



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

**SISTEMAS CONCEPTUALES GENERADOS POR ESTUDIANTES DE NUEVO
INGRESO A MATEMÁTICAS APLICADAS EN TAREAS DE MODELACIÓN**

PRESENTA

Nelly Mariela Moreno Cruz

Director

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Codirector

Dr. Fernando Barrera Mora

Comité tutorial

Dr. Fernando Barrera Mora
Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez
Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Dra. Verónica Vargas Alejo

Mineral de la Reforma, Hgo., México, febrero 2025



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

School of Engineering and Basic Sciences

Área Académica de Matemáticas y Física

Department of Physics and Mathematics

Mineral de la Reforma, Hgo., a 9 de abril de 2025

Número de control: ICBI-AAMyF/319/2025

Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

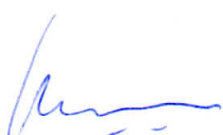
El Comité Tutorial de la tesis titulada "**Sistemas conceptuales generados por estudiantes de nuevo ingreso a matemáticas aplicadas en tareas de modelación**", realizada por la sustentante Nelly Mariela Moreno Cruz, con número de cuenta 379317, perteneciente a la **Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

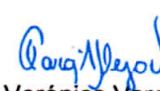
AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

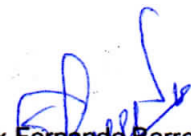
Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial


Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Director


Dra. Verónica Vargas Alejo
Miembro del comité




Dr. José Félix Fernando Barrera Mora
Codiector


Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez
Miembro del comité

"Amor, Orden y Progreso"



2025



Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 40124, 40119
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx, ravila@uaeh.edu.mx

uaeh.edu.mx

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el apoyo económico otorgado, para la realización de esta tesis, a través de la beca de posgrado con número de becario 1272116.

Agradezco a la Dra. Guadalupe Carmona-Domínguez, de la Universidad de Texas en San Antonio, por el apoyo y orientación brindada para el diseño de la actividad que se implementó en este trabajo. Muchas gracias Dra. Carmona, por su gentileza y amabilidad.

A mis directores por toda la orientación y apoyo que me dieron para hacer posible este trabajo. También quiero agradecer a mis sinodales por darse el tiempo de revisar esta tesis. Finalmente, y no menos importante, agradezco a mi familia por siempre apoyarme en todas mis decisiones.

Resumen

Se identifican y caracterizan los modelos matemáticos generados por estudiantes universitarios de primer semestre cuando abordan una tarea de modelación denominada *Administración del Gran Hotel de Pachuca*, la cual es una adaptación de la Model Eliciting Activity *Historic Hotel*. La tarea se adaptó, implementó y analizó con base en la perspectiva teórica de *Modelos y Modelación*. La implementación se llevó a cabo durante el semestre julio-diciembre 2023 e incluyó las siguientes fases: (i) actividad de calentamiento, (ii) actividad principal y (iii) exposiciones de resultados en sesión plenaria. Los participantes fueron 19 estudiantes, seleccionados por conveniencia, quienes se encontraban inscritos en el primer semestre de una licenciatura en matemáticas aplicadas, en una universidad pública del estado de Hidalgo, México. Las actividades se implementaron en el marco de la asignatura denominada *Razonamiento Matemático*. Se llevaron a cabo dos sesiones de trabajo, de tres horas cada una (viernes 7 de diciembre y lunes 12 de diciembre de 2023). En la primera sesión, los participantes abordaron la actividad de calentamiento y la actividad principal, en equipos de cuatro estudiantes. En la segunda sesión, los cinco equipos realizaron presentaciones, en reunión plenaria, del proceso de solución de la tarea. Las fuentes de recolección de la información fueron las producciones escritas de los estudiantes, así como grabaciones en video de las exposiciones, las cuales se transcribieron. El análisis de la información consistió en identificar los componentes de los sistemas conceptuales (modelos) generados por los estudiantes, así como de los procesos de mejora, adaptación y refinamiento de los modelos. Los sistemas conceptuales iniciales empleados por los estudiantes fueron funciones lineales y tablas, los cuales se refinaron posteriormente a funciones cuadráticas.

Abstract

We identify and characterize the mathematical models developed by first-year university students as they engaged with the Model Eliciting Activity (MEA) titled *Administración del Gran Hotel de Pachuca*, an adaptation of the *Historic Hotel*. The task was adapted, implemented, and analyzed within the theoretical framework of *Models* and *Modeling*. The implementation was conducted in three phases during the fall 2023 semester: (i) a warm-up activity, (ii) the main activity, and (iii) plenary presentations of the results. The participants consisted of 19 students enrolled in the first semester of a bachelor's program in Applied Mathematics at a public university in Hidalgo, Mexico, selected through convenience sampling. The activity was part of the Mathematical Reasoning course during the fall 2023 semester. The task was implemented over two three-hour working sessions (Friday, December 7, and Monday, December 12). During the first session, participants completed the warm-up and main activity in teams of four. In the second session, the five teams presented their solution processes in a plenary session. Data sources included students' written work and video recordings of the sessions, which were later transcribed. The analysis focuses on identifying the components of the models generated by the students, as well as the cycles of improvement, adaptation, and refinement of these models. Initially, students proposed linear functions and tables as models, which were later refined into quadratic functions.

Contenido	Página
Oficio de autorización de impresión	ii
Agradecimientos	iii
Resumen	iv
Abstract	v
 CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	
1.1. Introducción	1
1.2. Revisión de literatura	3
1.3. Planteamiento del problema	16
1.4. Justificación	17
 CAPÍTULO 2. MARCO DE INVESTIGACIÓN	
2.1. Introducción	19
2.2. Tipos y características de los marcos de investigación	19
2.3. Fundamentos ontológicos, epistemológicos y didácticos	21
2.4. Elemento del marco de investigación	22
 CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA	
3.1. Introducción	26
3.2. Investigación cualitativa	26
3.3. Estudio de casos	28
3.4. Diseño de la MEA	30
3.5. Participantes	34
3.6. Implementación de la MEA	35
3.7. Recolección y análisis de la información	36
 CAPÍTULO 4. RESULTADOS	

4.1. Introducción	38
4.2. Proceso de modelación: equipo 1	38
4.3. Proceso de modelación: equipo 2	46
4.4. Proceso de modelación: equipo 3	54
4.5. Proceso de modelación: equipo 4	57
4.6. Proceso de modelación: equipo 5	63
4.7. Comparativo del trabajo de los equipos	70
4.8. Autoevaluación y cuestionario anónimo	71

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

5.1. Introducción	74
5.2. Respuesta a las preguntas de investigación	74
5.3. Discusión	76
5.4. Alcances y limitaciones de la investigación	78
5.5. Reflexiones finales	79

Referencias	81
Apéndice A. Proceso de diseño de la MEA	87
Apéndice B. Elaboración de la rúbrica	87
Apéndice C. MEA (Actividad de calentamiento, actividad principal, autoevaluación, encuesta de satisfacción)	87
Apéndice D. Guía de observación de clase	87
Apéndice E. Transcripciones de las videgrabaciones	87
Apéndice F. Nubes de palabras y tablas de equivalencia de términos	87

CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

En esta sección se exponen los antecedentes, planteamiento y justificación del problema de investigación. El objetivo de la tesis es caracterizar los sistemas conceptuales generados por estudiantes de primer semestre de una licenciatura en matemáticas aplicadas, cuando abordan situaciones problemáticas contextualizadas, denominadas *Model-Eliciting Activity* (en lo subsecuente referidas como MEA). Considerando lo anterior, mediante una revisión de literatura se identificaron problemas de investigación similares, propuestas teóricas y metodológicas, así como oportunidades para contribuir en la ampliación o refinamiento del cuerpo de conocimientos existentes con respecto al aprendizaje de las matemáticas mediante actividades de modelación. Además, en esta sección se plantean los objetivos y la hipótesis de la tesis, y se justifica tanto la pertinencia como la relevancia del trabajo.

En un curso de matemáticas universitario es importante justificar las respuestas. Esta es una tarea extremadamente difícil para los egresados de bachillerato, quienes en su mayoría están acostumbrados a responder exámenes de opción múltiple y a situaciones en las que solo se requiere obtener una respuesta numérica. El énfasis de los cursos de matemáticas, en el nivel preuniversitario, está en lograr altos puntajes en pruebas estandarizadas de opción múltiple, las cuales no requieren de justificaciones o explicaciones. Las actividades de matemáticas que se proponen en primaria, secundaria y bachillerato con poca frecuencia ponen énfasis en procesos o tareas significativas que les podrían servir en los cursos universitarios, o en la práctica laboral. Por lo anterior, existe una gran discrepancia entre los requerimientos de los cursos de matemáticas preuniversitarias y aquellos aspectos que se consideran relevantes en la universidad o los lugares de trabajo (Aliprantis y Carmona, 2003).

En propuestas curriculares de carácter internacional se considera a la modelación como uno de los ejes fundamentales de la formación matemática de los estudiantes, en todos los niveles educativos. Por ejemplo, en los *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSI, 2022) se establece que la modelación “es el proceso de elegir usar matemáticas y

estadística apropiada para analizar situaciones empíricas, entenderlas mejor y mejorar la toma de decisiones” (p. 72).

La inclusión de actividades de modelación en los programas de estudio de muchos países se ha vuelto obligatoria. De acuerdo con Alvarado y Olvera (2020), los programas educativos en México sugieren el diseño e implementación de actividades enmarcadas en situaciones de la vida real, mediante las cuales los estudiantes se involucren en la formulación de conjeturas que posteriormente deberán explicar y justificar. En esta línea de ideas, Irigoyen et al. (2021) mencionan que al introducir la modelación matemática en el aula se espera que los estudiantes sean capaces de abordar situaciones de optimización y de explorar distintas formas de representarlas en términos matemáticos, así como analizar las conexiones y relaciones entre variables, modificar y ajustar las representaciones matemáticas y las conexiones que hay entre ellas. De acuerdo con Temple y Doerr (2012) los profesores deben apoyar a los estudiantes en el desarrollo y uso de representaciones matemáticas y el lenguaje relacionado cuando aprenden contenidos matemáticos. Sin embargo, aunque en los planes y programas de estudio se requiere que los docentes diseñen e implementen actividades de modelación, en general, no se les brinda la orientación necesaria para abordar este desafío (Guerrero y Borromero, 2022).

Debido a que el entorno social está cambiando de manera acelerada, a causa de la aparición y desarrollo de nuevas tecnologías, incluida la inteligencia artificial, es importante apoyar a los estudiantes para que aprendan a interpretar, describir y comprender fenómenos naturales y sociales (Montero y Vargas, 2021). En este contexto, existen investigaciones interesadas en determinar cómo los docentes pueden involucrar a los estudiantes en actividades que vayan más allá de modelos descriptivos, en los que se aplican matemáticas aprendidas previamente y que se aborde la modelación con fines explicativos o predictivos. Para desarrollar modelos con poder explicativo, el modelador necesita trascender los detalles específicos de una situación dada para conectar con un modelo en desarrollo que sea factible de generalización (Ärleback, 2020).

En esta línea de ideas, diversos investigadores han resaltado la relevancia de la contextualización de las tareas para el desarrollo de entendimiento matemático (Ärleback et

al., 2013; Freudenthal, 1993). En la *Perspectiva de Modelos y Modelación* (PMM en lo subsecuente) se propone que los estudiantes resuelvan situaciones cercanas a la vida cotidiana denominadas MEA. Estas actividades tienen como fin describir, explicar o predecir el comportamiento de situaciones significativas (Ärlebäck et al., 2013). Es decir, los estudiantes, con base en sus recursos, podrán dar significado a las situaciones problemáticas mediante la construcción de herramientas matemáticas. Las MEA propician que los estudiantes realicen acciones como: “cuantificar, dimensionalizar, coordinar, categorizar, algebratizar y sistematizar objetos, relaciones, acciones, patrones y regularidades relevantes” (Lesh y Doerr, 2003, p. 5).

Además, en la PMM se busca fomentar habilidades para plantear preguntas, formular conjeturas, argumentar, tomar decisiones, comunicar resultados, así como evaluar respuestas y procedimientos. Al abordar una MEA, un estudiante debe construir interpretaciones cuantitativas y cualitativas, así como transitar por diversos ciclos de modelación, que requieren formas variadas de pensamiento (Vargas et al., 2018). Así, en la PMM no sólo es importante el modelo final, sino el proceso de modelado, el cual involucra procesar o transformar la información, así como la ampliación, refinamiento o mejora de sistemas conceptuales.

1.2. Revisión de literatura

En esta sección se sintetiza el contenido de investigaciones enfocadas en el uso de tareas de modelación para favorecer el entendimiento matemático. Se seleccionaron, trabajos cuya perspectiva teórica incluye a la PMM (Lesh y Doerr, 2003). Es decir, se revisan artículos que conceptualizan el aprendizaje matemático en términos de la creación de sistemas conceptuales (modelos) que los estudiantes utilizan para dar sentido a otros sistemas asociados con fenómenos naturales y sociales. Esta revisión tiene como finalidad reconocer problemas de investigación, marcos teóricos y metodologías empleadas en el proceso de comprensión de los modelos generados por los estudiantes. El resultado de la revisión de literatura es la base para justificar la importancia de la pregunta de investigación de esta tesis, además de identificar las posibles contribuciones del trabajo.

Las principales preguntas de investigación de los trabajos revisados se enfocan en determinar cómo brindar experiencias que desarrollen ideas matemáticas poderosas en estudiantes (Aliprantis y Carmona, 2003), las diferentes perspectivas que utilizan los estudiantes para resolver un problema (Dominguez, 2010), así como los conocimientos y habilidades matemáticas, símbolos y herramientas (Ekmekci, 2013), la identificación de conceptos y representaciones matemáticas subyacentes en problemas con múltiples soluciones (Carmona y Greenstein, 2009), y comprender cómo los estudiantes interpretan modelos de fenómenos con tasas de cambio no constantes (Ärlebäck et al., 2013). También se analiza cómo los estudiantes utilizan representaciones para describir y analizar situaciones problemáticas (Vargas et al., 2016), y cómo diseñar SDM (Secuencias de Desarrollo de Modelos) para explorar tareas (Alvarado et al., 2017).

Además, se ha evaluado cómo una MEA satisface los principios de diseño (Vargas et al., 2018), qué competencias exhiben los estudiantes (Vargas et al., 2018b) y qué conocimientos o habilidades matemáticas implementaron al abordar las tareas (Aviña et al., 2019). Se examinan las habilidades que emergen al resolver actividades de modelado con impresoras 3D (Guler et al., 2019), los temas de investigación que se utilizan para diseñar e implementar una secuencia de tareas de modelado (Ärlebäck, 2020), las opiniones de futuros profesores sobre el uso de tecnología en educación matemática (Montero et al., 2020), y los cambios en el uso de la palabra promedio en secuencias de MEA (Shahbari y Tabach, 2020). Asimismo, se estudia cómo los docentes alientan a los estudiantes a construir y desarrollar pensamiento matemático (Alvarado y Olvera, 2020), cómo demuestran creatividad y originalidad al abordar MEAs (Sengil-Akar y Yetkin-Ozdemir, 2020), y cómo evoluciona el sistema conceptual de los docentes al diseñar e implementar estas actividades (Montero et al., 2020).

Por otro lado, los artículos revisados analizaron la calidad de las soluciones de productos finales e intermedios (Aguilar, 2021), las características de secuencias de optimización (Irigoyen et al., 2021), y la relación entre el pensamiento computacional y pensamiento crítico en MEAs (Carmona et al., 2022), así como los obstáculos para diseñar actividades basadas en problemas reales que apoyen el desarrollo de la comprensión de conceptos

matemáticos (Aguiar et al., 2023), al igual que la relación entre razonamiento covariacional y ciclos de modelación (Montero y Vargas, 2022).

Las investigaciones consideradas comparten una perspectiva común: la PMM, aunque también se incorporaron otros marcos teóricos y conceptos complementarios, como la taxonomía de tareas generativas (Carmona y Greenstein, 2009), el marco de razonamiento covariacional (Ärleback et al. 2013; Montero y Vargas, 2022), el concepto de competencias de Kilpatrick (Vargas et al., 2018b), la teoría de campos conceptuales (Aviña et al., 2019), el marco comunicacional (Shahbari y Tabach, 2020), el pensamiento computacional (CT) y el pensamiento crítico (CritT) (Carmona et al., 2022). Aunque algunos artículos también integraron otros marcos teóricos y conceptos relevantes, la modelación fue el hilo conductor que unió todos los estudios.

La revisión de literatura reveló que el 4.5% (1 de 22) de los artículos aplicó una MXA (Model Exploration Activity), el 18.18% (4 de 22) implementó una SDM y el 77.32% de los artículos utilizaron por lo menos una MEA. Más del 80% (es el 85% el otro 15% no se encontró si la actividad fue en equipos, no se decía explícitamente) de las investigaciones fueron realizadas en equipos, es decir, los participantes para resolver la actividad en algunos casos comenzaban de manera individual para posteriormente reunirse en equipos que iban desde en parejas, de tres, cuatro o hasta cinco integrantes por equipo.

La literatura sobre modelación aborda una amplia gama de temas matemáticos, destacando: funciones (escalonadas, lineales, cuadráticas y exponenciales), optimización y maximización, relaciones entre variables, tasas de cambio no constante, distribución de probabilidad, crecimiento, variación, promedio, proporción y razón de cambio.

En lo que respecta a los participantes, se encuentran estudiantes desde primaria hasta posgrado, incluyendo cursos propedéuticos para ingreso al bachillerato, curso de verano para ingreso a la universidad, estudiantes sobresalientes y estudiantes de educación técnica y profesional, profesores en formación de ciencias y matemáticas. Los participantes provenían de diversas disciplinas académicas, como licenciaturas de turismo, medicina, administración de empresas, educación primaria, contabilidad, administración de empresas y negocios, ingeniería civil, ciencias naturales y sociales. También hay investigaciones en

las que participan docentes de primaria, secundaria y bachillerato. Las investigaciones involucran a estudiantes de diferentes nacionalidades, principalmente mexicanos y americanos, pero también turcos e israelíes.

Las investigaciones se llevaron a cabo en diferentes contextos educativos. Las actividades se implementaron en sesiones únicas o múltiples, con duraciones variables (desde 50 minutos hasta 3 horas y media). Las tecnologías utilizadas fueron Microsoft Teams, NetLogo (Montero y Vargas, 2021), GeoGebra, Excel, Word, PowerPoint y Zoom. Todas las investigaciones incluyen grabaciones en video y audio, transcripciones, archivos electrónicos (Word, PowerPoint, GeoGebra y Excel), notas de campo del profesor o investigador, cartas de los estudiantes, fotografías de la pantalla de las simulaciones en computadora y de las implementaciones (Dominguez, 2010), bitácora del docente e investigador.

Las codificaciones se hicieron de acuerdo con los tipos de sistemas representacionales, se clasificaron las producciones en iniciales, intermedias y finales (Alvarado et al., 2017), de manera individual y grupal (Vargas et al., 2018). Las categorías de análisis incluyeron las competencias de Kilpatrick (Vargas et al., 2018b), los principios para el diseño de MEA de la PMM (Irigoyen et al., 2021) y TCC (Aviña et al., 2019), Perspectiva Comunicacional de Sfard (Shahbari y Tabach, 2020), códigos de creatividad (Sengil-Akar y Yetkin-Ozdemir, 2020), Guía de Calidad de MEA (Montero et al., 2020), Guía GEMF (Guía de Evaluación de Modelos relacionados con el concepto de Función) (Montero y Vargas, 2022), niveles de covariación (Ärleback et al., 2013), QAG (Quality Assessment Guide) (Aguilar, 2021), enfoque analítico de las acciones del profesor y de los trabajos escritos de los estudiantes utilizando la teoría fundamentada de Strauss y Corbin (1998) (Ärleback, 2020), análisis de contenido (para identificar patrones en los datos), se hicieron codificaciones para categorizar y analizar el CT (Computational Thinking) y CritT (Critical Thinking), tecnología ENA (Análisis de Redes Epistémicas) (Carmona et al., 2022), comparación de gráficas y asociación con contextos (para analizar la comprensión de conceptos matemáticos) (Montero y Vargas, 2021), análisis de la evolución de ideas (para estudiar el proceso de pensamiento de los estudiantes) y refinamiento del diseño de MEAs (para mejorar la efectividad de las actividades) (Aguilar et al., 2023), también se identificaron las

representaciones en común o los sistemas conceptuales que utilizan al resolver la actividad (Carmona y Greenstein, 2009) y hay evidencia de la creación de una clasificación de acuerdo con las creaciones de los estudiantes como: solución numérica, definición de la variable, tipo de función, estrategia de modelación/optimización, tablas, gráficas, generalización y comentarios (Aliprantis y Carmona, 2003; Dominguez, 2010; Ekmekci, 2013).

Las investigaciones siguieron diseños como estudio de caso cualitativo, investigación basada en diseño (Irigoyen et al., 2021), investigación exploratoria y comparativa. Tres de los 22 artículos son artículos comparativos (estudiantes de primaria y de posgrado (Carmona y Greenstein, 2009)), profesores de primaria y secundaria (Alvarado et al., 2017), así como estudiantes de nuevo ingreso a matemáticas aplicadas, estudiantes de último año de la misma carrera y estudiantes de una maestría en educación con especialidad en modelación matemática (Irigoyen et al., 2021).

Los resultados más interesantes en literatura son los siguientes: (a) los estudiantes de secundaria desarrollaron diferentes procedimientos para resolver problemas, mediante una mezcla de procedimientos matemáticos, debido a que no se les impuso un sistema de representación específico, utilizaron lo que consideraron más apropiado para la tarea, y pudieron transitar sin problemas entre diferentes representaciones (Aliprantis y Carmona, 2003); (b) los estudiantes de primaria utilizan más de un sistema de representación para expresar un modelo, y son capaces de implementar las mismas ideas matemáticas que estudiantes de posgrado, las cuales solo varían en nivel de sofisticación (Carmona y Greenstein, 2009). Es decir, sus ideas sobre la notación, terminología, etcétera, no están completamente desarrolladas, pero muestran resultados que superan las expectativas. Las soluciones de los estudiantes de tercero de primaria presentan sistemas conceptuales integrados a medios representacionales que expresan una rica y profunda comprensión de los conceptos matemáticos que están implícitos en las actividades. Los modelos creados por los estudiantes de primaria y posgrado tienen incorporadas las mismas ideas matemáticas, aunque los modelos de los estudiantes de posgrado realizaron soluciones más sofisticadas y sustentadas matemáticamente.

Otro resultado relevante incluye evidencia de que el pensamiento sobre conceptos asociados con la optimización es visible, utilizan una sola variable para darle solución al problema (Dominguez, 2010). Sin embargo, utilizan el criterio de la primera derivada sin comprender el método o la técnica del vértice para encontrar puntos óptimos. Por otro lado, se concluye que los estudiantes intentaron realizar una generalización de su representación algebraica, con la misma estructura de la original, pero con parámetros. Además, los estudiantes muestran confianza respecto a la aplicación general del método utilizado para optimizar, dan sugerencias respecto a la solución, y a pesar de que hay MEA con una solución numérica única se han encontrado una diversidad de respuestas diferentes.

Por otro lado, es importante reflexionar con profundidad sobre la actividad de calentamiento que se propone como parte de una MEA, ya que estas influyen de forma determinante en las interpretaciones de la situación contextualizada y esto podría acotar la diversidad de las soluciones y así volver la tarea en una actividad de una solución simplemente numérica y no con diferentes soluciones e interpretaciones (Irigoyen et al., 2021). Además, se debe tener en cuenta que el papel de los profesores es importante porque ellos generan espacios para que los estudiantes desarrollen conocimientos al construir modelos para interpretar, describir y predecir alguna situación de la vida real (Alvarado y Olvera, 2020). La comunicación es un punto crucial para el refinamiento de ideas, ya que sin esta los estudiantes se quedan solo con el conocimiento propio y no hay intercambio de ideas o reconocimiento de lo que otros saben. Las MEA pueden abordarse desde el conocimiento informal de los participantes, y esto las hace accesibles a un mayor número de personas y que puedan ser aplicadas en distintos niveles educativos (Alvarado et al., 2017). A su vez, el trabajo en equipo y la discusión grupal permite la modificación, extensión y refinación de su pensamiento matemático (Vargas et al., 2018). El proceso de modelación es continuo, y puede analizarse mediante varias dimensiones, acorde a las interacciones que tienen con el entorno de los estudiantes (Aviña et al., 2019).

En resumen, se identificó que los estudiantes utilizan una amplia variedad de sistemas de representación, hay consistencia en sus procedimientos matemáticos, comprensiones profundas, modelos complejos, representaciones mediante tablas y gráficas, hubo diferenciación y refinamiento en sus modelos construidos. Se sugiere que al diseñar una

MEA es importante incluir herramientas que faciliten la elucidación del modelo, exploración y adaptación. También se resalta la importancia de involucrar al estudiante en el contexto y de la socialización en el proceso de reflexión.

