UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**MAESTRÍA EN CIENCIAS
EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA**

TESIS

Empleo de una app como estrategia para mejorar el entendimiento de Integrales Trigonométricas en un curso de Cálculo

Para obtener el grado de

**Maestra en Ciencias en
Matemáticas y su Didáctica**

PRESENTA
Ivon Andrea Callejas Ramírez

Director
Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez

Comité tutorial
Dra. Ana Tarasenko
Dr. Marcos Campos Nava
Dr. Carlos Arturo Soto Campos
Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez

Mineral de la Reforma, Hgo., México. Marzo 2024.

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
School of Engineering and Basic Sciences
Área Académica de Matemáticas y Física
Department of Physics and Mathematics

Mineral de la Reforma, Hgo., a 20 de marzo de 2024

Número de control: ICBI-AAMyF/238/2024
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

El Comité Tutorial de la tesis titulada **"Empleo de una app como estrategia para mejorar el entendimiento de Integrales Trigonométricas en un curso de Cálculo"**, realizada por la sustentante **Ivon Andrea Callejas Ramírez** con número de cuenta **F05724** perteneciente a la **Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial

Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez
Director

Dra. Anna Tarasenko
Miembro del comité

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Dr. Carlos Arturo Soto Campos
Miembro del comité

Dr. Marcos Campos Nava
Miembro del comité

Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 2531
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por haberme acompañado y guiado, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

A mi esposo y a mis hijas, me brindaron su apoyo, me comprendieron, tuvieron tolerancia e infinita paciencia y cedieron su tiempo, para permitir así llevar adelante este trabajo.

A mis padres y hermanos, por su apoyo incondicional, por sus consejos y ánimos para seguir adelante.

A mi abuelita, por ser ejemplo de fuerza.

A mi familia política, por siempre estar presentes.

A mis amigos, por motivarme y celebrar juntos mis logros.

A mi compañera de generación, por no permitir rendirme en el proceso.

A mi director de tésis, por aceptar guiar este trabajo, por su tiempo y conocimientos brindados.

A mis revisores, por sus acertadas correcciones que permiten un trabajo de calidad.

Al cuerpo académico de la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica, por sus valiosas aportaciones en la mejora de mi desarrollo profesional.

RESUMEN

El presente trabajo tuvo como finalidad diseñar e implementar una tarea de aprendizaje que permitió incluir una app en una actividad implementada a estudiantes de quinto semestre de bachillerato en la materia de Calculo Integral, toda vez que se ha observado que los estudiantes hacen uso de este tipo de aplicaciones con bastante frecuencia y en la mayoría de las ocasiones lo hacen únicamente para copiar el resultado, y dejando de lado el analizar y comprender el proceso de solución propuesto por la app, así como el proceso de entendimiento de dichas acciones necesarias para dar solución a ejercicios de esta índole.

De igual manera se realizó una categorización de las etapas de diseño y de implementación de la tarea que nos permitió fundamentar estas acciones en constructos teóricos y aproximaciones didácticas que nos han servido como guía para llevar a cabo dichos procesos, y que a su vez nos permitieron dar una solución a la pregunta de investigación, desglosando cada uno de los objetivos planteados.

Dentro de la investigación se destacan la importancia de realizar tareas de alta demanda cognitiva, la necesaria participación de los docentes y la correcta orientación hacia los alumnos con la finalidad de tener éxito al incluir apps en una tarea de aprendizaje, lo cual nos permite orientar a los estudiantes hacia el uso con provecho de este tipo de recursos.

ABSTRACT

The purpose of this work is to design and implement a learning task that allows including an app in an activity implemented for fifth semester students in the subject of Integral Calculus, since it has been observed that students make use of this type of applications. quite frequently and in most cases they do it only to copy the result, and leaving aside the analysis and understanding of the solution process proposed by the app, as well as the process of understanding said actions necessary to solve exercises of this kind.

Likewise, a categorization of the design and implementation stages of the task was carried out that allows us to base these actions on theoretical constructs and didactic approaches that have served as a guide to carry out said processes, and that in turn allow us provide a solution to the research question, breaking down each of the stated objectives.

Within the research, the importance of carrying out tasks with high cognitive demand, the necessary participation of teachers and the correct orientation towards students are highlighted in order to be successful when including apps in a learning task, which allows us to guide students towards the beneficial use of this type of resources.

Índice

Índice de tablas

Índice de Figuras

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Introducción

La presencia de la tecnología en el ámbito escolar, es cada vez más frecuente, haciendo uso de aplicaciones móviles que permiten realizar tareas escolares desde un dispositivo móvil siempre y cuando se tenga acceso a internet. Por lo cual es común observar a los estudiantes que van desde nivel secundaria hasta nivel superior hacer uso frecuente de estos dispositivos, para facilitar sus quehaceres escolares, ya sea buscar información, realizar una traducción o incluso tareas que involucran ejercicios en el área matemática.

De acuerdo a Rodríguez-Cubillo et. al (2021) los dispositivos móviles, ya sean teléfonos inteligentes o tabletas, disponen de características que ofrecen oportunidades didácticas dentro y fuera del aula, como la interacción e innovación, además de impulsar la autonomía en los estudiantes.

Al respecto, Herrera et. al (2007), realizaron un estudio donde se aplicó una encuesta de diagnóstico denominada “uso de los teléfonos celulares en el aula”, donde se encontraron los siguientes resultados: 90.2% de los alumnos traen celulares inteligentes, lo que quiere decir que solo el 9.8% no tiene celular, por razones de diferente índole

Sin embargo, el 41% de los alumnos utilizan el celular para jugar, es decir, le dan un uso lúdico en el aula, por lo que el celular representa una distracción a las actividades académicas ya que ocupan el tiempo de clase para usarlo. Por otra parte, el 23% de los alumnos no tienen aplicaciones educativas en su dispositivo, sin embargo, están dispuestos a instalarlas.

Las aplicaciones educativas mejor conocidas como apps son según Gröger et al. (2013) las aplicaciones utilizadas en cualquier dispositivo móvil que presenta oportunidades para construir conocimiento. Bajo el mismo punto de vista “una aplicación móvil es un programa informático creado para llevar a cabo una tarea específica a través de un dispositivo móvil, se caracteriza por su dinamismo al instalarse en minutos y ocupa poco espacio en la memoria del dispositivo”. Oviedo (2019 p. 15)

Según Valdez y Gavilánez (2021), los dispositivos móviles en conjunto con las apps matemáticas son herramientas útiles que al incluirlas dentro de los trabajos del aula ayuda que los estudiantes sean más productivos, participativos y con más disposición durante la clase, haciendo uso del celular, no solo para resolver ejercicios matemáticos (por ejemplo, integrales, ecuaciones, derivadas, límites, etc.), sino también para comprender los procesos utilizados para llegar a las soluciones de ejercicios matemáticos.

Estas aplicaciones también pueden ser aprovechadas para complementar o reforzar los contenidos desarrollados en clase al igual que realizar actividades que se asignen al final de cada contenido, permitiendo contribuir en el aprendizaje de manera ubicua y asincrónica al permitir que los alumnos dispongan de materiales didácticos basados en las apps (Zambrano, 2009).

Las actividades didácticas que incorporan tecnología digital a través de apps, permiten absorber la carga procedimental de cálculos engorrosos, con el fin de que los estudiantes se centren en ideas más complejas y fundamentales (Moreno-Armella, Hegedus y Kaput, 2008). Una ventaja adicional es que la mayoría de estas apps son gratuitas.

Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones se observa que los estudiantes las utilizan como una herramienta para poder escribir una solución en algún ejercicio de tarea o incluso en algún examen, lo cual hacen de manera oculta, ya que en la mayoría de los casos no es bien visto por el profesor hacer uso de ellas, pues consideran que de esta manera no existe proceso de razonamiento en el alumno, simplemente se copia el resultado.

Por lo discutido anteriormente no es conveniente cerrar el paso a esta evolución tecnológica dentro del área de las matemáticas, sino por el contrario es necesario buscar la manera de aprovechar estos recursos que resultan innovadores para los estudiantes y de esta manera involucrarlos e interesarlos en el desarrollo de ejercicios matemáticos propios de su nivel escolar, buscando nuevas estrategias que permitan mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje que a su vez promuevan el entendimiento en diversos temas.

De este modo se propone el uso del celular como herramienta pedagógica y no como en muchas ocasiones prohibir su uso en el aula, pues se considera que tiene una serie de bondades que deben aprovecharse, como, por ejemplo: uso de diversas aplicaciones, apoyo educativo, trabajo en equipo, ahorro de trabajo, ahorro de materiales, conectividad a internet, promueve la interacción escolar, entre otras (García, 2017), de manera tal que si se contextualiza la tecnología puede contribuir a mejorar la educación. Promoviendo el intercambio de ideas, el aprendizaje colaborativo, así como la construcción de conocimiento (Kalman, 2012).

