



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DEL ESTADO DE HIDALGO  
ÁREA ACADÉMICA DE INGENIERÍA

---

---

CENTRO DE INVESTIGACIÓN AVANZADA EN  
INGENIERÍA INDUSTRIAL

*Modelo Matemático de los Sistemas Barra Flexible y  
Péndulo Triple para el Desarrollo de un Sistema  
Robótico*

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Industrial

P R E S E N T A

*M. en C. Ivan de Jesús Rivas Cambero*

*DIRECTOR DE TESIS:*

*Dr. José Manuel Sausedo Solorio*

*Febrero de 2012*



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO**  
**INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**  
**ÁREA ACADÉMICA DE INGENIERÍA**

OFICIO No. AAI/051/2012

**M. en C. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO**  
**DIRECTOR DE CONTROL ESCOLAR**  
**DE LA UAEH**  
**P R E S E N T E .**

Por este conducto le comunico que la Comisión Revisora asignada al trabajo de tesis del alumno del Doctorado en Ciencias en Ingeniería Industrial IVÁN DE JESÚS RIVAS CAMBERO, con número de cuenta 177402, quien presenta el tema "MODELO MATEMÁTICO DE LOS SISTEMAS BARRA FLEXIBLE Y PÉNDULO TRIPLE PARA EL DESARROLLO DE UN SISTEMA ROBÓTICO", después de revisar la tesis y constituida como Jurado, ha decidido autorizar la impresión de la misma, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación se anotan las firmas de conformidad de los integrantes del Jurado:

PRESIDENTE: DR. JUAN CARLOS SECK TUOH MORA  
VOCAL: DR. JOSÉ MANUEL SAUSEDO SOLORIO  
SECRETARIO: DR. NORBERTO HERNÁNDEZ ROMERO  
SUPLENTE: DR. JOSELITO MEDINA MARÍN

Sin otro particular, me despido de usted enviándole un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**  
**"AMOR, ORDEN Y PROGRESO"**  
Mineral de la Reforma, Hgo., a 15 de febrero de 2012.

**DR. JOSÉ RAMÓN CORONA ARMENTA**  
**SUBJEFE ACADÉMICO DEL ÁREA**  
**ACADÉMICA DE INGENIERÍA**

e.e.p. Archivo



Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
Carretera Pachuca - Tulancingo Km. 4.5, Ciudad Universitaria,  
Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C.P. 42184  
Tel. +52 771 7172000 exts 2230, 2231, Fax 2109  
avilap@uah.edu.mx



## **Dedicatoria**

*A mi esposa Alma y mi hija Isis quienes han llegado a ser la motivación de mi vida.*

*Ivan de Jesús Rivas Cambero*

## **Agradecimientos**

*A mi esposa Alma por todo el gran apoyo que me ha brindado y por la paciencia que ha mostrado en este proceso y por formar parte de mi proyecto de vida.*

*A mis padres Rodolfo<sup>t</sup> y Zonorina, por la formación que me han dado y por todo el apoyo incondicional que siempre he recibido para realizar mis proyectos.*

*A mis familiares y amigos de quienes siempre he recibido su apoyo incondicional.*

*A mi Asesor el Dr. José Manuel Sausedo Solorio, por sus recomendaciones y enseñanzas para desarrollar este trabajo de investigación.*

*Al comité revisor y sinodales por sus valiosas sugerencias y consejos que ayudaron a mejorar este trabajo.*

*A la Universidad Politécnica de Tulancingo que me ha abierto sus puertas para permanecer a esta gran comunidad y sobre todo por los diferentes apoyos que he recibido para realizar mis estudios de doctorado.*

*A la comunidad universitaria de la UAEH, en especial al área de ingeniería industrial, de quienes siempre recibí un trato amable y por la confianza que me brindaron.*

## **Resumen**

En este documento se presenta una propuesta para el desarrollo de un modelo matemático e implementación de un prototipo de una estructura robótica flexible con seis extremidades que se desplaza sobre superficies irregulares. Cada extremidad cuenta con tres grados de libertad e incluyen un elemento flexible. Se implementan dos controladores, un difuso y un PID sobre el prototipo, para que se mantenga de forma horizontal cuando se desplaza sobre superficies irregulares o recibe alguna perturbación; la acción de control se aplica sobre los elementos flexibles. El prototipo se implementa sobre la adaptación de un kit de desarrollo de un robot humanoide Bioloid Premium. Para el desarrollo del modelo, se considera que los elementos rígidos de cada extremidad son parte del cuerpo del robot y se agrupan en dos secciones de tres extremidades cada una, quedando así solo una estructura con dos elementos flexibles. Bajo estas consideraciones se analizan las extremidades como una barra flexible por medio de la ecuación de Euler-Bernoulli, que permite encontrar las coordenadas de la nueva posición del extremo final de la barra cuando es sometido a una fuerza que la hace flexionar. Este análisis requiere la solución de integrales elípticas por métodos numéricos. En este sentido, también se presenta el análisis dinámico de un péndulo triple como parte de las técnicas de modelado de sistemas con  $n$  elementos interconectados. De este estudio se obtiene el comportamiento de las frecuencias de resonancia y el de sus desplazamientos cuando se hace variar el coeficiente de fricción. Finalmente se presentan los resultados obtenidos de la respuesta de los controladores implementados en simulación y en el prototipo, obteniendo un comportamiento similar en ambos casos con un error máximo de dos grados aproximadamente.

## **Abstract**

In this document a proposal to development of mathematical model and its implementation of a prototype about flexible robotic structure is presented, the flexible robot walks on irregular surfaces and has six legs, each one has three degree of freedom, two links are rigid and the last one is the flexible link. Both fuzzy logic controller and PID controller are implemented for keep the prototype in horizontal position when is walking on irregular surface or receive a perturbation. The control response is applied to flexible link. A start kit of Bioloid Premium of humanoid robot is used to get the prototype of flexible robot. The rigid links in the legs are considered as part of the robot body and get together in two groups with three legs, so that we have structure only whit two flexible legs. So, flexible links are analyzed as a flexible beam using Euler-Bernoulli Equation to find a new coordinate or position of the end when a force is applied. The solution of elliptical integral by numerical methods is used for to do the analysis of flexible beam. In addition, the dynamical analysis of triple pendulum also is included to provide modeling techniques in systems with  $n$  links. For this case, the behavior of resonance frequencies and its shift are found, for changes in the friction coefficient. Finally, the results of the response of the controllers in simulation and implemented in the prototype are presented with a similar behavior in both cases with a maximum error of two degrees is obtained.

# Contenido

<b>Introducción</b>	1
<b>1 Antecedentes y estado del arte</b>	
1.1 Introducción	14
1.2 Sistemas dinámicos multicuerpos	15
1.3 Brazos de robots rígidos y flexibles	17
1.4 Modelado de sistemas robóticos flexibles	18
1.5 Controladores en los robots flexibles	21
1.6 Estado del arte	28
1.7 Conclusión	29
<b>2 Análisis de un péndulo triple</b>	
2.1 Introducción	30
2.2 Modelo matemático	35
2.3 Solución numérica	38
2.4 Análisis de respuesta en frecuencia	42
2.5 Deslizamiento de la frecuencia de resonancia	45
2.6 Conclusión	48
<b>3 Análisis de una barra flexible</b>	
3.1 Introducción	49
3.2 Ecuaciones de Euler- Bernoulli	50
3.3 Pequeñas flexiones	51
3.4 Grandes flexiones	54

3.5 Cálculo numérico	58
3.6 Implementación en software	62
3.7 Conclusión	65
<b>4 Modelado e implementación del prototipo</b>	
4.1 Introducción	66
4.2 Modelo del prototipo	68
4.3 Simulación del modelo	77
4.4 Ajuste de curvas	79
4.5 Implementación de prototipo	86
4.6 Programación del prototipo	88
4.7 Conclusión	91
<b>5 Sintonización de controladores</b>	
5.1 Introducción	93
5.2 Pruebas de Inclinación	95
5.3 Controlador Difuso	99
5.3.1 Pruebas al controlador difuso	106
5.4 Controlador PID	110
5.4.1 Pruebas al controlador PID	115
5.5 Conclusión	118
<b>Conclusiones generales</b>	120
<b>Referencias</b>	126
<b>Apéndice A</b>	134
<b>Apéndice B</b>	138

## Índice de Figuras

<b>Figura 2.1</b>	Esquema del péndulo triple	36
<b>Figura 2.2</b>	Comportamiento típico de un péndulo triple que se obtiene variando la frecuencia de perturbación y el coeficiente de amortiguamiento. a) comportamiento periódico con $f = 0.3 \text{ Hz}$ y amortiguamiento de $1 \text{ Nm/s}^2$ , b) comportamiento cuasi-periódico con $f = 1.5 \text{ Hz}$ , amortiguamiento de $0.1 \text{ Nm/s}^2$ y c) comportamiento caótico con $f = 0.5 \text{ Hz}$ y amortiguamiento de $0.01 \text{ Nm/s}^2$ .	40
<b>Figura 2.3</b>	Diagrama de fase para las variables $\theta_3$ contra $\theta_1$ calculadas con los mismos valores usados para la figura 3.2	41
<b>Figura 2.4</b>	Comparación entre la respuesta del modelo lineal y el no lineal. a) respuesta en serie de tiempo para el ángulo del tercer enlace con frecuencia de perturbación de $f = 0.5 \text{ Hz}$ , b) diferencia entre las dos respuestas de serie de tiempo. El valor máximo de la diferencia está en función de la amplitud de perturbación $\eta_0$ , que para este caso tiene un valor de 0.03.	42
<b>Figura 2.5</b>	Frecuencias de resonancia del péndulo triple lineal para el ángulo del último enlace como función de la frecuencia de perturbación. a) respuesta de frecuencia teórica usando transformada de la place. b) diagrama de bifurcación para el modelo de pequeñas oscilaciones usando la solución de las ecuaciones diferenciales.	43
<b>Figura 2.6</b>	a) Respuesta a la frecuencia del modelo no lineal. El eje vertical es el máximo ángulo observado en el último enlace del péndulo triple, b) ancho del pico de frecuencia de resonancia.	45
<b>Figura 2.7</b>	Valores máximos en estado estable de cada ángulo usando una frecuencia igual al primer pico de la frecuencia de resonancia. La escala del eje vertical es logarítmica.	46

<b>Figura 2.8</b>	Comportamiento del deslizamiento de la segunda frecuencia de resonancia.	47
<b>Figura 3.1</b>	Esquema de una barra flexible empotrada y su sección transversal.	52
<b>Figura 3.2</b>	Esquema de una barra flexible para grandes flexiones sometida a una fuerza en el extremo libre.	55
<b>Figura 3.3</b>	Esquema de barra flexible para identificar el ángulo $\varphi_0$ en el extremo libre.	59
<b>Figura 3.4</b>	Esquema de barra flexible para encontrar $y_f$ por interpolación.	62
<b>Figura 3.5</b>	Algoritmo para obtener $(x, y)$ a lo largo de una barra empotrada.	63
<b>Figura 3.6</b>	Representación de la barra con los resultados obtenidos.	64
<b>Figura 4.1</b>	Esquema de propuesta para la extremidad del robot con 3 grados de libertad, dos enlaces rígidos y uno flexible.	68
<b>Figura 4.2</b>	Esquema de la propuesta del robot considerando los elementos rígidos como parte del cuerpo del robot.	69
<b>Figura 4.3</b>	Esquema de prueba para robot, considerando solo las extremidades flexibles sobre una estructura auxiliar rígida.	70
<b>Figura 4.4</b>	Propuesta de la estructura de prueba y auxiliar con inclinación	71
<b>Figura 4.5</b>	Esquema del enlace flexible configurado para analizar como una barra empotrada.	74
<b>Figura 4.6</b>	Esquema de prueba para obtener el modelo de la estructura del robot.	76
<b>Figura 4.7</b>	Comportamiento de las extremidades flexibles del robot, obtenido con la solución del modelo del robot propuesto.	79
<b>Figura 4.8</b>	Comportamiento de barra flexible empotrada, ante una fuerza variable aplicada en el extremo libre.	80
<b>Figura 4.9</b>	Aproximación polinomial de segundo orden con mínimos cuadrados de la barra flexionada cuando se le aplica una fuerza en el extremo libre.	81
<b>Figura 4.10</b>	Error estándar del estimado del comportamiento de flexión de la barra empotrada sometida a diferentes fuerzas.	82

<b>Figura 4.11</b>	Comportamiento flexible de la barra con una fuerza aplicada verticalmente desde 0.5 N hasta 5 N.	83
<b>Figura 4.12</b>	Esquema de estructura con extremidades flexibles y distribución de fuerzas.	84
<b>Figura 4.13</b>	Distribución de fuerzas sobre la barra de aluminio flexible para analizar estructura con extremidades flexibles.	84
<b>Figura 4.14</b>	Representación del comportamiento de las fuerzas total y sus respectivos componentes, para mantener la misma flexión de la barra cuando tiene 5 N de forma vertical.	86
<b>Figura 4.15</b>	Vista de frente del prototipo del robot con seis extremidades y el tercer elemento flexible de cada extremidad.	87
<b>Figura 4.16</b>	Vista superior del prototipo de robot con seis extremidades con el tercer elemento flexible en cada extremidad.	87
<b>Figura 4.17</b>	Vista de frente con inclinación incorporada, del prototipo de robot con seis extremidades con el tercer elemento flexible.	88
<b>Figure 4.18</b>	Ventana del software roboplus motion para generar las rutinas del robot	89
<b>Figura 4.19</b>	Ventana de trabajo del software roboplus task, donde se genera el programa general del robot.	91
<b>Figura 5.1</b>	Señal de la velocidad de inclinación del robot en la rutina de inclinación solo en un sentido. Se muestra la señal original y la filtrada.	96
<b>Figura 5.2</b>	Desplazamiento angular de la inclinación del robot, calculada por medio de la integral de la señal de velocidad.	97
<b>Figura 5.3</b>	Velocidad de inclinación del robot con una rutina que lo lleva a una inclinación máxima, posteriormente lo regresa a su posición inicial.	98
<b>Figura 5.4</b>	Comportamiento del ángulo de inclinación obtenido de la señal de velocidad de la figura 5.3.	99
<b>Figura 5.5</b>	Diagrama de bloques de un sistema con control difuso.	100
<b>Figura 5.6</b>	Esquema de las funciones de membresía empleadas en el error,	102

	derivada de error y salida de control.	
<b>Figura 5.7</b>	Barras para la defusificación de la salida de control del sistema.	105
<b>Figura 5.8</b>	Comportamiento del ángulo de inclinación cuando el robot es perturbado con una función escalón.	107
<b>Figura 5.9</b>	Respuesta del controlador ante el desplazamiento angular del robot de la figura 5.8	108
<b>Figura 5.10</b>	Respuesta de la velocidad de inclinación del sistema robótico flexible con un controlador difuso, ante una rutina de inclinación.	109
<b>Figura 5.11</b>	Inclinación del sistema con el controlador difuso, obtenida con la implementación en el robot y con simulación en Matlab.	110
<b>Figura 5.12</b>	Diagrama de bloques de un sistema SISO con un controlador PID.	111
<b>Figura 5.13</b>	Cuerva de Respuesta de un sistema con forma de S	112
<b>Figura 5.14</b>	Respuesta del sistema robótico para el ángulo de inclinación ante una perturbación de escalón unitario.	114
<b>Figura 5.15</b>	Ángulo de inclinación para una rutina del robot simulando una perturbación de una función escalón.	115
<b>Figura 5.16</b>	Respuesta libre del controlador PID ante una perturbación de entrada escalón.	116
<b>Figura 5.17</b>	Respuesta de la velocidad del sistema robótico flexible con un controlador PID, ante una rutina de inclinación.	117
<b>Figura 5.18</b>	Inclinación del sistema con el controlador PID, obtenido con la implementación en el robot y con simulación en Matlab.	118

## Índice de tablas

<b>Tabla 2.1</b>	Ecuaciones para las distancias verticales y horizontales.	36
<b>Tabla 3.1</b>	Momentos de inercia con vigas de diferente sección transversal.	54
<b>Tabla 4.1</b>	Descomposición de las fuerzas para igualar el efecto de flexión de una fuerza vertical de 5 N.	85
<b>Tabla 5.1</b>	Matriz de reglas lingüísticas para el control difuso.	105
<b>Tabla 5.2</b>	Reglas de sintonización de Ziegler-Neohols para respuesta al escalón unitario.	113

## Introducción

Uno de los conceptos más importantes en nuestra percepción del universo y de la vida es el movimiento. Existen muchas manifestaciones diferentes de movimiento: físico, químico, biológico, económico, etc. Sin embargo en todos los casos el movimiento está en un conjunto llamado espacio fase y un conjunto de mapas que describen los cambios de configuración en un instante de tiempo  $t$ ; como una fotografía instantánea [1].

Los problemas de la dinámica han fascinado a los científicos durante miles de años. Los más notables fueron los de la mecánica celeste, consistente en el estudio de movimientos de cuerpos dentro del sistema solar. Los intentos de Newton para comprender y modelar los movimientos observados de los planetas incorporaron las leyes de Kepler y dieron origen al desarrollo del cálculo. Así surgió el planteamiento de modelos y problemas dinámicos con ecuaciones diferenciales ordinarias [2].

Los sistemas dinámicos son sistemas cuyos parámetros internos (variables de estado) siguen una serie de reglas temporales. Se llaman sistemas porque están descritos por un conjunto de ecuaciones y dinámicos porque sus parámetros varían con respecto a alguna variable que generalmente es el tiempo. Éstos pueden dividirse en dos grandes clases: aquellos en los que el tiempo varía continuamente y en los que el tiempo transcurre discretamente. Los de tiempo continuo se expresan con ecuaciones diferenciales; éstas pueden ser ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs), ecuaciones

---

---

diferenciales en derivadas parciales (PDEs) y ecuaciones diferenciales con retrasos (DDEs). Por otro, lado si el tiempo es discreto los sistemas se describen por medio de ecuaciones en diferencias (DEs), también conocidas como mapas iterados.

Los sistemas dinámicos se clasifican generalmente en lineales y en no lineales. Los primeros son relativamente sencillos de analizar y de trabajar, ya que la solución del sistema sujeto a condiciones complejas se puede lograr simplificando el problema con la suma de respuestas con condiciones más sencillas. Existen técnicas ampliamente usadas para analizar estos sistemas como la transformada de Laplace, el principio de superposición, la transformada de Fourier, etc. Por lo anterior es usual encontrar soluciones analíticas exactas de sistemas lineales, aunque también es muy común recurrir a métodos geométricos para visualizar la evolución del sistema en el tiempo. En cambio el análisis de un sistema no lineal puede ser mucho más complejo (ya que el problema no se puede simplificar a instancias más sencillas), en ocasiones no se podrán encontrar soluciones analíticas exactas, por lo tanto la representación de la dinámica del sistema se apoya de técnicas geométricas de visualización y análisis. La forma de visualizar el comportamiento de las variables de estado de un sistema dinámico puede ser en forma de serie de tiempo o en forma de espacio fase [3].

Las características no lineales ocurren frecuentemente en los productos de cada día. Éstas pueden ser por impactos, fricción, no linealidades geométricas, fuerzas electromagnéticas, etc. Algunos de estos sistemas son sensibles a cambios en los parámetros y pueden llegar a tener comportamientos caóticos. Para crear productos buenos y de calidad es esencial modelar sus sistemas, especialmente cuando el comportamiento dinámico es complejo. Un modelo demasiado simple no incluye fenómenos importantes e introduce nuevos

---

comportamientos que no existen en la realidad. Por otra parte un modelo demasiado detallado usualmente crea dificultades y los cálculos consumen demasiado tiempo.

Cuando se analiza un fenómeno no lineal, una forma común de hacerlo es identificar subsistemas relativamente simples que contienen las principales características no lineales del producto. La respuesta simulada de aquellos subsistemas es entonces analizado para indicar el posible comportamiento dinámico del producto [4].

Un caso clásico de sistema dinámico es el péndulo de n-enlaces. De manera particular, cuando éste es suspendido por medio de un elemento flexible podría ocurrir una excitación autoparamétrica como un resultado de acoplamiento inercial. En este tipo de sistemas pueden presentarse resonancias internas. Para sistemas con péndulo doble las oscilaciones son transferidas entre ambos péndulos. Lo fundamental es la influencia de diferentes tipos de linealidades en condiciones de resonancia interna o externa. Las ecuaciones del sistema tienen no linealidades acopladas y en este tipo de sistemas pueden ocurrir vibraciones caóticas que dependen de las amplitudes de la frecuencia de excitación y diferentes parámetros del sistema, como por ejemplo el coeficiente de amortiguamiento.

Las ecuaciones de movimiento son derivadas de la ecuación de Lagrange, empleando la energía cinética y la energía potencial. Como coordenadas generalizadas se considera los desplazamientos angulares con respecto a la vertical. El fenómeno de caos para sistemas dinámicos con péndulos es estudiado por muchos investigadores. En este artículo presentan que en este tipo de sistemas un modo de vibración puede excitar o amortiguar a otro modo

---

y que salvo para algunos tipos de vibraciones periódicas podrían aparecer vibraciones caóticas [5].

El estudio sobre la dinámica de cuerpos múltiples flexibles surgió como un nuevo campo de investigación a principios de los setentas, como resultado de la necesidad de simular sistemas industriales y tecnológicos, donde la deformación puede tener un efecto significativo en el sistema dinámico. Tradicionalmente estos sistemas eran diseñados y analizados bajo la consideración de la dinámica de cuerpos rígidos. El desarrollo de nuevos materiales ligeros y la demanda de altas velocidades de operación requieren el desarrollo de metodologías más exactas que tomen en cuenta los efectos de deformación de sus componentes [6].

La dinámica de sistemas flexibles múltiples ha tenido un gran interés durante los últimos años, sobre todo en el campo de la robótica cuando estas teorías son motivadas por dos tipos diferentes de sistemas: los manipuladores industriales rápidos y las grandes estructuras espaciales. El primer tipo experimenta vibraciones de alta frecuencia para magnitudes pequeñas, mientras que el segundo es caracterizado por oscilaciones lentas de magnitud finita [7].

Los robots manipuladores son comúnmente empleados en tareas repetitivas y de precisión, así como en actividades peligrosas para operadores humanos. Las principales ventajas argumentadas para el uso de robots manipuladores en la industria son la reducción de costos de producción, el incremento de la calidad, productividad y mayor flexibilidad comparada con máquinas especializadas. Adicionalmente, existen aplicaciones monopolizadas para los robots manipuladores, como el trabajo en zonas tóxicas, radioactivas o explosivas, sin embargo, las principales aplicaciones industriales se encuentran

---

en el ensamblado, colocación de soldadura y pintura, remachado, traslado de objetos de un punto a otro, corte por laser, etc. [8,9].

Recientemente, se ha logrado un gran avance en los robots aplicados a la medicina. En la actualidad, existen una gran cantidad de robots quirúrgicos en el mundo, con aplicaciones en urología, ginecología, cirugía general, cirugía pediátrica, cirugía torácica, cirugía cardíaca y ORL. La automatización de laboratorios también es un área en crecimiento, donde los robots son utilizados para transportar muestras biológicas o químicas entre instrumentos como incubadoras, manejadores de líquidos y lectores. Otros lugares donde los robots están reemplazando a los humanos son en la exploración del fondo oceánico y exploración espacial [10].

Un ejemplo claro de la aplicación y gran utilidad de los brazos de robot en aeronáutica, se tiene en la Estación Espacial Internacional (International Space Station, ISS). Los sistemas robotizados de ISS están compuestos de un conjunto de manipuladores con un sistema de control único. Las características de diseño de este sistema pretenden optimizar actividades humanas y de control automático, que incluye: trayectorias y limitaciones de movimiento, algoritmos para evitar colisiones, esquemas seguros de automatización, adecuación de momentos de fuerza y procedimientos integrados automatizados con equipos de control [10].

Otro tipo de robots son las máquinas caminadoras, que permiten desplazamientos sobre superficies inaccesibles para otro tipo de vehículos, ya que ellos no necesitan una superficie continua. Por otro lado los requerimientos para la coordinación y control de las piernas imponen dificultades más allá de las encontradas en robots con llantas. Los estudios previos se enfocan principalmente en el control y coordinación de las extremidades usando redes

---

neuronales, lógica difusa, generadores de diseño central, arquitectura de bajo consumo y control moderno virtual. También está creciendo el interés en usar locomoción de insectos para esquemas de control de robots caminadores [11].

El modelado de manipuladores flexibles es todo un desafío para conseguir y mantener un posicionamiento exacto; éstas son las nuevas tareas del modelado dinámico y del análisis cinemático inverso para robots paralelos flexibles. Debido a la naturaleza flexible del sistema, las dinámicas son significativamente más complejas. La formulación de sistemas flexibles múltiples lleva a un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales, ya que estas son dependientes del espacio y del tiempo y pueden no tener solución analítica.

En este trabajo se desarrolla un estudio y análisis de herramientas de sistemas dinámicos empleadas en el modelado de una estructura mecánica flexible. Este análisis se desarrolla sobre la base de un sistema robótico de seis extremidades con tres grados de libertad e incorporando un enlace flexible en cada una de ellas y es capaz de desplazarse (caminar) sobre superficies irregulares. En función de esta configuración de extremidad es que se analiza el comportamiento de una barra flexible por medio de la ecuación de Euler-Bernoulli, en este sentido también se presenta el análisis y desarrollo del modelado y simulación de un péndulo triple, el cual presenta un comportamiento dinámico interesante sobre todo en las frecuencias de resonancia y se puede tomar como base para el análisis de sistemas multienlaces, como es el caso de las extremidades del robot, ya que cuenta con tres enlaces, dos rígidos y uno flexible.

En el capítulo 1 se presenta una recopilación de información reciente y básica sobre las características de sistemas dinámicos en general y de forma específica de sistemas robóticos rígidos y flexibles, así como algunas técnicas

---

---

de modelado y de control, de forma que se establece el estado del arte con la información relevante y reciente sobre los temas antes mencionados.

En este trabajo se incluye el análisis dinámico de un péndulo triple como un antecedente para el estudio de sistemas multienlaces, ya que es un sistema simple de implementar pero con un amplio e interesante comportamiento dinámico. En este caso específico, las extremidades del prototipo de robot propuesto solo tienen tres enlaces, dado que son de tres grados de libertad, por lo que, un procedimiento formal y completo para obtener su modelo requiere el estudio de las energías cinética y potencial, como se hace en el capítulo tres con el péndulo triple.

En el capítulo 2 se presenta el estudio del péndulo triple que consiste en obtener su modelo matemático aplicando el análisis de energías de Lagrange, el cual es por naturaleza no lineal; éste se representa en forma matricial porque permite de una forma relativamente simple extenderlo a un sistema de  $n$ -enlaces. Un caso de análisis particular de este modelo es cuando se consideran pequeñas oscilaciones, lo que permite obtener un modelo lineal. Se comparan los resultados de ambos modelos, en los que se obtiene comportamientos periódicos, cuasiperiódicos y caóticos, adicionalmente y como resultado de este estudio se encuentra que el sistema presenta frecuencias de resonancia, mismas que pueden desplazarse ante variaciones del coeficiente de fricción.

Se ha encontrado que el desplazamiento de las frecuencias de resonancias presenta básicamente dos comportamientos: un desplazamiento constante para un rango del coeficiente de fricción, mientras que para el otro, el desplazamiento es lineal. Estos resultados se obtienen sobre la simulación del sistema pendular triple con excitación periódica solo en el enlace superior y se considera que cada enlace tiene su masa concentrada en las articulaciones [12].

---

La extremidad flexible es uno de los objetivos de estudio de la estructura robótica, por lo que en el capítulo 3 se presenta el desarrollo del modelo de una barra flexible en cantiléver, empotrada de un extremo y en el otro se aplica una fuerza que la hace flexionar, para estudiar su comportamiento estático de flexión. El estudio se realiza con la ecuación de Euler-Bernoulli que relaciona el momento flector con el radio de curvatura. Para obtener la solución de esta ecuación se requiere resolver un par de integrales elípticas, que se puede hacer por medios numéricos con el método de Carlson sobre Newton-Rapson.

En el capítulo 4 se propone un modelo de robot aproximado con solo dos extremidades, para representar a las seis, tres de cada lado. Se considera que los elementos rígidos de cada extremidad son parte del cuerpo del robot, quedando así solo el elemento flexible como extremidad. Se obtiene el modelo de esta propuesta con base en la combinación de suma de momentos de los puntos de apoyo y la ecuación de Euler Bernoulli de una barra flexible empotrada. La solución de las ecuaciones diferenciales que representan el modelo aquí propuesto se obtiene por medios numéricos programados en el software *Matlab*<sup>®</sup>.

El capítulo 5 muestra el desarrollo de la implementación del prototipo de robot con las seis extremidades, donde los dos primeros enlaces son rígidos y el tercero es flexible, construido con perfil solera de aluminio, lo suficientemente delgado para que se comporte como barra flexible. La implementación se hace sobre un kit de desarrollo conocido como Premium Bioloid que incluye su propio software de programación de movimientos, llamado *Roboplus*<sup>®</sup>.

El prototipo está diseñado para que se desplace sobre una superficie irregular que genera inclinaciones sobre el cuerpo del robot, esta inclinación es detectada por medio de un gyrosensor y el robot con la respuesta de un

---

---

controlador actúa sobre los enlaces flexibles para corregir su postura y mantenerse siempre de forma horizontal.

En el capítulo 6 se presenta el desarrollo de dos controladores sobre el prototipo de robot, un difuso y un PID, con el objetivo de mantener a la estructura en forma horizontal ante disturbios ocasionados por rutinas de inclinación o por rutinas de caminata sobre superficies irregulares. Se hacen pruebas con ambos controladores, tanto en simulación con Matlab como en implementación directa sobre el prototipo con el software Roboplus.

En este trabajo se obtiene un modelo matemático no lineal de un péndulo triple, el cual, bajo las consideraciones de pequeñas flexiones y si es expresado de forma matricial permite de una manera simple extenderlo a un sistema de n-enlaces. En la simulación del modelo obtenido, para una excitación periódica senoidal se encuentran frecuencias de resonancia con dos comportamientos de corrimiento cuando se hace variar el coeficiente de fricción.

Otro producto que aquí se obtiene es una propuesta para un modelo matemático aproximado de un prototipo de robot flexible, en el que se ha considerado el caso de pequeñas flexiones y se toma como referencia una estructura rígida en la que se hacen coincidir los puntos de apoyo con la estructura flexible de forma que al combinar un análisis de momentos en los puntos de apoyo y la ecuación de Euler Bernoulli se obtienen las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de flexión de cada extremidad. En este sentido también se desarrolla físicamente el prototipo de robot flexible hexápodo que incluye la implementación de un controlador para disminuir en lo posible las inclinaciones que pudieran generarse con rutinas de caminata o de perturbaciones provocadas.

**Objetivo general:**

Analizar el comportamiento dinámico de los sistemas barra flexible, péndulo triple y estructura mecánica flexible para desarrollar un modelo matemático y prototipo de un sistema robótico con elementos rígidos y flexibles sobre una estructura de seis extremidades que se mantiene de forma horizontal cuando camina sobre superficies irregulares.

**Objetivos específicos**

- Obtener el comportamiento de flexión de una barra empotrada en un extremo y se le aplica una fuerza en el extremo libre, como elemento flexible de un brazo robótico.
- Obtener el comportamiento dinámico de un sistema mecánico con tres elementos conectados, tomando el péndulo triple como caso de estudio.
- Obtener el análisis dinámico de una estructura mecánica con dos extremidades de tres grados de libertad y un elemento flexible.
- Implementar una estructura robótica de seis extremidades con tres grados de libertad, dos elementos rígidos y uno flexible, de forma que se pueda desplazar sobre superficies irregulares.
- Mantener de forma horizontal a la estructura robótica cuando ésta recibe diferentes perturbaciones de inclinación.

**Metas**

- Presentar la solución del modelo matemático de una barra flexible empotrada en un extremo, empleando la ecuación de Euler-Bernoulli, para encontrar las coordenadas del extremo final cuando es flexionada por una fuerza aplicada de forma vertical.
- Obtener el comportamiento dinámico de un péndulo triple para encontrar sus frecuencias de resonancia, por medio de un modelo no lineal y uno

linealizado con pequeñas oscilaciones, como antecedente de un sistema con tres elementos y tres grados de libertad.

- Desarrollar el modelo dinámico de una estructura mecánica robótica de seis extremidades de tres grados de libertad cada una, con dos elementos rígidos y uno flexible por cada extremidad.
- Desarrollar un prototipo de estructura robótica con seis extremidades de tres grados de libertad, dos elementos rígidos y uno flexible, empleando un kit de desarrollo de 18 servomotores, para hacer pruebas sobre su comportamiento dinámico con diferentes perturbaciones de inclinación.
- Implementar un controlador en la estructura robótica para que se mantenga de forma horizontal en la presencia de disturbios de inclinación.

### **Planteamiento del problema**

Los sistemas dinámicos se encuentran en nuestra vida cotidiana. El análisis de éstos pueden ayudar a obtener mejores diseños si se obtienen modelos matemáticos generalmente descritos por ecuaciones diferenciales que proporcionen el comportamiento de las variables que se desean monitorear, cuando se hacen variar algunos parámetros del sistema, puede presentar comportamientos caóticos y frecuencias de resonancia. El modelo puede ser tan complejo como exacto se requiera. Por lo tanto es de vital importancia caracterizar la respuesta del sistema que se desea analizar y considerar la respuesta obtenida con las simulaciones de los modelos que se estudian, para prevenir o atenuar comportamientos dinámicos indeseados, como es el caso de las frecuencias de resonancia y comportamientos caóticos, los cuales, cuando se hace la implementación del sistema pueden generar errores y daños físicos en los prototipos. En algunos casos, si el sistema lo permite, se puede analizar dicho comportamiento por secciones o subsistemas, de forma que su estudio sea más simple.

---

Las estructuras robóticas convencionales son construidas con dimensiones excesivas para obtener una alta rigidez, incrementar su exactitud y disminuir las vibraciones, de modo que el problema de control se limita a controlar sus actuadores. Por lo tanto, se requieren actuadores sobredimensionados, se presentan bajas velocidades de movimiento y un alto consumo de energía. Por otra parte, están las estructuras robóticas construidas con elementos ligeros y flexibles que pueden solventar los inconvenientes de las estructuras rígidas, pero presentan una mayor complejidad en su modelado y en el diseño de sus controladores, debido a las flexiones y vibraciones que se presentan de manera natural.

Por otra parte, en los sistemas mecánicos robotizados en movimiento, es común que se presenten frecuencias de resonancia, sin embargo, éstas pueden cambiar cuando existen variaciones en los parámetros de diseño y manipulación, por ejemplo, la fricción entre sus partes móviles.

Por lo tanto, el problema a resolver en este trabajo de investigación se enfoca en el modelado e implementación de un sistema dinámico que consiste en una estructura robótica con enlaces rígidos y flexibles para que sea lo más ligera posible y que al desplazarse sobre superficies irregulares se mantenga estable y de forma horizontal. Para desarrollar este modelo se requiere hacer el análisis de una barra flexible en cantiléver, que representa al elemento flexible, también se requiere hacer el modelado de un péndulo triple para obtener la dinámica de un sistema de tres enlaces como lo es cada una de las extremidades y de igual forma desarrollar el modelo de una estructura mecánica rígida-flexible, para que, al combinar el análisis de estos sistemas y haciendo las consideraciones necesarias, obtener el modelo general de la estructura robótica flexible que se propone.

---

**Hipótesis**

La solución numérica de un modelo basado en la ecuación de Euler-Bernoulli, y el análisis de momentos puede utilizarse para caracterizar las frecuencias de resonancia variables de un sistema de péndulo triple e implementar el control difuso o PID de un sistema robótico con extremidades flexibles.