A continuación, se presenta una tabla, en la que se resumen los elementos más relevantes de las investigaciones, cuya finalidad fue la identificación de patrones dentro de la literatura tal y como se realizó previamente, correspondientes a las preguntas de investigación, teorías, metodologías y resultados obtenidos en las investigaciones revisadas.

Tabla 1. Síntesis de la literatura

Autor	Pregunta de investigación	Marco teórico	MEA/SDM	Tópico	Metodología	Resultados
Aliprantis y Carmona (2003)	¿Cómo brindar a los estudiantes experiencias en las que desarrollen ideas matemáticas poderosas? ¿Qué significa desarrollar ideas matemáticas poderosas? ¿Qué significa ser competente?	Perspectiva de Modelos y Modelación	Historic Hotels: An economic model Equipos 3-5	Función cuadrática, maximización y relación entre variables (lineales y cuadráticas)	Tres grupos de estudiantes (grado 7) no sabían álgebra. Tarea en dos bloques (50 min.). Producciones escritas y notas de campo. Codificación: represent., proced. mat., coherencia, respuesta correcta e influencia contextual.	Diversas representaciones. Nueve de doce equipos utilizaron texto. La mayoría enumeraron los datos. La mitad de los equipos fueron consistentes en sus ideas. No todos obtuvieron la respuesta correcta. Razonamiento poderoso.
Carmona y Greenstein (2009)	¿Cuáles son los conceptos y las representaciones matemáticas subyacentes en las respuestas de un problema con múltiples soluciones? ¿Cómo varían los elementos anteriores en función de los conocimientos previos del resolutor?	Perspectiva de Modelos y Modelación y Taxonomía de tareas generativas	Team Ranking Problem Equipos 3-4	Optimización	Estudiantes texanos de tercero de primaria (40) y estudiantes de posgrado (8). Dos sesiones (1 h c/u) y una sesión (2 h). Notas de campo, notas de observaciones, producciones escritas y archivos electrónicos. Codificación: represent., objetos y relaciones.	Comprensión profunda de las coordenadas, para jerarquizar información. Los modelos generados fueron poderosos y complejos. Las soluciones variaron solo en el nivel de sofisticación y fundamentación, aunque incluyeron las mismas ideas poderosas.
Dominguez (2010)	¿Cuáles son las diferentes perspectivas que los estudiantes usan para resolver un problema dado?	Perspectiva de Modelos y Modelación	The historic hotel problem Equipos 4-5	Ecuaciones cuadráticas, funciones cuadráticas, maximización	Estudiantes (E.U.) primer año en ciencias nat., soc. e ing. (94) Tres días de exposición (50 min) y dos días de discusión (50 min). Producciones escritas y notas de campo. Clasificación: sol. numérica, definición de variable, tipo de función, estrategia de modelación, tablas, gráficas, generalización y comentarios.	Ingreso en términos de habitaciones. Estrategias: criterios de derivadas. Generalizaciones con misma estructura de función original, pero con parámetros. Las literales representan variables. Confianza respecto a la aplicación general del método. Sugerencias para habitaciones desocupadas. Diversidad de respuestas, aunque la solución es única.
Ärleback et al. (2013)	¿A qué prestan atención los estudiantes cuando interpretan modelos de fenómenos con tasas de cambio no constantes? ¿Cómo interpretan los estudiantes las tasas promedio de cambio de funciones que modelan decaimiento exponencial?	Perspectiva de Modelos y Modelación y Marco de razonamiento covariacional	MEA (eq. 3-4): gráficas distancia vs tiempo con sensor. MXA (ind.): SimCalc y Gym. MAA (eq.): Modelo de intensidad lumínica y descarga de capacitor.	Tasas de cambio no constantes, funciones no lineales y decrecientes, función exponencial y derivación	Curso de seis semanas. Producciones escritas. Codificación con base en tres categorías: matemática (M), contextual (C) y M+C. Porcentajes de respuestas correctas por categoría.	Dificultades para modelar fenómenos de cambio con funciones (interpretar expresiones algebraicas). Se explicita el razonamiento sobre tasas de cambio, incluidas dificultades de lenguaje para describir tasas de cambio negativas.

Ekmekci (2013)	¿Qué conocimientos y habilidades matemáticas utilizan los resolutores ante un problema no tradicional? ¿Qué símbolos y herramientas utilizan para resolver un problema de optimización? ¿Qué ciclos de modelado comunes se identifican?	Perspectiva de Modelos y Modelación	The Historic Hotel Problem Equipos 3	Optimización	Profesores en formación de ciencias y matemáticas (30), universidad de EU. Dos sesiones (75 min c/u). Notas de campo, observaciones y soluciones escritas. Codificación por representaciones o sistemas conceptuales comunes.	El pensamiento sobre conceptos sobre optimización se hace visible. Uso de una sola variable en la ecuación. Literal relacionada con el fenómeno (n =number, r =rate). Criterio de la primera derivada, sin comprender el método o la técnica del vértice para encontrar puntos óptimos.
Vargas et al. (2016)	¿Qué representaciones utilizan los estudiantes de una licenciatura en Turismo para describir y analizar situaciones problemáticas, cuyo modelo es una función escalonada? ¿Cómo apoyan las diferentes representaciones el desarrollo de ciclos de entendimiento de función y variación?	Perspectiva de Modelos y Modelación	DHL Equipos 5	Función escalonada	Estudiantes americanos voluntarios (51) se preparan para ingresar a la universidad y de primer semestre de una licenciatura en Turismo. Una sesión (2 h). Reporte escrito individual del proceso de solución y una bitácora del profesor.	Cuatro representaciones (metáforas, lenguaje hablado, tablas y gráfica). Refinamiento de modelos. Se dieron cuenta que las representaciones debían coincidir y mostrar la misma variación conjunta. Identificaron semejanzas y diferencias e integraron nuevas características y relaciones con el concepto base.
Alvarado et al. (2017)	¿Cómo diseñar e implementar una SDM para explorar tareas y su potencial a través de la PMM?	Perspectiva de Modelos y Modelación	MEA (eq. 3-4): Reglas justas para el juego. MXA (eq.): Hoja electrónica de cálculo. MAA (eq.): Simulación en <i>Interactive Physics</i> .	Probabilidad frecuencial y matemática, cálculo de porcentajes	Profesores de primaria y secundaria (65) en diplomado. Estudiantes universitarios. Estudio experimental. SDM en tres módulos (1 h c/u). Grab. de audio y video, fotografías, producciones escritas, email y notas de campo. Identifican modelos iniciales, intermedios y finales.	Diseño de tareas sustentables requieren herramientas de bajo costo y de fácil acceso. Mejorar el acompañamiento del maestro y apoyar su preparación para anticipar y profundizar en los posibles modelos de sus estudiantes. Las situaciones más allá de una respuesta numérica corta representan un conflicto.
Vargas et al. (2018)	¿Cumple la actividad con los principios de diseño? ¿Qué significa que cumpla con ellos? ¿Qué formas de pensar o modelos emergieron? ¿Qué conocimientos, conceptos y habilidades matemáticas se utilizaron? ¿Es posible observar el surgimiento, modificación, ampliación y refinamiento de formas de pensar?	Perspectiva de Modelos y Modelación	La deforestación como consecuencia del incremento de áreas de cultivo Equipos 2-3	Función, ecuación, variación, crecimiento y razón de cambio	Ocho docentes mexicanos de bachillerato (ingenieros, físico matemáticos). Taller de verano (10 h en tres sesiones). Sólo una sesión (4 h). Grabaciones de audio y video, producciones escritas, archivos de Excel y Word, notas de campo. Análisis individual y grupal. Se verificaron y modificaron las hipótesis corroborando mediante triangulación.	La MEA satisface cinco principios. Promovió la ampliación y refinamiento del conocimiento y habilidades mat. Los participantes identificaron y utilizaron conceptos como variación, ecuación, incógnita y función (lineal y exponencial). Utilizaron y validaron habilidades: generar conjeturas, hipótesis, estimar y tomar decisiones.

Vargas et al. (2018b)	¿Qué competencias exhiben los estudiantes al abordar actividades cercanas a la vida real?	Perspectiva de Modelos y Modelación y Concepto de competencias (Kilpatrick, 2009)	Gigante bondadoso (Pie grande) Equipos	Razón, proporción y productos	Estudiantes mexicanos (40). Curso propedéutico para bachillerato. Producciones escritas y la bitácora del investigador. Codificación: comprensión conceptual, fluidez procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo y disposición productiva.	Cinco equipos mostraron comprensión conceptual y fluidez procedimental. Uso de razones, proporciones y relación entre variables; competencia estratégica, razonamiento adaptativo y disposición productiva. Pensaron, reflexionaron, explicaron y justificaron lógicamente. Seis equipos refinaron los modelos.
Aviña et al. (2019)	¿Qué conocimiento y habilidades matemáticas (proporción) exhiben los estudiantes universitarios al resolver situaciones cercanas a la vida real? ¿Cómo se modifica, extiende y refina este conocimiento y habilidades durante el proceso de resolución de una APM?	Perspectiva de Modelos y Modelación y Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1994)	Dieta blanda hospitalaria Equipos de 3	Proporción, progresiones aritméticas y funciones	Estudiantes mexicanos (21) de primer ingreso a medicina. Producciones escritas, audios, fotografías de las producciones escritas y notas de campo. Análisis con base en PMM y TCC, análisis vertical y análisis horizontal.	Uso de fracción, razón, proporción y regla de tres. Todos utilizaron operadores escalares de Vergnaud (1994). Evidencia de un cambio verbal a numérico, que evolucionaron a representaciones tabulares y expresiones algebraicas. Sistemas conceptuales permitieron describir, comunicar, predecir el comportamiento de la situación.
Guler et al. (2019)	¿Cuáles son las habilidades de ingeniería emergen al resolver actividades de modelado con impresora 3D? ¿Cuáles son las opiniones de los futuros profesores sobre el uso de la tecnología en la educación matemática? ¿Cuáles son las opiniones de los futuros profesores sobre las actividades de modelado con impresoras 3D?	Perspectiva de Modelos y Modelación	Keychain and Logo Design Activity Individual y equipos	Modelación 3D	Estudiantes turcos (10), Lic. Educación Primaria. Selección por criterio. Una MEA semanal durante 10 semanas. Grab. en video, entrevistas individuales, antes y después de cada MEA. Producciones escritas. Codificación: definición del problema, diseño, modelado, solución, prueba, evaluación y mejora. Diseño holístico, cada MEA es un caso.	Las habilidades de resolución de problemas que tuvieron son efectivas y sus productos son útiles y tienen un propósito. Las MEA apoyan el aprendizaje conceptual de los candidatos a docentes. Después de las MEA se observó una visión positiva sobre el uso de la tecnología, se dieron cuenta de la eficacia y la importancia de la tecnología en la educación matemática.
Ärleback (2020)	¿Qué temas de investigación para el diseño e implementación de una secuencia de tareas de modelado va más allá del uso de las matemáticas para describir un fenómeno del mundo real y que a su vez	Perspectiva de Modelos y Modelación	MEA (eq.): intensidad y dispersión de la luz MXA (eq.): Gráficos MAA (eq.): 15 mediciones de intensidad de luz	Tasa de cambio promedio, gráfica y función lineal y exponencial	Voluntarios (35) curso de verano ingreso a la universidad en EU. Grabaciones en video, notas de campo y memorandos, materiales de clase, lecciones y anotaciones del docente. Tres lecciones (1 h 50 min). Análisis en dos fases: (1)	Encontraron una función exponencial que se ajustaba a los datos. Estudiantes satisfechos con un modelo descriptivo (¿cómo?) y no hubo necesidad de un modelo explicativo (¿por qué?). Actividades deben de ser dinámicas con preguntas guías

	proporciona poder explicativo para comprender por qué el fenómeno se comporta como lo hace?		MXA (eq.): Cuatro imágenes 2D con la intensidad de la luz MXA (eq.): juego de cartón de cuatro piezas de una vela emisora de luz.		examen colaborativo de acciones del profesor e interpretaciones de los acontecimientos del aula, (2) examinar vídeos del aula y escritos de los estudiantes con teoría fundamentada (Strauss y Corbin, 1998).	con "cómo" y "por qué". Involucrar a estudiantes en una o más MAA con otros contextos: fuerzas gravitacionales de dos cuerpos, dos cargas puntuales o intensidad del sonido.
Alvarado y Olvera (2020)	¿Cómo las acciones de los docentes alientan a los estudiantes a construir, desarrollar y probar modelos matemáticos?	Perspectiva de Modelos y Modelación	Privacidad de los datos I y II En parejas	Función (concepto)	Estudiantes mexicanos (16) de tercer grado de secundaria. Informes escritos y grabaciones en video de las sesiones, las cuales se transcribieron. Codificación: acciones del profesor y los episodios en los cuales hubo un logro de los estudiantes.	La socialización favoreció el análisis, confrontación y reflexión de las ideas. Ideas erróneas contribuyeron a refinar sus modelos. Preguntas encaminadas a visibilizar el pensamiento, permitieron la identificación de debilidades. Desarrollo de habilidades para construir, refinar y validar sus modelos.
Shahbari y Tabach (2020)	¿Qué cambios se pueden identificar en el uso que hacen los participantes de la palabra promedio mientras trabajan en una secuencia de dos MEAs?	Marco comunicacional (Sfard) y Perspectiva de Modelos y Modelación	Camp Activity y Good Teacher Activity	Promedio	Futuros profesores de matemáticas (49). Monitoreo de cuatro grupos al azar. Actividades en dos semanas diferentes (primero MEA camp Activity y luego MEA Good Teacher). Ocho grabaciones de video de los cuatro equipos. Análisis: perspectiva comunicacional.	Oportunidades para expandir usos e interpretaciones de la palabra "promedio". Todos usaron la palabra como media aritmética y como punto de referencia. Otros usos posteriores fueron: media aritmética, valor ponderado, valor razonable y valor intermedio.
Sengil-Akar y Yetkin-Ozdemir (2020)	¿Cómo demuestran los estudiantes sobresalientes la creatividad grupal?, ¿cómo se manifestaba la creatividad matemática de los estudiantes?, ¿cuál es la calidad y originalidad de los productos generados por los estudiantes?	Perspectiva de Modelos y Modelación	Quilt problem Equipos	Medida y razonamiento proporcional	Estudiantes turcos dotados. Tres actividades introductorias y cinco aplicaciones. Estudio de caso. Producciones escritas y notas de campo. Entrevistas cortas después de MEA. Análisis con base en: fluidez, flexibilidad, conexiones.	Trabajo cooperativo fomenta el pensamiento creativo. Se identifican todas las subdimensiones de pensamiento creativo en grupo focal. Las MEA revelan la creatividad matemática de los estudiantes.

Montero et al. (2020)	¿Cómo evoluciona el sistema conceptual de los docentes (relacionado con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial) a medida que se diseña, implementa y evalúa una MEA?	Perspectiva de Modelos y Modelación	Primera etapa MEA (eq. 2-3): crecimiento poblacional Segunda etapa MXA (eq. 2-3): NetLogo (multi-agente) y applet GeoGebra Tercera etapa MAA (eq. 2-3): ahorro de energía e inversiones.	Función exponencial	Enfoque multinivel (investigador, profesor y estudiantes). Docente mexicano. Actividades diseñadas por el docente, producciones escritas, audios y reportes de las interpretaciones a los modelos. Etapas: diseño, implementación y evaluación de SDM. Análisis: "guía de calidad de MEA" y niveles de pensamiento covariacional.	El docente describió las representaciones con y sin tecnología. Luego describió el trabajo de los estudiantes, con énfasis en el producto final. En la tercera etapa, logró describir cómo los estudiantes desarrollaron ideas matemáticas, las modificaron, adaptaron y refinaron. La interacción multinivel permitió la evolución del modelo docente sobre enseñanza y aprendizaje.
Aguilar (2021)	¿En qué medida la calidad de las soluciones de productos finales e intermedios del estudiante (es decir, estrategias matemáticas, tipos de modelos y elementos) varía tanto dentro como a través de los niveles de logro?	Perspectiva de Modelos y Modelación	The historic hotel problem Equipos 2-3	Patrones, variables y parábolas (función cuadrática)	Estudiantes mexicanos (74). Grado 11. Escuela privada. 24 equipos: 5 de rendimiento alto, 14 de medio y 5 de bajo. Sesiones de entre 150 y 180 min. Producciones escritas, notas de campo y grabaciones en video. Guía de Evaluación de Calidad (QAG). Compara series de casos prácticos.	Los estudiantes ampliaron su comprensión conceptual y vieron las soluciones con perspectivas diferentes. Equipos de alto rendimiento desarrollaron soluciones más sofisticadas. Los estudiantes disfrutaron del trabajo colaborativo y la oportunidad de exteriorizar sus pensamientos.
Irigoyen et al. (2021)	¿Qué características deberá tener una secuencia de optimización y cuáles son los cambios que se deben producir en el diseño de la secuencia para cubrir todos los principios de la PMM?	Perspectiva de Modelos y Modelación	Depósito de volumen fijo para optimizar su superficie Ciclo 1. Equipos 3-4 Ciclo 2a y 2b. Equipos 2-3	Optimización	<i>Inv. basada en el diseño.</i> Ciclos de diseño. Ciclo 1. Estudiantes mex. (24) nuevo ingreso a matem. Dos sesiones (2 y 1 h). Ciclo 2a. Estudiantes (13) último año matem. Una sesión (1.5h). Ciclo 2b (virtual). Estudiantes (7) de maestría en educ. Tres sesiones (1, 3 y 2 h). Grab. video y voz y producciones escritas, archivos de GeoGebra, Excel, Word. Fotografías, cartas. Análisis: principios de diseño.	La actividad de calentamiento debe tener el contexto adecuado para que no acote la diversidad de soluciones. La MEA no debe ser demasiado compleja. La situación contextualizada tuvo sentido en el mundo real para los estudiantes, y esto plantea condiciones y restricciones que favorecieron la autoevaluación de los modelos generados.
Montero y Vargas (2021)	¿Cómo pueden NetLogo y Microsoft Teams apoyar el entendimiento de la diseminación de una	Perspectiva de Modelos y Modelación	MXA: Diseminación de enfermedades Individual	Función, variación y crecimiento exponencial	Estudiantes mexicanos (18) de primer semestre de una licenciatura en administración de empresas. MXA en Teams y	Microsoft Teams para gestión de recursos digitales y la conexión sincrónica. NetLogo ayudó a interpretar, describir, explicar y

	enfermedad? ¿Cómo puede fomentar la comprensión de las gráficas asociadas a la propagación de una enfermedad?				NetLogo (1 sesión). Grab. en video, producciones escritas y bitácora del docente. Se analizó el proceso de evolución de ideas respecto a: la comprensión de gráficas y la asociación de la gráfica al contexto planteado.	predecir el fenómeno de pandemia. Se ampliaron las formas de pensar sobre propagación de enfermedades infecciosas. Refinamiento de entendimientos sobre gráficas. El contexto permitió ampliación y refinamiento de modelos.
Carmona et al. (2022)	¿Cuál es la relación entre CT y CritT cuando ambos emergen en las MEA? ¿Cómo interactúan y evolucionan dinámicamente el CT y el CritT durante el proceso colaborativo? ¿Cómo se caracteriza esta interacción?	Perspectiva de Modelos y Modelación, Pensamiento Computacional (CT) y Pensamiento Crítico (CritT)	Tic-Tac-Toe Problem Equipos 3-4	Computación	Estudiantes texanos (11), de educación técnica y Prof. Grab. de video de las conversaciones equipo y transcripciones. Dos esquemas de codificación: uno para el CritT: iniciación, exploración, solución, juicio y resolución; y uno para el CT: descomposición, abstracto, patrones y algoritmos. ENA identifica y cuantifica conexiones CT-CritT.	Las conexiones estructurales de los tres equipos son similares. Todos los equipos establecieron conexiones CritT-CT, con procesos de solución diferentes. Gráficos generados por ENA muestran una diversidad de pensamiento y estructura epistémica similar en la solución. Interacciones entre ambos pensamientos. Componentes obtenidos de diferentes maneras.
Montero y Vargas (2022)	¿Qué características tienen los modelos construidos por los estudiantes en los ciclos de modelación que desarrollan al resolver una MEA asociada al concepto de función exponencial? y ¿cómo se relaciona el razonamiento covariacional y los ciclos de modelación?	Perspectiva de Modelos y Modelación y Marco de Razonamiento Covariacional	Crecimiento Poblacional (CP) Equipos 2-3 e individual	Función exponencial	Estudiantes mexicanos (10) de dos licenciaturas: contabilidad y admón. de empresas y negocios. Implementación: dos sesiones (3.5 y 1.54 h). Vídeos de las sesiones, audios de las discusiones de los equipos, producciones escritas y archivos Excel y Word; notas de campo. Análisis de modelos mediante la guía GEMF.	Primer ciclo: modelos T1. Segundo ciclo dos T2, uno T3 y otro T4. Tercer ciclo (ind.) dos T3 y ocho T4. Evolución del raz. cov. Coordinación de las variables tiempo y población. El raz. cov. no evolucionó igual, pero todos avanzaron. Este razonamiento se relaciona con los ciclos de modelación, evolución permitió modelos sofisticados.
Aguiar et al. (2023)	¿Cuáles son los obstáculos a los que se enfrentan los diseñadores de actividades basadas en problemas reales para apoyar el desarrollo de la comprensión del estudiantado de los conceptos relacionados las distribuciones de proba?	Perspectiva de Modelos y Modelación	APM1 Prefabricados y APM2 Ladrilleras	Distribución de probabilidad	Estudiantes mexicanos de Ingeniería Civil (8 y 17). Selección por conveniencia (investigadora era profesora del grupo). Implementación: semestre 2019A y 2021A. Análisis de las versiones de MEA, vídeos y chat. Refinamiento del diseño.	Refinamiento iterativo y dinámico. Modificación de MEA en función de percepción de la realidad de estudiantes. Importancia de conocer qué es real para los estudiantes. Se modificaron los procesos de pensamiento. Uso de un lenguaje ajeno a los estudiantes.

1.3. Planteamiento del problema

A partir de la revisión de literatura, se identificó que las investigaciones sustentadas en la PMM están enfocadas principalmente en estudiantes de educación básica, licenciaturas como contaduría, medicina, ingenierías, profesores tanto de secundaria como de bachillerato; sin embargo, hay pocos trabajos que analicen el trabajo de estudiantes de matemáticas. Además, los resultados de las investigaciones afirman que las actividades fueron exitosas y que los estudiantes generaron modelos relevantes y complejos; sin embargo, no se profundiza en los componentes de los modelos, esto no se explicita en cuáles son los componentes, las interacciones entre esos componentes y las reglas que gobiernan tales interacciones.

Por otra parte, los resultados presentados en la literatura no esclarecen si existió una generalización o reutilización del modelo, los resultados se reducen a indicar si refinó o no el modelo si comprendieron los conceptos subyacentes en la MEA. Además, no existe registro de modelos retóricos verbales (se refiere a una explicación más detallada de manera verbal por parte de los estudiantes que no se encuentra en sus producciones escritas) o modelos kinestésicos (son modelos los cuales involucran movimientos que realizan los estudiantes, es decir, movimientos corporales que emplean para apoyar el significado de alguna idea).

Se diseñó e implementó la MEA denominada *Administración del Gran Hotel de Pachuca*, basada en la MEA *Historic Hotel* (Aliprantis y Carmona, 2003) en la cual subyace el concepto de función cuadrática. La situación problemática consiste en que un grupo de empleados se oponen al cierre del hotel, ellos solicitan la ayuda de los estudiantes, quienes deben elaborar una carta dirigida a Rebeca Patrón, la dueña ficticia del hotel. En la carta se debe explicar a Rebeca cuánto cobrar por hospedaje de una noche, de tal modo que se obtenga la mayor ganancia posible. La actividad se implementó con un grupo de 19 estudiantes de primer semestre, inscritos en una Licenciatura en Matemáticas Aplicadas.

Así, el objetivo de esta tesis fue identificar la evolución de los modelos generados por estudiantes inscritos en primer semestre de una licenciatura en Matemáticas Aplicadas, en

una universidad pública de México, cuando abordan la MEA denominada *Administración del Gran Hotel de Pachuca*. En este contexto, los objetivos específicos son: (i) identificar y caracterizar los sistemas conceptuales (modelos) generados por los estudiantes, (ii) describir el proceso de evolución de los modelos, (iii) identificar regularidades en las representaciones utilizadas para dar sentido a la situación problemática propuesta. La pregunta de investigación que orienta este trabajo es ¿cuáles son las características de los sistemas conceptuales generados por estudiantes de primer semestre de una licenciatura en matemáticas al abordar la MEA denominada *Administración del Gran Hotel de Pachuca*?

1.4. Justificación

Las investigaciones sobre modelación matemática son importantes porque pretenden comprender las dificultades que presentan los estudiantes, de cualquier nivel educativo, al abordar actividades de modelación matemática. Tales dificultades tienen su origen en el desconocimiento o falta de comprensión de conceptos, así como las dificultades para aplicar los conocimientos previos.

