



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

Área Académica de Matemáticas y Física

Estabilidad Termodinámica de un Agujero Negro Acoplado
con Electrodinámica no Lineal

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE :

LICENCIADA EN FÍSICA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

P R E S E N T A :

Ana Eunice Matias Reyes

DIRECTOR DE TESIS :

Dr. Luis A. López Suárez

Pachuca Hgo.
Noviembre de 2015





M. EN A. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO
 DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR
 PRESENTE.

Por este medio le comunico que el jurado asignado a la pasante de la Licenciatura en Física y Tecnología Avanzada, Ana Eunice Matías Reyes quien presenta el trabajo de titulación *"Estabilidad Termodinámica de un Agujero Negro Acoplado con Electrodinámica no Lineal"*, después de revisar el trabajo ha decidido autorizar la impresión del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación se anotan las firmas de conformidad de los integrantes del Jurado:

PRESIDENTE: DR. CARLOS ARTURO SOTO CAMPOS

SECRETARIA: DRA. VICTORIA E. CERÓN ÁNGELES

PRIMER VOCAL: DR. LUIS ALBERTO LÓPEZ SUÁREZ

SEGUNDO VOCAL: DR. LAO TSÉ LÓPEZ LOZANO

TERCER VOCAL: DR. OMAR PEDRAZA ORTEGA

ATENTAMENTE,
 "AMOR, ORDEN Y PROGRESO"
 Mineral de la Reforma, Hgo., a 26 de octubre de 2015.
 EL DIRECTOR

DR. ORLANDO ÁVILA POZOS



Ciudad del Conocimiento
 Carretera Pachuca - Tulancingo km. 4.5
 Colonia Carboneras
 Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C.P. 42184
 Tel. +52 771 7172000 exts 2231, Fax 2109
 direccion_icbi@uaeh.edu.mx

www.uaeh.edu.mx

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios, mi ayuda siempre.

Le doy gracias que me permitió crecer en la enseñanza del Apóstol de Jesucristo Dr. Samuel Joaquín F. cuyas palabras aún permanecen “...*la inquietud de trabajo, es demostrar que la fe no es distintivo de puritanismo, que el evangelio, no es etiqueta de mediocridad, mi inquietud es demostrar que la fe es la medida del bienestar, del progreso y del desarrollo en nuestro país y en cualquier parte del mundo*”, a quien siempre recordaré con especial cariño.

Agradezco al Apóstol de Jesucristo Naasón Joaquín por sus enseñanzas y consejos, quien me motivó no solo a terminar mis estudios sino también a continuar una preparación profesional.

A mis padres, Benito Matías Aquino y Jovita Reyes Mejía, por todo su apoyo.

A la familia Ramirez Hernández, al matrimonio de Cornelio Ramirez y Elena Hernández que me acogieron como un miembro más de su familia. Les agradezco todo su apoyo y su cariño y a sus hjas Edith Ramirez y Ana Lilia Ramirez. Mi otra familia.

A mi hermano Abner A. Matías, por haberme apoyado siempre en lo que necesitaba, por motivarme a ser mejor, por sus consejos. A mis hermanos Misael Matías, Jezer N. Matías e Isai Matías. Por su ayuda y cariño.

A mis asesor de tesis, el Dr. Luis A. López Suárez, por todo su apoyo, por la firmeza y la paciencia con que estuvo trabajando conmigo.

A mis profesores, el Dr. Omar Pedraza Ortega, el Dr. Rubén A. Martínez Avendaño, al Dr. Carlos A. Soto Campos, al Dr. Fernando Donado Pères, al Dr. Roberto Noriega Papaqui y a la Dra. Victoria E. Cerón Ángeles.

Índice general

Introducción	IV
Resumen	VII
1. Termodinámica	1
1.1. Capacidad calorífica	3
2. Soluciones de Agujeros Negros	5
2.1. Solución de Reissner-Nordström	5
2.2. Agujero Negro en electrodinámica no lineal	6
2.2.1. Solución de Ayón-Beato y Alberto García	8
3. Estabilidad Termodinámica	11
3.1. Método del punto de retorno	12
3.2. Ensamblés estadísticos	14
3.2.1. Ensamble microcanónico	14
3.2.2. Ensamble canónico	15
3.2.3. Ensamble gran canónico	15
4. Aplicación del método a las soluciones de agujero negro	16
4.1. Aplicación del método a la solución de Reissner-Nordström	17
4.2. Aplicación de método a la solución de Ayón-Beato y García	19
4.2.1. Ensamble microcanónico	20
4.2.2. Ensamble canónico	25
4.2.3. Ensamble Gran canónico	27

4.2.4. Caso extremo	28
4.3. Capacidad calorífica	30
5. Conclusiones	33
Bibliografía	34

Introducción

Los agujeros negros representan un tipo particular de las soluciones a las ecuaciones de Einstein en la relatividad general. Estas soluciones tienen la característica de tener singularidades en la métrica, estas se pueden deber al tipo de coordenadas que se usen para escribir dicha métrica. Cuando las singularidades no se deben a las coordenadas usadas se dice que la singularidad es real. La presencia de estas singularidades representa un problema en la teoría pues esto representaría un espacio-tiempo no regular. La existencia de una singularidad desnuda resultaría que en dicha singularidad la teoría no es válida y es imposible determinar que pasa ahí. Sin embargo, existen motivos para creer que las singularidades desnudas no existen en la naturaleza por lo que se llama a la formulación de la hipótesis de la censura cósmica, es decir, las singularidades que se produzcan en un colapso gravitacional siempre estarán dentro de un horizonte de eventos.

Existen trabajos en los que se han propuesto modelos de soluciones que eliminan el problema de las singularidades, por ejemplo los agujeros negros de Bardeen en electrodinámica no lineal [1], estos representan un cuerpo con carga magnética. La electrodinámica no lineal ha sido utilizada como un intento de remover dichas singularidades en agujeros negros cargados. En [2] Ayon-Beato y García presentan una solución de un agujero negro que acopla electrodinámica no lineal con gravedad, dicha solución para ciertos valores de los parámetros representa un agujero negro libre de singularidades y para otros representa un espacio-tiempo regular.

Dado que el tiempo de evaporación de un agujero negro está determinado por $G^2 M^3 / \hbar c^4$ o, aproximadamente, $10^{-17} M^3$ segundos, si la masa M se mide en kilogramos. Un agujero negro de una masa comparable a la del sol se evaporaría, según esta fórmula, en ¡ 10^{67} ! segundos, pero en el caso de micro agujeros negros (supuestamente obtenidos en los aceleradores de partículas) su tiempo de vida se estima en microsegundos.

Estudiar la estabilidad de los agujeros negros es importante ya que con ello se puede establecer la posibilidad que dichos sistemas puedan existir en la naturaleza o si su formación o configuración no es probable. También se establecería cuales son sus características para que los agujeros negros se formen.

Recordemos que un sistema se puede estudiar la estabilidad mecánica y la estabilidad termodinámica, en sistemas extensivos la estabilidad termodinámica local está relacionada a la estabilidad dinámica.

El estudio de la estabilidad termodinámica de un sistema se hace a través de la maximización de la entropía mediante la hessiana. Estudiando los agujeros negros como un sistema termodinámico se ha encontrado que estos no pueden ser considerados como un sistema ordinario, debido a que la entropía (proporcional al área) no es una variable extensiva, y además algunos agujeros negros tienen capacidades caloríficas negativas, lo cual contradice la termodinámica. Por ello los agujeros negros representan sistemas termodinámicos no extensivos; el estudio termodinámico de estos sistemas debe hacerse de una manera diferente a la que se tiene en termodinámica ordinaria. Por lo cual el método antes mencionado no puede ser aplicado a estos sistemas.

Existen otros métodos para estudiar la estabilidad termodinámica, por ejemplo el método del punto de retorno [3], el cual se basa en el principio de máxima entropía. Este método hace un estudio a través de la función extendida de Massieu (potencial termodinámico) para describir los estados de equilibrio del sistema. El método del punto de retorno puede ser aplicado a sistemas no extensivos (no invoca la aditividad de la entropía).

Este método es un método gráfico que, mas que estudiar la estabilidad de un sistema determina si existe alguna inestabilidad mediante el ploteo de las variables conjugadas, para cualquier teoría electrodinámica no lineal. Si en la gráfica de las variables conjugadas se muestra una tangente vertical o una bifurcación significa que hay un cambio de estabilidad. Además este método establece cotas de estabilidad para el sistema, las asíntotas verticales son cotas de estabilidad.

El método del punto de retorno se ha aplicado para el estudio de soluciones tipo agujero negro, por ejemplo para el agujero negro de Kerr y el agujero negro de Bardeen en electrodinámica no lineal.

En este trabajo se empleará este método para estudiar la estabilidad termodinámica de la solución de Reissner-Nordstrom en el ensamble microcanónico (sistema aislado). Este

mismo estudio se realizará para la solución de Ayón-Beato y García que tiene acoplada electrodinámica no lineal con gravedad; el estudio se hará en los ensambles: microcanónico, canónico y gran canónico.

Las dos soluciones a las cuales se aplicará el método representan al mismo objeto pero en distintas teorías. Es interés de hacer este estudio es para determinar el efecto que se produce en la estabilidad termodinámica al eliminar la singularidad en Reissner-Nordström. Para la solución de Ayón-Beato y García se calcula la capacidad calorífica, algunos autores proponen que las divergencias con un cambio de signo están relacionadas con transiciones de fase. El método del punto de retorno determinará si existe alguna inestabilidad.

Resumen

En este trabajo se presentará un estudio de la estabilidad termodinámica por medio del método del punto de retorno, éste se aplicará a dos soluciones que representan el mismo cuerpo pero en distintas teorías. En el caso del agujero negro de Reissner-Nordstöm, se realiza una revisión de dicha solución por medio del método de punto de retorno dado que ya se ha realizado dicho estudio pero es importante mencionarlo de manera introductoria. En el caso de agujero negro acoplado con electrodinámica no lineal el estudio que se realiza es la aportación de la tesis, dado que no se ha realizado este tipo de estudio a la solución (Ayón-Beato y García) que se menciona en la tesis. En el capítulo uno se hablará brevemente de la termodinámica en agujeros negros, se explicará como se puede calcular la temperatura y la entropía de estos sistemas, así mismo la capacidad calorífica. En el capítulo dos se revisarán dos soluciones. El agujero de Reissner-Nordstöm es una solución que un cuerpo estático que tiene masa y carga eléctrica. La solución que propusieron Ayón-Beato y García es una solución estática con masa y carga de teoría de electrodinámica no lineal, libre de singularidades. En el capítulo tres se muestra el método del punto de retorno que permite hacer un análisis de la estabilidad termodinámica a través de un estudio gráfico. En el capítulo cuatro se mostrará la aplicación de método a la solución de R-N en el ensamble microcanónico. Para la solución de Ayón-Beato y García se hará en los ensambles: microcanónico, canónico y gran canónico, y además su capacidad calorífica. Finalmente se darán unas breves líneas para describir las conclusiones a la que se llegaron después de aplicar el método a ambas.