De acuerdo a Ángel y Bautista (2001), la evolución que ha experimentado el uso de las tecnologías, ofrece nuevas formas de enseñar, aprender y hacer matemática, brindando amplias posibilidades didácticas, mientras que por su parte Fernández et. al (2017), sostienen en su trabajo de investigación que “el uso de tecnologías educativas, ha conquistado el desarrollo de las sociedades y en el ámbito educativo cumple un significativo papel la enseñanza – aprendizaje, como también trascendencia en la comunicación e información” (p.11).

Desde esta perspectiva, de acuerdo con Lagrange, et. al (2001) se cree que, si los estudiantes usan herramientas tecnológicas para trabajar en matemáticas, entonces la enseñanza y el aprendizaje de estas mejorará, pues según Fernández, et. al (2017). “El uso de software en la enseñanza de la matemática admite en los estudiantes el desarrollo de las operaciones intelectuales y facilita la construcción de su propio conocimiento” (p.13). perfeccionando las habilidades y destrezas del estudiante.

Cabe mencionar que a lo largo de este escrito estaremos haciendo uso de dos palabras que si bien no son sinónimos tienen estrecha relación y hacen referencia al mismo objeto, que en este caso es la palabra aplicaciones (apps), y la palabra software donde en diversas investigaciones y textos hacen referencia a programas informáticos que son de fácil acceso y que ocupan poco almacenamiento al momento de instalarse en un dispositivo móvil, ya que según Lupton (2020), las aplicaciones móviles más conocidas como apps, son pequeños fragmentos de software, microprogramas diseñados para funcionar de manera rápida y fácil en dispositivos móviles, como lo son los teléfonos inteligentes, tabletas, dispositivos portátiles, con poco esfuerzo, las cuáles se diferencian de los software por tener funciones limitadas pero ofreciendo un fácil acceso.

Sin embargo se debe de tomar en cuenta que el uso de estas aplicaciones en tareas matemáticas será considerado como una herramienta que permita aprovechar los recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas, ya que el uso de estas, no garantiza el entendimiento de un algoritmo matemático, pues es necesario que previamente se tenga contacto con los conceptos matemáticos que se desean trabajar, por lo cual se debe de tener una buena planificación para esclarecer los conceptos matemáticos que se pretende estudiar. (Castellano, et. Al 2012).

Por otro lado, según Morales et. al (2013) estas herramientas pueden facilitar a los estudiantes y profesores el análisis, así como el desarrollo del pensamiento lógico y algorítmico; a la vez señalan: “actualmente los docentes utilizan algunos tipos de software para desarrollar sus actividades cotidianas dentro y fuera del aula, basándose en su interés personal o bien por la experiencia (…). Sin embargo, no es generalizada la utilización de esta herramienta para realizar las actividades docentes” (p. 300). De esta manera las aplicaciones matemáticas facilitan a los estudiantes concretar símbolos, tabular y cálculos matemáticos completos (Sibuea, et al, 2022).

En el mismo orden de ideas se hallaron investigaciones desarrolladas que promueven la inclusión de la tecnología en diversos temas matemáticos, que van desde aritmética, algebra, hasta temas más complejos como el cálculo integral, considerándose así según Haripersad (2011) a el cálculo como un curso fundamental en matemáticas. Orton (1985) destacó algunos puntos sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, uno de los principales puntos enfatizados está relacionado con la enseñanza de esta área, indicando que este tema necesita más atención.

Relacionado con esta búsqueda de manera general se encuentra que las investigaciones localizadas referentes al tema de cálculo integral se centran en entender el concepto de la integral defina y otros en mejorar los procesos de entendimiento del cálculo integral, sin embargo, no se encontró alguna investigación donde se aborden los procesos de solución de algunos tipos de integrales, (Fransela y Rangkuti, 2019).

1.2 Revisión de la literatura

1.2.1 La tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Las matemáticas actuales han sido fruto de numerosas civilizaciones y se convierten en una ciencia independiente con objeto y metodología propia a partir de los siglos V-VI a.C. Las primeras aportaciones significativas surgen de antiguas civilizaciones de Egipto, Mesopotamia, Grecia, China e India, prolongándose desde los siglos V-VI hasta finales del siglo XVI. Durante este periodo se obtuvieron grandes logros en el estudio de las matemáticas, desarrollándose la geometría analítica y el cálculo infinitesimal. Desde esta fecha hasta el siglo XIX destacan la geometría analítica de Descartes y la creación del cálculo infinitesimal y variacional en los trabajos de I. Newton y G. V. Leibniz., y es a partir de esa fecha cuando se desarrollan nuevas herramientas matemáticas que junto con la aparición de ordenadores produce un gran desarrollo de esta ciencia. (Muñoz, 2009).

De este modo, de acuerdo a Castellano et. al (2012), la introducción de los ordenadores en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas ha sido a través de programas que al inicio eran de carácter general, pero que posteriormente dieron paso a programas de cálculo algebraico que dé inicio solo se podían aplicar sobre grandes equipos, posteriormente surgen los primeros softwares de cálculo algebraico, que más tarde se han de convertir en aplicaciones utilizadas en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

En estas nuevas herramientas tecnológicas destacan capacidades numéricas, gráficas, simbólicas y de programación, las cuáles de acuerdo a Lagrange (2005), juegan un papel importante en el futuro de la enseñanza de las matemáticas, como ayuda pedagógica y como un vehículo para nuevas aproximaciones, ya que debido a la rapidez con la que cambia la tecnología, es necesario fomentar que los alumnos aprendan por sí mismos, pues se considera difícil que los conocimientos adquiridos en cierta etapa duren toda su vida profesional. (Salat, 2013)

1.2.2. Investigaciones previas

Como se ha mencionado, la tecnología, así como las herramientas tecnológicas ya forman parte de la vida cotidiana de cualquier persona, por lo cual resulta de gran interés incluirlas en el proceso de enseñanza-aprendizaje en todas las áreas educativas.

Relacionado con el uso adecuado de las tecnologías en el área de las matemáticas Carrasco, et al., (2012) mencionan que *"puede contribuir a introducir nuevas formas en el proceso de enseñanza y aprendizaje."* (p. 1407). Ángel y Bautista (2001), señalan que a través de estos programas se puede abrir la posibilidad de que el estudiante se sienta acompañado en su proceso de enseñanza-aprendizaje, y que al mismo tiempo podrá realizar ejercicios complejos de cálculos matemáticos observando así soluciones y estrategias que le permitan ir de lo teórico a lo numérico de manera individual, desde sus propios intereses a través del uso de software, convirtiéndose así en el complemento perfecto del profesor y de los materiales: cada alumno podrá reforzar, con ayuda de este tipo de programas, aquellos puntos conceptuales que le resulten más difíciles de asimilar, y practicar con ellos tantas veces como su tiempo (y ganas) lo permitan.

Al respecto Castellano et. al (2012) plantean que existen muchos trabajos científicos acerca de la incidencia de las aplicaciones y/o software en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, sin embargo, aún no es claro el efecto que produce la incorporación de las aplicaciones en este proceso, ya que resulta difícil medir el grado en que ha contribuido al aprendizaje (Ozuorcun y Tabak, 2012).

1.2.2.1 Investigaciones centradas en tópicos de matemáticas haciendo uso de una aplicación y/o software matemático.

En algunas investigaciones como la de Cuicas et. al (2007), se evidencia que el uso de un software matemático, ayuda a los estudiantes a mejorar habilidades como, visualizar conceptos, verificar, graficar, programar algoritmos, conjeturar y refutar hipótesis. Por lo que de acuerdo a sus conclusiones el software facilita la comprensión y aprendizaje de los contenidos y ayuda a la asimilación de los conceptos abstractos, los resultados mostraron que los estudiantes en su mayoría pusieron en práctica habilidades cognoscitivas y meta cognitivas, haciendo uso de esta herramienta con la cual pudieron calcular, graficar, copiar, trasladar, ordenar, borrar, insertar, entre otros, lo que permitió generar y organizar las ideas para actuar posteriormente con ellas y así apoyar su proceso de aprender (Esteban, 2002).

A su vez Ponce y Rivera (2011) en su trabajo realizaron una comparación de los resultados que arrojan diferentes herramientas tecnológicas al resolver integrales, y observó que en algunas situaciones estas herramientas arrojan resultados diversos, que incluso pudieran notarse con mayor complejidad que el resultado que se obtiene cuando se resuelven de manera tradicional usando papel y lápiz.

Awang y Zacaria (2012) en un artículo muestran el análisis de los efectos del uso de dos enfoques de aprendizaje diferentes para la comprensión del cálculo integral por parte de los estudiantes. Para realizar esta investigación se formaron grupos experimentales y de control de forma aleatoria, dividiéndolos a su vez en en tres subgrupos que son grupos de baja capacidad, capacidad media y alta capacidad. Al utilizar software matemático para aprender cálculo integral, los estudiantes de habilidad media y alta en el grupo experimental progresaron mejor que los estudiantes de baja habilidad. Por el contrario, en el grupo de control, los porcentajes máximos de mejora tanto en la comprensión conceptual como en la de procedimientos fueron del grupo de baja capacidad. Dado que el objetivo principal de integrar la tecnología en el aprendizaje del cálculo integral es mejorar la comprensión de cada estudiante, sugieren que es necesario redactar una mejor estrategia de implementación en el futuro.