La educación matemática busca ir más allá de promover la memorización de definiciones y la aplicación de algoritmos (Kaput, 1999; Stroup et al., 2007), para brindar a los estudiantes oportunidades para que construyan un aprendizaje con entendimiento, además de flexibilidad para utilizar ese conocimiento en la descripción, interpretación y predicción del comportamiento de fenómenos naturales y sociales (Montero y Vargas, 2021; Hiebert et al., 1997). Se requiere que los estudiantes aprendan a descubrir patrones de cambio, representarlos, comprender diferentes tipos de cambio, reconocer cuándo ocurren, tener habilidades para identificarlos en su entorno y aprender a predecir y controlarlos (Steen, 1988). En esta línea de ideas, es importante que los estudiantes aprendan a formular conjeturas, comunicarlas, transformarlas y evaluarlas. Por lo anterior, integrar actividades contextualizadas ofrece oportunidades para que los estudiantes generen y refinen sistemas conceptuales; además de desarrollar un entendimiento profundo de los conceptos matemáticos subyacentes en las tareas. Además, de acuerdo con la revisión de literatura, los modelos que se enfatizan en los resultados son, esencialmente, los algebraicos, tabulares y gráficos, dejando de lado otros modelos que pueden ser importantes para obtener una mejor

comprensión de las formas de pensar de los estudiantes, tales como los modelos retóricos verbales, kinestésicos, aritméticos y textuales. Por otra parte, sólo se identificó una investigación cuyos participantes fueron estudiantes de matemáticas aplicadas.

CAPÍTULO 2. MARCO DE INVESTIGACIÓN

2.1. Introducción

Un marco de investigación es un conjunto de ideas, principios, acuerdos o reglas que establecen la base o el esquema para sustentar el proceso de investigación. En este contexto, Lester (2005) considera que un marco de investigación es una estructura básica de ideas, abstracciones, relaciones que sirven como base para un fenómeno que se va a investigar, es decir, las abstracciones y las interrelaciones son importantes ya que se utilizan como base y justificación para todos los aspectos de la investigación. En esta sección se revisan los tipos de marcos de investigación, los referentes ontológicos, epistemológicos y didácticos de la PMM. Esta investigación se centra en los sistemas conceptuales que generaron los estudiantes de nuevo ingreso a matemáticas aplicadas cuando abordan tareas de modelación, se considera que los modelos son sistemas conceptuales, utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas; integrados por elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones, que se expresan mediante sistemas de notación externa (Lesh y Doerr, 2003).

2.2. Tipos y características de los marcos de investigación

Un marco de investigación proporciona una estructura teórica y conceptual que guía y fundamenta el trabajo del investigador. Comprender qué es un marco de investigación resulta esencial en todos los campos de estudio, pero el desarrollo y utilización de estos marcos es uno de los aspectos menos comprendidos del proceso de investigación. Para Lester (2005) un marco de investigación es una estructura fundamental de ideas, abstracciones y relaciones que sirven como base para investigar un fenómeno. Estas abstracciones y sus interrelaciones representan las características relevantes del fenómeno y se utilizan para comprender e interpretar por qué un fenómeno funciona como lo hace. El uso de un marco para conceptualizar y orientar la investigación ofrece al menos cuatro ventajas: (i) proporciona una estructura para diseñar una investigación, (ii) no hay datos sin un marco que les dé sentido, (iii) permite trascender el sentido común y (iv) permite desarrollar una comprensión profunda de un fenómeno.

Por otro lado, Eisenhart (1991) ha identificado tres tipos de marcos de investigación: (a) teórico, (b) práctico y (c) conceptual. Un marco teórico guía las investigaciones basándose en una teoría formal, es decir, un conjunto de conceptos y relaciones que proporcionan una explicación coherente del funcionamiento de ciertos fenómenos. Dos teorías destacadas para entender el aprendizaje son: la teoría de desarrollo intelectual de Piaget y la teoría del constructivismo socio histórico de Vygotsky (Lester, 2005). Cuando se utiliza un marco teórico las preguntas se formulan en función de la teoría. Se recopilan datos pertinentes y los hallazgos se emplean para respaldar, ampliar o ajustar la teoría.

El marco práctico guía la investigación utilizando *lo que funciona* en la experiencia práctica de las personas involucradas en un fenómeno. Este tipo de marco está informado por el conocimiento práctico acumulado de los profesionales, los resultados de investigaciones previas y puntos de vista de la opinión pública (Lester, 2005). Para Eisenhart (1991) el marco práctico orienta la investigación de acuerdo con la experiencia o ejercicio profesional de aquellos involucrados en alguna práctica. El estudio está estructurado para determinar las características clave y las circunstancias bajo las cuales una práctica (comportamiento, técnica, estrategia, forma de pensar, estilo de enseñanza, etc.) funciona como se esperaba o se había previsto. Este tipo de marco se basa en el conocimiento práctico acumulado (ideas) de profesionales y administradores.

Por último, el marco conceptual permite justificar los hallazgos más que explicarlos. De acuerdo con Lester (2005), un marco conceptual incluye argumentos de por qué los conceptos elegidos para la investigación son apropiados y útiles dado el problema de investigación. Un marco de este tipo se construye a partir de una variedad de fuentes que incluyen investigaciones previas. También puede basarse en diferentes teorías y en el conocimiento profesional del investigador. Los investigadores que utilizan marcos conceptuales deben mantener una sensibilidad que les permita cuestionar y comparar los diversos significados de los conceptos que integran el marco. Esta característica sensibilizadora minimiza la probabilidad de conclusiones injustificadas o explicaciones infundadas, a diferencia de los que ocurre con los enfoques teóricos o prácticos. En resumen, los marcos conceptuales son más adecuados que los teóricos o prácticos en áreas aplicadas como la educación, debido a la variedad de perspectivas y disciplinas aplicables,

así como de la complejidad de los problemas educativos. Estos marcos ofrecen enfoques integrales, inclusivos, sensibles, apropiados, útiles y oportunos para abordar los problemas de estas disciplinas (Eisenhart, 1991).

2.3. Fundamentos ontológicos, epistemológicos y didácticos

El fundamento teórico de este trabajo incluye la *Perspectiva de Modelos y Modelación* (Lesh y Doerr, 2003). Desde un punto de vista ontológico, la realidad matemática se concibe como un sistema de relaciones y estructuras dinámicas que pueden ser representadas y manipuladas mediante modelos. Este enfoque destaca la importancia de los modelos como herramientas fundamentales para interpretar y entender fenómenos del mundo real, enfatizando su carácter evolutivo y adaptable según el contexto y las necesidades del aprendizaje. Las matemáticas desde la PMM se conciben como una herramienta para entender el mundo que nos rodea. Esto se debe a que la construcción de un modelo permite describir, explicar y pronosticar la evolución o aspectos de una situación o fenómeno (Vargas et al., 2018).

Desde un punto de vista epistemológico, la modelación se entiende como un proceso activo de construcción del conocimiento, donde los estudiantes desarrollan y refinan sus modelos a través de la interacción con problemas reales y la retroalimentación constante. La PMM es una aproximación didáctica con fundamento en una epistemología socio constructivista. La construcción de modelos implica dimensiones de desarrollo como de la intuición a la formalización, de lo concreto a lo abstracto, de lo específico a lo general (Lesh y Doerr, 2003). La construcción de conocimiento es un proceso social que implica fases de diferenciación, integración y refinamiento, durante las cuales se construyen, modifican extienden y refinan modelos (Vargas et al., 2018).

Desde un punto de vista didáctico, la PMM sugiere la implementación de estrategias de enseñanza que promuevan la modelación activa. Esto implica diseñar actividades y tareas que no solo desafíen a los estudiantes a crear y manipular modelos, sino que también les permitan explorar y entender las relaciones entre variables de manera dinámica y contextualizada. Al adoptar estos enfoques, se busca fomentar un aprendizaje con entendimiento (Hiebert et al., 1997), donde los estudiantes desarrollen una comprensión

integral y aplicable de los conceptos matemáticos. En la PMM los estudiantes resuelven situaciones cercanas a la vida cotidiana con el fin de “describir, explicar o predecir el comportamiento de situaciones significativas” (Ärlebäck et al., 2013, p. 4).

En resumen, los referentes ontológicos, epistemológicos y didácticos de la PMM (Lesh y Doerr, 2003), proporcionan un marco sólido para explorar y mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Estos enfoques no solo enriquecen la comprensión teórica de los fenómenos matemáticos, sino que también ofrecen herramientas prácticas para la educación matemática efectiva.

2.4. Elemento del marco de investigación

El marco de investigación de este trabajo está integrado por un solo elemento, el cual está enfocado en el diseño de las tareas y en el análisis de la información. La PMM (Lesh y Doerr, 2003) se utilizó para la adaptación e implementación de la tarea que integró la MEA. También se utilizó para entender las características de los sistemas conceptuales producidos por los estudiantes y así determinar el proceso de modelación que siguieron para llegar a su conclusión.

2.4.1. Perspectiva de Modelos y Modelación

En la PMM, las tareas se denominan *Model Eliciting Activity* (MEA, en lo subsecuente). Al abordar una MEA, los productos que los estudiantes generan van más allá de respuestas breves a preguntas específicas y consisten, fundamentalmente, en sistemas conceptuales denominados modelos (Lesh y Doerr, 2003). “Un *modelo* es un sistema conceptual, integrado por elementos, relaciones, operaciones y reglas que gobiernan las interacciones” (Lesh y Doerr, p. 10). La finalidad de un modelo es construir, describir o explicar el comportamiento de otros sistemas asociados los cuales pueden manipular o predecir inteligentemente los fenómenos que los profesionales enfrentan durante el desempeño de sus actividades laborales (Lesh y Doerr, 2003). Estas descripciones, explicaciones y construcciones no son simplemente procesos que los estudiantes usan para producir una respuesta sino son los componentes más importantes de las respuestas que se necesitan, es decir, en este marco conceptual el proceso es el producto. Los estudiantes deben tratar de

hacer descripciones simbólicas de situaciones significativas. Las MEA difieren de los problemas tradicionales de los libros de texto en el sentido que, más allá de fomentar el desarrollo de fluidez procedimental, se enfocan en que los estudiantes den significado a situaciones descritas simbólicamente. Las MEA representan situaciones similares a aquellas de la vida real en las que las matemáticas son útiles. Normalmente, los conceptos matemáticos subyacentes en una MEA se determinan de antemano, en el momento en que el investigador diseña la tarea. Las matemáticas residen en la pregunta, residen en las respuestas y residen en el proceso de modelación (Carmona y Greenstein, 2009). Los modelos deben poder compartirse, manipularse, modificarse y reutilizarse para describir, interpretar, construir, manipular, predecir o controlar sistemas significativos. El aprendizaje de un concepto se asocia con el desarrollo de modelos que permiten entender el funcionamiento de un fenómeno.

La actividad de modelación propicia que los estudiantes realicen acciones como: cuantificar información, dimensionar espacios, ubicar eventos en marcos de referencia, organizar y analizar datos, realizar cálculos, establecer relaciones y funciones matemáticas, desarrollar criterios de comparación o decisión, resolver ecuaciones y aplicar procedimientos. Los procesos de modelado ocurren a través de ciclos sucesivos de interpretar, identificar, conjeturar, describir, justificar, cuantificar, analizar, construir, explicar, representar y organizar datos (Lesh y Doerr, 2003). El proceso de modelación es importante, pero no se dedica suficiente atención a tales procesos en los planes de estudio de matemáticas (English et al., 2005). Lesh y Doerr (2003, pp. 43-44) proponen seis principios básicos para el diseño e implementación de una MEA:

1. *Principio de la realidad*: La situación que se presenta debe ser cercana a los intereses de los estudiantes, sus experiencias y conocimientos para que le den sentido.
2. *Principio de la construcción de modelos*: El desarrollo de los modelos debe ser explícito, es decir, la manera en que se construyó, describió, explicó debe ser explícito y si hacen una predicción esta debe de estar justificada.

3. *Principio de la autoevaluación*: Los estudiantes reconocen la necesidad de hacer las construcciones de modelos, describirlos, explicarlos, y a partir de esto podrán surgir ideas novedosas y relevantes en un grupo.

4. *Principio de documentación del modelo*: Las situaciones que se planteen deben de provocar la revelación de pensamiento. Los productos de los estudiantes revelan la forma en como pensaron los datos, las metas y los procesos de solución.

5. *Principio de la reutilización del modelo*: El modelo que generan los estudiantes proporciona una forma de pensamiento transferible, transportable, fácil de modificar y reutilizable.

6. *Principio de la generalización del modelo*: El modelo que generan los estudiantes da una solución que proporciona un prototipo útil para interpretar situaciones más complejas, es decir, se puede generalizar el modelo proporcionado.

La PMM se basa en dos premisas fundamentales, la primera de ellas indica que al centrar la atención únicamente en el producto de un procedimiento matemático, se limita el pensamiento de los estudiantes. Por lo tanto, en la PMM interesa más el proceso de modelación que el modelo en sí. La segunda premisa se basa en una cita atribuida a Aristóteles: “Has demostrado que aprendiste algo cuando eres capaz de enseñarlo a otros”. Así que, en la PMM, es tan importante desarrollar ideas matemáticas como comunicarlás a los demás. La comunicación de ideas promueve el desarrollo, evolución y refinamiento de sus ideas. El proceso de comunicación anima a los estudiantes a cuestionar su propia comprensión y contrastar sus ideas con las de otros, lo que a su vez les permite refinar constantemente sus entendimientos (Aliprantis y Carmona, 2003; Hiebert et al., 1997).

El diseño de una MEA requiere que un cliente identificado o una persona determinada solicite apoyo a los estudiantes para resolver un problema, cuya solución requiere de la construcción de un modelo matemático. Para que el cliente implemente el modelo adecuadamente, los estudiantes deben describir claramente sus procesos de pensamiento y justificar su solución. Por lo tanto, necesitan describir, explicar, manipular o predecir el comportamiento de un sistema del mundo real para respaldar su solución como la mejor

opción para el cliente (Carmona y Greenstein, 2009). Las MEA permiten visibilizar el pensamiento de los estudiantes, y explicitar cómo interpretan los datos e información de un problema, “qué tipo de relaciones creen que son importantes y qué tipo de reglas creen que gobiernan las operaciones sobre estas cantidades y relaciones cuantitativas...estos componentes visibles son parte de los modelos y sistemas conceptuales de los estudiantes” (Lesh y Doerr, 2003, p. 9).

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1. Introducción

En este capítulo se explica por qué la tesis constituye una investigación cualitativa basada en un estudio de casos. También se describe el proceso de diseño de la MEA, su implementación, características de los participantes en la investigación, cuáles fueron los instrumentos de recolección de la información y su pertinencia; así como el proceso que se llevó a cabo para el procesamiento de la información, el análisis de datos y la obtención de las conclusiones. La investigación cualitativa es aquella que produce datos descriptivos: palabras, habladas o escritas, y la conducta observable de personas (Quecedo y Castaño, 2003). Esta investigación es cualitativa porque los datos que se recolectaron son palabras, imágenes, y otras formas de representación cuya finalidad es expresar ideas. En particular, se obtuvo información sobre los sistemas conceptuales generados por los estudiantes de primer semestre de licenciatura al tratar de dar sentido a una situación problemática que involucra maximizar la ganancia de un hotel.

3.2. Investigación cualitativa

La investigación cualitativa incluye diversas concepciones, visiones, técnicas y estudios que son de naturaleza no cuantitativa. De acuerdo con Hernández et al. (2014), el enfoque cualitativo se selecciona cuando el propósito es examinar la forma en que las personas perciben y experimentan los fenómenos en que están inmersos, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados. Los planteamientos cualitativos son abiertos, estos se van enfocando en conceptos relevantes de acuerdo con la evolución del estudio, es decir, el estudio puede ir de algo muy general y terminar en algo muy específico y acotado. Estos estudios están fundamentados en la revisión de la literatura, en el contexto y la intuición inclusive. Se aplica a un menor número de casos con que se pueda trabajar hasta comprender el fenómeno o responder a lo que se ha planteado. Hernández et al. (2014) mencionan que el entendimiento del fenómeno es en todas sus dimensiones, internas y externas, pasadas y presentes. Este tipo de investigación se orienta a aprender de

experiencias y puntos de vista de los individuos, valorar procesos y generar teorías fundamentadas en las perspectivas de los participantes.

Las investigaciones cualitativas se enfocan en profundizar en los fenómenos. Los objetivos y las preguntas son generales y enunciativas. Por otra parte, los elementos de justificación en los planteamientos cualitativos son: conveniencia, relevancia social, implicaciones prácticas, valor teórico y utilidad metodológica. Para responder a las preguntas de investigación es necesario elegir un contexto o ambiente para llevar a cabo el estudio; asimismo, es preciso ubicar el planteamiento en espacio y tiempo. Los planteamientos cualitativos son una especie de plan de exploración y resultan apropiados cuando el investigador se interesa por el significado de las experiencias y los valores humanos. Los trabajos cualitativos se pueden clasificar en función de las técnicas de indagación en: etnográfico cultural, etnográfico básico, fenomenológico, teoría fundamentada (entrevistas o personas bajo observación), historia de vida familiar, biografía, estudio de casos y grupos de enfoque. Este trabajo se basa en un diseño de estudio de casos, en virtud de las características de esta investigación tal como se describe en la siguiente sección. La selección de los participantes fue por conveniencia. La selección por conveniencia es una técnica que consiste en elegir a las personas o los datos de más fácil acceso para el investigador (Farrokhi y Mahmoudi-Hamidabad, 2012).

Por otro lado, las hipótesis en estos estudios se afinan paulatinamente conforme se recaban y analizan más datos. Dos dimensiones que son esenciales con respecto a la selección del ambiente son la conveniencia y la accesibilidad. Con la finalidad de tener una mejor accesibilidad al ambiente se deben de desarrollar relaciones, elaborar una historia sobre la investigación y no elevar las expectativas más allá de lo necesario. A su vez, se deben tomar distintos tipos de anotaciones, por ejemplo: la observación directa, interpretativas, temáticas, personales y de reactividad de los participantes (Hernández et al., 2014). Lo anterior se registra en lo que se denominan notas de campo, estas pueden contar con descripciones, mapas, diagramas, esquemas, listados, aspectos del curso del estudio, etcétera.

3.3. Estudio de casos

Un estudio de casos puede ser de algunos de tres tipos: (1) estudio de caso intrínseco, el cual se centra en un caso particular el cual puede ser de interés personal o porque el investigador busca entenderlo profundamente; (2) estudio de caso instrumental, donde se estudia un caso específico para proporcionar información sobre un tema más amplio o para generalizar sobre una cuestión en particular; (3) estudio de caso colectivo, son múltiples casos que se analizan para explorar un fenómeno en común. En este trabajo se llevó a cabo un estudio de caso colectivo, con la finalidad de explorar un fenómeno común que es las características de los modelos generados por cada uno de los equipos, que fueron los casos considerados.

Stake (2005) resalta la importancia de estudiar un caso dentro del contexto de la investigación, es decir, el investigador debe interpretar los datos y contar la historia del caso, seleccionando los detalles que se van a incluir y cómo se van a organizar, y se debe de mantener una postura reflexiva y ética. Por lo que, el objetivo principal del estudio de casos es comprender la particularidad del caso. La triangulación, comparación con otros casos y la reflexión crítica son esenciales para la validez de los hallazgos.

La triangulación se refiere al uso de diferentes métodos, fuentes de información, perspectivas o teorías para explorar un fenómeno y corroborar las interpretaciones, en esta investigación se utilizan, las producciones escritas de los estudiantes, las videograbaciones de las exposiciones en plenarias y las transcripciones de estas. Ya que, de acuerdo con Stake (2005) la triangulación permite fortalecer la credibilidad de los resultados y minimizar posibles sesgos al comparar distintas versiones del estudio. Además, lo que se busca en un estudio cualitativo es obtener datos (información) de personas, seres vivos, comunidades, situaciones o procesos en profundidad; en las propias *formas de expresión* (Hernández et al., 2014). Como en esta tesis se trabaja con estudiantes, los datos de interés son conceptos, percepciones, creencias, interacciones, pensamientos, experiencias, dibujos, tablas, expresiones matemáticas, etcétera, tanto de manera individual, en equipo y grupal.

La información se recolecta, se transforma en datos y se analiza con la finalidad de responder a la pregunta de investigación.

Esta tesis se basa en un diseño de estudio de casos ya que se centra en una comprensión profunda del trabajo de equipos específicos, cada uno de ellos integrado por varios estudiantes. Una MEA está diseñada principalmente para estudiar cómo un grupo de personas resuelven problemas complejos (del mundo real) y cómo sus modelos matemáticos evolucionan. Esta investigación se centra en un contexto específico y único: los participantes y su proceso de resolución de problemas. Por otro lado, la MEA ocurre en un ambiente educativo particular con factores como las características de los estudiantes que se necesitaban para este trabajo, el diseño de la tarea y el entorno adecuado. Las MEA se diseñan para revelar cómo los estudiantes construyen y refinan sistemas conceptuales mientras interactúan con problemas del mundo real, lo que hace que el objetivo de la investigación sea un proceso único y específico de cada grupo o individuo, lo cual es un principio fundamental del estudio de casos según Stake.

Las unidades de análisis pueden ser personas, casos, significados, prácticas, episodios, encuentros, papeles desempeñados, relaciones, grupos, organizaciones, comunidades, subculturas, estilos de vida, etcétera (Hernández et al., 2014). Los datos se pueden recolectar de diferentes maneras, por ejemplo: observaciones, entrevistas, análisis de documentos y registros, etcétera. Los datos cualitativos son muy variados los cuales se pueden resumir en: narraciones de los participantes: visuales (fotografías, videos, pinturas, etc.), auditivas (grabaciones), textos escritos (borradores, documentos, cartas, etc.) y expresiones verbales y no verbales. También se pueden incluir las narraciones de la investigadora (notas en la bitácora de campo). Para realizar el análisis es necesario organizar los datos y transcribir las narraciones orales. Se analiza cada unidad de análisis (segmento de contenido textual, auditivo o visual) y se extrae su significado. De lo anterior surgen las categorías y así se logra realizar una codificación de los datos. Las categorías nos ayudan a organizar los resultados o descubrimientos relacionados con la pregunta de investigación.

3.4. Diseño de la MEA

La MEA denominada *Administración del Gran Hotel de Pachuca* es una adaptación del *Historic Hotel* propuesto por Aliprantis y Carmona (2003), la cual se basa, a su vez, en un problema económico que, usualmente, se plantea a estudiantes universitarios en los Estados Unidos. La actividad *Historic Hotel* ha sido validada y probada en diferentes niveles educativos y con diferentes participantes. Por ejemplo, Aliprantis y Carmona (2003) la implementaron en una escuela secundaria en Estados Unidos. Dominguez (2010) propuso esta tarea a un grupo de estudiantes de un curso de cálculo de una universidad del sur de los Estados Unidos, quienes no habían abordado actividades similares de forma previa y provenían de diferentes programas educativos, incluyendo ciencias naturales, ciencias sociales e ingeniería. También se tiene el caso de Ekmekci (2013), quien implementó esta MEA con 30 futuros profesores de secundaria en las áreas de matemáticas y ciencias en el sudoeste de los Estados Unidos. Finalmente, Aguilar (2021) implementó esta tarea con estudiantes de preparatoria en México.

Aunque el *Historic Hotel* se ha utilizado con diferentes tipos de estudiantes, no se ha implementado con estudiantes de nuevo ingreso a una Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, lo cual puede ser relevante con la finalidad de contrastar las características de los sistemas conceptuales generados por estos estudiantes, los cuales podría esperarse que fueran más refinados y complejos que los elaborados por estudiantes de otras licenciaturas. El contexto de la vida real de esta actividad se presentó en un artículo periodístico que describe la historia del *Hotel Independencia*, ubicado en la ciudad de Pachuca de Soto, Hidalgo, el cual dejó de funcionar debido a la pandemia de la COVID-19.

La MEA *Administración del Gran Hotel de Pachuca*, satisface los seis principios de diseño que se mencionaron en el segundo capítulo. Los conceptos matemáticos como reconocimiento de variables, relación entre variables (relaciones lineales y cuadráticas), producto de relaciones lineales, maximización y funciones cuadráticas están implícitamente involucrados (Aliprantis y Carmona, 2003). La MEA cuenta con información numérica, tomada de diversas fuentes (periódico, páginas de renta de habitaciones de hotel y salarios mínimos) lo cual hace que los datos sean diferentes entre sí. Esta actividad pasó por

diversos cambios respecto a los salarios de los empleados, estos se realizaron ya que la autora no estaba tomando en cuenta los salarios mínimos de los encargados de cada amenidad, además de que se estaban considerando salarios excesivos, estos cambios se hicieron con la finalidad de satisfacer los seis principios de diseño de una MEA, para así lograr enriquecer la diversidad de modelos generados y, a su vez, mantener la congruencia con el mundo real. Una primera dificultad fue que la autora no encontraba una noticia adecuada sobre un hotel importante en la ciudad de Pachuca de Soto, que pudiera generar interés en los estudiantes. La primera noticia que se consideró fue sobre un hotel en CDMX, pero al ser ubicado en otro estado, se consideró que no era adecuada como actividad de calentamiento, y por eso se buscó una noticia que hiciera referencia al entorno cercano de los estudiantes. Se encontró la noticia sobre el *Gran Hotel Independencia* y a partir de esta se elaboró la actividad de calentamiento. La noticia cumple con el principio de la realidad ya que es una noticia verdadera y al ser un hotel del lugar donde residen los participantes se consideró que es una problemática que les podría interesar.

