



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE  
HIDALGO

---

---

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

MÉTODO DE ITERACIÓN ASINTÓTICA

**T E S I S**

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

P R E S E N T A :

MIRIAM JIMENEZ CAMARGO

ASESORADO POR:

DR. OMAR PEDRAZA ORTEGA

MINERAL DE LA REFORMA, HGO., ENERO 2025

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
<b>2. Método de Iteración Asintótica</b>	<b>8</b>
2.1. Formalismo del Método de Iteración Asintótica . . . . .	8
2.2. Método de Iteración Asintótica mejorado . . . . .	11
<b>3. Átomo de Hidrógeno</b>	<b>13</b>
3.1. Modelo atómico . . . . .	13
3.2. Método de Iteración Asintótica aplicado al átomo de Hidrógeno . . . . .	16
<b>4. Ecuación de Dirac-Weyl</b>	<b>22</b>
4.1. Hamiltoniano para una capa de Grafeno . . . . .	23
4.2. Pozo Trigonometrico . . . . .	25
<b>5. Modos cuasi normales</b>	<b>34</b>
5.1. Perturbaciones escalares . . . . .	35
5.2. Agujero negro de Schwarzschild rodeado de quintaesencia . . . . .	36
<b>6. Conclusiones</b>	<b>43</b>

# Agradecimientos

Para ser honesta tarde mucho tiempo en pensar como escribir estos agradecimientos y aunque sabía a quienes agradecerles no sabía como hacerlo. Sin embargo encontré la manera.

Quiero agradecer primero que nada a la vida por ponerme en los lugares y momentos correctos que me permitieron llegar justo donde estoy.

Gracias a mi asesor de tesis el Dr. Omar Pedraza Ortega por creer en mi incluso cuando ni yo misma lo hacia, por su paciencia, sus conocimientos, por guiarme paso a paso durante todo este proceso, por toda su ayuda incluso cuando no había nadie para ayudarme.

Gracias a mis amigos por todos esos momentos de felicidad, tristeza, miedos, locuras y conocimientos que compartimos a lo largo de estos años.

Gracias a mis profesores por todos sus conocimientos brindados, su apoyo y por sus palabras correctas en el momento correcto.

Quiero agradecerle especialmente a mi padre, que sin serlo siempre me dio todo lo que tenia para que lograra lo que mi corazón deseaba.

Gracias a mi madre por enseñarme que siempre se puede empezar de nuevo.

Gracias a mi hija Hiatze Sofia por salvarme, por darle vida a mi vida y finalmente y no menos importante a mi esposo por nunca permitir que abandonara lo que un día empecé.

# Resumen

En este trabajo se muestra como el Método de Iteración Asintótica puede ser empleado para obtener eigenvalores y eigenfunciones de ecuaciones diferenciales tipo Schrödinger que aparecen en diferentes áreas de la física. Particularmente se estudiarán, tres casos específicos: La ecuación de Schrödinger para el átomo de Hidrógeno, la ecuación de Dirac-Weyl y la ecuación de Regge-Wheeler. En el primer caso, la ecuación Schrödinger permite resolver de forma analítica al átomo de Hidrógeno, mientras que la ecuación Dirac-Weyl describe la interacción de los portadores de carga de una placa de Grafeno en presencia de un campo magnético externo y finalmente, la ecuación de Regge-Wheeler permite calcular las frecuencias de modos cuasi-normales para un agujero negro.

Cabe mencionar que el objetivo central de este trabajo, es mostrar como aplicar el Método de Iteración Asintótica en algunas áreas específicas de la Física.

Como parte de este trabajo se realizaron las siguientes publicaciones:

- Jiménez-Camargo, M., Pedraza-Ortega O., y López-Suarez L. A. (2022). Modos cuasi normales para un agujero negro Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia: Método de Iteración Asintótica. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI* **10** (Especial), 29-35.
- Jiménez-Camargo, M., López N. Y., Pedraza-Ortega O., y López-Suarez L. A. (2025). Método de Iteración Asintótica: Átomo de Hidrógeno, Grafeno, Modos cuasi normales. *Revista Mexicana de Física E*. (Aceptado)

# Abstract

This work shows how the Asymptotic Iteration Method can be used to obtain eigenvalues and eigenfunctions of Schrödinger-like differential equations that appear in different areas of physics. We will study three cases: the Schrödinger equation for the Hydrogen atom, the Dirac-Weyl equation, and the Regge-Wheeler equation. In the first case, the Schrödinger equation allows us to analytically solve the Hydrogen atom, while the Dirac-Weyl equation describes the interaction of the charge carriers of a Graphene plate in the presence of an external magnetic field and finally, the Regge-Wheeler equation allows us to calculate the frequencies of quasi-normal modes for a black hole.

It is worth mentioning that the main objective of this work is to show how to apply the Asymptotic Iteration Method in some specific areas of Physics.

The following publications have been produced as a result of this work:

- Jiménez-Camargo, M., Pedraza-Ortega O., y López-Suarez L. A. (2022). Modos cuasi normales para un agujero negro Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia: Método de Iteración Asintótica. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI* **10** (Especial), 29-35.
- Jiménez-Camargo, M., López N. Y., Pedraza-Ortega O., y López-Suarez L. A. (2025). Método de Iteración Asintótica: Átomo de Hidrógeno, Grafeno, Modos cuasi normales. *Revista Mexicana de Física E*. (Aceptado)

# Capítulo 1

## Introducción

En muchas ocasiones, cuando uno requiere estudiar el comportamiento de un sistema físico o resolver un problema particular en algún área específica de la física, en general se reduce a resolver una ecuación diferencial homogénea de segundo orden en una dimensión (ecuación tipo Schrödinger), como la que se muestra a continuación:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (1.1)$$

En este sentido, hallar soluciones de la ecuación (1.1) para algún potencial  $V(x)$ , es de gran interés en la física. Aunque en general, el método más empleado para resolver (1.1) es el de series de Frobenius, también existen muchas otras técnicas que pueden ser empleadas y que proporcionan soluciones analíticas como fracciones continuas [1], el método de Nikoforov-Uvarov [2], el Método de Iteración Asintótica [3], etc. Desafortunadamente pocos potenciales  $V(x)$  pueden resolverse de forma exacta usando alguna de las técnicas mencionadas anteriormente.

En el caso, que (1.1) no admita una solución analítica para un potencial  $V(x)$  dado, existen técnicas numéricas que pueden ser útiles para obtener soluciones numéricas de (1.1), como por ejemplo diferencias finitas [4], Runge-Kutta [5], entre otros. En este sentido, el Método de Iteración Asintótica propuesto por Ciftci, Hall y Saad, también puede proporcionar soluciones numéricas a ecuaciones tipo Schrödinger.

El formalismo del Método de Iteración Asintótica ha mostrado que puede ser em-

pleado para obtener soluciones analíticas o numéricas a ecuaciones tipo Schrödinger a diferencia de otras técnicas, que solo permiten obtener soluciones analíticas o solo soluciones numéricas. Este Método ha sido muy útil para resolver ecuaciones diferenciales en muchas aplicaciones de la física, como por ejemplo, ha sido empleado en la solución de ecuaciones de Schrödinger [6, 7], de Dirac [8, 9], de Klein-Gordon [10, 11] y de Duffin-Kemmer-Petiau [12], entre otros.

De las ideas expresadas en los párrafos anteriores, el propósito principal de este trabajo es mostrar cómo aplicar el Método de Iteración Asintótica en tres ejemplos particulares: El átomo de Hidrógeno, el Grafeno y modos cuasi normales. Para ello, en el capítulo 2 se realiza una breve descripción del Método de Iteración Asintótica, mientras que en el capítulo 3 se aborda la solución de la parte radial del átomo de Hidrógeno. En el capítulo 4, se proporciona una breve descripción de la ecuación de Dirac-Weyl y se estudian las soluciones de los estados ligados en el Grafeno en presencia de un campo magnético externo que posee una simetría traslacional. En el capítulo 5 [10], se inicia con un pequeño preámbulo referente a los modos cuasi normales y posteriormente se calculan las frecuencias de los modos cuasi normales para un agujero negro de Schwarzschild rodeado de quintaesencia para perturbaciones escalares. Finalmente, el capítulo 6 se enfoca en la discusión de los resultados.

# Capítulo 2

## Método de Iteración Asintótica

Como se ha mencionado en la introducción, existen diversas técnicas o métodos que permiten hallar soluciones analíticas o numéricas a ecuaciones diferenciales tipo Schrödinger. Particularmente, la intención de este capítulo es presentar los conceptos básicos del Método de Iteración Asintótica y de su versión mejorada.

### 2.1. Formalismo del Método de Iteración Asintótica

El punto de partida para mostrar la estructura del Método de Iteración Asintótica presentado en [3] es a partir de la ecuación de Schrödinger en una dimensión

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (2.1)$$

El primer paso para poder implementar el Método de Iteración Asintótica en (2.1), es necesario realizar la siguiente redefinición

$$\psi(x) = f(x)\chi(x). \quad (2.2)$$

Insertando (2.2) en (2.1) se obtiene la ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden

$$\frac{d^2\chi(x)}{dx^2} = \lambda_0(x)\frac{d\chi(x)}{dx} + s_0(x)\chi(x), \quad (2.3)$$

donde las funciones  $\lambda_0(x)$  y  $s_0(x)$  son definidas de la siguiente forma:

$$\lambda_0(x) = -2 \frac{\frac{df(x)}{dx}}{f(x)} \quad (2.4)$$

$$s_0(x) = E - V(x) - \frac{\frac{d^2f(x)}{dx^2}}{f(x)}. \quad (2.5)$$

Para poder obtener  $\lambda_0(x)$  y  $s_0(x)$ , es primordial determinar primero la función  $f(x)$ . En este sentido, usualmente se analizan los comportamientos asintóticos de la ecuación diferencial (2.1) para hallar a la función  $f(x)$  requerida en (2.2), y así poder aplicar el Método de Iteración Asintótica. Aquí, las funciones  $\lambda_0(x)$  ( $\lambda_0(x) \neq 0$ ) y  $s_0(x)$  son funciones  $C_\infty(a, b)$ .

Para hallar una solución a la ecuación diferencial (2.3), se aprovecha la estructura simétrica del lado derecho de dicha ecuación diferencial. Para mostrar dicha simetría, se deriva (2.3) respecto de  $x$ , dando como resultado

$$\frac{d^3\chi(x)}{dx^3} = \lambda_1(x) \frac{d\chi(x)}{dx} + s_1(x)\chi(x), \quad (2.6)$$

donde las funciones  $\lambda_1(x)$  y  $s_1(x)$  quedan definidas de la siguiente forma:

$$\lambda_1(x) = \frac{d\lambda_0(x)}{dx} + s_0(x) + [\lambda_0(x)]^2, \quad (2.7)$$

$$s_1(x) = \frac{ds_0(x)}{dx} + s_0(x)\lambda_0(x). \quad (2.8)$$

Comparando (2.3) y (2.6), se puede apreciar que poseen una forma similar en el lado derecho de dichas ecuaciones. Esta estructura simétrica es aprovechada para implementar el Método de Iteración Asintótica.

Procediendo por inducción matemática a la ecuación (2.3), obtenemos:

$$\chi^{(n+1)}(x) = \lambda_{n-1}(x)\chi'(x) + s_{n-1}(x)\chi(x), \quad (2.9)$$

$$\chi^{(n+2)}(x) = \lambda_n(x)\chi'(x) + s_n(x)\chi(x), \quad (2.10)$$

donde las funciones  $\lambda_n(x)$  y  $s_n(x)$  se obtienen de manera recursiva

$$\lambda_n(x) = \lambda'_{n-1}(x) + s_{n-1}(x) + \lambda_0(x)\lambda_{n-1}, \quad (2.11)$$

$$s_n(x) = s'_{n-1}(x) + s_0(x)\lambda_{n-1}(x), \quad (2.12)$$

aquí la tilde ' y los super índices  $(n+1)$  y  $(n+2)$  indican derivada respecto de  $x$ .