Marín (2012), menciona que es importante que los alumnos se encuentren motivados, atentos a la clase y con la iniciativa de resolver ejercicios de integrales con distintos métodos de solución, pues de acuerdo a sus conclusiones, el tema de integrales, es un tema difícil si solo se trabaja en lápiz y papel, por lo cual sugiere hacer uso de un ordenador, que a su vez le permitirá al profesor abordar de manera más sencilla, visual y hasta divertida conceptos de cálculo infinitesimal, para lograr que se implique en el proceso de enseñanza-aprendizaje, empleando en el aula con diferentes actividades utilizando diversas tecnologías.

Gutiérrez et. al (2014) evaluaron los efectos que se generaron con la inserción de la tecnología en los procesos de enseñanza aprendizaje en la enseñanza del cálculo integral, y concluyeron que la posibilidad de revisar el material de apoyo cuantas veces sea necesario, brinda al estudiante la oportunidad de resolver dudas y reforzar las temáticas trabajadas en clase en tiempos adicionales y en espacios que amplían las fronteras del aula; asimismo, el diseño del aula, crea cierta disciplina en cuanto a métodos de estudio, puesto que la estructura del entorno virtual exige realizar las actividades en un orden establecido para asegurar la apropiación de los conceptos; de tal manera que el estudiante asume rutinas de estudio quizás ajenas a él, pero con la convicción de incorporarlas en otros momentos y entornos.

Así mismo Zacaria y Salleh (2015) realizaron un estudio donde se investigaron las percepciones de los estudiantes sobre la dificultad del cálculo integral y su preparación para usar la tecnología en el aprendizaje de este tópico. Se seleccionaron al azar un total de 191 estudiantes de dos grupos y se les entregó un cuestionario con dos partes. La primera parte se utilizó para medir las percepciones de los estudiantes sobre la dificultad del cálculo integral. La segunda parte se utilizó para medir la preparación informática de los estudiantes en el aprendizaje. Se adaptaron tres factores principales que contribuyen a la preparación de los estudiantes hacia las computadoras del Índice de familiaridad, actitudes y aversión a las computadoras.

De acuerdo a sus conclusiones, los resultados obtenidos al explorar las percepciones de los estudiantes hacia el cálculo y su disposición a utilizar computadoras en el aprendizaje brindan una nueva perspectiva sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo integral.

Oviedo (2019) realizó un estudio a un grupo reducido de mujeres estudiantes de nivel bachillerato, con la finalidad de comprobar dos hipótesis que se plantean en este mismo trabajo: 1) ‘A mayor empleo de aplicaciones móviles, mayor fortalecimiento en los procesos de enseñanza-aprendizaje de Cálculo Integral’, 2) ‘Las aplicaciones móviles aumentan los índices de aprobación’, las cuales son comprobadas con los resultados que se observan en las gráficas al hacer uso de un método de investigación cuantitativo, siempre y cuando, el docente guie la manipulación de las mismas y retroalimente las dudas de manera oportuna.

El proceso de investigación se llevó a cabo de tal manera que los estudiantes realizaron primeramente una evaluación sin el uso de las aplicaciones móviles y posterior a ello realizaron otra evaluación utilizando aplicaciones móviles únicamente para comprobar resultados, de este modo se contó con información para poder realizar una comparación entre ambas actividades y poder determinar la comprobación de las hipótesis antes mencionadas.

Chaverra y Ortiz (2021), propusieron una estrategia de aprendizaje apoyada en una aplicación móvil para mejorar la comprensión de operaciones matemáticas que busca comprobar la hipótesis donde indica que el proceso educativo relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas mediado por una aplicación móvil, favorece la comprensión de la adición y sustracción de números enteros en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa La Merced de la ciudad de Cali, generando la oportunidad de que dichos aprendizajes sean significativos.

El trabajo realizado se desarrolló en cuatro momentos: 1) Diagnóstico, 2) Diseño, 3) Aplicación y 4) Evaluación. La propuesta de investigación, que es de corte pedagógico, se desarrolla en el área de matemáticas enfocándose en la adición y sustracción de números enteros. Las actividades se desarrollaron teniendo en cuenta las fases propuestas, las cuales están distribuidas secuencialmente partiendo de la socialización de la propuesta a los estudiantes, la aplicación de encuesta diagnóstica en tecnología y la prueba diagnóstica de conocimiento. Se diseñó tanto la aplicación móvil como el ambiente de aprendizaje (guía pedagógica).

A través de los resultados de una encuesta de satisfacción, se argumentó que el uso de aplicaciones móviles fue valorado positivamente, no solo la aplicación móvil como herramienta tecnológica sino principalmente el aporte que realizó al aprendizaje de la adición y sustracción de enteros. De acuerdo a las opiniones de los participantes, afirmaron que de la app móvil lo que más les llamó la atención fueron las actividades de práctica interactivas, que, aunque los niños y niñas las ven como juegos, retos, test, son una forma de evaluar y que dan la oportunidad de realimentar o reforzar los aprendizajes, también es uno de los procesos de autoevaluación.

A continuación, se presenta un resumen de las investigaciones mencionadas anteriormente. (Tabla1)

Tabla 1.- - Investigaciones centradas en tópicos de matemáticas haciendo uso una app y/o software matemático

Año	Autor	Título	Principales hallazgos	Metodología
2007	Cuicas, Debel, Casadei y Alvarez	El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas.	El estudio aportó evidencias para usar el software matemático bajo una metodología constructivista.	Se considera una investigación de tipo mixta donde se realizó un estudio con 34 estudiantes inscritos en la asignatura Matemática II del programa de Ingeniería Civil del DIC. De entre 19 a 23 años donde realizaron ejercicios matemáticos haciendo uso del software matemático.
2011	Ponce	Un análisis del uso de la	Las apps arrojan resultados que en ocasiones suelen ser	-El trabajo realizado es de comparación y análisis, ya que al

		tecnología para el cálculo de primitivas.	más complejos o diferentes, dando oportunidad de abordar temas de matemáticas que se dejan de lado de manera tradicional.	momento de comparar los resultados arrojados por las apps, se procede a analizar la razón por la cual estos resultados son diferentes.
2012	Awang y Zacaria	The Effects of Integrating Technology on Students' Conceptual and Procedural Understandings in Integral Calculus	En este estudio se investigaron ambos tipos de comprensión, es decir, la comprensión conceptual del cálculo integral y la comprensión de procedimientos, y se descubrió que se mejoraban con éxito utilizando el software matemático.	En este estudio, tanto la enseñanza como el aprendizaje del cálculo integral se abordaron mediante un enfoque combinado entre el modo de enseñanza existente en clase magistral y el software matemático como ayuda para el aprendizaje.
2012	Marín	Nuevas tecnologías para motivar el aprendizaje de las integrales.	Se puede obtener ventaja del uso de los celulares en el aula, debido a que con ellos se pueden tener diferentes software que ayuden al alumno a motivarse y profundizar en el tema.	Esta investigación plantea un enfoque mixto con dos líneas de investigación; cualitativa y cuantitativa. De este modo se aplicó una serie de actividades que permiten compara el rendimiento académico de los estudiantes luego de hacer uso de una aplicación y a su vez realizan encuestas sobre el interés de los estudiantes por innovar en la enseñanza de estos ejercicios.
2014	Ruiz, Hernández y Gutiérrez (2014)	Aplicaciones en dispositivos móviles enfocadas al estudio de conceptos de cálculo.	1) Se considera que el uso de las aplicaciones móviles, fue fundamental para lograr en el alumno un proceso de reflexión, comunicación, aprendizaje por descubrimiento y no solo mecánico, dejando de lado el aprendizaje memorístico.	-Metodología de corte cuantitativa. -Se trabajó con un total de 69 estudiantes organizados en tres grupos de trabajo, A) aquellos con las mejores calificaciones obtenidas en el examen de ingreso, B) aquellos que obtuvieron calificación más baja en el mismo examen, C) aquellos que se encontraban recusando la materia de cálculo, todos ellos estudiantes de primer semestre.
2014	Gutierrez, Ariza y Jaramillo	Estrategias didácticas en el uso y aplicación herramientas virtuales para el mejoramiento en la enseñanza del cálculo integral.	-Se concluye que la incorporación de herramientas digitales en el quehacer pedagógico, posibilita el aprendizaje de temas del cálculo integral de gran complejidad para los estudiantes. -Se encontró que el rendimiento académico de los estudiantes mejoró notablemente al hacer uso de la herramientas tecnológicas	Se propone el uso de herramientas tecnológicas a través del diseño de actividades que permitan despertar en los estudiantes el interés por la materia. -En este trabajo se consideró al cuestionario como una herramienta de recolección de datos. -Las actividades diseñadas fueron implementadas con un grupo de tercer semestre de la Universidad Militar de Granada.