La primera versión de la actividad fue bastante general que trataba sobre una persona que iba a comprar un terreno en Apan, Hidalgo. En dicho terreno se había construido un hotel, con 50 habitaciones. En este problema se indicaba que el costo de limpieza de cada habitación era de \$300. La segunda versión de la actividad ya integraba una noticia para la AC, se añadieron las preguntas correspondientes. Además, se modificó el número de habitaciones, respecto de la primera versión, en la que el número de habitaciones se determinó arbitrariamente. En la segunda versión, la asignación del número de habitaciones se determinó a partir de información real sobre el *Gran Hotel Independencia*. Se consideraron las amenidades del hotel. Se ajustó el costo de limpieza de las habitaciones del hotel, porque se había considerado que todos los días se llenaba el hotel, por lo que no habría variación en los costos de limpieza. También se añadió un párrafo sobre la historia de este hotel para crear interés en los estudiantes. En esta versión los salarios de los encargados del bar y el estacionamiento son de \$500 y \$300 a la semana, respectivamente.

En la tercera versión de la MEA se modificaron las preguntas de la AC, ya que las preguntas de la segunda versión no generarían un interés en los estudiantes. El párrafo sobre la historia del hotel también se modificó de manera que tuviera una mejor redacción.

La Actividad Principal (AP) también tuvo modificaciones de redacción, se modificaron los sueldos de los encargados del bar y el estacionamiento, de acuerdo con el salario mínimo del año 2023. Se propuso que los sueldos se expresaran de manera semanal, ya que es la forma más común de pago en el municipio. En esta versión los salarios de los encargados del bar y estacionamiento fueron de \$1200 y \$900 respectivamente.

En la cuarta versión de la MEA se mejoró la redacción de la situación problemática de la AP. Particularmente, se ejemplificó cómo funcionaba el incremento de \$50 al disminuir la ocupación del hotel: de acuerdo con los datos de los trabajadores le proporcionaron a Rebeca, si se cobran \$1500 por habitación el hotel generalmente tendría cupo completo. También saben que por \$50 que se incremente el precio de la habitación, las habitaciones ocupadas disminuyen en una unidad. Por ejemplo, si el costo diario por habitación es de \$1600, entonces sólo se ocuparían 33 habitaciones.

En la quinta versión nuevamente se modificaron los sueldos de los encargados del bar y estacionamiento, en este caso los consideramos de manera mensual, por lo que de \$1200 y \$900 pasaron a \$7000 y \$5500 respectivamente. Se volvió a considerar el salario mínimo y se investigó cuál era el salario generalmente en estos trabajos y se consideró un aproximado a lo investigado. La sexta versión sólo tuvo una corrección de redacción tanto en la AC como en la AP. La versión siete nuevamente tuvo modificaciones en los sueldos de los encargados del bar y estacionamiento, en esta versión los sueldos son consideramos por día, entonces de \$7000 y \$5500 se modificaron a \$250 y \$200, respectivamente. La última versión nuevamente tuvo modificaciones en la redacción y fue la versión que se aplicó para esta investigación. Las adaptaciones respecto a los sueldos de los encargaron se modificaron tantas veces principalmente porque no tenían sentido con los salarios mínimos de esa época, las modificaciones respecto a los salarios por día, semana y mes se realizaron porque la autora no se decidía cómo expresarlo para que no confundiera a los estudiantes, finalmente se decidió por los salarios diarios ya que diariamente se hace un corte de caja en los establecimientos. En resumen, se hicieron todas estas adaptaciones con la finalidad de captar el interés del estudiante y principalmente que tuviera congruencia con el mundo real.

Posteriormente, se diseñó una rúbrica para orientar el trabajo y la calidad de los productos de los estudiantes. La primera versión se elaboró con el apoyo de ChatGPT - OpenAI. Se indicó al software proponer una rúbrica para una *Actividad Provocadora de Modelos* (MEA), basada en la PMM de Richard Lesh. El software propuso una rúbrica genérica, la cual solamente incluía terminología de la PMM; aunque esta propuesta fue un apoyo inicial para que la autora de la tesis tuviera una primera aproximación a la estructura de una rúbrica. Esta versión de rúbrica se adaptó para que incluyera los principios para el diseño de una MEA (Apéndice B).

Esta rúbrica además de orientar el trabajo de los estudiantes también se utilizó para calificar las cartas que fueron entregadas por los equipos debido a que esta actividad se consideró como parte de su calificación del último parcial. Por lo que, en el primer criterio de evaluación (o primer punto para orientar el trabajo de los estudiantes) no involucra al problema y solo califica de manera general la funcionalidad del modelo. El segundo criterio califica la claridad del modelo. El tercer criterio se refiere a la creatividad e innovación a comparación de la versión implementada, en esta versión el tercer criterio le pide al estudiante que la carta no debe de tener faltas de ortografía, redacción clara y que añada todas las posibles formas de representación, incluyendo figuras, gráficas, ecuaciones, etcétera. Este criterio va encaminado al principio de la documentación del modelo. El cuarto criterio de evaluación, de acuerdo con el ChatGPT, califica de manera general los conocimientos de los estudiantes y su dominio del tema, lo cual no es el foco de la tesis, por lo que este criterio no fue de utilidad. En la versión implementada se solicitó entregar todas las producciones escritas, sin que se borrarán los intentos fallidos o rutas incompletas, ya que esta información es fundamental para comprender el pensamiento de los participantes y para satisfacer el principio de documentación del modelo, ya que nos interesa analizar si hubo refinamiento en sus modelos y sin sus intentos fallidos analizar esto es complicado. Para el quinto criterio de evaluación el ChatGPT califica el trabajo en equipo y la contribución de cada integrante, mientras que la versión implementada se pide al estudiante indicar si es posible reutilizar el modelo final, al cambiar las condiciones iniciales del problema, para cumplir con el principio de reutilización del modelo. Por lo tanto, si los estudiantes cumplían con todos los puntos de la rúbrica tendrían una excelente

calificación. En resumen, la rúbrica fue un instrumento que sirvió para dos cosas: (1) orientar y ser lo más claros posibles en lo que queríamos de los estudiantes y (2) calificar tanto su desempeño en la actividad como la producción escrita que entregaron como parte de la solución a la problemática.

También se elaboraron dos cuestionarios (Apéndice C), una autoevaluación basada en 10 ítems de Likert, con cuatro opciones de respuesta, para satisfacer el principio de autoevaluación, donde se cuestionó a los estudiantes la calidad de su modelo, la adaptabilidad de este, si el modelo cumplía con los requerimientos solicitados en la actividad, originalidad y eficacia, y sobre el desempeño de los participantes. El segundo cuestionario fue una encuesta de satisfacción (Apéndice C), anónima y de respuesta abierta, cuyo fin es conocer la opinión de los estudiantes sobre la MEA, si les pareció interesante y promovió el pensamiento creativo o crítico.

3.5. Participantes

Los participantes son estudiantes de nuevo ingreso de una Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, quienes fueron seleccionados por conveniencia, ya que estaban inscritos en un curso impartido por uno de los directores de la tesis. De acuerdo con Battaglia (citado en Hernández et al., 2014, p. 390) este tipo de selección incluye los casos a la mano o disponibles. El programa educativo pertenece a una universidad pública del Estado de Hidalgo, México. Los participantes cursaron cinco asignaturas, tres de las cuales son de matemáticas: matemáticas básicas, geometría y razonamiento matemático. La MEA se implementó como parte de las actividades del tercer periodo parcial del curso de *razonamiento matemático*. Los participantes fueron 19 estudiantes (10 mujeres y 9 hombres). Se formaron cinco equipos, cuatro con cuatro estudiantes y uno con tres estudiantes (Tabla 5). Con el fin de mantener la confidencialidad de sus identidades se les asignó un seudónimo para identificarlos: Antonio, Bárbara, Berenice, Dania, Edgar, Elena, Fernanda, Iván, Jaime, Juan, Lucía, María, Matías, Maximiliano, Melissa, Mildred, Miranda, Pedro, y Valentín.

Tabla 5. Estructuración de los equipos

Número de equipo	Integrantes
1	Antonio, Edgar, Matías, Maximiliano
2	Berenice, María, Mildred, Valentín
3	Bárbara, Elena, Juan, Miranda
4	Dania, Fernanda, Lucía
5	Iván, Jaime, Melissa, Pedro

3.6. Implementación de la MEA

Para esta investigación se implementó una MEA. El material que se entregó a cada estudiante consta de cinco hojas. En la primera hoja se encuentran las instrucciones de la actividad, las siguientes dos hojas contienen el texto del artículo periodístico y las preguntas de calentamiento, cuyo objetivo es familiarizar a los participantes con el contexto de la actividad. La tercera hoja contiene el enunciado de la actividad principal y en las hojas restantes se encuentra la rúbrica con la cual se calificó la carta que se solicita en la MEA.

La MEA se implementó durante dos sesiones de tres horas cada una. En la primera sesión se abordó la actividad de calentamiento y, posteriormente, la situación problemática *Administración del Gran Hotel de Pachuca* (Apéndice C). Durante los primeros 30 minutos de la primera sesión, se explicó en qué consistía la actividad y para qué se iba a utilizar los productos escritos. Además, de responder preguntas y dudas sobre la actividad. Posteriormente, los estudiantes leyeron el artículo periodístico y respondieron las preguntas de calentamiento. El resto de la primera sesión se utilizó para abordar la situación problemática, incluyendo la elaboración de la carta para el cliente. Todas las acciones de los participantes estuvieron orientadas por las indicaciones de la rúbrica. En el enunciado de la tarea se indica explícitamente a los participantes elaborar, como actividad extra-clase, una presentación con diapositivas con la cual apoyaría la exposición de sus resultados. Durante

el fin de semana, entre la primera y la segunda sesión, la autora revisó las producciones escritas de los participantes, además calificó las cartas y tomó notas sobre dudas que surgieron al momento de revisar el trabajo de cada equipo.

En la segunda sesión se llevaron a cabo exposiciones en plenaria, donde cada uno de los equipos presentó sus resultados y el proceso de modelación. Al final de cada exposición, la autora hizo preguntas para aclarar dudas sobre el trabajo de los participantes, incluyendo cuestionamientos sobre los modelos inconclusos y los borradores que entregaron. Posteriormente, se aplicó la autoevaluación, para conocer la autopercepción del desempeño, individual y en equipo. Para finalizar la sesión, los participantes contestaron una encuesta anónima de satisfacción. Con respecto de las exposiciones se calificó el desempeño de cada equipo mediante una *guía de observación de clase* (Apéndice D).

3.7. Recolección y análisis de la información

La información empírica que sustenta esta tesis incluyó las producciones escritas en papel que realizaron los estudiantes, borradores, cartas y el reporte final, donde indicaron cuál fue la contribución de cada integrante del equipo. Estas producciones se recolectaron en forma física y posteriormente se digitalizaron. También se grabaron en vídeo las exposiciones plenarias que llevaron a cabo los estudiantes, las cuales se transcribieron con el fin de realizar el análisis a partir de elementos textuales (Apéndice E). Estos instrumentos sirvieron para identificar y analizar la manera en que los estudiantes resolvieron la actividad, tanto de manera individual y en equipo.

El análisis de la información se llevó a cabo en diferentes fases o etapas, la primera de ellas consistió en la calificación de los trabajos de acuerdo con la rúbrica que se proporcionó, en la revisión surgieron dudas que fueron contestadas durante las exposiciones plenarias. La segunda fue al momento de las exposiciones, en estas se les preguntó a los estudiantes participantes sobre las dudas que surgieron en sus producciones escritas, y durante las preguntas surgieron nuevas dudas. La tercera fase consistió en la transcripción de las grabaciones de video, las cuales tienen como finalidad encontrar con mayor claridad los sistemas conceptuales creados por los estudiantes. La cuarta fue la transformación de dicha información en datos, mediante la identificación de siete categorías a partir de las cuales se

reconocerían los cambios o adaptaciones, posteriormente a cada una de ellas se les asignó un color y se procedió a identificar los fragmentos de texto que correspondía a alguna de estas categorías. Estos párrafos coloreados constituyeron los datos básicos del estudio.

Se realizó una triangulación de datos, la cual se realizó con las producciones escritas y las exposiciones plenarias. De acuerdo con Martínez (2006), la triangulación de datos sirve para mejorar notablemente los resultados de la investigación y su validez y confiabilidad. Se pueden combinar diferentes formas, técnicas y procedimientos cualitativos y cuantitativos. El análisis de los productos escritos de los estudiantes se llevó a cabo de manera individual por cada integrante del equipo y, posteriormente, se hizo un análisis de la carta entregada por el equipo, así como su trabajo del equipo en su conjunto. Los sistemas conceptuales que se esperaba encontrar eran modelos de tipo tabular, gráfico y algebraico. Al momento de analizar la información se encontraron modelos de tipo aritmético, textual, verbal y kinestésico.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

4.1. Introducción

En este capítulo se describen las características de los sistemas conceptuales generados por cada uno de los equipos de estudiantes, para dar sentido a la situación problemática planteada en la MEA *Administración del Gran Hotel de Pachuca*. Se identificaron los componentes de cada uno de los sistemas conceptuales que generaron los participantes. También se analizó el proceso de modificación, mejora y refinamiento de los modelos. En algunos casos, la descripción del proceso de modelación es grupal, mientras que en otros se identifican, en primer lugar, las aportaciones individuales y, posteriormente, se describe el proceso de discusión al interior de los equipos, el cual condujo a la construcción de acuerdos y la toma de decisiones. En lo subsecuente, se hará referencia a las transcripciones de las exposiciones de cada uno de los equipos con las abreviaturas T1, T2, etcétera. Así, una anotación del tipo (T1, 81-86), hace referencia a las líneas de la 81 a la 86, correspondientes a la transcripción de la exposición que realizó el equipo 1.

4.2. Proceso de modelación: equipo 1

En este equipo los participantes seleccionaron al presidente y al secretario, pero los estudiantes a quienes se les asignó dichas responsabilidades no adoptaron la función correspondiente. El presidente tenía que organizar el trabajo del equipo y el secretario tomar nota de los acuerdos y de la actividad desarrollada al interior del equipo, y al mismo tiempo contribuir en la solución de la situación problemática. Edgar y Antonio abordaron individualmente la tarea por alrededor de 45 minutos, mientras que Maximiliano (presidente) y Matías (secretario) solamente observaron. Después de ese tiempo, Edgar y Antonio compararon sus resultados e iniciaron una discusión, ya que los modelos propuestos, por cada uno de ellos, eran diferentes.

Edgar elaboró una tabla en la que relacionó el precio de una habitación y el número de habitaciones ocupadas. El participante etiquetó un renglón de la tabla con la literal y , para representar el precio de la habitación, y otro renglón como x , para representar el número de habitaciones ocupadas. Aunque no indicó explícitamente el significado de cada una de las

literales, esto se puede deducir a partir del contexto. Colocó en la tabla la información indicada en el enunciado de la tarea y, calculó el costo del hospedaje 34 y 32 habitaciones ocupadas (Figura 4.1).



Figura 4.1. Representación elaborada por Edgar.

Posteriormente, Edgar eligió dos pares de números de su tabla, los representó como parejas ordenadas y, a partir de estos puntos, planteó la ecuación lineal $y = -50x + 3250$. En la tabla, así como en la expresión algebraica, Edgar omitió información importante, indicada explícitamente en el enunciado de la tarea, tal como los costos de limpieza de las habitaciones y sueldos de los empleados del hotel; la cual era necesaria para determinar la ganancia y, por tanto, sin dicha información no era posible determinar la ganancia máxima. En el comportamiento de Edgar se identificaron características generales que se han señalado en el trabajo de estudiantes cuando abordan problemas matemáticos, incluyendo leer solo superficialmente las indicaciones sin comprender el texto antes de llevar a cabo alguna acción. Por otra parte, este estudiante, sólo consideró la información que tenía más a la mano, lo cual aporta evidencia de que no leyó completo el enunciado del problema o no lo comprendió.

Antonio elaboró una expresión algebraica que incluía toda la información relevante expresada en el enunciado del problema. El participante denotó con la literal x al número de habitaciones vacías, donde indicó explícitamente el significado de la literal. A continuación, propuso una expresión algebraica que representó la ganancia del hotel $G(x) = (1500 + 50x)(35 - x) - 40(35 - x) - 450$. Para tener presente el

significado de las expresiones algebraicas incluyó, como una nota, las letras nh sobre la expresión $(35 - x)$, lo cual representa a las habitaciones ocupadas (Figura 4.2).

$$G(x) = (1500 + 50x)(35 - x) - 40(35 - x) - 450$$

Figura 4.2. Función ganancia elaborada por Antonio.

El primer sumando de la expresión G representa los ingresos del hotel en función de la cantidad de habitaciones desocupadas. El primer factor del primer sumando indica el precio de la habitación que corresponde a x habitaciones vacías y, el segundo factor, como se indicó con anterioridad, representa el número de habitaciones ocupadas. El segundo sumando de G , $40(35 - x)$, indica la cantidad de dinero que se tiene que pagar por la limpieza de las habitaciones que se ocuparon; mientras que el último sumando (450) es el sueldo diario que se paga a los trabajadores del bar y del estacionamiento. Antonio operó algebraicamente G para expandir los productos y simplificar términos semejantes, pero se dio cuenta que había cometido errores, por lo que procedió a tachar lo que había hecho y realizó las correcciones pertinentes. La nueva expresión que obtuvo fue $G(x) = -50x^2 + 290x - 54350$, la cual es correcta, excepto en el término independiente. El participante comparó su función con la obtenida por Edgar.

Edgar comentó que la función lineal que había obtenido permitía calcular la ganancia máxima, sin reflexionar sobre la validez de su afirmación; a pesar de ser un estudiante destacado. Antonio también estaba seguro de que su función cuadrática era la correcta, ya que él sí había considerado todos los datos indicados en el enunciado de la tarea. Antonio es un estudiante con buenas calificaciones, pero toma decisiones y lleva a cabo acciones sin reflexionar. Las diferencias se resolvieron cuando se compararon los resultados que arrojaban las expresiones algebraicas con los datos de una tabla elaborada por Matías, otro integrante del equipo.

Matías elaboró una tabla para verificar si Edgar o Antonio tenían la razón. En la tabla incluyó información sobre habitaciones ocupadas, precio del hospedaje y las ganancias del hotel. La primera columna de la tabla tiene información sobre las ganancias netas del hotel que van desde 50650 hasta 50850. La segunda columna se identificó con la literal x , que etiquetó como habitaciones pero que, en realidad, representa las habitaciones ocupadas. El rango de valores que Matías consideró va desde 35 hasta 30 habitaciones ocupadas. La última columna indica el costo de habitación, el cual varía desde 1500 hasta 1750 pesos. Este estudiante solo elaboró una tabla con seis filas porque se dio cuenta de que no era necesario agregar más, ya que el rango de valores considerados le permitía obtener la ganancia máxima, aunque no justificó esa afirmación. Las acciones de Matías aportan evidencia de que ha desarrollado habilidades metacognitivas, pero tiene limitaciones en lo que respecta a la justificación de resultados.

	X	Y
Ganancias	Habitaciones	Costo de habitación
50650	35	1500
50890	34	1550
51030	33	1600
51070	32	1650
51010	31	1700
50850	30	1750

Figura 4.3. Tabla elaborada por Matías.

Edgar y Antonio evaluaron sus modelos algebraicos para 32 habitaciones ocupadas; entonces, Edgar se dio cuenta de que la “ganancia máxima” que él obtuvo no era igual a la indicada en la tabla (\$51,070). Además, identificó que la función lineal que propuso como modelo permitía calcular el precio del hospedaje, pero no la ganancia del hotel. Por otra parte, el modelo de Antonio arrojó un resultado negativo. Al obtener resultados diferentes a

los de la tabla, Edgar y Antonio trabajaron colaborativamente para asegurar que las operaciones algebraicas fueran correctas y, así, obtuvieron la expresión $G(x) = -50x^2 + 290x + 50650$. Igualaron la función a cero y encontraron el vértice de la parábola asociada para encontrar el máximo de la función y el punto en que se alcanza. Concluyeron que la ganancia máxima se obtiene cuando hay tres habitaciones vacías.

Posteriormente, Edgar buscó conciliar los resultados que obtuvo individualmente, con el resultado obtenido en forma conjunta con Antonio. Para obtener una función cuadrática multiplicó la función lineal que obtuvo originalmente ($y = -50x + 3250$) por x , y al resultado le restó los sueldos de los encargados de bar, del estacionamiento, y los costos derivados de la limpieza de las habitaciones. Realizó operaciones para simplificar términos semejantes e igualó la expresión a cero. A continuación, para obtener el máximo de la función, utilizó el procedimiento para ubicar el vértice de la parábola asociada ($x = -\frac{b}{2a}$), redujo términos y obtuvo como resultado $\frac{329}{10}$, por lo que conjeturó que el máximo de la función se alcanza cuando x , la cantidad de habitaciones ocupadas es igual a 32 o 33.

Nuevamente, Edgar y Antonio compararon resultados y se dieron cuenta que no eran los mismos, lo cual se debió a que el significado que asociaron a la literal x era diferente para cada uno de los estudiantes. Antonio sí obtuvo el valor de la ganancia máxima indicado en la tabla utilizando la expresión algebraica propuesta, pero Edgar no. Lo anterior condujo a que Antonio dudara de su resultado, a pesar de ser correcto y coincidir con el valor obtenido mediante la tabla (T1, 95-100). Al seguir la discusión, Maximiliano (el presidente) decidió intervenir y construir una función que le permita calcular la ganancia máxima. Solicita a Edgar que realice la gráfica de la función final que Edgar y Antonio obtuvieron. $G(x) = -50x^2 + 290x + 50650$, pero al ver que no atiende su indicación decide hacerlo él mismo. Al mismo tiempo, Antonio optó por crear otra función ya que no estaba seguro de que su modelo anterior fuese correcto.

Por otra parte, el cuarto integrante del equipo, Maximiliano, planteó tres expresiones algebraicas, la primera de ellas es $H(x) = 35 - x$, que representa las habitaciones ocupadas en función de las habitaciones vacías; $D(x) = 1500 + 50x$ que representa el

precio del hospedaje en función de las habitaciones vacías. Después construyó la función G , la cual se construyó como el producto de H y D menos el costo de limpieza diaria de las 35 habitaciones, junto con los salarios diarios de los empleados, es decir, $G(x) = (35 - x)(1500 + 50x) - 1850$. El participante calculó los gastos de limpieza como fijos, multiplicando el precio de mantenimiento por 35 habitaciones obteniendo 1400, a esto le sumó los salarios de los encargados de bar y estacionamiento y obtuvo un resultado de 1850.

En las acciones de Maximiliano se apreció la implementación de la heurística de descomponer un problema en problemas más simples. Maximiliano no identificó que el costo por limpieza de las habitaciones es variable, ya que solo se asean las habitaciones ocupadas y no las que quedaron vacías (Figura 4.4). Realizó las operaciones y simplificó para así obtener la función $G(x) = -50x^2 - 1500x + 50650$. Calculó la ganancia para 32 habitaciones ocupadas, comparó con el resultado de la tabla de Matías y se dio cuenta que los resultados no eran iguales, lo cual reconoció al preguntarle durante la exposición de su equipo (T1, 71-74). En consecuencia, corrigió el término independiente de G .

Habitaciones

$$H(x) = 35 - x \quad G(x) = (35 - x)(1500 + 50x) - 1850$$

$$D(x) = 1500 + 50x \quad G(x) = 52,500 - 1500x - 50x^2 - 1850$$

$$G(x) = -50x^2 - 1,500x + 50,650$$

Limpieza
 $40 \times 35 = 1400$
 salarios
 450
 $1400 + 450 = 1850$

Figura 4.4. Error al considerar los costos de limpieza como fijos.

En un segundo intento, Maximiliano consideró los gastos de limpieza en función de x , y los representó con la expresión $40x$, donde x es el número de habitaciones desocupadas, los

gastos de bar y estacionamiento los consideró como fijos. Él mencionó que la parte de las habitaciones ya lo había solucionado (T1, 76). Maximiliano se dio cuenta que nuevamente su razonamiento no era correcto (T1, 76-79), ya que el costo por la limpieza de las habitaciones ocupadas debe ser $35 - x$. Los errores cometidos por Maximiliano pueden deberse a que no escribe explícitamente cuál es el significado o interpretación de la variable, a diferencia de sus otros compañeros (Figura 4.4).