Tomando el cociente de (2.9) y (2.10)

$$\frac{d}{dx} \ln(\chi^{(n+1)}) = \frac{\chi^{(n+2)}}{\chi^{(n+1)}} = \frac{\lambda_n \left( \chi' + \frac{s_n}{\lambda_n} \chi \right)}{\lambda_{n-1} \left( \chi' + \frac{s_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \chi \right)}, \quad (2.13)$$

y haciendo uso del comportamiento asintótico del método, el cual indica que para una  $n$  suficientemente grande, se debe satisfacer la siguiente relación

$$\frac{s_n(x)}{\lambda_n(x)} = \frac{s_{n-1}(x)}{\lambda_{n-1}(x)} \equiv \tilde{\alpha}(x). \quad (2.14)$$

Ahora, sustituyendo (2.14) en (2.13), se tiene la siguiente expresión

$$\frac{d}{dx} \ln(\chi^{(n+1)}) = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}. \quad (2.15)$$

Cuya solución es

$$\chi^{(n+1)}(x) = C_1 \exp \left[ \int^x \frac{\lambda_n(t)}{\lambda_{n-1}(t)} dt \right]. \quad (2.16)$$

Siendo  $C_1$  una constante de integración. Nuevamente, empleando (2.14) y (2.11) en (2.16), se puede expresar a  $\chi^{(n+1)}(x)$  como

$$\chi^{(n+1)}(x) = C_1 \lambda_{n-1}(x) \exp \left[ \int^x \{ \tilde{\alpha}(t) + \lambda_0(t) \} dt \right]. \quad (2.17)$$

El siguiente paso es sustituir (2.17) en (2.9), con el fin de obtener

$$\chi'(x) + \alpha(x)\chi(x) = C_1 \lambda_{n-1}(x) \exp \left[ \int^x \{ \tilde{\alpha}(t) + \lambda_0(t) \} dt \right], \quad (2.18)$$

aplicando el método de factor integrante, se tiene la siguiente solución

$$\chi(x) = \exp \left[ - \int^x \tilde{\alpha}(t) dt \right] \left\{ C_2 + C_1 \int^x \exp \left( \int^\tau [\lambda_0(t) + 2\tilde{\alpha}(t)] dt \right) d\tau \right\}.$$

Donde nuevamente  $C_2$  es una constante. Las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$  pueden ser determinadas al aplicar las condiciones de frontera correspondientes a cada situación física. Generalmente, si uno requiere de soluciones exactas, entonces, se debe de considerar  $C_1 = 0$ .

Ahora bien, una forma alternativa de (2.14) es

$$\delta_k(x) = s_k(x)\lambda_{k-1}(x) - s_{k-1}(x)\lambda_k(x), \quad (2.19)$$

aquí  $k$  denota el número de iteraciones a realizar. Usualmente  $\delta_k(x) = 0$  se le suele llamar la *condición de cuantización* y su importancia radica en que sus raíces proporcionan los eigenvalores de (2.1).

Para ciertos potenciales  $V(x)$  sencillos, los valores de la energía se obtienen al resolver la ecuación de cuantización, sin requerir algún valor específico de  $x$ , es decir, el problema posee solución analítica, mientras que para algunos potenciales no triviales que admiten una solución exacta, es necesario elegir un punto  $x = x_0$  adecuado, el cual, puede ser el valor máximo o el valor mínimo del potencial  $V(x)$  o algún cero de la función  $\lambda_0(x)$ , para resolver  $\delta_k(x) = 0$ , y así hallar los valores de energía.

## 2.2. Método de Iteración Asintótica mejorado

Como se muestra en el trabajo realizado por Ciftci, Hall y Saad [13], una característica poco atractiva de las relaciones de recursión (2.11) y (2.12), es que al realizar cada iteración, se debe tomar la derivada de los términos  $s(x)$  y  $\lambda(x)$  de la iteración anterior. Esto puede ralentizar considerablemente la implementación numérica del Método de Iteración Asintótica, lo cual puede provocar problemas con la precisión numérica. Para solventar dicha problemática, se desarrolló una versión mejorada de la técnica, que evita la necesi-

dad de tomar derivadas en cada paso, lo cual mejora significativamente la precisión, así como también la velocidad de convergencia del método.

La idea del Método Mejorado de Iteración Asintótica radica en tomar la serie de Taylor de las funciones  $\lambda_n(x)$  y  $s_n(x)$  alrededor de algún punto  $\xi$  en el que se implementa el método. Como se comentó en la sección anterior, dicho punto puede ser el valor máximo o mínimo del potencial  $V(x)$  o algún cero de  $\lambda_0(x)$ . Dichos desarrollos, se escriben como

$$\lambda_n(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} c_n^i (x - \xi)^i, \quad (2.20)$$

$$s_n(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} d_n^i (x - \xi)^i, \quad (2.21)$$

con  $c_n^i$  y  $d_n^i$  los respectivos coeficientes de Taylor de las funciones  $\lambda_n(\xi)$  y  $s_n(\xi)$ . Colocando (2.20) y (2.21) en las ecuaciones (2.11) y (2.12), se obtienen las siguientes relaciones de recurrencia

$$c_n^i = (i+1)c_{n-1}^{i+1} + d_{n-1}^i + \sum_{j=0}^i c_0^j c_{n-1}^{i-j}, \quad (2.22)$$

$$d_n^i = (i+1)d_{n-1}^{i+1} + \sum_{j=0}^i d_0^j c_{n-1}^{i-j}. \quad (2.23)$$

Combinando las expresiones (2.20)-(2.23) en la hipótesis de cuantización (2.19), se tiene la siguiente relación de recursión

$$d_n^0 c_{n-1}^0 - d_{n-1}^0 c_n^0 = 0. \quad (2.24)$$

Esta hipótesis únicamente requiere tomar las primeras derivadas de  $\lambda_0$  y  $s_0$  para obtener los coeficientes  $c_0^i$  y  $d_0^i$  requeridos para emplear la relación de recurrencia y obtener los correspondientes eigenvalores de forma numérica.

Para ejemplificar cómo implementar el Método de Iteración Asintótica y su versión mejorada, en las siguientes secciones se analizarán tres casos específicos: Átomo de Hidrógeno, Grafeno y agujeros negros.

# Capítulo 3

## Átomo de Hidrógeno

El átomo de Hidrógeno es el átomo más simple presente en la naturaleza y su estudio es primordial para entender la estructura atómica de los átomos multielectrónicos. El átomo de Hidrógeno consiste en un electrón con carga negativa interactuando eléctricamente con un protón de carga positiva. Cabe mencionar que el átomo de Hidrógeno, es uno de los pocos sistemas que posee solución exacta a la ecuación de Schrödinger.

El átomo de Hidrógeno es importante para la comprensión de conceptos inherentes a la mecánica cuántica. Por ello el objetivo de este capítulo, es mostrar de forma breve el modelo del átomo de Hidrógeno, así como mostrar la aplicación del Método de Iteración Asintótica para hallar sus soluciones.

### 3.1. Modelo atómico

Para describir este sistema de dos cuerpos o partículas, se emplea la ecuación de Schrödinger, cuyo Hamiltoniano  $\mathbf{H}$  puede ser construido como la suma de dos Hamiltonianos  $\mathbf{H}_1$  y  $\mathbf{H}_2$  correspondientes a cada una de las partículas, más un potencial de interacción entre ellas  $V$ . El caso en el que el potencial de interacción solo depende de las posiciones de las partículas, entonces, se tiene

$$\mathbf{H}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = \mathbf{H}_1(\vec{p}_1, \vec{r}_1) + \mathbf{H}_2(\vec{p}_2, \vec{r}_2) + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2), \quad (3.1)$$

donde los Hamiltonianos  $\mathbf{H}_i$  (con  $i = 1, 2$ ) pueden escribirse como

$$\mathbf{H}_i(\vec{p}_i, \vec{r}_i) = \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + V_i(\vec{r}_i) = -\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla^2 + V_i(\vec{r}_i), \quad i = 1, 2, \quad (3.2)$$

siendo  $\vec{p}_i$  y  $\vec{r}_i$  (con  $i = 1, 2$ ) el momento y la posición de cada partícula,  $\hbar$  es la constante de Planck. Aquí, los potenciales  $V_i$  son potenciales producidos por campos externos. Cabe mencionar que en el formalismo de la mecánica cuántica, el momento y la posición, son operadores vectoriales, por lo que en el espacio de coordenadas, el operador de momento se expresa como el operador nábla  $\nabla_{\mathbf{p}} = -i\hbar(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$  y el operador de posición es solo el vector de posición  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ .

Por lo tanto, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, toma la siguiente forma

$$\mathbf{H}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \left[ \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V_1(\vec{r}_1) + V_2(\vec{r}_2) + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right] \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \quad (3.3)$$

Para un sistema aislado,  $V_1$  y  $V_2$  son nulos. Bajo estas condiciones (3.3), toma la forma

$$E\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \left[ \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right] \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \quad (3.4)$$

Además, si el potencial de interacción entre las partículas  $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ , sólo depende de su posición relativa, es decir,  $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ , la ecuación de Schrödinger puede reescribirse como

$$E\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla^2 + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right] \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \quad (3.5)$$

La dependencia del potencial en las coordenadas, sugiere expresar las variables  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  a las variables relativas y la coordenada del centro de masa, las cuales se definen como

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad (3.6)$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}. \quad (3.7)$$

Donde  $M$  es la masa total y  $\mu$  es la masa reducida del sistema, las cuales se definen de la siguiente forma

$$M = m_1 + m_2, \quad (3.8)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.9)$$

En las coordenadas relativas y del centro de masa, la ecuación (3.5) se expresa como

$$E\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{R}, \vec{r}). \quad (3.10)$$

Para resolver esta ecuación, se aplica el método de separación de variables, para ello se propone que la función de onda  $\Psi$  sea el producto de dos funciones, es decir,  $\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = \phi(\vec{R})\psi(\vec{r})$ , mientras que la energía  $E$  se expresa como:  $E = E_R + E_r$ .

Bajo estas consideraciones, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones desacoplado

$$E_R\phi(\vec{R}) = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2\phi(\vec{R}), \quad (3.11)$$

$$E_r\psi(\vec{r}) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}). \quad (3.12)$$

Aquí, la primera ecuación describe el movimiento de una partícula libre, de masa  $M$  con energía  $E_R$ . Este movimiento es irrelevante para la descripción del átomo de Hidrógeno, y sin pérdida de generalidad se puede considerar que su energía es nula  $E_R = 0$  y la función de onda  $\phi$  es una constante. Por otra parte (3.12), describe el movimiento de una partícula de masa  $\mu$  asociada al movimiento de las partículas uno y dos interactuando a través del potencia  $V(\vec{r})$ . La expresión (3.12) es la ecuación de Schrödinger para el problema de dos partículas.

En la siguiente sección se considerará el caso en el cual, las partículas interactúan a través del potencial de Coulomb. Por lo que

$$V(\vec{r}) = -\frac{e^2}{r}. \quad (3.13)$$

donde  $e$  es la carga del electrón.

## 3.2. Método de Iteración Asintótica aplicado al átomo de Hidrógeno

En esta sección se muestra como implementar el Método de Iteración Asintótica para resolver la ecuación radial del átomo de Hidrógeno, y así hallar los eigenvalores (energías) y las eigenfunciones (funciones de onda) correspondientes.