# Capítulo 1

## Antecedentes y estado del arte

### 1.1 Introducción

En la actualidad un sistema dinámico avanzado es el brazo de robot con elementos flexibles, éste diseño tiene como principal característica que es construido con materiales ligeros, lo que presenta muchas ventajas con respecto a los brazos convencionales o rígidos [13]. Estos mecanismos son construidos usando materiales más económicos y ligeros, lo cual mejora la relación de capacidad de carga contra el peso del propio brazo, estos resultados incrementan la velocidad de respuesta con un consumo de energía más bajo. Además, estos brazos pueden ser más sencillos de operar debido a su inercia reducida para grandes estructuras, son también muy convenientes para tareas de ensambles delicados e interacción con objetos frágiles. Sin embargo el análisis dinámico y control de manipuladores de brazos flexibles es mucho más complejo que el de su equivalente rígido [14, 15]. Además, para manipuladores de brazos flexibles el número de variables controladas es menor que el número de grados de libertad mecánicos, entonces se tienen dos objetivos de control: Primero, un controlador de manipulador flexible debe alcanzar los mismos objetivos de movimiento que un manipulador rígido. Segundo, éste debe también estabilizar las vibraciones que son naturalmente excesivas [14].

Algunas de las desventajas que presentan los robots flexibles son precisamente la no linealidad de la flexibilidad distribuida en el enlace, vibraciones sobre la carga y posiciones inexactas, por lo que es esencial desarrollar modelos dinámicos que consideren todos estos factores [16].

En este capítulo se presenta una revisión bibliográfica en artículos de investigación recientes, sobre las características y el modelado de estructuras multicuerpos donde analizan sus comportamientos dinámicos para diferentes configuraciones y proponen diferentes metodologías para el desarrollo de los modelos que en algunos casos con pequeñas variaciones en sus parámetros pueden presentar comportamientos caóticos y frecuencias de resonancia. En este trabajo se hace énfasis en estructuras mecánicas flexibles y se compara con sus equivalentes rígidas, también se presenta información de su comportamiento dinámico, de igual forma, se recopila información sobre el modelado, simulación y control de estructuras robóticas con elementos rígidos y flexibles.

## **1.2 Sistemas dinámicos multicuerpos**

Los sistemas dinámicos multicuerpos generalmente contienen elementos que presentan deformaciones considerables que pueden influir considerablemente en la dinámica del sistema. Estos elementos son modelados por medio de formulaciones especiales y las coordenadas utilizadas en estos métodos son conocidos como coordenadas naturales. La formulación utiliza un arreglo de variables que consiste de coordenadas cartesianas de ciertos puntos y componentes globales de vectores que son rígidamente enlazados con los elementos rígidos. Gracias a la posibilidad de estas coordenadas, se reduce el número total de coordenadas del sistema. En esta forma algunas uniones no requieren la introducción de cualquier energía cinética obligada, como el caso de las uniones esféricas [17].

---

En [18] investigan el comportamiento de un sistema dinámico de un sistema barra-resorte acoplado sujeto a una excitación paramétrica. Obtienen un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, para lo cual, necesitan de una simulación numérica para verificar las predicciones obtenidas analíticamente y para estudiar la respuesta en estado estable, así como las soluciones con movimientos estables y caóticos. Los resultados numéricos muestran que el comportamiento del sistema tiene múltiples soluciones y resulta un fenómeno de frecuencia de resonancia.

El objetivo de [19] es presentar una investigación aproximada para el acoplamiento dinámico en un manipulador, para reducir su orden. Este problema es importante principalmente en el manejo directo de robots. La aproximación se basa en la introducción de un vector de cuasi-velocidad usado para la realización de leyes de un controlador PD. La novedad en este trabajo consiste en el uso de algunas observaciones enfocadas en las ecuaciones de movimiento para la construcción de un criterio de evaluación del acoplamiento y con bases en ese criterio se propone un algoritmo para investigar y reducir la dinámica de los acoplamientos. Se muestra que el criterio y el algoritmo pueden ser una herramienta útil para la evaluación de sistemas dinámicos.

En este artículo propone un análisis cinemático usando elemento finito basado en la aproximación de modelado de multicuerpos. Aquí proponen mecanismos de acotamiento que puede generar cambios en la frecuencia natural y en su rigidez cuando las restricciones no son tratadas cuidadosamente e incluso con pequeños desajustes. Por lo tanto, para obtener un comportamiento predictivo determinístico se debe considerar el principio de diseño de restricción exacta [20].

---

### 1.3 Brazos de robots rígidos y flexibles

El progreso de la tecnología en robótica y el desarrollo de sus aplicaciones han permitido que los robots industriales realicen una gran cantidad de tareas de manipulación. Típicamente, los robots industriales recientes se construyen de dimensiones excesivas para obtener alta rigidez, e incrementar su exactitud y disminuir la vibración en sus movimientos. Sin embargo, actualmente se han incrementado considerablemente las demandas para estructuras ligeras en aplicaciones espaciales y tareas industriales complejas para mejorar la eficiencia energética y conseguir movimientos de alta velocidad [21].

Para que los sistemas realicen tareas con velocidades más altas y mayor exactitud es necesario considerar una nueva generación de robots manipuladores de menor peso. Éstos han sido un tópico avanzado en la investigación de la robótica por lo que recientemente son ampliamente usados en muchas aplicaciones, también son candidatos para aplicaciones en dispositivos micrométricos. En este sentido, su demanda y el uso de nuevos materiales para su construcción aumentan la necesidad de ecuaciones dinámicas más exactas. Para estos casos la flexibilidad de las estructuras mecánicas, en manipuladores robóticos, juega un papel muy importante en el diseño de sus sistemas de control [22].

Comparando brazos rígidos contra flexibles, éstos últimos presentan las características antes mencionadas, por lo que requieren actuadores más pequeños, lo que se traduce en un menor consumo de energía. En cambio, los elementos ligeros tienen mayor probabilidad de generar vibraciones y errores debido a la inercia y fuerzas externas, por lo que la acción del manipulador podría ser inaceptable debido al posicionamiento inexacto del efector final. Tradicionalmente las vibraciones estructurales han sido evitadas por refuerzos mecánicos en cada componente, sin embargo este método no es apropiado en

---

---

el caso de brazos flexibles ligeros. Para explotar completamente el potencial que ofrecen estos manipuladores, los efectos de los enlaces flexibles deben ser considerados en el modelo dinámico, en este contexto es altamente deseable disponer de un modelo dinámico completo explícito y exacto [22].

Desde hace algunos años, la robótica ha iniciado una evolución que ha sido manejada por las necesidades de los usuarios finales. La demanda de la industria para una respuesta rápida y un bajo consumo de energía han obligado a los diseñadores de robots a hacer modificaciones radicales en sus diseños. Estos cambios incluyen el uso de materiales más ligeros y su reconfiguración física, como resultado de ello se cuenta con enlaces más largos y delgados, mismos que han ayudado a lograr las metas propuestas de máxima velocidad, aceleración y principalmente bajo consumo de energía [23].

#### **1.4 Modelado de sistemas robóticos flexibles**

Los manipuladores flexibles ligeros han sido un tópico ampliamente investigado en el área de sistemas mecatrónicos. Ellos representan otra alternativa para impulsar y producir en volumen un amplio espectro de aplicaciones. Por otro lado, éstos están sujetos a deformaciones elásticas con la consecuencia de comportamiento dinámicos complejos, actualmente este tema es investigado a fondo y se han desarrollado muchos prototipos de manipuladores flexibles en centros de investigación por todo el mundo. Generalmente todas estas investigaciones se enfocan principalmente en aplicaciones espaciales [10].

En la literatura reciente se reporta el uso de las técnicas de aproximación de modos y el método de elemento finito para cambiar las ecuaciones diferenciales parciales a ecuaciones diferenciales ordinarias. La desventaja principal del método de modos es la dificultad para encontrar los modos de los enlaces con sección transversal irregular en manipuladores con multienlaces. En cambio el

---

---

método del elemento finito es muy utilizado en el desarrollo de modelos aproximados para mecanismos y robots flexibles [22, 24].

Los manipuladores convencionales de enlaces rígidos son modelados como un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y acopladas (ODEs). En cambio en el caso de manipuladores flexibles esta dinámica rígida es acoplada con los efectos distribuidos de la flexibilidad a lo largo de la estructura mecánica, la cual lleva a un modelo expresado con ecuaciones diferenciales parciales (PDEs), donde las derivadas con respecto al tiempo y al espacio son relevantes. Las PDEs no son muy convenientes como modelos para propósitos de diseño de control, porque son teóricamente equivalentes a sistemas infinito-dimensionales. Para derivar una ODE infinito-dimensional, la deformación de cada enlace es expresado como una superposición de modos en donde se separan las variables de espacio y de tiempo [14].

En las dos últimas décadas los robots flexibles han llegado a ser un área de investigación en la que la ingeniería ha incrementado su interés, debido al alto desempeño de sus requerimientos, como la alta velocidad de operación y mínimos efectos de colisión, de igual forma ha crecido el interés en aplicaciones espaciales con robots más largos y ligeros, controlando la flexibilidad de las estructuras para eliminar las oscilaciones en el efector final o herramienta de trabajo.

En investigaciones recientes se han propuesto diferentes modelos dinámicos para el análisis y control de robots flexibles, como: el modelo discreto básico masa-resorte, modelos lineales de masas seccionadas de Euler-Bernoulli, algoritmos generalizados de Newton-Euler, Ecuaciones Lagrangianas asociadas al método de descomposición de campos elásticos de Rayleigh-Ritz, descomposición de elemento finito y descomposición modal, todos estos

---

modelos son aproximaciones bajo la consideración de pequeños desplazamientos elásticos [25].

En gran parte de la bibliografía aprueban los modelos de brazos de robot de bajo peso y flexibles que usan un marco de referencia de cuerpo rígido con un enfoque de deformación. Lo anterior es probable debido a su cercanía conceptual de enfoque de brazo rígido. La mayoría de los robots rígidos trabajan con base en coordenadas relativas, por lo que, en estructuras de brazos robóticos se busca un número mínimo de grados de libertad para describir el movimiento del sistema. Este enfoque ha sido argumentado en el campo de la robótica por el procedimiento sistemático Denavit-Hartenberg para establecer un marco de referencia en cada cuerpo [26].

En [27] presentan el modelo dinámico de un brazo plano de dos segmentos flexibles, donde únicamente consideran la deformación por torsión. Utilizan el toolbox DynaFlex que permite modelar sistemas mecánicos multi-enlaces e incluye conexiones serie y paralelo con todas los tipos de fuerzas cinemáticas. Los segmentos pueden ser rígidos o flexibles y las deformaciones son consideradas bajo el marco de la ecuación de Euler-Bernoulli.

En [22] investigan el modelado y vibración de un manipulador con dos enlaces flexibles y uniones rígidas. Este incluye un número arbitrario de enlaces flexibles, el modelo dinámico de los manipuladores flexibles es propuesto con un enfoque de elemento finito y con el principio de Hamilton. Los enlaces flexibles son tratados como la barra de Euler-Bernoulli y el comportamiento dinámico, debido a la flexibilidad de los enlaces se demuestra por medio de simulación numérica.

---

El análisis de elemento finito y de Lagrange se ha empleado en el desarrollo de modelos matemáticos, como en [28] donde obtienen un modelo matemático de un manipulador flexible de dos enlaces. El modelo es flexible para extensiones de diferentes niveles de modelos exactos y se obtiene seleccionando el número apropiado de elementos en los que se divide el enlace. Las simulaciones son ejecutadas en Matlab y en Simulink para investigar el comportamiento dinámico del sistema en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

Para el desarrollo de las ecuaciones dinámicas que describen el movimiento de un manipulador flexible, en [29] consideran que el manipulador soporta la fuerza de gravedad, las fuerzas puntuales externas y el torque aplicado en un punto específico a lo largo de un enlace neutro. Deducen un modelo discreto del tipo Euler-Newton capturando la dinámica fundamental requerida para el análisis del manipulador flexible sobre un enlace general. El modelo dinámico completo lo obtienen a partir del montaje de los enlaces individuales. Desarrollan un ejercicio de control y validación de un enlace flexible simple, y dicha validación la realizan en el dominio del tiempo y de la frecuencia. Comparan técnicas de control retroalimentado de curvatura contra control retroalimentado clásico.

### **1.5 Controladores en los robots flexibles**

El problema de control para manipuladores flexibles es mucho más complejo que sus equivalentes rígidos. Para un manipulador con enlaces flexibles el número de variables controladas es estrictamente menor que el número de grados de libertad mecánicos, es por ello que en estos casos el propósito de control es doble, primero porque se deben conseguir los mismos objetivos de movimiento que un manipulador rígido. Segundo, se debe estabilizar las vibraciones que son naturalmente generadas. Todo lo anterior con el mismo número de actuadores que los robots rígidos convencionales, sin embargo cuando el propósito de control es para una trayectoria específica es cuando

---

---

aparecen las dificultades debido a la inestabilidad de la dinámica-cero de esos sistemas [30].

En la actualidad, los controladores basados en herramientas inteligentes son ampliamente usados como métodos eficientes para mejorar el comportamiento del sistema, por mencionar algunos se tiene el caso de redes neuronales y lógica difusa. En este sentido, diversos autores han considerado el uso de algoritmos genéticos como herramienta efectiva para mejorar el comportamiento de un sistema robótico [24].

Muchos investigadores en control de manipuladores con uniones flexible han desarrollado modelos basados en aproximaciones, las cuales incluyen esquemas de linealización retroalimentada y esquemas invariantes manifold. Sin embargo, aunque la flexibilidad de las uniones ha demostrado un mérito potencial, debido a la dificultad que presentan en el modelado y control, como el caso de un sistema mecánico flexible de alto rendimiento, los diseñadores de robots prefieren manufacturar mecánicamente brazos rígidos con uniones también rígidas [31].

El control difuso ha surgido como una alternativa práctica para diversos esquemas de control convencional que han mostrado éxito en algunas áreas de aplicación. En [32] presentan el desarrollo, implementación y evaluación de un controlador difuso para un mecanismo robótico flexible de dos enlaces flexibles.

Desde un punto de vista de modelado, para elementos flexibles los desafíos son asociados con el hecho de que los movimientos de los cuerpos rígidos son no lineales, ahora para este caso están fuertemente acoplados con los efectos distribuidos de la flexibilidad a lo largo de estructuras mecánicas. Este acoplamiento cambia la configuración del sistema y la inercia de la carga.

Teóricamente las ecuaciones dinámicas de estructuras flexibles son de dimensiones infinitas, aunque para propósitos de control el orden de los modelos se considera de un orden finito. Este truncamiento en conjunto con las dificultades de acoplamiento y la no linealidad del sistema, pueden crear incertidumbre en el modelado y un control pobre o inestable. En este sentido, en [14], presentan un esquema de control robusto para manipuladores de robots con enlaces flexibles, los cuales se basan en consideraciones de estructuras mecánicas flexibles como un sistema con modos lentos y rápidos para estructuras rígidas y flexibles, respectivamente, a través de modos deslizantes. El objetivo del control de modos deslizantes para el subsistema lento consiste en asegurar que las variables lentas sigan una trayectoria prescrita y tiene la misma estructura y propiedades que un brazo rígido equivalente.

Una de las técnicas ampliamente usadas para el seguimiento de trayectorias de manipuladores de robots la llamada control de torque-calculado (computed-torque) a través de linealización retroalimentada. Este método requiere de un conocimiento preciso de la dinámica del sistema.

Como una aproximación de un brazo de robot flexible en [33] estudian el diseño de control para un brazo cachador, el cual consiste en reducir las vibraciones sobre dicho brazo cuando se deja caer una esfera metálica, así como para reducir el impacto entre esfera y brazo cuando la esfera es cachada. Emplean un mecanismo de acotamiento y un enlace flexible, esperando que realice una transferencia de trabajo sin contacto, de tal forma que el robot realice tareas más complicadas.

---

En la investigación de [33] se propone un método de control para la reducción de vibración después de que una esfera de acero es cachada por un brazo de robot con dos enlaces, donde el primero de ellos es rígido y el segundo es flexible. La flexibilidad del segundo enlace se utiliza para reducir el impacto de choque entre la esfera y la copa. El control de reducción de vibración residual es implantado por medio de un control retroalimentado basado en la trayectoria del ángulo de la segunda articulación, con parámetros óptimos [33].

En [7] presentan resultados sobre el modelado y control de manipuladores con enlaces flexible y proponen una investigación sobre el incremento en este tipo de problemas. Primero adoptan un enfoque modal flotante y con el formalismo Newton-Euler proponen una extensión del modelo para controlar la dinámica rápida y deformaciones finitas, este modelo dinámico se basa en una generalización no lineal del criterio Euler-Cinemática de Bernoulli. Para sistemas de un enlace proponen dos métodos, el primero se basa en una inversión estable causal del modelo de fase no mínimo vía planificación de trayectorias de salida; el segundo es un esquema algebraico basado en parametrización de operadores lineales diferenciales. Para el caso de sistemas multienlaces planos, la ley de control propuesta se basa en inversión estable causal en el dominio del tiempo de sistemas de fase no lineales y no mínimos.

La cinemática inversa también puede ser empleada para el desarrollo del control de robots con multienlaces flexibles, como en [34], donde con la inclusión de una restricción dinámica maximizan la ejecución de controladores retroalimentados en aplicaciones de alta velocidad. Para obtener una solución factible numéricamente se emplea un enfoque de perturbación singular, la cual descompone la cinemática inversa en una parte regular (lenta) y una parte parásita (rápida). La solución de la parte regular es considerada cinemática inversa deseable, mientras que la parte parásita es removida intencionalmente.

---

---

La expansión de parámetros permite obtener una solución secuencial. Este método es una versión refinada del método de expansión y reduce considerablemente el tiempo de cómputo.

En [16] reportan el desarrollo de un modelo dinámico no lineal y el control de un robot con enlace flexible sujeto a excitación paramétrica. Las ecuaciones de movimiento se obtienen usando un método de modos de Lagrange. Utilizan una estrategia de control de torque calculado y control compuesto para reducir vibraciones mecánicas sobre el enlace flexible y para disponer de mejor posicionamiento del extremo final.

Un control robusto para manipuladores robótico con enlaces flexibles se basa en considerar a la estructura mecánica como un sistema con modos lentos (rígido) y modos rápidos (flexible) que pueden ser controlados separadamente. La dinámica rígida es controlada por medio de un enfoque robusto de modos deslizantes con propiedades de estabilidad bien establecidas, mientras que para la dinámica flexible se adopta un diseño óptimo LQR [14].

Algunas investigaciones recientes están relacionadas al control de posición y fuerza de robots con uniones elásticas. En [15] se presenta el estudio del control de posición y fuerza de un brazo de robot considerando enlaces rígidos. La dinámica de manipuladores flexibles es descrita por ecuaciones diferenciales no lineales que gobiernan el movimiento de los modos rígidos y elásticos.

El control difuso ha llegado a ser muy popular para la ejecución de tareas de diseño de controladores, porque es adecuado para la transferencia humana dentro de reglas lingüísticas. Los controladores difusos ofrecen un simple y robusto marco de trabajo específicamente para leyes de control no lineal que generan incertidumbre e imprecisión. Los controladores difusos pueden ser

---

---

implementados usando un modelo matemático difuso de la planta del controlador y también pueden ser determinados sin modelos matemáticos con descripciones lingüísticas del control que esté disponible o que puede ser formulado. Las ecuaciones dinámicas de movimiento del brazo se derivan usando el enfoque de Lagrange, para este propósito se definen las expresiones de energía cinética y energía potencial, la cual incluye la energía propia de torsión del brazo y el efecto gravitacional [15].

Un método nuevo para el control de un brazo robótico flexible usando un motor convencional con un actuador engranado y afectado por un torque de fricción no lineal, se presente en [21], éste método de control no requiere de compensación de fricción, de ahí la estimación de este término porque el esquema de control es robusto con respecto a ese efecto. En cambio las únicas variables a medir son el eje del motor y la posición angular de la flecha y no se requieren las mediciones de velocidad, las cuales siempre introducen errores y ruido.

En este sentido, en [35] presentan un práctico y eficiente sistema de control para un brazo de robot que manipula una barra flexible. Desarrollan una ley de control de modos deslizantes que provee robustez contra imperfecciones e incertidumbres del modelo, lo cual lleva implícita también una prueba de estabilidad. Presentan resultados de simulación para un brazo que mueve una barra flexible y hacen una validación con resultados teóricos.

En [36] reportan el diseño de un controlador difuso adaptativo aplicado al control de vibración en estructuras flexibles que contienen actuadores piezoeléctricos distribuidos. El controlador es construido con el conjunto de reglas difusas IF-THEN y los parámetros son ajustados en línea, de acuerdo

---

con algunas leyes de adaptación. La ley adaptativa se deriva de la teoría de estabilidad de Lyapunov.

En [30] se presenta un estudio experimental de un esquema de control robusto para manipuladores robóticos con enlaces flexibles, el diseño está basado en la simple estrategia de seguidor de trayectorias, la cual explota al mismo tiempo la escala natural de la parte flexible y la parte rígida de las ecuaciones dinámicas de este tipo de brazo robótico. Realizan dos experimentos, en el primero emplean una estrategia de diseño óptimo LQR y en el segundo se basan en el esquema de modos deslizantes. Por otra parte, en [37] presentan un procedimiento para el diseño de un controlador robusto  $H_\infty$  para la vibración acoplada curvatura/torsión de un brazo de robot flexible.

En [31] abordan el problema de control para robots con uniones flexibles por medio de un controlador difuso y proponen una solución completa para resolver el problema de modelos inciertos. En este sentido, en [24] se propone un esquema para optimizar los parámetros de un controlador difuso sobre un robot con dos enlaces flexibles y dos uniones elásticas, el modelo que obtienen se basa en la ecuación de Euler-Lagrange y en el método de modos asumidos para encontrar las ecuaciones dinámicas del brazo.

En muchas aplicaciones robóticas es necesario contar con el control de posición y velocidad del efector final (herramienta de trabajo), así como el control de la fuerza de contacto entre herramienta y ambiente. La dinámica de manipuladores flexibles sobre superficies restringidas es descrita por un conjunto de ecuaciones algebraicas y por ecuaciones diferenciales no lineales que gobiernan el movimiento de los modos rígidos y elásticos. Es por eso que a la fecha son pocas las investigaciones relacionadas con control de posición y fuerza de manipuladores con enlaces flexibles.

Finalmente, en [10] Proponen el desarrollo de un algoritmo para el Modelo de Control Predictivo (MPC, Model Predictive Control) con propiedades de entrada para estado estable (ISS, Input to State Stability) con respecto a disturbios aditivos estocásticos.

## **1.6 Estado del arte**

Haciendo un resumen de la información consultada en la bibliografía que antes se comenta, es claro que los sistemas robóticos con enlaces flexibles son sistemas dinámicos que recientemente han incrementado su uso, debido a que el avance tecnológico ha permitido que cada vez se implementen sistemas de control más complejos, por lo que también ha sido necesario generar modelos matemáticos cada vez más completos que representen la dinámica de dichos sistemas, presentando, bajo ciertas consideraciones, frecuencias de resonancia y comportamientos que van desde el estado estable hasta caóticos. Estos modelos se pueden obtener con base en los principios de Hamilton, leyes de Newton, análisis de Euler, pero sobre todo, el más empleado es el enfoque de Lagrange que incluye principalmente el análisis de la energía cinética y potencial.

Los sistemas robóticos con enlaces flexibles presentan ventajas sobre sus equivalentes rígidos, como son, menor peso, mayor maniobrabilidad, menor material para su construcción, se requieren actuadores (motores) de menor potencia, por lo que el consumo de potencia es menor. Sin embargo, tiene el inconveniente de que su análisis dinámico y control es más complejo, ya que además de ejecutar todas las tareas de un robot rígido convencional, tiene que estabilizar las vibraciones generadas de forma natural debidas a las flexiones propias de robot.

---

En la mayoría de los casos, los sistemas robóticos flexibles son una combinación de elementos rígidos y flexibles y tienen diferentes aplicaciones que van desde los procesos industriales como el manejo de objetos frágiles y ensamblajes delicados, hasta aplicaciones quirúrgicas y aeroespaciales. Dado que los sistemas robóticos flexibles presentan de forma natural, dinámicas no lineales, en la bibliografía consultada se reporta el diseño y uso de controladores con características no lineales, como el caso de: modos deslizantes, redes neuronales, robusto  $H_\infty$ , optimización LQR y difusos. Estos últimos, son de los más empleados recientemente porque su diseño no requiere de un profundo análisis matemático y de igual forma su implementación es relativamente simple comparada con los otros controladores, además que su respuesta es comparable y en algunos casos mejor que la de los otros controladores.

### **1.7 Conclusión**

Los sistemas mecánicos flexibles son sistemas dinámicos que en la actualidad son una alternativa que ha incrementado su uso, ya que ofrece algunas ventajas sobre los sistemas rígidos, principalmente el bajo consumo de energía, sin embargo cuentan con la desventaja de mayor complejidad para su modelado y control, problema que cada vez se va simplificando con los avances tecnológicos de los dispositivos electrónicos y computacionales.

La información que aquí se muestra es un punto de partida para el análisis de un sistema mecánico flexible, ya que se reúnen las diferentes estrategias de análisis de sistemas mecánicos, como la ecuación de Euler-Bernoulli para una barra flexible, el análisis de péndulo triple, como un sistema mecánico de tres enlaces, así como las diferentes técnicas de control que se pueden emplear en sistemas robóticos con enlaces rígidos y flexibles.

## Capítulo 2

### Análisis de un Péndulo Triple

#### 2.1 Introducción

En el desarrollo de modelos matemáticos deterministas normalmente se emplean ecuaciones diferenciales ordinarias, sin embargo, cuanto más detallado es el modelo con respecto a la descripción del sistema las ecuaciones aumentan su complejidad hasta convertirse en ecuaciones diferenciales no-lineales. Debido a la no linealidad pueden existir determinadas condiciones donde el comportamiento de la solución en tiempos grandes es caótico, es decir, dichas soluciones asintóticas acotadas no convergen a ningún conjunto límite de soluciones [38].

El interés en el estudio de sistemas pendulares forzados periódicamente, los cuales pueden desplegar movimientos caóticos, está incrementando continuamente. Muchos investigadores están estudiando activamente la respuesta numérica compleja de estos sistemas físicos, ya que presentan una gran variedad de modelos matemáticos y comportamientos dinámicos que pueden ser usados para analizar sistemas muy complejos, incluso un péndulo triple puede ser empleado como un punto de referencia [39]. A pesar de los modelos generales para un número arbitrario de enlaces que se usan para cuestiones de control de un péndulo invertido como en [40], es bien sabida la falta de modelos generales listos para ser aplicados en un péndulo regular de  $n$ -enlaces. En [41] se propone un modelo que usa las ecuaciones dinámicas de

---

---

un péndulo con  $n$ -enlaces y el cual está sujeto por el enlace superior, para este caso se ignora el efecto de fricción. En cambio, en [39] se desarrolla un modelo completo de un péndulo plano para un número arbitrario de enlaces, aquí sí consideran el efecto de la fricción en cada enlace con las respectivas variables de longitud y masa.

En este capítulo se propone una representación matricial general para el péndulo de  $n$ -enlaces con amortiguamiento, a diferencia de las referencias [42-45], en las que usan las ecuaciones para un número fijo de enlaces. Con este modelo es fácil descomponer y separar el término de primeras derivadas de las variables dinámicas para resolver el sistema de ecuaciones usando algún lenguaje de simulación o software comercial. Otro tipo de herramienta de análisis es la que usan en [46] con un sistema simbólico que es usado sobre un software matemático.

Un caso de escalabilidad en sistemas mecánicos se puede encontrar en [47], donde se realiza la comparación entre procedimientos de simulación dinámica que son escalables como el que se propone en este capítulo. Los autores de [48] presentan un análisis interesante donde encuentran comportamientos dinámicos caóticos de un péndulo triple, el cual es controlado con un magneto rotativo permanente y emplean las secciones de Poincaré y gráficas en espacio fase para analizar comportamientos periódicos y caóticos. De igual forma, en [49] introducen un modelo no lineal para comparar los cálculos y resultados experimentales de un modelo no lineal propuesto recientemente en el régimen de caos transitorio.

En [50] se reporta el estudio de un péndulo forzado con torsión no lineal por medio de mediciones en diagramas de bifurcación, las cuales mostraban

---

periodos dobles de caos; así como también en [51] en su estudio presentan observaciones experimentales de caos en un péndulo perturbado y amortiguado por medio de un torque de comportamiento alterno.

Es bien sabido que el impacto y la fricción acompañan a casi todo el comportamiento real presente en sistemas dinámicos, como en [52] que presentan el modelado de un péndulo triple físico plano con barreras situadas arbitrariamente impuestas sobre la posición del sistema, incluyendo modelado de impacto y movimiento de deslizamiento. También presentan esquemas numéricos para la simulación del sistema, métodos para investigar la estabilidad de orbitas en sistemas dinámicos no perturbados y principalmente su aplicación para un sistema de pistón-biela-manivela de un motor mono-cilindro de combustión, modelado como un péndulo triple invertido con impactos, con el propósito de analizar el ruido generado por impactos entre el pistón y el cilindro.

El análisis de un péndulo triple también se ha empleado en el estudio de swing de golf como en [53], donde presentan una investigación basada en el análisis de movimiento de un robot simulado para tareas humanas, el análisis que presentan se enfoca en la parametrización de trayectorias en el tiempo y en encontrar los parámetros óptimos. En ese análisis obtienen una trivial pero útil descomposición de trayectorias en términos de componentes de funciones, para caracterizar esas funciones con una estructura reportan que los parámetros influyen en una forma predecible y controlable.

Una aplicación de sistemas pendulares, se tiene con el uso de un péndulo triple para sistemas de aislamiento de vibración sísmica [54], donde, como en este trabajo, es empleado para estudiar los modos de frecuencia o respuesta de la función de transferencia. En el mismo sentido en [55] se presenta el estudio

---

---

analítico y experimental de un péndulo triple empleado como aislador de movimientos sísmicos lineales con viscosidad no lineal y con mecanismos de disipación de energía de histéresis bilineal. Otra aplicación se encuentra en [56], donde se estudia un sistema de suspensión usando diferentes modelos numéricos del péndulo triple cuyo propósito es filtrar las altas frecuencias del ruido sísmico. Así mismo en [57] usan el péndulo triple para la suspensión de un sistema óptico diseñado para minimizar los efectos del ruido sísmico y térmico sobre las masas suspendidas de un Interferómetro Laser del Observatorio de onda Gravitacional, (LIGO, por sus siglas en inglés).

Finalmente, en [42] presentan un procedimiento de optimización interesante, donde comparan las respuestas periódicas y caóticas del modelo de un sistema de péndulo triple contra los resultados obtenidos de una implementación física de dicho sistema, para lo cual evalúan diferentes grupos de parámetros para elegir los que mejor se aproximan a la representación del sistema real.

El estudio de un péndulo triple se enfoca en presentar una estrategia formal para el análisis dinámico de sistemas mecánicos, principalmente con tres enlaces o tres grados de libertad, para lo cual se plantea obtener el modelo por medio del análisis de las energías del sistema, con la ecuación de Euler-Lagrange. Por lo tanto, en este capítulo se obtiene el comportamiento dinámico de un sistema de péndulo triple, el cual presenta estados periódicos, estados cuasi-periódicos y estados caóticos.

Un movimiento cuasi-periódico está definido como aquel que sin ser periódico repite una y otra vez condiciones arbitrariamente cercanas a una posición previa del sistema, es decir, un fenómeno cuasi-periódico oscila una y otra vez mostrando cada determinado tiempo un aspecto similar al que tuvo previamente. Por otra parte, el movimiento caótico se define como un

---

---

comportamiento aperiódico en un sistema determinístico que exhibe una dependencia y sensibilidad a las variaciones en sus condiciones iniciales. Pequeñas variaciones en dichas condiciones iniciales pueden implicar grandes diferencias en el comportamiento futuro; complicando la predicción a largo plazo. Lo anterior sucede aunque estos sistemas sean totalmente determinísticos, es decir; su comportamiento puede ser completamente determinado conociendo sus condiciones iniciales [58].

Aquí se propone el uso de un modelo matemático para el péndulo triple en el que se considera que el peso de los enlaces está concentrado en la masa de cada unión. Se obtiene un modelo completo no lineal, con la formulación de Lagrange, que a su vez da origen a un modelo simplificado de pequeñas oscilaciones, que cuando es escrito en forma matricial se puede extender fácilmente a un sistema de n-péndulos.

El sistema es perturbado de forma periódica en el enlace superior permitiendo que los otros enlaces permanezcan oscilando libremente y cada uno es afectado por su respectiva fricción. Se obtienen las ecuaciones generales para un número arbitrario de enlaces y se analiza y resuelve numéricamente el caso específico del péndulo con tres enlaces (péndulo triple)

Se obtiene y analiza la respuesta en frecuencia con respecto al coeficiente de fricción en las uniones de cada enlace encontrando desplazamientos de los picos de resonancia para cada enlace. Se comparan los resultados obtenidos entre el modelo no lineal y el simplificado por pequeñas oscilaciones y además este último es comparado con resultados de [49-51] sobre modelos reducidos de un péndulo triple. Se analiza principalmente su comportamiento dinámico con respecto a la frecuencia de perturbación; se encuentran frecuencias de resonancia, desplazamientos no lineales de estas frecuencias de resonancia

---

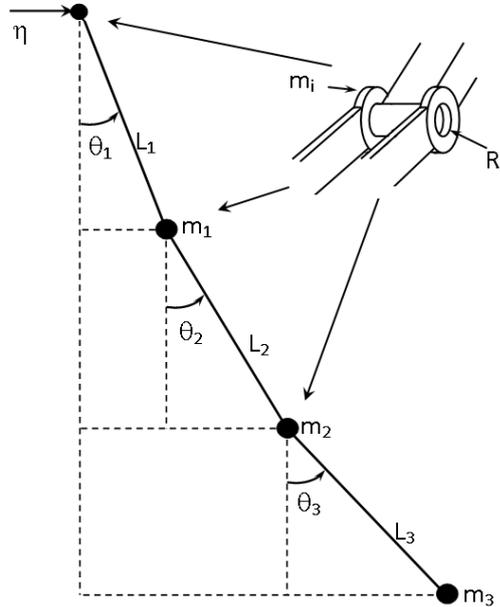
con respecto a cambios en los coeficientes de fricción, así como zonas de respuesta periódica, cuasi-periódica y caótica, las cuales dependen principalmente de los coeficientes de rozamiento y la frecuencia de perturbación, no así de la amplitud de dicha perturbación.

## 2.2 Modelo matemático

En los trabajos publicados sobre péndulos triple, el modelo específico empleado usualmente se establece en términos de las ecuaciones de movimiento. En este trabajo se trata de establecer un modelo general para un péndulo de n-enlaces y después se deduce un caso específico de prueba. Se desarrolla un modelo no lineal general de un péndulo plano con n-enlaces y amortiguamiento, para el análisis que se presenta en este trabajo se obtiene el caso específico del péndulo triple, de igual forma a partir del modelo no lineal se obtiene el ya mencionado modelo de pequeñas oscilaciones.

En el sistema que aquí se propone se considera que cada enlace tiene una masa concentrada en su extremo final inferior de forma que se hace coincidir el centro de gravedad con el eje de rotación de cada enlace contiguo inferior, también se considera que en cada unión o articulación está presente el efecto de fricción que se opone al movimiento. El caso de estudio es cuando al péndulo se le aplica una perturbación periódica en la parte superior del primer enlace.

En la figura 2.1 se muestra la representación esquemática del sistema pendular, la masa de los enlaces, su longitud y el ángulo que forman con la vertical son etiquetadas como  $m_i$ ,  $L_i$  y  $\theta_i$ , respectivamente, para  $(i=1, 2, 3, \dots)$ , con sus respectivas unidades dadas en kilogramos, metros y radianes. La principal variable dinámica es  $\theta_i$  y se mide desde la vertical de cada enlace, el sistema completo está sujeto a una perturbación armónica  $\eta(t)=\eta_0\cos(\omega t)$  m, la cual se aplica de forma horizontal sobre el enlace superior.