Posteriormente, consideró los gastos de limpieza en función de las habitaciones ocupadas. Con base en las consideraciones previas obtuvo la expresión $G(x) = (35 - x)(1500 + 50x) - 40(35 - x) - 450$, la cual desarrolló y simplificó para así concluir que la ganancia se obtiene con 32 habitaciones ocupadas y un precio de hospedaje de \$1650, lo cual conduce a una ganancia de \$51,070. Posteriormente, realizó la gráfica de G indicando las habitaciones desocupadas en el eje horizontal, y en el eje vertical las ganancias netas (Figura 4.5). El participante escribió las coordenadas del vértice de la parábola (2.9, 51070.50) y del punto (3, 51070) para saber la ganancia máxima.

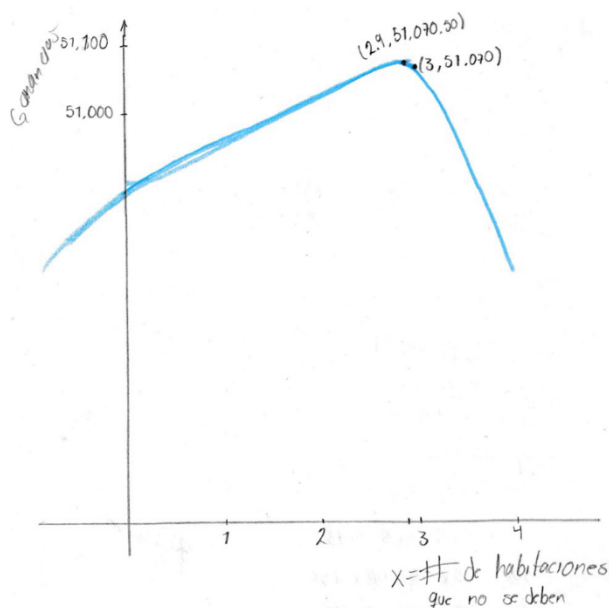


Figura 4.5. Gráfica de la función final de Maximiliano.

En paralelo, Antonio continuó con el ajuste del modelo algebraico. Propuso la expresión: $G(x) = x[1500 + 50(35 - x)] - 40x - 450$ con la restricción $0 < x < 35$. En este

caso, él indicó explícitamente el significado de la literal x como el número de habitaciones ocupadas, además es el único estudiante del equipo que señaló el dominio de la función. Así que, $35 - x$ representa el número de habitaciones desocupadas, que al multiplicarse por 50, arroja el incremento total al precio más bajo (\$1500). Entonces, la expresión $1500 + 50(35 - x)$ indica el precio del hospedaje en función de las habitaciones desocupadas. Cuando multiplicó la expresión anterior por x , obtuvo la ganancia bruta al rentar x habitaciones. Si a la ganancia bruta se le resta el costo de mantenimiento y los salarios se obtiene la ganancia neta. Después de discutir entre los miembros del equipo, acordaron utilizar la última función que construyó Antonio. En la carta entregada por el equipo se identificaron cuatro diferentes modelos, textual, algebraico, tabular y gráfico. A continuación, se resume el proceso de modelación de este equipo (Figura 4.5), con la finalidad de que se entienda con mayor claridad la evolución y proceso que llevaron a cabo los estudiantes se le asignó un color a cada uno de ellos: Edgar (verde), Antonio (azul), Matías (morado) y Maximiliano (negro). Cabe recalcar que todas las expresiones algebraicas se verificaron con la tabla creada por Matías, es decir, que a pesar de construir expresiones algebraicas que modelaban la problemática no confiaron en totalidad en estas a menos que obtuvieran lo mismo que en la tabla de valores.

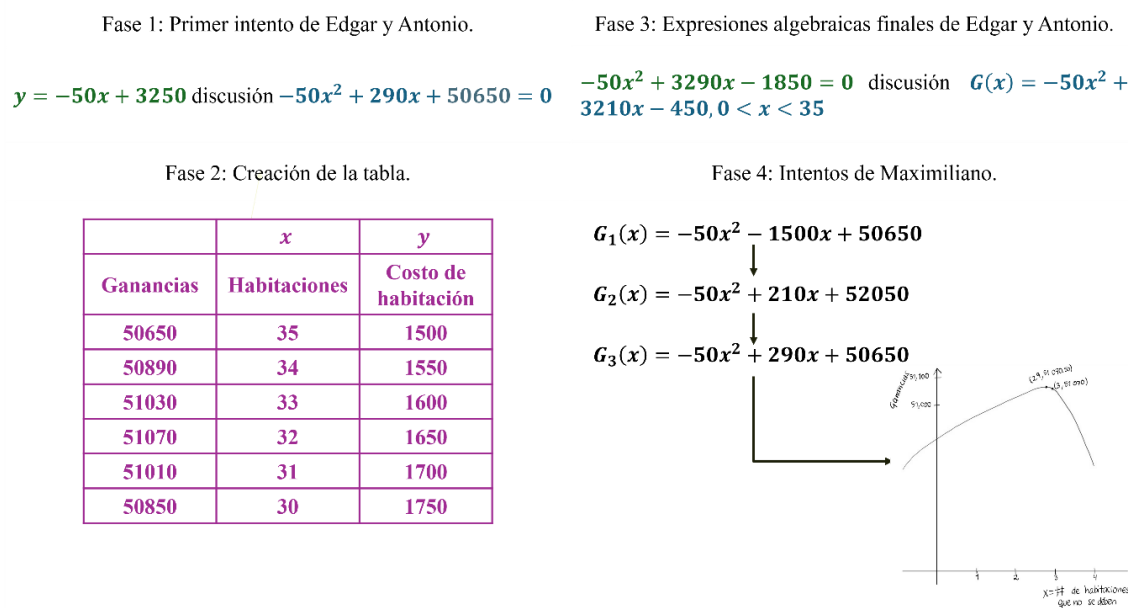


Figura 4.6. Evolución e interacción entre los sistemas conceptuales del equipo 1.

4.3. Proceso de modelación: equipo 2

En este equipo, la presidenta (Mildred) comunicó a los integrantes que debían aportar ideas encaminadas a solucionar el problema. Los participantes leyeron el enunciado de la tarea y realizaron una lluvia de ideas para compartir sus opiniones y propuestas. Berenice realizó operaciones aritméticas a partir de la información numérica proporcionada en el enunciado de la tarea, la cual integró en un diagrama para determinar la ganancia máxima del hotel. Por otra parte, Mildred (presidenta), María (secretaria) y Valentín, de manera individual, realizaron operaciones aritméticas y algebraicas para obtener una solución. Después de compartir sus resultados con el equipo, la presidenta y la secretaria decidieron dar seguimiento al modelo algebraico propuesto por María. Es importante mencionar que no se pudo reconstruir el proceso de razonamiento que llevaron a cabo diversos integrantes de este equipo, el cual se encontraba alejado de la instructora ya que, cada vez que ella se acercaba al equipo para observar, los participantes dejaban de trabajar, por lo que se decidió observarlos únicamente desde lejos.

Berenice realizó un diagrama integrado por columnas de números (Figura 4.7). En una sección del diagrama se identificó que un incremento en el precio de las habitaciones corresponde con una disminución en las habitaciones ocupadas (una columna tiene las cantidades 1500, 1550, 1600, 1650, 1700, 2000 y 1800, correspondientes al precio del hospedaje; y en otra columna las cantidades 35, 34, 33, 32, 31, 25 y 29, que indican las habitaciones ocupadas). Berenice intentó dar significado a la información mediante la utilización de flechas como un medio para relacionar cantidades. Además, a la izquierda del diagrama colocó una columna con las ganancias (número de habitaciones ocupadas multiplicadas por el precio de la habitación). Después de escribir el renglón correspondiente a 31 habitaciones, la participante decidió dar un salto en los valores hasta 21 habitaciones, con la finalidad de identificar una tendencia en el crecimiento o decrecimiento de las otras cantidades. Observó que la ganancia, para este caso, es menor a la calculada para 31 habitaciones. Ante el resultado anterior, la participante buscó verificar si existe una disminución de la ganancia cuando se ocupan 29 habitaciones.

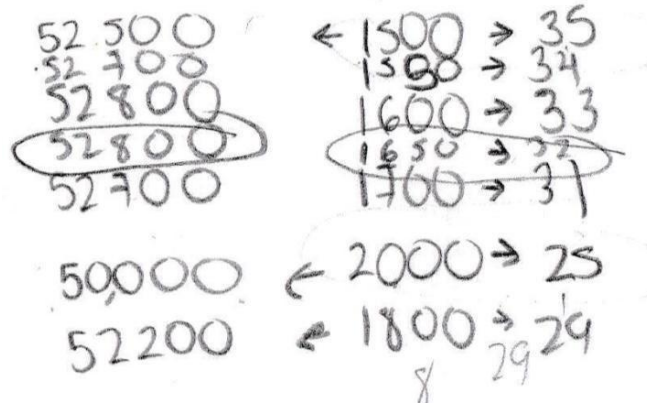


Figura 4.7. Diagrama de Berenice empleado para organizar la información.

Berenice formuló la conjetura de que la ganancia seguiría disminuyendo al disminuir las habitaciones ocupadas, por lo que dejó de hacer sus cálculos en ese punto y con el diagrama que formó observó que la ganancia máxima se obtiene con 32 habitaciones ocupadas y cobrando \$1650 por habitación. La participante observó un patrón en el incremento de las ganancias. Particularmente, notó que la ganancia empezaba a disminuir a partir de las 31 habitaciones ocupadas, por lo que decidió verificar numéricamente su conjetura con otros dos casos (25 y 29 habitaciones). Después, procedió a calcular los sueldos de los encargados del bar y estacionamiento de manera semanal, multiplicó \$250 y \$200 por siete, así obtuvo que \$1750 y \$1400 serían los sueldos semanales.

A continuación, calculó los gastos del mantenimiento de las habitaciones, al multiplicar \$40 por el total de habitaciones (35), y después multiplicó \$1400 por siete y obtuvo que los gastos semanales del mantenimiento de las habitaciones son \$9,800. Finalmente, calculó la ganancia diaria (\$52,800) y semanal (\$367,500). Posteriormente, elaboró un nuevo apartado denominado *modelado*, en el cual escribió nuevamente los datos del problema, si se cobran \$1500 entonces las 35 habitaciones del hotel están ocupadas, escribió que las ganancias por día son de \$52,500 y procedió a restar los \$450 de los sueldos y le dio un total de \$52,050, pero se da cuenta que olvidó los costos de limpieza, entonces restó \$1400 a la cantidad anterior, porque consideró que se limpiaban todas las habitaciones. Concluyó que la ganancia por día ya sin los sueldos y costos de limpieza es de \$50,650 y de manera semanal las ganancias serían de \$354,550.

A partir del diagrama, Berenice conjeturó que la ganancia máxima se debe de obtener con 32 habitaciones ocupadas, lo cual correspondió a un costo de hospedaje de \$1,650. Con base en la información anterior calculó la ganancia por día (\$52,800). A continuación, sumó los sueldos y los costos de limpieza ($1730 = 450 + 1280$) y al resultado lo denominó *insumos*. Realizó la resta de las ganancias por día menos los insumos y le dio un resultado de \$50,970 (en realidad son \$51,070) y a este resultado lo multiplicó por siete para así calcular las ganancias semanales (al realizar las operaciones pertinentes, las cuales no eran explícitas, se observó que se refería a las ganancias netas semanales) las cuales le dan un resultado de \$356,790. Después intentó corregir las ganancias netas por día, pero se volvió a equivocar, escribe \$51,970, pero la cantidad correcta es \$51,070. Después de realizar varias operaciones aritméticas concluyó que la ganancia máxima por día es de \$51,070 y marcó a esta cantidad con una flecha.

Por otro lado, Mildred, María y Valentín decidieron hacer intentos individuales para crear un modelo, pero, al final, dieron seguimiento al modelo de María, quien identificó la información relevante y propuso una función cuadrática y una tabla de valores. Mildred representó la información en una especie de diagrama (Figura 4.8) y se dio cuenta que el costo del hospedaje se podía representar algebraicamente mediante la expresión $1500 + 50x$, donde x indicaba el número de habitaciones desocupadas, pero después cambió a la expresión por $1500 + 50(35 - x)x$, con x indicando el número de habitaciones ocupadas. Esta estudiante muestra capacidad para representar y dar sentido a las expresiones simbólicas, aunque no indicó explícitamente el significado de las literales.

$$\begin{array}{l}
 1500 \rightarrow \text{habitación} \quad 35 - \text{habitaciones} \\
 1500 + x \quad \text{Precio Habitación} \quad 35 \\
 1500 \quad 1500 \rightarrow 35 \\
 \quad \quad \quad \rightarrow (35 - x) \\
 1500 + 50(x) \\
 1500 + 50(35 - x) x \rightarrow 1500 \\
 1500x + 3250x \\
 1500 + 50(x) \\
 1500 + 50(35 - x) x \\
 1500x + 3250x \\
 (-50x^2 + 3250x)
 \end{array}$$

Figura 4.8. Forma en que Mildred organizó la información.

Posteriormente, Mildred realizó operaciones algebraicas que no se lograron entender, pero se intuyó que buscó calcular el precio de las habitaciones ocupadas, cometiendo errores al realizar operaciones. En un segundo intento, Mildred restó al precio de la habitación el costo de la limpieza ($1500 - 40$), sin considerar que solo se limpian las habitaciones ocupadas. Posteriormente, multiplicó el resultado anterior (1460) por las habitaciones ocupadas y le restó los sueldos de los empleados, obteniendo la expresión $1460(35 - x) - 450 = 650 \cdot 50$. Lo que Mildred intentó conocer es cómo aumenta el precio de las habitaciones, por lo que propuso la expresión $1500 + 50x$; aunque finalmente se enfocó en seguir la propuesta de María (T2, 71-76).

María identificó información relevante como la cantidad de habitaciones del hotel y las amenidades (bar y estacionamiento). Relacionó algunas cantidades con la finalidad de comprender la problemática: $\$1500 \times \text{habitación} = \text{cupo completo}$, se refiere a que si se cobran $\$1500$ por habitación se ocuparán todas las habitaciones disponibles; $+ \$50 = -1 \text{ habitación}$, hizo alusión de que por cada $\$50$ de incremento en el precio de hospedaje una habitación quedará desocupada. La igualdad $\$1600 \times \text{habitación} = 33 \text{ habitaciones}$, significa que si se cobran $\$1600$ se tienen 33 habitaciones ocupadas. Ella representó el costo de limpieza como $\text{costo de limpieza} \times \text{habitación} = \40 . Finalmente, los sueldos de los encargados del

bar y estacionamiento los representó como $\text{suelo bar} = \$250$ y $\text{suelo estacionamiento} = \200 . La participante asoció las cantidades mediante relaciones de igualdad para darle sentido y clarificó el enunciado de la actividad.

A continuación, María realizó las operaciones aritméticas las cuales, posteriormente, tomó como base para proponer una expresión algebraica. Primero sumó todos los costos/salarios que se tienen por día; \$1400 de la limpieza de las 35 habitaciones, \$250 y \$200 de los empleados, obteniendo un total de \$1850. En segundo lugar, calculó la ganancia por día si se cobra \$1500 por habitación, lo cual le dio un total de \$52,500 y representó a las ganancias como “ $\text{ganancia} \times \text{día} - \text{costos} \times \text{día}$ ”, realizó la operación y concluyó que las ganancias por día son de \$50,650. Por último, denotó a x como el número de habitaciones, pero no indicó si se refería a las ocupadas o desocupadas. Con base en el contexto se determinó que se refiere a las habitaciones ocupadas.

A partir de lo anterior, María construyó una expresión algebraica que llamó *modelado función*, la cual consistía en dos partes: en la primera comenzó denotando al precio como $\text{precio} = \$1500 + 50x$, con x el número de habitaciones desocupadas, con esta función, María representó como va incrementando el precio de las habitaciones en función de las habitaciones desocupadas que se tengan. Posterior a esto, a las habitaciones las expresó como $\text{habitaciones} = 35 - x$, realizó un despeje para obtener lo anterior en términos de la variable, es decir, $x = 35 - h$. Con lo anterior a la función *precio* la transformó en $\text{precio} = 1500 + 50(35 - h)$. Seguido de esto, construyó la función *ingresos*, la cual es $\text{ingresos} = p \cdot H = [1450 + 50(35 - h)] \cdot h$, (escribió 1450, aunque debió escribir 1500), donde a la expresión del *precio*, que construyó previamente, la multiplicó por la variable h . La participante hizo un cambio de notación para utilizar la notación usual de una función y al operar la expresión obtuvo $I(p) = -50h^2 + 3250h$, pero no se dio cuenta que cometió un error (debió escribir $3200h$ en lugar de $3250h$).

María comparó los resultados que obtuvo con esa expresión y los datos del diagrama de Berenice, observando que el valor de la ganancia máxima obtenida por cada método difería, por lo que procedió a revisar el proceso de solución. En su segundo intento representó al

precio de las habitaciones como $\text{precio} = \$1500 + 150x$. Ella ya sabía que la ganancia máxima se obtiene cuando se desocupan tres habitaciones, entonces por eso a x la multiplicó por 150, los cuales eran las tres veces que se incrementó el precio, representó a las habitaciones como $\text{habitaciones} = 35 - 3x$ y despeja a x para así obtener $x = \frac{(h-35)}{3}$. A los ingresos los expresó como $\text{ingresos} = p \cdot H = [1500 + 150\left(\frac{h-35}{3}\right)] \cdot h$. Cambió la notación y realizó las operaciones para así concluir que la función para modelar las ganancias del hotel es $I(p) = 50h^2 - 250h$ (Figura 4.9), nuevamente comparó resultados los cuales no coincidieron.

Modelado función. 35 habitaciones, precio = \$1500

$\text{Precio} = \$1500 + 50x = 1500 + 50(35-h)$ $\text{Habitaciones} = 35 - x \Rightarrow x = 35 - h$ $\text{Ingresos} = p \cdot H \Rightarrow [1500 + 50(35-h)] \cdot h$ $I(p) = 1450h - 50(35-h) \cdot h$ $-50h^2 + 3250h$ <u>Máximo ingreso = \$52,812.5</u>	$\text{Precio} = \$1500 + 150x$ $\text{Habitaciones} = 35 - 3x$ $x = \frac{h-35}{3}$ $\text{Ingresos} = p \cdot H \Rightarrow [1500 + 150\left(\frac{h-35}{3}\right)] \cdot h$ $I(p) = \left(\frac{1500 + 150h - 5250}{3}\right) \cdot h$ $\left(\frac{1500 + 150h}{3} - \frac{5250}{3}\right) \cdot h$ $= 250h + 50h^2$
---	--

Figura 4.9. Proceso de modelación algebraica realizado por María.

Durante la exposición de resultados, María mencionó que modificó varias veces la expresión algebraica inicial, ya que no obtenía los mismos resultados que con el modelo tabular de Berenice. Las modificaciones se realizaron con el objetivo de obtener el valor de la ganancia máxima identificado a partir del modelo tabular. En cierto momento se dio cuenta de que en el modelo algebraico faltaba añadir los costos de limpieza y los sueldos. Además de que, para lograr la coincidencia de los resultados, la variable debía representar a las habitaciones ocupadas y no las desocupadas (T2, 96-101). Al darse cuenta de que con ninguna de las dos funciones que construyó obtenía lo mismo que Berenice decide realizar una tabla por cuenta propia, como medio de verificación. En la primera columna indicó el número de habitaciones ocupadas, en la segunda el precio de las habitaciones, en la tercera

la ganancia bruta, en la cuarta los gastos y, en la última, la ganancia neta. Ella observó que, en efecto, la ganancia máxima se obtiene con 32 habitaciones ocupadas y que no pudo modificar su función para obtener los resultados arrojados por el modelo tabular (T2, 102-103).

Valentín simplemente copió la primera función que realizó María y procedió a realizar operaciones algebraicas. En el trabajo escrito de este estudiante se pudo observar que tiene problemas al expandir expresiones que involucran paréntesis, ya que la expresión $(1500 + 50x)$ la transforma en $[1500 + 50(35 - h)]h$ y operó para obtener $(52500 - 1500h + 1750 - 50h)h$, lo cual no es correcto, ya que lo anterior lo obtuvo al multiplicar los binomios $(1500 + 50)(35 - h)h$. El estudiante concluyó que la función debería de ser $54250h - 1450h^2$. Después, Valentín realizó las operaciones algebraicas correspondientes con la segunda expresión que propuso María, y no hay más evidencia de que haya intentado algo por sí mismo, en sus producciones escritas solo resumió lo que hizo su compañera María. Esto tiene mucho que ver con su personalidad como estudiante, ya que se caracteriza por ser un estudiante pasivo y poco participativo.

María tomó el liderazgo en la creación de la expresión algebraica, una característica de ella es que es una estudiante trabajadora y entusiasta que, a pesar de tener dificultades, toma decisiones. Después de que María terminó de hacer sus intentos acordaron explicar lo que ella hizo. A pesar de saber que su solución no era del todo correcta, intentaron elaborar una buena explicación del desarrollo; sin embargo, su carta es confusa y sólo indican qué significa cada término de las expresiones algebraicas para, finalmente, concluir que el máximo de la función que proponen se encuentra con la fórmula del vértice. Aunque su función no se obtuvo mediante un razonamiento correcto, lograron obtener la respuesta correcta.

Algo interesante en el trabajo de este equipo es que nombraron a su exposición como *Reestructuración de costos para evitar el cierre del Gran Hotel Pachuca*, lo cual es una evidencia de que se tomaron a la problemática en serio. Además, buscaron información adicional como ubicación, costos, amenidades ofertadas por los hoteles cercanos para complementar la información ofrecida en el enunciado de la tarea y fortalecer su respuesta.

La exposición la llevaron a cabo a manera de informes, como si realmente estuvieran exponiendo frente a Rebeca, la nueva dueña del hotel. A continuación, se resume el proceso de modelación del equipo (Figura 4.10), donde se observa la relevancia del modelo tabular de Berenice y cómo a partir de él surgieron los modelos algebraicos de María. Con el fin de clarificar el proceso de modelación por parte del equipo se le asignó un color a cada uno par así identificar que realizó cada uno: Berenice (azul), María (verde), Mildred (negro) y Valentín (morado).

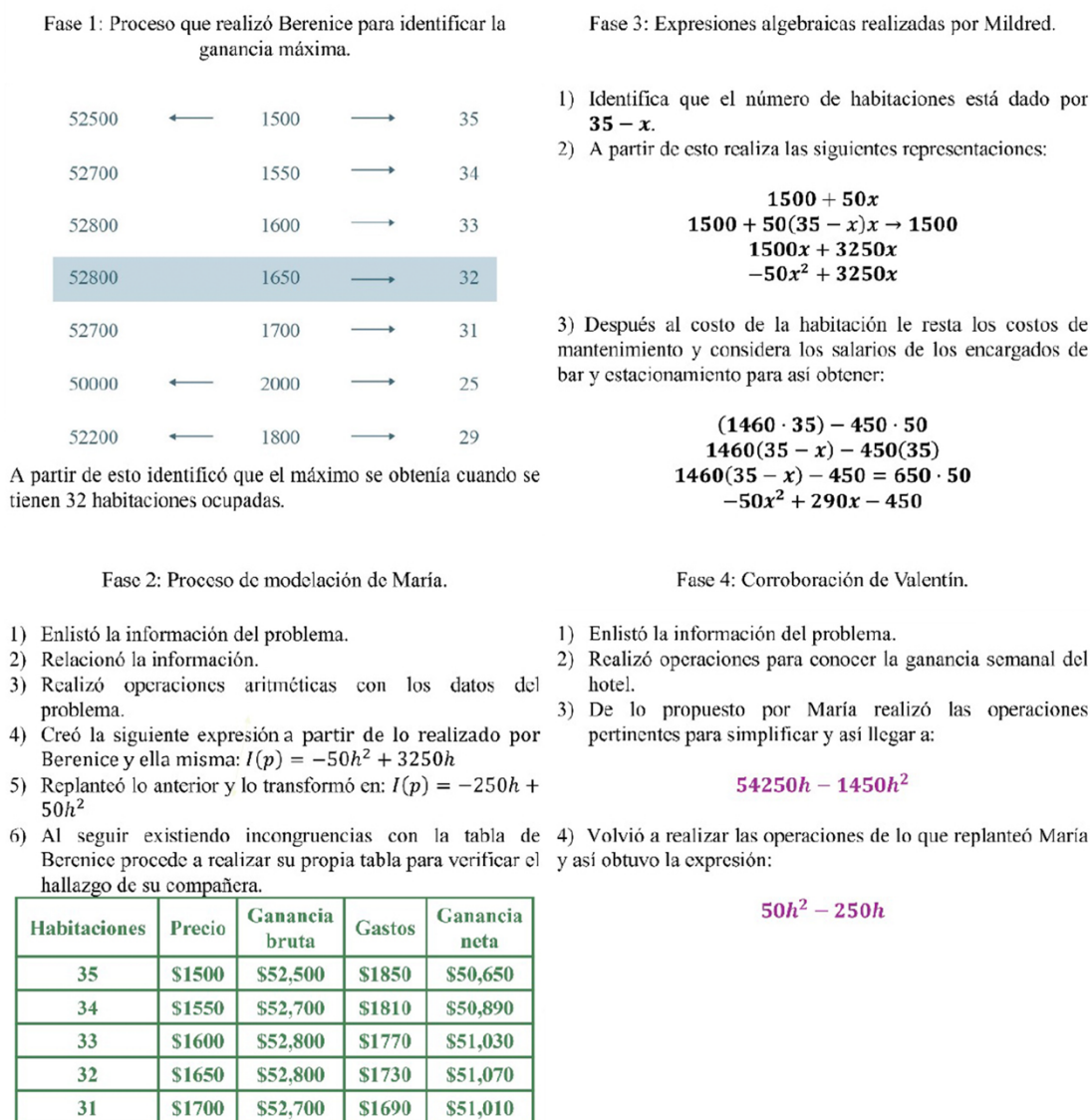


Figura 4.10. Evolución e interacción entre los sistemas conceptuales del equipo 2.