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (3.12) (donde se ha suprimido el subíndice  $r$ ) para el átomo de Hidrógeno admite la siguiente forma

$$\mathbf{H}\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}), \quad \mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}. \quad (3.14)$$

Considerando nuevamente separación de variables, pero en coordenadas esféricas, la función de onda puede escribirse como  $\Psi(\vec{r}) = g(\theta, \phi)R(r)$ . Donde la solución de la parte angular de la función de onda son los armónicos esféricos, es decir  $g(\theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi)$ , mientras que la parte radial  $R(r) = U(r)/r$ , satisface la siguiente ecuación

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \bar{V}_l(x) \right] U(x) = 0, \quad \bar{V}_l(x) = -\frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{1}{\tilde{\lambda}x} - \frac{1}{4}, \quad (3.15)$$

donde

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{-E}{E_0}}, \quad E_0 = \frac{e^2}{2a_0}, \quad x = \frac{2\lambda r}{a_0}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}, \quad (3.16)$$

aquí  $a_0$  es el radio de Bohr.

Como se comenta en la sección 2.1, el primer paso es hallar la función  $f(x)$ . Para ello es necesario, identificar si existen puntos singulares en (3.16). Dicha ecuación tiene dos puntos singulares, cero e infinito y ambos son regulares. Para el punto  $x = 0$ , se debe de estudiar la cantidad

$$x^2\bar{V}_l. \quad (3.17)$$

Si esta expresión es finita cuando  $x \rightarrow 0$ , entonces es un punto singular regular, en caso

contrario es un punto singular irregular. Tomando el límite de  $x^2\bar{V}_l$  cuando  $x$  tiene a cero, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2\bar{V}_l = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ -l(l+1) + \frac{x}{\lambda} - \frac{x^2}{4} \right] = -l(l+1), \quad (3.18)$$

dado que el límite existe, entonces  $x = 0$ , es un punto singular regular.

El punto en el infinito, es diferente de todos los puntos y este debe ser analizado como un caso especial y para ello es conveniente hacer el siguiente cambio de variable  $x = 1/z$ . De acuerdo a este cambio de variable, es necesario analizar la siguiente cantidad

$$\frac{\bar{V}_l(1/z)}{z^2}. \quad (3.19)$$

Si la expresión (3.19) está bien definida cuando  $z = 0$ , entonces el punto  $x = \infty$  es un punto ordinario, mientras que si diverge no más rápidamente que  $1/z^2$ , entonces,  $x = \infty$  es un punto singular regular, en caso contrario, es un punto singular irregular (una singularidad esencial).

Para el caso específico de  $\bar{V}_l$  dado en (3.14), se tiene

$$\frac{\bar{V}_l(z)}{z^2} \sim \frac{-l(l+1)}{z^2} \quad \text{cuando } z \rightarrow 0, \quad (3.20)$$

por lo tanto,  $x = \infty$  es un punto singular regular. El hecho de que los puntos singulares  $x = 0$  y  $x = \infty$  sean regulares, indica que entonces es posible expresar una solución de la ecuación diferencial (3.14) en dichos puntos.

Ahora, para implementar el Método de Iteración Asintótica, es conveniente analizar primero el comportamiento asintótico de (3.15) para valores de  $x$  muy grandes, es decir, cuando  $x \rightarrow \infty$ , (3.15) toma la siguiente forma

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4} \right] U(x) = 0. \quad (3.21)$$

La solución a esta ecuación es

$$U(x) \approx Ae^{-\frac{x}{2}} + Be^{\frac{x}{2}}. \quad (3.22)$$

La condición de frontera sobre la función  $U(x)$ , es tal que esta función sea cuadrado integrable, por lo que de (3.22), implica que  $B = 0$ .

Cabe señalar que la condición de frontera de cuadrado integrable es equivalente a que la función  $U(x)$  sea finita cuando  $x$  tiende a infinito. Si las energías son negativas  $E < 0$  y de la definición de la variable  $x$  la exponencial creciente debería de eliminarse, teniendo justamente que  $B = 0$ . En el caso en el que  $E > 0$  (colisiones), la variable  $\lambda$  tendría valores imaginarios y la función de onda sería oscilatoria en el infinito y la condición de frontera en este caso puede entenderse como la superposición de una onda esférica entrante y otra saliente.

Para continuar, el siguiente paso es estudiar el comportamiento asintótico de (3.15) para valores de  $x$  muy pequeños ( $x \rightarrow 0$ ), en esta caso se tiene

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] U(x) = 0. \quad (3.23)$$

Cuya solución es

$$U(x) \approx ax^{l+1} + bx^{-l}. \quad (3.24)$$

Donde nuevamente, la condición de frontera en (3.24) de que la función sea de cuadrado integrable implican que  $b = 0$ . De (3.22) y (3.24), la solución de (3.15) debe de ser

$$U(x) = f_1(x)\chi(x), \quad f_1(x) = e^{-\frac{x}{2}}x^{l+1}. \quad (3.25)$$

Aquí se puede ver que  $U(x)$  tiene la forma de (2.2), por lo que es posible hacer uso de (2.4) y (2.5) introduciendo  $f_1(x)$ , se obtienen

$$\lambda_0(x) = \frac{x - 2(l+1)}{x}, \quad (3.26)$$

$$s_0(x) = \frac{\tilde{\lambda}(l+1) - 1}{x\tilde{\lambda}}, \quad (3.27)$$

donde se ha considerado a  $V(x) = \bar{V}_l(x)$  y  $E = 0$ . De acuerdo a (2.11) y (2.12), es posible

calcular las siguientes funciones auxiliares

$$\lambda_1(x) = 1 + \frac{2\tilde{\lambda}(2l+3)(l+1) - x[3\tilde{\lambda}(l+1) + 1]}{x^2\tilde{\lambda}}, \quad (3.28)$$

$$s_1(x) = -\frac{[\tilde{\lambda}(l+1) - 1](2l+3-x)}{x^2\tilde{\lambda}}, \quad (3.29)$$

$$\lambda_2(x) = \frac{2x^2(2\tilde{\lambda}[l+1] + 1) - 2x(2l+3)(2\tilde{\lambda}[l+1] + 1)}{x^3\tilde{\lambda}} + \frac{4\tilde{\lambda}(2l+3)(l+2)(l+1)}{x^3\tilde{\lambda}} - 1, \quad (3.30)$$

$$s_2(x) = \frac{x^2\tilde{\lambda} - x(\tilde{\lambda}[3l+4] + 1) + 2\tilde{\lambda}(2l+3)(l+2)}{x^3\tilde{\lambda}} \times (\tilde{\lambda}[l+1] - 1). \quad (3.31)$$

Incluyendo (3.26)-(3.31) en la condición de cuantización (2.19), se tiene

$$\delta_1(x) = \frac{[\tilde{\lambda}(l+1) - 1][\tilde{\lambda}(l+2) - 1]}{x^2\tilde{\lambda}^2}, \quad (3.32)$$

$$\delta_2(x) = \frac{[\tilde{\lambda}(l+1) - 1][\tilde{\lambda}(l+2) - 1][\tilde{\lambda}(l+3) - 1]}{x^3\tilde{\lambda}^3}. \quad (3.33)$$

Aquí los eigenvalores son obtenidos de las raíces de las expresiones (3.32) y (3.33). De forma general se tiene

$$\tilde{\lambda}_{\nu l} = \frac{1}{l + \nu}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.34)$$

aquí,  $\tilde{\lambda}_{\nu l}$  no depende de  $\nu$  y  $l$  por separado, si no más bien de su suma,  $n = l + \nu$  y en combinación con (3.34) se tiene

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.35)$$

por lo que de acuerdo a (3.16), los niveles de energía del átomo de Hidrógeno están dados por

$$E_n = -\frac{E_1}{n^2} = -\frac{e^2}{2a_0 n^2} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.36)$$

Antes de proseguir con el cálculo de las eigenfunciones  $U(x)$ , es importante analizar la

relación  $n = l + \nu$ . Es evidente que para una  $n$  fija,  $l$  puede tomar varios valores, es decir, cuando  $\nu$  tome su valor más pequeño  $\nu_{\min} = 1$ ,  $l$  toma su máximo valor  $l_{\max} = n - \nu_{\min} = n - 1$  y para cuando  $\nu$  tome su valor más grande  $\nu_{\max} = n$ ,  $l$  alcanza su valor mínimo, es decir,  $l_{\min} = n - \nu_{\max} = 0$ , en otras palabras, para un valor dado de  $n$ ,  $l$  puede tomar valores entre 0 y  $n - 1$  ( $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ).

Para calcular las eigenfunciones  $U(x)$  del Átomo de Hidrógeno, es necesario calcular primero las funciones  $\tilde{\alpha}(x)$  de (2.14). Para  $n = 1$  ( $l = 0$ ) y de acuerdo a (2.14), se tiene

$$\tilde{\alpha}_{10}(x) = \frac{s_0(x)}{\lambda_0(x)} \Big|_{\lambda=\lambda_1} = -\frac{l}{2l-x+2} \Big|_{l=0} = 0. \quad (3.37)$$

Donde el primer subíndice denota  $n = 1$  y el segundo  $l = 0$ . De forma análoga, para  $n = 2$  ( $l = 0, 1$ ) y de acuerdo a (2.14), se tiene

$$\tilde{\alpha}_{2l}(x) = \frac{s_1(x)}{\lambda_1(x)} \Big|_{\lambda=\lambda_2} = -\frac{(l-1)(2l+3-x)}{x^2-x(3l+5)+2l(2l+5)+6}. \quad (3.38)$$

Considerando los valores de  $l = 0, 1$  en (3.38), se obtiene

$$\tilde{\alpha}_{20}(x) = -\frac{1}{x-2}, \quad (3.39)$$

$$\tilde{\alpha}_{21}(x) = 0. \quad (3.40)$$

Empleando (3.37) y (2.19) es posible obtener la eigenfunción para el estado base

$$\chi_{10}(x) = c_{10} \exp \left[ -\int \tilde{\alpha}_{00} dx \right] = c_{10}. \quad (3.41)$$

Procediendo de forma similar, las eigenfunciones para el primer estado excitado son

$$\begin{aligned} \chi_{20}(x) &= c_{20} \exp \left[ -\int \tilde{\alpha}_{01} dx \right] = c_{20} \exp \left[ \int \frac{dx}{x-2} \right], \\ &= c_{20} (x-2). \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\chi_{21}(x) = c_{21} \exp \left[ -\int \tilde{\alpha}_{01} dx \right] = c_{21}. \quad (3.43)$$

Los polinomios (3.41)-(3.43), son los polinomios asociados de Laguerre  $L_{n+l}^{2l+1}(x)$  no nor-

malizados y en cada caso habrá que calcular las constantes de normalización, por consiguiente, se tiene que  $\chi_{nl}(x) = L_{n+l}^{2l+1}(x)$ . La tabla 3.1 muestra algunos ejemplos de los polinomios asociados de Laguerre.

Grado ( $n$ )	Polinomio
0	$L_0^m = 1$
1	$L_1^m = -x + m + 1$
2	$L_2^m = \frac{1}{2} [x^2 - 2(m+2)x + (m+1)(m+2)]$
3	$L_3^m = \frac{1}{6} [-x^3 + 3(m+3)x^2 - 3(m+2)(m+3)x + (m+1)(m+2)(m+3)]$

Tabla 3.1: Algunos valores para los polinomios asociados de Laguerre para distintos valores de  $m$ .

Para finalizar el análisis del Átomo de Hidrógeno, usando (3.16), (3.25), (3.35) y las expresiones (3.41)-(3.43), la solución de la parte radial del Átomo de Hidrógeno es

$$R_{nl}(r) = \left(\frac{2r}{a_0 n}\right)^l \exp\left(-\frac{r}{a_0 n}\right) L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{a_0 n}\right). \quad (3.44)$$

Cabe mencionar que este resultado se obtiene tradicionalmente usando el método de Frobenius, sin embargo, el Método de Iteración Asintótica proporciona una forma alterna de obtener el mismo resultado.