2015	Zacaria y Salleh.	Using Technology in Learning Integral Calculus	Se sugiere considerar seriamente la integración de computadoras en el aprendizaje de cálculo, ya que muchos estudios han demostrado un impacto positivo de esta estrategia en la comprensión de los estudiantes.	El propósito de este estudio fue investigar las percepciones de los estudiantes sobre la dificultad del cálculo integral y su preparación para usar la tecnología en el aprendizaje del cálculo integral. Se seleccionaron al azar un total de 191 estudiantes de dos grupos de conferencias. A los estudiantes se les entregó un cuestionario con dos partes. La primera parte se utilizó para medir las percepciones de los estudiantes sobre la dificultad del cálculo integral. La .segunda parte se utilizó para medir la preparación informática de los estudiantes en el aprendizaje.
2019	Oviedo	Aplicaciones móviles para fortalecer los procesos de enseñanza-aprendizaje de cálculo integral.	-Se encontró que el uso de aplicaciones móviles fortalece los procesos de enseñanza aprendizaje de Cálculo Integral. -A través de gráficas se compara y se obtiene que a mayor empleo de aplicaciones móviles, mayor fortalecimiento en los procesos de enseñanza-aprendizaje de Cálculo.	-Metodología de corte cuantitativa, ya que aplica el método deductivo. -El estudio se aplicó a un grupo donde entre el 70% y 80% de los alumnos tienen celular. -Se presentaron diferentes ejercicios, los cuales los alumnos pudieron resolver haciendo uso de diferentes aplicaciones para poder comparar sus resultados y determinar cuál de ellos es el más óptimo.
2021	Chaverra y Ortiz	Estrategia de aprendizaje apoyada en una aplicación móvil para mejorar la comprensión de operaciones matemáticas.	-Trabajar y diseñar actividades que incluyen el uso de dispositivos móviles captan la atención e interés de los estudiantes en el aprendizaje de los temas propuestos Se notó la participación con aportes o requerimientos de explicaciones adicionales, situación que es muy importante en la interacción entre el estudiante y los saberes.	-Es una investigación de tipo cualitativa y se implementa con los estudiantes séptimo grado de la Institución Educativa La Merced de la ciudad de Cali, Valle del Cauca. -Este trabajo se realizó en las inmediaciones de la pandemia, por lo que todas las actividades realizadas fueron de manera virtual.

1.2.2.2 Investigaciones centradas en tópicos de matemáticas haciendo uso de Photomath

Moposita (2019) propuso hacer uso del software Photomath para el estudio de matemática en octavo año de educación básica, donde resaltó el gran incremento que ha surgido en la tecnología informática dentro del campo educativo, y que se ha tornado imprescindible el hecho que los docentes vayan involucrando el uso de la tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje, recalcando que no se debe hacer como una herramienta sino como un eje conector entre los estudiantes, el docente y el conocimiento.

Garzón, (2020) realizó una investigación en la que se utilizó la herramienta tecnológica Photomath, dicha investigación se llevó a cabo en la Universidad Central del Ecuador en la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación en la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales, Matemática y Física, y se trabajó con alumnos de segundo semestre, en un refuerzo académico sobre ecuaciones algebraicas con la finalidad de despejar sus dudas, generando que el estudiante revise sus conocimientos, se realice un proceso de retroalimentación y a la vez que pueda aprovechar la tecnología.

En este sentido Taco (2021), en su trabajo de investigación en el cual se busca definir el ¿Cómo la utilización de herramientas tecnológicas como Photomath en clase, puede afianzar el conocimiento matemático impartido?, para lo cual fue necesaria la planificación y la implementación de una secuencia didáctica específica orientada a vigorizar la asimilación de los contenidos matemáticos expuestos en clase, pero ahora, con el apoyo de aplicaciones matemáticas para celulares, concluye logrando resultados muy positivos en este tema.

Zain et. al (2023) llevaron a cabo un trabajo de investigación-acción para ayudar a cinco estudiantes de segundo grado a mejorar su rendimiento en matemáticas, especialmente en factorización y desarrollo algebraico utilizando la aplicación Photomath. Los datos para este estudio se recopilaron mediante observación, prueba previa, prueba posterior y cuestionario. Luego, los datos recopilados se analizaron en términos de frecuencia y porcentaje. Los resultados de la prueba posterior para los cinco encuestados muestran un aumento en el rendimiento en matemáticas y un mayor interés en las materias de matemáticas cuando pueden consultar esta aplicación Photomath en función de los cálculos que han realizado. El uso de esta aplicación puede ser ampliamente utilizado como herramienta para ayudar a los estudiantes cuando están en casa y no tienen una referencia a la cual consultar. Las implicaciones de este estudio muestran un aumento en la logros e interés en el álgebra.

Así mismo Pikri et. al (2023) proponen en su trabajo de investigación aprender matemáticas utilizando la aplicación Photomath. El propósito de este estudio fue determinar la planificación, implementación, evaluación y limitaciones encontradas en el aprendizaje de Matemáticas utilizando la aplicación Photomath en 4 etapas: (1) La etapa de planificación, que parte de la etapa de reconocimiento de la aplicación Photomath y descarga de la misma en el android del profesor y de los alumnos. (2) La etapa de implementación, que es la etapa que comienza con escribir preguntas, tomar fotografías y escanear preguntas, responder preguntas y resolver pasos en la aplicación, copiar preguntas, trabajar en preguntas de práctica y evaluación/evaluación, (3) Resultados de la evaluación Aprendizaje de matemáticas y (4) Reconocer las limitaciones/debilidades en el uso de la aplicación Photomath, de este modo los investigadores sugieren usar la aplicación Photomath para ayudar a los maestros a enseñar a los estudiantes a responder preguntas de muestra rápidamente y en pasos completos

En la siguiente tabla, (Tabla 2) se resume la información de las investigaciones anteriormente mencionadas.

Tabla 2.- Investigaciones centradas en tópicos de matemáticas haciendo uso de Photomath

Año	Autor	Título	Principales hallazgos	Metodología
2019	Momposita	Software photomath para el estudio de matemática en octavo año de educación básica.	Como parte de las conclusiones el autor recomienda implementar el uso del software gratuito Educativo Photomath como apoyo al estudiante para mejorar el aprendizaje.	Se utilizó el método Inductivo – Deductivo ya que se recopiló información sobre el rendimiento académico, Posteriormente fue analizada para así poder desarrollar una metodología que impacte tanto a estudiantes y profesores. Para la recopilación de datos se utilizó la técnica para medir los aprendizajes a través prueba escrita de corte objetivo o de base estructurada, técnicas de resumen, lectura comprensiva, encuesta e instrumentos para el procesamiento de la investigación.
2020	Garzón	Influencia del uso de Photomath en el refuerzo académico del proceso enseñanza aprendizaje de ecuaciones algebraicas en los estudiantes de segundo semestre de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales, Matemática y Física, de la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación de la Universidad Central del Ecuador, período 2019-2020.	El uso de la aplicación Photomath si influye en su rendimiento, ya que el grupo experimental con el cual se manejó la aplicación tecnológica en el refuerzo académico obtuvo mejor rendimiento que los estudiantes del grupo de control con el cual en el refuerzo académico se manejó una clase tradicional sin el uso de la aplicación Photomath.	Se utiliza el enfoque cuantitativo ya que se va a medir con la aplicación Photomath el rendimiento académico de los estudiantes de segundo semestre de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales, Matemática y Física. Se aplicaron los instrumentos de evaluación a los estudiantes de segundo semestre paralelo “A” (grupo de control), y a los estudiantes de segundo semestre paralelo “B” (grupo experimental) se tabularon y organizaron los resultados, para procesarlos con medidas descriptivas: distribución de frecuencia, porcentajes, medidas aritméticas, desviación típica y varianza
2021	Taco	Efectos del Uso del Software Libre Photomath para el Fortalecimiento de las Competencias Matemáticas en los Estudiantes de Tercero y Cuarto Grado del Centro Educativo Yunguilla.	Al hacer uso de una app se motiva al grupo de estudiantes a reforzar su aprendizaje matemático y de esta manera promover que los estudiantes para que sean más autónomos en el proceso de aprendizaje propio, tanto en el área de las matemáticas, como en las diferentes áreas de estudio al interior de su escuela.	Se hace uso del enfoque cualitativo orientado hacia la interpretación de realidades subjetivas. De este modo realizaron una serie de actividades que van encaminadas a realizar la comparación entre el resultado que obtiene el estudiante al resolver algunos ejercicios y el resultado que se obtiene al hacer uso de Photomath.

2023	Zain, Setambah, Othman y Hanapi.	Use of Photomath Applications in Helping Improving Students' Mathematical (Algebra) Achievement	Mediante el uso de la aplicación Photomath, los estudiantes se vuelven más entusiasmados por intentar responder preguntas de álgebra y logros en matemáticas, aumentarán si hacen mucho ejercicio en este tema de álgebra.	Este estudio utiliza una acción de investigación de formas de diseño para ver aumentar el rendimiento de los estudiantes en temas de álgebra para la materia de matemáticas cuando se utiliza la aplicación Photomath.
2023	Pikri, Putri y Rahmi	Photomath applications for learning mathematics Analysis.	Por esta razón, los profesores y estudiantes sienten que la presencia de la aplicación Photomath puede compararse a un diccionario de matemáticas, que puede proporcionar conocimientos, comprensión, habilidades y también la capacidad de los estudiantes para resolver preguntas de manera adecuada y correcta.	Esta investigación utiliza un tipo de investigación cualitativa, se realizó para comprender y descubrir sobre diversos problemas en términos reales a partir del análisis del aprendizaje de las matemáticas asistido por la aplicación Photomath. El tipo de enfoque de investigación utilizado es la teoría fundamentada.