4.4. Proceso de modelación: equipo 3

La presidenta del equipo (Miranda) consideró que su función solo era organizar el trabajo de los demás, y por esta razón, no abordó la situación problemática ni hizo aportaciones sustanciales. En este equipo realizaron una lista de pros y contras para demoler el hotel, indicando las razones por las que se debía mantener en funcionamiento. Los participantes se ubicaron lejos de la instructora, razón por la cual no se cuenta con suficiente información sobre la discusión que llevaron a cabo. A pesar de lo anterior, se observó que no trabajaron en equipo, además de que comentaron cosas ajenas a la MEA y no todos contribuyeron a la solución.

Juan elaboró una tabla de valores para relacionar el número de habitaciones ocupadas y el precio de la habitación. Con base en la información de la tabla propuso diferentes expresiones algebraicas. Posteriormente, Elena (secretaria) refinó las ideas de Juan y redactó la carta para Rebeca. Por otro lado, la cuarta integrante del equipo, Bárbara ayudaba, de vez en cuando, a Elena en la redacción de la carta. Juan mostró sus ideas a sus compañeras y posteriormente se dedicó a comentar ideas ajenas a la MEA con Miranda. De vez en cuando, aparentaban interesarse en la actividad de Elena.

En la lista de pros enumeraron: principal fuente de ingresos de muchas familias, valor histórico importante, precios accesibles respecto otros hoteles de la zona y es céntrico. El único punto en contra que consideraron es que no tiene buena calificación en algunos sitios web sobre hospedajes. Decidieron realizar esta lista para convencerse de que era rentable seguir con el hotel, indicando que se dieron cuenta de que el hotel está bien ubicado en el centro de Pachuca (T3, 55-57). Posteriormente enlistaron datos como: costo de limpieza \$40, sueldo estacionamiento \$250, bar \$200 y denotan por cada $+ \$50 - 1$, es decir, que por cada \$50 que se incrementa en el precio del hospedaje disminuye la ocupación en una unidad. Los participantes mostraron confusión respecto al pago de los encargados del bar y estacionamiento, aunque esto no es un grave error ya que al ser costos fijos no importa si los intercambian. Lo anterior es indicador de falta de atención en la lectura.

Juan elaboró una tabla de valores en la que relacionó el número de habitaciones ocupadas (x) con el precio de la habitación (y), e indicó que x disminuye cuando y aumenta (T3,

9-13). En la primera columna se identificó el precio de las habitaciones (de 1500 hasta 3250) y en la segunda las habitaciones ocupadas (desde 35 hasta 0). Posteriormente, interpretó los datos de la tabla como puntos en plano cartesiano. Por ejemplo, la primera fila ($x = 35$ y $y = 1500$) los consideró como el punto en el plano (35, 1500), y la última fila ($x = 0$ y $y = 3250$) los tomó como (0, 3250) (T3, 17-18). Lo anterior es evidencia de conexiones entre la idea de plano coordenado y datos de una tabla. Juan tuvo la idea de construir la ecuación de una recta a partir de esos puntos (T3, 16-19).

Él escribió la fórmula para calcular la pendiente como $m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$, pero se dio cuenta del error y lo corrigió. Obtuvo que $m = -50$. Posteriormente, intentó construir una función a trozos (T3, 43), lo cual hizo de manera gradual. Al tener la pendiente de la recta decide utilizar la ecuación punto-pendiente, considera nuevamente el punto (0, 3250) y la pendiente para establecer una expresión algebraica que denomina *función por habitación según el costo* (la recta) $f(x) = -50x + 3250$, sin embargo, no se dio cuenta que cometió un error y siguió trabajando con f , la cual representaba el costo del hospedaje en función de las habitaciones ocupadas (T3, 46-47). A partir de ella construyó otra expresión que denominó *función de ingreso según el número de habitaciones*, la cual representó la ganancia al rentar todas las habitaciones y lo que hizo fue multiplicar a f por la variable x (T3, 19-20), obteniendo $f'(x) = -50x^2 + 3250x$ (al parecer se refería a que f es el precio de una habitación y f' la ganancia por todas las que están ocupadas). Mencionó que la función f es sólo para una habitación y es por esto por lo que, la multiplicó por x para así obtener una función que incluyera los ingresos de la renta de todas las habitaciones (T3, 33-38). Él realizó lo anterior con la finalidad de obtener una ecuación cuadrática ajustando su primer modelo algebraico, sin justificar por qué lo hace.

Posteriormente, modificó la regla de correspondencia de f' restando los costos de mantenimiento en función de las habitaciones ocupadas y los sueldos de los empleados (T3, 21-22). A esta última expresión la denominó *función de utilidad según el número de habitaciones*, $g(x) = -50x^2 + 3250x - 40x - 450$, la cual, posteriormente, simplificó a $g(x) = -50x^2 + 3210x - 450$ (Figura 4.11).

$$m = \frac{35 - 0}{1500 - 3250} = \frac{35}{-1750} = -\frac{1}{50}$$

$$m = \frac{1500 - 3250}{35 - 0} = \frac{-1750}{35} = -50$$



$$\begin{aligned} f(x) &= (-50x + 3250) \Rightarrow \text{función por habitación según el costo} \\ f'(x) &= -50x^2 + 3250x \Rightarrow \text{función de ingreso según el no. de habitaciones} \\ g(x) &= (-50x^2 + 3250x) - 40x - 450 \Rightarrow \text{función de utilidad según no. de habitaciones} \\ g(x) &= -50x^2 + 3210x - 450 \end{aligned}$$

Figura 4.11. Proceso de modelación de Juan.

Finalmente, utilizó la fórmula para encontrar el vértice de una ecuación cuadrática y concluyó que la ganancia máxima se obtenía en el punto (32.1, 51,070.5) (T3, 24- 27). Con ayuda de la tabla determinó que se deben de cobrar \$1650 por noche (T3, 28-31). Al conocer una posible solución, los demás integrantes no realizaron intentos adicionales para obtener otras rutas. Después que Juan comentó el proceso de solución con sus compañeras, Elena procedió a la redacción de la carta con ayuda de Bárbara, en la cual se explicaba con detalle el proceso de solución, incluyendo una tabla, además de una gráfica de g . En la Figura 4.12 se indica esquemáticamente el proceso de evolución y refinamiento de los sistemas conceptuales elaborados por este equipo. Como lo realizado por las demás estudiantes no aportaba algo novedoso, en el siguiente esquema solo se colocó lo realizado por Juan (azul) con la finalidad de esclarecer lo que realizó.

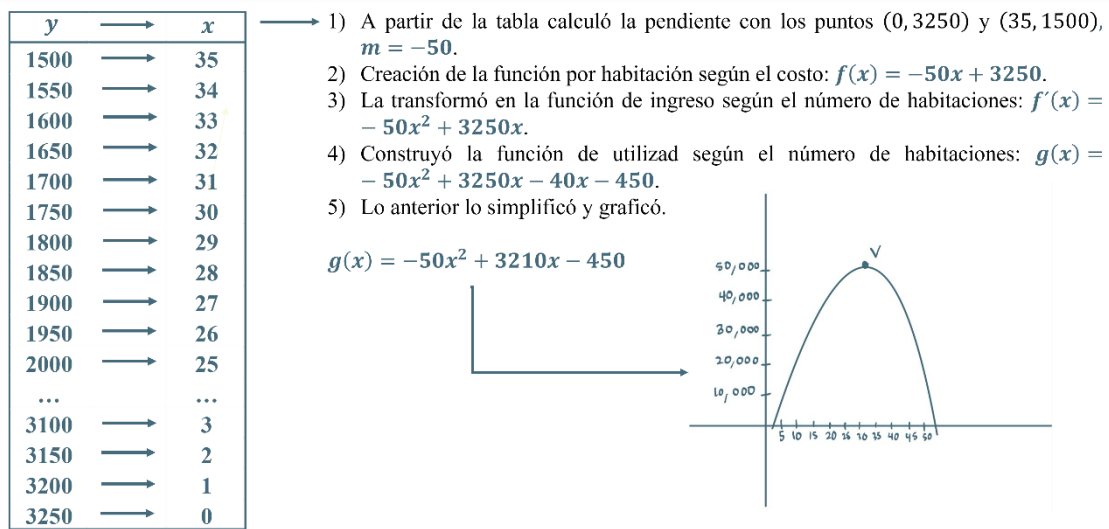


Figura 4.12. Evolución e interacción entre los sistemas conceptuales de Juan.

4.5. Proceso de modelación: equipo 4

Al igual que ocurrió en otros equipos, el presidente y la secretaria no adoptaron las responsabilidades asociadas con su cargo. La secretaria (Lucía), se limitó a copiar una tabla de valores y escribir la contribución de cada integrante del equipo. Por otro lado, a partir de la tabla de valores que creó la presidenta (Fernanda), Dania decidió crear una función que modela la información de la tabla. En este caso tampoco se tiene suficiente información sobre las discusiones que se llevaron al interior del equipo, solo se dispone de lo que mencionan en el reporte final y durante la exposición.

Fernanda listó la información en el enunciado de la tarea. Colocó el número de habitaciones totales y que el hotel cuenta con un bar y estacionamiento, también anotó que por cada \$50 de incremento en el precio del hospedaje, disminuía en una unidad la ocupación del hotel. En una esquina de su hoja sumó todos los gastos que se mencionan previamente (limpieza y salarios); pero no consideró que únicamente se limpian las habitaciones ocupadas, desocupadas o el precio del hospedaje. Posteriormente, propuso expresiones algebraicas, comenzó con $\$1500 \times h$, donde h es el número de habitaciones ocupadas, por lo que, el producto anterior se refería a que simplemente se tenía que multiplicar el precio de la

habitación por el número de habitaciones ocupadas, a un costado de esto realizó la operación $1500(35)$ para así obtener 52,500.

A continuación, propuso la expresión $P = 1500 - x$, donde P denotaba el precio de la habitación, en función de la variable x , sin que explique el significado de esa literal. Después de esto, elaboró una tabla de valores (Figura 4.13), que denominó *Datos de una noche*: en la primera columna colocó el precio de la habitación desde \$1500 hasta \$1850, en la segunda columna el número de habitaciones ocupadas (desde 35 hasta 28), en la tercera columna se encuentran los ingresos (desde \$52,500 hasta \$51,800), en la cuarta columna posicionó los gastos de limpieza, en la cual dejó dos filas de datos incompletas ya que se dio cuenta que en la columna previa obtuvo el máximo, por lo que no completó la columna de limpieza, concluyó escribiendo en el renglón correspondiente a 30 habitaciones rentadas. Por último, en la quinta columna puso los ingresos totales (netos) del hotel, nuevamente dejó las últimas dos filas sin completar, dado que ya identificó en qué punto se alcanza el máximo.

Posteriormente, realizó otra tabla de valores, pero en este caso de manera semanal, esta tabla contó con: en la primera columna se ubican los precios de las habitaciones y van desde \$1500 hasta \$1750, en la segunda columna se encuentran el número de habitaciones, $35 - 30$, lo que se puede observar es que ya no calculó con menos habitaciones ya que en la tabla anterior se dio cuenta dónde se alcanzaba el máximo, con esta tabla buscaba confirmar esto, en la tercera columna coloca los ingresos por noche para así, en la cuarta y quinta, ubicó los ingresos semanales (bruto) e ingresos semanales totales (netos) respectivamente. Después de esta tabla se observó que evalúa la función creada por Dania en el valor de variables igual a dos, de acuerdo con Fernanda tenían que justificar la tabla que creó con una función (T4, 12-23). Finalmente concluyó con la función de Dania (Figura 4.14) evaluada en los puntos 2 y 4, ya que, con lo realizado por Dania, se dio cuenta que el máximo se debía alcanzar en un número cercano a 2.9, por lo que, Fernanda decidió evaluar en los puntos antes mencionados.

Datos de una noche.

Precio	Habitaciones desocupadas	Ingresos	Gastos Lim.	T. Ingresos
\$1500	35	\$52,500	\$1400	\$51,100
\$1650	34	\$52,100	\$1360	\$51,340
\$1600	33	\$52,800	\$1320	\$51,480
\$1650	32	\$52,800	\$1280	\$51,520
\$1700	31	\$52,700	\$1240	\$51,460
\$1750	30	\$52,500	\$1200	\$51,300
\$1800	29	\$52,200		
\$1850	28	\$51,800		

Figura 4.13. Tabla elaborada por Fernanda.

Dania fue la encargada de crear esta función, ella comenzó listando los datos que se proporcionan en el texto. En una esquina de su hoja empezó a construir por partes, una expresión algebraica. Primero, denotó como $ph = \text{precio habitación}$ y $ch = \text{cantidad de habitaciones}$, para así dar paso a $(ph \cdot ch) - 450$, donde 450 son los sueldos de los encargados del estacionamiento y bar. Como se puede observar en la Figura 4.14, Dania le restó al precio de la habitación los \$40 que se pagan por el mantenimiento de cada una de estas cuando se ocupan, entonces los \$1500 del precio de la habitación los transformó en \$1460 cuando restó el mantenimiento. Posteriormente, ella designó $ph = 1460 + 50x$ (precio del hospedaje descontando el costo de limpieza), a esta representación la hizo en función de la cantidad de habitaciones que estén desocupadas. La expresión anterior solamente expresaba el precio en función de las habitaciones desocupadas, pero determinó que esto debía variar de acuerdo con el número de habitaciones ocupadas, por lo que esto lo expresó designando $ch = 35 - x$. Sin embargo, no se dio cuenta que está considerando al costo de mantenimiento como una cantidad fija y no como una variable que depende de las habitaciones ocupadas.

De acuerdo con la construcción de su función tenemos que $ph \cdot ch - 450 = (1460 + 50x)(35 - x) - 450$, después de que simplificó y redujo términos concluye que $ph \cdot ch - 450 = -50x^2 + 290x + 50,650$. Lo anterior lo igualó

a cero para así utilizar la fórmula para encontrar el vértice. Aunque Dania llevó a cabo acciones de forma fragmentada, se puede inferir el procedimiento empleado y sus formas de pensamiento. Obtuvo como resultado una cantidad no entera (2.9), por lo que decidió evaluar la función en $x = 2$ y $x = 3$, y se dio cuenta que en 3 obtiene el máximo, identificado previamente por Fernanda con una tabla de valores, por lo que el precio del hospedaje se puede incrementar en \$150 para generar la ganancia máxima del hotel.

Handwritten work showing the derivation of a quadratic function for profit maximization:

Fixed costs (Precios fijos):

$$\begin{array}{r} 1500 \\ - 40 \\ \hline 1460 \\ - 250 \\ \hline 1210 \\ - 200 \\ \hline 1010 \end{array}$$

Revenue (Precio habitación = P_h , Cantidad de habitaciones = C_h):

$$(P_h \cdot C_h) - 450$$

$$P_h = (1460 + 50x)$$

$$C_h = (35 - x)$$

$$[(1460 + 50x) \cdot (35 - x)] - 450$$

Simplifying (Simplificando queda):

$$-50x^2 - 1460x + 1750x + 51100 - 450$$

$$-50x^2 + 290x + 50650 = 0$$

Evaluating at $x = 2$ and $x = 3$:

$$-50(2)^2 + 290(2) + 50650 = 51030$$

$$-50(3)^2 + 290(3) + 50650 = 51070$$

Figura 4.14. Proceso de modelación de Dania.

Lucía al ser la secretaria del equipo se dedicó a escribir la contribución de cada integrante del equipo y realizó una tabla de valores donde en la primera columna colocó los ingresos por noche, en la segunda el ingreso semanal y en la tercera el pago de bar y estacionamiento, sin embargo, al no especificar a qué número de habitaciones ocupadas se refiere cada cantidad no se comprende qué es lo que trato de hacer con esta tabla.

Finalmente, en la carta entregada (Figura 4.15) intentaron explicar, de manera desorganizada y poco clara, cómo construyeron la función. Iniciaron listando la información del problema, realizando operaciones aritméticas, desarrollando nuevamente la función que construyó Dania para después pasar a tratar de explicar detalladamente cómo llegó a ella mediante una serie de cinco pasos. Primero, consideraron que los salarios de los empleados constituyen un gasto fijo (\$450). En segundo lugar, mencionaron que la

ganancia por habitación es de \$1,460, ya que según Dania a \$1500 se le deben restar los \$40 correspondientes a la limpieza; es decir, no se dieron cuenta que el costo de limpieza es variable. En el tercer paso mencionaron que el hotel tiene 35 habitaciones. En el cuarto paso denotaron a la literal x como las veces en que aumenta el precio (n \$50). Finalmente, en el quinto explicaron que para calcular la ganancia total primero se debía multiplicar la ganancia por habitación por la cantidad de habitaciones y a este producto se le restan los cargos fijos que son \$450 de los sueldos. Procedieron a realizar lo que ya se explicó en el apartado de Dania, pero además de esto añadieron una gráfica de la función (Figura 4.16), pero en el valor máximo colocaron el precio de la habitación con el cual se obtiene este.

Se observó que tienen problemas con la interpretación de la gráfica de una función cuadrática, ya que la función que construyó Dania cuando se evalúa la cantidad de habitaciones desocupadas el resultado que arroja es la máxima ganancia no el precio de la habitación que se debe cobrar para obtenerlo tal y como ellas lo reflejaron en la Figura 4.16.

Querida Rebeca, con el propósito de ayudarte a llevar una buena administración y a obtener el máximo de ganancias posibles en el hotel.

Compartimos algunas ideas que hemos realizado, con el propósito de ayudarte a saber cuando debes cobrar por habitación sin importar que se queden algunas habitaciones vacías, obteniendo así, la máxima ganancia y que los trabajadores del hotel no se queden desempleados.

- La propuesta que le tenemos para solucionar el problema es la siguiente:

\$1500	35 = \$57,500	1) $1460 \cdot 35 - 450 = \$50,650$
\$1500 + 150		2) $(1460 + 50x)(35 - x) - 450 =$
Precio inicial \$1500		3) $-50x^2 - 1460x + 1750 + 51100 - 450$
Gastos:		4) $-50x^2 + 790x + 50,650 = 0$
-40 → limpieza por habitación		5) $-(290) = -2.9$
-250 → Precios fijos		6) $-50(2)^2 + 790(2) + 50,650 = 51,030$
-200 → Salarios de las paseras que atienden el bar y el estacionamiento		7) $-50(3)^2 + 790(3) + 50,650 = 51,070$
		8) $-50(4)^2 + 790(4) + 50,650 = 51,010$

* Se puede aumentar 3 veces o un total de \$150 para generar la ganancia máxima.

- Al tener la propuesta le haremos explicando paso a paso para llegar al costo de cada habitación o cuanto se le puede incrementar al precio inicial para obtener una ganancia máxima

- 1) Primero determinamos que los 250 y 200 pesos siendo este el pago de la persona que se encarga del bar y el estacionamiento da un total de \$450 que es un gasto fijo, no afectado por la cantidad de cuartos ocupados.
- 2) Luego la ganancia por habitación es de \$1460 ya que aunque cobren \$1500 se deduce \$40 de la limpieza.
- 3) Siendo el último dato que hay 35 habitaciones.

4) La x representa la incógnita de cuantas veces aumenta el precio, también sabemos que cada vez que se aumenta el precio es de \$50 por lo que aquí aumentará también cada vez que aumenta el precio se deduce una habitación.

5) Finalmente sabes que para calcular la ganancia total primero se multiplica la ganancia por habitación multiplicado por la cantidad de habitaciones, finalmente el producto de este se le resta el cargo fijo de los \$450.

Teniendo como:

→ Precio por habitación = P_h
→ Cantidad de habitaciones = C_h
la cual se puede formular como

$(P_h - C_h) - 450$ Sustituyendo nuestros datos nos queda.

$P_h = (1460 + 50x)$
 $C_h = (35 - x)$
 $[(1460 + 50x) * (35 - x)] - 450$ Juntando ambas igualdades nos queda de esta manera.

Al desarrollar la ecuación anterior nos da lo siguiente:

$-50x^2 - 1460x + 1750x + 51100 - 450$
Al reducirlo nos da lo siguiente:

$-50x^2 + 790x + 50,650 = 0$

con esto $-(290) = -2.9$

Descubrí que se puede aumentar 2.9 veces el precio original, Sin embargo solo se pueden dar enteros.

Por lo tanto solo se puede aumentar 3 veces o un total de \$150 para generar la ganancia máxima.

Mariana Lugo Muñoz
Leydi Yosseline
Dulce Bionda Menéndez Marcos.

Figura 4.15. Carta que entregaron las integrantes del equipo.

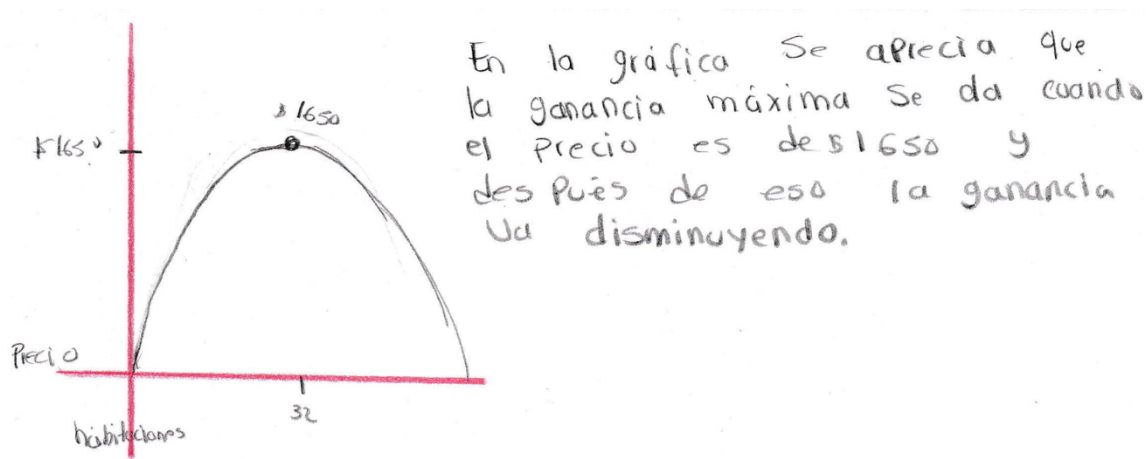


Figura 4.16. Gráfica que añadieron en la carta.

A continuación, se muestra un diagrama que busca resumir el proceso de modelación del equipo, cómo a partir de la discusión construyeron la expresión algebraica que les ayudó a dar solución a la problemática. Aunque mostraron dificultades de comprensión y de comunicación, lograron obtener la respuesta correcta. Con la finalidad de ser claros con el diagrama se le asignó un color a cada estudiante para identificar lo que realizó cada una: Fernanda (negro), Dania (verde) y Lucía (azul).

Fase 1: Proceso de modelación de Fernanda.

- 1) Enlistó la información del problema.
- 2) Realizó las sumas de los salarios.
- 3) Creó una tabla de valores.

Datos de una noche				
Precio	Habitaciones rentadas	Ingresos	Gastos limpieza	Total ingresos
\$1500	35	\$52,500	\$1400	\$51,100
\$1550	34	\$52,700	\$1360	\$51,340
\$1600	33	\$52,800	\$1320	\$51,480
\$1650	32	\$52,800	\$1280	\$51,520
\$1700	31	\$52,700	\$1240	\$51,460
\$1750	30	\$52,500	\$1200	\$51,300
\$1800	29	\$52,200		
\$1850	28	\$51,800		

Fase 2: Transformó su tabla de ingresos y gastos diarios a semanales.

- 1) Realizó las operaciones para obtener los salarios semanales de los encargados de bar y estacionamiento.
- 2) Construyó una tabla de valores con los ingresos semanales.

Precio	Habitaciones	Ingresos por noche	Ingreso semanal	Ingreso semanal total
\$1500	35	\$51,100	\$357,700	\$354,550
\$1550	34	\$51,340	\$359,380	\$356,230
\$1600	33	\$51,480	\$360,360	\$357,210
\$1650	32	\$51,520	\$360,640	\$357,490
\$1700	31	\$51,460	\$360,220	\$357,070
\$1750	30	\$51,300	\$359,100	\$355,950

- 3) Evaluó en la función final de Dania los puntos 2 y 4.