# Capítulo 4

## Ecuación de Dirac-Weyl

El Grafeno (monocapa de átomos de carbono) ha recibido una enorme atención en los últimos años, debido a que sus propiedades electrónicas lo hacen un candidato idóneo para el desarrollo de dispositivos electrónicos (ver [14] para mayor referencia). Un punto crucial para el diseño de dispositivos electrónicos, es el confinamiento de electrones en Grafeno. Dicho confinamiento no puede realizarse empleando potenciales electrostáticos debido a la paradoja de Klein [15], por ello se recurre a considerar el confinamiento magnético, como se muestra en los trabajos de Castro [16] y Miransky [17].

Recientemente, se han llevado a cabo una serie de estudios sobre la interacción de los electrones del Grafeno que se mueven en campos magnéticos perpendiculares a la superficie del Grafeno [18, 19, 2, 20], donde se tratan algunos otros perfiles de campo magnético usando el método de la factorización. Estos trabajos muestran las diferentes formas en las que se pueden confinar las cargas, estudiando la ecuación de Dirac-Weyl para poder entender la dinámica de los electrones en el Grafeno.

Por ello en esta sección se muestra como aplicar el Método de Iteración Asintótica para un perfil de campo magnético proporcional a una secante cuadrada, considerando interacciones magnéticas invariantes bajo traslaciones.

## 4.1. Hamiltoniano para una capa de Grafeno

En el Grafeno, el Hamiltoniano efectivo alrededor de un punto de Dirac para un electrón de Dirac posee la siguiente forma

$$\mathbf{H} = v_F \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}, \quad (4.1)$$

donde  $v_F \approx c/300 = 10^6 \text{ m/s}$ , con  $c$  la velocidad de la luz en el vacío,  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$  son las matrices de Pauli y  $\mathbf{p} = -i\hbar(\partial_x, \partial_y)$  es el operador de momento en dos dimensiones.

De esta forma, a bajas energías, el espectro de energías es descrito por la ecuación de Dirac-Weyl

$$\mathbf{H}\Phi(x, y, t) = v_F (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \Phi(x, y, t) = i\hbar \frac{\partial \Phi(x, y, t)}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Para estados estacionarios, la función de onda admite la siguiente forma  $\Phi(x, y, t) = \Psi(x, y)e^{-iEt/\hbar}$ , por ello la ecuación de Dirac-Weyl independiente del tiempo se puede reexpresar como

$$v_F (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \Psi(x, y) = E\Psi(x, y), \quad \Psi(x, y) = \begin{pmatrix} \psi_+(x, y) \\ \psi_-(x, y) \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

con  $\Psi(x, y)$  la función de onda de dos componentes, siendo  $\psi_{\pm}$  las componentes del vector columna.

Si el electrón de Dirac interactúa con un campo magnético externo  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  perpendicular al plano del Grafeno, entonces, de acuerdo a la regla de acoplamiento mínimo, el operador de momento  $\mathbf{p}$  puede ser reemplazado por  $\mathbf{p} + e\mathbf{A}/c$ , con  $-e$  la carga del electrón y el vector potencial es dado por  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, 0)$ . De esta forma (4.3) se puede expresar como

$$v_F \left[ \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right] \Psi(x, y) = E\Psi(x, y). \quad (4.4)$$

Si el campo magnético externo posee simetría traslacional en una dirección particular, entonces, sin pérdida de generalidad se puede fijar el eje de simetría en la dirección  $y$ ,

además empleando la norma de Landau, uno puede expresar al vector potencial como

$$\mathbf{A} = (0, A_y(x), 0), \quad \mathbf{B} = \left(0, 0, \frac{dA_y}{dx}\right). \quad (4.5)$$

La implementación de (4.5), implica que la expresión (4.4) es independiente de la coordenada  $y$ , permitiendo parametrizar la función de onda  $\Psi(x, y)$  de la siguiente forma

$$\Psi(x, y) = e^{iky} (\psi_+(x), i\psi_-(x))^T, \quad (4.6)$$

donde  $k$  es el número de onda en la dirección  $y$  y  $T$  denota la transpuesta del vector columna. Incorporando (4.6) en (4.4) se tienen dos ecuaciones desacopladas

$$\left[ \frac{d}{dx} + k + \frac{e}{c\hbar} A_y \right] \psi_-(x) = \mathcal{E} \psi_+(x), \quad (4.7)$$

$$\left[ -\frac{d}{dx} + k + \frac{e}{c\hbar} A_y \right] \psi_+(x) = \mathcal{E} \psi_-(x), \quad (4.8)$$

donde  $\mathcal{E} = E/(\hbar v_f)$ . Combinando (4.7) y (4.8), es posible obtener una ecuación tipo Schrödinger para cada función  $\psi_+$  y  $\psi_-$ . Así se tiene que las funciones  $\psi_+$  y  $\psi_-$  satisfacen

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\pm}(x) \right] \psi_{\pm} = \epsilon \psi_{\pm}(x), \quad (4.9)$$

donde

$$\epsilon = E^2/(\hbar^2 v_F^2), \quad (4.10)$$

$$V_{\pm}(x) = \left( k + \frac{e}{c\hbar} A_y(x) \right)^2 \pm \frac{e}{c\hbar} \frac{dA_y(x)}{dx}. \quad (4.11)$$

En la siguiente sección se estudiará un perfil específico de campo magnético. La idea es emplear el Método de Iteración Asintótica para poder hallar una solución a la ecuación (4.9).

## 4.2. Pozo Trigonometrico

Para proseguir con el estudio del Grafeno se considerará el siguiente perfil para el potencial vectorial y para el campo magnético

$$\mathbf{A} = (0, B_0 \tan(\alpha x), 0), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha x \leq \frac{\pi}{2}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{B} = (0, 0, \alpha B_0 \sec^2(\alpha x)). \quad (4.13)$$

Colocando (4.12) en (4.11), los potenciales son

$$V_{\pm}(x) = k^2 - D^2 + D(D \pm \alpha) \sec^2(\alpha x) + 2Dk \tan(\alpha x). \quad (4.14)$$

con  $D = \frac{eB_0}{ch}$ . La gráfica de los potenciales (4.14), se muestran en la figura 4.1.

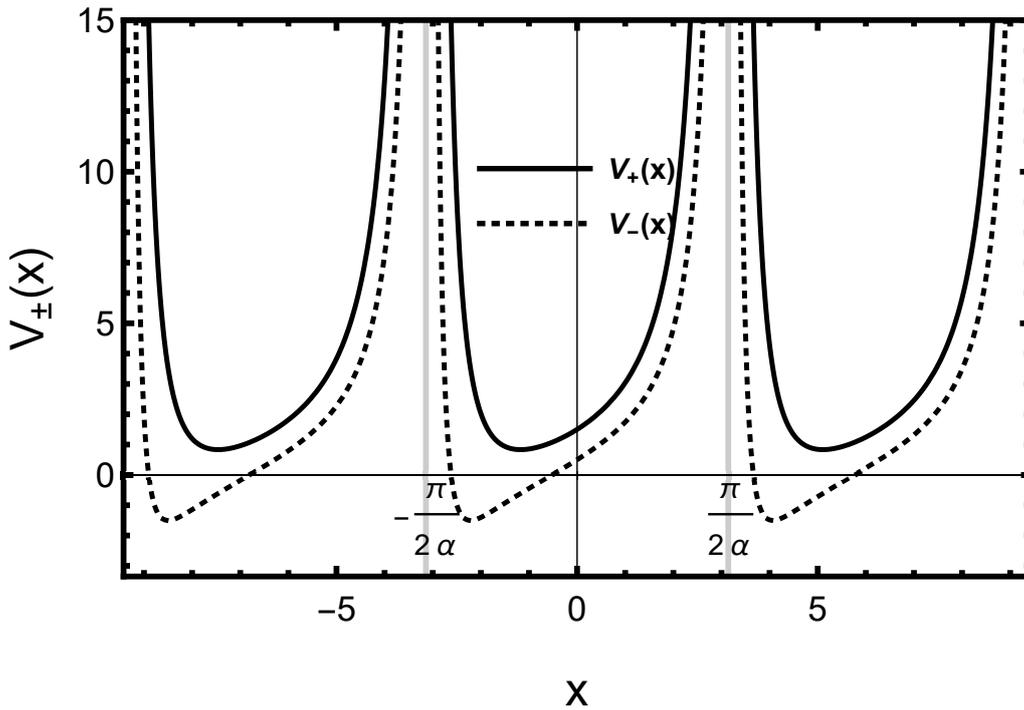


Figura 4.1: Gráfica de los potenciales  $V_{\pm}(x)$ , dado por (4.14). Con  $D = 1$ ,  $k = 1$  y  $\alpha = 0,5$ .

Añadiendo (4.14) en (4.9), se tiene

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + k^2 - D^2 + D(D \pm \alpha) \sec^2(\alpha x) + 2Dk \tan(\alpha x) \right] \psi_{\pm}(x) = \epsilon \psi_{\pm}(x). \quad (4.15)$$

Para resolver la ecuación (4.15), es conveniente redefinir la función  $\psi_{\pm}$  y aplicar el siguiente cambio de variable

$$\psi_{\pm}(z) = \frac{\phi_{\pm}(z)}{\sqrt{i\alpha[1-z^2]}}, \quad z = i \tan(\alpha x). \quad (4.16)$$

Con este nuevo cambio de variable,  $z$  toma valores en todo eje de la parte imaginaria del plano complejo.

Evaluando (4.16) en (4.15) se obtiene la siguiente ecuación tipo Schrödinger

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \bar{V}_{\pm}(z) \right] \phi_{\pm}(z) = 0, \quad (4.17)$$

con

$$\bar{V}_{\pm}(z) = -\frac{D(D \pm \alpha)z^2 + 2iDkz \mp \alpha(D \pm \alpha) - k^2 + \epsilon}{\alpha^2(z^2 - 1)^2}. \quad (4.18)$$

Aquí, nuevamente se debe estudiar los puntos singulares de (4.17), como en el capítulo anterior. Aquí solo hay cuatro puntos singulares  $\pm 1$  y  $\pm \infty$ , dichos puntos son regulares.

Para los puntos  $z = \pm 1$ , se tiene

$$\lim_{z \rightarrow \pm 1} (z \pm 1)^2 \bar{V}_{\pm} = \frac{-D^2 \pm 2iDk + k^2 + \alpha^2 - \epsilon}{4\alpha^2}, \quad (4.19)$$

lo cual muestra que  $z = \pm 1$  es un punto singular regular y entonces es posible obtener una solución a (4.17) en dichos puntos.

Para el punto en el infinito ( $\pm \infty$ ), hay que realizar el cambio de variable  $z = 1/\bar{z}$  y estudiar el comportamiento del término  $V(\bar{z}^{-1})/\bar{z}^2$ . En este caso se tiene

$$\frac{V_{\pm}(\bar{z}^{-1})}{\bar{z}^2} \sim -\frac{D(D \pm \alpha)}{\alpha^2 \bar{z}^2}, \quad \text{cuando } \bar{z} \rightarrow 0. \quad (4.20)$$

De acuerdo a lo discutido en el capítulo anterior, los puntos  $\pm \infty$  son puntos singulares regulares.