Capítulo 1

Termodinámica

De termodinámica sabemos que el estado de un sistema puede ser estudiado mediante la ecuación de estado que lo describe, para los agujeros negros ésta existe. Estudiando los agujeros negros como un sistema termodinámico aplicando los conceptos de termodinámica y física estadística tales como temperatura, entropía, etc, y dado que se pueden considerar los parámetros que pueden caracterizarlos como variables termodinámicas, por ejemplo la masa, es posible obtener más información acerca de estos. Así mediante un estudio termodinámico se pueden determinar diversas propiedades o limitaciones para el agujero que se esté estudiando, por ejemplo a través de la entropía. Se usará el sistema de unidades geometrizadas que concuerdan con c , G y \hbar son iguales a uno. Para obtener los valores de masa y carga que involucren un valor específico de coordenadas (unidades) se utilizan las integrales de Komar.

En 1973 Larry Smarr [4] formuló una ecuación en la que se relacionan las variables que pueden caracterizar un agujero negro. Considerando un agujero negro estacionario de masa M , momento angular J y área superficial A , es perturbado mediante un proceso cuasi estático, la fórmula de Smarr en su fórmula diferencial dada como la primera ley de los agujeros negros está dada por

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega_H dJ, \quad (1.1)$$

Al término κ se conoce la gravedad superficial, esta es la fuerza necesaria para que un objeto permanezca en el horizonte de eventos del agujero negro sin que éste caiga dentro

o escape, visto por un observador en el infinito; Ω_H es la velocidad angular del agujero negro. La entropía es una cantidad que permite obtener información de las variaciones que se pueden hacer a un sistema, pues sabemos que la entropía de un sistema nunca puede decrecer. En un agujero negro está definida a través del área como

$$ds = \frac{dA}{4\pi}, \quad (1.2)$$

La ecuación (1.1) debe ser modificada si se considera que el agujero tiene una carga eléctrica Q_E , el agujero que considera esta carga es el agujero de Kerr-Newman [5], la primera ley está dada como

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega_H dJ + \Phi_E dQ_E \quad (1.3)$$

donde Φ_E es el potencial eléctrico

$$\Phi_E \equiv \frac{r_+ Q_E}{r_+^2 + a^2} \quad (1.4)$$

El potencial eléctrico Φ_E está evaluado en el horizonte de eventos, a se define como $a = J/M$, r_+ es el radio del horizonte de eventos. Cabe mencionar que los parámetros de la ecuación 1.3, son adimensionales, por ejemplo el parámetro M está relacionado con la masa, pero su comportamiento de M corresponde el comportamiento de la masa del agujero negro, de la misma forma para todos los parámetros que se utilizarán.

El agujero de Kerr-Newman es para un cuerpo con masa M , momento angular J y carga eléctrica Q_E , esta es una solución más general, de esta solución se puede obtener la solución de Kerr, de Schwarzschild o Reissner-Nordström, mas adelante se hablará mas de esta solución.

Si ahora se considera que el agujero también tiene una carga magnética Q_M , esta carga se tiene sólo cuando el agujero está rotando y se puede ver el objeto que genera un potencial magnético Φ_M ; la fórmula (1.3) se modifica apareciendo un término Q_M

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega_H dJ + \Phi_E dQ_E + \Phi_M dQ_M \quad (1.5)$$

Si se consideran procesos cuasi estáticos para hacer variaciones en M , J , Q_E y Q_M , entonces se tiene una modificación a la primera ley de los agujeros negros.

Se puede ver que cuanto más general se pretenda volver la solución de un agujero negro es necesario ir agregando términos en la fórmula de Smarr.

Para un agujero negro estático y con simetría esférica, la forma en la que se calcula la gravedad superficial κ es

$$\kappa = \frac{1}{2} \partial_r g_{tt} |_{r=r_+} \quad (1.6)$$

Donde g_{tt} es la primera entrada de la métrica y r_+ es radio del horizonte de eventos.

Por ejemplo, para el agujero negro de Schwarzschild [6] que es una objeto de masa M estático con simetría esférica tiene una gravedad superficial

$$\kappa = \frac{1}{M} \quad (1.7)$$

La temperatura para un agujero negro fue definida por Hawking a través de diversos cálculos, él determinó que la temperatura está en función de la gravedad superficial, dado que κ es proporcional a T , entonces la temperatura de un agujero negro está bien definida; κ es diferente para cada agujero ya que cada uno tiene un horizonte de eventos distinto.

$$T = \frac{1}{2\pi} \kappa \quad (1.8)$$

La fórmula 1.3 tiene comprendida los análogos a las leyes de la termodinámica, es decir, la ley cero establece que la gravedad superficial de un agujero negro estacionario es uniforme sobre el horizonte de eventos, mientras que la primera ley establece que los cambios en la masa, carga y momento angular están determinados por esta ecuación. La segunda ley menciona que el área superficial de un agujero negro nunca puede decrecer: $\delta A \geq 0$. El análogo de la tercera ley establece que la gravedad superficial de un agujero negro nunca se puede reducir a cero en un tiempo finito.

Todas ellas de acuerdo con la ley de la conservación de la energía.

1.1. Capacidad calorífica

En termodinámica una de las cantidades mas importantes que se usa para obtener información acerca de las propiedades de un sistema es la capacidad calorífica. En general en un proceso en el cual se aumenta la temperatura es a alguna de las variables termodinámicas

como constante. En un agujero negro también se le puede asociar una capacidad calorífica [7], en este caso se tiene

$$C_x = \frac{\kappa}{4} \left(\frac{dA}{d\kappa} \right)_x \quad (1.9)$$

donde x es la variable que se mantiene constante, para este cálculo los resultados son evaluados en el horizonte de eventos.

La capacidad calorífica con la carga eléctrica constante puede calcularse como

$$C_Q = \frac{\kappa}{4} \left(\frac{dA}{d\kappa} \right)_Q, \quad (1.10)$$

la capacidad calorífica para Reissner es

$$C_Q = -2\pi r_+^2 \frac{r_+^2 - Q^2}{r_+^2 - 3Q^2} \quad (1.11)$$

donde r_+ es el horizonte de eventos de RN.

Capítulo 2

Soluciones de Agujeros Negros

Se hará una revisión breve de dos soluciones de las ecuaciones de Einstein, la primera es el agujero negro de Reissner-Nordström, el cual representa un agujero negro, caracterizado por un objeto de masa M y carga eléctrica Q , con simetría esférica. La solución de Eloy Ayón-Beato y Alberto García [2] representa un agujero negro con masa y carga eléctrica en electrodinámica no lineal, el cual cumple que para distancias muy grandes tiene un comportamiento parecido al de Reissner-Nordström. Ambas soluciones son estáticas.

2.1. Solución de Reissner-Nordström

En 1916 Reissner y Nordstrom en 1918 descubrieron de manera independiente una solución de las ecuaciones de Einstein. Esta solución considera un cuerpo en reposo de masa M que tiene una carga eléctrica Q , este cuerpo tiene simetría esférica.

En este caso la ecuación que se debe resolver es la ecuación de Einstein general [5]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

pues debido a la presencia de la carga eléctrica Q se genera un campo eléctrico E y se tiene un espacio electro-vacío, es decir que el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ es diferente de cero.

la métrica en coordenadas esféricas está dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.2)$$

Nótese que el término de la métrica correspondiente a dt^2 es el inverso del término correspondiente a dr^2 . En esta solución existe una singularidad en $r = 0$, este es un punto donde no es posible tener información pues el elemento ds^2 diverge. Para obtener el horizonte de eventos se toma que el elemento $g_{tt} = 0$, esto provoca que en la coordenada radial el elemento ds^2 diverja, de modo que se tiene la ecuación para r

$$1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0 \quad (2.3)$$

las raíces de r son

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (2.4)$$

considerando que las coordenadas son esféricas entonces r_{\pm} son esferas. Si $|Q| > M$ esto nos daría un radio imaginario por lo tanto no habría horizonte, esto no tiene significado físico, además esto nos diría que la singularidad está descubierta pero por la censura cósmica las singularidades no pueden estar descubiertas, es decir, debe existir un horizonte de eventos que las cubra. Veámos que cuando $|Q| \leq M$ el radio r es real, esta condición nos dice que el parámetro de la carga no puede ser mayor que M . Cuando $|Q| = M$ es un caso extremo de la solución, es decir cuando $r_+ = r_-$.

El horizonte de eventos está dado por r_+

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (2.5)$$

el término r_- es un radio menor que r_+ por lo tanto este se encuentra dentro del horizonte de eventos y no se puede observar.

Se sabe que Reissner-Nordström es una solución a las ecuaciones de Einstein-Maxwell [8] que es estática con simetría esférica y asintóticamente plana.

2.2. Agujero Negro en electrodinámica no lineal

La dinámica de un objeto cuando se considera un espacio-tiempo curvo está determinado a través de las ecuaciones de Einstein (2.1), las cuales están altamente acopladas, en el caso cuando hay simetrías estas se reducen.

De las soluciones a las ecuaciones de Einstein que representan agujeros negros más conocidas se observa que todas tienen singularidades en la métrica, como es en el caso del

agujero negro de Schwarzschild que tiene una singularidad cuando la coordenada radial y el parámetro de la masa tienen el mismo valor. Esta singularidad se debe a las coordenadas utilizadas para escribir la métrica, cuando $r = 0$ se tiene una singularidad real, pues esta se mantiene. Se han hecho trabajos para buscar nuevas soluciones de agujeros negros que no contengan este problema de las singularidades.

En 1934 Born e Infeld [9] propusieron una teoría electromagnética no lineal en la que se cambiaba el lagrangiano de Maxwell por uno más general en donde para ciertos límites se regresa a la teoría electrodinámica lineal de Maxwell. La electrodinámica no lineal considera que pueden darse efectos cuánticos cuando la magnitud del campo eléctrico o magnético supera cierto límite.

Usando el principio de mínima acción en electrodinámica no lineal e incorporando ley de gravitación de Einstein, se tiene una acción más general que puede tomar en cuenta los efectos cuánticos del campo gravitacional y el campo electromagnético.

Existen soluciones propuestas que tienen como característica el hecho de que no contienen singularidades reales, es decir las singularidades que puedan llegar a tener se debe a las coordenadas usadas. Un ejemplo de estas soluciones son los “agujeros negros de Bardeen”, estos son agujeros con carga magnética en electrodinámica no lineal; estas soluciones no han sido el único intento de eliminar las singularidades.