Al analizar este conjunto de trabajos de investigación que anteceden este proyecto podemos darnos cuenta que algunas investigaciones centran su atención en hacer una comparación de distintas apps matemáticas para demostrar cuál de ellas resulta de más beneficio para los estudiantes al momento de resolver un ejercicio matemático, otras solo comprueban que los grupos de estudiantes que hacen uso de estas herramientas tienen un mejor índice de aprobación respecto de los grupos que no las utilizan. También podemos notar que la mayoría de las investigaciones aquí mencionadas hacen uso de la investigación cuantitativa por lo que sus resultados se expresan mediante gráficas y porcentajes del número de alumnos que obtiene beneficio al usar uso de las apps.

Sin embargo, no se hallaron investigaciones que centren su atención en aspectos relacionados a los procesos de razonamiento y reflexión, al trabajo colaborativo en pequeños grupos, o a las acciones que un docente puede realizar para utilizar este tipo de herramientas como complemento y así mejorar la comprensión de sus estudiantes.

De igual manera algunos de los trabajos que se encontraron fueron aquellos orientados al uso de la tecnología en el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo integral más no de un tema en específico de esta rama como lo es el proceso de solución de las integrales trigonométricas.

1.3 Planteamiento del problema

Se sabe que en la vida escolar en bachillerato existe un buen número de dificultades en los estudiantes, que están asociadas al manejo de los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral. Incluso se ha probado que aún aquellos estudiantes que concluyen uno o dos cursos de Cálculo muestran serias deficiencias al momento de trabajar con los conceptos inmersos en esta materia (Aparicio, 2006; citado en Cabrera y Zaldívar, 2007); por lo cual uno de los problemas a resolver en la enseñanza de la Matemática es el aprendizaje de conceptos que a los estudiantes les resulta difícil asimilar pero que su comprensión es muy importante para la adquisición de otros conceptos que le siguen. Por ejemplo, los procedimientos o algoritmos para resolver derivadas, integrales y series se basan a su vez en la resolución correcta de otras operaciones matemáticas, como es el caso de los límites. Sin embargo, los conceptos involucrados en el estudio de la derivada y la integral no siempre son comprendidos en su totalidad, como ejemplo la derivada como razón de cambio, o el significado de las constantes de integración.

1.3.1. La situación del Contexto

La asignatura de Cálculo integral se ubica dentro del quinto semestre del Bachillerato Tecnológico. Se estructura formando parte de la integración de los contenidos propios de las asignaturas de Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo diferencial del campo disciplinar de Matemáticas. Lo anterior, de conformidad con el Acuerdo Secretarial 653, publicado en el Diario Oficial de la Federación el 04 de septiembre de 2012 (SEP 2017).

Para la cual a través del plan de estudio de referencia del componente básico del marco curricular de la educación media superior (p.228) se establecen los aprendizajes clave de la asignatura, según la figura 1.

Eje	Componentes	Contenidos centrales
Pensamiento y lenguaje variacional.	Cambio y acumulación: Elementos del Cálculo integral.	Aproximación y cálculo del "área bajo la curva" por métodos elementales (método de los rectángulos y métodos de los trapecios). Antiderivada de funciones elementales (algebraicas y trascendentes). Tratamiento analítico de las integrales definida e indefinida. Uso intuitivo de los procesos infinitos y las situaciones límite aplicados a problemas de las ciencias naturales, exactas y sociales.

Figura 1.- Aprendizajes Clave de la asignatura: Cálculo Integral Fuente: SEP (2017)

En este plan de estudios se especifican tres contenidos centrales, donde se observa que uno de ellos se describe como "Antiderivada de funciones elementales y trascendentales"., y dentro de las trascendentales ubicamos a las trigonométricas.

De acuerdo a Toto et al., (2017), el estudio de las funciones es fundamental en toda formación matemática asociada con problemas económicos, financieros y políticos y el tratamiento de temas de análisis matemático como derivadas e integrales y de la física que requieren de tales conocimientos.

El cálculo de integrales es el más avanzado de los algoritmos matemáticos estudiados en bachillerato, pues conjuntamente se reúnen algoritmos algebraicos y de derivación, y también el hecho de que calcular una integral es una operación inversa fundamental a la derivación. Intervienen el álgebra y las reglas de derivación, ya que con frecuencia es necesario efectuar transformaciones algebraicas, sustituciones, factorizaciones, etcétera. A su vez también resulta importante tener que derivar funciones, e incluso en algunos casos resolver sistemas de ecuaciones. Puede ser necesario identificar las funciones que intervienen en una composición y también efectuar la composición de funciones al derivar. (Arreguín, 1989)

Sin embargo, a pesar de su importancia, esta rama de las matemáticas ha tenido grandes dificultades en la enseñanza y el aprendizaje. Ello ha motivado que durante los últimos años se haya venido realizando cierta reflexión, en torno a las posibles dificultades propias en la enseñanza del cálculo (Alanís, 1987).

Por su parte Isuasti y Mendoza (2021), mencionan que el cálculo de integrales trigonométricas es un proceso complejo donde se debe de tener claro los procedimientos a seguir y ser muy observador al elegir la técnica de integración apropiada. Con base en lo anterior y en la experiencia docente de esta autora se ha identificado que en el tema de integrales trigonométricas se encuentra una oportunidad para poder proponer una tarea de aprendizaje que tenga como propósito mejorar el entendimiento de las ideas y conceptos alrededor de este tópico.

1.3.2. Phothomath

Photmah es una aplicación desarrollada por Photmath Inc versión 8.3 que emplea tecnología de visión artificial para el reconocimiento de patrones. En esta aplicación, la interactividad del software y usuario es a través de la cámara del Smartphone. Es decir, al ejecutarse la app, el Smartphone está listo para colocarlo de manera perpendicular sobre el ejercicio en cuestión, automáticamente la aplicación hace un escaneo del mismo y lo traduce de la forma escrita como es presentado y lo resuelve.

En la siguiente tabla (Tabla 3) se enlistan los patrones y símbolos que reconoce Phothomath.

Tabla 3.- Patrones o símbolos que reconoce Phothomath

Aritmética	+(adición),- (sustracción),*(producto), /(cociente).
Signos de agrupación	({) llaves, ([ ) corchetes, () paréntesis.
Símbolos especiales	(∫), derivadas (dx d)
Funciones trigonométricas	Seno, coseno, tangente, etc.

Esta aplicación puede resolver ejercicios matemáticos y a su vez mostrar el paso a paso de la solución dada. Por lo tanto, resuelve integrales aritméticas, logarítmicas, exponenciales y trigonométricas.

Se encuentra disponible en su sitio web, https://photomath.net/en/ (disponible en varios idiomas, entre ellos, inglés, español, francés, italiano, portugués) contiene un menú que incluye: Descargar la aplicación para android, esta aplicación funciona muy bien en teléfonos de gama media compatibles con la versión gratuita.

1.3.3 Delimitando el problema.

Según Segura y Chacón (1996), la enseñanza tradicional no permite que los alumnos puedan tener acceso a herramientas que les sirvan para indagar, analizar y discernir la información, pues casi siempre, la enseñanza tradicional de las matemáticas hace que el estudiante realice los ejercicios usando papel y lápiz, sentado en su pupitre (Radford y André, 2009). Esta práctica tradicional de enseñanza permite que en ocasiones los estudiantes se aburran o cansen de realizar acciones repetitivas que llegan a ser algunas veces monótonas ya que en la mayoría de las ocasiones el docente no plantea aplicaciones y se dedica a enseñar procesos.

En este sentido de acuerdo a Ursini (2006) la tecnología es una alternativa para que los estudiantes se conviertan en sujetos activos y participativos, y que a su vez se propicie la comunicación entre los alumnos y con el profesor, ayudando a la construcción conjunta de significados a través de la tecnología.

Por su parte Harel y Dubinsky (1992), señalan que el aprendizaje de matemáticas de los estudiantes está fuertemente ligado a la parte algorítmica y no al concepto involucrado. En este mismo sentido, Artigue (1995), señala que "… frente a las dificultades encontradas, la enseñanza tradicional y, en particular, la enseñanza universitaria, aún si tienen otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en ese sentido las competencias adquiridas en ese dominio. Este fenómeno se convierte en un ciclo vicioso: para tener niveles aceptables de éxito, se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto es, a su vez, considerado por los estudiantes como lo esencial, ya que es lo que se evalúa” (p. 97).

Por las razones expuestas, es necesario adoptar una visión de la enseñanza de las matemáticas en la que se favorezcan los procesos de reflexión y construcción de significados, en vez de promover los aprendizajes algorítmicos ya que la sola utilización de un software no garantiza que los estudiantes desarrollen un proceso de reflexión o comprensión de conceptos que permitan mejorar su aprendizaje en diversos tópicos. Es necesario que se considere que el uso de una herramienta digital quede determinada a través de una secuencia de actividades que tengan un propósito definido.