El siguiente paso para encontrar la función  $f(x)$  del AIM, es estudiar los comporta-

mientos asintóticos de (4.17) cuando  $z \rightarrow \pm 1$ . Cuando  $z \rightarrow 1$ , se tiene

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\alpha^2 - (D + ik)^2 - \epsilon}{4\alpha^2(z-1)^2} \right] \phi_{\pm}(z) = 0. \quad (4.21)$$

Esta ecuación posee las siguiente solución

$$\phi_{\pm}(z) = A_1 (z-1)^{\frac{1}{2} + \frac{\beta_1}{2\alpha}} + B_1 (z-1)^{\frac{1}{2} - \frac{\beta_1}{2\alpha}}, \quad (4.22)$$

donde  $\beta_1$  se define como

$$\beta_1 = \sqrt{(D + ik)^2 + \epsilon}. \quad (4.23)$$

La condición de frontera (cuadrado integrable) implica que  $B_1 = 0$ . Por otra parte cuando  $z \rightarrow -1$ , se tiene

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\alpha^2 - (D - ik)^2 - \epsilon}{4\alpha^2(z+1)^2} \right] \phi_{\pm}(z) = 0, \quad (4.24)$$

cuya solución es

$$\phi_{\pm}(z) = A_2 (z+1)^{\frac{1}{2} + \frac{\beta_2}{2\alpha}} + B_2 (z+1)^{\frac{1}{2} - \frac{\beta_2}{2\alpha}}, \quad (4.25)$$

donde

$$\beta_2 = \sqrt{(D - ik)^2 + \epsilon}. \quad (4.26)$$

Aquí la condición de frontera implica que  $B_2 = 0$ .

De este modo, la función  $\phi_{\pm}(z)$  puede escribirse como

$$\phi_{\pm}(z) = f_2(z)\chi_{\pm}(z), \quad f_2(z) = (z-1)^{\frac{1}{2} + \frac{\beta_1}{2\alpha}} (z+1)^{\frac{1}{2} + \frac{\beta_2}{2\alpha}}. \quad (4.27)$$

Colocando a  $f_2(z)$  en (2.4) y (2.5), se pueden hallar las siguientes relaciones

$$\lambda_{0\pm}(z) = \frac{-(2\alpha + \beta_+)z + \beta_-}{\alpha(z^2 - 1)}, \quad (4.28)$$

$$s_{0\pm}(z) = \frac{\Delta}{2\alpha^2(z^2 - 1)}, \quad (4.29)$$

$$\beta_+ = \beta_1 + \beta_2, \quad \beta_- = \beta_2 - \beta_1, \quad (4.30)$$

$$\Delta = D(D \pm 2\alpha) + k^2 - \epsilon - \beta_1\beta_2 - \alpha\beta_+, \quad (4.31)$$

donde se ha tomado  $V = \bar{V}_\pm(z)$ , definida en la ecuación (4.18) y  $E = 0$ . Aquí  $\chi_\pm(z)$  satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2\chi_\pm(z)}{dz^2} = \lambda_{0\pm}(z)\frac{d\chi_\pm(z)}{dz} + s_{0\pm}(z)\chi_\pm(z). \quad (4.32)$$

Sin embargo, cabe mencionar que el análisis realizado a (4.17) cuando  $z \rightarrow \pm 1$  para determinar a  $f_2(z)$  no es suficiente para precisar los comportamientos asintóticos en dichos puntos. Para establecer el comportamiento asintótico de  $\chi_\pm(z)$  cuando  $z \rightarrow \pm 1$ , se sugiere el siguiente ansatz

$$\chi_\pm(z) = (z^2 - 1)^q e^{-\mu \arctan(-iz)} f_\pm(z), \quad (4.33)$$

donde  $q$  y  $\mu$  son constantes a determinar. Sin pérdida de generalidad, de aquí en adelante solo se prosigue con el análisis de las funciones con el subíndice mas  $\chi_+(z)$ , debido a que el estudio de las funciones con subíndice menos  $\chi_-(z)$  conlleva un análisis muy similar, por lo que es suficiente estudiar únicamente el caso  $\chi_+(z)$  para mostrar como implementar el Método de Iteración Asintótica.

Evaluando (4.33) en (4.32) se tiene

$$\frac{d^2 f_+(z)}{dz^2} = \tilde{\lambda}_{0\pm}(z)\frac{df_+(z)}{dz} + \tilde{s}_{0\pm}(z)f_+(z). \quad (4.34)$$

Donde las funciones  $\tilde{\lambda}_{0+}$  y  $\tilde{s}_{0+}$  son definidas de la siguiente forma

$$\tilde{\lambda}_{0+}(z) = \frac{-(2\alpha + \beta_+ + 4q\alpha)z + \beta_- + 2i\mu\alpha}{\alpha(z^2 - 1)}, \quad (4.35)$$

$$\tilde{s}_{0+}(z) = \frac{\Delta_1 z^2 + \Delta_2 z + \Delta_3}{2\alpha^2(z^2 - 1)^2} + \frac{\Delta}{2\alpha^2(z^2 - 1)}, \quad (4.36)$$

donde

$$\Delta_1 = -4\alpha q(2\alpha q + \alpha + \beta_+), \quad (4.37)$$

$$\Delta_2 = 2i\alpha(4\alpha\mu q + \mu\beta_+ - 2iq\beta_-), \quad (4.38)$$

$$\Delta_3 = 2\alpha(\alpha\mu^2 + 2\alpha q - i\mu\beta_-). \quad (4.39)$$

Para aplicar el Método de Iteración Asintótica, se deben de imponer las siguientes condiciones

$$\Delta_1 = -\Delta_3, \quad (4.40)$$

$$\Delta_2 = 0. \quad (4.41)$$

Resolviendo el sistema (4.40) y (4.41) para  $q$  y  $\mu$ , es posible encontrar la siguiente solución

$$q = -\frac{\beta_+}{2\alpha}, \quad (4.42)$$

$$\mu = \frac{i\beta_-}{\alpha}. \quad (4.43)$$

Bajo esta elección de  $\mu$  y  $q$  dados en (4.42) y (4.43), entonces  $\tilde{\lambda}_{0+}(z)$  y  $\tilde{s}_{0+}(z)$  pueden escribirse como

$$\tilde{\lambda}_{0+}(z) = \frac{-(2\alpha - \beta_+)z - \beta_-}{\alpha(z^2 - 1)}, \quad (4.44)$$

$$\tilde{s}_{0+}(z) = \frac{\Delta}{2\alpha^2(z^2 - 1)}. \quad (4.45)$$

Usando las funciones (4.44) y (4.45) es posible obtener las funciones auxiliares  $\tilde{\lambda}_{1+}$  y  $\tilde{s}_{1+}$ , mostradas abajo

$$\tilde{\lambda}_{1+}(z) = \frac{z^2\Gamma_1 - 4\beta_-z[\beta_+ - 3\alpha] + \Gamma_2}{2\alpha^2(z^2 - 1)^2}, \quad (4.46)$$

$$\tilde{s}_{1+}(z) = \frac{\Gamma_3[z(\beta_+ - 4\alpha) + \beta_-]}{2\alpha^3(z^2 - 1)^2}, \quad (4.47)$$

donde las expresiones  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_3$  son definidas de la siguiente forma

$$\Gamma_1 = 12\alpha^2 + 3\beta_1\beta_2 - 11\alpha\beta_+ - 3k^2 + 3\epsilon + D(5D + 2\alpha), \quad (4.48)$$

$$\Gamma_2 = 4\alpha^2 - 5k^2 + 5\epsilon - 5\beta_1\beta_2 - \alpha\beta_+ + D(3D - 2\alpha), \quad (4.49)$$

$$\Gamma_3 = D(D + 2\alpha) + k^2 - \epsilon - \beta_1\beta_2 - \alpha\beta_+. \quad (4.50)$$

Procediendo de forma análoga al átomo de Hidrógeno, la implementación de la hipótesis

de cuantización proporciona las siguientes ecuaciones

$$\delta_1 = \frac{\Delta_- \Delta_+}{4\alpha^4 (z^2 - 1)^2}, \quad (4.51)$$

$$\Delta_- = D(D + 2\alpha) - \beta_1\beta_2 + \alpha(\beta_+ - 4\alpha) + k^2 - \epsilon, \quad (4.52)$$

$$\Delta_+ = D(D + 2\alpha) - \beta_1\beta_2 - \alpha\beta_+ + k^2 - \epsilon. \quad (4.53)$$

Las únicas soluciones físicamente aceptables de (4.51) (se consideran únicamente eigenvalores positivos, los cuales conducen a energías reales) a la energía son

$$\epsilon_1 = 0, \quad (4.54)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\alpha(2D + \alpha)(D^2 + 2D\alpha + \alpha^2 + k^2)}{(D + \alpha)^2}, \quad (4.55)$$

$$\epsilon_3 = \frac{4\alpha(D + \alpha)(D^2 + 4D\alpha + 4\alpha^2 + k^2)}{(D + 2\alpha)^2}. \quad (4.56)$$

En el caso general, los eigenvalores pueden escribirse como

$$\epsilon_n = k^2 - D^2 + (D + n\alpha)^2 - \frac{D^2 k^2}{(D + n\alpha)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.57)$$

La figura 4.2 muestra los primeros cuatro eigenvalores  $\epsilon_n$  como función de  $k$ .

De acuerdo al resultado previo y con ayuda de (4.10), los niveles de energía para un electrón de Dirac en presencia de un campo magnético pueden expresarse como

$$E_{n\pm} = \pm \hbar v_F \sqrt{k^2 - D^2 + (D + n\alpha)^2 - \frac{D^2 k^2}{(D + n\alpha)^2}}. \quad (4.58)$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Estos niveles de energía suelen llamarse *niveles de Landau*. La energía del estado base,  $n = 0$  es igual cero e independiente de la presencia del campo magnético. Cabe mencionar que los niveles de energía positivos corresponden a la banda de conducción de Grafeno, mientras que los niveles de energía negativos corresponden a la banda de valencia.

Para el calculo de las eigenfunciones, es conveniente reescribir las funciones (4.44), (4.45), (4.46) y (4.47) colocando explícitamente el valor de  $\epsilon$  dado en (4.57). Por consi-

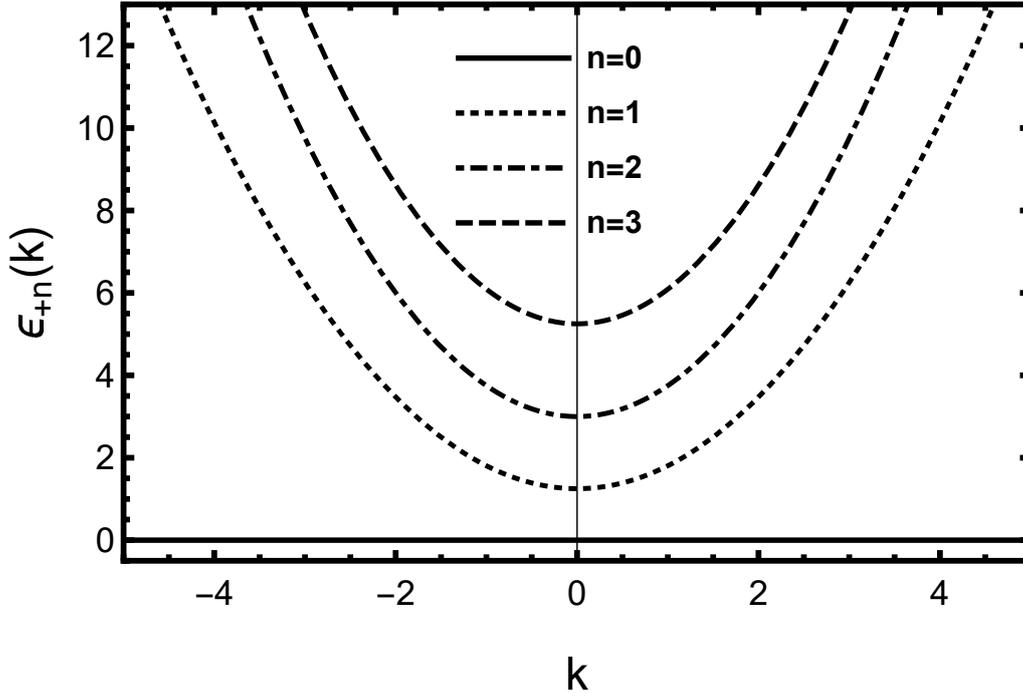


Figura 4.2: Gráfica de los primeros eigenvalores  $\epsilon_n$ , dados en (4.57). Con  $D = 1$ ,  $k = 1$  y  $\alpha = 0,5$ .