Consideremos la acción de Einstein-Hilbert

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int_v R \sqrt{-g} d^4x \quad (2.6)$$

donde R es el escalar de curvatura y g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$. Variando la acción de E-H obtenemos las ecuaciones en vacío

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (2.7)$$

Se puede definir una acción electromagnética de Einstein-Maxwell en un espacio, de la forma

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} (R + F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^4x \quad (2.8)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor electromagnético; se define la cantidad $F = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, podemos ver que la acción es una función lineal de F . La acción en (2.8) es la acción para Reissner-Nordström.

La electrodinámica no lineal en gravedad es que la acción no está en términos de una función lineal $L(F)$. Se propone una acción general que acopla electrodinámica no lineal con gravitación como

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int (R - L(F)) \sqrt{-g} d^4x \quad (2.9)$$

la función $L(F)$ debe de cumplir [7] las ecuaciones (2.1) y además

$$\nabla_\mu (L_F F^{\mu\nu}) = 0 \quad (2.10)$$

$$\nabla_\mu (F^{*\mu\nu}) = 0 \quad (2.11)$$

donde L_F es la derivada de L respecto de F y $F^{*\mu\nu}$ es el dual de $F^{\mu\nu}$. En electrodinámica no lineal la forma del tensor electromagnético es

$$T_{\mu\nu} = -2L_F F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L \quad (2.12)$$

el tensor de energía momento es esta teoría puede escribirse como

$$T_\nu^\mu = \frac{1}{2} \text{diag}(L + 2f_e L_F, L + 2f_e L_F, L - 2f_m L_F, L - 2f_m L_F), \quad (2.13)$$

donde

$$f_e \equiv 2 Q_e^2 L_F^{-2} r^{-4}, \quad f_m = 2 Q_m^2 r^{-4} \quad (2.14)$$

los términos Q_e y Q_m son la carga eléctrica y magnética, respectivamente.

2.2.1. Solución de Ayón-Beato y Alberto García

Una de las aplicaciones de la electrodinámica no lineal en agujeros negros es que puede dar soluciones libres de singularidades o visto de otro modo puede evitar las singularidades asociadas para agujeros negros cargados, es decir que solo podrán haber singularidades debido a las coordenadas.

La solución de Ayón-Beato y García es solución de las ecuaciones de Einstein acopladas con electrodinámica no lineal, esta solución no tiene singularidades. En esta solución se considera un objeto estático, de masa m y con carga eléctrica q , esta solución tiene simetría esférica. La métrica está en coordenadas esféricas, está dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mr^2}{(r^2 + q^2)^{3/2}} + \frac{r^2 q^2}{(r^2 + q^2)^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2mr^2}{(r^2 + q^2)^{3/2}} + \frac{r^2 q^2}{(r^2 + q^2)^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.15)$$

notemos que cuando $r = 0$ no hay singularidades en la métrica, ningún término diverge. Veamos que Reissner-Nordström describe el mismo cuerpo, en este caso al introducir electrodinámica no lineal quita el problema de la singularidad que se tenía. El campo eléctrico asociado debido a la carga eléctrica q es

$$E = qr^4 \left(\frac{r^2 - 5q^5}{(r^2 + q^2)^4} + \frac{15}{2} \frac{m}{(r^2 + q^2)^{7/2}} \right) \quad (2.16)$$

se espera que para r grande la solución de Ayón-Beato y García se comporte como Reissner-Nordström (2.2). Para r grande las ecuaciones (2.15) y (2.16) tienen la siguiente forma

$$-g_{tt} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad E = \frac{q}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right),$$

la solución tiene el comportamiento asintótico esperado.

Para determinar el radio del horizonte de eventos se debe resolver la ecuación $g_{tt} = 0$ para r

$$1 - \frac{2mr^2}{(r^2 + q^2)^{3/2}} + \frac{r^2q^2}{(r^2 + q^2)^2} = 0 \quad (2.17)$$

Debido a que se quiere que la forma de la métrica sea

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

las raíces de la ecuación (2.17) son

$$r_{\pm} = |q| \left(\left[\frac{1}{4s} + \frac{\sqrt{f(s)}}{12s} \pm \frac{\sqrt{6}}{12s} \left(\frac{9}{2} - 12s^2 - \frac{f(s)}{6} - \frac{9(12s^2 - 1)}{\sqrt{f(s)}} \right)^{1/2} \right]^2 - 1 \right)^{1/2} \quad (2.18)$$

donde

$$f(s) = 6 \left(\frac{3}{2} - 4s^2 + sg(s)^{1/3} - \frac{4s(11s^2 - 3)}{g(s)^{1/3}} \right)$$

$$g(s) = 4 \left(9s + 74s^3 + \sqrt{27(400s^6 - 112s^4 + 47s^2 - 4)} \right)$$

se toma el radio del horizonte con el signo positivo pues $r_+ > r_-$. Esta solución tiene la característica que para ciertos valores de masa y carga eléctrica se comporta como agujero negro; haciendo los siguientes cambios $x = r/|q|$ y $s = |q|/2m$ en la ecuación (2.17), los cuales tienen valores críticos reales $x_c \approx 1.58$ y $s_c \approx 0.317$, para estos valores hay un mínimo en $-g_{tt}$. En el caso cuando $s < s_c$ el mínimo es negativo, para $s = s_c$ el mínimo es cero y cuando $s > s_c$ el mínimo es positivo.

Observemos entonces que para $s \leq s_c$ existe una singularidad de coordenadas, el horizonte de eventos y, por tanto (2.15) representa un agujero negro, para $s > s_c$ (2.15) representa un espacio regular.

En el caso extremo $r_+ = r_-$ tenemos $|q| = 2s_c m$, para este caso el horizonte de eventos es

$$r_e = 2s_c 1.58m \quad (2.19)$$

Recordando que la solución de Ayón-Beato y Garía es solución de la acción con la función \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = P \frac{(1 - 8\sqrt{-2q^2 P} - 6q^2 P)}{(1 + \sqrt{-2q^2 P})^4} - \frac{3}{4q^2 s} \frac{(-2q^2 P)^{5/4} (3 - 2\sqrt{-2q^2 P})}{(1 + \sqrt{-2q^2 P})^{7/2}}, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{1}{16\pi} R - \frac{1}{4\pi} \mathcal{L} \right) \quad (2.21)$$

similar a la acción en (2.9). \mathcal{L} está en términos del invariante negativo $P \equiv \frac{1}{4} P_{\mu\nu} P^{\mu\nu} = (\mathcal{L}_F)^2 F$ y del tensor de campo electromagnético no lineal $P_{\mu\nu} = \mathcal{L}_F F_{\mu\nu}$. El invariante P tiene el valor

$$P = -\frac{q^2}{2r^4}. \quad (2.22)$$

Capítulo 3

Estabilidad Termodinámica

En un sistema se puede estudiar la estabilidad mecánica y la estabilidad termodinámica, a través de la estabilidad termodinámica se puede tener cierta información para conocer si un sistema puede tener estabilidad mecánica. Existen varios métodos para determinar la estabilidad termodinámica de ciertos sistemas, por ejemplo mediante el estudio de los potenciales termodinámicos.

En termodinámica la estabilidad está determinada a través de la matriz Hessiana de la entropía, para que haya estabilidad se requiere que todos los eigenvalores de la Hessiana sean negativos, de esta manera se asegura un máximo de la entropía. Si alguno de los eigenvalores de la Hessiana fuera positivo esto implicaría que el sistema es inestable. Cuando se aplica este criterio a los agujeros negros se encuentra que el método falla para el agujero de Schwarzschild, como se sabe esta es una solución estable en el ensamble microcanónico, por ello se esperaría que sus eigenvalores sean todos negativos; este problema se deriva del hecho de que la entropía no es aditiva en estos sistemas, por tanto los agujeros negros constituyen sistemas no extensivos, es decir que no pueden ser considerados como subsistemas idénticos. Para sistemas termodinámicos no extensivos se aplica el método del punto de retorno [3].

Los agujeros negros son sistemas termodinámicos que no pueden ser considerados como sistemas extensivos debido a que el área no es una variable extensiva, recordemos que la entropía es proporcional al área, así que la entropía no es una variable extensiva para estos sistemas.

El método del punto de retorno se puede utilizar para estudiar la estabilidad de los agujeros negros (sistemas no extensivos), está basado en el principio de máxima entropía, éste principio establece que la estabilidad se tiene cuando la entropía es máxima. Sabemos que en física estadística existen ensambles de sistemas termodinámicos, por lo tanto el método se puede aplicar a estos, puesto que un sistema puede ser estable en un ensamble e inestable en otro.

3.1. Método del punto de retorno

El método del punto de retorno hace un estudio de la estabilidad de un sistema a través de un potencial termodinámico llamado función extendida de Massieu Ψ , este potencial describe los estados de equilibrio del sistema termodinámico. Este método bajo ciertas suposiciones otorga información del comportamiento de la función extendida de Massieu Ψ y de la estabilidad usando solo ecuaciones de estado de equilibrio. Para esta función no es necesario conocer su forma explícita sino que basta con imponer condiciones que ésta deba de cumplir.

Se muestra el método en un ensamble microcanónico (sistema aislado), en este caso la función extendida de Massieu coincide con la entropía, con las variables termodinámicas $\{\mu^i\}$, haciendo variaciones infinitesimales de Ψ , se obtiene

$$d\Psi = \beta_i d\mu^i, \quad (3.1)$$

con las correspondientes variables conjugadas $\{\beta^i\}$

$$\beta^i = \frac{\partial \Psi}{\partial \mu^i}. \quad (3.2)$$

La maximización de la entropía da información de la estabilidad, esto es mediante variaciones de segundo orden de Ψ . Consideremos tales variaciones para determinar los puntos en donde se tienen los estados de equilibrio de Ψ , los correspondientes eigenvalores λ_i están dados como

$$\lambda = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mu^2} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mu} \right)^{-1}, \quad (3.3)$$

existirá un cambio de estabilidad cuando uno o varios eigenvalores llegue a ser cero y cambie de signo, esto es $\lambda_i > 0$.

El diagrama conjugado $(\mu^i, \beta_i(\mu^i))$ a lo largo de las series de equilibrio tendrá una tangente vertical en el punto donde exista este cambio de signo, a este punto se le llama punto de retorno (figura 4.1).

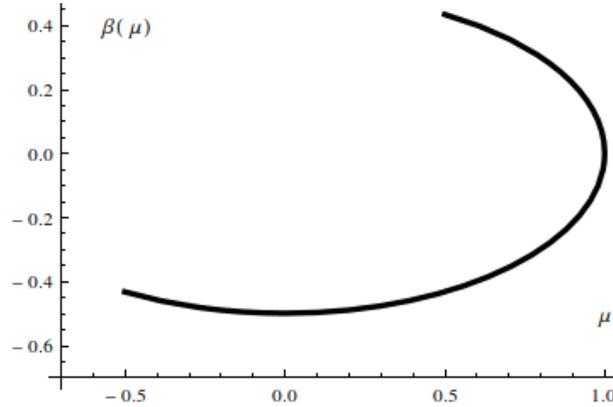


Figura 3.1: Diagrama conjugado $(\mu, \beta(\mu))$.