**Figura 2.1** Esquema del péndulo triple

Del modelo general que se desarrolla detalladamente en el apéndice A se obtiene el caso particular del péndulo triple, del cual y con base en el esquema de la figura 2.1 se obtienen las distancias verticales y horizontales en función de las variables dinámicas  $\theta_i$  con respecto al punto de aplicación de la perturbación, las cuales se describen en la tabla 2.1

**Tabla 2.1** Ecuaciones para las distancias verticales y horizontales

Distancia horizontal	Distancia vertical
$x_1 = L_1 \text{sen } \theta_1$	$y_1 = -L_1 \text{cos } \theta_1$
$x_2 = x_1 + L_2 \text{sen } \theta_2$	$y_2 = y_1 - L_2 \text{cos } \theta_2$
$x_3 = x_2 + L_3 \text{sen } \theta_3$	$y_3 = y_2 - L_3 \text{cos } \theta_3$

La ecuación A.2 se delimita a tres enlaces ( $k=3$ ) para obtener el modelo matemático no lineal del péndulo triple expresado matricialmente de la siguiente forma:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + N(\theta)\dot{\theta}^2 + R\theta + P(\theta) + f(\theta, t) = 0 \quad (2.1)$$

Dónde:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} M_1 & M_{12} \cos(\theta_1 - \theta_2) & M_{13} \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ M_{12} \cos(\theta_1 - \theta_2) & M_2 & M_{23} \cos(\theta_2 - \theta_3) \\ M_{13} \cos(\theta_1 - \theta_3) & M_{23} \cos(\theta_2 - \theta_3) & M_3 \end{bmatrix}$$

$$N(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & M_{12} \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) & M_{13} \text{sen}(\theta_1 - \theta_3) \\ -M_{12} \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) & 0 & M_{23} \text{sen}(\theta_2 - \theta_3) \\ -M_{13} \text{sen}(\theta_1 - \theta_3) & -M_{23} \text{sen}(\theta_2 - \theta_3) & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3 \end{bmatrix}; \quad P(\theta) = \begin{bmatrix} A_1 g \text{sen} \theta_1 \\ A_2 g \text{sen} \theta_2 \\ A_3 g \text{sen} \theta_3 \end{bmatrix} \quad f(\theta, t) = \begin{bmatrix} A_1 \cos \theta_1 \\ A_2 \cos \theta_2 \\ A_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \eta$$

Y cada uno de los elementos de las matrices son:

$$M_1 = (m_1 + m_2 + m_3)L_1^2, \quad M_2 = (m_2 + m_3)L_2^2, \quad M_3 = (m_3)L_3^2, \quad M_{12} = (m_2 + m_3)L_1L_2, \quad M_{13} = (m_3)L_1L_3, \quad M_{23} = (m_3)L_2L_3, \quad A_1 = (m_1 + m_2 + m_3)L_1, \quad A_2 = (m_2 + m_3)L_2, \quad A_3 = (m_3)L_3 \text{ y } R_x = \text{Coeficiente de fricción del eslabón } x.$$

Los otros parámetros se definen en el apéndice A; es claro que estas ecuaciones también se pueden escribir como un sistema de tres ecuaciones diferenciales, sin embargo, cuando se requiere de una implementación computacional para encontrar su solución, es mejor la representación matricial.

De este modelo no lineal, representado en la ecuación 2.1, es sencillo obtener su equivalente lineal de pequeñas oscilaciones, considerando que:  $\text{sen}\theta \approx \theta$ , y  $\text{cos}\theta \approx 1$ , por lo que la ecuación (2.1) se simplifica de la siguiente forma:

$$ML\ddot{\theta} + R\dot{\theta} + gml\theta + ml\eta_a = 0 \quad (2.2)$$

Donde:

$$M = \begin{bmatrix} m_1L_1 & m_2L_1 & m_3L_1 \\ 0 & m_2L_2 & m_3L_2 \\ 0 & 0 & m_3L_3 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ L_1 & L_2 & 0 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3 \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m_3) & 0 & 0 \\ 0 & (m_2 + m_3) & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad l = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\theta} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad \dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad \eta_a = \begin{bmatrix} \eta \\ \eta \\ \eta \end{bmatrix}.$$

### 2.3 Solución numérica

Esta sección se enfoca en el análisis del modelo no lineal del péndulo triple. Se sabe que este sistema presenta diversos comportamientos dinámicos en su respuesta, como comportamiento periódico, cuasi-periódicos y caótico. Éstos también se obtienen en las pruebas que aquí se realizan al modelo no lineal.

En la figura 2.2 se muestran las curvas en serie de tiempo para el ángulo  $\theta_3$ , que se obtienen variando la frecuencia de perturbación y con valores de la constante de amortiguamiento (fricción) igual a 1.0, 0.1 y 0.01 Ns/m en cada unión, como se puede observar las pruebas incluyen un amplio rango en los

---

coeficientes de fricción, que va desde cero para el caso ideal, hasta valores realmente altos con la finalidad de cubrir los casos extremos y analizar el comportamiento de un sistema altamente amortiguado para observar si se presenta alguno de los comportamientos antes mencionados.

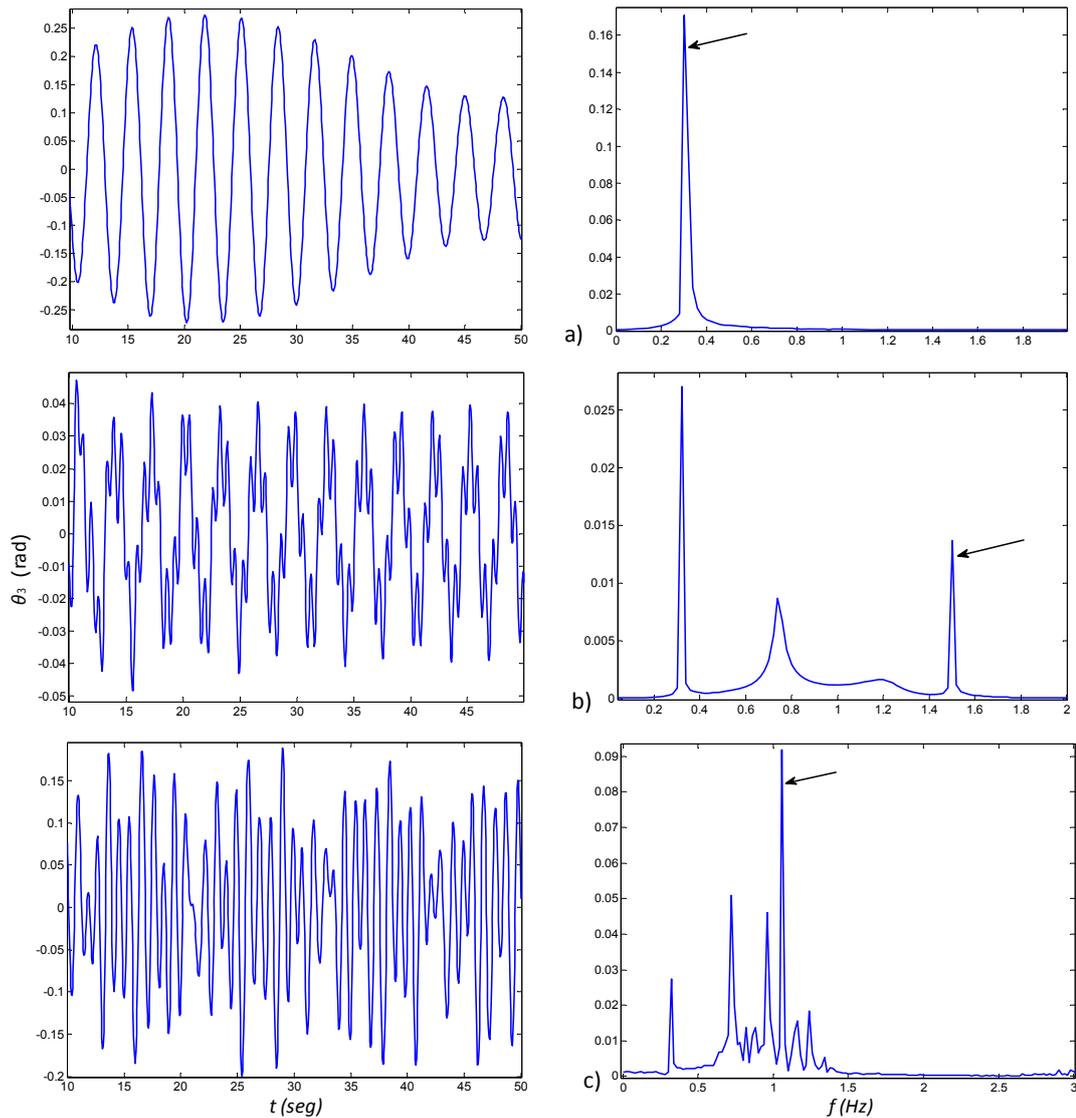
Una forma cualitativa de clasificar un movimiento es por medio de un análisis espectral usando la transformada de Fourier. Por tanto en la misma figura 2.2 también se muestra la variación de la componente de frecuencia para cada uno de los 3 casos en particular. Las correspondientes gráficas del análisis espectral son las que se muestran del lado derecho.

Usando los mismos valores y condiciones iniciales que se utilizaron para los resultados que se muestran en la figura 2.2, en la figura 2.3 se presentan los diagramas de fase obtenidos con las variables  $\theta_3$  contra  $\theta_1$ . Los diagramas de fase son una representación cartesiana y se emplean para caracterizar de forma cualitativa el comportamiento dinámico de un sistema; el tiempo está implícito y cada eje representa una variable dinámica, cada punto es un instante del estado, y la línea descrita por una sucesión de puntos se denomina trayectoria. Dicha trayectoria es arrastrada hacia una región del espacio de estados llamada *atractor*, que es la manifestación de los parámetros fijos y de las ecuaciones que determinan los valores de las variables dinámicas [1, 3].

Como ejemplo de las trayectorias, un sistema en reposo será dibujado como un punto, y un sistema en movimiento periódico será dibujado como un círculo. Algunas veces el movimiento representado con estos diagramas no presenta una trayectoria bien definida, sino que está desviada alrededor de algún movimiento bien definido. Cuando esto sucede se dice que el sistema es atraído hacia un tipo de movimiento, es decir, que hay un atractor y de acuerdo a la forma en que las trayectorias evolucionen, éstos pueden ser clasificados

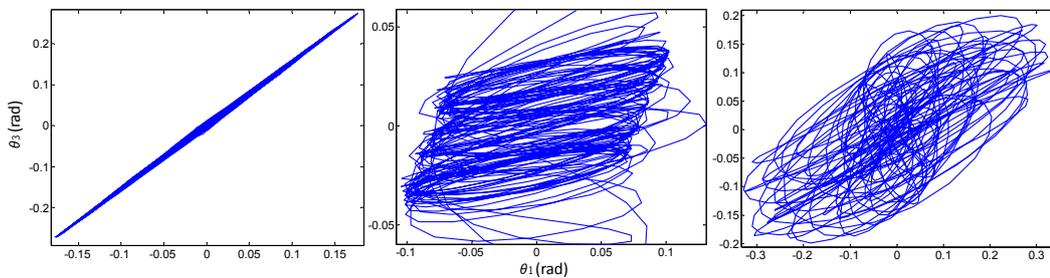
---

como periódicos, cuasi-periódicos y caóticos o extraños [1, 3, 58]. Por lo tanto, en la figura 2.3 se observa un comportamiento periódico, cuasi-periódico y caótico.



**Figura 2.2** Comportamiento típico de un péndulo triple que se obtiene variando la frecuencia de perturbación y el coeficiente de amortiguamiento. a) Comportamiento periódico con  $f = 0.3 \text{ Hz}$  y amortiguamiento de  $1 \text{ Ns/m}$ , b) Comportamiento cuasi-periódico con  $f = 1.5 \text{ Hz}$ , amortiguamiento de  $0.1 \text{ Ns/m}$  y c) Comportamiento caótico con  $f = 0.5 \text{ Hz}$  y amortiguamiento de  $0.01 \text{ Ns/m}$ .

En la figura 2.4 se muestra la respuesta típica del sistema en serie de tiempo del tercer ángulo para los dos modelos, el de pequeñas oscilaciones y el no lineal. Las dos curvas se obtienen con los mismos parámetros y las mismas condiciones iniciales, los valores usados para la frecuencia y amplitud de perturbación son  $f=0.5 \text{ Hz}$  y  $\eta_0=0.03 \text{ m}$ , respectivamente, se considera también que las masas y longitudes tienen los mismos valores  $m_i=1 \text{ Kg}$  y  $L_i=1 \text{ m}$  ( $i=1, 2, 3$ ) respectivamente.



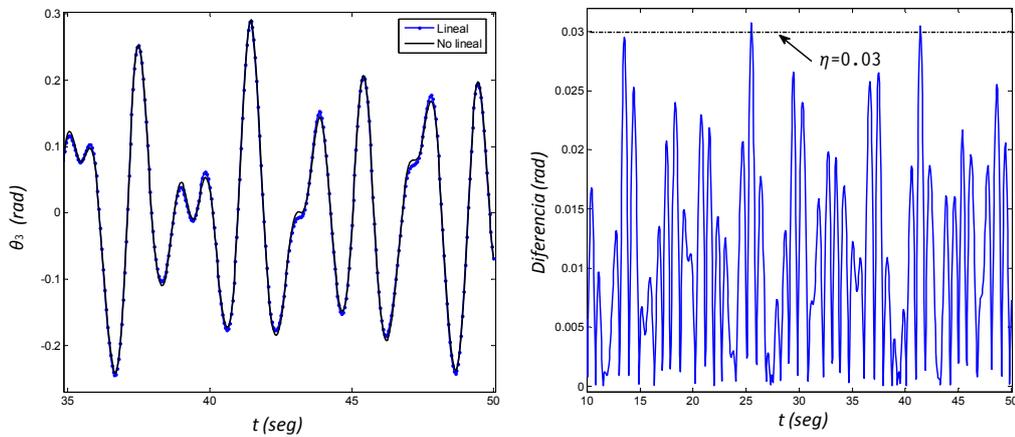
**Figura 2.3** Diagrama de fase para las variables  $\theta_3$  contra  $\theta_1$  calculadas con los mismos valores usados para la figura 2.2

El comportamiento dinámico del modelo de pequeñas oscilaciones representado en la ecuación (2.2) y el comportamiento del modelo no lineal de la ecuación (2.1), tienden a ser muy similares como se puede apreciar en la figura 2.4. Y justo dentro de los límites donde se considero que  $\sin\theta \approx \theta$ , las dos respuestas coinciden completamente, por lo que es fundamental y equivalente considerar la respuesta del modelo lineal, ya que se ha encontrado una dependencia del comportamiento del sistema con al parámetro de fricción, por tanto en esta comparación no se considera el termino de fricción para obtener la respuesta en serie de tiempo. Además, esta comparación no se debe de tomar como una validación del sistema propuesto que solo es una comparación dentro de los límites de pequeñas oscilaciones.

### 2.4 Análisis de respuesta en frecuencia

Para el modelo de pequeñas oscilaciones se calcula la solución teórica de su respuesta en frecuencia usando su función de transferencia y se compara con la solución obtenida numéricamente de las correspondientes ecuaciones diferenciales del modelo no lineal. De la ecuación (2.2) se obtiene

$$ML\ddot{\theta} + R\dot{\theta} + gml\theta = -ml\ddot{\eta}$$



**Figura 2.4** Comparación entre la respuesta del modelo lineal y el no lineal. a) Respuesta en serie de tiempo para el ángulo del tercer enlace con frecuencia de perturbación de  $f=0.5$  Hz. b) Diferencia entre las dos respuestas de serie de tiempo. El valor máximo de la diferencia está en función de la amplitud de perturbación  $\eta_0$ , que para este caso tiene un valor de 0.03.

Se aplica la transformada de Laplace a todos los elementos de la ecuación anterior, se obtiene:

$$MLs^2\theta(s) + Rs\theta(s) + gml\theta(s) = -mls^2\eta(s)$$

Posteriormente se factoriza la variable  $\theta(s)$

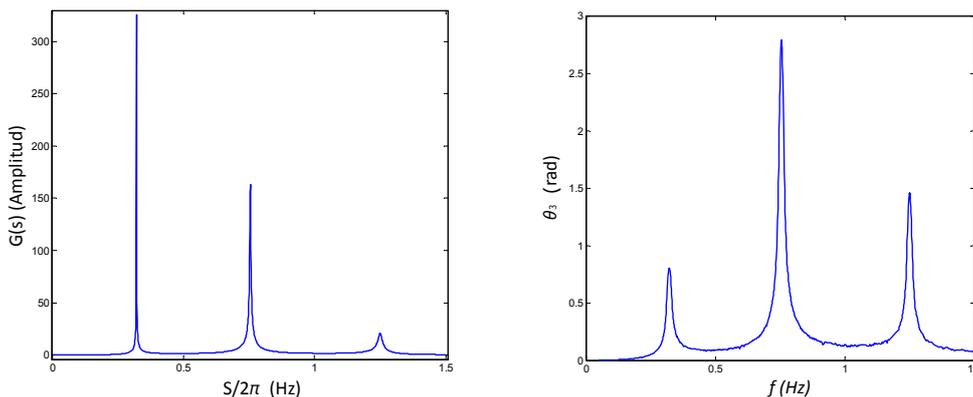
$$[MLs^2 + Rs + gml]\theta(s) = -mls^2\eta(s)$$

Donde  $\theta(s)$  y  $\eta(s)$  son las variables de salida y entrada del sistema, respectivamente.

Se sabe que una función de transferencia está definida como la relación de la variable de salida entre la entrada. En la ecuación (2.3) se representa la función de transferencia del modelo de pequeñas oscilaciones y su respuesta se grafica en la figura 2.5a. En esta figura cada pico corresponde a una frecuencia de resonancia del sistema. Las curvas se obtienen usando la variable  $s=j2\pi f$  y se usan los mismo parámetros que se usaron en los resultados mostrados en la figura 2.4.

$$\frac{\theta(s)}{\eta(s)} = -\frac{m l s^2}{M L s^2 + R s + g m l} \quad (2.3)$$

En la figura 2.5b se muestra la respuesta en frecuencia para el modelo de pequeñas oscilaciones de la ecuación (2.2) y se puede observar que los valores de las frecuencias de resonancia son aproximadamente los mismos que se obtienen con los dos métodos.



**Figura 2.5** Frecuencias de resonancia del péndulo triple lineal para el ángulo del último enlace como función de la frecuencia de perturbación. a) Respuesta de frecuencia teórica usando transformada de Laplace. b) Diagrama de bifurcación para el modelo de pequeñas oscilaciones usando la solución de las ecuaciones diferenciales.

---

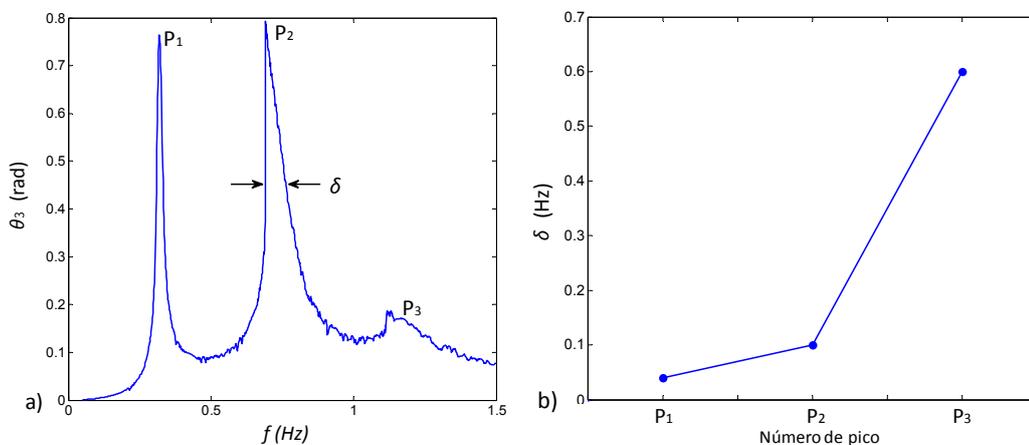
Con los resultados que se presentan en la figura 2.5, es posible comparar la frecuencia de resonancia calculada con la función de transferencia y el diagrama de bifurcación para  $\theta_3(t)$ , que se obtiene de las ecuaciones diferenciales del mismo modelo. Cabe aclarar que solo se hace la comparación sobre las frecuencias de resonancia, no así sobre la amplitud de cada una de ellas, porque mientras una respuesta corresponde a una relación de transferencia, la otra representa un ángulo de oscilación de un enlace en particular del sistema físico.

En la figura 2.6 se presenta el comportamiento de la respuesta en frecuencia usando las ecuaciones diferenciales del modelo no lineal del péndulo triple, este diagrama de bifurcación se obtiene con los mismos parámetros empleados para los resultados de la figura 2.5, Aunque el primer pico es el mismo que se obtiene en ambos modelos, para  $f > 0.35 \text{ Hz}$  o después del primer pico, los picos en las frecuencias de resonancia se ensanchan, este comportamiento se presenta porque a partir de esa frecuencia la no linealidad del sistema empieza a influenciar el comportamiento del péndulo, degradando la respuesta con respecto a la frecuencia de perturbación.

Las curvas presentadas en las figuras 2.5b y 2.6a corresponden al valor máximo en la respuesta de tiempo del tercer enlace para cada frecuencia de perturbación del modelo de pequeñas oscilaciones y del modelo no lineal, respectivamente, por lo que estas curvas son consideradas como respuesta a la frecuencia cuando el sistema pendular es perturbado dentro de un rango de frecuencia. Se puede notar también que conforme se incrementa la frecuencia de perturbación sobre el primer enlace, los picos se ensanchan, lo cual indica que el elemento más bajo del péndulo responde incrementalmente a un rango más amplio de frecuencias. De igual forma, en la figura 2.6a se observa que se presenta un comportamiento de degradación de la frecuencia de resonancia,

---

con respecto a la respuesta teórica, este efecto es ocasionado por la no linealidad propia del modelo. En la figura 2.6b se muestra como cambia el ancho de cada pico de la frecuencias de resonancia, como función de la posición de cada enlace, es decir si la frecuencia del movimiento aplicado al primer enlace se incrementa, se incrementa el ancho del pico de la frecuencia de resonancia del tercer enlace.

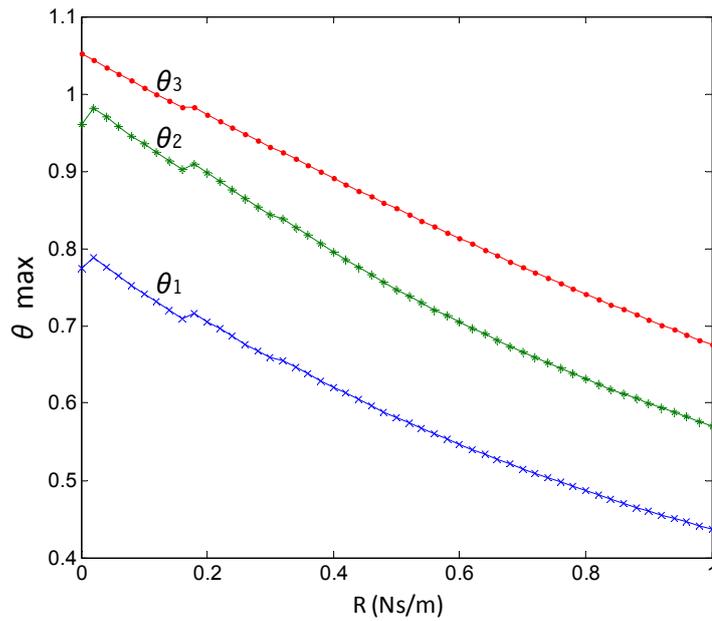


**Figura 2.6** a) Respuesta a la frecuencia del modelo no lineal. El eje vertical es el máximo ángulo observado en el último enlace del péndulo triple, b) ancho del pico de frecuencia de resonancia.

## 2.5 Deslizamiento de la frecuencia de resonancia

En esta sección se reportan los resultados sobre un estudio de las propiedades dinámicas del péndulo triple como función de la variación del coeficiente de amortiguamiento en las uniones de cada enlace. Primero se analiza el comportamiento del sistema alrededor de los pico de las frecuencias de resonancia, en la cual se ha encontrado que la amplitud máxima de los desplazamientos angulares decrece en forma exponencial lenta conforme el coeficiente de fricción aumenta, este comportamiento se muestra en la figura 2.7. En esta figura, el eje vertical esta en escala logarítmica y corresponde al ángulo máximo obtenido para cada enlace y el eje horizontal corresponde a la

variación del coeficiente de fricción, considerando el mismo valor para todas las uniones y un rango de 0 a  $1\text{Ns/m}$ . Estas curvas tienen un decremento exponencial con una ley de escalamiento de aproximadamente 0.5.



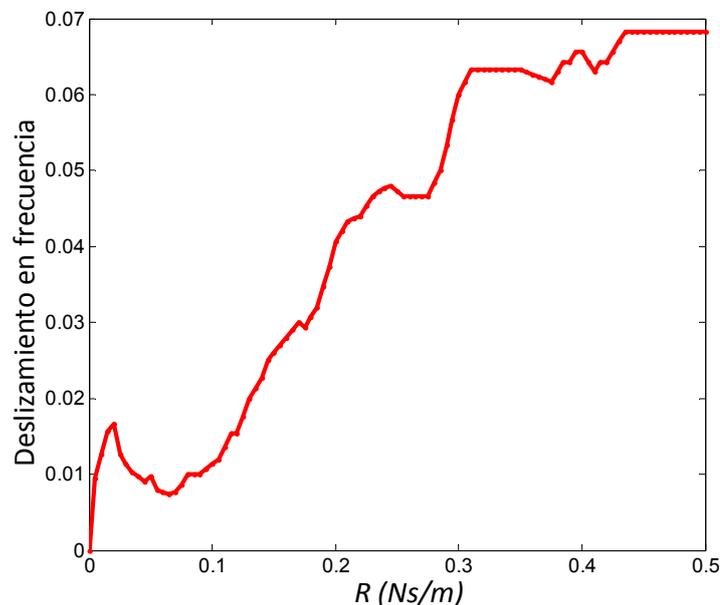
**Figura 2.7** Valores máximos en estado estable de cada ángulo usando una frecuencia igual al primer pico de la frecuencia de resonancia. La escala del eje vertical es logarítmica.

$$\theta_{\max} \approx e^{-0.5R}$$

El segundo análisis y el resultado principal del estudio de sistema de péndulo triple corresponde a que se ha encontrado un comportamiento de deslizamiento en las frecuencias de resonancia, con respecto a las variaciones del coeficiente de fricción. En la figura 2.8 se presenta el comportamiento del deslizamiento del pico de la segunda frecuencia de resonancia para el tercer ángulo del sistema, donde para trazar cada curva, la frecuencia de perturbación se hace variar en el

rango de  $0.63$  a  $0.75$  Hz y el coeficiente de fricción en las uniones varía en el rango de  $0$  a  $0.5$  Ns/m.

De la figura 2.8 se pueden observar dos comportamientos diferentes, uno donde la fricción no influye en el deslizamiento de la frecuencia de resonancia, y el otro donde el deslizamiento crece linealmente con el parámetro de amortiguamiento o fricción. Es claro apreciar que para pequeños valores del coeficiente de fricción,  $R_k < 0.1$ , el desplazamiento es independiente, es decir, la fricción no desplaza el pico de resonancia, el mismo comportamiento se presenta para  $R_k > 0.3$ . En cambio en la mitad del intervalo entre  $0.1$  y  $0.3$  se observa un comportamiento aproximadamente lineal, lo cual significa que el desplazamiento en el pico de resonancia crece linealmente con respecto a la fricción, con una pendiente de  $0.25$ , es decir se cumple aproximadamente con la relación  $\Delta fr = 0.25R$ .



**Figura 2.8** Comportamiento del deslizamiento de la segunda frecuencia de resonancia.

## 2.6 Conclusión

En este capítulo se presenta el desarrollo del modelo dinámico de un péndulo triple, en el que se estudia principalmente su comportamiento dinámico, cuando éste es perturbado de forma periódica a diferentes frecuencias y con variaciones en el coeficiente de fricción. El modelo obtenido se implementa en Matlab, por lo que, el resultado principal que se ha obtenido con este análisis es las frecuencias de resonancia presentes en el sistema y que además, presentan desplazamientos con dos comportamientos, cuando se varía el coeficiente de fricción. Un primer comportamiento es que en un rango de la variación de la fricción, el desplazamiento de la frecuencia de resonancia es aproximadamente lineal, mientras que en el segundo comportamiento, las variaciones en la fricción no afectan el desplazamiento de las frecuencias de resonancia.

Aquí se ha establecido un modelo matemático lineal y no lineal del sistema péndulo triple, que cuando se representa de forma matricial se puede extender de una forma simple a un sistema de  $n$ -péndulos, estos resultados se reportan en la referencia [12].

## Capítulo 3

### Análisis de una Barra Flexible

#### 3.1 Introducción.

El brazo de robot con elementos flexibles es en la actualidad un importante sistema dinámico avanzado, este diseño tiene la principal característica de estar construido con materiales ligeros, lo cual presenta muchas ventajas con respecto a los brazos de robots convencionales o rígidos [15, 25]. Estos mecanismos mejoran la relación de la capacidad de carga contra el peso del propio brazo incrementando la velocidad de respuesta con un consumo de energía más bajo, pero dificulta el proceso de control debido al comportamiento no lineal que presentan cuando son sometidos a fuerzas que generan grandes flexiones [14].

Actualmente se están generando muchos trabajos sobre el desarrollo de modelos elásticos de gran desplazamiento basados en la ecuación de Euler-Bernoulli. Se proponen algoritmos numéricos para estimar la curvatura y la flecha de una barra elástica y estática, estos métodos dependen de la solución de ecuaciones integrales complicadas por métodos numéricos. De igual forma también se están obteniendo resultados de la dinámica no-lineal de sistemas mecánicos multi-cuerpos compuestos por barras de Euler Bernoulli [25].

En esta sección se presenta el estudio de elementos flexibles, principalmente el de una barra empotrada en uno de sus extremos y el otro extremo libre, ya que

---

---

el modelo de un brazo de robot ligero cumple con estas características, donde se aplica una fuerza considerable que hace flexionar la barra formando un arco y llevando al extremo libre a un nuevo punto coordenado  $(x_f, y_f)$ . Se describe el análisis principalmente de dos casos; el primero es cuando se considera que la barra presenta pequeñas flexiones, donde se hace la consideración de que el desplazamiento sobre el eje x del extremo libre de la barra es nulo, lo cual facilita considerablemente dicho análisis limitándose a obtener solo el valor de  $y_f$ . En cambio, en el segundo caso se considera que la barra presenta grandes flexiones, por lo que el análisis es más complejo y se tiene que calcular el desplazamiento del extremo libre de la barra, tanto en el eje x como en el eje y. Para ambos casos el análisis se hace empleando la ecuación de Euler-Bernoulli [38].

Se presente también la simulación del modelo de barra flexible obtenida, para el caso de pequeñas y para grandes flexiones. Para la simulación se emplean parámetros reales de una barra de aluminio, la cual se utiliza posteriormente en el capítulo 5, como elemento flexible en la implementación del prototipo de robot.

### 3.2 Ecuación de Euler-Bernoulli

Las fuerzas transversales y acopladas que se aplican sobre una barra causan que se flexione. Existe una relación entre la curvatura de flexión de la barra y el momento en la sección transversal de la viga. Si la curva de deflexión es caracterizada por una función  $v(x)$  que proporciona el desplazamiento transversal a diferentes punto sobre la barra; es decir, sobre el eje y si la viga esta a lo largo del eje x, la pendiente de la curva de flexión es identificada por el ángulo  $\theta(x)$ .

Existen diferentes razones para considerar la deflexión de una barra; una de ellas es cuando se requiere conocer la máxima deflexión de una barra bajo la acción de una carga. Otro caso es el de una barra que soporta un puente que debe tener ese espacio hacia arriba para considerar la flexión ante la dilatación del material.

Generalmente las Barras flexibles presentan un comportamiento no lineal cuando se someten a grandes esfuerzos. La deflexión de la barra se puede estudiar por medio de una ecuación diferencial momento-curvatura que relaciona la deflexión, el momento, las fuerzas cortantes y la carga transversal. La siguiente ecuación es el punto de inicio para el análisis de la deflexión de vigas linealmente elásticas.

$$M(x) = \frac{Y(x)I(x)}{\rho(x)}, \quad (3.1)$$

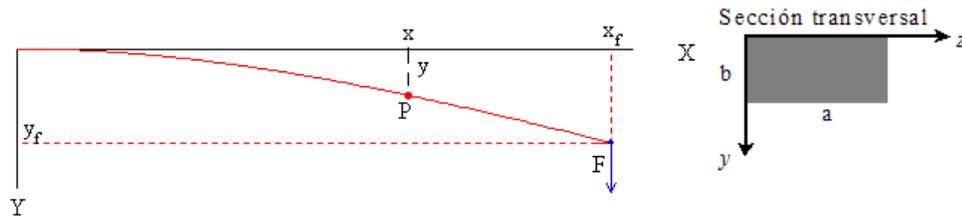
donde  $M(x)$  es el momento de curvatura,  $\rho(x)$  es el radio de curvatura de la barra y el producto  $Y(x)I(x)$  es referido como rigidez de flexión. En otras palabras, la ecuación momento-curvatura relaciona la cantidad de fuerza  $M(x)$  para la lograr una cantidad de desplazamiento  $\rho(x)$  [15, 29, 30].

A continuación, se examina la teoría de la flexión de una viga en voladizo para los casos de pequeñas y grandes flexiones para calcular el desplazamiento de su extremo libre cuando se le aplica una fuerza que produce una flexión considerable.

### 3.3 Pequeñas flexiones

Se considera una barra delgada de sección transversal rectangular y longitud  $L$  en posición horizontal, empotrada por un extremo y sometida a una fuerza vertical  $F$  en el extremo libre, como se representa en la figura 3.1. Se determina

la forma de la barra y las coordenadas  $(x_f, y_f)$  del extremo libre para pequeñas flexiones.



**Figura 3.1** Esquema de una barra flexible empotrada y su sección transversal

Se considera que: i) La barra tiene una longitud  $L$  mucho mayor que las dimensiones de su sección trasversal, y que la deformación debida a su propio peso es despreciable. ii) La sección de la barra no cambia cuando se dobla. Cuando el espesor de la barra es pequeño comparado con el radio de curvatura, la sección trasversal cambia muy poco. En estas condiciones es aplicable la ecuación de Euler-Bernoulli que relaciona el momento flector  $M$  de la fuerza aplicada y el radio de curvatura  $\rho$  de la barra deformada y que se representa con la ecuación (3.1), donde  $I$  es el momento de inercia de la barra

rectangular,  $I = \frac{ab^3}{12}$ , y el radio de curvatura de una función  $y(x)$  está dado por

la expresión  $\rho = \frac{ds}{d\theta}$ , que también se escribe como:

$$\rho = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Para el caso de pequeñas pendientes se tiene que  $(dy/dx)^2 \approx 0$ , por lo tanto la expresión anterior se reduce a:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Si se desprecia el peso de la propia barra, el momento de la fuerza  $F$  aplicada en el extremo libre, respecto de un punto  $P(x, y)$  es  $M = F(x_f - x) \approx F(L - x)$ , sustituyendo ésta relación en la expresión de  $M$  se tiene:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F}{Y \cdot I} (L - x)$$

Integrando dos veces la expresión anterior con las siguientes condiciones iniciales  $x=0, y=0, dy/dx=0$ , se obtiene una solución para la coordenada  $y$  a lo largo de la barra:

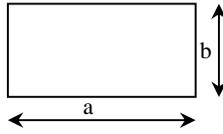
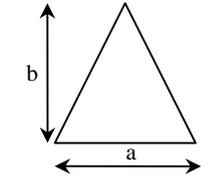
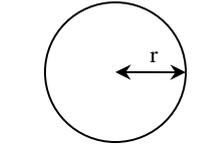
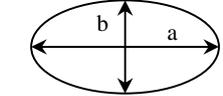
$$y = \frac{FL}{2Y \cdot I} \left( x^2 - \frac{x^3}{3L} \right) \quad (3.2)$$

El desplazamiento  $y_f$  del extremo libre de la barra se obtiene de la expresión anterior considerando  $x=L$ , por lo tanto se simplifica y expresa como se muestra en la siguiente ecuación; de ésta se observa que el desplazamiento vertical en el extremo final de la barra es proporcional a la fuerza  $F$  aplicada, ya que los términos  $L, Y$  e  $I$  son parámetros propios de la barra.

$$y_f = \frac{L^3}{3Y \cdot I} F$$

A continuación se presenta la tabla 3.1 que contiene las fórmulas para obtener los momentos de inercia para barras con diferente sección transversal.