guiente se tiene

$$\tilde{\lambda}_{0+}(z) = -\frac{b-a-(a+b+2)z}{1-z^2}, \quad (4.59)$$

$$\tilde{s}_{0+}(z) = -\frac{(n-1)(n-1+a+b+1)}{1-z^2}, \quad (4.60)$$

$$\tilde{\lambda}_{1+}(z) = \frac{cz^2+dz+g}{z^2-1}, \quad (4.61)$$

$$\tilde{s}_{1+}(z) = \frac{(n-1)(n+a+b)[z(a+b)+b-a]}{z^2-1}, \quad (4.62)$$

con

$$a = -\frac{D}{\alpha} - n + \frac{ikD}{\alpha(D+n\alpha)}, \quad (4.63)$$

$$b = -\frac{D}{\alpha} - n - \frac{ikD}{\alpha(D+n\alpha)}, \quad (4.64)$$

$$c = (a+b)^2 + n(a+b+n-1) + 2(2a+2b+3), \quad (4.65)$$

$$d = 2(a+b+3)(a-b), \quad (4.66)$$

$$g = (a-b)^2 - n(a+b+n-1) + 2(a+b+1). \quad (4.67)$$

De acuerdo a las definiciones de  $\tilde{\lambda}_{0+}(z)$  y  $\tilde{s}_{0+}(z)$ ,  $n = 0$  queda excluido debido a que la solución no satisface las condiciones de frontera, es decir, las eigenfunciones  $\psi_+(x)$  no incluyen el eigenvalor cero. Ahora bien, se puede calcular las funciones  $\tilde{\alpha}(z)$ . Para  $n = 1$ , la ecuación (2.14) conduce a

$$\tilde{\alpha}_1(z) = \left. \frac{\tilde{s}_{1+}(z)}{\tilde{\lambda}_{1+}(z)} \right|_{n=1} = 0. \quad (4.68)$$

Mientras que para  $n = 2$ , se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_2(z) &= \left. \frac{\tilde{s}_{2+}(z)}{\tilde{\lambda}_{2+}(z)} \right|_{n=2}, \\ &= \frac{(D + \alpha)(D + 2\alpha)}{-z(D + \alpha)(D + 2\alpha) + Dki}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

De acuerdo a los resultados (4.68) y (4.69), las eigenfunciones para el estado base y el primer estado excitado son

$$f_{1+}(z) = c_1 \exp \left[ - \int \tilde{\alpha}_1(z) dz \right] = c_1, \quad (4.70)$$

$$f_{2+}(z) = c_2 \exp \left[ - \int \tilde{\alpha}_2(z) dz \right], \quad (4.71)$$

$$= c_2 [Dki - (D + \alpha)(D + 2\alpha)z], \quad (4.72)$$

$$= c_2 [(a + b + 2)(z - 1) + 2(a + 1)] \Big|_{n=2}. \quad (4.73)$$

Calculando las constantes de normalización  $c_1$  y  $c_2$ , se tiene que las funciones  $f_{n+}(z) = P_{n-1}^{(a,b)}(z)$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$  y donde  $P_n^{(a,b)}(z)$  son los polinomios de Jacobi. Esto se ve haciendo la comparación de (4.70) y (4.73) con los polinomios de la tabla 4.1.

Grado ( $n$ )	Polinomio
0	$P_0^{(\alpha,\beta)} = 1$
1	$P_1^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2} [2(\alpha + 1) + (\alpha + \beta + 2)(x - 1)]$
2	$P_2^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{8} [4(\alpha + 1)(\alpha + 2) + 4(\alpha + \beta + 3)(\alpha + 2)(x - 1) + (\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta + 4)(x - 1)^2]$

Tabla 4.1: Algunos valores para los polinomios Jacobi. Donde  $\alpha, \beta > -1$ .

Finalmente de (4.16) y (4.27), la función de onda para el Grafeno es

$$\begin{aligned}\psi_{n+}[z(x)] &= A(z+1)^{\frac{1+b}{2}}(z-1)^{\frac{1+a}{2}}e^{i(a-b)\arctan(-iz)} \\ &\quad \times P_{n-1}^{(a,b)}(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ &= A(z^2-1)^{\frac{1+\Re(a)}{2}}e^{-\Im(a)\alpha x}P_{n-1}^{(a,b)}(z),\end{aligned}\quad (4.74)$$

donde  $A$  es una constante de normalización,  $\Re(a)$  y  $\Im(a)$  es la parte real e imaginaria de  $a$ , respectivamente. Para el cálculo de las funciones  $\psi_-(x)$ , se procede de forma análoga a (4.74), sin embargo aquí  $\psi_-(x) \sim P_n^{(a,b)}(z)$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$  y estas funciones si consideran el eigenvalor  $\epsilon_0 = 0$ , a diferencia de  $\psi_+(x)$ . La figura 4.3, muestra la densidad de estados para los primeros tres niveles.

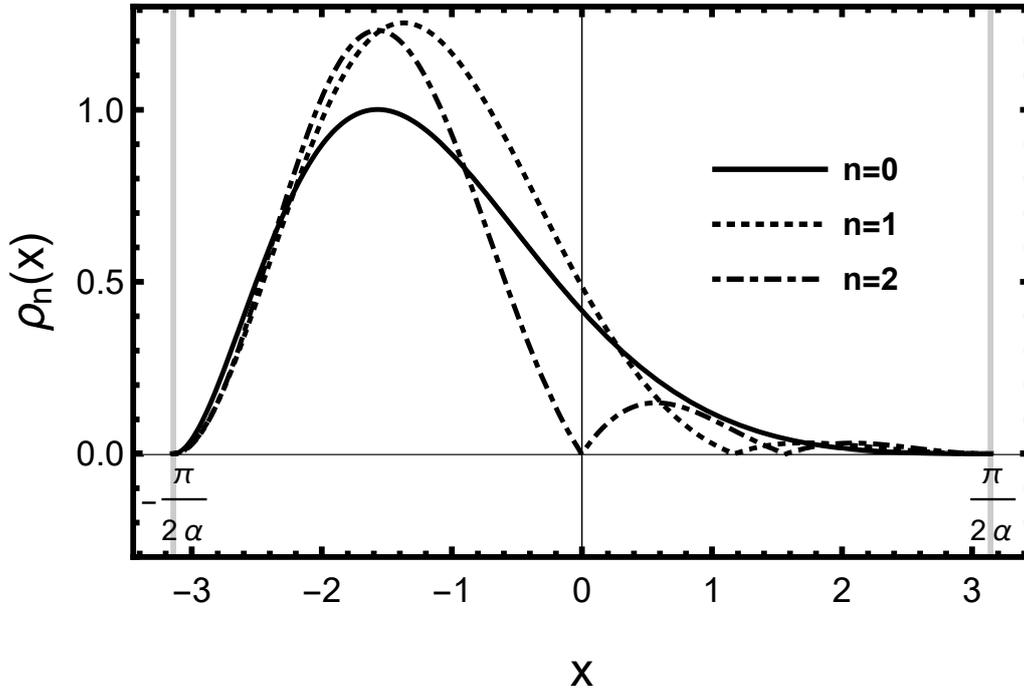


Figura 4.3: Gráfica de la densidad de estados  $\rho_n(x)$ . Con  $D = 1$ ,  $k = 1$  y  $\alpha = 0,5$ .

Es importante destacar que para el cálculo de las energías y funciones de onda para el Grafeno, usualmente se emplean técnicas de mecánica cuántica supersimétrica, como se puede ver en la referencia [19].

# Capítulo 5

## Modos cuasi normales

Los agujeros negros presentes en nuestro universo, no pueden permanecer completamente aislados, ellos deben de interactuar con la materia y energía presentes alrededor de ellos, esta interacción puede perturbar al agujero negro. Cuando un agujero negro es perturbado, su comportamiento resultante puede ser descrito en tres etapas:

1. La primera etapa corresponde a la radiación debida a las condiciones iniciales de la perturbación.
2. La segunda etapa corresponde a oscilaciones amortiguadas con frecuencias complejas. Los modos de dichas oscilaciones se denominan *modos cuasi normales*. Los modos cuasi normales son una manifestación de las oscilaciones de resonancia del propio espacio-tiempo del agujero negro y dominan poco después de la etapa transitoria inicial.

Estas frecuencias son independientes de las condiciones iniciales y solo dependen de las propiedades del agujero negro.

3. La tercera etapa en general corresponde a una ley de potencia de decaimiento de los campos.

Cabe mencionar que el estudio de los modos cuasi normales es muy útil para caracterizar a los agujeros negros, debido a que estas frecuencias dependen únicamente de los parámetros que describen al agujero negro, es decir, pueden considerarse como la huella

digital del agujero negro (ver [21]), por lo que el cálculo de las eigenfunciones en este caso es irrelevante.

## 5.1. Perturbaciones escalares

El análisis de los modos cuasi normales consiste en resolver una ecuación tipo Schrödinger con un potencial efectivo que depende de la función métrica que describe la solución de agujero negro. Si el agujero negro posee simetría esférica estática y es perturbado por un campo escalar, la ecuación que describe los modos cuasi normales es

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + [\omega^2 - V(r)]\psi(x) = 0. \quad (5.1)$$

La expresión (5.1) es conocida como la ecuación de Regge–Wheeler y donde  $x$  es la coordenada tortuga, definida como

$$\frac{dx}{dr} = \frac{1}{f_*(r)}, \quad (5.2)$$

y tiene la propiedad de barrer exclusivamente el espacio fuera del horizonte de eventos y no representar su interior, es decir, la coordenada tortuga cambia el horizonte de eventos del agujero negro por  $x \rightarrow -\infty$ , mientras que el infinito espacial le corresponde  $x \rightarrow \infty$ . El potencial efectivo  $V(r)$  puede expresarse como

$$V(r) = f_*(r) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{df_*(r)}{dr} \right], \quad (5.3)$$

siendo  $f_*(r)$  la función métrica del agujero negro (forma de medir las distancias espaciales y temporales) y  $l$  el índice del armónico esférico.

Los modos cuasi normales  $\omega$  se definen como soluciones de (5.1) sujeto a las condiciones de frontera

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-i\omega x}, & x \rightarrow -\infty, \\ e^{i\omega x}, & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (5.4)$$

de dichas condiciones de frontera se obtienen un conjunto discreto de soluciones con frecuencias complejas

$$\omega = \omega_r + i\omega_i. \quad (5.5)$$

Donde  $\omega_r$  es la frecuencia de oscilación del agujero negro y  $\omega_i$  describe la estabilidad del agujero negro (el lector puede consultar la referencia [22] para más detalles). Es importante mencionar que de acuerdo al valor de  $\omega_i$ , las siguientes situaciones, pueden ocurrir:

1. Si  $\omega_i < 0$ , se tiene una oscilación amortiguada, debido a que  $\psi(x, t) \sim e^{-i\omega t}$  decrece conforme el tiempo avanza y eventualmente tiende a cero para tiempos muy grandes, por lo que la oscilación del agujero negro cesara, este comportamiento describe una solución estable.
2. Cuando  $\omega_i > 0$ , la función  $\psi(x, t) \sim e^{-i\omega t}$  crece indefinidamente conforme el tiempo avanza, por lo que este comportamiento describe una solución inestable.
3. Mientras que si  $\omega_i = 0$ , la solución (5.1) describe los modos normales, es decir, el agujero negro permanecerá oscilando indefinidamente.