El método nos permite determinar la existencia de inestabilidades (el sistema es más inestable) más que la de estabilidades (sistema más estable). La existencia de un punto de retorno significa que existe al menos un modo inestable. El punto de retorno se tiene cuando hay un cambio de la pendiente positiva a negativa pero no de una negativa a positiva, pues para este caso no se tiene una tangente vertical en el diagrama conjugado. Cerca de un punto de retorno en el diagrama conjugado, los puntos en donde la pendiente es negativa siempre son más inestables, mientras que los que tienen pendiente positiva no se pueden considerar como totalmente estables, solo se puede decir que estos son más estables que los de pendiente negativa. Podemos ver que este método nos ayuda a determinar inestabilidades en el sistema más que estabilidades. Por lo tanto, la existencia de puntos de retorno indica modos de inestabilidad.

Puede ser que haya eigenvalores que puedan estar cambiando de signo pero que esto no sea mostrado en el diagrama conjugado (figura 4.1), se ha demostrado que esto sólo ocurre en una bifurcación, es decir cuando hay otra secuencia de equilibrio que se cruza en un punto. De manera que, no solo los puntos de retorno indican cambios de estabilidad sino que también la existencia de bifurcaciones puede provocar esto.

Las asíntotas verticales que puedan aparecer son fronteras de secuencias de equilibrio, con

ellas no se puede hablar de cambios de estabilidad ni tampoco decir algo sobre si puede existir equilibrio más allá de una asíntota vertical. Si se encontrara una serie de equilibrio que sea estable después de la asíntota, esta pertenecerá a otra serie de equilibrio.

El método se mostró con un sistema aislado que no interactúa este es un ensamble microcanónico pero puede ser mostrados a otros ensambles.

3.2. Ensamblés estadísticos

Un ensamble estadístico es un conjunto de partículas que están regidas por una regla. En física estadística se consideran tres ensambles [10]: microcanónico, canónico y gran canónico. Consideremos un agujero negro con una masa M y carga eléctrica Q , en lo siguiente se hace una revisión de este agujero para los ensambles anteriores. La función extendida de Massieu será distinta para cada ensamble que se considere.

3.2.1. Ensamble microcanónico

El ensamble microcanónico considera un sistema se encuentra aislado, por lo tanto este no interactúa con sus alrededores. En este caso la función extendida de Massieu Ψ del sistema termodinámico coincide con la entropía.

Para un agujero negro sabemos que la entropía S es proporcional al área A

$$S = \frac{1}{4\pi}A, \quad (3.4)$$

combinando las ecs (3.4) y (1.3) se tiene la primera ley de agujeros negros cargados

$$d\Psi_1 = dS = \beta_M dM - \beta_Q dQ, \quad (3.5)$$

para este sistema observamos que las variables termodinámicas son el conjunto $\{\mu^i\} = \{M, Q\}$, que son la masa y la carga eléctrica. Las correspondientes variables conjugadas $\{\beta^i\} = \{\beta_M, -\beta_Q\}$, con $\beta_M = 1/T$ y $\beta_Q = \beta_M \Phi$, donde T es la temperatura y Φ el potencial eléctrico.

Los eigenvalores correspondientes a las variables termodinámicas son

$$\lambda_M = \left(\frac{\partial M}{\partial \beta_M} \right)_Q \quad (3.6)$$

$$\lambda_Q = - \left(\frac{\partial Q}{\partial \beta_Q} \right)_M \quad (3.7)$$

3.2.2. Ensemble canónico

En este ensamble el sistema puede intercambiar calor con los alrededores. La función extendida de Massieu se determina a través de una transformada de Legendre de la función en el ensamble anterior.

$$d\Psi_2 = dS - d(\beta_M M) = -M d\beta_M - \beta_Q dQ, \quad (3.8)$$

ahora las variables termodinámicas son el conjunto $\{\mu^i\} = \{\beta_M, Q\}$, que es el inverso de la temperatura y la carga eléctrica. Las variables conjugadas $\{\beta^i\} = \{-M, -\beta_Q\}$. Los eigenvalores correspondientes son

$$\lambda_{\beta_M} = - \left(\frac{\partial \beta_M}{\partial M} \right)_Q \quad (3.9)$$

$$\lambda_Q = - \left(\frac{\partial Q}{\partial \beta_Q} \right)_{\beta_M} \quad (3.10)$$

3.2.3. Ensemble gran canónico

En los ensambles anteriores se consideró un sistema aislado o en contacto térmico, el ensamble gran canónico se refiere a un sistema que está en contacto térmico y además puede estar intercambiando partículas con sus alrededores.

La variación de la función extendida de Massieu, siguiendo el proceso anterior

$$d\Psi_3 = d\Psi_2 - d(\beta_Q Q) = -M d\beta_M + Q d\beta_Q, \quad (3.11)$$

en este caso las variables termodinámicas son $\{\mu^i\} = \{\beta_M, \beta_Q\}$ con sus correspondientes variables conjugadas $\{\beta^i\} = \{-M, Q\}$

Los eigenvalores son

$$\lambda_{\beta_M} = - \left(\frac{\partial \beta_M}{\partial M} \right)_{\beta_Q} \quad (3.12)$$

$$\lambda_{\beta_Q} = \left(\frac{\partial \beta_Q}{\partial Q} \right)_{\beta_M} \quad (3.13)$$

Capítulo 4

Aplicación del método a las soluciones de agujero negro

En el capítulo anterior se estudió el método del punto de retorno para agujeros negros en un sistema aislado, este método no está limitado a ser aplicado unicamente a este ensamble, sino que puede ser aplicado a otros ensambles, y además se puede aplicar en electrodinámica o eletrodinámica no lineal. Por esta razón este método ha sido utilizado para el estudio de la estabilidad de varias soluciones, por ejemplo para el agujero negro de Born-Infeld [7], la cual es una solución en electrodinámica no lineal.

En el capítulo 2 se mencionó que las soluciones presentadas representan al mismo cuerpo pero descrito en diferentes teorías. En el presente trabajo se aplica el método a ambas soluciones, esto se hace para distintos ensambles, esto es para el caso de la solución de Ayón-Beato y García. Se realizará un análisis para comparar la estabilidad de estos sistemas, pues aunque ambas soluciones representan al mismo objeto, una solución tiene la característica de no tener singularidades y se desea conocer si la estabilidad termodinámica del agujero negro es afectada.

4.1. Aplicación del método a la solución de Reissner-Nordström

Consideremos un ensamble microcanónico para el agujero negro de Reissner-Nordström [11], para el cual se tiene el conjunto de variables termodinámicas $\{\mu^i\} = \{M, Q\}$ y sus correspondientes variables conjugadas $\{\beta^i\} = \{\beta(M), \beta(Q)\}$. En este caso la correspondiente función extendida de Massieu coincide con la entropía [10], dada como

$$d\Psi_1 = dS = \beta(M) - \beta(M)\Phi dQ$$

de aquí se obtiene la variable conjugada $\beta(M) = \frac{1}{T}$, que es el inverso de la temperatura, esto se ve cuando uno compara esta ecuación con las ecuaciones (1.3) y (3.4). Para determinar la forma de $\beta(M)$ utilizamos la ecuación (1.6) para obtener la gravedad superficial

$$\kappa = \frac{1}{2} \partial_r g_{tt} |_{r=r_+},$$

recordemos que el horizonte de eventos para este agujero está dado como

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2},$$

de manera que la temperatura del agujero de Reissner-Nordström está dado por

$$T(M) = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}. \quad (4.1)$$

Para ver el comportamiento de la temperatura como función de la masa M a $Q = cte$ veamos la figura 4.1. La temperatura crece conforme se aumenta la masa, llegando a un máximo en el punto M_c , después de este punto la temperatura comienza a disminuir.

La variable conjugada $\beta(M)$ está dada como

$$\beta(M) = \frac{2\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \quad (4.2)$$

Para graficar esta función necesitamos fijar a la carga eléctrica Q , esto se hace tomando el valor $Q = 10$, para lo cual tenemos la figura 4.2 La variable $\beta(M)$ tiene un mínimo que coincide con el máximo de la temperatura, el cual está dado por

$$\frac{\partial T}{\partial M} = \frac{2\pi(m + \sqrt{M^2 - Q^2})^2(-m + 2\sqrt{M^2 - Q^2})}{(M^2 - Q^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (4.3)$$

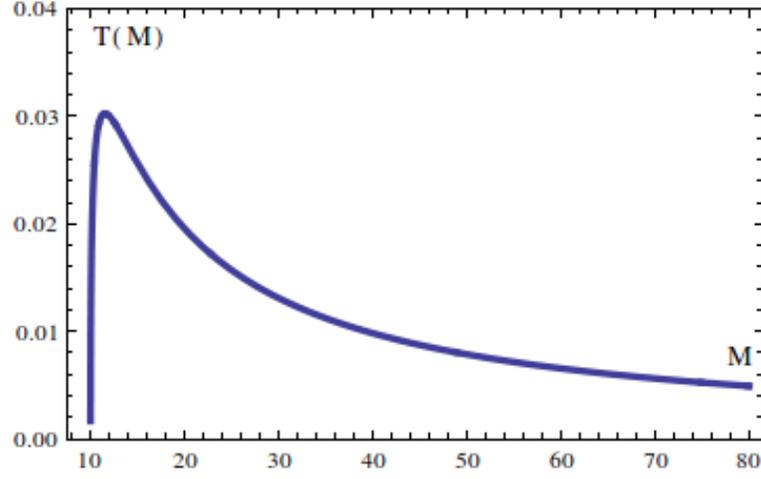


Figura 4.1: Temperatura del agujero negro de Reissner-Nordström con $Q = 10$

podemos ver que gráfica de la temperatura T tiene un máximo en $M_c = 2Q/\sqrt{3}$, conforme va aumentando la masa la temperatura va incrementando hasta llegar al máximo, a partir de este punto la temperatura comienza a disminuir conforme se aumenta más la masa, mientras que para la gráfica de $\beta(M)$, el máximo de T ahora es un mínimo, a medida de que la masa aumenta $\beta(M)$ disminuye y después de que llega al mínimo comienza a aumentar, a partir este punto la pendiente siempre es positiva, vemos entonces que no se muestra ningún punto de retorno. Se puede decir que el sistema es estable para esta configuración si no se encuentra alguna bifurcación.