De acuerdo a Ruiz et. al (2015), se destaca que las herramientas empleadas en el proceso enseñanza aprendizaje son insuficientes por las siguientes razones: I). Los contenidos que presentan son limitados y carecen de una actualización frecuente. II). El software por sí mismo no es capaz de lograr aprendizajes de conceptos matemáticos si no es utilizado de forma racional y acompañado de actividades didácticas que produzcan reflexiones significativas en los estudiantes.

Por lo tanto “Las aplicaciones móviles solo se utilizan como una herramienta que auxilia al estudiante en su aprendizaje, al permitirle verificar, comparar y detectar sus errores en el procedimiento o bosquejo de los ejercicios realizados en clase o en casa.” (Ortiz, 2019 p. 76), sin embargo, como lo mencionan Ángel y Bautista (2001), existe el temor en muchos profesores de matemáticas que provoca el fantasma de la automatización de los procesos de cálculo: si el ordenador lo hace todo.... ¿qué aprenderán los estudiantes?, y como respuesta a esta interrogante estos autores mencionan que dichos temores son más propios de aquellos que persiguen convertir a sus estudiantes en máquinas de calcular y/o de memorizar que, en profesionales creativos, con una capacidad de raciocinio desarrollada, dotados de sentido crítico, y con una buena dosis de intuición y de recursos matemáticos que les puedan ser útiles en su trabajo.

Desde este punto de vista se propone incorporar el uso de la app Phothomath en el diseño e implementación de una tarea de aprendizaje en el tema Integrales de funciones trigonométricas, para que sirvan como herramienta en la enseñanza de resolución de este tipo de integrales, que pretende servir desde diferentes puntos de vista: a) comparación, b) guía y c) comprobación, ya que de acuerdo a Torregrosa et al. (2010)., señala que “las conceptualizaciones sobre la comprobación matemática, requieren un ambiente virtual de aprendizaje y sus influencias en la solución de problemas” (p.380).

Con base a lo descrito anteriormente podemos plantearnos la pregunta de **¿Cómo emplear la app Phothomath como un elemento central en el diseño de una tarea de aprendizaje, para mejorar el proceso de entendimiento en el tema de integrales trigonométricas?**

A partir de esta pregunta podemos plantearnos otras preguntas más concretas:

- ¿Cuáles son las características de la aplicación que pueden emplearse en el diseño de una tarea de aprendizaje en el tema de integrales de funciones trigonométricas?

- ¿Cómo implementar la tarea diseñada con un grupo de estudiantes del curso de cálculo integral de quinto semestre de bachillerato?

- ¿Cómo identificar los procesos de entendimiento, y las posibles dificultades de los estudiantes durante la implementación de la actividad?

Con base en estas preguntas a continuación se describen los objetivos de esta investigación.

1.4 Objetivos de la investigación

La investigación tiene su fundamento en la influencia del uso de una app en la enseñanza y aprendizaje de tópicos de matemáticas en el bachillerato. Tomando como referencia que de acuerdo a Martín y Tenorio (2014), al usar una app en la práctica docente, se pueden realizar preguntas a los alumnos que de otro modo no se podrían hacer y que no se centran en la simple realización correcta de cálculos (ya que los hace el ordenador), sino en la asimilación de conceptos y adquisición de competencias matemáticas. En este caso se debe de poner especial atención en si el alumno sabe cuándo y cómo deben aplicarse los métodos tratados y si sabe interpretar adecuadamente (y, por tanto, utilizar) las soluciones devueltas por el software al problema que se haya planteado. Las preguntas no deben limitarse a escribir simplemente la salida dada por el software. Se consideran como base los siguientes objetivos:

-Objetivo General

Caracterizar los procesos de entendimiento de los estudiantes en la solución de integrales de funciones trigonométricas mediante el uso de una aplicación matemática integrada en una tarea de aprendizaje.

-Objetivos Específicos

-Definir las características de la aplicación que pueden emplearse en el diseño de una tarea de aprendizaje en el tema de integrales de funciones trigonométricas

-Implementar la tarea diseñada con un grupo de estudiantes del curso de cálculo integral de quinto semestre de bachillerato.

-Identificar los procesos de entendimiento, y las posibles dificultades de los estudiantes durante la implementación de la actividad.

CAPÍTULO 2. MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se describen los diferentes tipos de marcos de referencia, tales como: teórico, práctico y conceptual, describiendo algunas de sus características y componentes, igualmente se describen las dimensiones que los sustentan, que son de tres tipos: ontológico, epistemológico y didáctico.

2.1. Introducción

El marco referencial es un elemento importante de cualquier investigación. Consiste en una compilación breve y precisa de conceptos, teorías y reglamentos que están directamente ligados con el tema y el problema de la investigación. “Esta parte de la investigación permite dilucidar las ideas y las finalidades de los autores.” (Pérez, 2019 p.23).

De acuerdo a Ander-Egg (1990) el marco referencial es un espacio que sirve para expresar las proposiciones teóricas generales y específicas, los postulados, los supuestos, categorías y conceptos que han de servir de referencia para ordenar los hechos referentes al problema que se está investigando, este contiene un conjunto de elementos conceptuales, principios, sentencias, paradigmas, categorías y modelos referidos al problema de investigación, y suele derivarse de la teoría desde la cual interpretamos la realidad. Se debe elaborar a partir de un cuerpo de referencia más amplio, o directamente a partir de una teoría.

El enfoque que se adopta para el análisis del objeto de estudio debe de ubicarse en la perspectiva de lineamientos de carácter teórico. Esto exige del investigador la identificación de un marco de referencia sustentado en el conocimiento científico; por ello cada investigación toma en cuenta el conocimiento previamente construido, por lo que cada investigación se apropia de parte de la estructura teórica ya existente, por lo anterior cada problema posee un referente teórico que se convierte en la base que brinda al investigador el conocimiento del objeto de estudio (Bavaresco, 2006).

Eisenhart (1991) y Lester (2005) sugieren la existencia de tres tipos de marcos de investigación, cada uno con características particulares:

1) **Marco Teórico:** El marco teórico se caracteriza por su rigidez y poca flexibilidad, ya que se considera que al hacer uso de este se deben seguir los principios y procedimientos de la teoría de manera estricta. Lo cual limita la actividad del investigador, pues se considera necesario seguir de manera muy rigurosa los lineamientos, las formas de argumentación y experimentación que presenta la teoría. De esta manera se considera que al utilizar un Marco Teórico los resultados que se presentan no son evidencia, sino más bien algo decretado a través de los principios establecidos por la teoría, es decir, generalmente el investigador acomoda los resultados al contexto de la teoría (Einsehart, 1991).
2) **Marco Práctico:** En un Marco práctico la investigación es guiada a través de la experiencia y conocimiento propios de la persona que la está realizando, esto se considera una limitante ya que no se toma en cuenta otras perspectivas, al

enfocarse únicamente al conocimiento generado y obtenido previamente en otras investigaciones realizadas por el mismo autor. Se considera que los resultados obtenidos a partir de una investigación basada en un marco práctico son extremadamente locales (Einsehart, 1991), razón por la cual, no es muy conveniente hacer uso de este tipo de marcos pues limita los resultados al ser aplicables solamente a situaciones en extremo restringidas, en lo referente a circunstancias, condiciones y contexto.

3) **Marco Conceptual:** Un Marco Conceptual puede estar basado en distintas ideas o constructos provenientes de diferentes teorías, modelos o perspectivas, y varios aspectos del conocimiento del investigador las cuales necesariamente deben de relacionarse para poder formar parte de una estructura. Un marco conceptual se adapta a las necesidades particulares del problema que se está investigando. Un constructo es algo abstracto, por lo que no se puede observar directamente, pero si es de gran utilidad al momento de interpretar datos empíricos. Los marcos conceptuales adoptan constructos teóricos de distintas fuentes, así como resultados prácticos derivados de la experiencia personal del investigador o de investigaciones previas. En un marco conceptual es necesario ser explícito con los supuestos que el investigador sostiene (ontológicos, epistemológicos o didácticos, entre otros), porque de esta manera permitirá al lector entender por qué el investigador o equipo hace lo que hace y a su vez también permite a los investigadores justificar, de forma clara y concisa, por qué se eligieron ciertos conceptos y relaciones, y no otros, para sustentar la investigación (Lester, 2005).

Por lo tanto y tomando en cuenta cada una de las descripciones arriba mencionadas, donde se especifican algunas características de los marcos que algunos autores proponen, en esta investigación se opta por hacer uso de un marco conceptual que sirva para fundamentar teóricamente este trabajo.

2.2. Elementos que integran el Marco Conceptual

Según Mishra y Koehler (2006) citado en Barrera y Reyes (2018), varias investigaciones en educación matemática, demuestran que un programa de investigación se puede estructurar alrededor de más de una perspectiva. lo que permitirá analizar con más detalle los procesos cognitivos y a su vez identificar las dificultades que muestran los estudiantes al abordar tareas de aprendizaje matemático. De esta manera se podrán elaborar bases teóricas.