## 5.2. Agujero negro de Schwarzschild rodeado de quintaesencia

La materia de quintaesencia es uno de los varios mecanismos que permite proveer una fuente de presión negativa que permite contrarrestar a la interacción gravitacional y por lo tanto entender por que el universo se expande de forma acelerada.

La solución de un agujero negro rodeado por materia de quintaesencia fue discutida por Kiselev [23], esta permite obtener la función métrica de un agujero negro rodeado de quintaesencia al añadir el término de quintaesencia  $-\bar{c}/r^{3\omega_q+1}$  a la métrica del agujero negro.

Para el calculo de los modos cuasi normales, en este trabajo se elije al agujero negro

de Schwarzschild rodeado de quintaesencia, cuyo elemento de línea es descrito por

$$ds^2 = -f_*(r)dt^2 + \frac{1}{f_*(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (5.6)$$

donde la función métrica toma la siguiente forma

$$f_*(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\bar{c}}{r^{3\omega_q+1}}, \quad (5.7)$$

aquí  $M$  es la masa,  $\bar{c}$  es un factor de normalización y  $\omega_q$  el parámetro de estado que debe de satisfacer la siguiente restricción  $-1 < \omega_q < -1/3$ . Particularmente, en este trabajo se considerará el caso específico de  $\omega_q = -2/3$ , por consiguiente (5.7) se puede expresar como

$$f_*(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \bar{c}r. \quad (5.8)$$

Para poder proseguir, es primordial determinar el rango de valores que los parámetros que describen el agujero negro deben de tomar, esto facilita el análisis de los horizontes.

Los horizontes se definen como las raíces positivas de la función métrica dada por (5.8), lo cual conlleva a

$$r - 2M - \bar{c}r^2 = 0. \quad (5.9)$$

Esta ecuación posee dos raíces  $r_h$  y  $r_{\bar{c}}$

$$r_h = \frac{1 - \sqrt{1 - 8\bar{c}M}}{2\bar{c}}, \quad r_{\bar{c}} = \frac{1 + \sqrt{1 - 8\bar{c}M}}{2\bar{c}}, \quad (5.10)$$

siendo  $r_h$  el horizonte de eventos y  $r_{\bar{c}}$  el horizonte cosmológico o aparente ( $r_h < r_{\bar{c}}$ ). Ambos horizontes coinciden  $r_h = r_{\bar{c}}$  cuando  $M$  toma el valor de la masa crítica  $M_* = \frac{1}{8\bar{c}}$  y se tiene dos horizontes cuando  $M < M_*$ . En este trabajo se emplearan valores de los parámetros  $M$  y  $\bar{c}$  para el cual el agujero negro tendrá dos horizontes.

Para resolver (5.1), es más adecuado realizar el siguiente cambio de variable

$$\xi = \frac{1}{r}. \quad (5.11)$$

Cabe mencionar que el dominio de la variable  $r$  esta definido desde el horizonte de evento a infinito, es decir  $r \in [r_h, \infty)$ , mientras que con el cambio de variable  $\xi$ , su dominio queda definido desde cero a  $\frac{1}{r_h}$ , por lo que  $\xi \in \left(0, \frac{1}{r_h}\right]$ . Donde el cero de  $\xi$  corresponde al infinito de  $r$ .

Por lo tanto, la función métrica  $f_*(r)$  y el potencial  $V(r)$  se pueden expresar en la nueva variable  $\xi$  como

$$f_*(\xi) = \frac{p(\xi)}{\xi^2}, \quad (5.12)$$

$$p(\xi) = \xi^2 - 2M\xi^3 - \bar{c}\xi. \quad (5.13)$$

$$V(\xi) = p(\xi) \left[ l(l+1) + \frac{2M\xi^2 - \bar{c}}{\xi} \right]. \quad (5.14)$$

Colocando el potencial (5.14) en (5.1) y aplicando (5.11), se obtiene

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{p'}{p} \frac{d\psi}{d\xi} + \left\{ \frac{\omega^2}{p^2} - \frac{l(l+1)}{p} - \frac{2M\xi^2 - \bar{c}}{\xi p} \right\} \psi = 0, \quad (5.15)$$

donde  $p' = 2\xi - 6M\xi^2 - \bar{c}$  (aquí la prima significa derivar a  $p$  respecto a  $\xi$ ).

Redefiniendo la función de onda  $\psi(\xi)$

$$\psi(\xi) = \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{p}}, \quad (5.16)$$

entonces (5.15) se formula como

$$\left[ \frac{d^2}{d\xi^2} + \bar{V}(\xi) \right] \varphi(\xi) = 0, \quad (5.17)$$

con

$$\bar{V}(\xi) = \frac{4M^2\xi^4 - 4l(l+1)p + \bar{c}[2p' - \bar{c}] + 4\omega^2}{4p^2}. \quad (5.18)$$

Como se procedió en los capítulos anteriores, aquí también es necesario analizar los puntos

singulares de (5.18), los cuales son

$$\xi_\infty = 0, \quad (5.19)$$

$$\xi_0 = \frac{1}{r_{\bar{c}}} = \frac{2\bar{c}}{1 + \sqrt{1 - 8M\bar{c}}}, \quad (5.20)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{r_h} = \frac{2\bar{c}}{1 - \sqrt{1 - 8M\bar{c}}}, \quad (5.21)$$

donde se tiene que  $\xi_0 < \xi_1$ .

Para estos puntos singulares se tiene

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_\infty} (\xi - \xi_\infty)^2 \bar{V}(\xi) = 0, \quad (5.22)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} (\xi - \xi_0)^2 \bar{V}(\xi) = 0, \quad (5.23)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_1} (\xi - \xi_1)^2 \bar{V}(\xi) = 0, \quad (5.24)$$

dado que el límite está bien definido, entonces, los puntos  $\xi_\infty$ ,  $\xi_0$  y  $\xi_1$ , son puntos singulares regulares. En la variable  $r$ , los puntos  $r_h$ ,  $r_{\bar{c}}$  e infinito son puntos singulares regulares.

Para poder continuar con el cálculo de los modos cuasi normales, es necesario expresar las condiciones de frontera (5.4) en términos de la variable  $\xi$ . Para ello se obtiene primero la coordenada tortuga

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{dr}{f(r)} = - \int \frac{d\xi}{p(\xi)} = \int \frac{d\xi}{2M\xi(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1)}, \\ &= \frac{\ln(\xi - \xi_1)}{2M\xi_1(\xi_0 - \xi_1)} - \frac{\ln(\xi)}{2M\xi_1\xi_0} - \frac{\ln(\xi - \xi_0)}{2M\xi_0(\xi_0 - \xi_1)}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Por otra parte, si se calcula la gravedad superficial para  $\xi = \xi_\infty$ ,  $\xi = \xi_0$  y  $\xi = \xi_1$ , se obtienen entonces las siguientes expresiones

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{df}{dr} \Big|_{r \rightarrow r'} = - \frac{\xi^2}{2} \frac{df}{d\xi} \Big|_{\xi = \xi_\infty} = -M\xi_0\xi_1, \quad (5.26)$$

$$\kappa_0 = - \frac{\xi^2}{2} \frac{df}{d\xi} \Big|_{\xi = \xi_0} = M\xi_0(\xi_0 - \xi_1), \quad (5.27)$$

$$\kappa_1 = - \frac{\xi^2}{2} \frac{df}{d\xi} \Big|_{\xi = \xi_1} = -M\xi_1(\xi_0 - \xi_1). \quad (5.28)$$

Las ecuaciones anteriores permiten expresar a la coordenada tortuga  $x$  en términos de  $\xi$ , de la siguiente forma

$$x = \ln(\xi)^{\frac{1}{2\kappa}} + \ln(\xi - \xi_0)^{\frac{1}{2\kappa_0}} + \ln(\xi - \xi_1)^{\frac{1}{2\kappa_1}} . \quad (5.29)$$

Es importante mencionar que el resultado (5.29) en general es muy complicado obtenerlo de forma exacta y en otros casos hay que considerar aproximaciones a cierto orden.

Insertando (5.29) en la condición de frontera de onda entrante (5.4), se tiene

$$e^{-i\omega x} = \xi^{-\frac{i\omega}{2\kappa}} (\xi - \xi_0)^{-\frac{i\omega}{2\kappa_0}} (\xi - \xi_1)^{\frac{-i\omega}{2\kappa_1}} . \quad (5.30)$$

Cabe mencionar que el término dominante en la expresión anterior cuando  $x \rightarrow -\infty$  ( $r \rightarrow r_h$  y  $\xi \rightarrow \xi_1$ ), es el segundo término del lado derecho de (5.30), por ello, el escalamiento adecuado cerca del horizonte de eventos se puede formular como sigue

$$\psi_h \approx (\xi - \xi_1)^{-\frac{i\omega}{\kappa_1}} . \quad (5.31)$$

Por otra parte, cuando  $x \rightarrow \infty$ , la segunda condición de frontera de (5.4) ( $r \rightarrow \infty$  y  $\xi \rightarrow 0$ ) se puede formular como sigue

$$e^{i\omega x} = \xi^{\frac{i\omega}{2\kappa}} (\xi - \xi_0)^{\frac{i\omega}{2\kappa_0}} (\xi - \xi_1)^{\frac{i\omega}{2\kappa_1}} . \quad (5.32)$$

Aquí puede observarse que no hay un comportamiento dominante, como en (5.31), por lo que es más adecuado escalar el comportamiento divergente de (5.32) cuando  $x \rightarrow +\infty$ , como

$$\psi_\infty \approx e^{i\omega x} = e^{-i\omega \int \frac{d\xi}{p(\xi)}} . \quad (5.33)$$

Para implementar el Método de Iteración Asintótica en (5.17), se puede considerar

$$\psi(\xi) = f_3(\xi)\chi(\xi), \quad f_3(\xi) = (\xi - \xi_1)^{-\frac{i\omega}{\kappa_1}} e^{-i\omega \int \frac{d\xi}{p(\xi)}} . \quad (5.34)$$

Introduciendo  $f_3$  en (2.4) y (2.5), donde  $E = 0$ ,  $V = \bar{V}(\xi)$ , se obtiene la forma estándar

$$\frac{d^2\chi(\xi)}{d\xi^2} = \lambda_0(\xi)\frac{d\chi(\xi)}{d\xi} + s_0(\xi)\chi(\xi), \quad (5.35)$$

donde

$$\lambda_0(\xi) = \frac{2i\omega}{\kappa_1(\xi - \xi_1)} - \frac{p' - 2i\omega}{p}, \quad (5.36)$$

$$s_0(\xi) = \frac{l(l+1)\xi^2 + 2M\xi^3 - \bar{c}\xi}{\xi^2 p} - \frac{i\omega(i\omega + \kappa_1)}{\kappa_1^2(\xi - \xi_1)^2} + \frac{i\omega(p' - 2i\omega)}{\kappa_1 p(\xi - \xi_1)}. \quad (5.37)$$

A diferencia de los dos casos mostrados anteriormente en este trabajo, la solución de los modos cuasi normales requiere de un proceso completamente numérico. Es por ello que se empleara el Método de Iteración Asintótico Mejorado.

El siguiente paso, es tomar los desarrollos de Taylor de las funciones  $\lambda_0(\xi)$  y  $s_0(\xi)$  alrededor de un punto  $\xi = \hat{\xi}$ , para después insertar dichos coeficientes en (2.24), obteniendo una ecuación algebraica que permiten calcular de forma numérica las frecuencias  $\omega$ , para una elección adecuada de  $n$ . En este trabajo se utilizó el software Mathematica para realizar todos estos cálculos numéricos, pero el lector puede consultar el código en Python en la referencia [7].