**Tabla 3.I** Momentos de inercia con vigas de diferente sección transversal

<i>Figura</i>	<i>Momento de inercia en x</i>	<i>Momento de inercia en y</i>
	$I_x = \frac{ab^3}{12}$	$I_y = \frac{ab^3}{3}$
	$I_x = \frac{ab^3}{36}$	$I_y = \frac{ab^3}{12}$
	$I_x = \frac{\pi r^4}{4}$	$I_y = \frac{\pi r^4}{2}$
	$I_x = \frac{\pi ab^3}{4}$	$I_y = \frac{\pi ba^3}{2}$

### 3.4 Grandes flexiones

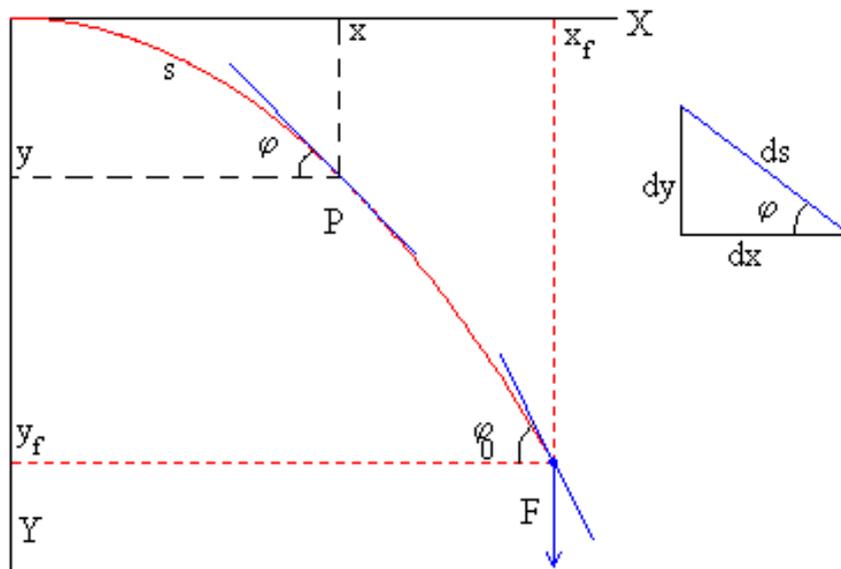
Los brazos de robot flexibles generalmente son construidos con materiales ligeros o estructuras delgadas, cuando son sometidos a grandes cargas, presentan flexiones considerables. Para analizar este caso, en esta sección se estudia la barra flexible para grandes flexiones, en donde se resuelve la ecuación diferencial de Euler–Bernoulli completa para encontrar la nueva coordenada  $(x, y)$  de cualquier punto definido a lo largo de la barra, incluyendo el extremo final.

Bajo las condiciones de la sección anterior, es aplicable la ecuación de Euler–Bernoulli, por lo tanto se usa nuevamente la ecuación (3.1). Teniendo en cuenta

que el radio de curvatura se define como  $\rho=ds/d\varphi$ , la ecuación (3.1) ahora se expresa como:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{Y \cdot I}$$

Esta ecuación no tiene una solución analítica, sin embargo se puede resolver empleando métodos numéricos, obteniendo la solución de un par de integrales elípticas [25]. En la figura 3.2 se representa un esquema de la barra con grandes flexiones, donde se identifica un punto P cualquiera con coordenada  $(x,y)$  y un ángulo  $\varphi$  formado entre la barra y la horizontal, de igual forma al extremo final de la barra se le identifica como  $(x_f,y_f)$  y también presenta el ángulo  $\varphi_0$ .



**Figura 3.2** Esquema de una barra flexible para grandes flexiones sometida a una fuerza en el extremo libre.

De la figura 3.2 se tiene que el momento flector  $M$  de la fuerza  $F$  aplicada en el extremo libre de la barra respecto del punto P ( $x, y$ ) es  $M=F(x_f - x)$ , por lo tanto al sustituir este término en la ecuación anterior se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{F}{Y \cdot I} (x_f - x)$$

Se deriva esta ecuación con respecto a  $s$ , además de la figura 3.2, se tiene que por trigonometría  $\cos\varphi=dx/ds$ , de tal forma que  $dx=x_f - x$ , al sustituir estos términos, la ecuación anterior se convierte en una ecuación diferencial no lineal de segundo grado:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{F}{Y \cdot I} \cos\varphi = 0$$

Para determinar  $\varphi(s)$  se resuelve la ecuación diferencial con las siguientes condiciones iniciales:

$$\varphi(L) = \varphi_0 \quad \left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{s=L} = 0$$

A continuación se plantea el procedimiento que se sigue para obtener una solución de la ecuación diferencial, se multiplica la ecuación diferencial por  $d\varphi/ds$  y se desarrolla la manipulación matemática de la siguiente forma:

$$\frac{d\varphi}{ds} \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{F}{Y \cdot I} \cos\varphi = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{F}{Y \cdot I} \operatorname{sen}\varphi \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{F}{Y \cdot I} \operatorname{sen} \varphi = cte$$

La constante de integración se determina a partir de las condiciones iniciales especificadas anteriormente

$$\left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = \frac{2F}{Y \cdot I} (\operatorname{sen} \varphi_0 - \operatorname{sen} \varphi)$$

$$ds = \sqrt{\frac{Y \cdot I}{2F}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\operatorname{sen} \varphi_0 - \operatorname{sen} \varphi}}$$

La Longitud  $L$  de la barra y las coordenadas  $x$  e  $y$  de cada uno de los puntos se obtienen con las siguientes expresiones:

$$L = \int_0^{\varphi_0} ds, \quad dx = ds \cos \varphi, \quad dy = ds \operatorname{sen} \varphi$$

$$L = \sqrt{\frac{YI}{2F}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\operatorname{sen} \varphi_0 - \operatorname{sen} \varphi}}$$

$$x = \sqrt{\frac{YI}{2F}} \int_0^{\varphi_0} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\operatorname{sen} \varphi_0 - \operatorname{sen} \varphi}} = \sqrt{\frac{2YI}{F}} (\sqrt{\operatorname{sen} \varphi_0} - \sqrt{\operatorname{sen} \varphi_0 - \operatorname{sen} \varphi})$$

$$y = \sqrt{\frac{YI}{2F}} \int_0^{\varphi_0} \frac{\operatorname{sen} \varphi d\varphi}{\sqrt{\operatorname{sen} \varphi_0 - \operatorname{sen} \varphi}}$$

Dada una fuerza  $F$  aplicada en el extremo libre de la barra y conocida la longitud  $L$  de la barra, se resuelve la primera ecuación diferencial para calcular el ángulo  $\varphi_0$ , que forma la recta tangente a la barra en su extremo libre con la parte negativa del eje horizontal  $X$ . Una vez que se conoce el ángulo  $\varphi_0$ , se

calcula la abscisa  $x$  dando valores al ángulo  $\varphi$  en el intervalo  $[0, \varphi_0]$ . El cálculo de la ordenada  $y$  es más complicado, ya que para cada valor del ángulo  $\varphi$  se requiere encontrar una integral definida en el intervalo  $[0, \varphi]$  empleando procedimientos numéricos.

### 3.5 Cálculo numérico

El cálculo numérico de la coordenada  $(x, y)$  en el extremo libre de la barra requiere de calcular previamente el ángulo total de flexión  $\varphi_0$  en el extremo libre, referenciado con el plano de la posición de la barra sin aplicar fuerza alguna. Para encontrar este ángulo es necesario resolver un par de integrales elípticas de Legendre, de primer especie completa e incompleta, empleando el método de Carlson.

Considerando que  $\alpha = \frac{FL^2}{2Y \cdot I}$ , las ecuaciones anteriores se pueden expresar de la siguiente forma:

$$2\sqrt{\alpha} = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\text{sen}\varphi_0 - \text{sen}\varphi}} \quad (3.3)$$

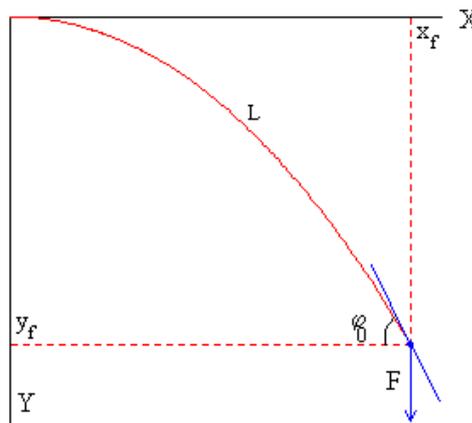
$$\frac{x}{L} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (\sqrt{\text{sen}\varphi_0} - \sqrt{\text{sen}\varphi_0 - \text{sen}\varphi}) \quad (3.4)$$

$$\frac{y}{L} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^{\varphi} \frac{\text{sen}\varphi d\varphi}{\sqrt{\text{sen}\varphi_0 - \text{sen}\varphi}} \quad (3.5)$$

Donde  $\alpha$  es un parámetro adimensional que engloba las características geométricas de la barra, del material del que está hecha, y de la fuerza aplicada en su extremo libre

**Cálculo de  $\varphi_0$ .**

Para calcular  $\varphi_0$  se inicia con la primera ecuación que determina el ángulo  $\varphi_0$  que forma la recta tangente a la barra en su extremo libre con la horizontal, como se observa en la figura 3.3.



**Figura 3.3** Esquema de barra flexible para identificar el ángulo  $\varphi_0$  en el extremo libre

El procedimiento para encontrar el ángulo total de flexión  $\varphi_0$  en el extremo libre de la barra se basa generalmente en dos pasos; el primero consiste obtener la solución de la integral de la ecuación (3.3) y el segundo paso se enfoca en encontrar la raíz de una función  $f(\varphi_0)=0$ . Esta integral se puede expresar en términos de la suma de dos integrales elípticas de primera especie, para lograrlo se hacen dos cambios de variable. El primer cambio es  $\theta=\varphi+\pi/2$  sobre la integral de la ecuación (3.3), misma que ahora se expresa de la siguiente forma:

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\text{sen } \varphi_0 - \text{sen } \varphi}} = \int_{\pi/2}^{\varphi_0+\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos(\varphi_0 + \pi/2)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\pi/2}^{\varphi_0+\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\text{sen}^2(\varphi_0/2 + \pi/4) - \text{sen}^2(\theta/2)}}$$

El segundo cambio de variable es

$$\text{sen } \phi = \frac{\text{sen}(\theta/2)}{k}$$

y considerando que  $k = \text{sen}\left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ , el diferencial  $d\theta$  queda de la siguiente

forma:

$$d\theta = \frac{2k \cos \phi d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi}},$$

por lo tanto la integral de la ecuación (3.3) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\text{sen}\varphi_0 - \text{sen}\varphi}} &= \sqrt{2} \int_{\psi}^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi}} \\ &= \sqrt{2} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi}} - \int_0^{\psi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi}} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde:  $\text{sen } \psi = \frac{\text{sen}(\pi/4)}{k}$ ,

Finalmente el valor del ángulo total de flexión  $\varphi_0$  en el extremo libre de la barra se obtiene encontrando la raíz del polinomio  $f(\varphi_0)=0$  empleando el método de Newton Raphson, dicho polinomio se obtiene de la expresión (3.6) y a continuación se presenta en una forma simplificada:

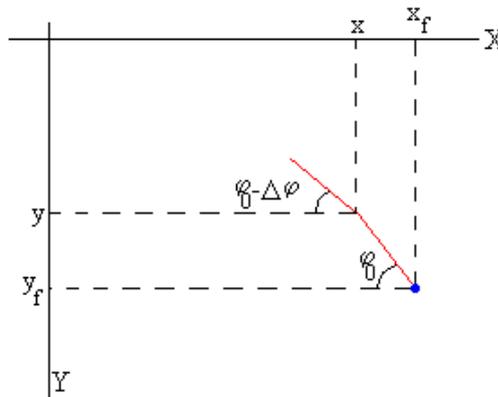
$$\sqrt{2}(E(k, \pi/2) - E(k, \psi)) = 2\sqrt{\alpha}$$

donde  $E(k, \pi/2)$  y  $E(k, \psi)$  son las integrales elípticas de **Legendre** de primer tipo completa e incompleta, respectivamente. Éstas se resuelven con el procedimiento de **Carlson** [40]. El cálculo de  $x/L$  de la ecuación (3.4) no reviste dificultad alguna. Una vez que se calcula  $\varphi_0$ , se obtiene  $x/L$  para cada ángulo  $\varphi$  en el intervalo  $[0, \varphi_0]$ . Por lo tanto la posición  $x_f$  del extremo libre se obtiene cuando  $\varphi = \varphi_0$ , lo cual simplifica considerablemente la ecuación (3.4), obteniendo la siguiente expresión para  $x_f$ :

$$\frac{x_f}{L} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\text{sen} \varphi_0}$$

En cambio, el cálculo de  $y/L$  es más complejo. Conocido  $\varphi_0$ , se determina la ordenada  $y/L$  para cada ángulo  $\varphi$  en el intervalo  $[0, \varphi_0)$  resolviendo la integral definida en la ecuación (3.5), empleando el método numérico de Simpson. De la ecuación (3.5) se aprecia que cuando  $\varphi = \varphi_0$  el denominador de la integral tiende a cero y la expresión teóricamente tiende a infinito, por esta razón es imposible obtener un resultado correcto de la integral para  $y_f/L$  en el extremo libre de la barra, es decir cuando  $\varphi = \varphi_0$ . Para solucionar este inconveniente se emplea el procedimiento de interpolación que se basa en el esquema que se muestra en la figura 3.4. Se calculan las coordenadas  $(x/L, y/L)$  para el ángulo  $\varphi = \varphi_0 - \Delta\varphi$ , siendo  $\Delta\varphi$  un ángulo pequeño. Se calcula la abscisa  $x_f/L$  para el ángulo  $\varphi_0$  y posteriormente por medio de la siguiente ecuación se calcula  $y_f/L$ :

$$\text{La ordenada } \frac{y_f}{L} = \frac{y}{L} + \left( \frac{x_f}{L} - \frac{x}{L} \right) \tan \varphi_0$$



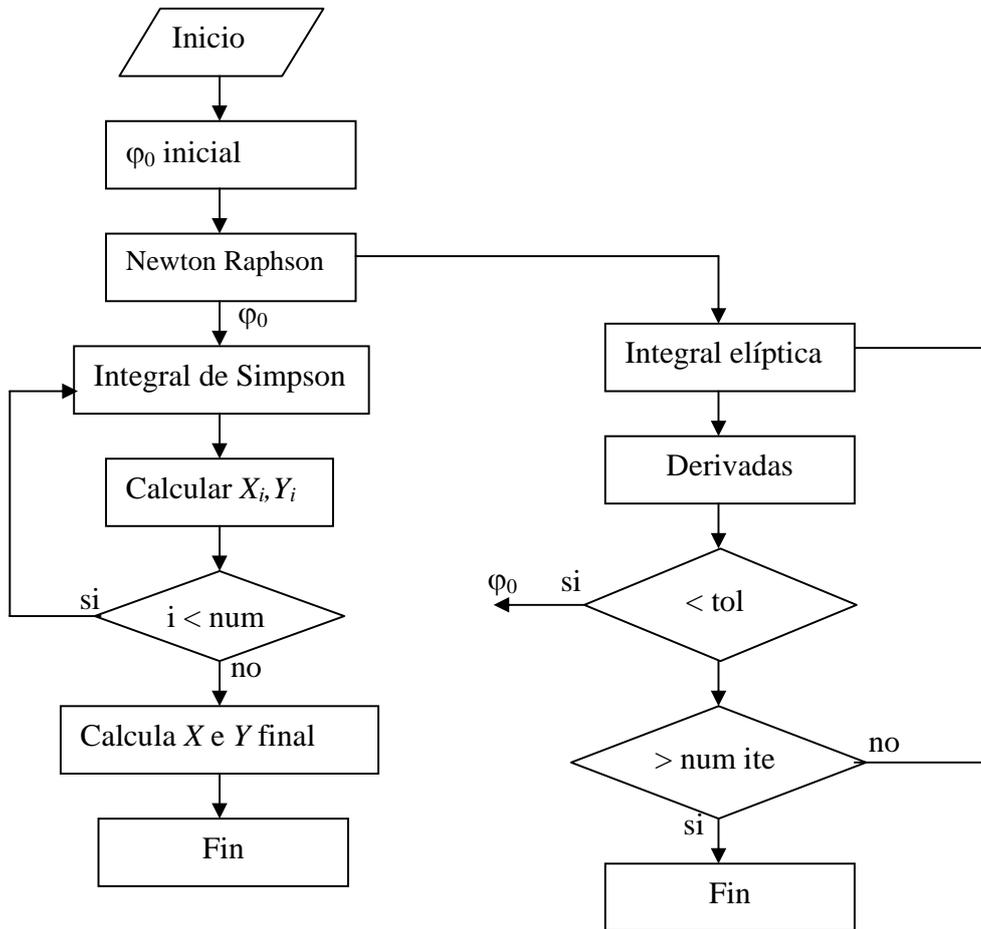
**Figura 3.4** Esquema de barra flexible para encontrar  $y_f$  por interpolación

Cuando una barra flexible empotrada es sometida a cargas dinámicas, se presenta un comportamiento oscilatorio en el extremo libre de la barra. El estudio de este comportamiento se puede hacer a través del análisis del péndulo, que aunque es un sistema relativamente simple presente muchos estados oscilatorios, tanto periódicos como de caos, similares a los presentes en el extremo libre de la barra flexible empotrada.

### 3.6 Implementación en software

Se desarrolla un algoritmo general para encontrar las coordenadas  $(x, y)$  a lo largo de toda la barra cuando es sometido a una fuerza vertical en el extremo final. Para encontrar las raíces del polinomio se emplea el método numérico de Newton Raphson y para encontrar el ángulo total de flexión  $\varphi_0$  se requiere resolver el par de integrales elípticas antes mencionadas.

Conocido el valor de  $\varphi_0$  se puede calcular los valores de  $x$  e  $y$  a lo largo de la barra, sin embargo el valor final de  $y$  se debe obtener por interpolación. En la figura 3.5 se representa el diagrama de flujos que describe el algoritmo para obtener la coordenada  $(x, y)$  a lo largo de toda la barra.

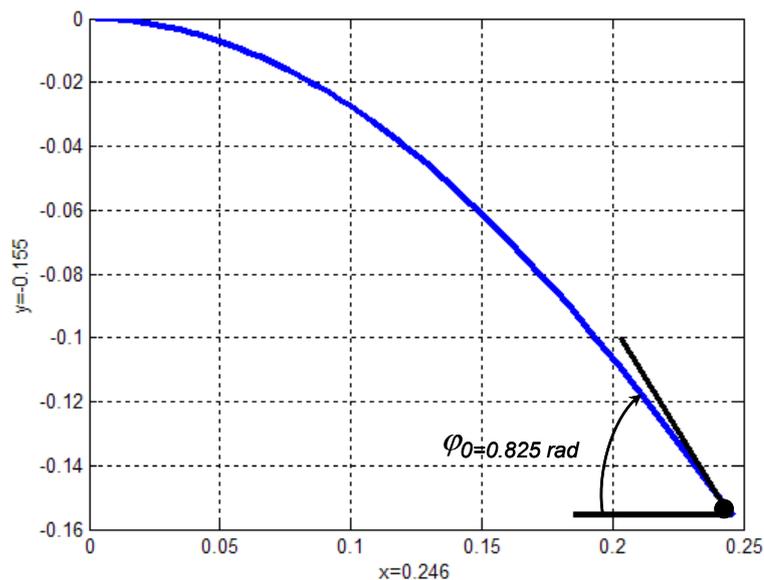


**Figura 3.5** Algoritmo para obtener (x, y) a lo largo de una barra empotrada.

Se programa este algoritmo en el software Matlab y se hace la simulación con los parámetros que a continuación se listan, éstos corresponden a una barra de aluminio de perfil solera con clave 5706. Esta clave corresponde a aluminio de uso común en pequeños talleres y es la que permite identificar el módulo de Young en [39], los otros parámetros se obtienen haciendo las mediciones y pesaje correspondientes.

$M = 0.050$  kg (masa de la barra)  
 $L = 0.3$  m (longitud de la barra)  
 $F = 6$  N (fuerza aplicada)  
 $a = 0.0304$  m (ancho de la barra)  
 $b = 0.00078$  m (alto de la barra,)  
 $Y = 2.06e11$  N/m<sup>2</sup> (módulo de Young)

Los resultados se presentan en la figura 3.6, donde se aprecia el ángulo total de flexión de la barra,  $\varphi_0=0.825$  rad, así como las nuevas coordenada ( $X_f= 0.246$ ,  $Y_f= -0.1558$ ) metros, a lo largo de la barra incluyendo el extremo final de la misma. Por lo cual se presenta también la representación de la nueva forma que toma la barra, ya que en este algoritmo se obtienen los puntos coordenados a lo largo de toda la barra, según se haya seccionado el incremento de ángulo en el intervalo  $[0, \varphi_0]$ .



**Figura 3.6** Representación de la barra con los resultados obtenidos.

---

En la figura 3.6 se observa que los resultados obtenidos en la curvatura de flexión y en la coordenada del extremo final, presentan un comportamiento similar al del esquema de la anterior figura 3.2, la cual se tomó como referencia para el desarrollo de las ecuaciones del modelo matemático.

Una prueba adicional para el algoritmo se hace sobre la barra del ejemplo anterior a la cual se aplica una fuerza de solo 1 N de forma que su flexión sea pequeña para analizarla con el método de pequeñas flexiones. El resultado obtenido para  $y_f$  es 0.0359 m. muy similar al que se obtiene aplicando la fórmula de la ecuación (3.2) obtenida en la sección de pequeñas flexiones, donde  $y_f = 0.0363$ . Con este resultado se corrobora el algoritmo que aquí se ha presentado.

### 3.7 Conclusión

En este capítulo se desarrolla el modelo matemático completo de una barra flexible empotrada, por medio de la ecuación de Euler Bernoulli. Por lo tanto se establece una metodología para resolver las ecuaciones diferenciales no lineales por medio de integrales elípticas, mismas que se resuelven de forma numérica.

Se obtiene también un modelo lineal aproximado con el criterio de pequeñas flexiones, éste es muy simple de resolver y entrega resultados aceptables bajo un rango limitado por la consideración antes mencionada.

El análisis de la barra flexible empotrada que aquí se presenta se emplea en capítulos posteriores para obtener el modelo de una estructura rígido-flexible que representa una estructura robótica, en la que se puede obtener la flexión de cada una de las extremidades.

## **Capítulo 4**

### **Modelado e Implementación del Prototipo**

#### **4.1 Introducción**

La historia de la Robótica ha estado unida a la construcción de "artefactos", muchas veces por obra de genios autodidactas que trataban de materializar el deseo humano de crear seres semejantes a nosotros para que nos descarguen del trabajo.

Un sistema Robótico se describe, como "Aquel que es capaz de recibir información, de comprender su entorno a través del empleo de modelos, de formular y de ejecutar planes, y de controlar o supervisar su operación" [62]. La robótica es esencialmente pluridisciplinaria y se apoya en gran medida en los progresos de la microelectrónica y de la informática, así como en nuevas disciplinas, tales como el reconocimiento de patrones e inteligencia artificial, entre otras.

Los robots industriales típicamente se construyen con materiales rígidos y pesados para dotarlos de rigidez estructural de modo que el problema de control de sus brazos sea equivalente al problema de control de sus actuadores (motores). Sin embargo, éstos presentan varios inconvenientes, como alto consumo de potencia, baja velocidad en el movimiento, necesidad de actuadores sobredimensionados y baja relación de la masa manipulable frente a la masa total del robot.

---

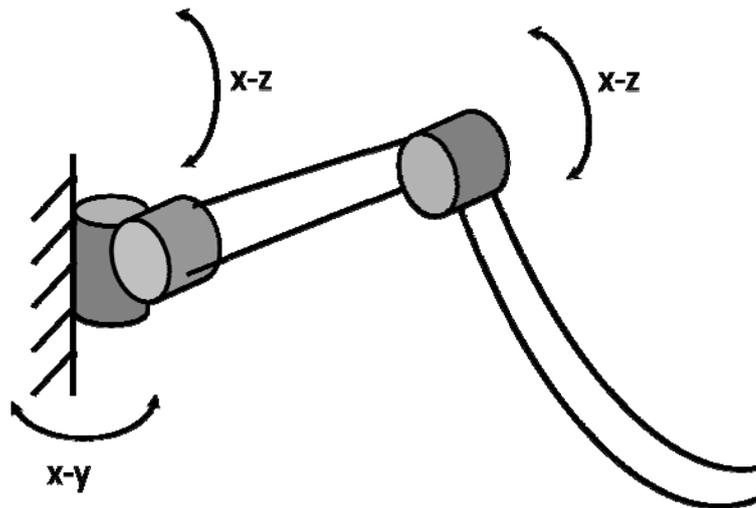
Todos los inconvenientes antes mencionados se pueden solventar mediante la utilización de manipuladores robóticos contruidos con elementos ligeros y flexibles, lo que implica que las flexibilidades estructurales del robot ya no se pueden ignorar cuando se diseña su control. Esto significa que un robot flexible debe controlarse para obtener las mismas especificaciones de precisión y rapidez de movimiento que su equivalente rígido, pero eliminando o atenuando al mismo tiempo las oscilaciones por flexibilidad que se excitan de manera natural en los brazos. Todo ello debe naturalmente conseguirse con el mismo número de actuadores (motores) que tiene un robot rígido (uno por articulación normalmente). Las investigaciones actuales se enfocan en encontrar técnicas novedosas de control que permitan el uso de robots ligeros de elementos flexibles en tareas de manipulación generales con prestaciones equivalentes a las de los robots rígidos, pero sin los inconvenientes antes mencionados.

En este capítulo se desarrolla una propuesta para obtener un modelo matemático de una estructura robótica flexible con seis extremidades. Cada una de las extremidades originalmente es de tres grados de libertad y tiene dos elementos rígidos y uno flexible. El modelo que aquí se propone considera solo un par de elementos flexibles, uno de cada lado, de forma que cada uno agrupa a tres extremidades y los elementos rígidos son parte del cuerpo del robot. Se emplea el análisis de Euler-Bernoulli y la suma de momentos en los puntos de apoyo de las extremidades.

Se presenta también el desarrollo del prototipo de la estructura robótica con los elementos flexibles. El prototipo se desarrolla sobre un kit de desarrollo bioloid premium, el cual tiene su propio software de programación, que permite programar diferentes rutinas de prueba, incluyendo una de caminata. Se incluye un sensor de velocidad de inclinación, para monitorear la inclinación que toma la estructura ante las rutinas programadas.

## 4.2 Modelo del prototipo

El prototipo de robot que se analiza en este trabajo consiste de seis extremidades con tres grados de libertad cada una e incluye un enlace flexible por cada extremidad en la parte final, siendo éste el que hace contacto con la superficie para el desplazamiento, que en algunos casos puede ser irregular. La parte final es la que debe flexionarse de forma que, primero, el paso del robot sea más suave y segundo, la estructura mantenga siempre la horizontalidad. El esquema para la propuesta de cada una de las extremidades se muestra en la figura 4.1

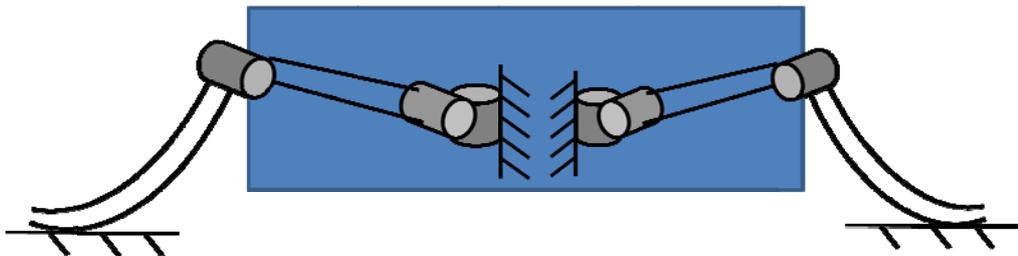


**Figura 4.1** Esquema de propuesta para la extremidad del robot con 3 grados de libertad, dos enlaces rígidos y uno flexible.

En el modelado de sistemas dinámicos en general, siempre se ha buscado la combinación de exactitud y simplicidad. En este sentido, en este trabajo se propone un modelo basado en pequeñas flexiones, se agrupan tres extremidades por cada lado, las cuales son representadas solo por un par de extremidades que soportan equitativamente el peso del robot cuando éste se encuentra de forma horizontal. Se considera además que el robot solo puede tener inclinación sobre un eje, al que se identifica como eje x.

Bajo las consideraciones antes mencionadas, el cuerpo de la estructura puede tener una inclinación que depende de la superficie en la que se está desplazando, generando diferentes fuerzas de reacción en cada una de las extremidades. El objetivo que se busca es que la estructura se mantenga siempre de forma horizontal, por lo cual el controlador debe enviar la información a los actuadores del elemento flexible para que reaccione ante las pendientes o irregularidades que se presentan en la superficie.

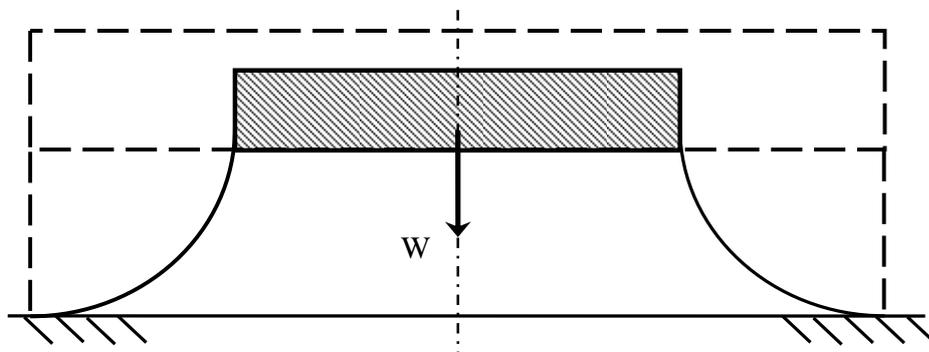
El objetivo de este trabajo se enfoca en el estudio de las extremidades flexibles, por lo tanto se considera que los elementos rígidos de cada extremidad son parte del cuerpo del robot. En este sentido, la propuesta de estructura para el robot es como se muestra en la figura 4.2, donde el rectángulo representa el cuerpo del robot, en el cual cada extremidad, para fines de estabilidad, se supone solo de un grado de libertad con el elemento flexible únicamente. Cabe hacer la aclaración que el tercer enlace y el tercer grado de libertad de cada extremidad se usa para lograr la estabilidad, mientras que los dos primeros son empleados en la rutina de la caminata del robot.



**Figura 4.2** Esquema de la propuesta del robot considerando los elementos rígidos como parte del cuerpo del robot.

En la figura 4.3 se muestra el esquema de la propuesta para la estructura de análisis, de ésta se obtiene el modelo matemático de robot con sus extremidades flexibles y con apoyo de un esquema rígido como el que se muestra con líneas discontinúas. En este esquema es claro que los soportes

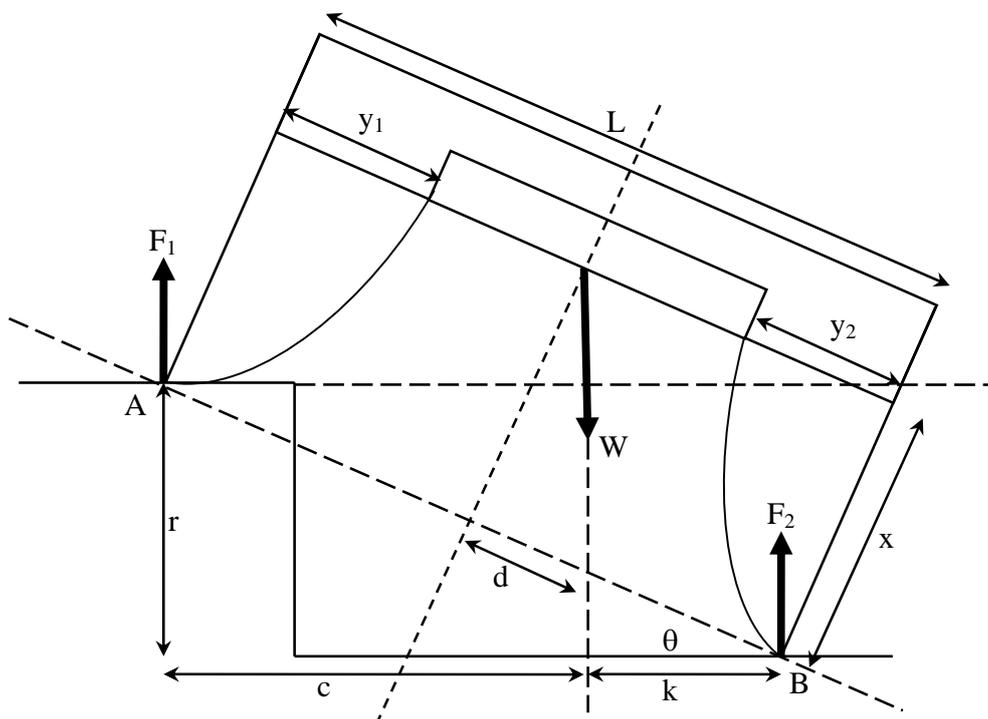
coinciden con el punto de apoyo del enlace flexible, el peso del robot se toma como parámetros concentrados en el centro de la estructura y el ancho de la estructura rígida auxiliar es variable ya que depende del grado de flexión en las extremidades flexibles. Así mismo cada una de éstas se puede flexionar en diferente proporción, dependiendo de la inclinación instantánea que tome la estructura debida a la irregularidad de la superficie, lo cual ocasiona diferente fuerza de reacción en los puntos de apoyo.



**Figura 4.3** Esquema de prueba para robot, considerando solo las extremidades flexibles sobre una estructura auxiliar rígida.

En el desarrollo del modelo matemático se toma el caso específico donde la estructura tiene una inclinación  $\theta$ , ocasionada porque una de las extremidades está sobre un escalón de altura  $r$ , generando, como se mencionó anteriormente, que existan dos fuerzas de reacción con amplitud completamente diferente y normal a la superficie de contacto, como se muestra en el esquema de análisis de la figura 4.4. Los puntos de apoyo se etiquetan como A y B con sus respectivas fuerzas normales de reacción  $F_1$  y  $F_2$ . Se ha considerado que la estructura no se desliza hacia sus laterales, por lo que, las fuerzas hacia los laterales deben de ser iguales y de signo contrario para que se anulen entre ellas.

Para facilitar la aplicación del análisis de una barra flexible empotrada con una fuerza en el extremo libre, por medio de la ecuación de Euler-Bernoulli, sobre cada enlace flexible, se hacen los trazos geométricos y además se toman las longitudes  $x$  e  $y$  como se muestran en la figura 4.4.