Respecto a lo descrito anteriormente el marco referencial de este trabajo de investigación está orientado bajo tres dimensiones: (i) ontológica, (ii) epistemológica y (iii) didáctica.

2.2.1 Dimensión ontológica

Por su etimología la ontología proviene del griego ontos que significa "ser, ente" y de logos que significa "discurso, reflexión". Se ocupa de la definición del ser, así como de estudiar las propiedades, estructuras y sistemas de las cosas, para establecer las categorías del origen epistemológico ya que nos dará soporte en el proceso metodológico con el que el alumno aprende, a través de su experiencia y organización de ideas dentro de su propia estructura cognitiva, que será diferente a la del resto de sus compañeros, suponiendo en un contexto grupal. Dado que aprender es un proceso social, el medio cultural y sus producciones determinan las características del conocimiento que se construye (Werstch, 1993).

Esta dimensión se refiere a la naturaleza de los fenómenos sociales y a su grado de estructuración, desde el punto de vista de la investigación educativa. Es una rama de la filosofía que estudia lo que es y lo que no es, es considerada como la dimensión fundante de lo que se piense sea “real” e “irreal”. “Ser” y “no ser” constituyen el predicado más general que se puede dar (o que “puede tener”) a cualquier ser o cosa.

En pocas palabras, la dimensión ontológica, es decir, la manera de ver y entender la realidad educativa, se considera como la naturaleza de lo que pretendemos investigar, es una realidad objetiva, observable y medible. (Alguacil de Nicolás et. al. 2016)

De igual manera, la palabra "matemática" (en griego μαθηματικά mathēmatiká, "las cosas que se aprenden") proviene del griego antiguo μάθημα (matemáticas), que significa "campo de estudio o instrucción". Por lo tanto, se considera que el aprendizaje matemático requiere esfuerzo o instrucción.

Se puede decir también que la Matemática es vista como un gran conjunto de expresiones simbólicas y fórmulas, Flores (1998) menciona lo siguiente:

> *“El estudio ontológico de las matemáticas nos permitirá discutir sobre la dialéctica descubrimiento/creación, la consideración matemática producto/matemática proceso, la relación entre el objeto y el sujeto de conocimiento, la relación entre el conocimiento individual y el conocimiento colectivo, la relación entre el conocimiento matemático y la naturaleza material, el valor de verdad de los conocimientos matemáticos y la utilidad y/o belleza de las matemáticas.” p.40*

En otras palabras, hace referencia a las matemáticas como una relación entre dos entes, el sujeto y el objeto, y que a su vez en esta relación existirá el descubrimiento o creación del conocimiento de manera individual o grupal para dar valor y utilidad a los significados matemáticos.

En relación a lo anteriormente descrito, la postura ontológica que se adopta en este trabajo de investigación, refiere al conocimiento como algo que se encuentra en constante cambio con base en nuevos descubrimientos, también es importante atribuirle características que puede desarrollar el estudiante cuando aprende matemáticas, entre ellas destacan la capacidad de análisis y reflexión, y la necesaria adquisición de una disposición para ver el mundo a través de la lente de un matemático (Schoenfeld, 1992; Sarama y Clements, 2009; Clements y Sarama, 2013), y no únicamente memorizar hechos y adquirir fluidez para llevar a cabo algoritmos o procedimientos rutinarios. (Barrera y Reyes, 2018).

Al respecto Bonilla (2013) nos recuerda que la Matemática es en sí misma una interpretación racional y problemática del universo en su esencia ontológica:

> *“La matemática es la ciencia de estructurar una realidad estudiada, es el conjunto de sus elementos, proporciones, relaciones y patrones de evolución en condiciones ideales para un ámbito delimitado". Es decir: "Hacer matemática es desentrañar los ritmos del Universo". Es inherente a esa realidad, independientemente del observador, o de que se interprete como onda o como partícula, o nivel vibratorio y número de dimensiones de referencia.” (p. 198).*

2.2.2 Dimensión epistemológica

El término epistemología deriva del griego episteme que significa conocimiento, y es una rama de la filosofía que se ocupa de todos los elementos que procuran la adquisición de conocimiento e investiga los fundamentos, límites, métodos y validez del mismo. (Ceberio y Watzlawick, 1998).

“Epistemología” significa “estudio de la ciencia”; o mejor, cuestionamiento del alcance del conocimiento científico, no en cuanto a sus resultados; sino, en cuanto a su modo, a su método. (Álvarez y Fernández, 2016).

Para llegar a deducir cómo se estructura el conocimiento y cómo se organiza es importante que se conozcan los aspectos fundamentales y los modos generales de ser de las cosas.

De acuerdo a Barrera y Reyes (2018) se supone que cada persona construye, de forma activa, su propio conocimiento cuando se enfrenta con problemas que desequilibran sus estructuras cognitivas, independientemente del contexto o la presencia y naturaleza del proceso de enseñanza, Schoenfeld (1992) menciona que para aprender matemáticas, es necesario ver el mundo desde la perspectiva de un matemático donde se necesita según Polya (1945) tener disposición para realizar actividades como la experimentación, exploración, formulación de conjeturas, justificación de resultados, comunicación de ideas, así como la resolución de problemas desde diferentes rutas.

Por otro lado, se considera que el aprendizaje es un proceso que se lleva a cabo en una comunidad donde se construyen significados o entendimientos considerados como compartidos (Cobb et al., 1991).

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores en este trabajo se toma una postura socioconstructivista. De esta manera se considera que el conocimiento nace de la experiencia de la base del propio estudiante donde se necesita experimentar lo que se está mencionando de manera concreta y así causar conjeturas fundamentadas.

En esta perspectiva, se acepta que el aprendizaje es un proceso continuo, cada estudiante dentro y fuera del aula, y que cada estudiante interpreta una experiencia, particularmente las tareas que enfrenta en la clase de matemáticas, en términos de su estructura cognitiva y de la constitución particular de esta, la que, a su vez se constituye a partir de experiencias personales; por ello, el conocimiento que construye un estudiante, a pesar de haber abordado las mismas tareas que el resto de los integrantes de una misma comunidad de práctica, será diferente del de los demás; porque la estructura cognitiva es el medio a través del cual el cerebro de una persona construye la realidad, y porque dicha estructura está organizada a partir de experiencias, las cuales son de carácter individual y dependientes del sistema de interpretación (los sentidos, un sistema nervioso y un cerebro), en consecuencia, la estructura cognitiva de cada persona difiere de la estructura cognitiva de cualquier otra persona. Las consideraciones anteriores permiten afirmar que en un salón de clase se construyen significados considerados-como-compartidos y no significados compartidos, ya que solo tenemos la esperanza, nunca la certeza, de que las formas de entender las ideas o conceptos matemáticos de una persona son parecidas o presentan gran semejanza con las del resto de los integrantes de la comunidad de práctica (Cobb et al., 1991).

Dentro de este contexto de comprensión de lo humano en cada alumno, González (2004) expresa ideas semejantes en cuanto a la importancia de la vida misma del estudiante y su entorno, y así comprender lo visto en clases:

> *"El alumno es visto como un constructor activo de su propio conocimiento mientras que el educador va a cumplir un papel facilitador de dicho conocimiento. En tal sentido, cuando el educando es un participante activo de su propia educación tiende a facilitársele la aplicación de su conocimiento obtenido a hechos acontecidos en su vida cotidiana. Si se ubica el análisis en la actualidad se puede observar que el currículum en muchas instituciones de educación superior, está dirigido a un enfoque constructivista, ya que busca que el educando participe activamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En esa misma proporción el alumno reconstruirá activamente sus creencias tomando selectivamente la información que le suministre el entorno y que sea de su propio interés; también le va a permitir reafirmar la estructura en base a los fenómenos racionales tomando en cuenta los elementos culturales y las actividades de su vida cotidiana para que los alumnos logren la competencia racional." (p. 50)*

Así pues, la actividad matemática es una determinada manera de pensar, actuar y dialogar sobre sus contenidos abstractos y sobre la vida misma. Este doble aspecto traduce las dimensiones de investigación y docencia.

En este mismo contexto, Montero (2006) describe a las matemáticas como algo que necesariamente tiene que trascender hacia la utilidad cotidiana, que son necesarias para comprender y analizar la abundante información que se recibe en el día a día.

Desde la misma perspectiva, "el aprendizaje de los estudiantes debe ser activo, deben participar en actividades en lugar de permanecer de manera pasiva observando lo que se les explica." (Hernández, 2008, p.27). A partir de lo anterior, se establece que las aplicaciones móviles se convierten en una alternativa apropiada, para impulsar la participación activa del alumno y profesor en los procesos de enseñanza-aprendizaje. (Oviedo 2019).

Tall (1991) señala que el ordenador puede ser usado durante el aprendizaje con un objetivo muy preciso: llevar a cabo los procedimientos y conceder al estudiante concentrarse en sus productos. Permitiría así un cambio en la encapsulación de procesos pues, en vez de forzar al estudiante a aprender e interiorizar en primera instancia el proceso, le permitiría centrarse en las propiedades del producto, en sus relaciones a más alto nivel. Surge así, lo que Tall denomina “principio de construcción selectiva del conocimiento”, mediante el cual el estudiante es alentado a centrarse separadamente en los procesos matemáticos y en los productos de tales procesos. El ordenador facilita que no siempre se focalice el proceso como paso previo al producto.