Es importante mencionar que la elección del punto  $\hat{\xi}$  debería de ser independiente del valor obtenido para  $\omega$ , pero en la práctica hay variaciones muy pequeñas al cambiar el valor  $\hat{\xi}$ . Sin embargo, se ha encontrado que si  $\hat{\xi}$  corresponde al valor donde el potencial (5.14) alcanza su máximo valor, entonces se obtienen mejores resultados para  $\omega$ .

Las Tablas 5.1 y 5.2 muestran los resultados obtenidos de los modos cuasi normales para diferentes valores del parámetro de quintaesencia  $\bar{c}$  y para el parámetro de masa  $M$ . Si  $\bar{c}$  y  $M$  incrementan, la parte real e imaginaria de las frecuencias de los modos cuasi normales disminuyen.

Como se menciona en los párrafos previos, la parte real de los modos cuasi normales representa la frecuencia de oscilación, entonces se puede indicar que la presencia de

quintaesencia suprime la oscilación del agujero negro y su amortiguamiento aumenta con forme aumenta la presencia de quintaesencia, es decir, aumenta el valor de  $\bar{c}$ .

$\bar{c} (l = 3)$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
0.1	3.05551-0.42448 <i>i</i>	2.99338-1.28481 <i>i</i>	2.87824-2.17747 <i>i</i>
0.2	2.71143-0.36452 <i>i</i>	2.66079-1.10242 <i>i</i>	2.56626-1.86562 <i>i</i>
0.3	2.33573-0.30192 <i>i</i>	2.29682-0.91214 <i>i</i>	2.22349-1.54074 <i>i</i>
$\bar{c} (l = 4)$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
0.1	3.92815-0.42377 <i>i</i>	3.87902-1.27827 <i>i</i>	3.78510-2.15308 <i>i</i>
0.2	3.48940-0.36373 <i>i</i>	3.44934-1.09661 <i>i</i>	3.37241-1.84534 <i>i</i>
0.3	3.00923-0.30116 <i>i</i>	2.97848-0.90735 <i>i</i>	2.91907-1.52495 <i>i</i>

Tabla 5.1: Frecuencias de los modos cuasi normales para un agujero negro de Schwarzschild rodeado de quintaesencia, para  $M = 0,2$ .

$M (l = 3)$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
0.1	6.43724-0.90740 <i>i</i>	6.30162-2.74749 <i>i</i>	6.05110-4.65941 <i>i</i>
0.2	3.05551-0.42448 <i>i</i>	2.99338-1.28481 <i>i</i>	2.87824-2.17747 <i>i</i>
0.3	1.92450-0.26318 <i>i</i>	1.88690-0.79629 <i>i</i>	1.81697-1.34860 <i>i</i>
$M (l = 4)$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
0.1	8.27166-0.90613 <i>i</i>	8.16446-2.73386 <i>i</i>	7.95991-4.60668 <i>i</i>
0.2	3.92815-0.42377 <i>i</i>	3.87902-1.27827 <i>i</i>	3.78510-2.15308 <i>i</i>
0.3	2.47539-0.26268 <i>i</i>	2.44564-0.79215 <i>i</i>	2.38865-1.33369 <i>i</i>

Tabla 5.2: Valores de los modos cuasi normales para un agujero negro de Schwarzschild rodeado de quintaesencia, para  $\bar{c} = 0,1$ .

# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo se han estudiado tres casos específicos donde se ha mostrado como implementar el Método de Iteración Asintótica para hallar las eigenfunciones y los eigenvalores a partir de la ecuación tipo Schrödinger asociada a cada caso. Como una alternativa a los métodos y técnicas de soluciones de ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden ya conocidos en la literatura.

Por otra parte, la elección de los ejemplos mostrados en este trabajo, tiene la intención de que el lector no experto tenga un primer acercamiento a los temas de mecánica cuántica y agujeros negros y también sirva de motivación para lectores más avanzados a adentrarse más a dichas temáticas.

Como primer caso, se estudio la ecuación radial del Átomo de Hidrógeno y se mostró que el Método de Iteración Asintótica, proporciona los resultados ya conocidos en los libros de texto de mecánica cuántica. El objetivo para este ejemplo es mostrar otra forma alternativa de resolver la parte radial del Átomo de Hidrógeno.

En el segundo caso, se resolvió la ecuación de Dirac-Weyl para un perfil de campo magnético proporcional a una secante cuadrada. De los resultados obtenidos, se tiene que los estados ligados corresponden únicamente al movimiento de las cargas en la dirección  $x$ , donde los niveles de Landau presentan una dependencia explícita del numero de onda  $k$ . Por lo que la velocidad promedio en la dirección  $y$  de esos estados ligados pueden ser calculados al tomar la derivada respecto de  $k$  a los niveles de energía.

En el estudio de Grafeno, usualmente se emplea la técnica de la factorización, y también se suele recurrir a definir variables complejas como (4.16). Referente a la ecuación (4.34), con la definición de  $\tilde{\lambda}_{0+}$  y  $\tilde{s}_{0+}$  dados en (4.59) y (4.60), cabe mencionar que esta es la ecuación diferencial de Jacobi, por lo que  $n$  no puede incluir al cero. Sin embargo en este trabajo se ha mostrado que el Método de Iteración Asintótica proporciona la misma solución.

El tercer caso presentado en este trabajo, se enfoca al cálculo los modos cuasi normales (eigenvalores) para un campo escalar en un agujero negro de Schwarzschild rodeado de quintaesencia. Como primer paso, se realizó el análisis de los horizontes y se determinó la región de valores de los parámetros, para los cuales se tienen uno o dos horizontes.

Aquí vale la pena enfatizar que un factor fundamental para la implementación del Método de Iteración Asintótica, es factorizar adecuadamente el comportamiento asintótico en los horizontes e infinito, tal como se muestra en (5.31) y (5.33) y dicho análisis en general dependerá de la solución de agujero negro que se estudie.

De los resultados obtenidos de las frecuencias de los modos cuasi normales, se encontró que el agujero negro de Schwarzschild rodeado de quintaesencia, es estable para perturbaciones escalares cuando el factor de normalización aumenta.

Aunque los resultados mostrados en las Tablas 5.1-5.2, se consideran los modos para algunos valores de  $n$  y  $l > n$ , el Método de Iteración Asintótica es lo suficientemente robusto y funciona adecuadamente para valores de  $l < n$ , a diferencia de otros como WKB (Gregor Wentzel, Hendrik Kramers y Leon Brillouin) ver [24] para mayor referencia.

# Bibliografía

- [1] Leaver, E. W. (1985) An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes. *Proc. R. Soc. London. A. Math. Phys. Sci.*, **402**(1823), 285–298.
- [2] Eshghi, M. and Mehraban, H. (2017) Exact solution of the Dirac-Weyl equation in graphene under electric and magnetic fields. *Comptes Rendus Physique*, **18**(1), 47–56 Prizes of the French Academy of Sciences 2015 Prix de l’Académie des sciences 2015.
- [3] Ciftci, H., Hall, R. L., and Saad, N. (nov, 2003) Asymptotic iteration method for eigenvalue problems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**(47), 11807–11816.
- [4] Arceo, R., Sandoval, L. M., Pedraza, O., López, L. A., León-Soto, G., and Martínez-Castro, J. (2021) Elastic scattering for  $\pi$ +p using the Klein–Gordon equation. *Int. J. Mod. Phys. E*, **30**(06), 2150048.
- [5] Hairer, E., Lubich, C., and Roche, M. (2006) The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods, Lecture Notes in MathematicsSpringer Berlin Heidelberg, .
- [6] Bayrak, O. and Boztosun, I. (2007) Application of the asymptotic iteration method to the exponential cosine screened Coulomb potential. *Int. J. Quantum Chem.*, **107**(5), 1040–1045.
- [7] Karakoç, M. (2021) AIMpy: A Python code to solve Schrödinger-like equations with the asymptotic iteration method. *Int. J. Mod. Phy. C*, **32**(02), 2150017.
- [8] López-Juárez, N. Y., Pedraza-Ortega, O., López-Suarez, L. A., and Arceo-Reyes, R. (dic., 2023) Estados ligados en el Grafeno en presencia de campo magnético.

- Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, **11**(Especial5), 161–168.
- [9] Alsadi, K. S. (2020) Bound state solutions of a Dirac particle undergoing a tensor interaction potentials via asymptotic iteration method. *J. Taibah Univ. Sci.*, **14**(1), 1156–1163.
- [10] Jiménez-Camargo, M., Pedraza-Ortega, O., and López-Suarez, L. A. (abr., 2022) Modos cuasi normales para un agujero negro Schwarzschild de Sitter rodeado de quintaesencia: Método de Iteración Asintótica. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, **10**(Especial), 29–35.
- [11] Cho, H. T., Cornell, A. S., Doukas, J., Huang, T. R., and Naylor, W. (2012) A New Approach to Black Hole Quasinormal Modes: A Review of the Asymptotic Iteration Method. *Adv. Math. Phys.*, **2012**, 281705.
- [12] Boztosun, I., Karakoc, M., Yasuk, F., and Durmus, A. (06, 2006) Asymptotic iteration method solutions to the relativistic Duffin-Kemmer-Petiau equation. *J. Math. Phys.*, **47**(6), 062301.
- [13] Ciftci, H., Hall, R. L., and Saad, N. (2005) Perturbation theory in a framework of iteration methods. *Phys. Lett. A*, **340**(5), 388–396.
- [14] Kotov, V. N., Uchoa, B., Pereira, V. M., Guinea, F., and Castro Neto, A. H. (Jul, 2012) Electron-Electron Interactions in Graphene: Current Status and Perspectives. *Rev. Mod. Phys.*, **84**, 1067–1125.
- [15] da Silva Leite, L., Filgueiras, C., Cogollo, D., and Silva, E. O. (2015) Influence of spatially varying pseudo-magnetic field on a 2D electron gas in graphene. *Physics Letters A*, **379**(10), 907–911.
- [16] Castro Neto, A. H., Guinea, F., Peres, N. M. R., Novoselov, K. S., and Geim, A. K. (Jan, 2009) The electronic properties of graphene. *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 109–162.

- [17] Miransky, V. A. and Shovkovy, I. A. (2015) Quantum field theory in a magnetic field: From quantum chromodynamics to graphene and Dirac semimetals. *Physics Reports*, **576**, 1–209 Quantum field theory in a magnetic field: From quantum chromodynamics to graphene and Dirac semimetals.
- [18] Ghosh, T. K. (dec, 2008) Exact solutions for a Dirac electron in an exponentially decaying magnetic field. *Journal of Physics: Condensed Matter*, **21**(4), 045505.
- [19] Kuru, S., Negro, J., and Nieto, L. M. (oct, 2009) Exact analytic solutions for a Dirac electron moving in graphene under magnetic fields. *J. Phys.: Condens. Matter.*, **21**(45), 455305.
- [20] de Souza, J., de Lima Ribeiro, C., and Furtado, C. (2014) Bound states in disclinated graphene with Coulomb impurities in the presence of a uniform magnetic field. *Physics Letters A*, **378**(30), 2317–2324.
- [21] Konoplya, R. A. and Zhidenko, A. (Jul, 2011) Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory. *Rev. Mod. Phys.*, **83**, 793–836.
- [22] Berti, E., Cardoso, V., and Starinets, A. O. (jul, 2009) Quasinormal modes of black holes and black branes. **26**(16), 163001.
- [23] Kiselev, V. (2003) Quintessence and black holes. *Class. Quant. Grav.*, **20**, 1187–1198.
- [24] Barrientos, G., Pedraza, O., López, L. A., and Arceo, R. (Aug., 2022) Modos cuasi-normales de un agujero negro de Einstein–Gauss–Bonnet rodeado de quintaesencia: perturbaciones escalares y electromagnéticas. *Rev. Mex. de Fís.*, **68**(5 Sep-Oct), 050704 1–.