**Figura 4.4** Propuesta de la estructura de prueba y auxiliar con inclinación

El procedimiento para obtener el modelo matemático de la estructura robótica se divide generalmente en dos etapas, en la primera se hace un desarrollo trigonométrico sobre las proyecciones de la figura 4.4 para obtener las fuerzas de reacción sobre los puntos de apoyo A y B; posteriormente, en la segunda etapa se hace el análisis de cada una de las dos extremidades, como una barra flexible, la cual recibe la fuerza que previamente se ha calculado y que depende del ángulo de inclinación instantáneo de la estructura. Se aplica la suma de momentos en combinación con la ecuación de Euler-Bernoulli, para finalmente

obtener el par de ecuaciones diferenciales que representan a las dos extremidades flexibles de la estructura. A continuación se detalla paso a paso cada una de las etapas antes mencionadas.

El procedimiento para obtener el modelo matemático de la estructura mostrada en la figura 4.4 inicia obteniendo las distancias  $d$ ,  $k$  y  $c$ ; las cuales se obtienen con un análisis trigonométrico y se describen en las siguientes expresiones:

$$d = x \tan \theta; k = \frac{L}{2} \cos \theta - x \sin \theta; c = L \cos \theta - k;$$

El análisis se enfoca en la suma de momentos sobre los puntos de apoyo A y B igualadas a cero, ya que el sistema está en equilibrio y se considera como momento positivo el que actúa en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Para la suma de momentos sobre el punto A se tiene:

$$\sum M_A = 0$$

$$F_2 L \cos \theta - W(c) = 0$$

Se sustituye el equivalente de la expresión  $c$  y se obtiene:

$$F_2 L \cos \theta - W \left[ L \cos \theta - \left( \frac{L}{2} \cos \theta - x \sin \theta \right) \right] = 0$$

Se desarrollan las operaciones indicadas y la expresión anterior se reduce a:

$$F_2 L \cos \theta - W \frac{L}{2} \cos \theta + W x \sin \theta = 0$$

Se despeja el término  $F_2$

$$F_2 = \frac{W}{2} + \frac{Wx}{L} \tan \theta \quad (4.1)$$

De igual forma se hace la suma de momentos igualada a cero sobre el punto de apoyo B:

$$\sum M_B = 0$$

$$-F_1 L \cos \theta + W(k) = 0$$

Se sustituye la expresión de  $k$

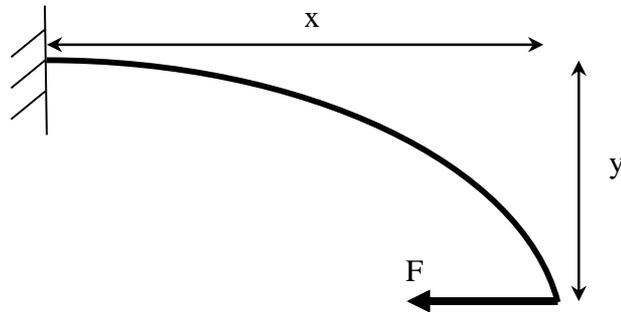
$$-F_1 L \cos \theta + W \left( \frac{L}{2} \cos \theta - x \operatorname{sen} \theta \right) = 0$$

Se despeja el término de  $F_1$

$$F_1 = \frac{W}{2} - \frac{Wx}{L} \tan \theta \quad (4.2)$$

Por lo tanto, con la suma de momentos en los puntos de apoyo A y B, se obtienen las expresiones para las fuerzas  $F_2$  y  $F_1$  que actúan sobre dichos apoyos y de las cuales se puede observar que cuando el ángulo de inclinación de la estructura es cero, estas fuerzas son iguales y corresponden a la mitad del peso  $w$  de la estructura.

Se hace el análisis de flexión en forma individual, por lo que se propone que la extremidad esta empotrada en un extremo, el cual corresponde a la unión con el cuerpo del robot, y el otro extremo es libre, que es el que recibe una fuerza, para este caso corresponde a reacción en el punto de apoyo con la superficie. La fuerza se aplica y provoca una flexión como se muestra en la figura 4.5. De igual forma se identifican las distancias  $x$  e  $y$  que corresponden a la coordenada del extremo final de la extremidad cuando es flexionada por la fuerza y se toma como referencia u origen el extremo empotrado.



**Figura 4.5** Esquema del enlace flexible configurado para analizar como una barra empotrada

Se hace la suma de momentos igual a cero en el extremo empotrado

$$\begin{aligned}\sum M &= 0 \\ -yF + M &= 0; \\ M &= yF\end{aligned}$$

Como se observa en la figura 4.5, la extremidad flexible se aproxima a una barra flexible empotrada en un extremo y con el otro extremo libre, por lo que se puede aplicar la ecuación diferencial de Euler-Bernoulli que relaciona el momento generado por la fuerza aplicada con el radio de curvatura [25, 38], por lo tanto se aplica la siguiente ecuación de momentos:

$$M = \frac{YI}{\rho} \tag{4.3}$$

Donde: M es el momento de curvatura,  $\rho$  es el radio de curvatura de la barra y el producto YI es referido como rigidez de flexión. En otras palabras, la ecuación momento-curvatura relaciona la cantidad de fuerza M para la lograr una cantidad de desplazamiento  $\rho$  [25, 38, 39].

En este trabajo se ha considerado analizar el sistema para el caso específico de pequeñas flexiones, lo que genera pequeñas pendientes, por lo tanto se puede usar la siguiente relación:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

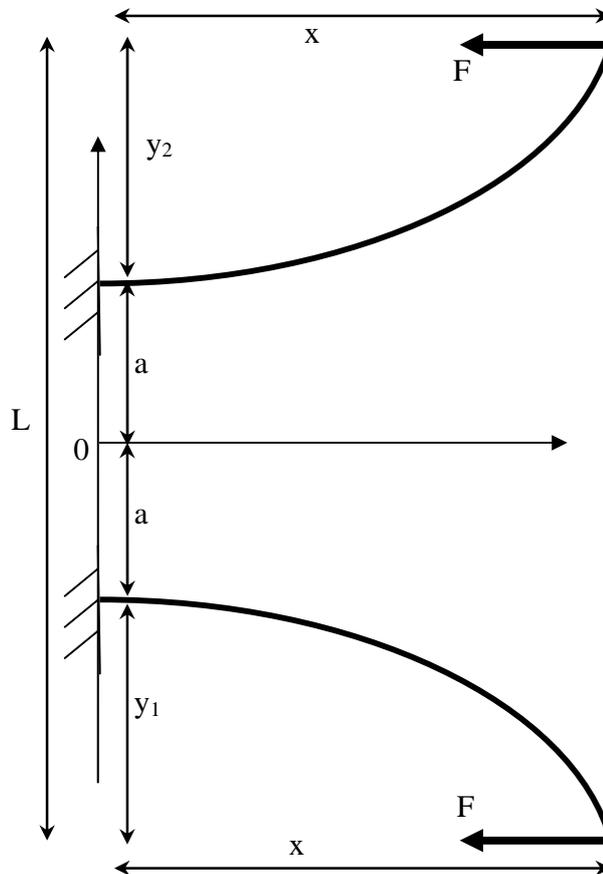
Al sustituir este término en la ecuación (4.3) se obtiene una ecuación simplificada con un término de segunda derivada:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Previamente en la suma de momentos sobre la extremidad empotrada se obtuvo una expresión para el momento flector, por lo que al sustituir dicho término, ahora la expresión contiene la variable de fuerza, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{yF}{EI} \quad (4.4)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden, que representa al modelo de una extremidad considerando el caso específico de pequeñas flexiones, por lo tanto, éste resultado se traslada a la estructura de análisis de la figura 4.4 y al sistema de extremidad flexible propuesto en la figura 4.5. Por lo tanto, para poder aplicar los resultados obtenidos previamente, se propone reacomodar la posición de la estructura de la figura 4.4, como se muestra en la figura 4.6 para que se ajuste al análisis del esquema propuesto de la figura 4.5, de forma que se puedan analizar las dos extremidades flexibles con el principio de Euler-Bernoulli.



**Figura 4.6** Esquema de prueba para obtener el modelo de la estructura del robot

En la figura 4.6 se muestra el esquema adaptado para la estructura del robot con extremidades flexibles. Las fuerzas que se ejercen sobre los soportes, se deben al propio peso del robot y se identifican con  $F_1$  y  $F_2$ , de las cuales se han obtenido sus expresiones previamente en función del ángulo de inclinación que adquiere instantáneamente la estructura por las irregularidades de la superficie.

Retomando la ecuación (4.4) para cada una de las extremidades flexibles presentadas en la propuesta de la figura 4.6 y sustituyendo la expresión de fuerzas de las ecuaciones (4.1) y (4.2) para cada una de las extremidades, se tiene:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{y_1}{EI} \left[ \frac{W}{2} - \frac{xW}{L} \tan \theta \right] \quad (4.5)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{y_2}{EI} \left[ \frac{W}{2} + \frac{xW}{L} \tan \theta \right] \quad (4.6)$$

Además de la figura 4.6 es claro observar que la longitud total de la estructura auxiliar es:

$$L = y_1 + y_2 + 2a$$

Finalmente, al sustituir la expresión de L en las ecuaciones (4.5) y (4.6) se obtiene el modelo de la estructura de robot con las extremidades flexibles, para la configuración que se mostró en la figura 4.6. El modelo consta de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden y con base en el esquema de la figura 4.6 se tienen las siguientes condiciones iniciales:

$$y_1(0) = -a$$

$$y_2(0) = a$$

$$\frac{dy_1(0)}{dx} = 0$$

$$\frac{dy_2(0)}{dx} = 0$$

### 4.3 Simulación del modelo

Para llevar a cabo la simulación de la estructura robótica flexible, representada por el sistema de ecuaciones diferenciales (4.5) y (4.6), se resuelven en Matlab usando la función ODE45 con las condiciones iniciales antes mencionadas. Para esta simulación se considera que la estructura tiene un ángulo de

inclinación  $\phi$ , las variables a encontrar son  $y_1$  e  $y_2$  que representan la apertura de cada una de las extremidades flexibles, con respecto al cuerpo del robot, a lo largo de la altura  $x$ ; para que de esta forma obtener las diferentes curvaturas que tomas los dos elementos flexibles ante las diferentes fuerzas de reacción que actúan sobre ellas, debida a la inclinación de la estructura. Por lo tanto, en este caso,  $x$  es la variable independiente y las variables dependientes son  $y_1$  e  $y_2$ . Además, también se usa la rutina de Runge Kuta para resolver las ecuaciones diferenciales, obteniendo el mismo resultado que con la ODE45.

A continuación se listan los parámetros usados en la simulación, considerando que el elemento flexible es de aluminio:

Dimensiones físicas de la extremidad:

Largo 0.2 m, ancho 0.0304 m, alto 0.00078 m

Modulo de Young o elasticidad  $2 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>

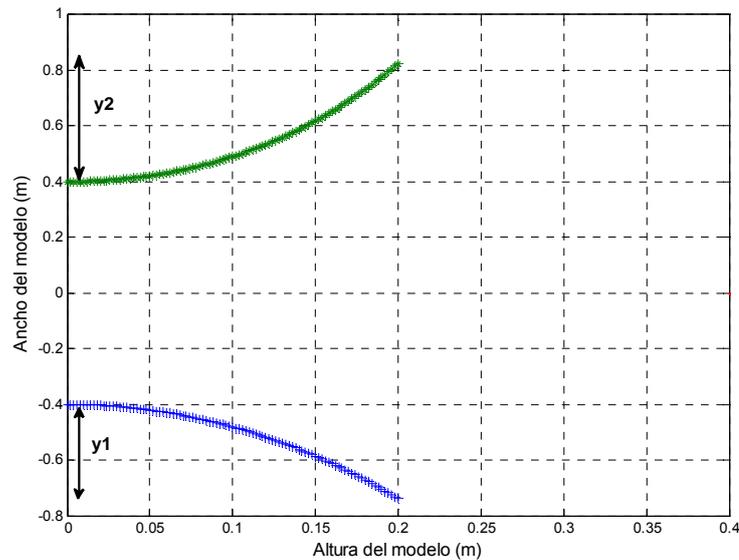
Inclinación de la estructura  $\pi/6$  rad

Peso de la estructura 20 N

Ancho de la estructura es de 0.8 m

En la figura 4.7 se muestran los resultados obtenidos en la simulación del modelo de la propuesta de estructura robótica, se aprecia el comportamiento de las dos extremidades flexibles, basadas en el esquema de la figura 4.6. En ésta se puede observar que el peso propio de la estructura flexiona a las extremidades y además, como la estructura tiene una inclinación de  $\pi/6$ , una de ellas se flexiona más que la otra, ya que recibe mayor peso y por tanto la fuerza de reacción que actúa sobre ella es mayor. Se observa claramente que la extremidad superior es la que presenta mayor flexión, sin embargo, en el resultado preciso de la representación de la estructura robótica, la extremidad con mayor flexión tendría que ser más corta para representar el efecto del

escalón sobre el que esta parada, y así apreciar la inclinación a la que está sujeta. En cambio el resultado que aquí se presenta, ambas extremidades alcanzan la misma longitud sobre el eje horizontal porque éste es un parámetro de entrada en la solución de las ecuaciones diferenciales.



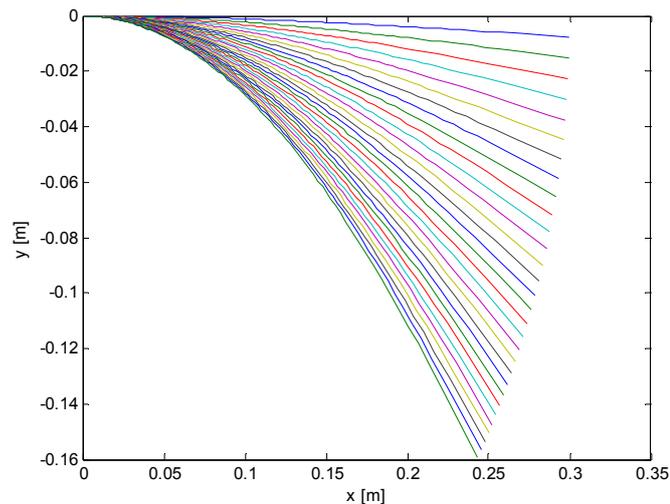
**Figura 4.7** comportamiento de las extremidades flexibles del robot, obtenido con la solución del modelo del robot propuesto.

#### 4.4 Ajuste de curvas

El análisis de la sección anterior es una propuesta para encontrar la flexión de las extremidades tomando como base la suma de momentos en combinación con la ecuación de Euler-Bernoulli. Sin embargo, en el capítulo 2 se presentó el método formal para obtener esta solución, para ello se requiere resolver un par de integrales elípticas de Legendre de primer especie completa e incompleta, mismas que se resuelven de forma numérica aplicando el método de Simpson de 1/3, en combinación con el método numérico de Newton Raphson. Posteriormente usando el ángulo total de flexión y empleando ahora el método de Carlson se resuelven las integrales elípticas para encontrar la nueva forma

que toma la barra al ser flexionada por la fuerza aplicada, para lo cual se obtienen las coordenadas  $(x, y)$  a lo largo de toda la barra. En este caso se requiere dividir la longitud de la barra en un número  $n$  de secciones, al igual que el ángulo total de flexión.

En la figura 4.8 se grafica una representación del comportamiento de la barra flexionada para diferentes fuerzas aplicadas, sobre un sistema de ejes cartesianos y se considera que inicialmente la barra está sobre el eje  $x$  positivo, en el cual se puede apreciar la evolución de la barra flexionada para fuerzas que van desde 1 N hasta 6 N, con incrementos de 0.5 N.

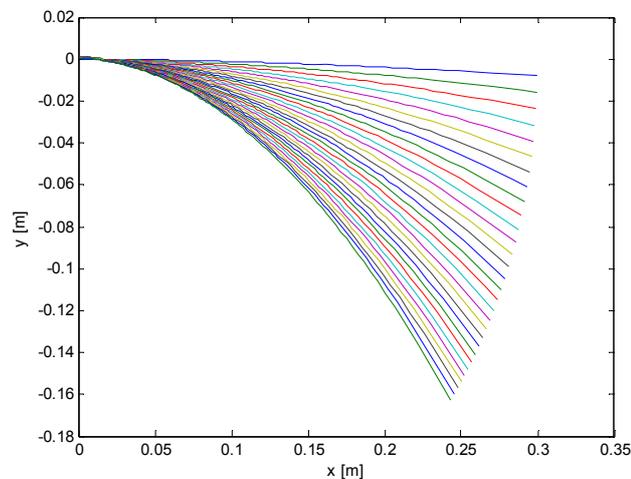


**Figura 4.8** Comportamiento de barra flexible empotrada, ante una fuerza variable aplicada en el extremo libre.

Con las características de programación antes mencionadas, el consumo de recursos computacionales para encontrar la solución de las ecuaciones diferenciales de una barra flexible, es relativamente alto, lo que puede ser aun más grave cuando se tienen que desarrollar estos programas en tiempo real. Con el objeto de reducir el cálculo numérico al momento de hacer la

implementación de la extremidad flexible del robot se propone hacer un ajuste polinomial de mínimos cuadrados de segundo orden en cada una de las curvas de la barra flexionada presentadas en la figura anterior, para lo cual se requiere encontrar los coeficientes de la expresión  $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ . En este sentido se propone generar una tabla en la que se almacenen las constantes de la ecuación de ajuste, relacionadas con las diferentes fuerzas aplicadas.

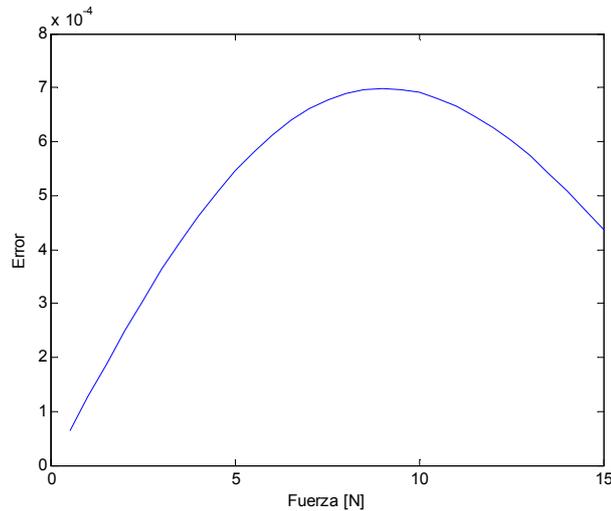
En la figura 4.9 se presentan las gráficas obtenidas con las ecuaciones ajustadas de los datos originales de las curvas de flexión que se presentaron previamente en la figura 4.8. Al hacer una comparación entre las figuras 4.8 y 4.9 es fácil apreciar que los resultados obtenidos son aproximadamente idénticos a los originales.



**Figura 4.9** Aproximación polinomial de segundo orden con mínimos cuadrados de la barra flexionada cuando se le aplica una fuerza en el extremo libre.

En la figura 4.10 se presenta el comportamiento del error estándar del estimado para cada una de las aproximaciones polinomiales de segundo orden mostradas en la figura anterior; éste error representa la desviación estándar del valor estimado con respecto a las coordenadas  $(x, y)$  de cada curva original que

representa la barra flexionada para cada una de las fuerzas aplicadas en el extremo libre.



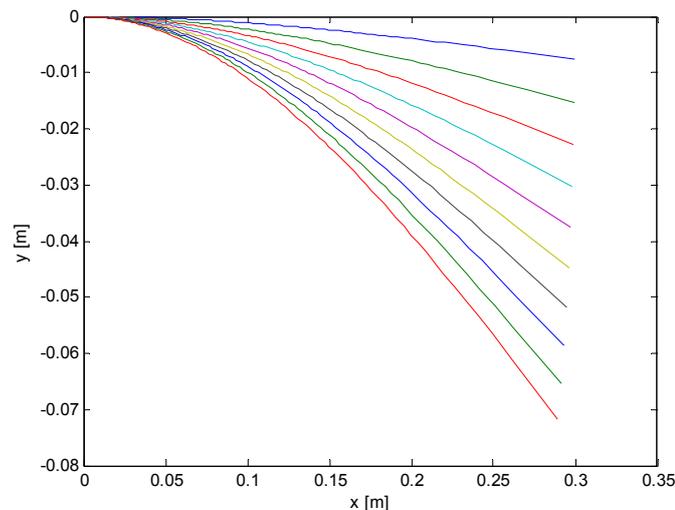
**Figura 4.10** Error estándar del estimado del comportamiento de flexión de la barra empotrada sometida a diferentes fuerzas.

Es claro que no se puede aplicar cualquier fuerza a la barra, es decir, ésta tiene un límite elástico y cuando se sobrepasa, ésta se puede fracturar, por tanto los daños ocasionados a la barra dependen de las características del material y también del exceso de la fuerza aplicada. El análisis que se plantea está enfocado a estudiar el comportamiento de flexión cuando se aplican una fuerza en el extremo libre de la barra sin dañar su estructura, para que ésta recupere su forma y posición original cuando la fuerza sea retirada. Como se está trabajando con una barra de aluminio, ésta tiene un esfuerzo de ruptura de 740 kgf/m<sup>2</sup> [58]. Por tanto se calcula el esfuerzo máximo que puede soportar la barra, por medio de la siguiente expresión:

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{Y}$$

Donde:  $M$  es el momento,  $Y$  es el módulo de Young y  $c$  corresponde a la distancia más alejada posible de la línea neutra (es decir en uno de los extremos de la sección transversal de la barra).

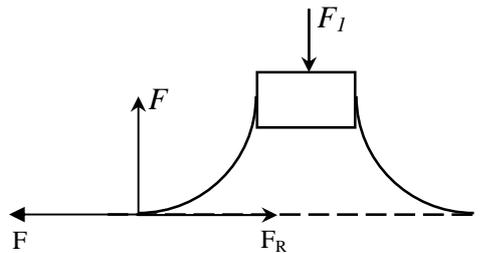
En la figura 4.11 se presenta el comportamiento de la barra flexionada, solo para las fuerzas aplicadas que no exceden el esfuerzo máximo, en este caso la mayor fuerza que se puede aplicar es de 5 N la cual somete a un esfuerzo de  $760 \text{ kgf/m}^2$  a la barra de aluminio que se está analizando. Las curvas que se muestran corresponden al rango de fuerzas aplicadas desde 0.5 N con incrementos de 0.5 N hasta 5 N donde ya se excede el esfuerzo máximo permitido por la barra de aluminio.



**Figura 4.11** Comportamiento flexible de la barra con una fuerza aplicada verticalmente desde 0.5 N hasta 5 N

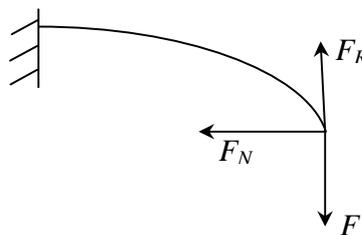
En el sentido de analizar el comportamiento flexible del elemento de aluminio únicamente para fuerzas que no excedan el esfuerzo máximo de la barra y siguiendo el esquema de la figura 4.12 en la cual se representan las fuerzas que actúan sobre una estructura con las extremidades flexibles, se representan

solo la descomposición de fuerzas en una extremidad, ocasionada por el peso sobre la estructura.



**Figura 4.12** Esquema de estructura con extremidades flexibles y distribución de fuerzas

Con base en el esquema de la figura 4.12 y haciendo la relación de fuerzas que se muestran en la figura 4.13 para la última fuerza aplicada sobre la barra sin afectar sus características elásticas, es decir sin sobrepasar su esfuerzo máximo, se calcula una fuerza equivalente a diferentes ángulos con respecto a la vertical sobre el mismo extremo libre de forma que genere la misma curva de flexión y el mismo momento que la fuerza vertical.



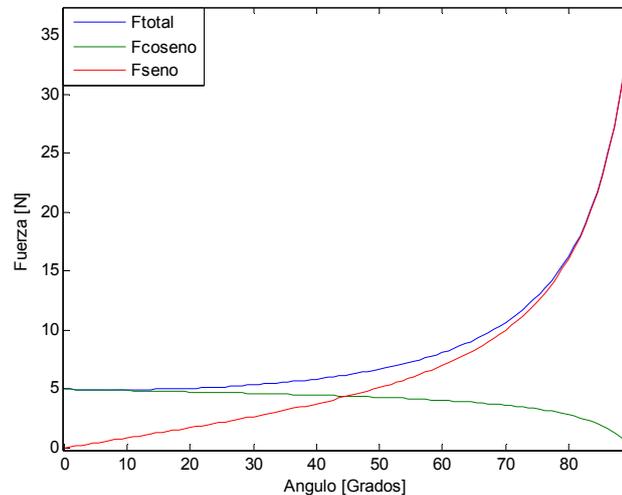
**Figura 4.13** Distribución de fuerzas sobre la barra de aluminio flexible para analizar estructura con extremidades flexibles.

En la tabla 4.I se muestra la descomposición de la fuerza equivalente a la última fuera, para un rango de 0 a 90 grados partiendo de la vertical, es decir de la posición de la última fuerza aplicada sobre el extremo libre de la barra.

**Tabla 4.I** Descomposición de las fuerzas para igualar el efecto de flexión de una fuerza vertical de 5 N

Angulo	Ftotal	Fcos	Fsen
0	5	5	0
10	4.9580416	4.8827178	0.86095489
20	5.0695349	4.7638046	1.7338831
30	5.3525334	4.6354299	2.6762667
40	5.8574955	4.4871019	3.7651255
50	6.6921792	4.3016499	5.1265067
60	8.0909695	4.0454848	7.0069851
70	10.637658	3.6382934	9.9961291
80	16.244208	2.8207771	15.997422
90	36.704417	2.2475E-15	36.704417

En la figura 4.14 se presenta el comportamiento de la fuerza equivalente, junto con la descomposición de las fuerzas vertical y horizontal, de forma que se mantenga el efecto de la fuerza aplicada verticalmente. Es fácil apreciar que al inicio la fuerza vertical es igual a la fuerza total equivalente y conforme se va incrementando el ángulo, la fuerza vertical incrementa hasta ser igual a la fuerza total equivalente, cuando ésta se encuentra a 90° con respecto a la vertical.



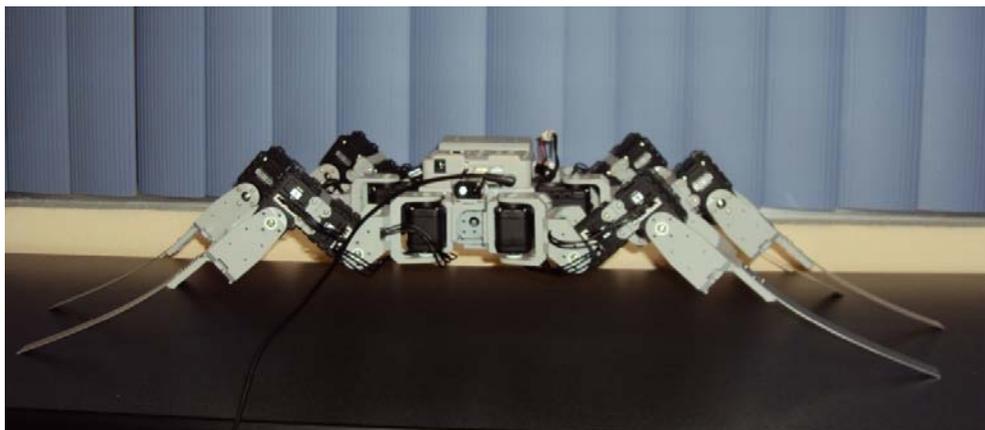
**Figura 4.14** Representación del comportamiento de las fuerzas total y sus respectivos componentes, para mantener la misma flexión de la barra cuando tiene 5 N de forma vertical.

## 4.5 Implementación de prototipo

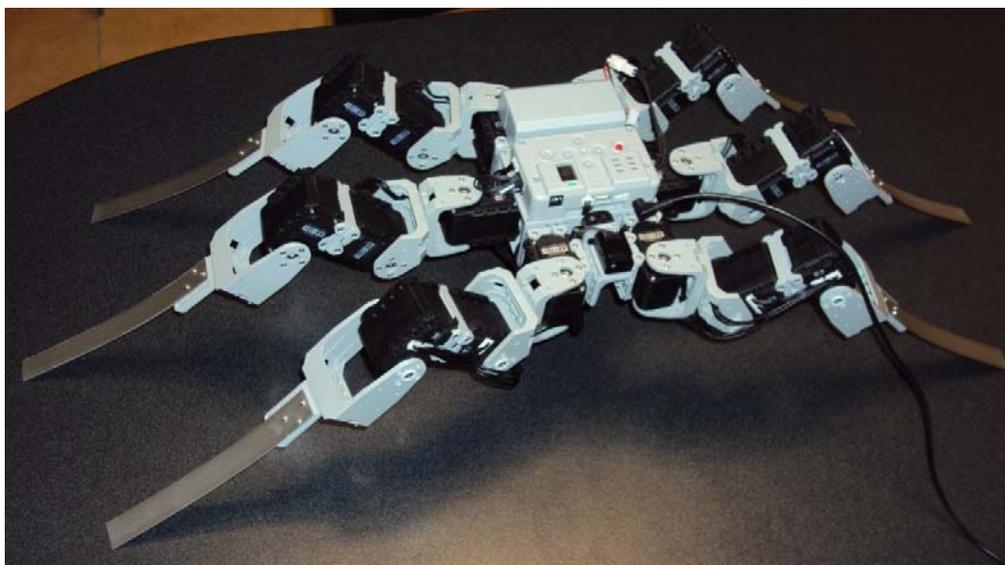
Se hace la implementación de la estructura robótica con las seis extremidades y con tres grados de libertad por cada una, sobre la adaptación de un kit de desarrollo comercial Bioloid Premium de un humanoide, el cual contiene básicamente 18 servomotores digitales Dynamixel AX-12 con resolución de 0.29 grados; como cerebro, el robot contiene una tarjeta de control CM-510 que se basa en un microcontrolador ATmega2561 con 16173 bytes de memoria permanente y 512 bytes de memoria RAM; cuenta también con un gyrosensor (giroscopio, sensor de velocidad) Gyro Sensor Robotis con un rango máximo de detección de velocidad entre  $-300^{\circ}/s$  y  $300^{\circ}/s$ . Este kit incluye su propio software de programación, Roboplus [69]. Además, las extremidades flexibles son de aluminio 5706.

En las figuras 4.15, 4.16 y 4.17 se presentan las fotografías del prototipo de robot, con vista de frente, vista superior en isométrico y vista de frente con

inclinación, respectivamente. En las que se puede observar la flexión en el elemento de aluminio, ocasionado por el propio peso de la estructura, de 1800 gramos aproximadamente.

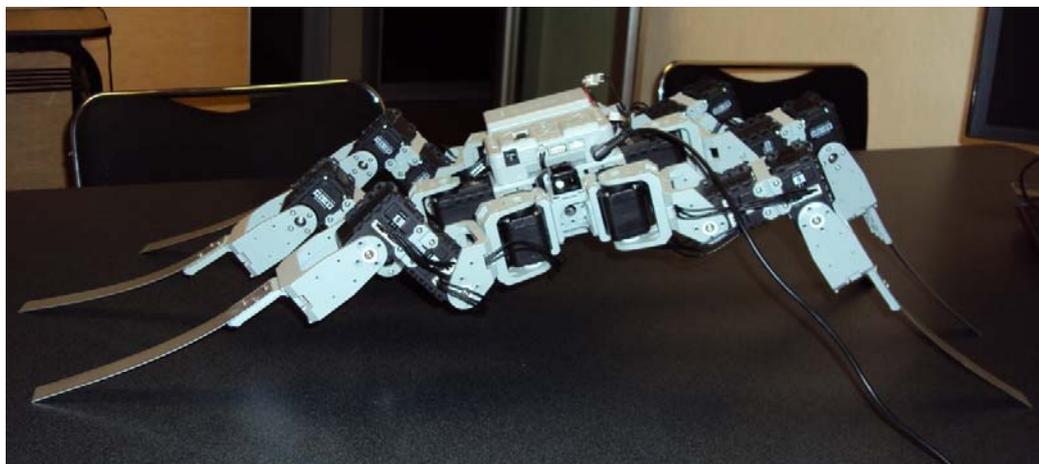


**Figura 4.15** Vista de frente del prototipo del robot con seis extremidades y el tercer elemento flexible de cada extremidad.



**Figura 4.16** Vista superior del prototipo de robot con seis extremidades con el tercer elemento flexible en cada extremidad.

Para obtener la postura que se muestra en la imagen de la figura 4.17, se ha programado una rutina que genera la inclinación que se observa. En este caso se puede observar como los elementos flexibles presentan diferente grado de flexión, debido a la diferencia de peso que soportan por la inclinación programada, de igual forma se programan diferentes rutinas para generar diversas condiciones de prueba en las que se monitorea el comportamiento del robot y el del controlador.



**Figura 4.17** Vista de frente con inclinación incorporada, del prototipo de robot con seis extremidades con el tercer elemento flexible.

#### 4.6 Programación del prototipo

La programación del robot se lleva a cabo por medio del software comercial *roboplus* que funciona básicamente con dos subprogramas; el primero de ellos es conocido como *roboplus motion*, en el que se programan cada uno de los movimientos del robot, con base en secuencias de desplazamientos angulares de los servomotores requeridos. Para generar las rutinas que dan origen a un movimiento completo del robot, como inclinación en uno y otro extremo o la caminata, se generan y agrupan movimientos individuales con la secuencia

adecuada. De igual forma, aquí es donde se asigna la velocidad de ejecución de cada movimiento. A cada rutina se le asigna un nombre y número de forma individual; el programa formado con todas las rutinas se debe guardar y descargar al controlador CM-510 por medio del puerto RS232 con convertidor a USB.

En la figura 4.18 se muestra la imagen de la ventana que se despliega con el subprograma roboplus motion, en la cual se encuentran las diferentes áreas de trabajo para programar los desplazamientos angulares de los servomotores que en conjunto conforman la rutina de movimiento que se desea programar.