Debido a la presencia de la carga eléctrica, se puede determinar el potencial eléctrico $\Phi(Q)$, para determinar esto usamos que para esta solución el potencial se puede calcular como

$$\Phi \equiv \frac{Q}{r} \Big|_{r=r_+}$$

de manera que la expresión para el potencial eléctrico de esta solución es

$$\Phi(Q) = \frac{Q}{M + \sqrt{M^2 - Q^2}} \quad (4.4)$$

con las ecuaciones (4.4) y (4.3) se obtiene la segunda variable conjugada $\beta(Q) = -\beta(M)\Phi(Q)$,

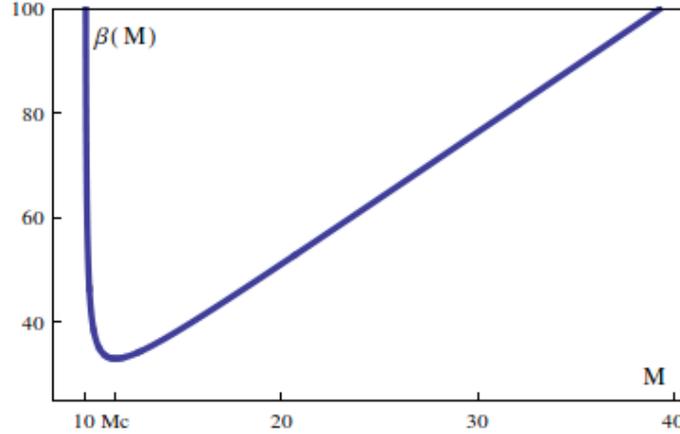


Figura 4.2: Grafica de $\beta(M)$ para el valor $Q = 10$

que está dada como

$$\beta(Q) = \frac{-2\pi Q(M + \sqrt{M^2 - Q^2})}{\sqrt{M^2 - Q^2}}, \quad (4.5)$$

fijando el valor para la masa $M = 20$ y graficando $\beta(Q)$ contra Q se muestra su comportamiento en la figura 4.4. En la gráfica (4.3) se ve que conforme aumenta la carga aumenta el potencial, como es de esperar, mientras que al aumentar la carga la pendiente de $\beta(Q)$ se va haciendo más negativa, para este caso tampoco se tiene un punto de retorno, debido a esto se puede decir que no hay un cambio de estabilidad en el sistema, de modo que cambie de más estable a menos estable.

El agujero negro de R-N bajo el método del punto de retorno no muestra alguna inestabilidad en el ensamble microcanónico para los diagramas conjugados que corresponden en este caso, este análisis es hablando termodinámicamente.

4.2. Aplicación de método a la solución de Ayón-Beato y García

Recordemos que esta solución representa al mismo cuerpo descrito por R-N pero en electrodinámica no lineal, al quitar la singularidad de la métrica se desea conocer si esta solución puede ser estable termodinámicamente, pues la estabilidad nos puede ayudar para saber si tal solución es físicamente aceptable.

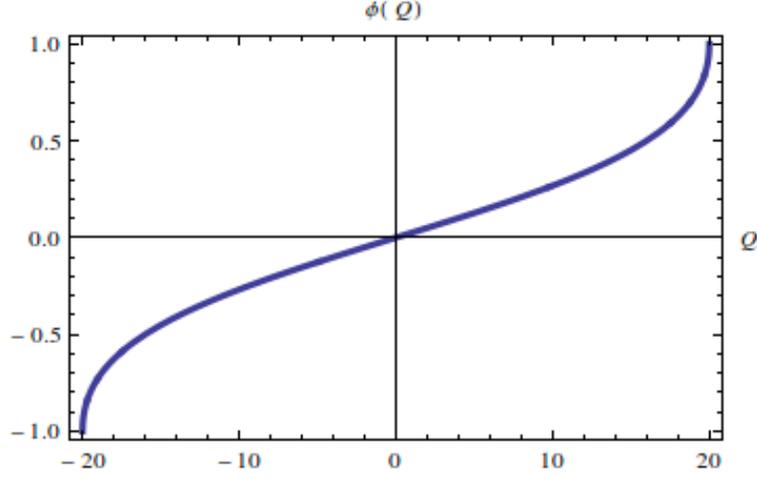


Figura 4.3: Gráfica del potencial eléctrico $\Phi(Q)$ con $M = 20$

El estudio de la estabilidad termodinámica de esta solución se realizará en los ensambles: micro canónico, canónico y gran canónico.

4.2.1. Ensemble microcanónico

Retomando que para este ensamble el sistema está aislado, y que la función extendida de Massieu Ψ coincide con la entropía, obtenemos

$$d\Psi_1 = dS = \beta_m dm + \beta_q dq, \quad (4.6)$$

donde $\beta_m = 1/T$, $\beta_q = -\Phi/T$, con T la temperatura y Φ el potencial eléctrico. Sabemos que en general, la gravedad superficial y la temperatura de un agujero negro están dados como

$$T = \frac{1}{2\pi}\kappa, \quad \kappa = \frac{1}{2}\partial_r g_{tt} |_{r=r_+}. \quad (4.7)$$

Para un agujero negro estático con simetría esférica, la temperatura se puede calcular usando la componente \mathcal{T}_0^0 del tensor energía-momento [7] en el cálculo de κ , dada como

$$\kappa = \frac{1}{2r_+} [1 - r_+^2 4\mathcal{T}_0^0(r_+)], \quad (4.8)$$

para este caso utilizaremos esta expresión para determinar la temperatura del agujero negro.

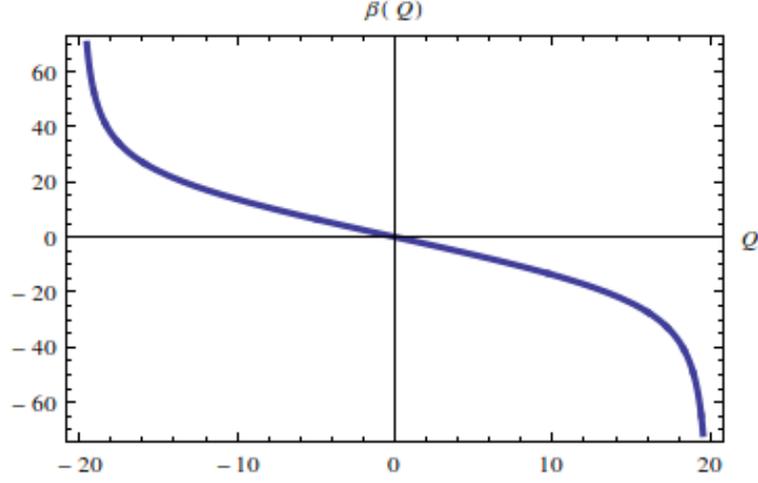


Figura 4.4: se grafica $\beta(Q)$ para la masa $M = 20$

Para obtener la expresión de \mathcal{T}_0^0 usamos las ecs. (2.20), (2.14), (2.16) y (2.22).

La forma que toma \mathcal{L} (ec. (2.20)) en términos de r y q es

$$\mathcal{L} = -\frac{3mq^2(3r^2 - 2q^2)}{2(q^2 + r^2)^{7/2}} - \frac{q^2(3q^4 - 8q^2r^2 + r^4)}{2(q^2 + r^2)^4}. \quad (4.9)$$

para la derivada de \mathcal{L} respecto a F , se tienen las siguientes expresiones

$$\mathcal{L}_F = \sqrt{\frac{P}{F}}, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{L}_F = \frac{(q^2 + r^2)^4}{r^6 (15m\sqrt{q^2 + r^2} - 10q^2 + 2r^2)}, \quad (4.11)$$

se sigue que f_e tiene la siguiente forma

$$f_e = 2q^2 r^4 \mathcal{L}_F^{-2} r^{-4}, \quad (4.12)$$

$$f_e = \frac{2q^2 r^8 (15m\sqrt{q^2 + r^2} - 10q^2 + 2r^2)^2}{(q^2 + r^2)^8}, \quad (4.13)$$

la componente \mathcal{T}_0^0 en términos de las cantidades anteriores, está dado como

$$\mathcal{T}_0^0 = \frac{2f_e \mathcal{L}_F + \mathcal{L}}{2}, \quad (4.14)$$

$$\mathcal{T}_0^0 = -\frac{3q^2 \left(\sqrt{q^2 + r^2} (q^4 + 24q^2r^2 - 5r^4) - m(2q^4 + 39q^2r^2 + 37r^4) \right)}{4(q^2 + r^2)^{9/2}}, \quad (4.15)$$

La temperatura del agujero negro de Ayón-Beato tiene la forma siguiente

$$T = \frac{3q^2r^2 \left(-m\sqrt{q^2 + r^2} (2q^2 + 37r^2) + q^4 + 24q^2r^2 - 5r^4 \right) + (q^2 + r^2)^4}{4\pi r (q^2 + r^2)^4} \Big|_{r=r_+} \quad (4.16)$$

de esta manera se sigue que la expresión para la variable β_m , está dada como

$$\beta_m = \frac{4\pi r (q^2 + r^2)^4}{3q^2r^2 \left(-m\sqrt{q^2 + r^2} (2q^2 + 37r^2) + q^4 + 24q^2r^2 - 5r^4 \right) + (q^2 + r^2)^4} \Big|_{r=r_+} \quad (4.17)$$

donde r_+ es el radio del horizonte de eventos (2.18).

Debido a la forma del horizonte de eventos no se muestra la forma explicita de los resultados pues estas expresiones son grandes.

Como se indicó en el método, se estudia la estabilidad a través de los diagramas conjugados de cada una de las variables para estudiar si existe algún punto de retorno. Para esto se tomaron valores de los parámetros q y m , fijando estos valores se grafica cada una de las variables conjugadas.

En la figura (4.5) se grafica la temperatura para varios valores de q , notemos que en un rango pequeño de valores de m la temperatura aumenta alcanzando un máximo, a partir de este punto comienza a disminuir y no vuelve a aumentar. Se puede ver que conforme se fijan valores de la carga más grandes la temperatura va disminuyendo en su valor máximo y tiende a cero de manera mas lenta. La temperatura de esta solución tiene un comportamiento muy similar al de R-N.

Cuando se grafica la temperatura de esta solución se muestra un comportamiento en el cual el agujero tiene temperaturas negativas, esto ocurre debido a que por alguna razón el cálculo permite obtener la temperatura dentro del horizonte de eventos, esto ocurre para cierto tipo de soluciones, en este trabajo no nos fijamos en ver en que clasificación de soluciones está esta solución. Las temperaturas negativas no se muestran en la figura (4.5) pues estas no son permitidas por la teoría [12], unicamente se muestran las temperaturas positivas.