- 1) Enlistó la información del problema.
- 2) Denotó a sus funciones de manera que ella pudiera entenderlas.
- 3) Construyó $ph = \text{precio habitación} = 1460 + 50x$ y $ch = \text{cantidad de habitaciones} = 35 - x$.
- 4) Realizó la multiplicación de la funciones anteriores, simplificó y concluyó que la ecuación que modela la ganancia máxima es:

$$-50x^2 + 290x + 50650 = 0$$

- 5) Finalmente, evaluó la ecuación en los puntos 2 y 3 para así concluir que la ganancia máxima se genera cuando se aumenta tres veces \$50.

Ingreso por noche	Ingreso semanal	Pago de bar y estacionamiento
\$52,100	\$357,700	\$354,550
\$52,340	\$359,380	\$356,230
\$51,480	\$360,360	\$357,210
\$51,520	\$360,640	\$357,490
\$51,460	\$360,220	\$357,070

Figura 4.17. Evolución e interacción entre los sistemas conceptuales del equipo 4.

4.6. Proceso de modelación: equipo 5

En este equipo no se designó explícitamente a un presidente(a) y secretario(a), pero Melissa tomó el rol de presidenta, ya que era la que más participaba y daba indicaciones a sus compañeros. Cada uno de los participantes intentó realizar aportaciones para solucionar la problemática. Discutieron tanto la propuesta de solución como el proceso de redacción de la carta. Los primeros en intentar encontrar una solución fueron Melissa, Iván y Jaime, quienes asistieron puntualmente a la sesión y los únicos en estar desde el inicio de la sesión de trabajo. Aproximadamente, a los 40 minutos llegó Pedro. Melissa e Iván discutían sobre sus avances cada cierto tiempo, mientras que Jaime trabajó solo la mayoría del tiempo. Después de que Pedro terminó con la AC se incorporó con Melissa para trabajar y discutía tanto con ella como con Iván.

Melissa enlistó los datos del problema (35 habitaciones, un estacionamiento, un bar, \$1500 por habitación y se ocupan las 35 habitaciones). Inmediatamente realizó una igualdad sobre cómo variaba el precio de la habitación, $p + 50(1) = 35 - 1$, es decir, si al precio inicial (\$1500) le incrementa una vez \$50, entonces una habitación ocupada disminuye de las 35, a partir de esto conjeturó que el precio de la habitación de manera general se vería de la forma $1500 + 50x = 35 - x$ (Figura 4.18), lo cual utilizó como base para la versión final de esta (T5, 70-72). Después, todo lo pasó al primer miembro de la igualdad para así

tener una igualdad a cero, aunque a pesar de hacer esto comete un error de notación al hacer las operaciones las hace de manera correcta sin que le afecte lo que realizó, es decir, cuando la expresión $35 - x$ la pasó del lado izquierdo de la igualdad obtuvo $1500 + 50x(35 - x) = 0$, no se trasponen correctamente términos al pasar multiplicando de la derecha a la izquierda, pero al realizar las operaciones las hace como si desarrollara un binomio $((1500 + 50x)(35 - x) = 0)$, desarrollando y simplificando obtiene $-50x^2 + 250x + 52500 = 0$. Después consideró los gastos de limpieza que dependen de las habitaciones ocupadas y los gastos de servicios que ofrece el hotel que son \$450, esto siempre se tiene que pagar (T5, 72-73), entonces para los gastos de limpieza consideró $40(35 - x)$ ya que, con lo que se mencionó previamente, Melissa conjeturó que el número de habitaciones ocupadas se ve de la forma $35 - x$, es por eso que tomó en cuenta los gastos de limpieza de esa manera y como siempre se tienen que pagar los servicios de bar y estacionamiento, es decir, son precios fijos, entonces simplemente los restó, en otras palabras, a partir de todas estas consideraciones llegó a la conclusión de que $(1500 + 50x)(35 - x) - [40(35 - x)] - 450 = \text{Ganancia}$ después de que realizó las operaciones pertinentes concluyó que $50650 = 50x^2 - 290x$. Posterior a esto utilizó la fórmula general para encontrar las raíces de la ecuación cuadrática, redondeando resolvió que las raíces son $x = 35$ y $x = 29$. Sin embargo, al momento de la sustitución en la fórmula general cometió errores en los signos, por lo que las raíces no son correctas. Después, empleó la fórmula para encontrar el vértice de la ecuación anterior, para así concluir que la ganancia máxima se da cuando se tienen 32 habitaciones ocupadas (tres desocupadas) y cobrando \$1650 por habitación, también adjuntó una gráfica de la función final, junto con las raíces y vértice de esta.

35 habitaciones
 1 estacionamiento
 1 bar

habitación	ocupadas
\$ 1500	35

$$p + 50(1) = 35 - x$$

$$1500 + 50x = 35 - x$$

$$1500 + 50x - (35 - x) = 0$$

$$52500 + 1750x - 1500x - 50x^2 = 0$$

$$-50x^2 + 250x + 52500 = 0$$

Figura 4.18. Proceso de modelación de Melissa.

Por otro lado, Iván comenzó haciendo lo mismo que Melissa, es decir, enlistó los servicios del hotel (35 habitaciones, un estacionamiento y un bar), después describe que se cobran \$1500 por habitación y que son 35 en total. Realizó un diagrama donde en la primera columna colocó el precio de la habitación que va desde 1500 hasta 1900, en la segunda columna (la cual la conecta con la primera con flechas que van de la primera a la segunda columna) ubicó el número de habitaciones ocupadas y va desde 35 hasta 27. Posteriormente, Iván reflejó que en efecto trabajó en conjunto con Melissa, ya que tiene algo muy parecido a ella (casi lo mismo) y mencionó que al dialogar entre ellos es como llegaron a la conclusión de que las ganancias de las puras habitaciones lo podían ver cómo $(1500 + 50x)(35 - x)$ (T5, 88-92), él lo denotó como $(1500 + 50x)(35 - x) - (40(35 - x)) - 450 = G_T$, con $x = \text{habitaciones no ocupadas}$, después de que simplificó lo anterior concluyó que $-50x^2 + 250x + 50650 = G_T$, con $x \geq 0$. No realizó las operaciones pero se puede deducir que utilizó la fórmula del vértice para la función cuadrática anterior, ya que en su gráfica se observó que el máximo lo obtienen en el punto (2.9, 51070.5), pero como el número de las habitaciones no ocupadas es un número natural, calculó dos puntos, uno antes y otro después de donde se alcanza el máximo, es decir, obtuvo los puntos (2, 51030) y (3, 51070), con estos tres puntos concluyó que la ganancia máxima (

$G_M = 51070$) se da cuando se tienen tres habitaciones desocupadas, lo que equivale a 32 habitaciones ocupadas y esto se da si se cobran \$1650 por habitación, también hizo la anotación de la restricción que debe tener la variable, en este caso es $0 \leq x \leq 35$. Después de esto se encontró un borrador de la carta que se le debía entregar a Rebeca, en esta carta se encuentra la función I que mencionó en la exposición (T5, 84-86), esta función es la misma que G_T , simplemente la renombró como I .

Por su parte, Jaime comenzó de igual manera que Melissa, es decir, denotó el precio de las habitaciones como $(1500 + 50x)$ y el número de habitaciones ocupadas como $(35 - x)$, procedió a crear la función, la cual desarrolló y simplificó para así obtener $Ingreso = -50x^2 + 250x + 52500$, después creó la función de los costos (gastos) del hotel, la cual la definió como $Costo = 40(35 - x) + (250 + 200)$, a partir de las funciones de $Ingreso$ y $Costo$ estableció a la función de las ganancias como una resta de las dos, es decir, $Ganancia = Ingreso - Costo$, realizó las operaciones y simplificaciones necesarias para así concluir que $-50x^2 + 290x + 50650 = 0$ (de acuerdo con lo que se observó, Jaime igualó a cero para así utilizar la fórmula general, sin embargo no lo explica explícitamente), él directamente realizó la igualación a cero para así utilizar la fórmula general de una ecuación cuadrática, con la cual encontró las raíces que son $x_1 = 29.09$ y $x_2 = 34.89$. Sin embargo, cuando sustituyó los valores en la fórmula general cometió un error, en lugar de considerar $C = 50650$, que es el valor de la ecuación que igualó a cero, lo consideró como $C = 52500$ que es el valor de la función $Ingreso$, por lo que, al cometer este error sus raíces son erróneas. Después, tachó algo que es interesante, de acuerdo con las exposiciones, Jaime mencionó que entendió mal y él quería encontrar el valor de x (T5, 121-124), lo cual era correcto, pero se interpretó que él lo estaba viendo de una manera errónea, es por eso que en lo que tacha él intentó despejar la variable x de la ecuación $-50x^2 + 290x + 50650 = 0$ y llega a que $x = 14.52$, en sus despejes también se encontraron errores conceptuales que lo llevan a respuestas erróneas, se comprendió que se dio cuenta de sus errores porque todo eso lo tacha y no lo consideró más adelante. En su segundo intento comenzó nuevamente con la función de $Ingreso$ y

Costo, retomó su función *Ganancia* y la igualó a cero, es decir, trabajó con $-50x^2 + 290x + 50650 = 0$, utilizó la fórmula de vértice y se observó que hizo lo mismo que su compañero Iván, se intuyó que compartieron ideas (ya que es exactamente lo que tiene Iván) y también incluyó la misma gráfica.

Finalmente, Pedro intentó hacer algo diferente, él mencionó que quería que la variable fuera el precio, consideró dos precios de las habitaciones (1500 y 1600), después hace que $x - y(\text{precio}_1) = 35$ y luego planteó otra ecuación, que era $x - y(\text{precio}_2) = 33$, después formuló un sistema de ecuaciones para poder saber quién es x e y (T5, 105-108). Es decir, tomó los datos principales, si se cobran 1500 las 35 habitaciones están ocupadas y si se cobran 1600 solo 33 habitaciones lo están, entonces a partir de estos datos, de acuerdo con lo que se mencionó anteriormente construyó las ecuaciones $x - y(1500) = 35$ y $x - y(1600) = 33$, con estas dos ecuaciones utilizó la Regla de Cramer (Figura 4.19) para así concluir que $x = -65$ y $y = -\frac{1}{50}$. Con estos datos empezó la construcción de su función cuadrática, a los precios que utilizó los pone de manera general como p , entonces sustituyó los valores de las variables, cambió el precio por su nueva variable p y a su vez a todo esto lo multiplicó por p , es decir, $(65 - \frac{1}{50}(p))p$, por el contexto del problema se entendió que quiere ver el precio de las habitaciones de manera general, no intentó hacerlo con un precio en específico es por eso que cambió cualquiera de los dos valores que escogió en un principio por p , sin embargo multiplicó por p sin explicar por qué se puede hacer, pero se comprendió que quería construir la función cuadrática, él sabía que se debía construir una. Posterior a esto le restó $(65 - \frac{p}{50})40$, lo cual se entendió que son los gastos de mantenimiento de cada habitación y también restó los salarios de los encargados de bar y estacionamiento. Obtuvo que $f(x) = (65p - \frac{p^2}{50}) - (2600 - \frac{40p}{50}) - 450$ (se pudo observar que Pedro tiene problemas con el concepto de función, ya que cuando evaluó f lo debía hacer respecto a la variable p sin embargo lo hizo respecto a x , lo cual nos indicó que lo hizo de manera algorítmica sin analizar lo que estaba haciendo) esta función la derivó, igualó a cero y concluyó que el máximo se alcanza en $p = 1645$.

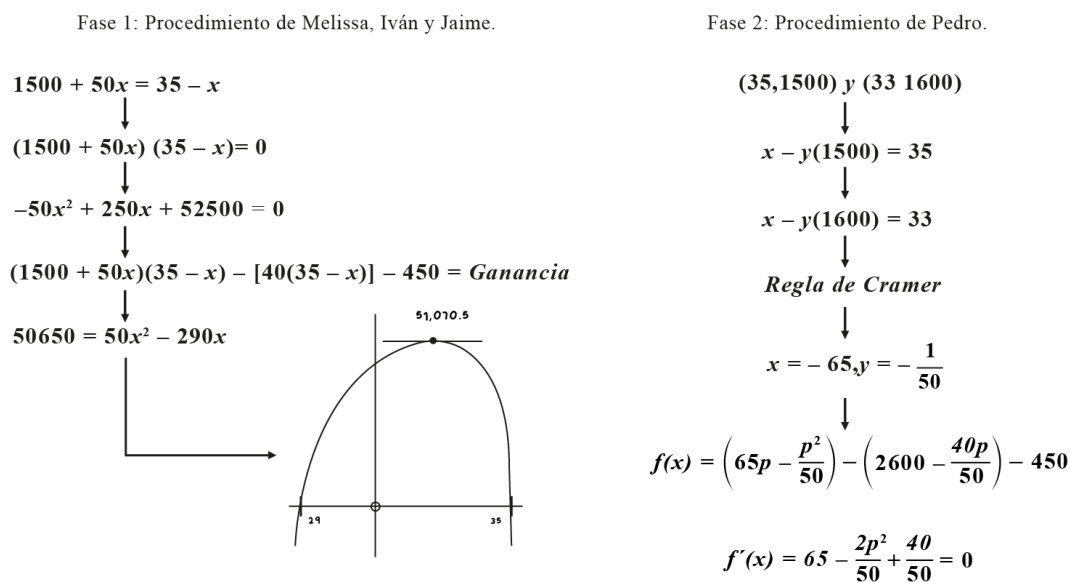
$$\begin{aligned}
 X - Y(1500) &= 35 \\
 X - Y(1600) &= 33 \\
 \left(\left(65 - \frac{1}{50} P \right) \right) P \\
 \left(\left(65P - \frac{P^2}{50} \right) P \right) - \left(65 - \frac{P}{50} \right) 40 - 450 \\
 F(x) &= \left(65P - \frac{P^2}{50} \right) - \left(\frac{2600 - 40P}{50} \right) - 450 \\
 \begin{vmatrix} 1 & -1500 \\ 1 & -1600 \end{vmatrix} &= -100 \\
 \begin{vmatrix} 35 & -1500 \\ 33 & -1600 \end{vmatrix} &= -6,500 \quad X = -65 \\
 \begin{vmatrix} 1 & 35 \\ 1 & 33 \end{vmatrix} &= -2 \quad Y = -\frac{1}{50} \\
 F(x) &= 65 - \frac{2P}{50} + \frac{40}{30} = 0 \quad P = \frac{1645}{\text{Maximo}}
 \end{aligned}$$

Figura 4.19. Proceso de modelación de Pedro.

Él mencionó que después evaluaron la función y vieron que obtenían el mismo resultado, es decir, cuando evaluaron esta función respecto al precio les daba lo mismo que en la ganancia con la función I , entonces al obtener lo mismo concluyeron que ambas funciones eran correctas ya que con dos “métodos” diferentes les daba exactamente el mismo resultado y así concluyeron que estaban en lo correcto (T5, 109-112). Nota: en una de las hojas de Pedro se encontró la derivada de la función I , es decir, no lo tienen formalmente en una de sus hojas de trabajo, pero si lo realizan ya en la carta, se intuyó que para no perder tiempo solo hicieron la cuenta en una hoja suelta para proceder a hacerlo de manera formal en la carta.

Después de discutir entre ellos decidieron solamente incluir en la carta la construcción de la función I , en su carta mencionaron que proponen una estrategia basada en un análisis

detallado de precios y ocupación, ya que los trabajadores indicaron que el hotel alcanzaba su cupo lleno si se cobran \$1500 por habitación, esto lo consideraron como precio base. Realizaron la descripción de la construcción de su función, la cual derivaron, igualaron a cero y así obtuvieron que $x = 3$ es el número de habitaciones desocupadas y que convenía cobrar \$1650 por habitación para así obtener la ganancia máxima. A continuación, se presenta un diagrama que resume el proceso de modelación que se llevó a cabo dentro de este equipo. En el diagrama solo se muestra el proceso de modelación de Melissa ya que los procesos de Iván y Jaime son esencialmente lo mismo. También se añadió el proceso que siguieron en su carta donde explican con mayor detalle lo que no está explícito en sus borradores, pero que mencionaron en su exposición. Aunque en esta incluyeron la expresión algebraica que Iván renombró como I , la cual es la misma que creó Melissa y con la cual Pedro comparó su método.



Fase 3: Procedimiento que siguieron en la carta.

- 1) Denotaron a la variable x como la cantidad de habitaciones vacías o los incrementos de \$50 en su precio base.
- 2) Obtuvieron la expresión inicial $(1500 + 50x)(35 - x)$, donde $35 - x$ representa la cantidad de habitaciones ocupadas.
- 3) Mencionaron que a las ganancias totales se les debe restar el costo de limpieza $40(35 - x)$ y los sueldos.
- 4) Construyeron la función $I = -50x^2 + 290x + 50650$ con $0 \leq x \leq 35$.
- 5) Para obtener el ingreso máximo derivaron, igualaron a cero y despejaron el valor de la variable para concluir que $x = 3$.

Figura 4.20. Evolución e interacción entre los sistemas conceptuales del equipo 5

4.7. Comparativo del trabajo de los equipos

Este análisis comparativo se llevó a cabo mediante la síntesis de la información relevante en la Tabla 4.18. Se consideraron las filas representación, definición de la variable, función que representa el modelo, estrategia de optimización, coherencia, respuesta e influencia contextual como la información más relevante para hacer este análisis, esta tabla se elaboró combinando dos ideas del análisis de la información que son: Aliprantis y Carmona (2003) y Ekmekci (2013). Aunque se identificaron tablas y análisis parecidos en Ekmekci (2013) y Dominguez (2010), al revisar ambos artículos se decidió solo considerar el análisis comparativo que hizo Ekmekci y la forma en que categorizó la información ya que se entendía mejor lo que había hecho el autor.

Equipo	1	2	3	4	5
Representación	TX, AL, T, G, V, K	TX, AL, T, V, G, K	TX, T, AL, G, V	AR, TX, AL, G, T, V, K	TX, AL, V, K
Definición de la variable	x1	x1	x1	x2	x3
Función que representa el modelo	F1	F2	F1	F3	F4
Estrategia de optimización	GRA, TAB	VER	VER	VER, GRA	DER
Coherencia	Sí	No	Sí	Sí	No
Respuesta	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Influencia contextual	  	   	   	 	   

TX: textual
AL: algebraico
T: tabular
G: gráfico
AR: aritmético
V: verbal
K: kinestésico

x1= número de habitaciones ocupadas (por día)
x2= veces que aumenta el precio
x3= cantidad de habitaciones vacías

$$(F1) G(x) = -50x^2 + 3210x - 450$$

$$(F2) G(x) = -50h^2 + 3200h$$

$$(F3) -50x^2 + 290x + 50650 = 0$$

$$(F4) I = -50x^2 + 290x + 50650$$

GRA: Uso de la gráfica para obtener el vértice
TAB: Uso de una tabla de valores
VER: Uso de la fórmula del vértice
DER: Uso de la derivada para determinar un punto máximo

: términos del campo de la economía
: términos matemáticos
: términos de hotelería

: cuestionan los supuestos de la actividad
 : pros y contras
: historia y cultura

Figura 4.18. Síntesis de resultados

4.8. Autoevaluación y cuestionario anónimo

Con el objetivo de analizar la experiencia de los estudiantes durante la implementación de la MEA *Administración del Gran Hotel de Pachuca*, se implementaron dos instrumentos: una *autoevaluación* y una *encuesta de satisfacción anónima*, cuyos objetivos se describen al final de la sección 3.4 de esta tesis. La autoevaluación permitió a los estudiantes reflexionar sobre su proceso de modelación, identificando fortalezas y debilidades en su trabajo. A través de este instrumento, se pudo observar cómo valoraban su comprensión del problema, la precisión de sus modelos y su participación como integrantes del equipo. Tal y como se observa en la Figura 4.19, de acuerdo con la escala Likert que se utilizó en la autoevaluación, a cada palabra se le dio un número para poder realizar los promedios, para la respuesta muy bien se le asignó el número cuatro, para bien el número tres, para neutral el número dos y para malo el número uno, también a cada pregunta se le asignó una palabra que caracteriza a grandes rasgos la pregunta, la pregunta dos y cinco al referirse a algo parecido ambas se englobaron en una sola palabra. De acuerdo con la Figura 4.19 la mayoría de los estudiantes consideran que tanto su desempeño individual y en equipo, como el modelo que crearon y que utilizaron finalmente oscilan entre buenos y muy buenos.

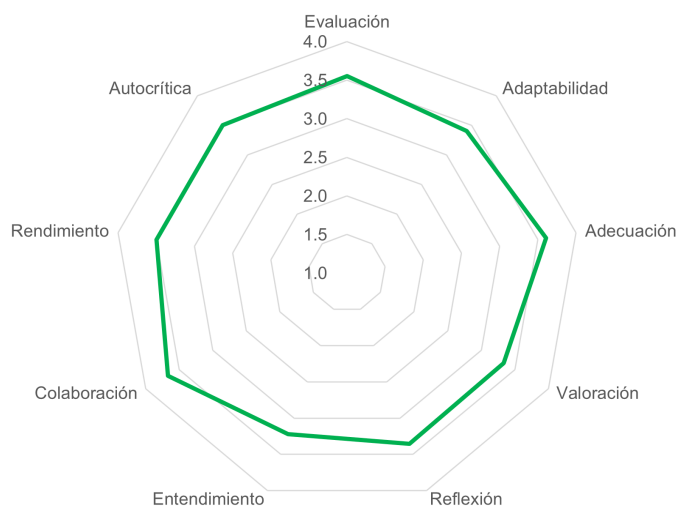


Figura 4.19. Resultados de la autoevaluación

Por otro lado, la *encuesta de satisfacción anónima* brindó información clave sobre la percepción general de la actividad. Se les preguntó a los estudiantes cómo les había parecido la experiencia, qué aspectos encontraron interesantes y si consideraban que la actividad promovió el desarrollo del pensamiento crítico y/o creativo. Además, se indagó sobre el impacto que tuvo en su aprendizaje de las matemáticas. En este apartado, se presentan los resultados obtenidos a partir de estos instrumentos y las respuestas al cuestionario reflejan la experiencia de los estudiantes en el proceso de modelación matemática.

Para analizar la información de los dos instrumentos se realizaron *nubes de palabras*, las cuales, por cuestiones de extensión del trabajo se colocaron como apéndice (Apéndice F). Con respecto a la opinión de los estudiantes sobre la actividad, comentaron que les pareció buena y entretenida, ya que se les permitió trabajar en equipo, discutir entre ellos posibles soluciones o métodos, también les gustó porque tuvieron que razonar y comprender la situación que se les planteó y no simplemente realizar cálculos para obtener una respuesta numérica, también el hecho de que fuera una situación cercana a su vida cotidiana les ayudó a conectar con la problemática y así interesarse por darle una respuesta correcta.

Al ser una situación hipotética, la cual pudiese estar cerca de una real, los participantes consideraron que este era uno de los aspectos más atractivos de la actividad, incluso algunos estudiantes mencionaron que podría ser un problema que en verdad podrían encontrar y que al ser sobre un hotel de la ciudad de Pachuca de Soto les permitió adentrarse en la historia. De acuerdo con Barrera y Santos (2002) un contexto hipotético se basa en suposiciones sobre el comportamiento de variables o parámetros que explican una situación, este comportamiento no se fundamenta en datos reales, sin embargo, el análisis matemático de la situación permite utilizar diversas representaciones y estrategias. También les pareció atractiva porque había diferentes formas de solucionar la problemática, lo que les permitió darse cuenta de que, aunque los modelos parecen diferentes, al final de cuentas permitían obtener las mismas conclusiones. Por otro lado, los estudiantes sugieren que se deberían aplicar más actividades de este tipo, ya que el proceso de discusión les permitió conocer las formas de pensar de sus compañeros.

En lo que respecta al desarrollo de un pensamiento creativo o crítico la mayoría de los estudiantes consideran que la actividad sí lo promovió, ya que al tener diferentes maneras de pensar o diferentes puntos de vista lograron crear diferentes métodos para darle solución al problema del hotel, también mencionan que se debe tener ingenio para crear soluciones no numéricas, como también buscar más información sobre el hotel para dar una solución más robusta, consideran que la actividad promovió un desarrollo de pensamiento crítico porque la actividad los llevó a razonar sus soluciones, analizar con detalles los datos que se les proporcionaron, también mencionan que tenían que pensar en otros factores para darle solución y que debían buscar una manera óptima para resolver el problema. Por último, para la cuarta pregunta todos los estudiantes respondieron que la actividad sí apoya el aprendizaje de las matemáticas.

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

5.1. Introducción

En este capítulo se da respuesta a la pregunta de investigación y se lleva a cabo el proceso de discusión, el cual consiste en comparar los resultados de este trabajo con los obtenidos en las investigaciones previas que se revisaron en el primer capítulo. A continuación, se exponen los alcances y limitaciones del trabajo, es decir, se reflexiona sobre cuáles son los posibles aportes de la investigación en la línea de investigación a la que pertenece el trabajo, o los aportes que los resultados pueden brindar a la práctica educativa. También se identifican las posibles cosas que se podrían mejorar y las posibles recomendaciones para avanzar en la misma ruta de investigación. Para concluir se realizan algunas reflexiones finales, relacionadas con los aprendizajes que la autora del trabajo desarrolló durante la elaboración de la tesis.