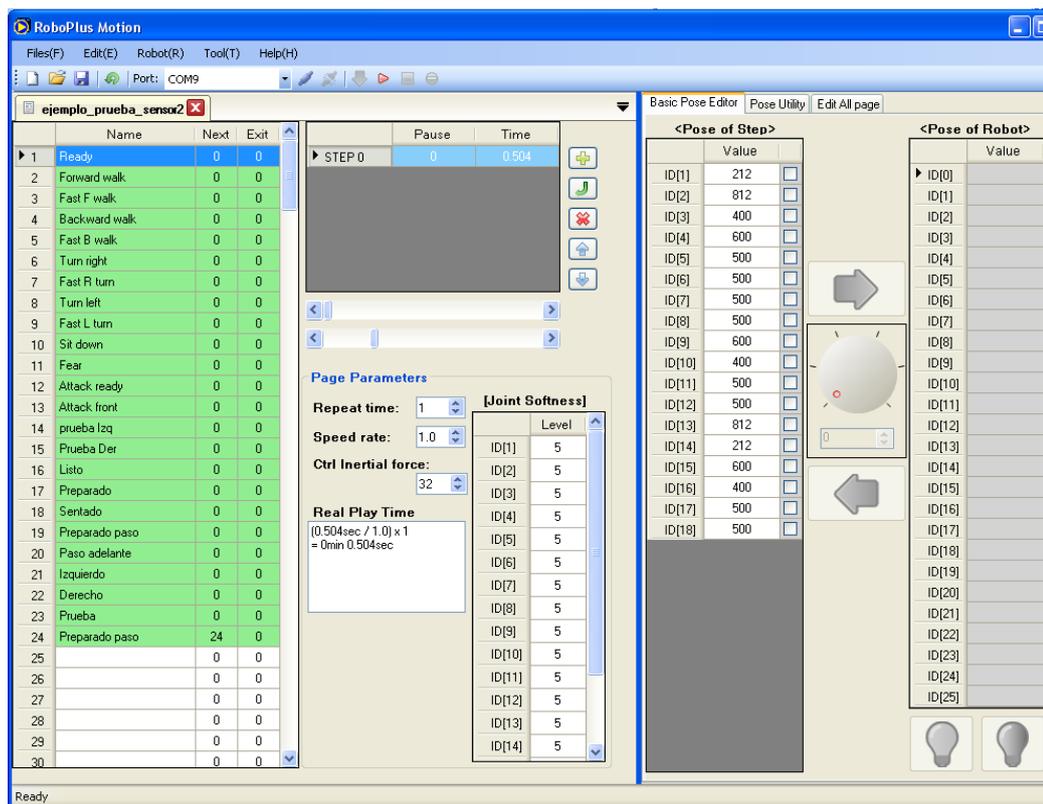


Figure 4.18 Ventana del software roboplus motion para generar las rutinas del robot

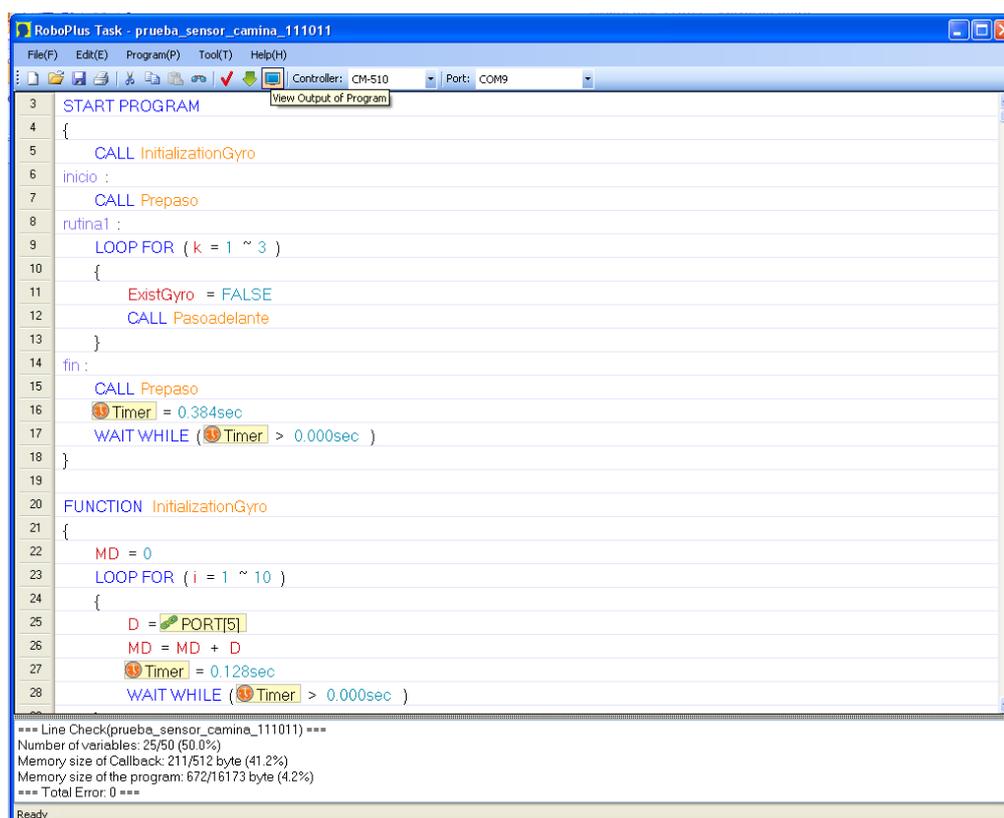
---

El segundo subprograma del roboplus es el software *roboplus task*, donde realmente se genera el programa completo del robot, es desde aquí donde se importan las rutinas previamente generadas en el software roboplus motion y descargadas en el controlador del robot. El roboplus task cuenta con las funciones básicas de software de programación, como el *if*, *else if*, *else*, *while*, *for break*, operaciones aritméticas, temporizadores, comentarios; y otras funciones específicas, como el encendido de LED, activación del modulo inalámbrico, del micrófono, entre otros.

Cuando se ha generado el programa con las funciones antes mencionadas y con el llamado de las rutinas, se debe descargar el programa al controlador del robot, en este proceso de forma automática se hace una compilación de forma que, si existe algún error de programación se despliega el mensaje correspondiente, así como también de forma automática despliega el resumen del porcentaje de memoria usada. En la figura 4.19 se presenta la imagen de la ventana del software roboplus task, en donde se puede apreciar un segmento del programa de caminata del robot.

La programación en este software presenta una flexibilidad relativa porque el paquete ya contiene las funciones requeridas, sin embargo presenta la desventaja de que solo tiene asignadas las operaciones aritméticas básicas. Otra característica del software es que dentro del programa principal se puede emplear una función llamada ***callback*** que se ejecuta de manera paralela e independiente al resto del programa y está limitada por la capacidad de la memoria RAM del microcontrolador. Es dentro de esta función que se hace el sensado de la velocidad de inclinación, el procesamiento de la señal adquirida, la implementación del controlador y el accionamiento de los servomotores

asignados para el control de la estabilidad. De esta forma en el resto del programa se establecen todas las acciones rutinarias.



```
RoboPlus Task - prueba_sensor_camina_111011
File(F)  Edit(E)  Program(P)  Tool(T)  Help(H)
Controller: CM-510  Port: COM9  View Output of Program

3  START PROGRAM
4  {
5      CALL InitializationGyro
6  inicio :
7      CALL Prepaso
8  rutina1 :
9      LOOP FOR ( k = 1 ~ 3 )
10     {
11         ExistGyro = FALSE
12         CALL Pasoadelante
13     }
14 fin :
15     CALL Prepaso
16     Timer = 0.384sec
17     WAIT WHILE ( Timer > 0.000sec )
18 }

20 FUNCTION InitializationGyro
21 {
22     MD = 0
23     LOOP FOR ( i = 1 ~ 10 )
24     {
25         D = PORT[5]
26         MD = MD + D
27         Timer = 0.128sec
28         WAIT WHILE ( Timer > 0.000sec )
29     }
30 }

==== Line Check(prueba_sensor_camina_111011) ====
Number of variables: 25/50 (50.0%)
Memory size of Callback: 211/512 byte (41.2%)
Memory size of the program: 672/16173 byte (4.2%)
==== Total Error: 0 ====

Ready
```

**Figura 4.19** Ventana de trabajo del software roboplus task, donde se genera el programa general del robot.

## 4.7 Conclusión

En este capítulo se ha presentado el desarrollo de un modelo matemático, simplificado considerando pequeñas flexiones, de una estructura robótica con dos extremidades flexibles, las cuales son el objetivo de estudio. Cada una de estas representa a tres extremidades de cada lado. El modelo que se obtiene

es simulado en Matlab para un ángulo de inclinación dado, en el que se monitorea la flexión en cada una de las extremidades.

Para desarrollar el modelo matemático de la estructura robótica flexible se ha tomado un sistema rígido que enmarca al flexible, de forma que su longitud es variable y depende de la flexión que presenten las extremidades en una posición dada de la estructura. La propuesta anterior se combina con el análisis de una barra flexible de Euler-Bernoulli y la suma de momentos, todo lo anterior bajo la consideración de pequeñas flexiones, por lo que se obtiene un modelo matemático representado por una ecuación diferencial de segundo orden por cada extremidad, en función del ángulo de inclinación, del peso de la estructura y de la longitud total del sistema mecánico auxiliar.

Se hace la implementación del prototipo de estudio, sobre un kit de desarrollo bioloid premium, el cual se programa en un software propio conocido como roboplus, que permite hacer una programación sobre rutinas en las que se asignan los desplazamientos angulares de cada uno de los servomotores que se requieren activar para un movimiento dado.

# Capítulo 5

## Sintonización de Controladores

### 5.1 Introducción

El objetivo de control de un robot es mantener su respuesta de acuerdo con algún criterio de funcionamiento preestablecido. Desde el punto de vista de análisis de control, el movimiento de un brazo normalmente se efectúa en dos fases de control distintas. La primera es el control del movimiento de aproximación durante el cual el brazo se mueve desde una posición/orientación final deseada a lo largo de una trayectoria planificada. El segundo es el control del movimiento fino en el cual el efector final del brazo interacciona dinámicamente con el objeto utilizando información de la realimentación sensorial para completar su tarea.

Los métodos actuales que se emplean para diseñar un sistema de control de un robot industrial tratan cada articulación del brazo como un servomecanismo simple de la que se obtiene una primera aproximación a los valores requeridos del control a fin de optimizar su control y como resultado de ellos se pueden presentar velocidades lentas de respuesta, así como presentar vibraciones innecesarias [62].

Un robot hexápodo con extremidades flexibles es una máquina que permite locomoción en terrenos inaccesibles para otro tipo de vehículos con ruedas, sin embargo los requerimientos de control para cada una de las extremidades

---

requiere de un mayor grado de dificultad. El diseño del controlador de un robot compuesto con elementos flexibles requiere del estudio de estructuras flexibles. El objetivo de control que se persigue en este trabajo es el mantener al robot estable con respecto a la horizontal, cuando éste se desplaza sobre superficies irregulares.

Para ejecutar una acción de control sobre el robot de manera que mantenga estable y horizontal a la estructura robótica se monitorea el ángulo inclinación cuando éste se desplaza principalmente sobre superficies irregulares o cuando es perturbado y presenta alguna inclinación. Se emplea un sensor de velocidad giroscopio, el cual detecta la velocidad de inclinación de la estructura en grados sobre segundos, por lo tanto, para obtener la inclinación se integra la señal que entrega el sensor, empleando la regla trapezoidal. Dado que se requiere mantener a la estructura de forma horizontal, se considera un valor de cero para el ángulo de referencia.

En este capítulo se presenta el desarrollo de la sintonización, simulación e implementación de dos controladores, para controlar la posición horizontal de la estructura robótica. Primero se presentan unas pruebas al girosensor y al algoritmo para obtener la inclinación angular, a partir de la señal de velocidad que entrega el girosensor.

Se presenta la sintonización de un controlador difuso y de un PID, los cuales, se someten a diferentes pruebas para evaluar su respuesta cuando la estructura presenta inclinaciones ocasionados por rutinas programadas o por el desplazamiento sobre una superficie irregular.

## 5.2 Pruebas de inclinación

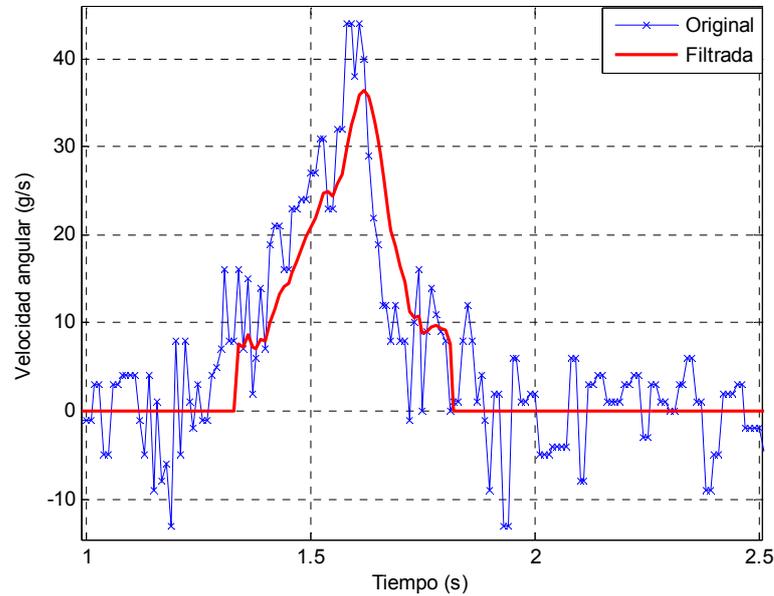
Como una primera prueba, se programa en el robot una rutina para que éste se incline repentinamente simulando que es perturbado con una función escalón, como un caso extremo sobre el robot. El objetivo de esta prueba es visualizar el comportamiento de la señal de velocidad adquirida del sensor, así como obtener el desplazamiento angular durante el proceso de inclinación de la estructura.

En la figura 5.1 se muestra la señal de velocidad obtenida directamente del girosensor, es claro que la señal adquirida cuenta con un alto contenido de ruido, por lo que se implementa una etapa de filtrado de señal en software. Éste consiste en obtener la muestra actual con el promedio de las tres anteriores y si el resultado es menor a cinco se envía a cero, de lo contrario permanece igual, aplicando la ecuación y condición siguientes:

$$y(n) = \frac{y(n) + y(n-1) + y(n-2)}{3}$$

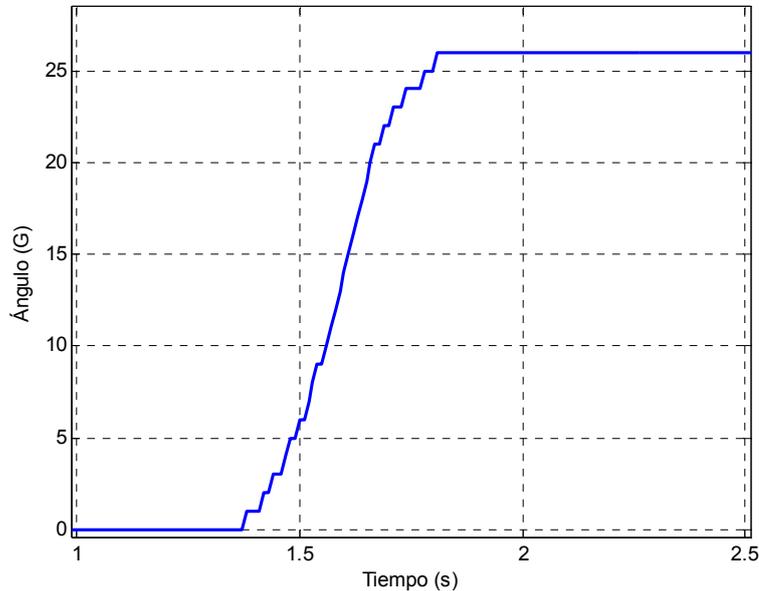
$$\text{Si } |y(n)| < 5, y(n) = 0$$

Lo anterior se hace para obtener una señal de velocidad de inclinación más limpia, que en esta sección se identifica como señal filtrada, de forma que en el cálculo del desplazamiento angular, por medio de integración trapezoidal se reduzca el error por ruido.



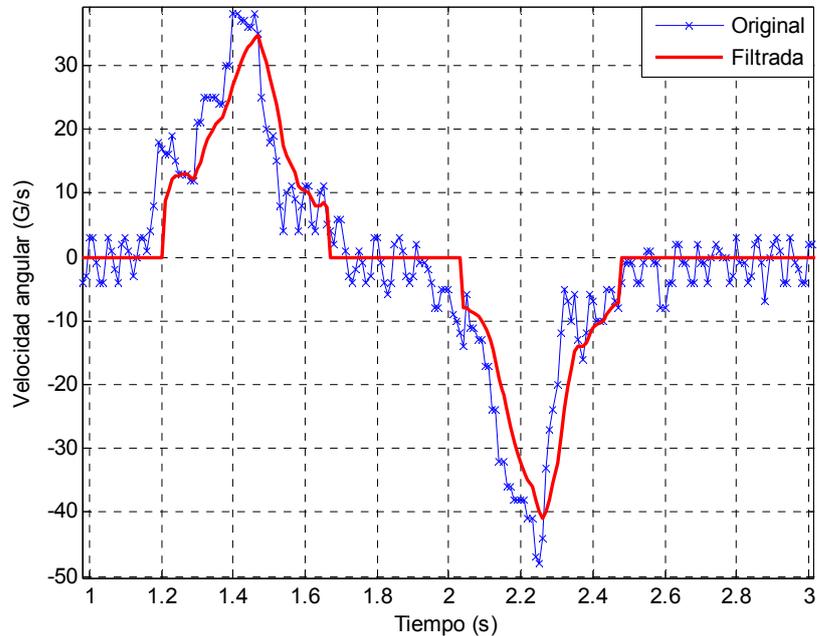
**Figura 5.1** Señal de la velocidad de inclinación del robot en la rutina de inclinación solo en un sentido. Se muestra la señal original y la filtrada.

En la figura 5.2 se presenta el desplazamiento angular que adquiere la estructura robótica, obtenido a partir de su velocidad de inclinación. En esta figura se puede observar que la estructura inicialmente se encuentra completamente horizontal, con ángulo igual a cero, posteriormente conforme aumenta la velocidad con signo positivo, la inclinación incrementa; enseguida la velocidad disminuye hasta cero nuevamente, indicando que el ángulo de inclinación continúa en aumento, pero con la velocidad disminuyendo. Lo anterior genera que la estructura alcance una inclinación máxima y se mantenga con dicha inclinación. Este comportamiento se puede observar en la figura 5.2 o de forma indirecta se puede confirmar con la velocidad graficada en la figura 5.1.



**Figura 5.2** Desplazamiento angular de la inclinación del robot, calculada por medio de la integral de la señal de velocidad.

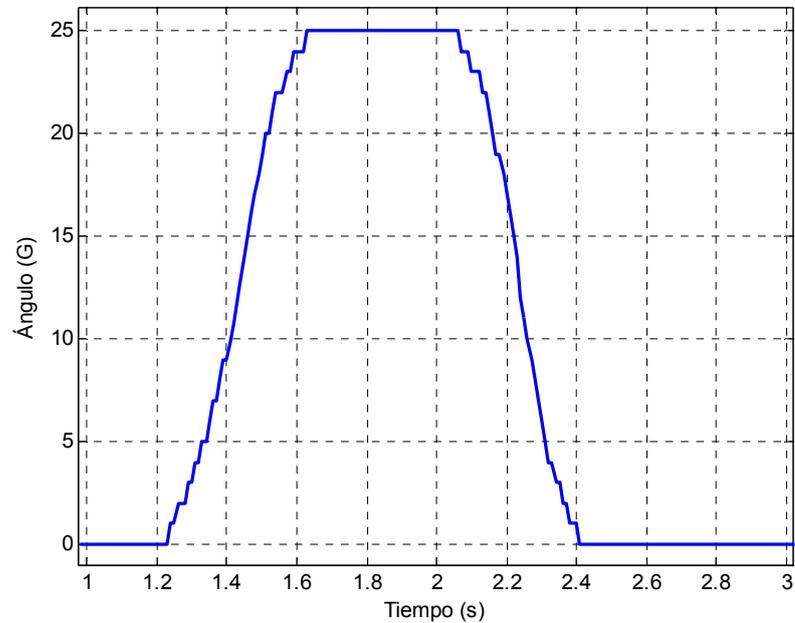
En otra prueba se programa una nueva rutina que lleva al robot a una inclinación máxima y posteriormente lo regresa a su posición inicial de cero grados con respecto a la horizontal. En la figura 5.3 se muestra el comportamiento de la velocidad obtenida con dicho movimiento, en esta ocasión se puede observar que inicialmente la velocidad es cero, posteriormente la velocidad incrementa de forma positiva, lo que indica que el ángulo de inclinación del robot está aumentando, la velocidad llega a un máximo y enseguida disminuye hasta valores negativos, lo cual es indicativo de que el robot está disminuyendo su ángulo de inclinación, hasta llegar a su posición inicial. Al igual que el caso anterior se muestran la señal de velocidad original y la filtrada.



**Figura 5.3** Velocidad de inclinación del robot con una rutina que lo lleva a una inclinación máxima, posteriormente lo regresa a su posición inicial.

En la figura 5.4 se presenta el comportamiento del desplazamiento angular de la estructura robótica, calculada a través de su velocidad de inclinación. Se observa claramente como el robot inicialmente se encuentra de forma horizontal (cero grados), posteriormente se inclina a un máximo de 18 grados y finalmente regresa a su posición inicial.

Por problemas de memoria en el robot, en este trabajo solo hacen las pruebas para estabilizar al robot en un eje, es decir, solo se monitorea la inclinación en una dirección. Se hacen pruebas con dos tipos de controladores, el primero es un controlador difuso, implementado con tres funciones de membresía y el segundo es un PID, sintonizado con el criterio de Nichol-Ziegler. Previamente a la implementación de los controladores en el robot se hacen simulaciones en el software Matlab.



**Figura 5.4** Comportamiento del ángulo de inclinación obtenido de la señal de velocidad de la figura 5.3.

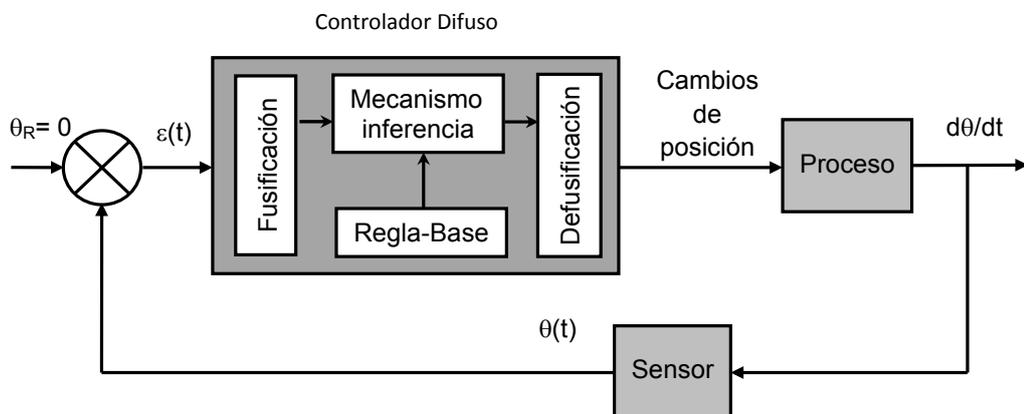
### 5.3 Controlador Difuso

La lógica difusa o borrosa (Fuzzy logic) descansa en la idea que en un instante dado, no es posible precisar el valor de una variable  $X$ , sino que solo se conoce el grado de pertenencia a cada uno de los conjuntos en que se ha particionado el rango de variación de la variable [63].

En general, los controladores difusos son sistemas expertos que emplean el conocimiento como fundamento, expresado en términos de reglas difusas y de un proceso de inferencia para resolver un problema de control dado [64]. Los controladores difusos, a diferencia de los clásicos, son capaces de utilizar el conocimiento obtenido de operadores humanos. Mientras este conocimiento es complicado de expresar en términos cuantitativos, una descripción lingüística

imprecisa es la forma en que se lleva a cabo el control del proceso, ya que esta información usualmente puede ser articulada por el operador con mayor facilidad. La descripción lingüística consiste en un conjunto de reglas que hacen uso de proposiciones difusas.

La finalidad de un controlador difuso es la de modificar el comportamiento de la planta mediante el cambio de una o varias entradas del sistema, de acuerdo a un conjunto de reglas y un proceso de inferencia que permita obtener las salidas deseadas. Un controlador difuso emplea principios de lógica difusa y permite convertir estrategias de control lingüístico basado en conocimiento de un experto, sobre una estrategia de control. Un diagrama de bloques de un sistema de control difuso tipo Mamdani se muestra en la Figura 5.5.



**Figura 5.5.** Diagrama de bloques de un sistema con control difuso

El controlador difuso se diseña para que opere tal y como lo haría un experto humano, quien decide intuitivamente qué información usar como entradas para tomar decisiones en el proceso. Se usa el error ( $e$ ) y su derivada ( $de/dt$ ) como variables de entrada, la primera es la diferencia entre la referencia y la salida y la segunda es la velocidad con la que cambia el error. Estas entradas ayudan a

determinar los valores que deben aplicarse a los servomotores en las extremidades asignadas para el control de tal forma que el robot se mantenga siempre en posición horizontal.

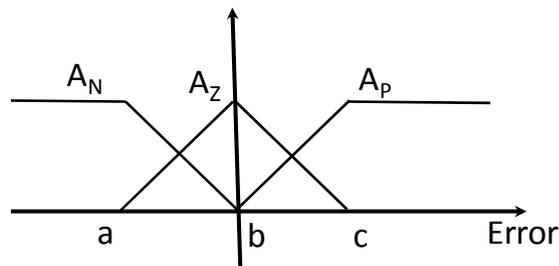
Para la realización de controladores basados en lógica difusa se tienen que definir particiones de las variables del controlador. Normalmente se recomienda que estas particiones sean completas, con un solapamiento del 20% al 50%, y en número impar. Normalmente se emplean particiones de 3, 5 y 7 conjuntos, pues la complejidad no es excesiva y permiten una precisión suficiente en la descripción de los valores de la variable. Además, se recomienda definir conjuntos de tipo T (triangulares) en torno a puntos singulares como el cero y trapezoidales en los extremos [64].

Los nombres de los conjuntos difusos que forman una partición suelen ser expresados en forma abreviada por sus iniciales; así, una partición típica como {Negativo Grande, Negativo Pequeño, Cero, Positivo Pequeño, Positivo Grande}; se representa como {NG, NP, CE, PP, PG}.

Cuando se trabaja con conjuntos difusos es necesario establecer funciones de membresía de los elementos a los diferentes conjuntos, para que permita determinar, a partir del valor de un elemento, su grado de pertenencia o membresía al conjunto. Este valor real se normaliza entre 0 (no pertenece en absoluto) y 1 (pertenece al 100%), la función se denota como  $\mu(x)$ , siendo  $x$  el valor del elemento. Generalmente las funciones de membresía se definen a partir de la experiencia ó la intuición del diseñador [65].

Para sintonizar el controlador difuso se usan funciones de membresía triangulares y trapezoidales. El mecanismo de inferencias implementa el conjunto de reglas Si-Entonces (IF-THEN) del error, su derivada y la salida de

control. Por limitaciones de memoria en el robot, en este trabajo solo se utilizan tres particiones, las correspondientes a negativo (**N**), cero (**C**) y positivo (**P**), como se muestra en el esquema de la figura 5.6. La estructura de las funciones de membresía de las tres variables se define como error [-10, 10] grados, derror [-20, 20] grados/segundos y salida de control [-50, 50] cambios de posición (desplazamiento angular de los servomotores), las cuales definen claramente cuando son puramente negativa o positiva. Para Definir estos parámetros se ha considerado que las condiciones físicas de la estructura y de los servomotores de control están y pueden responder apropiadamente dentro de los rangos antes mencionados.



**Figura 5.6** Esquema de las funciones de membresía empleadas en el error, derivada de error y salida de control.

Las funciones de membresía para los conjuntos previos son definidas como se muestra en el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 A_N &= \{(-\infty, b], \mu_N\}, \\
 A_Z &= \{[a, c], \mu_Z\}, \\
 A_P &= \{[b, \infty), \mu_P\},
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Donde:

$$\mu_{AN}(\varepsilon_f) = \max \left[ \min \left( \frac{b - \varepsilon_f}{b - a}, 1 \right), 0 \right]$$

$$\mu_{AZ}(\varepsilon_f) = \max \left[ \min \left( \frac{\varepsilon_f - a}{b - a}, \frac{c - \varepsilon_f}{c - b} \right), 0 \right]$$

$$\mu_{AP}(\varepsilon_f) = \max \left[ \min \left( \frac{c - \varepsilon_f}{c - b}, 1 \right), 0 \right]$$

Para el diseño del controlador difuso se usa el del tipo Mamdani, que cuenta con un antecedente y un consecuente, además de que posee una estructura relativamente simple y se deben establecer una serie de reglas de la forma **IF-THEN**, para indicar la acción a realizar, estas reglas de control se basan en la intuición, sentido común y experiencia del experto humano o diseñador, acerca del funcionamiento del sistema y tienen la siguiente estructura:

**SI** < antecedente o condición > **ENTONCES** < consecuente o conclusión >  
o también:

**SI** x es Bx, **ENTONCES** y es By

Esta estructura se puede extender a  $n$  entradas de la siguiente forma:

$R^i$ : **IF**  $x_1$  is  $A_1^i$  **and**  $x_2$  is  $A_2^i$  **and** . . . **and**  $x_n$  is  $A_n^i$  **THEN** y is  $B^i$

Las ventajas de usar el modelo de Mamdani son: a) en primer lugar su simplicidad en la representación de las reglas difusas, ya que tanto las premisas como los consecuentes tienen forma de conjunto difuso lo que facilita su interpretación; b) segundo, su flexibilidad en la materialización debido a la posibilidad de seleccionar las operaciones del mecanismo de inferencia, del fusificador o defusificador.

---

Una forma comúnmente usada para agrupar la base de reglas es por medio de una representación tabular que relaciona las entradas con la salida, ésta representación también es conocida como matriz de reglas; que tiene el inconveniente que solo es aplicable cuando el número de entradas es menor o igual a dos.

Para definir la matriz de reglas lingüísticas se definen las reglas-base, en función de la estructura SI-ENTONCES y la experiencia del diseñador con base en las características del sistema que se desea controlar. Para este caso se toman solo tres funciones de membresía, por lo tanto se tienen  $3^2$  combinaciones, lo que resulta en 9 reglas lingüísticas que se definen a continuación:

- R1: SI error es N y derror es N, ENTONCES, salida es P
- R2: SI error es N y derror es C, ENTONCES, salida es P
- R3: SI error es N y derror es P, ENTONCES, salida es C
- R4: SI error es C y derror es N, ENTONCES, salida es P
- R5: SI error es C y derror es C, ENTONCES, salida es C
- R6: SI error es C y derror es P, ENTONCES, salida es N
- R7: SI error es P y derror es N, ENTONCES, salida es C
- R8: SI error es P y derror es C, ENTONCES, salida es N
- R9: SI error es P y derror es P, ENTONCES, salida es N

Dadas las reglas lingüísticas para el error, su derivada y la salida de control, en la tabla 5.1 se presenta en forma matricial el conjunto de las reglas que definen el funcionamiento del controlador, aquí se resumen todas las posibles combinaciones.

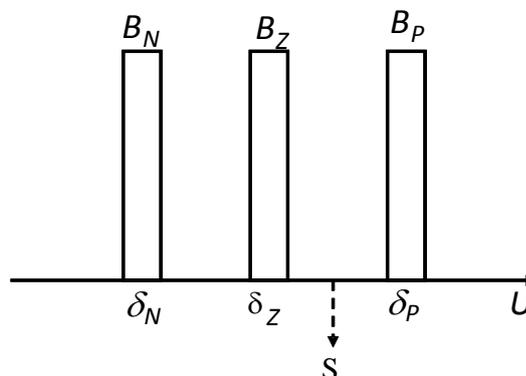
**Tabla 5.1** Matriz de reglas lingüísticas para el control difuso

SALIDA		DERROR		
		N	C	P
ERROR	N	P	P	C
	C	P	C	N
	P	C	N	N

El control realiza una fusificación del error para obtener una acción de control, la cual es aplicada a los servomotores de las extremidades en el elemento flexible, por lo tanto si el error  $ef \neq 0$ , el sistema de inferencia es implementado para cada salida S como sigue:

$$\begin{aligned}
 &\text{Si } ef \text{ es } A_N \text{ Entonces } \delta_N \text{ es } B_N \\
 &\text{Si } ef \text{ es } A_Z \text{ Entonces } \delta_Z \text{ es } B_Z \\
 &\text{Si } ef \text{ es } A_P \text{ Entonces } \delta_P \text{ es } B_P
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Donde  $J \in \{N, Z, P\}$ ,  $\delta_J$  es la acción de control lingüística y  $B_J$  es la barra correspondiente a  $A_J$  como se muestra en la figura 5.7



**Figura 5.7** Barras para la defusificación de la salida de control del sistema

En la etapa de defusificación, la acción de control descrita en forma lingüística es transformada en un valor preciso definiendo un nuevo valor para la salida de control  $S$ , por medio del cálculo del centroide sobre la función de membresía de barras de la figura 5.7 y que se representa en la ecuación 5.3

$$S = \frac{\sum_j \mu_{B_j}(\delta_j) \delta_j}{\sum_j \mu_{B_j}(\delta_j)} \quad (5.3)$$

para  $J \in \{N, Z, P\}$

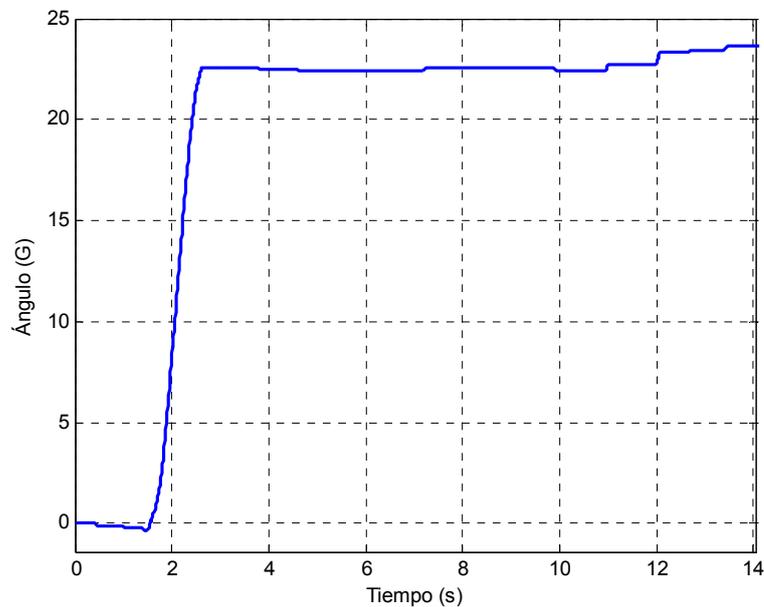
Donde  $\mu_{B_j}(\delta_j)$  es el grado de membresía de la barra  $B_j$ ; por lo tanto el control difuso tiene una única entrada, donde  $\mu_{B_j}(\delta_j) = \mu_{A_j}(\varepsilon_j)$ .

### 5.3.1 Pruebas al controlador difuso

El procedimiento que se sigue en la implementación del controlador se puede resumir en tres grandes etapas. La primera consiste en convertir al error y su derivada de una cantidad numérica a una cantidad lingüística por medio del conjunto de ecuaciones 5.1, etapa conocida como fusificación. La segunda etapa corresponde a la toma de decisiones por medio de las reglas lingüísticas que se resumen en la tabla 5.1. Finalmente, en la tercera etapa, conocida como defusificación, se obtiene una salida numérica del controlador a partir de una variable de salida lingüística, por medio del centroide, que se muestra en la ecuación 5.3. En el apéndice B se muestran los programas tanto en Matlab como en Roboplus task de este controlador, donde se puede identificar las tres etapas que aquí se mencionan.

Para observar la respuesta del controlador difuso se realiza una prueba en la que se programa una rutina de forma que el robot alcance una inclinación y así se mantenga. El objetivo es observar la respuesta del controlador ante esta acción, por lo que se desactiva la acción de los servomotores, que en un

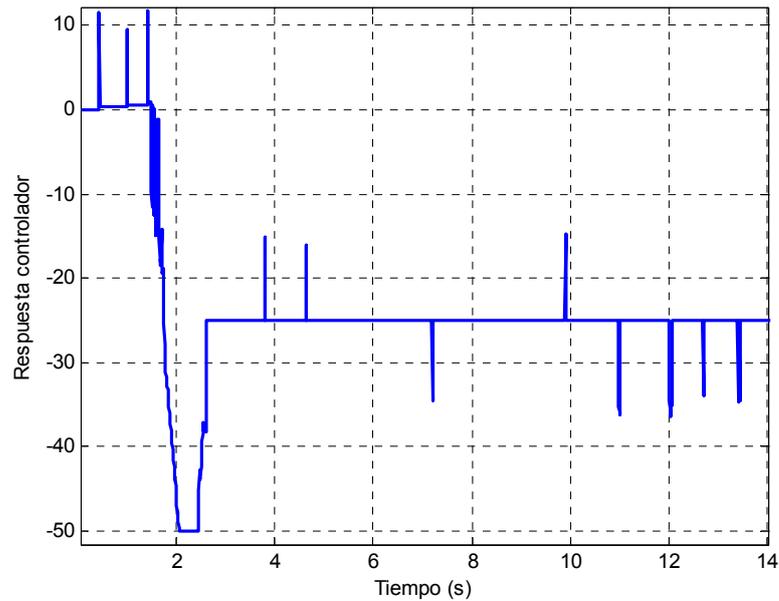
momento dado pudieran activarse para compensar dicha inclinación. Por lo tanto, se dejan evolucionar tanto el ángulo de inclinación como la salida de control. En la figura 5.8 se muestra el comportamiento del ángulo de inclinación, aquí se puede observar que en el intervalo en el que se mantiene una inclinación constante, se presentan pequeñas variaciones debido al contenido de ruido que contamina a la señal de velocidad obtenida del girosensor.