De igual forma se graficó β_m dejando constante a la carga eléctrica y haciendo correr los

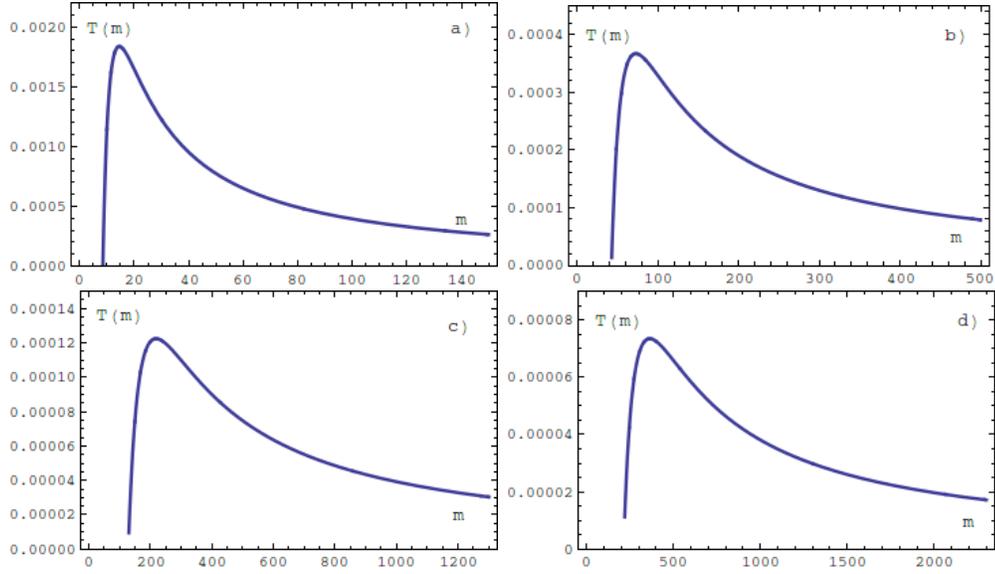


Figura 4.5: Gráfica de la temperatura con los valores *a)* $q = 2$, *b)* $q = 10$, *c)* $q = 30$, *d)* $q = 50$.

valores que podía tomar m , pues para considerar que se tiene un agujero negro se debe cuidar la desigualdad $s \leq s_c$. En la gráfica de β_m de la figura (4.6) no se muestra ningún punto de retorno; en el extremo izquierdo de la gráfica la función tiene una asíntota mientras que en el otro extremo no hay ninguna asíntota. Podemos entonces decir que el sistema es estable sino se muestra ninguna bifurcación [3]. La pendiente de β_m aunque pasa de negativa a positiva se mantiene siempre así; no hay cota de estabilidad. Los puntos donde el sistema es más estable se van recorriendo hacia la derecha conforme se incrementan los valores de la carga eléctrica.

La forma para determinar el potencial eléctrico es

$$\Phi = q \int_{r_+}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \mathcal{L}_F}, \quad (4.18)$$

aplicando a la solución de Ayón-Beato y García, se obtiene

$$\Phi = \frac{1}{2} q r^5 \left(\frac{3m}{q^2 (q^2 + r^2)^{5/2}} - \frac{2}{(q^2 + r^2)^3} \right) \Big|_{r=r_+}^{\infty} \quad (4.19)$$

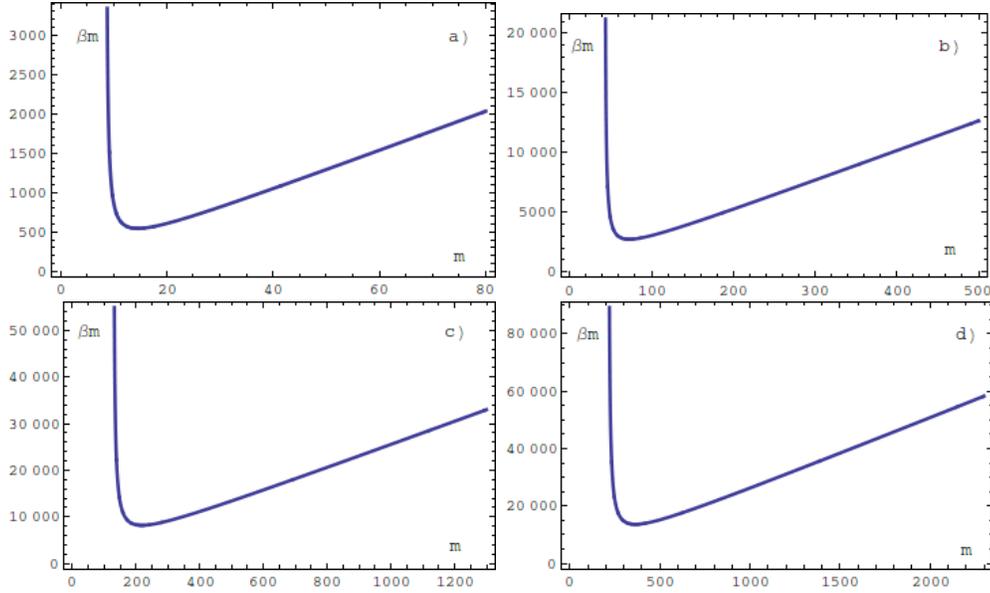


Figura 4.6: Gráfica de la β_m con los valores a) $q = 2$, b) $q = 10$, c) $q = 30$, d) $q = 50$.

finalmente el potencial eléctrico está dado como

$$\Phi = \frac{3m}{2q} - \frac{1}{2}qr^5 \left(\frac{3m}{q^2 (q^2 + r^2)^{5/2}} - \frac{2}{(q^2 + r^2)^3} \right) \Big|_{r=r_+}.$$

En la figura (4.7) podemos notar que la forma del potencial eléctrico tiene el mismo comportamiento como en el caso de R-N, en este caso también se admiten valores negativos de la carga q . En este mismo caso se graficó para los valores fijos de la masa al azar, podemos notar que la gráfica tiene dos asíntotas, las cuales se van separando conforme m toma valores más grandes.

La variable conjugada β_q está dada en términos de la temperatura y el potencial eléctrico, la cual se deja en términos de r , como

$$\beta_q = - \frac{2\pi r (q^2 + r^2)^4 \left(m \left(3 - \frac{3r^5}{(q^2 + r^2)^{5/2}} \right) + \frac{2q^2 r^5}{(q^2 + r^2)^3} \right)}{q \left(3q^2 r^2 \left(-m\sqrt{q^2 + r^2} (2q^2 + 37r^2) + q^4 + 24q^2 r^2 - 5r^4 \right) + (q^2 + r^2)^4 \right)} \Big|_{r=r_+}, \quad (4.20)$$

en este caso nuevamente la variable que se fija es el parámetro m , nótese que en la figura (4.8) del diagrama conjugado para β_q no se muestra ningún punto de retorno.

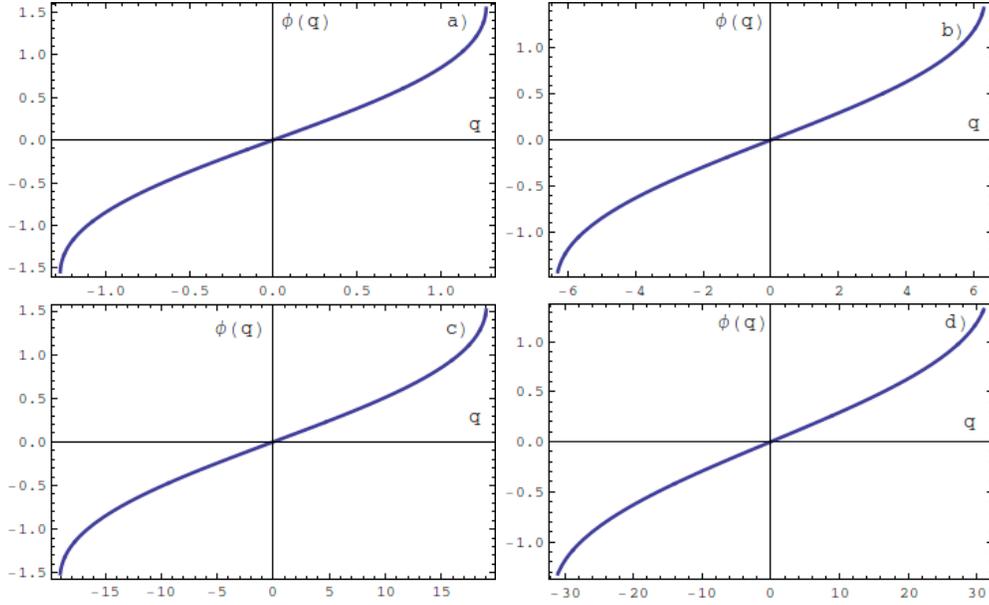


Figura 4.7: Gráfica del potencial eléctrico Φ con los valores a) $m = 2$, b) $m = 10$, c) $m = 30$, d) $m = 50$.

En la figura(4.8) del diagrama conjugado podemos ver que la asíntota se recorre hacia la derecha conforme se aumentan los valores del parámetro m .

Podría decirse que el sistema es estable ya que para los valores que están a la izquierda de la asíntota no se muestra ningún punto de retorno. Por lo tanto no hay ninguna inestabilidad sino se encuentra alguna bifurcación en el diagrama conjugado.

Según el método, la divergencia se debe a la no diferenciabilidad de la función extendida de Massieu Ψ en la frontera de la secuencia. Por esta razón no se puede hablar de una inestabilidad.

4.2.2. Ensamble canónico

Este ensamble considera que el sistema puede estar intercambiando calor con los alrededores, por esta causa se espera que el sistema sea inestable ya que como sabemos Hawkings determinó que los agujeros negros radian.

En este caso las variables termodinámicas son $\{\mu^i\} = \{\beta_m, q\}$ con las variables conjugadas $\{\beta^i\} = \{-m, \beta_q\}$. Como podemos ver β_q ya se graficó en el ensamble anterior por lo cual

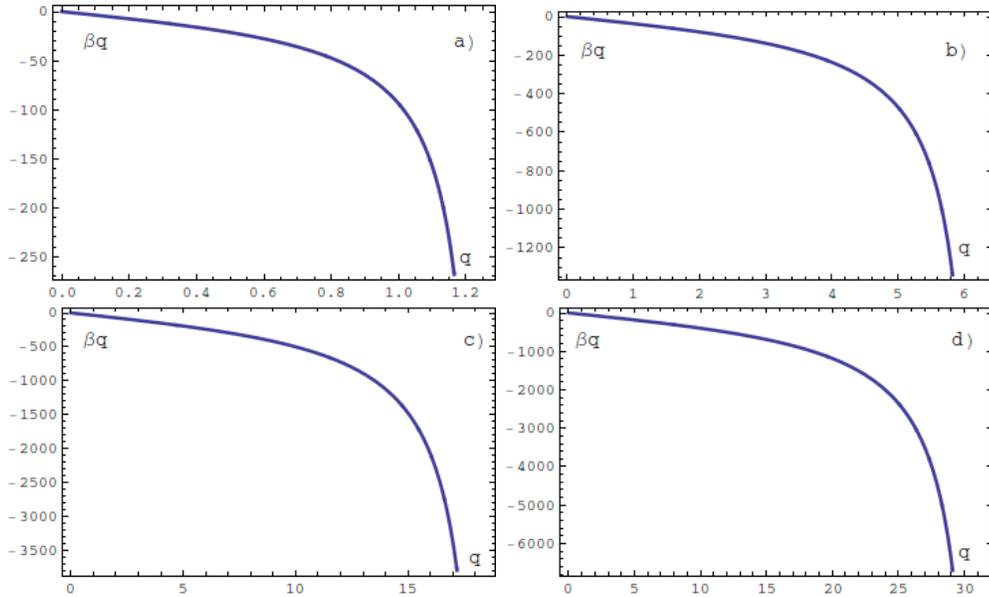


Figura 4.8: Gráfica de β_q con los valores a) $m = 5.4$, b) $m = 27$, c) $m = 80$, d) $m = 135$.

ahora nos interesa obtener el diagrama conjugado $(\beta_m, -m)$. En este caso se considera la función extendida de Massieu

$$d\Psi_2 = dS - d(\beta_m m) = -m d\beta_m + \beta_q dq. \quad (4.21)$$

Se puede observar que es necesario poner a m en términos del inverso de la temperatura, como se vio anteriormente estas expresiones son difíciles de manipular, por lo cual este cálculo es muy complicado de hacer.