5.2. Respuesta a las preguntas de investigación

La pregunta de investigación que orientó el desarrollo de este trabajo es ¿cuáles son las características de los modelos generados por estudiantes de primer semestre de una licenciatura en matemáticas al abordar la MEA denominada *Administración del Gran Hotel de Pachuca*?

Principalmente, el análisis del proceso de modelación de los estudiantes reveló que, si bien la mayoría logró construir modelos matemáticos para representar los ingresos y costos del hotel, el camino que tomaron varió significativamente. En particular, se identificaron tres estrategias principales: a) el uso de una tabla de valores para identificar tendencias, b) la aplicación directa de fórmulas algebraicas sin una interpretación conceptual clara y c) la construcción y refinamiento iterativo del modelo con base a discusiones y errores previos. Además, las principales representaciones que realizaron los estudiantes fueron de tipo algebraico seguidas de las representaciones tabulares, gráficas y aritméticas. Sin embargo, aunque se presentan los modelos textuales, verbales y kinestésicos estos no se dieron en primer lugar, ya que el textual se dio en el momento de redactar la carta y se observó que a los estudiantes les cuesta comunicar sus ideas de manera clara y precisa. Además, 13 de 19

estudiantes consideraron que para dar respuesta a un problema de este estilo se debe de generar una expresión algebraica, el resto consideraba suficiente crear una tabla de valores o hacer operaciones aritméticas para identificar dónde se obtenía el máximo.

Se identificó que 8 de los 13 estudiantes que crearon una expresión algebraica utilizaron la fórmula del vértice para encontrar el máximo de su ecuación, esto último fue debido a su experiencia previa en su curso de geometría. Sin embargo, su razonamiento estuvo fuertemente basado en las tablas de valores, confiando más en estos datos empíricos que en las representaciones algebraicas construidas. También se observó que los estudiantes aplicaban operaciones, como la multiplicación por x , sin cuestionar su pertinencia, simplemente utilizándose cuando parecía conveniente. Esto refleja una mecanización del proceso algebraico sin una comprensión profunda de su aplicación. Además, dado que los estudiantes tienden a expandir y reducir expresiones algebraicas sin evaluar su necesidad, se recomienda enfatizar en la enseñanza de cuándo y por qué aplicar ciertas operaciones. Un hallazgo relevante es que la mayoría de los estudiantes fueron capaces de transitar entre distintos tipos de representaciones: algebraica, tabular, gráfica y aritmética. Esta flexibilidad les permitió abordar la problemática desde diferentes perspectivas y validar sus respuestas a través de múltiples enfoques. Además, que la organización sistemática de datos y las operaciones aritméticas les ayudaron a crear sus representaciones algebraicas.

La discusión entre los integrantes permitió que al menos un miembro por equipo mejorará su modelo, lo que favoreció a la construcción de representaciones más precisas del problema. El hecho de que los estudiantes tuvieran que exponer sus resultados propició la creación de nuevos modelos que no estaban en las hojas que entregaron en la sesión anterior, lo que sugiere que la reflexión y la creación de su presentación influyeron en la evolución de su pensamiento matemático.

Por otro lado, es importante fomentar estrategias para mejorar el trabajo en equipo y la organización en actividades de modelación matemática, ya que en este trabajo el trabajo en equipo fue fundamental para la creación y refinamiento de los modelos matemáticos creados por los estudiantes. Aunque el trabajo en equipo favorece la mejora de los modelos, se identificaron dificultades en la organización de roles, la toma de decisiones y el

seguimiento de indicaciones. Esto sugiere la necesidad de promover estrategias específicas para fortalecer la colaboración en entornos matemáticos. También es importante mencionar que la AC generó un mayor nivel de involucramiento por parte de los estudiantes, al hacerles creer que la situación era real. Esto los motivó a investigar más sobre el hotel y a profundizar en el análisis de la problemática. De acuerdo con las cartas entregadas por los estudiantes para Rebeca se observó que todos los equipos consideraron que un modelo debe estar dado en términos algebraicos. Además, que en todos los equipos los modelos iniciales tuvieron un proceso de mejora y refinamiento.

5.3. Discusión

Estos hallazgos coinciden con investigaciones sobre modelación matemática en educación secundaria (Aliprantis y Carmona, 2003), en la que se observó que cuando los estudiantes trabajan con actividades donde no se les pide que den una respuesta en específico utilizan lo que consideran más apropiado para la tarea que deben desarrollar. Aunque los estudiantes de secundaria no sabían cómo escribir su idea en matemáticas formales, podían comunicarlas creando sus propias representaciones. Además, observando los procedimientos matemáticos reportados en la misma investigación se puede ver que los estudiantes prefieren “multiplicar el precio de la habitación por el número de habitaciones ocupadas, multiplicar el costo de mantenimientos por el número de habitaciones ocupadas, restar el costo de mantenimiento del costo total de habitaciones ocupadas”, estos procedimientos también fueron implementados por los estudiantes de nuevo ingreso a matemáticas aplicadas, solo que en este caso ellos utilizaron variables y funciones. Sin embargo, a diferencia de lo reportado por Dominguez (2010) y Ekmekci (2013), donde la mayoría de los estudiantes mostraban una tendencia a seguir un enfoque de optimización predominante (derivada), en este estudio se observó que la mayoría de los estudiantes optaba por la fórmula del vértice y solamente un equipo utilizó la derivada para optimizar su función.

Además, sus conocimientos previos (curso de geometría) fueron de gran ayuda al momento de la construcción de sus modelos matemáticos (gráficas, tablas y expresiones algebraicas), Vargas et al. (2016) menciona que con base a los conocimientos previos de los estudiantes y

de acuerdo con la interpretación que dieron pudieron representar sus soluciones mediante tablas y gráficas. Por otro lado, Alvarado et al. (2017) mencionan que este tipo de actividades se pueden abordar desde el conocimiento informal de los participantes ya que no se requiere de un conocimiento previo en específico y es por esto que el surgimiento de modelos es constantemente revisado y refinado. Al igual que en la investigación de Montero y Vargas (2021) se observó que, en al menos nueve estudiantes, sus sistemas conceptuales evolucionaron, las interpretaciones y descripciones que en un principio eran cualitativas (o solamente representaciones de la información) se ampliaron para llegar a una descripción cuantitativa, es decir, se identificaron variables, la relación entre las mismas y así los estudiantes lograron dar sentido a estas cantidades numéricas para llegar a una representación gráfica o algebraica.

Por otro lado, la importancia del trabajo en equipo coincide con investigaciones como Aviña et al. (2019) donde mencionan que se observó un proceso de desarrollo de conocimiento acorde con las interacciones con el entorno que experimentaron los estudiantes con sus compañeros y el grupo, además durante estas interacciones desarrollan sistemas conceptuales que les permiten describir, comunicar, predecir el comportamiento de la situación (Lesh y Doerr, 2003); Alvarado y Olvera (2020) mencionan que la socialización fue un espacio que favoreció el análisis, la confrontación y la reflexión de las ideas, incluso aquellas que conducían a un conocimiento erróneo, lo que les permitió refinar sus modelos, en el caso de esta investigación se identificó que los estudiantes, al socializar de manera en equipo pudieron compartir sus ideas, discutir lo realizado por cada uno de los integrantes del equipo para así reflexionar sobre lo realizado y construir una solución que solucionara lo que pedía Rebeca, aunado a esto, Aguilar (2021) menciona que se observó que los estudiantes disfrutaron del trabajo colaborativo y las oportunidades que tuvieron para externar sus pensamientos, además esto también se detectó en las repuestas que dieron en el cuestionario anónimo donde mencionaron que el trabajo en equipo y la oportunidad que tuvieron de compartir sus ideas les fue de ayuda y les gustó la dinámica de la actividad.

La actividad de calentamiento favoreció la interpretación de la MEA y el involucramiento por parte de los estudiantes en la problemática, a diferencia de lo reportado por Irigoyen et

al. (2021), donde la AC que implementaron en su primer ciclo generó una mala interpretación de la situación contextualizada y acotó las posibilidades en cuanto a la diversidad de soluciones. En la investigación anterior, al igual que en la desarrollada con esta tesis los estudiantes reconocen al contexto como algo que tiene sentido en el mundo real, lo cual incidió en el interés e involucramiento de los participantes.

A diferencia de los resultados obtenidos por Dominguez (2010) y Ekmekci (2013), donde la mayoría de los estudiantes intentaron generalizar sus funciones principales, en esta investigación sólo hay evidencia escrita de un estudiante intentando realizar una generalización (precio de la habitación). Aunque, en las exposiciones algunos estudiantes mencionaron que la misma función que crearon funcionaba si es que se modificaban los datos del problema.

Además, el proceso de modelación no fue lineal, ya que los estudiantes tuvieron confusiones entre las variables (por ejemplo, interpretar x cómo habitaciones desocupadas en lugar de ocupadas u olvidar que denotaba su variable) y la omisión inicial de que los costos dependen de la ocupación de las habitaciones. Estas dificultades reflejan desafíos comunes en la modelación matemática, donde la transición entre el contexto real y el modelo simbólico no siempre es inmediata. El equipo cinco, por ejemplo, mostró un enfoque exploratorio, probando distintas formas de modelar el problema antes de llegar a una solución coherente. Este comportamiento sugiere la disposición de revisar y corregir errores, el cual es un factor importante en el éxito del proceso de modelación.

5.4. Alcances y limitaciones de la investigación

Los resultados de este estudio resaltan la importancia de diseñar actividades de modelación que permitan a los estudiantes reflexionar sobre las decisiones y ajustar sus modelos. Además, sugieren que proporcionar oportunidades para la discusión en grupo puede ayudar a superar dificultades conceptuales, como la correcta interpretación de variables y la relación entre expresiones algebraicas y el contexto del problema.

Una limitación de este trabajo es que se enfocó en un solo problema de modelación enmarcado en un contexto específico. No se analizaron diferencias individuales más allá de

la estrategia que utilizó cada estudiante, por lo que futuras investigaciones podrían profundizar en cómo influyen factores, como la experiencia previa en matemáticas, sobre el proceso de modelación de situaciones contextualizadas. El problema del hotel tiene una estructura específica que guía implícitamente el razonamiento de los estudiantes. Si se utiliza otro tipo de problema los patrones de modelación podrían cambiar. Aunque se identificaron tendencias generales, cada estudiante tiene una trayectoria de aprendizaje distinta.

La forma en que modelan depende de su experiencia previa, por lo que los resultados podrían no ser generalizables a otros grupos con diferentes antecedentes matemáticos. Si bien se observó cómo los estudiantes construyeron sus modelos, podría profundizar en cómo piensan sobre sus propios procesos de modelación. Esto requeriría entrevistas a profundidad o protocolos de pensamiento en voz alta. No se analizó si los estudiantes retuvieron o transfirieron lo aprendido a otros contextos matemáticos. Sería interesante evaluar si, al abordar una secuencia de MEA, muestran mayor seguridad en la modelación o siguen enfrentando dificultades similares.

Aunque se observó que el trabajo en equipo influyó en el refinamiento de modelos, no se controlaron variables como la dinámica de liderazgo, la distribución de roles o las diferencias en el nivel de participación de cada miembro. Se observó que muchos estudiantes creen que un modelo debe incluir expresiones algebraicas. Sin embargo, no se exploró en profundidad qué tan conscientes son de la utilidad de otros enfoques (gráfico, tabular, verbal, textual, etc.) en diferentes situaciones. Por último, la falta de claridad en la expresión escrita y oral de los estudiantes podría haber afectado la interpretación que se hizo sobre sus formas de pensar; por lo cual el fomento de habilidades para comunicar ideas con precisión es un aspecto que merece atención.

5.5. Reflexiones finales

El proceso de elaboración de esta tesis no solo presentó un desafío académico, sino también una oportunidad invaluable de aprendizaje sobre la práctica docente y la enseñanza de las matemáticas desde un enfoque de modelación. A lo largo del estudio, analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes me permitió comprender más a fondo cómo es que

pensaban los estudiantes y lo que intentaban modelar con sus producciones. Uno de los aprendizajes más significativos fue la manera en que los estudiantes construyen, refinan y evalúan modelos matemáticos. Observar sus errores, ajustes y estrategias me permitió valorar la importancia del pensamiento crítico en el proceso de modelación.

Desde una perspectiva docente, este proceso me llevó a reconocer la relevancia de diseñar actividades que fomenten la creatividad y la autonomía en la resolución de problemas. La modelación matemática, enmarcada en la perspectiva de Lesh y Doerr, demostró ser un enfoque que no solo facilita la comprensión de conceptos matemáticos, sino que también impulsa el trabajo colaborativo, la argumentación y la validación de ideas dentro del aula. Asimismo, la recopilación y el análisis de datos provenientes de la autoevaluación y los cuestionarios de los estudiantes me hicieron reflexionar sobre la importancia de la percepción estudiantil en la enseñanza. Comprender cómo los estudiantes valoran su propio aprendizaje y cómo interpretan los desafíos matemáticos me permitió reafirmar la necesidad de un enfoque más centrado en el estudiante, donde la enseñanza no solo se enfoca en el resultado final, sino en el proceso de construcción del conocimiento.

Finalmente, esta tesis resalta la importancia de diseñar y aplicar tareas que fomenten experiencias de aprendizaje en los estudiantes, no solo construir modelos, sino también cuestionar, validar y refinar sus representaciones. La modelación no es un proceso lineal, sino un ciclo de exploraciones y ajustes continuos. En este sentido, futuras investigaciones podrían centrarse en cómo estos procesos evolucionan a lo largo del tiempo y en diferentes contextos matemáticos, así como en el desarrollo de estrategias didácticas que faciliten la transición fluida entre distintas representaciones matemáticas. Como producto de esta investigación, se propone un diagrama del proceso de solución, el cual puede servir como referencia para comprender cómo los estudiantes construyen y refinan sus modelos matemáticos, así como la interacción que hay entre los integrantes de cada equipo o su proceso de discusión. Además, se identificaron los modelos principales utilizados en el proceso de modelación como: tabular, gráfico y algebraico, así como los modelos auxiliares, como el aritmético, textual, verbal y kinestésico.

REFERENCIAS

- Ärleback, J. B., Doerr, H. M., & O'Neil, A. H. (2013). A modeling perspective on interpreting rates of change in context. *Mathematical thinking and learning*, 15(4), 314–336. <https://doi.org/10.1080/10986065.2013.834405>
- Ärleback, J. B. (2020). Moving beyond descriptive models: Research issues for design and implementation. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17, 5–20. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.307>
- Aguilar–Barrera, M. E., Gutiérrez–Pulido, H. & Vargas–Alejo, V. (2023). Diseño y refinamiento de una actividad provocadora de modelos enfocada a resolver un problema del ámbito de la construcción. *Revista de Educación y Desarrollo*, 64, 43–52. <http://bit.ly/4gua7aE>
- Aguilar, J. J. (2021). Modeling through Model-Eliciting Activities: An analysis of models, elements, and strategies in High School. The cases of students with different levels of achievement. *Mathematics teaching research journal*, 13(1), 52–70. <https://bit.ly/3O6qsXh>
- Aliprantis, C. D. & Carmona, G. (2003). Introduction to an economic problem: a models and modeling perspective. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.) *Beyond constructivism: Models and Modeling perspectives on mathematics problem solving, Learning, and Teaching* (pp. 255–264). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. <https://bit.ly/40QnihI>
- Alvarado–Monroy, A., Olvera–Martínez, C., Mata–Romero, A. & Escobedo–Bustamante, A. (2017). Secuencia de desarrollo de modelos para la enseñanza y el aprendizaje multinivel e interdisciplinario. En A. Alvarado–Monroy, G. Carmona–Domínguez & A. Mata–Romero (Eds.), *Tópicos selectos de Educación en CITEM T-I. Red internacional de investigación Campus Viviente de educación en ciencias ingeniería-tecnología y matemáticas* (pp. 13–31). ECORFAN. <https://bit.ly/3O6uTkT>

- Alvarado–Monroy, A. & Olvera–Martínez, M. C. (2020). Teacher's actions to promote productive mathematical discussions in a context of modeling and cryptography. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(1), 185–213. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i1p185-213>
- Aviña–González, M. J., Vargas–Alejo, V., Alvarado–Monroy, A. & Cristóbal–Escalante, C. (2019). Ciclos de entendimiento de estudiantes universitarios al resolver una actividad de proporcionalidad. *CPU-e. Revista de Investigación Educativa*, 29. <https://doi.org/10.25009/cpue.v0i29.2633>
- Barrera–Mora, F. & Santos–Trigo, M. (2002). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional: formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas* (pp. 166–185). <https://repository.uaeh.edu.mx/bitstream/handle/123456789/11370>
- Carmona, G. & Greenstein, S. (2009). Investigating the relationship between the problem and the solver: Who decides what math gets used? En R. Lesh, P.L. Galbraith, C.R. Haines, & G. Kaiser (Eds.) *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 245–254). Springer. <https://bit.ly/4gPtb3r>
- Carmona, G., Galarza–Tohen, B. & Martínez–Medina, G. (2022). Exploring interactions between computational and critical thinking in Model-Eliciting Activities through epistemic network analysis. En: Wasson, B., Zörgö, S. (Eds) *Advances in Quantitative Ethnography. ICQE 2021. Communications in Computer and Information Science*, vol 1522. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-93859-8_23
- Common Core State Standards Initiative [CCSSI] (2022). *Common Core State Standards for Mathematics*. USA: CCSSI. <https://bit.ly/3AGUE8j>
- Dominguez, A. (2010). Single solution, multiple perspectives. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling*

competencies (pp. 223–233). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_19

- Eisenhart, M. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education researchers. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 202–219). PME–NA. <https://bit.ly/4hSuvDt>
- Ekmekci, A. (2013). Models and modeling in mathematics education: Making learners' mathematical thinking, knowledge and skills visible. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 12(1–2), 57–76. <https://bit.ly/3CmW08x>
- English, L., Fox, J. & Watters, J. (2005). Problem posing and solving with mathematical modeling. *Teaching children mathematics*, 12(3), 156–163. <https://www.jstor.org/stable/41198683>
- Farrokhi, F. & Mahmoudi-Hamidabad, A. (2012). Rethinking convenience sampling: defining quality criteria. *Theory and Practice in Language Studies*, 2(4), 784–792. <https://doi.org/10.4304/tpls.2.4.784-792>
- Freudenthal, H. (1993). Thoughts in teaching mechanics didactical phenomenology of the concept of force. *Educational Studies in Mathematics*, 25(1–2), 71–87. <https://doi.org/10.1007/BF01274103>
- Guerrero–Ortiz, C. & Borromero–Ferri, R. (2022). Pre-service teachers' challenges in implementing mathematical modelling: Insights into reality. *PNA*, 16(4), 309–341. <https://doi.org/10.30827/pna.v16i4.21329>
- Guler, G., Sen, C., Ay, Z. S., & Ciltas, A. (2019). Engineering skills that emerge during Model-Eliciting Activities (MEAs) based on 3D modeling done with mathematics preservice teachers. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST)*, 7(3), 251–270. <https://ijemst.net/index.php/ijemst/article/view/731>

- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2014). Metodología de la investigación. McGraw Hill España. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=775008>
- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. & Human, P. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann. <https://bit.ly/4k5s5Dx>
- Irigoyen-Carrillo, M. E., Alvarado-Monroy, A. & González-Astudillo, M. T. (2021). Diseño de una experiencia de modelación en una situación de optimización. *Investigação em Educação Matemática*, 30(1), 242–266. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23593>
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. <https://eric.ed.gov/?id=ED441662>
- Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh & H. M. Boerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 3–34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. <https://doi.org/10.4324/9781410607713>
- Lester, F. K., (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(6), 457–467. <https://doi.org/10.1007/BF02655854>
- Martínez, M. (2006). Validez y confiabilidad en la metodología cualitativa. *Paradigma*, 27(2), 7–33. <https://revistaparadigma.com.br/index.php/paradigma/article/view/360>
- Montero-Moguel, L., Vargas-Alejo, V. & Rodríguez-González, I. (2020). Conceptual systems when implementing model-eliciting activities. En A. I. Sacristán, J.C. Cortés-Zavala, & P.M. Ruiz-Arias (Eds.), *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. México: Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. <https://doi.org/10.51272/pmena.42.2020>

- Montero–Moguel, L. & Vargas–Alejo, V. (2021). Simulación de una enfermedad infecciosa, prácticas virtuales en tiempos de crisis con apoyo de Tecnología. *Épsilon*, 108, 7–26. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8126953>
- Montero–Moguel, L. & Vargas–Alejo, V. (2022). Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos. *Educación Matemática*, 34, 214–248. <https://doi.org/10.24844/EM3401.08>
- Quecedo, R. & Castaño, C. (2003). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. *Revista de Psicodidáctica*, 14, 5–40. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=17501402>
- Sengil–Akar, S. & Yetkin–Ozdemir, I. E. (2020). Investigation of mathematical collective creativity of gifted middle school students during model-eliciting activities: the case of the quilt problem. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1768311>
- Shahbari, J. A. & Tabach, M. (2020). Making sense of the average concept through engagement in model-eliciting activities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(8), 1143–1160. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1740803>
- Stake, R. (2005). Qualitative case studies. *The SAGE handbook of qualitative research*, 443–445. <https://bit.ly/4hLxSw4>
- Steen, L. A. (1988). The Science of Patterns. *Science*, 240(4852), 611–616. <https://www.science.org/doi/10.1126/science.240.4852.611>
- Strauss, A. & Corbin, J. (1998). Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory. *Sage Publications, Inc.* <https://collegepublishing.sagepub.com/products/basics-of-qualitative-research-2-57>
- 26
- Stroup, W. M., Ares, N., Lesh, R., & Hurford, A. (2007). Diversity by design: The what, why, and how of generativity in next-generation classroom networks. En R. Lesh, E. Hamilton & J. J. Kaput (Eds.), *Foundations for the Future in Mathematics*

- Education* (pp. 367–393). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
<https://doi.org/10.4324/9781003064527>
- Temple, C. & Doerr, H. M. (2012). Developing fluency in the mathematical register through conversation in a tenth-grade classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 81(3), 287–306. <https://www.jstor.org/stable/41819598>
- Vargas–Alejo, V., Reyes–Rodríguez, A. & Cristóbal–Escalante, C. (2016). Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación. *Educación Matemática*, 28(2), 59–83. <https://doi.org/10.24844/em2802.03>
- Vargas–Alejo, V., Reyes–Rodríguez, A., Cristóbal–Escalante, C. (2018). La deforestación como consecuencia del incremento de áreas de cultivo: Actividad Provocadora de Modelos. *Épsilon*, 99, 7–28. <https://thales.cica.es/epsilon/node/4732>
- Vargas–Alejo, V., Cristóbal–Escalante, C., & Carmona, G. (2018b). Competencias matemáticas a través de la implementación de actividades provocadoras de modelos. *Educación Matemática*, 30(1), 213–236. <https://doi.org/10.24844/em3001.08>
- Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? En G. Harel & C. Jere (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41–59). New York: State University of New York press. <http://books.google.co.uk/books?id=UVGJ-CAvQzUC>

APÉNDICE A. Proceso de diseño de la MEA

https://drive.google.com/file/d/1tvE_RIHZOtYZr2-0qUpAOX7M0r_Fd94l/view?usp=sharing

APÉNDICE B. Elaboración de la rúbrica

https://drive.google.com/file/d/1e6D7e6EzdxdkVCB39t0MO4Tge81zOIG/view?usp=drive_link

APÉNDICE C. MEA (Actividad de calentamiento, actividad principal, autoevaluación, encuesta de satisfacción)

https://drive.google.com/file/d/1nfJkNK35-46c1E2MrucqBhJ6r9j_5-6-/view?usp=sharing

APÉNDICE D. Guía de observación de clase

https://drive.google.com/file/d/1443sOXfp_ohZm4StuJqvCxaxeeBXs7Rb/view?usp=sharing

APÉNDICE E. Transcripción de las videgrabaciones

Equipo 1:

<https://drive.google.com/file/d/1xhatodpG-rbYRjvriCz7tAOxoc9iMxIv/view?usp=sharing>

Equipo 2:

<https://drive.google.com/file/d/1KaSDcRG6a6yTj9nA7uYpzbKWFjxl5OD/view?usp=sharing>

Equipo 3:

<https://drive.google.com/file/d/1LhdEI0WjMhrg3v-VX4YDkAjNftEJKf8h/view?usp=sharing>

Equipo 4:

https://drive.google.com/file/d/11tCaP_PtFGaZ-AL02K8WVOHCt1zHgS9o/view?usp=sharing

Equipo 5:

<https://drive.google.com/file/d/1z9qZbo2AB78L9TLaeknzmqwLZT69Y3T4/view?usp=sharing>

APÉNDICE F. Nubes de palabras y tablas de equivalencia de términos

<https://drive.google.com/file/d/13jUdHU5TqWLPZYtSWH-K8NJjMegbShaa/view?usp=sharing>