**Figura 5.8** Comportamiento del ángulo de inclinación cuando el robot es perturbado con una función escalón.

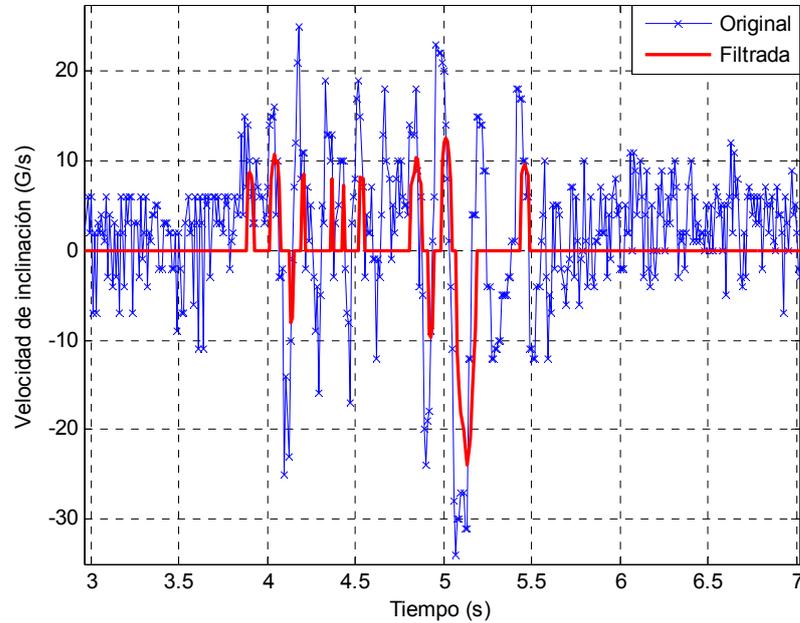
En la figura 5.9 se muestra el comportamiento de la señal de control generada por el controlador difuso ante la inclinación mostrada en la figura 5.8. En éste caso se observa como la respuesta del controlador es sensible a los cambios repentinos en el ángulo de inclinación, ya que coinciden los impulsos presentes en esta respuesta con las pequeñas variaciones existentes en los intervalos donde él ángulo tendría que ser constante. En este sentido, también se

presenta un sobrepaso considerable en la señal de control cuando el ángulo de inclinación tiene la mayor relación de cambio.



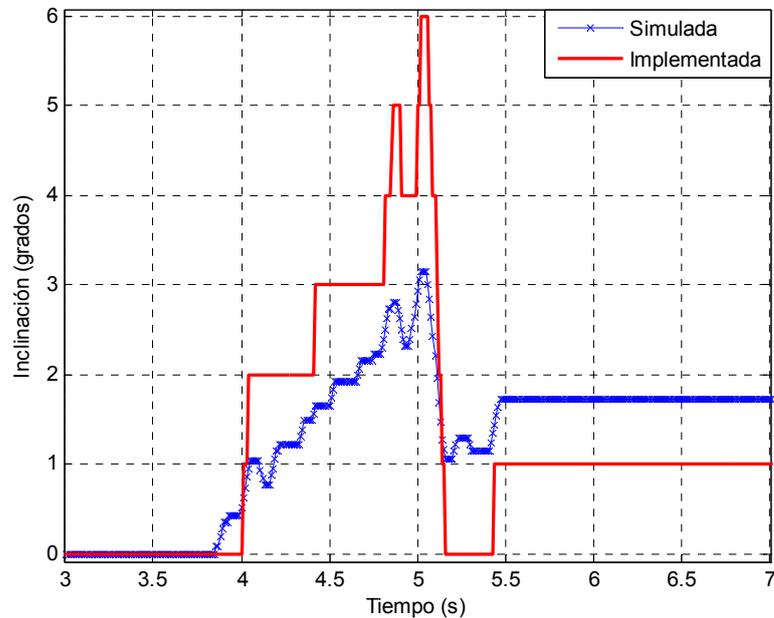
**Figura 5.9** Respuesta del controlador ante el desplazamiento angular del robot de la figura 5.8.

En la siguiente prueba se incorpora la acción de control sobre los servomotores correspondientes para compensar la inclinación adquirida en la misma rutina de inclinación hacia un extremo. En la figura 5.10 se muestra el comportamiento de la velocidad de inclinación, la señal original y la filtrada. Se observa claramente como la velocidad no mantiene un incremento constante sino que presenta solo un conjunto de oscilaciones, dado que cuando la estructura robótica se está inclinando, inmediatamente entra en acción el controlador enviando la señal hacia los servomotores correspondientes para compensar dicho movimiento.



**Figura 5.10** Respuesta de la velocidad de inclinación del sistema robótico flexible con un controlador difuso, ante una rutina de inclinación.

En la figura 5.11 se tiene el comportamiento del ángulo como resultado de integrar la señal velocidad de la figura 5.10, obtenida con la rutina de inclinación y con la acción de control actuando sobre los servomotores de control, ubicados en el elemento final (flexible) de cada extremidad. Los resultados que se muestran son obtenidos directamente en la estructura robótica y con simulación en Matlab. Al igual que en el caso del comportamiento de la velocidad, en esta figura se puede apreciar como la acción del controlador no permite evolucionar el ángulo de inclinación programado en la rutina. En cambio se aprecia que existe un retardo entre la acción de control y la respuesta de los servomotores, ya que la estructura alcanza a inclinarse solo un máximo de 6 grados por un instante en la implementación y 3.5 grados en la simulación, posteriormente tiene una oscilación y finalmente se estabiliza en 1 y 1.7 grados aproximadamente, esto se debe al error ocasionado por la contaminación presente en la señal original de velocidad.



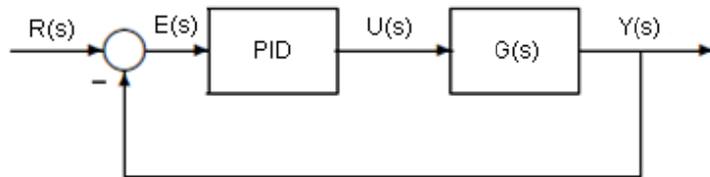
**Figura 5.11** Inclinación del sistema con el controlador difuso, obtenida con la implementación en el robot y con simulación en Matlab.

## 5.4 Controlador PID

El controlador PID (Proporcional, Integral y Derivativo) es de características lineales y realimentado, cuyo propósito es hacer que el error en estado estacionario, entre la señal de referencia y la señal de salida de la planta, sea cero. La estructura de un controlador PID es simple, aunque es también su debilidad, dado que limita el rango de sistemas que se pueden controlar en forma satisfactoria.

Los controladores PID son suficientes para resolver el problema de control de muchas aplicaciones industriales, particularmente cuando la dinámica del proceso lo permite (en general procesos que pueden ser descritos por dinámicas de primer y segundo orden), y los requerimientos de desempeño son modestos (generalmente limitados a especificaciones del comportamiento del

error en estado estacionario y una rápida respuesta a cambios en la señal de referencia). Un lazo de control de una entrada y una salida (SISO) de un grado de libertad es como el que se muestra en la Figura 5.12



**Figura 5.12.** Diagrama de bloques de un sistema SISO con un controlador PID.

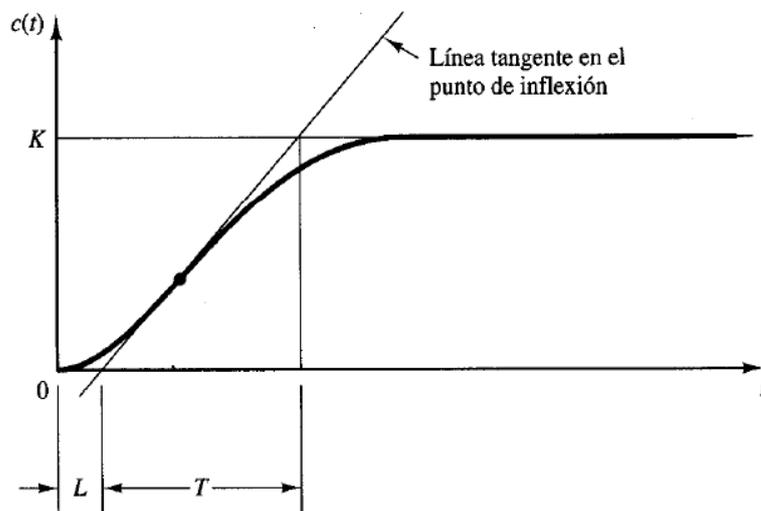
La combinación de la acción proporcional, la acción integral y la acción derivativa es llamada *acción proporcional-integra-derivativa*, la ecuación con las acciones combinadas está dada por:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(t) dt + k_d \frac{de(t)}{dt} \quad (5.4)$$

La combinación de las tres acciones reúne las características de cada acción de control, es decir, la acción proporcional, en esencia es un amplificador del error, con ganancia ajustable pero posee desempeño limitado y error en régimen permanente (off-set), la acción de control integral se denomina control de reajuste (reset), por otro lado, el propósito de la acción derivativa es mejorar la estabilidad de lazo cerrado. Ésta acción nunca se utiliza por sí sola, debido a que solo es eficaz durante períodos transitorios.

Ziegler-Nichols propusieron unas reglas que determinan los valores de la ganancia proporcional  $k_p$ , tiempo integral  $T_i$  y el tiempo derivativo  $T_d$ , basada en las características de la respuesta transitoria de la planta dada.

Si la planta no contiene integradores ni polos dominantes complejos conjugados la respuesta al escalón unitario puede tener forma de S, en el método de respuesta en forma de S se obtiene de forma experimental la respuesta de la planta o sistema, para a una entrada escalón unitario, esta curva también se puede generar a partir de una simulación dinámica del sistema. La curva se caracteriza por dos parámetros: el tiempo de retardo  $L$  y la constante de tiempo  $T$ . Éstos se obtienen dibujando una recta tangente en el punto de inflexión de la curva y determinando las intersecciones de esta tangente con el eje de tiempo y la línea  $K$  como se muestra en la figura 5.14. Ziegler y Nichols sugirieron establecer los valores de  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$  de acuerdo con las formulas que aparecen en la tabla 5.2 [66, 67].



**Figura 5.13** Curva de Respuesta de un sistema con forma de S.

**Tabla 5.2** Reglas de sintonización de Ziegler-Nichols para respuesta al escalón unitario.

Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
<b>P</b>	$\frac{T}{L}$	$\infty$	0
<b>PI</b>	$0.9 \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
<b>PID</b>	$1.2 \frac{T}{L}$	$2 L$	$0.5 L$

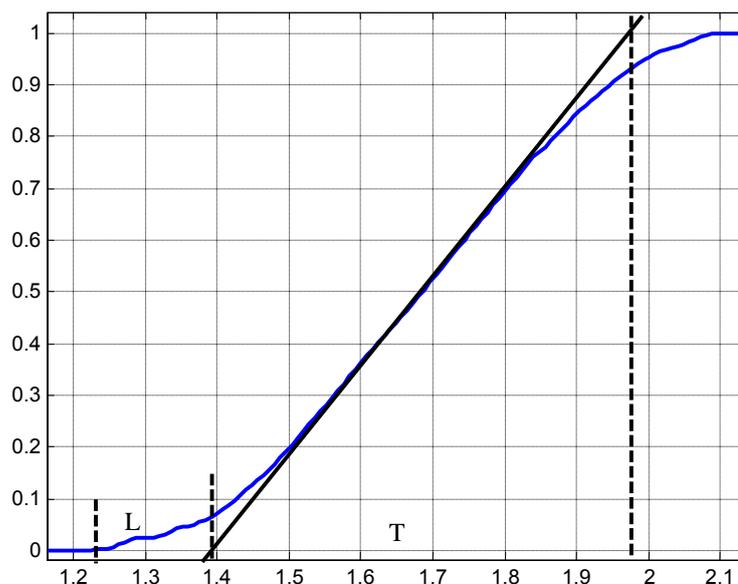
Para desarrollar la estrategia de sintonización del controlador *PID*, se emplea una rutina en el robot que al ejecutarse lleve al robot de una posición horizontal a una inclinación dada en un instante, simulando una perturbación de escalón unitario, se grafica el comportamiento del ángulo de inclinación como salida del sistema en lazo abierto, la cual cumple con la característica principal de la forma de S. En la figura 5.14 se grafica la respuesta en la que se identifican el tiempo de retardo  $L$  y la constante de tiempo  $T$ .

Los valores medidos son  $L=0.165$  y  $T=0.585$ , aproximadamente, por lo que aplicando la formula de la tabla 5.2 se obtienen los siguientes valores:

$$K_p = 1.2 \frac{0.585}{0.165} = 4.25$$

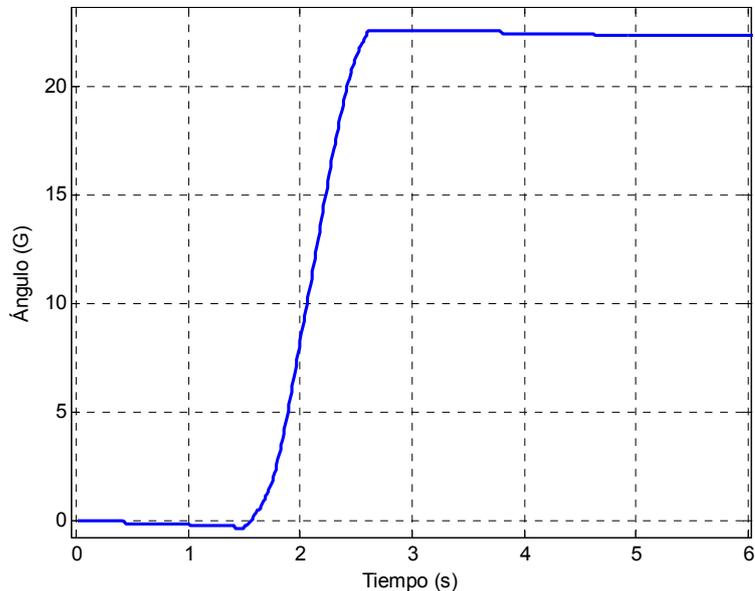
$$T_i = 2(0.165) = 0.33$$

$$T_d = \frac{0.165}{2} = 0.0825$$



**Figura 5.14** Respuesta del sistema robótico para el ángulo de inclinación ante una perturbación de escalón unitario.

Para observar la respuesta del controlador sin la acción de los servomotores de control, se realiza la siguiente simulación, se lleva al robot hasta una inclinación sostenida de 45 grados aproximadamente, como lo muestra la figura 5.15, por lo tanto se tiene un cambio repentino y posteriormente se mantiene estable en una nueva posición.



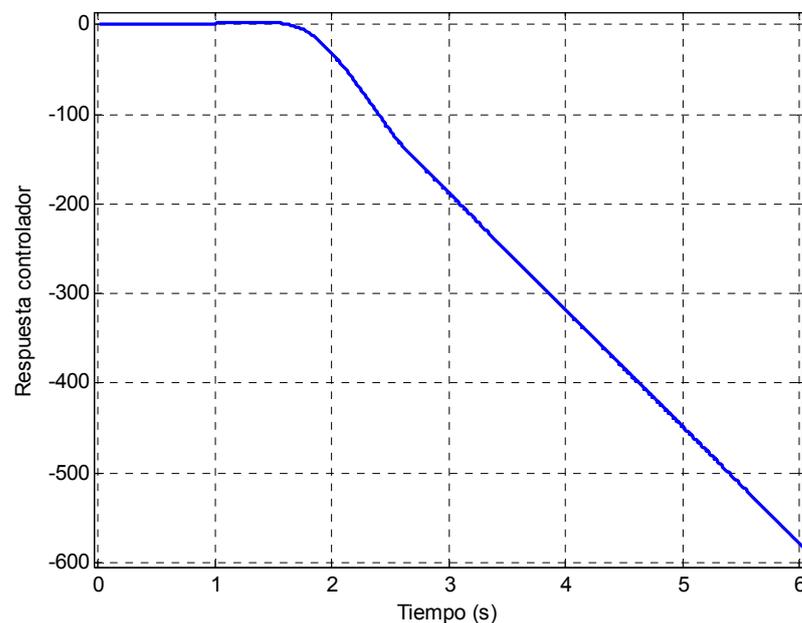
**Figura 5.15** Ángulo de inclinación para una rutina del robot simulando una perturbación de una función escalón.

#### 5.4.1 Pruebas al controlador PID

El procedimiento que sigue la ejecución del controlador PID inicia con la realimentación de la señal de salida para compararla contra el valor de referencia y obtener el error que alimenta al regulador, el cual funciona en base a la ecuación (5.4); posteriormente entran en funcionamiento las tres etapas siguiente: la primera es de proporcionalidad o escalamiento del error, la segunda es la de integración del error, en este caso se hace con la regla trapezoidal y en una tercera etapa se lleva a cabo la derivación del error, este procedimiento se puede observar detalladamente en los programas que se muestran el apéndice B.

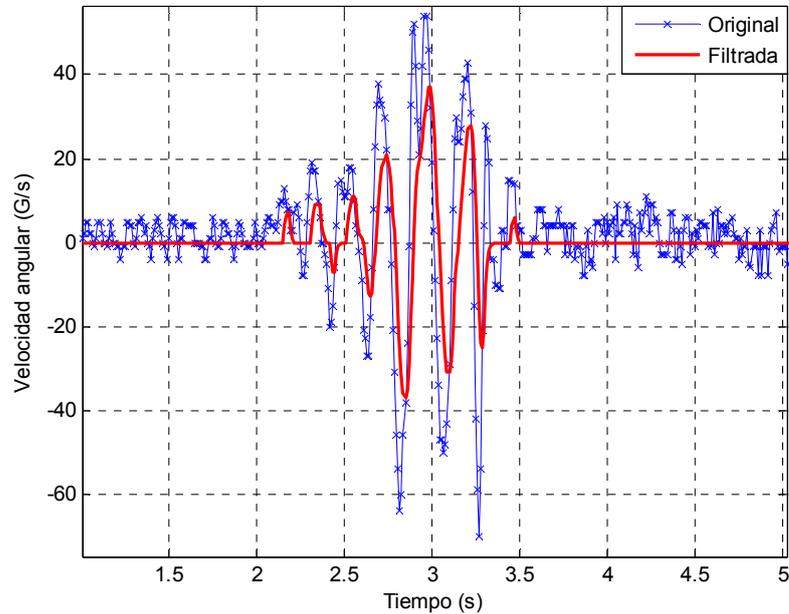
Una primera prueba del controlador consta en observar el comportamiento de la salida del controlador, en este sentido, solo se observa la salida del controlador sin que se activen los actuadores (servomotores). En la figura 5.16 se presenta la respuesta del controlador, en ella se puede observar que la etapa derivativa

solo tiene acción importante cuando la señal está cambiando, mientras que la etapa integral presenta mayor aportación cuando el error se mantiene constante pero lejos del valor de referencia. Puesto que se deja evolucionar la señal de salida del controlador, ésta crece a valores muy altos que incluso sobrepasan la respuesta de los actuadores.



**Figura 5.16** Respuesta libre del controlador PID ante una perturbación de entrada escalón.

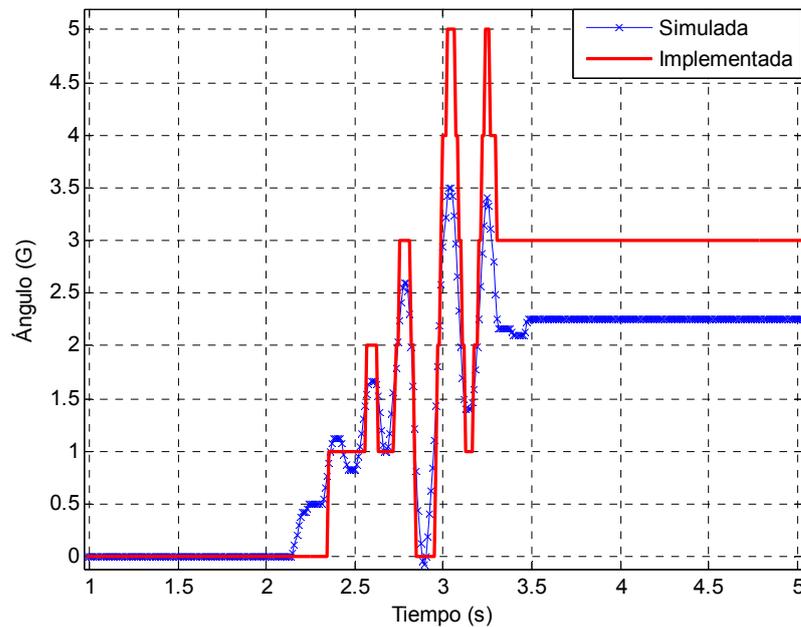
Para observar el comportamiento del sistema robótico flexible con el controlador PID, en la prueba anterior se incluye la acción de los servomotores de control. En la figura 5.17 se muestra el comportamiento de la velocidad de inclinación con la rutina programada para llevar a la estructura a una inclinación dada. Las curvas que se presentan corresponden a la señal de velocidad original y a la filtrada, en ambas curvas se pueden observar las oscilaciones ocasionadas por la acción del controlador cuando intenta corregir la postura de la estructura a la posición horizontal.



**Figura 5.17** respuesta de la velocidad del sistema robótico flexible con un controlador PID, ante una rutina de inclinación.

Antes de llevar a cabo la implementación del controlador en el prototipo se hacen las simulaciones correspondientes en Matlab, con el objeto de observar la respuesta del sistema en simulación y si se requiere, hacer los ajustes pertinentes. Como se ha mencionado anteriormente, el desplazamiento angular se obtiene integrando la señal de velocidad, para este caso, la de la figura 5.17, por lo que, en la figura 5.18 se muestran las curvas que representan el desplazamiento angular del sistema robótico con la acción del controlador, obtenido desde la implementación del prototipo y con la correspondiente simulación en Matlab. Se observan un comportamiento similar en ambos casos, incluyendo las oscilaciones, sin embargo la curva obtenida de la implementación presenta una mayor amplitud en su comportamiento, tanto en la etapa transitoria como en la estable.

En este caso, el desplazamiento angular idealmente debería estabilizarse en cero grados, sin embargo, en este caso se tienen tres grados de error como máximo, ocasionados principalmente por el alto contenido de ruido en la señal que entrega el gyrosensor.



**Figura 5.18** Inclinación del sistema con el controlador PID, obtenida con la implementación en el robot y con simulación en Matlab.

## 5.5 Conclusión

En este capítulo se presentó el desarrollo para la sintonización de un controlador difuso y un PID, para estabilizar la estructura robótica, ambos controladores son sometidos a pruebas para corregir una inclinación que puede tomar la estructura cuando se le programa una rutina de movimiento.

Los sensores normalmente son una de las partes complejas y delicadas en las implementaciones y en este trabajo no ha sido la excepción. Ya que se ha observado que la señal que entrega el sensor contiene una gran cantidad de

---

ruido, que para este caso, aunque es atenuado, genera un pequeño error en la estimación del ángulo de inclinación, calculado con la integral de la señal de velocidad. Sin embargo el error que se genera es despreciable, porque es menor a 2 grados, lo que representa un 5 % como máximo.

El error no ha afectado el desempeño de la respuesta de los controladores, en cambio las variaciones repentinas en la velocidad sí. Esto ocurre porque el software trabaja solo con cantidades enteras, por lo tanto, cuando hay variaciones de decimales en las cantidades, éstas se mantienen en el valor anterior, hasta que el acumulado llegan al siguiente entero, lo anterior hace que la señal sea generalmente de forma escalonada con incrementos repentinos.

En este capítulo se ha presentado el diseño de dos controladores, sin embargo, no se hace una comparación entre ellos, debido a que son de naturaleza completamente diferente, por lo que se busca presentar dos opciones diferentes de controlador para el prototipo de robot que aquí se propone.

## Conclusiones Generales

En este trabajo se presenta un estudio de las herramientas dinámicas empleadas para el análisis de sistemas mecánicos flexibles. El estudio se desarrolla sobre la base de una estructura robótica con seis extremidades de tres grados de libertad cada una e incluye un elemento flexible. Para desarrollar el análisis antes mencionado se toma como apoyo el estudio de una barra flexible y el de un péndulo triple. En este sentido se hace el modelado e implementación del prototipo de robot, el cual es programado para mantener una postura horizontal cuando éste es perturbado de manera que adquiere una inclinación dada. Para lograr lo anterior se hacen pruebas con un controlador difuso y un PID.

En este trabajo se demuestra la simplicidad y aplicabilidad de la representación de estados de un modelo no lineal del péndulo de  $n$ -enlaces basado en la formulación de Euler-Lagrange. A partir de la forma inicial con ecuaciones diferenciales de segundo orden, se propone una representación matricial en términos de la primera derivada de la variable dinámica, con el propósito de tener una implementación directa en lenguajes de computación o software comerciales, de tal forma que se pueda programar directamente el modelo de un péndulo con un número arbitrario de enlaces. El sistema que aquí se analiza es un caso específico de la versión general multi-enlaces, el cual se enfoca en tres enlaces, en los que los resultados corresponden completamente con los presentados en modelos publicados en otros lugares.

---

El modelo no lineal del péndulo triple fue comparado contra la versión de pequeñas oscilaciones calculando respuesta a la frecuencia, series de tiempo, análisis espectral y el comportamiento dinámico en el caso límite. En el análisis que se hace para la respuesta a la frecuencia se usan tres estrategias diferentes para comparar los picos de las frecuencias de resonancia: a) por medio del modelo lineal (pequeñas oscilaciones), b) usando la función de transferencia basado en la transformada de Laplace y c) por medio del modelo no lineal. La comparación de la posición de los picos de resonancia son casi exactos en cada análisis.

Uno de los principales resultados que aquí se obtiene es sobre el análisis del desplazamiento de las frecuencias de resonancia, en el que se encuentran dos comportamientos distintos, uno es donde la fricción en las uniones no afecta a las frecuencias de resonancia y el otro donde predomina una ley de escalamiento que determina el comportamiento del deslizamiento de la frecuencia afectado por el coeficiente de fricción. Las leyes que gobiernan el comportamiento dinámico del sistema, son un punto crítico para tomar en cuenta en el diseño de estructuras y mecanismos.

Los resultados del análisis del comportamiento dinámico de un péndulo triple proponen un método para analizar cómo se comportan los picos de las frecuencias de resonancia cuando hay cambios en los parámetros del sistema. Se observa que los elementos más bajos del péndulo responden a un espectro de frecuencia más extenso, hecho que se debe considerar cuando se diseñen mecanismos de compensación de movimientos ocasionados por terremotos para grandes construcciones. Por lo que aquí se ha demostrado que una forma de controlar las oscilaciones indeseadas en un sistema es logrando encontrar

---

un mecanismo de ruptura en cada unión que sea capaz de alterar la frecuencia natural del sistema.

Aquí se presenta el desarrollo de un algoritmo para calcular primeramente el ángulo total de flexión en el extremo libre de la barra flexible empotrada y la coordenada de dicho extremo por métodos numéricos, resolviendo las integrales elípticas de Legendre, de primer especie completa e incompleta empleando el método de Carlson, dicho algoritmo se programa en Matlab, los resultados son obtenidos con el algoritmo de Newton Raphson en solo 8 iteraciones suponiendo  $\varphi_0 = 0$  como valor inicial.

Se plantean dos métodos para el análisis de la barra flexible, el primero de ellos es bajo la consideración de pequeñas flexiones, lo que simplifica considerablemente el cálculo. Mientras que el segundo método se desarrolla bajo el formalismo de las ecuaciones diferenciales no lineales que representan al modelo de la barra. Para fuerzas que generan pequeñas flexiones, los resultados son aproximados. Es claro que al emplear un método numérico en la solución del modelo no lineal, se corre el riesgo que el resultado no converja al valor correcto.

Para obtener el modelo matemático de la estructura robótica con las seis extremidades de tres grados de libertad cada una, en las que se incorpora un elemento flexible, aquí se propone una estructura mecánica en donde los elementos rígidos son parte del cuerpo del robot, generando así una estructura simple en donde cada una de las extremidades cuentan con solo un grado de libertad y su elemento flexible.

Dado que uno de los objetivos es el de mantener a la estructura siempre en forma horizontal, el modelo se plantea en función de dos extremidades flexibles,

---

una de cada lado, las cuales reciben la mitad del peso del robot, considerando que cada una de ellas representa a las tres extremidades de cada lado.

Con el objetivo de obtener un modelo matemático simple para el sistema robótico, se propone un análisis sobre un esquema rígido que enmarca al de los enlaces flexibles, haciendo coincidir los puntos de apoyo de ambos sistemas, de forma que la longitud del sistema rígido auxiliar es variable y depende de la flexiones que se presenten en las extremidades, dependiendo éstas a su vez de la fuerza de reacción, ocasionadas por la inclinación de la estructura.

Con base en el planteamiento propuesto para la estructura robótica, es posible aplicar las ecuaciones de Euler-Bernoulli de momentos, para conocer el grado de flexión de las extremidades, según sea la inclinación que tenga la estructura en un instante dado.

Se implementa la estructura robótica propuesta con las seis extremidades de tres grados de libertad, incorporando el último enlace de perfil solera de aluminio para lograr la ligereza y flexibilidad que se busca en el análisis que se ha desarrollado en este trabajo. La programación se hace con el software roboplus. Se genera una variedad de rutinas para desarrollar diferentes pruebas, tanto de la estructura en sí, como del controlador propuesto.

Para el control de estabilidad horizontal del robot se proponen dos controladores, un difuso y un pid, ambos se simulan en Matlab y posteriormente se implementan en el prototipo. Se hacen pruebas para verificar su respuesta, principalmente ante un cambio de inclinación repentino, simulando un caso extremo de irregularidad en la superficie de contacto.

La estimación del ángulo de inclinación del robot se lleva a cabo por medio de integración numérica, por regla trapezoidal, de la señal de velocidad que entrega el sensor empleado. Ésta estimación, en lo general presenta un error de alrededor de 3 grados, ocasionado principalmente por el ruido adherido en la señal de velocidad adquirida.

Se hacen pruebas del robot con el controlador difuso de tres reglas de membresía, negativo, cero, positivo; para las entradas de error y su derivada, así como para la salida de control. Este controlador presenta resultados aceptables, ya que cumple con las características de no linealidad, sin embargo presenta un pequeño error que es consecuencia del ruido en la señal que entrega el sensor.

En el mismo sentido se hacen pruebas del robot con el controlador PID. En este caso debido a la no linealidad del prototipo, el margen de error en estos controladores es mayor que con el difuso. Lo anterior se presenta porque la acción derivativa introduce un error considerable, ocasionado porque la velocidad presenta cambios muy grandes, provocados por la señal contaminada y porque el controlador del robot esta configurado para trabajar solo con valores enteros, lo que genera que se produzcan saltos o variaciones grandes en los valores de las señales procesadas.

### **Trabajos futuros**

Como actividades futuras que proporcionen continuidad al trabajo que en este documento se reporta, se propone desarrollar el modelo completo de la estructura robótica, por medio del análisis de Euler-Lagrange, de forma que se incluyan el estudio de las energías potenciales y cinéticas considerando las seis extremidades y la combinación de elementos rígidos y flexibles, ya en esta

ocasión se ha obtenido una aproximación considerando que los elementos rígidos son parte del cuerpo del robot.

Por las características y capacidad de memoria del microcontrolador del robot, en esta ocasión solo se controla la inclinación en un eje; por lo que se propone como una actividad futura complementar la etapa de control para cubrir el eje faltante, de forma que se tenga el control de inclinación completo, en el eje  $x$  y en el eje  $y$ . Así mismo complementar la memoria del controlador o generar los programas en lenguajes de bajo nivel para optimizar el funcionamiento del microcontrolador.

