD3

Nava, P. B., López-Fuentes, N. I. G.-A., Peña, G. M. G., & Chimal, A. M. (2013). *Investigación cualitativa*. Universidad Autónoma del Estado de México. http://hdl.handle.net/20.500.11799/21589

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, *45*(4), 1080-1110. https://doi.org/10.3102/0002831208320851

Nillas, L. (2003). Division of fractions: Preservice teachers' understanding and use of problem solving strategies. *The mathematics educator*, *7*(2), 96-113. https://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV7_2/Nillas%20Final.pdf

Olanoff, D., Lo, J.-J., & Tobias, J. (2014). Mathematical content knowledge for teaching elementary mathematics: A focus on fractions. *The Mathematics Enthusiast*, *11*(2), 267-310. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1304

Petit, M. M., Laird, R. E., Ebby, C. B., & Marsden, E. L. (2022). *A Focus on Fractions: Bringing Mathematics Education Research to the Classroom*. Taylor & Francis.

Rasmussen, S. (1980). *Fraction Concepts Book 1 (Key to Fractions)*. Key Curriculum Press.

Robotti, E., Antonini, S., & Baccaglini-Frank, A. (2016). Coming to see fractions on the numberline. *arXiv preprint arXiv:1602.05420*.

Ruíz, A. C. (2021). Análisis de dificultades en la enseñanza y aprendizaje del español y las matemáticas en escuelas primarias multigrado de Veracruz-México. *Tendencias pedagógicas*, (37), 57-74.

Satsangi, R., & Raines, A. R. (2022). Examining virtual manipulatives for teaching computations with fractions to children with mathematics difficulty. *Journal of Learning Disabilities*, *56*(4), 295-309. https://doi.org/10.1177/00222194221097710

Saxe, G. B., Gearhart, M., & Seltzer, M. (1999). Relations between classroom practices and student learning in the domain of fractions. *Cognition and instruction*, *17*(1), 1-24. https://www.jstor.org/stable/3233828

Saxe, G. B., M.Shaughnessy, M., Shannon, A., Langer-Osuna, J. M., Chinn, R., & Gearhart, M. (2007). Learning about fractions as points on a number line. *The learning if mathematics: Sixty-ninth yearbook*, *53*, 221-237.

Schmelkes, S., & Aguila, G. (2019). *La educación multigrado en México*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. https://acortar.link/t7Ou9Y

Schwandt, T. A., & Gates, E. F. (2017). Case study methodology. En N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The SAGE handbook of qualitative research, fifth edition* (pp. 600-630). SAGE.

SEP. (2024). *Plan de estudios para la educación preescolar, primaria y secundaria 2022*. Secretaría de Educación Pública. https://acortar.link/1yhTdj

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2014). An integrative theory of numerical development. *Child Development Perspectives*, *8*(3), 144-150. https://doi.org/10.1111/cdep.12077

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole nuber and fractions development. *Cognitive Psychology*, (4), 273-296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. En N. K. Denzin & Y. S.Lincoln (Eds.), *The SAGE handbook of qualitative research, third edition* (pp. 443-466). SAGE.

Steenbrugge, H. V., Remillard, J., Verschffel, L., Valcke, M., & Desoete, A. (2015). Teaching fractions in elementary school: An observational study. *The Elementary School Journal*, *116*(1), 49-75. https://doi.org/10.1086/683111

Swanborn, P. G. (2010). *Case study research. What? Why? and How?* Sage.

Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1994). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación: la búsqueda de significados.* Ediciones Paidós. https://acortar.link/tEPuta

Tian, J., & Siegler, R. S. (2016). Fractions learning in children with mathematics difficulties. *Learning Disabilities*, *50*(6), 614-620. https://doi.org/10.1177/0022219416662032

Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and teacher education*, *25*(1), 166-175. https://doi.org/10.1016/j.tate.2008.08.003

Ureña, D. A. C., Requena, B. E. S., & Osuna, J. M. B. (2022). Efectos de la agrupación multigrado y el tamaño del aula en los resultados de aprendizaje de estudiantes de Educación Primaria. Evidencia de escuelas multigrado del sistema educativo de la República Dominicana. *Estudios sobre Educación*, *42*, 241-262.

Wertsch, J. V. (1993). *Voices of the mind. A sociocultural approach to mediated action.* Harvard University Press.

Apéndice A

Transcripción de las entrevistas

Con el objetivo de apoyar la política institucional de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo referente al ahorro de papel, los apéndices de la tesis se presentan de forma electrónica mediante los siguientes hipervínculos:

- Transcripción de la entrevista piloto.
- Transcripción de la entrevista al maestro Juan.
- Transcripción de la entrevista de la maestra Lidia
- Transcripcion de la entrevista a la maestra Esperanza