El diagrama conjugado $(\beta_m, -m)$ se puede obtener a través de una rotación [7] de 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj del diagrama (m, β_m) . En este caso se graficará punto a punto, usando la expresión (4.13), se evalúa a β_m asignándole valores a cada m .

En la figura (4.9) notamos que aparece un punto de retorno, pues hay una tangente vertical mostrando que hay un cambio de signo en la pendiente, esto muestra que el sistema tiene una inestabilidad como se esperaba. De acuerdo con el método los puntos donde la pendiente es positiva son más estables que aquellos con pendiente negativa. Conforme se aumentan los valores de q , la inestabilidad aparece para valores cada vez más grandes de

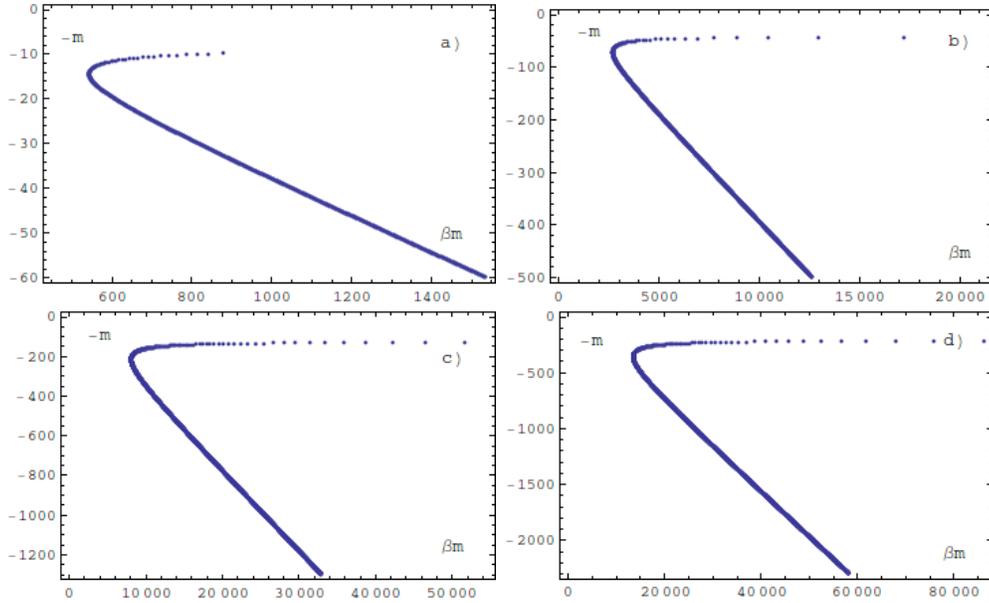


Figura 4.9: Gráfica de $-m$ con los valores *a)* $q = 2$, *b)* $q = 10$, *c)* $q = 30$, *d)* $q = 50$.

m , es decir que cuanto más carga eléctrica tenga el agujero negro, tendrá que ser muy masivo para que el sistema muestre la inestabilidad en esta configuración.

Como se mencionó anteriormente este sistema es inestable en esta configuración, esta inestabilidad también se muestra en el agujero de Schwarzschild.

4.2.3. Ensamble Gran canónico

En este ensamble el sistema puede estar intercambiando calor con sus alrededores y además puede estar realizando un trabajo sobre estos. La transformada de Legendre para la función extendida de Massieu es

$$d\Psi_3 = d\Psi_2 - d(\beta_q q) = -m d\beta_m + q d\beta_q, \quad (4.22)$$

ahora las variables termodinámicas son $\{\mu^i\} = \{\beta_m, \beta_q\}$ con sus correspondientes variables conjugadas $\{\beta^i\} = \{-m, q\}$.

Notemos que sólo tenemos que considerar el diagrama para la configuración de (β_q, q) . Para realizar este diagrama se utilizó el mismo método que en el ensamble canónico para

determinar los valores que va tomando β_q , de nuevo se graficará punto a punto.

En la figura 4.10, en el diagrama (β_q, q) no se muestra ningún punto de retorno, por lo

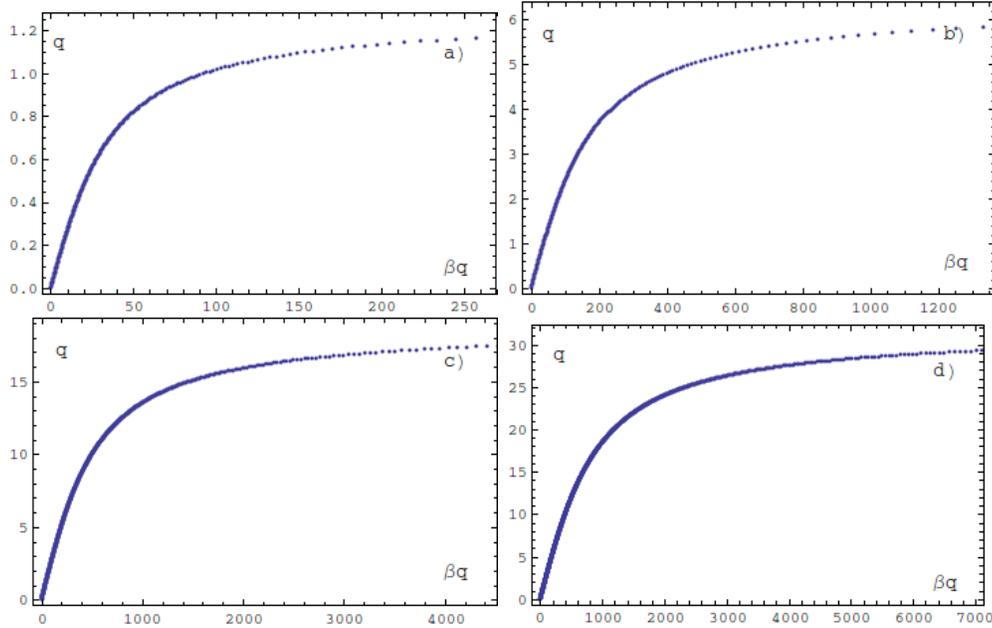


Figura 4.10: Gráfica de q con los valores a) $m = 5.4$, b) $m = 27$, c) $m = 80$, d) $m = 135$.

cual no se puede hablar de ninguna inestabilidad en esta configuración. En este caso en la gráfica no hay asíntota vertical alguna como en las gráficas anteriores, que sea cota de estabilidad.

En el ensamble canónico se hizo un análisis del diagrama $(\beta_m, -m)$, se encontró una inestabilidad (había un punto de retorno) en esta configuración, con base a esto podemos decir que la carga eléctrica actúa en el agujero negro como un estabilizador del sistema, cambiando un modo inestable a uno más estable.

4.2.4. Caso extremo

En las secciones anteriores se aplicó el método a la solución en los diferentes ensambles, para el caso extremo de la solución también se aplicará el método pero únicamente en el ensamble microcanónico. La aplicación de método para el caso extremo, es decir para

cuando el radio del horizonte de eventos es (2.19), cuyas variables termodinámicas son $\{\mu^i\} = \{m, q\}$ y el conjunto de variables conjugadas correspondientes $\{\beta^i\} = \{\beta_m, \beta_q\}$, al cual le aplicamos el método.

recordemos que la gravedad superficial está dada como

$$\kappa = \frac{3q^2r^2 \left(-m\sqrt{q^2 + r^2} (2q^2 + 37r^2) + q^4 + 24q^2r^2 - 5r^4 \right) + (q^2 + r^2)^4}{2r (q^2 + r^2)^4} \Big|_{r=r_e}$$

la temperatura está dada como

$$T(m) = \frac{3q^2r^2 \left(-m\sqrt{q^2 + r^2} (2q^2 + 37r^2) + q^4 + 24q^2r^2 - 5r^4 \right) + (q^2 + r^2)^4}{4\pi r (q^2 + r^2)^4} \Big|_{r=r_e}$$

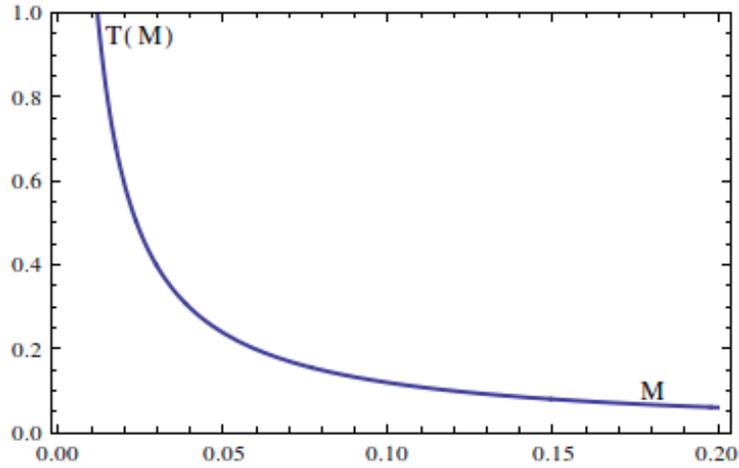


Figura 4.11: Gráfica de la temperatura T con $q = 2S_c m$.

En la gráfica (4.11) podemos notar que el comportamiento de la temperatura T es muy grande para masas pequeñas y tiende a cero conforme la masa aumenta. Notemos que su comportamiento es diferente al que se mostró en la gráfica (4.5), pues en tal gráfica la temperatura era pequeña para masas pequeñas y después alcanzaba un máximo a partir de la cual comenzaba a disminuir, mientras que para esta gráfica no se tiene un máximo, es decir que para masas pequeñas la temperatura diverge.

Teniendo el valor de κ recordemos que el valor del radio del horizonte en el caso extremo es $r_e = 2s_c 1.58m$, por lo tanto β_m está dada como $\beta_m = 1/T$

$$\beta_m = \frac{4\pi r (q^2 + r^2)^4}{3q^2 r^2 \left(-m\sqrt{q^2 + r^2} (2q^2 + 37r^2) + q^4 + 24q^2 r^2 - 5r^4 \right) + (q^2 + r^2)^4} \Big|_{r=r_e}$$

$$\beta_m = 530.021m \quad (4.23)$$

En este caso β_m es una línea recta, por ello podemos decir que en el diagrama conjugado no se mostrará ningún punto de retorno ni bifurcación, el sistema es estable.