## Referencias

- [1] Gidea Marian, Nicolescu Constantin P., "Chaotic Dynamical Systems An Introduction", Universitaria Press, Craiova, 2002, ISBN: 973-8043-159-9
- [2] Brin Michel, Stuck Garrett, "Introduction to Dynamical Systems", Cambridge University Press, 2002, ISBN: 0 521 80841 3 hardback.
- [3] Alligood Kathleen T., Sauer Tim D., Yorke Jamea A., "Chaos: An Introduction to Dynamical Systems", Springer-Verlag New York, Inc. 1996, ISBN: 0-387-94677-2, SPIN: 10778875
- [4] Jerrelind Jenny and Stensson Annika, "Nonlinear Dynamic Behavior of Coupled Suspension Systems", *Meccanica* 38: 43-59, 2003.
- [5] Sado D. and Gajos K., "Note on Chaos in Three Degree of Freedom Dynamical system with Double Pendulum" *Meccanica* 38: 719-729, 2003.
- [6] Shabana Ahmed A., "Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and Recent Development", *Multibody systems dynamics*, 1:189-222, 1997
- [7] Benosman M., Boyer F., Le Vey G. and Primault D., "*Flexible Links Manipulators: from Modelling to Control*", *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 34: 381-414, 2002.
- [8] Murray Richard M., Li Zexiang, Shankar Sanstry S., "A Mathematical Introduction to Robotic Manipulator", CRC Press, 1994, ISBN 9780849379819
- [9] Reyes R. Claudia, González E Miguel E y Beltrán T Aurelio, "*Modelado matemático y control PD + Compensación de un Robot Manipulador de Dos Grados de Libertad en Trayectorias Continuas Punto a Punto*",

---

*ENINVIE 2005.*

- [10] Bossi Luca, “*Modeling, identification and multivariable control of a flexible arm*”, *PhD dissertation, Università Degli Studi di Pavia, 2009.*
- [11] Silva Manuel F., Machado J. A. T. and Lopes A. M., “*Fractional Order Control of a Hexapod Robot*”, *Nonlinear dynamics 38: 417-433, 2004.*
- [12] Rivas-Camero Ivan, Sausedo-Solorio José M., “Dynamics of the shift in resonance frequency in a triple pendulum”, *Meccanica, Springer*, Published online 12 July 2011, DOI 10.1007/s11012-011-9452-y.
- [13] Puig Alejandro, “*Melanie V2.0 Robot hexápodo robusto de 3 dof/pata para terrenos abruptos*”, *mundobot.com, abril 2004.*
- [14] Etxebarria Victor, Sans Arantza & Lizarraga Ibone, “*Control of a lightweight flexible robotic arm using sliding modes*”, pp 103-110, *International Journal of Advanced Robotic Systems, Volume 2, Number 2, 2005. ISSN 1729-8806.*
- [15] Lin J. “*Hierarchical fuzzy logic controller for a flexible link robot arm performing constrained motion tasks*”, *IEE Proc. Control Theory Appl.*, Vol. 150, No. 4, July 2003.
- [16] Ayman A. El-Badawy, Mohamed W. Mehrez, Amir R. Ali, “*Nonlinear Modeling and Control of Flexible-link manipulators subjected to parametric excitation*”, *Nonlinear Dyn*, 2010, DOI 10.1007/s11071-010-9761-z
- [17] Garcia-Vallejo D., Mayo J., Escalona J. L., Dominguez J., “*Three-dimensional formulation of rigid-flexible multibody systems with flexible beam elements*”, *Multibody Syst Dyn* 20:1-28, 2008, DOI 10.1007/s11044-008-9103-9
- [18] Amer Y. A., Hegazy Usama H., “*Chaotic vibration and resonance phenomena in a parametrically excited string-beam coupled system*”, *Meccanica*, 2011, DOI 10.1007/s11012-011-9490-5

- 
- [19] Herman Przemyslaw, "dynamical coupling analysis of rigid manipulators", *Meccanica* 44: 61-70, 2009, DOI 10.1007/s11012-008-9142-6
- [20] Aarts R. G. K. M., Meijaard J. P., Jonker J. B., "Flexible multibody modeling for exact constraint design of compliant mechanisms", *Multibody Syst Dyn* 27:119-133, 2011, DOI 10.1007/s11044-011-9272-9
- [21] Becedas J., Feliu V. and Sira-Ramírez H., "*GPI Control for a Single-Link Flexible Manipulator*", *Proceeding of the World Congress on Engineering and Computer Science 2007 WCECS 2007, October 24-26, 2007, San Francisco, USA*.
- [22] Abedi E., Ahmadi Nadooshan A., and Salehi S., "*Dynamic modeling of two flexible link manipulators*", *International Journal of Natural Sciences and Engineering* 1:2, 2009.
- [23] Wedding Daniel K. and Eltimsahy Adel, "*Flexible Link Control Using Multiple Forward Paths, Multiple EBF Neural Networks in a Direct control Application*", IEEE 2000.
- [24] Ngunyen V. B. and Morris A. S., "*Genetic Algorithm Tuned Fuzzy Logic Controller for a Robot Arm With Two-link Flexibility and Two-joint Elasticity*", *J Intell Robot Syst*, 49: 3-18, 2007. DOI 10.1007/s10846-006-9097-6.
- [25] Payo Ismael, Ramos Francisco, Cortázar O. Daniel and Feliu Vicente, "*Experimental Validation of Nonlinear Dynamic Models for Single-Link Very Flexible Arms*", *Proceeding of the 44<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005, Seville Spain*.
- [26] Martins Jorge M., Ayala Botto Miguel and Sá da Costa José, "*Modeling of Flexible Beams for Robotic Manipulators*", *Multibody System Dynamics*: 79-100, 2002.
- [27] *Dynamic model of a 2-link flexible arm Edouard Lorache 2007*.
-

- 
- [28] Izran Bin Ishak Mohamad Hafis, “*Dynamic modeling of a two link flexible manipulator*”, MC thesis, Universiti Teknologi Malaysia, 2005.
- [29] Martins Jorge M., Sá da Costa José and Ayala Botto Miguel, “*Modelling, Control and Validation of Flexible Robot Manipulators*”, *Advances in computational Multibody Systems*, 239-268, Springer 2005.
- [30] Sanz A., Etxebarria V., “*Experimental control of a Two-Dof Flexible Robot Manipulator by Optimal and Sliding Method*”, *J Intell Robot Syst*, 46: 95-110, 2006. DOI 10.1007/s10846-006-9041-9.
- [31] Jongbae Lee, Joon-Hong Lim, Chang-Woo Park, Seungho Kim, “*Adaptive Model Reference Control Bases on Takagi-Sugeno Fuzzy Models with Applications to Flexible Joint Manipulators*”, *KSME International Journal*, Vol 18 No. 3 pp. 337-346, 2004.
- [32] Moudgal Vivek G., Kwong Waihon Andrew, Passino Kevin M. and Yurkovich Stephen, “*Fuzzy Learning Control for a Flexible-Link Robot*”, *IEEE Transactions on fuzzy systems*, vol. 3 No. 2, May 1995.
- [33] Kojima Hiroyuki, Morito Akihiro, Konno Katsuhiko and Kobayashi Toshio, “*Residual vibration reduction control after catching a falling steel sphere by a two-link catching flexible robot arm*”, *International Journal of Applied Electromagnetic and Mechanics* 19, 2004. 361-366 IOS Press.
- [34] Cheong Joono, Kyun Chung Wan and Youm Youngil, “*Inverse kinematics of Multilink Flexible Robots for High-Speed Applications*”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 20, No. 2, April 2004.
- [35] Amer S. Al-Yahmadi, and T. C. Hsia, “*Modeling and control of Two Manipulators Handling a Flexible Beam*”, *World Academy of Science, Engineering and Technology* 6 2005.
- [36] C. M. de Abreu Gustavo Luiz, Ribeiro José F., “*On-line control of a flexible beam using adaptive fuzzy controller and piezoelectric actuators*”,
-

---

*Revista controle & automatica Vol. 14.no. 4 2003.*

- [37] Watanabe Toru, Yamamoto Kohsuke, Takamura Kohei and Seto Kazuto, "Robust Vibration Control of a Flexible Robot Arm Carrying an Uncertain Load That Causes Bending/Torsional Coupling", *Journal of Robotics and Mechatronics Vol 16 No. 4, 2004*
- [38] Lara Luis, Stoico César, Machado Rodrigo, Castagnino Mario. "Estimación de exponentes de Lyapunov", *Mecánica Computacional Vol. XXII, 2003.*
- [39] Larcombe P, "On the control of a tow dimensional multi-link inverted pendulum: co-ordinate system suitability for dynamic formulation, decision and control", *Proceeding of the 30th IEEE conference on*, pp. 136-141, vol 1, 1991, DOI: 10.1109/CDC.1991.261271
- [40] Lobas, L.G., "The equations of an inverted pendulum with an arbitrary number of links and an asymmetric follower force", *Int. Appl. Mech. Vol. 43, No. 5, 2007*
- [41] Campbell, S.L., Chancelier, J.P., and Nikoukhah, R., "Modeling and Simulation in Scilab/Scicos", Chap. 5, Springer N.Y. 2006
- [42] Awrejcewicz Jan and Kudra Grzegorz. "Dynamics of a real triple pendulum – modeling and experimental observation", *ENOC 2008, Saint Petersburg, Russia, June 30 – July 4, 2008.*
- [43] Awrejcewicz Jan, Kudra Grzegorz, Wasilewsky Grzegorz. "Experimental and numerical investigation of chaotic regions in the physical pendulum", *Nonlinear Dynamic*, 50:755-766, 2007.
- [44] Kim, D., Singhose, W. , "Reduction of double-pendulum bridge crane oscillations", *8th Int. Conf. on Motion and Vib. Ctl. 2006.*
- [45] M. E. Husman, Torrie C. I, M. V Plissi, Robertson N. A., K. A. Strain, and J. Hough, "Modeling of multistage pendulums: Triple pendulum suspension for GEO 600" *Rev. Sci. Instr. Vol. 71, No. 6, 2000*

- 
- [46] Gmiterko A, Grossman M, Jabloski R, “*Nlink Inverted Pendulum Modeling*”, Int. Recent Advances in Mechatronics 2008-2009, part 3 pp 151-156, springer, 2010, DOI: 10.1007/978-3-642-05022-0-26
- [47] Schmitt Alfred A., Bender Jan S. “*Impulse based dynamic simulation of multibody systems: numerical comparison with standard methods*”, Proc. Automation of Discrete Production Engineering, pp. 324-329, 2005
- [48] Berdahl John P. and Vander Lugt Karel, “*Magnetically driven chaotic pendulum*”, Am. J. Phys., Vol. 69, No. 9, pp 1016-1019, 2001
- [49] Sousa de Paula Aline, Amorin Savi and Lunes Pereira-Pinto Francisco Heitor, “*Chaos and transient in an experimental nonlinear pendulum*”, Journal of sound and vibration, volume 294, Issue 3, pages 585-595, 2006.
- [50] Beckert S, Schock U, Schulz C, Weidlich T, Kaiser F, “Experiments on the bifurcations behavior of a forced nonlinear pendulum”, phys Lett. A107, pp 347-350, 1987.
- [51] Blackburn J., Yang Z., Vik S., “*Experimental study of chaos in a driven pendulum*”, Physica, D26 pp 385-395, 1987.
- [52] Awrejcewicz Jan, Kudra Grzegorz, “*The triple pendulum with barriers and the piston-connecting rod-crankshaft model*”, Journal of theoretical and applied mechanic, 45, 1, pp. 15-23, 2007.
- [53] Aicardi Michele. “*A triple pendulum robotic model and a set of simple parametric functions for the analysis of the golf swing*”, International Journal of Sport Science and Engineering, Vol. 1 No. 2 pp. 75-86, 2007.
- [54] Wu, Wan. “*Instrumentation of the next generation gravitational wave detector: Triple pendulum suspension and electro-optic modulator*”, Thesis Diss., University of Florida, USA, 2007.
- [55] Morgan, Troy A. “The use of innovative base isolation systems to achieve
-

- 
- complex seismic performance objective”, PhD dissertation, University of California, Berkeley, USA, 2007.
- [56] Ruet, Laurent . ”Active control and sensor noise filtering duality application to advanced LIGO suspension”, Thesis, Ins. Nat. Sci. App. de Lyon, 2007.
- [57] Plissi M. V., Torrie C. I. and Barton M., Robertson N. A., “An investigation of eddy-current damping of multi-stage pendulum suspensions for use in interferometric gravitational wave detector”, *Rev. Sci. Intr.*, Vol. 75, No. 11, 2004
- [58] Strogatz Steven H., “Nonlinear Dynamics and Chaos with applications to physics, biology chemistry and engineering”, Westview Press, 1<sup>st</sup> Edition, 2001, ISBN-10: 0738204536
- [59] Beléndez Tarcisio, Neipp Cristian and Beléndez Augusto, “*Numerical and Experimental Analysis of a Cantilever Beam: a Laboratory Project to Introduce Geometric Nonlinearity in Mechanics Material*”, *Int. J. Engng Ed.* Vol . 19, No. 6, pp 885-892, 2003.
- [60] H Press William., Teoukolsky Saul A., Vetterling William T, Flanery Brian, “*Numerical Recipes in C The art of Scientific Computing second edition*”, Cambridge University Press 2002.
- [61] Roy R. Craig, Jr, “*Mechanical of materials*”, second edition, John Wiley & Sons, 2000.
- [62] Fu K. S., González R. C., Lee C. S. G., “*Robótica, Control, Detección Visión e Inteligencia*”, Mc Graw Hill 1987.
- [63] Zadeh & L. A. “Fuzzy Sets:Information and Control”, Vol. 8. 1965.
- [64] Passino K. M. and Yurkovich S. *Fuzzy Control*. Addison Wesley Longman, Inc., Menlo Park, California, USA, 1998.
- [65] Mohan Akole, Barjeev Tyagi (2008) “Design of fuzzy logic controller for nonlinear model of inverted pendulum-cart system”, XXXII National Systems Conference, Nsc, pp 750-755.
-

- [66] Ogata Katsuhiko, "Ingeniería de control moderna", tercera edición, Pearson Educación, 1998, ISBN 970-17-0048-1
- [67] O'Dwyer Aidan, "Handbook of PI and PID controller tuning rules", 3<sup>rd</sup> Edition, Imperial College Press, 2009. ISBN-13 978-1-84816-242-6
- [68] Golstein Helbert, Poole Charles Safko John. "Classical Mechanic", Third edition, Addison Wesley, 2003.
- [69] <http://support.robotis.com/en/>

## Apéndice A

### Modelo de Péndulo Triple

Para establecer el sistema que aquí se estudia, se inicia con un enfoque matemático general de un péndulo de n-enlaces, del cual se obtiene el modelo principal que se usa en este estudio. El modelo matemático para un péndulo multi-enlaces se puede obtener basado en la formulación de Euler-Lagrange [68].

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_k} - \frac{\partial L}{\partial \theta_k} + \frac{\partial Q}{\partial \dot{\theta}_k} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Donde  $L=T-u$  es el Lagrangiano y se define como la diferencia entre la energía cinética  $T$  y la energía potencial  $u$ ,  $Q$  representa las pérdidas por fricción y  $\theta_k$  representa a las variables generalizadas, las componentes de la función

Lagrangiano son:  $T = \frac{1}{2} \sum m_k |r_k \dot{\theta}_k|^2$ ,  $u = g \sum m_k h_k$  y  $Q = \frac{1}{2} \sum R_k (\dot{\theta}_k - \dot{\theta}_{k-1})^2$ .

Por lo tanto, cuando se sustituyen los términos de la energía cinética y potencial, el Lagrangiano queda como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \\ & \frac{1}{2} m_3 L_3^2 \dot{\theta}_3^2 + m_3 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_3 L_1 L_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + m_3 L_2 L_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \\ & + \dots + (m_1 + m_2 + m_3) g L_1 \cos \theta_1 + (m_2 + m_3) g L_2 \cos \theta_2 + m_3 g L_3 \cos \theta_3 + \dots \end{aligned}$$

Se derivan los términos del Lagrangiano con respecto a los ángulos de cada enlace del péndulo, como variable generalizada, como se indica en la ecuación (A1). Considerando un número  $n$  arbitrario de enlaces en el péndulo, se obtiene un número  $n$  de ecuaciones diferenciales no lineales que pueden escribirse de forma matricial como se representa en la ecuación (A2), la cual representa el modelo matemático de un péndulo de  $n$ -enlaces.

$$M_N(\theta)\ddot{\theta}_N + N_N(\theta)\dot{\theta}_N^2 + R_N\dot{\theta}_N + P_N(\theta) + f_N(\theta, t) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Donde  $M_N$ ,  $N_N$ ,  $R_N$  y  $f_N$  son matrices dadas por:

$$M_N(\theta) = \begin{bmatrix} M_1 & M_{12}\cos(\theta_1 - \theta_2) & M_{13}\cos(\theta_1 - \theta_3) & \dots & M_{1n}\cos(\theta_1 - \theta_n) \\ M_{12}\cos(\theta_1 - \theta_2) & M_2 & M_{23}\cos(\theta_2 - \theta_3) & \dots & M_{2n}\cos(\theta_2 - \theta_n) \\ M_{13}\cos(\theta_1 - \theta_3) & M_{23}\cos(\theta_2 - \theta_3) & M_3 & \dots & M_{3n}\cos(\theta_3 - \theta_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1n}\cos(\theta_1 - \theta_n) & M_{2n}\cos(\theta_2 - \theta_n) & M_{3n}\cos(\theta_3 - \theta_n) & \dots & M_n \end{bmatrix},$$

$$N_N(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & M_{12}\sin(\theta_1 - \theta_2) & M_{13}\sin(\theta_1 - \theta_3) & \dots & M_{1n}\sin(\theta_1 - \theta_n) \\ -M_{12}\sin(\theta_1 - \theta_2) & 0 & M_{23}\sin(\theta_2 - \theta_3) & \dots & M_{2n}\sin(\theta_2 - \theta_n) \\ -M_{13}\sin(\theta_1 - \theta_3) & -M_{23}\sin(\theta_2 - \theta_3) & 0 & \dots & M_{3n}\sin(\theta_3 - \theta_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -M_{1n}\sin(\theta_1 - \theta_n) & -M_{2n}\sin(\theta_2 - \theta_n) & -M_{3n}\sin(\theta_3 - \theta_n) & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_N = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 & \dots & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 & \dots & 0 \\ 0 & -R_3 & R_3 + R_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_n \end{bmatrix}, \quad P_N(\theta) = \begin{bmatrix} A_1 g \sin \theta_1 \\ A_2 g \sin \theta_2 \\ A_3 g \sin \theta_3 \\ \vdots \\ A_n g \sin \theta_n \end{bmatrix};$$

$$f_N(\theta, t) = \begin{bmatrix} A_1 \cos \theta_1 \\ A_2 \cos \theta_2 \\ A_3 \cos \theta_3 \\ \vdots \\ A_n \cos \theta_n \end{bmatrix} \ddot{\eta};$$

De este modelo es relativamente sencillo obtener el modelo de pequeñas oscilaciones, considerando que  $\sin \theta \approx \theta$ , por lo que el modelo lineal de pequeñas oscilaciones para el péndulo de n-enlaces se expresa matricialmente de la siguiente forma:

$$M_N L_N \ddot{\theta}_N + R_N \dot{\theta}_N + g m_N l_N \theta_N + m_N l_N \eta_{Na} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Donde:

$$M_N = \begin{bmatrix} m_1 L_1 & m_2 L_1 & m_3 L_1 & \dots & m_n L_1 \\ 0 & m_2 L_2 & m_3 L_2 & \dots & m_n L_2 \\ 0 & 0 & m_3 L_3 & \dots & m_n L_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n L_n \end{bmatrix}, \quad L_N = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_1 & L_2 & 0 & \dots & 0 \\ L_1 & L_2 & L_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1 & L_2 & L_3 & \dots & L_n \end{bmatrix}$$

$$R_N = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 & \dots & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 & \dots & 0 \\ 0 & -R_3 & R_3 + R_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_n \end{bmatrix}, \quad l_N = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & L_n \end{bmatrix}$$

$$m_N = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (m_2 + m_3 + \dots + m_n) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (m_3 + \dots + m_n) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix},$$

$$\ddot{\theta}_N = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_n \end{bmatrix}; \quad \dot{\theta}_N = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix}; \quad \theta_N = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}; \quad \eta_{Na} = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\eta} \\ \vdots \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix};$$

Dada la ecuación diferencial de Segundo orden que describe el modelo del péndulo de n-enlaces y para el propósito de implementación computacional, el sistema se transforma a un sistema de primer orden con la primera derivada ya despejada, es decir expresada como variables de estado, la cual se expresa como:

$$d\theta = M_a(\theta)^{-1}[-N_a(\theta)v_a - P_a(\theta) - f_a(\theta, t)] \quad (2)$$

Donde:

$$d\theta = [\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3]^T, v_a = [u^2 \quad v^2 \quad w^2 \quad -u \quad -v \quad -w]^T$$

Y las siguientes son matrices particionadas de 6x6:

$$M_a(\theta) = \begin{bmatrix} M(\theta) & R \\ 0 & I \end{bmatrix}; \quad N_a(\theta) = \begin{bmatrix} N(\theta) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}; \quad P_a(\theta) = \begin{bmatrix} P(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad f_a(\theta, t) = \begin{bmatrix} f(\theta, t) \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

## Apéndice B

### Códigos del programa en Matlab que simula el comportamiento dinámico de un péndulo triple

Código del programa principal donde se obtiene el comportamiento dinámico del péndulo triple

```

%variando las condiciones iniciales y tomando el promedio de ultimos
%valores maximo para cada angulo
%Este programa puede variar la frecuencia y amplitud de perturbacion.
%se pede variar tambien el valor de amortiguamiento
%el programa da la opción de elegir el numero de maximos a graficar (n)
%(los ultimos n maximos)
%Ivan de Jesus Rivas Cambero 07/octubre/2008
clc;
clear all;
t=[0,50]; %Intervalo de tiempo de simulacion
n=3; %numero de ultimos maximos que se desea promediar
np=3; %numero de pendulos
Mas=[1; 1; 1];
Long=[1; 1; 1];
%R=[0.1; 0.1; 0.1];
CA=[0.05, 0.05, 0.05];
CF=[0.63, 0.005, 0.75];%1ra frec=0.312,0.001,0.328;2a frec=0.63,0.005,0.75; 3ra frec=
0.95,0.005,1.25
Am=[0.0, 0.001, 0.5];%1ra frec=0.0,0.005,1.0; 2a frec=0.0, 0.005, 0.5; 3ra
frec=0.0,0.005,0.3
Vel=[0; 0; 0];
Ctet4=[0, 0.1, 0];
Ctet5=[0, 0.1, 0];
Ctet6=[0, 0.1, 0];
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-4 1e-4 1e-4 1e-4]);
rr=0;
for r=Am(1):Am(2):Am(3)
    rr=rr+1;
    Rvar(rr)=r;
    R=[r,r,r];
    T=0;

```

---

```

Y=0;
cont=0;
conth=0;
contk=0;
contl=0;
contg=0;
for A=CA(1):CA(2):CA(3)
    conth=conth+1;
    for f=CF(1):CF(2):CF(3)
        contk=contk+1;
        for tet4=Ctet4(1):Ctet4(2):Ctet4(3)
            contl=contl+1;
            for tet5=Ctet5(1):Ctet5(2):Ctet5(3)
                contg=contg+1;
                co=0;
                for tet6=Ctet6(1):Ctet6(2):Ctet6(3)
                    teta=[Vel; tet4; tet5; tet6];
                    cont=cont+1;
                    [T, Y] = ode15s(@funciontetafull,t,teta,options,Mas,Long,A,f,R);
                    j=size(Y);
                    h=j(1,2);
                    YY=Y(:,n+1:h);
                    [mm,mma,s]=funcionmaximoangulos(T,YY,n,np);
                    mx(cont,:)=mm(1,:);
                    mxx(cont,:)=mm(2,:);
                    mxxx(cont,:)=mm(3,:);
                    horis(cont)=f;
                    maxt(:,cont)=mma;
                    co=co+1;
                    disp('corriendo programa');
                end
            end
        end
    end
end
clc;
[vmax,mues]=max(mx);
[vmaxx,mues2]=max(mxx);
[vmaxxx,mues3]=max(mxxx);
Yvalor(rr,:)=vmax;
Yvalor2(rr,:)=vmaxx;
Yvalor3(rr,:)=vmaxxx;
frec(rr,:)=horis(mues);
frec2(rr,:)=horis(mues2);
frec3(rr,:)=horis(mues3);
end
for a=1:rr

```

---

```

    Af(a,:)=frec(a,:)-frec(1,:);
    Af2(a,:)=frec2(a,:)-frec2(1,:);
    Af3(a,:)=frec3(a,:)-frec3(1,:);
end
plot(horis,mx,'*- b',horis,mxx,'*- g',horis,mxxx,'*- r');grid
title('valores maximos');
xlabel('frecuencia');
ylabel('promedio de maximos,angulos');
figure
plot(horis,maxt,'*-');grid
title('valor maximo global');
xlabel('frecuencia');
ylabel('maximos absolutos, angulos');
figure
plot(T,Y(:,1),T,Y(:,2),T,Y(:,3)); grid
title('velocidades angulares');
xlabel('tiempo');
ylabel('velocidades');
figure
plot(T,Y(:,4),T,Y(:,5),T,Y(:,6)); grid
title('desplazamientos angulares');
xlabel('tiempo');
ylabel('angulos');
figure
plot(Rvar,Yvalor,'* b',Rvar,Yvalor2,'x g',Rvar,Yvalor3,'o r');grid
title('valores maximos contra variacion de R');
xlabel('amortiguamiento');
ylabel('maximos, angulos');
figure
plot(Rvar,frec,'*- b',Rvar,frec2,'x- g',Rvar,frec3,'o- r');grid
title('frecuencia de maximos contra variacion de R');
xlabel('amortiguamiento');
ylabel('frecuencia en maximos');
figure
plot(Rvar,Af,'* k',Rvar,Af2,'x k',Rvar,Af3,'o k');grid
title('Deltaf de maximos contra variacion de R');
xlabel('amortiguamiento');
ylabel('incremento de frecuencia');

```

Código del programa en matlab donde se definen las ecuaciones diferenciales del modelo del péndulo triple

```

%programa para obtener la funciones de la ecuacion diferencial
%de un pendulo triple para pequeñas oscilaciones
function dteta=funciontetafull(t,teta,Mas,Long,A,f,R)
m1=Mas(1);
m2=Mas(2);
m3=Mas(3);

```

---

```

L1=Long(1);
L2=Long(2);
L3=Long(3);
R1=R(1);
R2=R(2);
R3=R(3);
g=9.8;
w=2*pi*f;
%ff=[0; 0; 0; 0; 0; 0];
eta=A*(w^2)*cos(w*t);
teta1=teta(4);
teta2=teta(5);
teta3=teta(6);
uu=teta(1);
vv=teta(2);
ww=teta(3);
LM1=[(m1+m2+m3)*L1^2, (m2+m3)*L1*L2*cos(teta1-teta2), m3*L1*L3*cos(teta1-
teta3), R1+R2, -R2, 0];
%LM1=[(m1+m2+m3)*L1^2, (m2+m3)*L1*L2, m3*L1*L3, R1, 0, 0];
LM2=[(m2+m3)*L1*L2*cos(teta1-teta2), (m2+m3)*L2^2, m3*L2*L3*cos(teta2-teta3), -
R2, R2+R3, -R3];
%LM2=[(m2+m3)*L1*L2, (m2+m3)*L2^2, m3*L2*L3, 0, R2, 0];
LM3=[m3*L1*L3*cos(teta1-teta3), m3*L2*L3*cos(teta2-teta3), m3*L3^2, 0, -R3, R3];
%LM3=[m3*L1*L3, m3*L2*L3, m3*L3^2, 0, 0, R3];
LM4=[0 0 0 1 0 0];
LM5=[0 0 0 0 1 0];
LM6=[0 0 0 0 0 1];
ml1=(m2+m3)*L1*L2*sin(teta1-teta2)*vv^2+m3*L1*L3*sin(teta1-teta3)*ww^2;
%ml1=(m2+m3)*L1*L2*vv^2+m3*L1*L3*ww^2;
ml2=-(m2+m3)*L1*L2*sin(teta1-teta2)*uu^2+m3*L2*L3*sin(teta2-teta3)*ww^2;
%ml2=-(m2+m3)*L1*L2*uu^2+m3*L2*L3*ww^2;
ml3=-m3*L1*L3*sin(teta1-teta2)*uu^2-m3*L2*L3*sin(teta2-teta3)*vv^2;
%ml3=-m3*L1*L3*uu^2-m3*L2*L3*vv^2;
ml4=-uu;%se le cambia el signo porque al final la matriz ml al despejarla, poderla
multiplicar por -1
ml5=-vv;%como se indica en ABCD
ml6=-ww;
mln1=(m1+m2+m3)*L1*(g*sin(teta1)+eta*cos(teta1));
%mln1=(m1+m2+m3)*L1*(g*teta1+eta);
mln2=(m2+m3)*L2*(g*sin(teta2)+eta*cos(teta2));
%mln2=(m2+m3)*L2*(g*teta2+eta);
mln3=m3*L3*(g*sin(teta3)+eta*cos(teta3));
%mln3=m3*L3*(g*teta3+eta);
mln4=0;
mln5=0;
mln6=0;
LM=[LM1; LM2; LM3; LM4; LM5; LM6];

```

---

```

ml=[ml1;ml2;ml3;ml4;ml5;ml6];
mln=[mln1; mln2; mln3; mln4; mln5; mln6];
dteta=inv(LM)*(-ml-mln); %ABCD (nota anterior del -1)
%MLL=inv(LM)
%dteta=MLL*(-mln);

```

Código del programa donde se define la función que calcula los valores máximos de los ángulos y sus velocidades en la respuesta del péndulo triple

```

%funcion para obtener los valores maximos de un sistema de vectores funcion
%se obtiene la derivada y sobre ella se comparan puntos >0 y despues <0
%este programa entrega el vector de puntos maximos y la dimension del vector
%ma es el vector de maximos
%mma es el valor maximo absoluto
%s es el numero de valores maximos (dimensiones de ma)
%n es el numero de maximos que entrega (los ultimos n)
%Ivan de Jesus Rivas Cambero 07/Octubre/2008

```

```

function [mm,mma,s]=funcionmaximoangulos(T,Fa,n,np)
F=Fa'; %%%%%
num=n-1;
a=size(T);%%%%%%
b=a(1,1);
Ax=1e-5;
z=0;
der=zeros(np,1);
    for q=2:b
        der(:,q)=(F(:,q)-F(:,q-1))/(T(q)-T(q-1));
    end
s=0;
z=0;
for z=1:np
    s=0;
    for q=2:b
        if (der(z,q-1)>0) & (der(z,q)< 0)
            s=s+1;
            ma(z,s)=F(z,q-1);%Se comparan valores para determinar un maximo
            %detectando cambio de signo en la derivada (+ a -)
        else
            end
        end
    end
end
mma=max(F,[],2);
if n<=s
    z=0;
    for z=1:np
        c=0;
        for k=(s-num):s

```

```

        c=c+1;
        mm(z,c)=ma(z,k);
    end
    %mfp(z)=sum(mm(z,:),2)/n;
end
else
    fprintf('El numero de maximos que solicita es mayor a los existentes');
end
%mfp=mfp';

```

## Códigos de programas de simulación de modelos del robot y su control

Código del programa para resolver las ecuaciones diferenciales del modelo de la estructura robótica con extremidades agrupadas en dos extremidades flexibles.

```

%programa para resolver ec dif del modelo de extremidad robot
%caso pequeñas flexiones

```

```

clc;
clear all;
a=0.0129;
b=0.0017;
w=15;
A=0.4;
E=7e10;
l=(a*b^3)/12;
teta=pi/4;
%cons=[w; A; E; l; teta];
t=[0 .20];
y=[-A 0 A 0];
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-4 1e-4]);
[T, Y]=ode45(@yfuerzas, t, y, options, w, A, E, l, teta);
%[T, Y]=rungekuta4(t, y, w, A, E, l, teta);
plot(T, Y(:,1), '+', T, Y(:,3), '*');grid
figure
plot(T, Y);grid

```

A continuación se presenta el código de la función de fuerzas, es el archivo donde se encuentran las ecuaciones diferenciales del modelo de la estructura

---

```
function dys=yfuerzas(t, y, w, A, E, l, teta)
dys(1)=y(2);
dys(2)=((w*y(1))/(E*l))*(1/2-t*tan(teta)/(y(1)+y(3)+2*A));
dys(3)=y(4);
dys(4)=((w*y(3))/(E*l))*(1/2+t*tan(teta)/(y(1)+y(3)+2*A));
dys=[dys(1); dys(2); dys(3); dys(4)];
```

A continuación se presenta el código del programa de runge-kuta, un método alternativo a la función ODE45 que también se ha empleado en la solución de las ecuaciones diferenciales

```
function [T Y]=rungekuta4(tt,yi, w, A, E, l, teta)
N=100;
h=(tt(2)-tt(1))/N;
y(:,1)=yi;
t(1)=tt(1);
for i=1:N
    dteta1=yfuerzas(t(i),y(:,i), w, A, E, l, teta);
    k1=h*dteta1;
    dteta2=yfuerzas((t(i)+h/2),(y(:,i)+k1/2), w, A, E, l, teta);
    k2=h*dteta2;
    dteta3=yfuerzas((t(i)+h/2),(y(:,i)+k2/2), w, A, E, l, teta);
    k3=h*dteta3;
    dteta4=yfuerzas((t(i)+h),(y(:,i)+k3), w, A, E, l, teta);
    k4=h*dteta4;
    y(:,i+1)=y(:,i)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    t(i+1)=tt(1)+h*i;
end
T=t;
Y=y;
```

## Código del programa del controlador difuso

```

clc;
load senal.dat;
s=size(a);
ss=s(2);
at=0.128*10/ss;
v=0;
p=0;
q=0;
ref=0;
af=5;%limite para error
bf=15;%limite para derivada del error
cf=50;% limite para la salida
for h=1:ss
    q=p;
    p=v;
    vx=p+q;
    vy=vx+a(h);
    v=vy/3;
    bb(h)=v;
end
%%%%%%
cc=bb;
%%%%%%Calculo original
k=1;
G(1)=a(1)*at/2;
for z=2:ss-1
    x2(k)=(a(z)+a(k))*(10e-3)/2;
    G(z)=G(k)+x2(k);
    k=k+1;
    t(k)=k*10e-3;
end
%%%%%%Calculo promedio de 3 puntos
k=1;
G3(1)=bb(1)*at/2;
for z=2:ss-1
    x3(k)=(bb(z)+bb(k))*(10e-3)*100/2;
    G3(z)=(G3(k)*100+x3(k))/100;
    k=k+1;
end
%%%%%%Calculo promedio de 3 puntos y acotada
for h=1:ss
    c=bb(h)^2;
    if c<50
        bb(h)=0;
    end
end

```

```
end

k=1;
G4(1)=3*bb(1)*(10e-3);
Er(1)=ref-G4(1);
for z=2:ss-1
    x4(k)=3*bb(z)*(10e-3);%10e-3
    G4(z)=G4(k)+x4(k);
    %%%%%%
    Er(z)=ref-G4(z);
    e=Er(z);
    %controlador fuzzy
    Ed(z)=(Er(z)-Er(k))/(10e-3);
    de=Ed(z);
    k=k+1;
    %%%%%%fusificacion de error
    if e<=-af
        En=1;
        Ec=0;
        Ep=0;
    end
    if e>-af & e<=0
        En=-e/af;
        Ec=1-En;
        Ep=0;
    end
    if e>0 & e<af
        Ep=e/af;
        Ec=1-Ep;
        En=0;
    end
    if e>af
        Ep=1;
        Ec=0;
        En=0;
    end
    %%%%%%fusificacion de derivada del error
    if de<=-bf
        Dn=1;
        Dc=0;
        Dp=0;
    end
    if de>-bf & de<=0
        Dn=-de/bf;
        Dc=1-Dn;
        Dp=0;
    end
end
```

```
if de>0 & de<bf
    %Dc=(de-b)/(-b);
    Dp=de/bf;
    Dc=1-Dp;
    Dn=0;
end
if de>bf
    Dp=1;
    Dc=0;
    Dn=0;
end
%%%%%Implementacion de reglas difusas(encontrar minimo)
if En<=Dn
    Sn1=En;
else
    Sn1=Dn;
end
if En<=Dc
    Sn2=En;
else
    Sn2=Dc;
end
if Ec<=Dn
    Sn3=Ec;
else
    Sn3=Dn;
end
if Ec<=Dp
    Sp1=Ec;
else
    Sp1=Dp;
end
if Ep<=Dc
    Sp2=Ep;
else
    Sp2=Dc;
end
if Ep<=Dp
    Sp3=Ep;
else
    Sp3=Dp;
end
%%%%%%%%%%%%% (encontrar maximo)
if Sn1>=Sn2 & Sn1>=Sn3
    Sn=Sn1;
elseif Sn2>=Sn3
    Sn=Sn2;
```

```
else
    Sn=Sn3;
end
%%
if Sp1>=Sp2 & Sp1>=Sp3
    Sp=Sp1;
elseif Sp2>=Sp3
    Sp=Sp2;
else
    Sp=Sp3;
end
%% centro de gravedad
S(z)=Sp*cf+Sn*(-cf);

%%
end
plot(a);grid
title('velocidad angular')
hold on
plot(cc,'r');
plot(bb,'k');
legend('original','prom3','acotada');
hold off
figure
plot(t,G,'b');grid%
title('desplazamiento angular')
hold on
plot(t,G3,'r');
plot(t,G4,'k');
legend('original','prom3','acotada');
hold off
figure
plot(S);grid
```

## Código del programa del controlador PID

```

%prueba con controlador pid
clc;
load senal.dat;
s=size(a);
ss=s(2);
at=0.128*10/ss;
v=0;
p=0;
q=0;
ref=0;
kp=3.19;
ki=0.55;
kd=0.0825;
%xx=zeros(1,3);
for h=1:ss
    q=p;
    p=v;
    vx=p+q;
    vy=vx+a(h);
    v=vy/3;
    bb(h)=v;
    %%%%%%%%%
end
%%%%%%%%
cc=bb;
%%%%%%%%%Calculo original
k=1;
G(1)=a(1)*at/2;
for z=2:ss-1
    x2(k)=(a(z)+a(k))*(10e-3)/2;
    G(z)=G(k)+x2(k);
    k=k+1;
    t(k)=k*10e-3;
end
%%%%%%%%%Calculo promedio de 3 puntos
k=1;
G3(1)=bb(1)*at/2;
for z=2:ss-1
    x3(k)=(bb(z)+bb(k))*(10e-3)*100/2;
    G3(z)=(G3(k)*100+x3(k))/100;
    k=k+1;
end
%%%%%%%%%Calculo promedio de 3 puntos y acotada
for h=1:ss
    c=bb(h)^2;
    if c<50

```

```
        bb(h)=0;
    end
end

k=1;
G4(1)=bb(1)*(10e-3);
e(1)=ref-G4(1);
ei(1)=e(1)*10e-3;
Ep(1)=kp*e(1);
Ei(1)=0;
E(1)=Ep(1)+Ei(1);
for z=2:ss-1
    x4(k)=bb(z)*(20e-3);%10e-3
    G4(z)=G4(k)+x4(k);
    %%%%%%%%%
    e(z)=ref-G4(z);
    Ep(z)=kp*e(z);
    ei(z)=(kp/ki)*e(z)*10e-3;
    Ei(z)=Ei(k)+ei(z);
    Ed(z)=(kd*kp)*(e(z)-e(k))/(10e-3);
    E(z)=Ep(z)+Ei(z)+Ed(z);
    k=k+1;
end
plot(a);grid
title('velocidad angular')
hold on
plot(cc,'r');
plot(bb,'k');
legend('original','prom3','acotada');
hold off
figure
plot(G,'b');grid%
title('desplazamiento angular')
hold on
plot(G3,'r');
plot(G4,'k');
legend('original','prom3','acotada');
hold off
figure
plot(E);grid
```