Si se hiciera una rotación de los eje se encontraría que para el ensamble canónico no hay ningún punto de retorno ni bifurcación.

La ecuación anterior es lineal, al graficar β_m no tiene punto de retorno ni asíntotas verticales. Se puede ver que esto es posible ya que el sistema va disminuyendo su temperatura para así mantenerse estable.

A partir del campo eléctrico (2.16), se obtiene el potencial eléctrico;

$$\Phi = \frac{3m}{2q} - 0.504315m^5 q \left(-\frac{2}{(1.00344m^2 + q^2)^3} + \frac{3m}{q^2(1.00344m^2 + q^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \quad (4.24)$$

Dado que para el caso extremo $m = 1.57729q$, se obtiene que el potencial es constante. Obteniendo así el valor de $\beta_q = -1319.431q$

También se tiene como en los casos anteriores que no hay punto de retorno ni asíntotas verticales que son las que nos determinan el cambio de estabilidad, en este caso la no existencia de asíntotas verticales nos determina que no existe una cota de estabilidad, es decir el sistema es estable por completo.

4.3. Capacidad calorífica

En el capítulo 1 vimos que la capacidad calorífica en termodinámica se obtiene a través de la ecuación (1.11), la cual está en términos de la fórmula de Smarr. Para agujeros negros estáticos con simetría esférica, y con una carga eléctrica, la capacidad calorífica se puede obtener mediante el tensor de energía-momento

$$C_q = -2\pi r_+^2 \frac{1 - 4r_+^2 \mathcal{T}_0^0(r_+)}{1 + 4r_+^2 \mathcal{T}_0^0(r_+) + 4r_+^3 \mathcal{T}'_0(r_+)} \quad (4.25)$$

donde la prima denota una derivada con respecto a r , esta expresión es válida para cualquier solución con carga eléctrica.

La inestabilidad que se encontró en este ensamble ha de ser verificada en la gráfica de la capacidad calorífica mostrando una divergencia.

Recordemos las expresiones que se encontraron para \mathcal{T}_0^0 y $\mathcal{T}_0^{\prime 0}$, las cuales deben ser evaluadas en el horizonte de eventos.

$$\mathcal{T}_0^0 = -\frac{3q^2 \left(\sqrt{q^2 + r^2} (q^4 + 24q^2r^2 - 5r^4) - m(2q^4 + 39q^2r^2 + 37r^4) \right)}{4(q^2 + r^2)^{9/2}}$$

$$\mathcal{T}_0^{\prime 0} = -\frac{3q^2r \left(m(-60q^4 + 125q^2r^2 + 185r^4) + 4\sqrt{q^2 + r^2} (10q^4 - 41q^2r^2 + 5r^4) \right)}{4(q^2 + r^2)^{11/2}}$$

La expresión para la capacidad calorífica está dada como

$$C_q = -\frac{2\pi r^2 (q^2 + r^2) \left(\sqrt{q^2 + r^2} (q^8 + 7q^6r^2 + 78q^4r^4 - 11q^2r^6 + r^8) - 3mq^2r^2 (q^2 + r^2) (2q^2 + 37r^2) \right)}{3mq^2r^2 (q^2 + r^2) (2q^4 + 99q^2r^2 - 148r^4) + \sqrt{q^2 + r^2} (q^{10} + 2q^8r^2 - 185q^6r^4 + 445q^4r^6 - 40q^2r^8 + r^{10})} \Big|_{r=r_+} \quad (4.26)$$

En la figura (4.12) se muestra el comportamiento de la capacidad calorífica para diferentes valores de carga q , en las gráficas se muestra que hay una divergencia y un cambio de signo en la capacidad; el valor en el cual ocurre la divergencia coincide con el mismo valor en el cual se mostró que había un punto de retorno en el ensamble canónico, esto coincide con la inestabilidad encontrada en esa configuración del sistema, de modo que la capacidad calorífica está relacionada con las inestabilidades en el ensamble canónico. Esta solución tiene el mismo comportamiento en la capacidad como en el caso de la solución Schwarzschild.

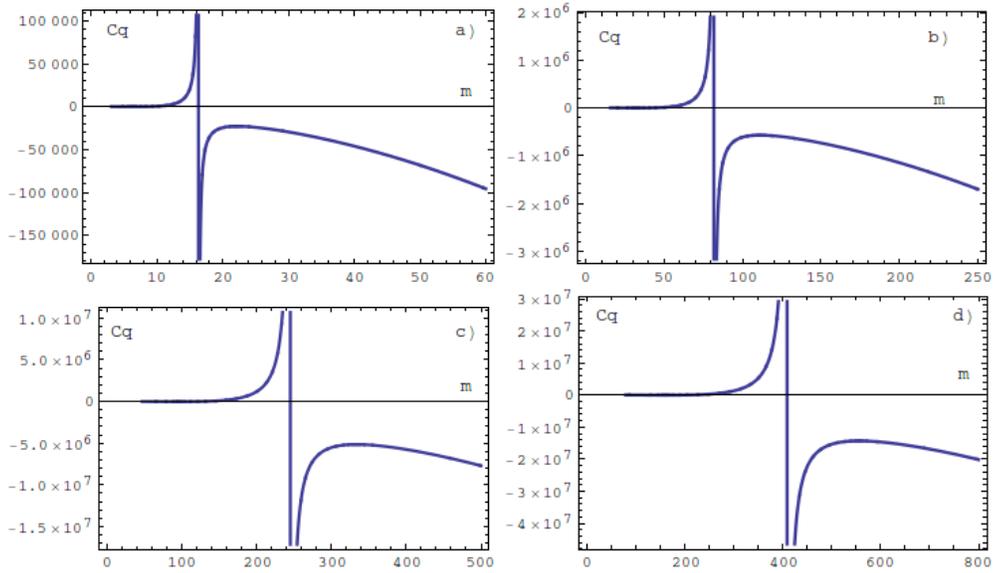


Figura 4.12: Gráfica de C_q con los valores a) $q = 2$, b) $q = 10$, c) $q = 30$, d) $q = 50$.

Capítulo 5

Conclusiones

Al aplicar el método del punto de retorno se encontró que en el caso del agujero negro de Reissner-Nordström en el ensamble microcanónico, el sistema es estable. En el diagrama conjugado de cada una de las variables no se encontró algún punto de retorno para decir que haya un cambio de estabilidad en el sistema, es decir no se muestran inestabilidades en esta configuración.

En el caso de la solución de Ayón-Beato y García, el método se aplicó al los diferentes ensambles. En el ensamble microcanónico el sistema es estable termodinámicamente hablando, pues no se encontró ningún punto de retorno ni alguna bifurcación. En el diagrama de (m, β_m) no hay asíntota que sea cota de estabilidad. Se puede ver también que el sistema disminuye su temperatura para mantenerse estable; a diferencia de la solución de R-N, esta solución permite valores negativos para la temperatura, pero se consideró que se encuentra dentro del horizonte de eventos, por lo cual no son graficados. Además de que conforme se aumenta la carga q la temperatura va disminuyendo.

Para el diagrama (q, β_q) conforme se aumenta el valor para la masa fijada, la asíntota se van desplazando, de manera que conforme se aumente el valor para m el sistema tiene un mayor rango de estabilidad. El comportamiento del potencial eléctrico no cambia con respecto al de R-N.

En el ensamble canónico, para el diagrama conjugado de $(\beta_m, -m)$ se mostró que el sistema es inestable, esto se debe a que hay un punto de retorno, conforme al método esto indica que el sistema pasa de ser más estable a menos estable. Para valores más grandes de q la

inestabilidad tarda mas en aparecer.

Para el diagrama (β_q, q) no se encontró ningún punto de retorno ni alguna bifurcación, como en el caso del diagrama $(-m, \beta_m)$ se puede decir que el sistema es inestable para cualesquiera valores de q y m en el ensamble gran canónico. Podemos considerar que la carga eléctrica tiene una efecto sobre el sistema, en el cual hay un cambio de un modo estable a uno más estable en el sistema.

En este trabajo se usó la capacidad calorífica para determinar que la inestabilidad mostrada en el ensamble canónico y gran canónico se puede observar también en ésta. Las gráficas de la capacidad calorífica mostraron un cambio de signo y una divergencia. Los valores en que ocurre el cambio de signo coincide con los valores donde se mostró la inestabilidad.

Comparando los resultados en el análisis termodinámico que se hizo de ambas soluciones es que, al introducir eletrodinámica no lineal para eliminar la singularidad el comportamiento que encontró en el agujero negro de Ayón-Beato y García coincide con el que ya se tenía para R-N, es decir que el efecto de eliminar la singularidad que se tiene en el agujero negro de R-N no provoca ningún cambio en su estabilidad termodinámica.

Bibliografía

- [1] Nora Bretón, Santiago E. Perez Bergliaffa; “*Thermodynamical stability of the Bardeen black hole* ”; AIP Conference Proceedings 1577, 112 (2014)
- [2] Eloy Ayón-Beato, Alberto Garcia ; “ *Regular Black Hole in General Relativity Coupled to Nonlinear Electrodynamics,*”; Phys. Rev. L 80 5056 (1998).
- [3] Giovanni Arcioni, Ernesto Lozano-Tellechea; “*Stability and critical phenomena of black holes and black rings* ”; Physical Review D 72, 104021 (2005).
- [4] Eric Poisson; “*A Relativist’s Toolkit The Mathematics of Black-Hole Mechanic*”; Cambridge University, (2004).
- [5] Nuria Calvet, Miguel Alcubierre & Tomás Ortín; “*La Hechicera*”; Universidad de Los Andes, Venezuela.
- [6] Dirac, Paul Adrien Maurice; “*General Theory of Relativity*”; Florida State University, (2011).
- [7] Nora Bretón, Santiago E. Perez Bergliaffa; “*On the thermodynamical stability of black holes in nonlinear electrodynamics*”; Annals of Physics 345 440 (2015).
- [8] Nora Bretón; “*Smarr formula for black holes with non-linear electrodynamics*”; Gen. Relativ. Gravit. 37(4) : 643 (2005).
- [9] Nora Bretón; “*Electrodinámica no lineal en gravitación* ”;Ciencia ergo sum vol 8 núm 3, (2001).
- [10] Rong-Gen, Y.S. Myung; “*Critical behavior for the dilaton black holes* ”; Nuclear Physics B 495 339, (1997).

- [11] Ta-Pei Chang; “*Gravity, Relativity and Cosmology* ”; Oxford.
- [12] J. Diaz-Alonso, D. Rubiera-García; “*Thermodynamic analysis of black hole solutions in gravitating nonlinear electrodynamics* ”; Gen. Rel. Grav. 45 1901 (2013).