Según las investigaciones de Perez (2014), con el uso las apps se mejora el proceso de enseñanza aprendizaje, y resulta beneficioso ya que el estudiante se siente motivado y dinámico mejorando sustancialmente la relación estudiante – docente. El uso de la tecnología, la variabilidad y fuerza permiten hacer un análisis de lo que los estudiantes deben aprender y de qué manera deben hacerlo. La tecnología nos inclina hacia el trabajo en equipo transformando actitudes, aptitudes, concepciones y procesos cognitivos, permitiendo un ambiente de interacción social que buscan la solución y el entendimiento (Waldegg, 2002).

2.2.3 Dimensión didáctica

La dimensión didáctica busca dar respuesta a identificar las características del aprendizaje, que se consideran necesarias para tener éxito en este proceso. Es necesario que los estudiantes desarrollen niveles progresivos de entendimiento de las ideas matemáticas (Hiebert, et al. 1997).

Schoenfeld (1994), sugiere que es necesario orientar una construcción gradual de los aspectos esenciales del pensamiento matemático de tal manera que se pueda abordar en los siguientes aspectos: (a) desarrollar un punto de vista que valore los procesos de matematizar, abstraer y tener una predilección de aplicarlos, y (b) desarrollar competencias con las herramientas del oficio (abstracción, representación simbólica y manipulación simbólica) y usarlas con el objetivo de entender y dar sentido a estructuras matemáticas, a través del diseño de tareas de aprendizaje.

El diseño de las actividades de enseñanza y aprendizaje, requiere de sólidos conocimientos matemáticos, además de una formación didáctica; ambos elementos son complementarios. En este sentido, se requiere que los docentes sean capaces de enseñar verdaderamente los contenidos.

El profesor no debe olvidar que la Matemática es Ciencia y no un juego didáctico. Se trata de profundizar en los aspectos ontológicos y epistémicos, tal como lo sugiere Font (2014), en su texto sobre epistemología y didáctica de las matemáticas:

> *Los diferentes programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas de manera explícita, o implícita, se posicionan sobre aspectos ontológicos y epistemológicos para fundamentar sus constructos teóricos. Dichos constructos sirven como marco teórico para realizar investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, pero también deben servir para orientar la mejora de la enseñanza de esta materia y, muy en especial, deben ser útiles en la formación inicial y*

> *permanente del profesorado. En la segunda parte, se toma un constructo concreto, el de configuración epistémica, y se reflexiona sobre su posible utilidad en la formación del profesorado. (p. 109).*

En este sentido, la didáctica se debe ver como una metodología que posibilita el diseño de estrategias y la utilización de herramientas que sirven de apoyo a los estudiantes en la apropiación de estructuras conceptuales y simbólicas propias de las matemáticas.

2.3 Marcos Conceptuales

Considerando la temática anterior se hablará a continuación de los marcos conceptuales a emplear en esta investigación, relacionados con el tema en cuestión, haciendo referencia a las explicaciones dadas para el problema de investigación de interés, los procedimientos más adecuados para dar respuesta a sus interrogantes, así como la fortaleza de la evidencia alcanzada en términos de la instrumentación metodológica (diseño y análisis de los datos obtenidos), dentro de los cuales trataremos los siguientes: i) Uso de herramientas digitales, ii) Aproximación didáctica de resolución de problemas, iii) Tarea de aprendizaje y demanda cognitiva, iv) Teoría de representaciones semióticas de Duval los cuales serán descritos a continuación.

2.3.1 Uso de herramientas digitales

Las tecnologías en el ámbito educativo influyen directamente en los procesos de aprendizaje, de esta forma se alteran los cimientos o fundamentos de los sistemas de educación provocando cambios y ajustes en los espacios de aprendizaje, en el concepto de institución o escuela, y en las formas de enseñanza. (Edwards, et al., 2021).

De acuerdo a Santos-Trigo (2011), en relación al uso de estas tecnologías, si los estudiantes disponen de estas herramientas pueden enfocar su atención en procesos claves del pensar matemáticamente como la toma de decisiones, la reflexión matemática y el razonamiento, más que en la realización de procedimientos rutinarios. cuando se hace uso de la tecnología como apoyo de aprendizaje se pueden obtener ventajas como es que proporciona retroalimentación inmediata, lo que permite al alumno descubrir sus errores, analizarlos y corregirlos. “En estos ambientes el error ya no es algo que hay que esconder, se vuelve más bien un medio para profundizar en el aprendizaje.” (Ursini, 2006, p.25).

Se tiene evidencia, las herramientas digitales, modifican la manera de construir el conocimiento matemático, así como la forma de movilizar los recursos, ante una actividad realizada a lápiz y papel (Sandoval y Moreno-Armella, 2012). Además, en general ésta relación entre aprendiz y herramienta se da a través de los que los autores llaman proceso de mediación.

Aunado a ello, se considera fundamental la incorporación de estas herramientas para aprender y reaprender conceptos matemáticos inmersos en el currículo escolar, y transformarlos didácticamente en objetos (Moreno-Armella, 2013) y, bajo esta nueva condición, incorporarlos en la enseñanza como instrumentos mediadores.

2.3.2 Aproximación didáctica de resolución de problemas

La perspectiva de resolución de problemas promueve que el estudiante use estrategias empleadas comúnmente por los matemáticos al resolver problemas (Santos-Trigo, 2020), haciendo uso de elementos didácticos orientados a que los estudiantes desarrollen un aprendizaje basado en el descubrimiento, así como disposición para explorar e investigar relaciones, emplear distintas formas de representación al analizar fenómenos, usar distintos tipos de argumentos y comunicar resultados (Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez, 2018).

La resolución de problemas ha tomado un mayor impulso en la educación matemática en los últimos 30 años logrando así el desarrollo de grandes proyectos (Sepúlveda et al. 2009). Quizás la razón sea que se nutre de los aspectos esenciales del quehacer matemático: los problemas y las acciones típicas del pensamiento que intervienen en el proceso de solución. El estudio e incorporación de estos aspectos, así como la puesta en claro de cómo realizar acciones que contribuyan a la resolución de los problemas, se debe a George Polya que, debido al acostumbrado fracaso de sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, se propuso diseñar un método que pudiera servirles para aprender a resolver problemas, al cual denominó ¿Cómo resolverlo? (Polya, 1945), marcando así un nuevo rumbo en el estudio de problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Es a partir de la década de 1970 cuando se reconoce plenamente el trabajo de Polya y surgen estudios, artículos y libros que buscan dar explicaciones a sus planteamientos desde diferentes ángulos, donde se destacan dos importantes planteamientos surgidos de estos estudios: el primero se relaciona con el diseño de problemas o tareas que resulten útiles en la enseñanza de las matemáticas, y el segundo tiene que ver con la implementación de una forma de instrucción que combine el trabajo colectivo de los estudiantes, en pequeños grupos y en toda la clase, con el individual (Sepúlveda et al. 2009).

Además, a Polya se debe la incorporación de los procesos heurísticos y el monitoreo y control como ingredientes fundamentales en la resolución de problemas y, por tanto, en la educación matemática.

Polya (1945) establece que la resolución de problemas es una característica esencial que distingue a la naturaleza humana y cataloga al hombre como “el animal que resuelve problemas”. Siendo un matemático productivo, se preocupó por el mal desempeño de sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, particularmente al resolver problemas, además, establece que existen dos tipos de problemas: rutinarios y no rutinarios. Los problemas rutinarios son aquellos que, teniendo interés en resolverlos, el que los enfrenta encuentra el camino de solución de manera casi inmediata, no requieren un esfuerzo mental extraordinario para visualizar el método, el trazo, el algoritmo o el lugar donde puede consultarse una idea para su solución. En cambio, los problemas no rutinarios requieren esfuerzo y meditación antes de que se vislumbre alguna idea para la solución. Esta clasificación es relativa, pues para algún estudiante resolver un problema puede significar un esfuerzo demasiado grande, para otro puede ser menor el esfuerzo realizado, y puede significar un acto de simple recordatorio para un matemático talentoso o un estudiante con entrenamiento.

Schoenfeld (1985) profundiza y complementa el trabajo de Polya; incorpora y justifica la dimensión cognitiva en el proceso de resolución de problemas. Llama metacognitivos a los procesos de reflexión que están asociados a las acciones mentales de monitoreo y control que actúan implícita y continuamente mientras se resuelven problemas; es una habilidad que se va desarrollando y ayuda a identificar desviaciones y contradicciones que se cometen en el camino de solución. Para Schoenfeld, las indicaciones que permiten avanzar en el método propuesto por Polya equivalen a hacer un inventario de lo que el estudiante sabe y de la manera en la que adquirió los conocimientos

Con este tipo de actividades, se espera que los estudiantes desarrollen ciertas habilidades para el estudio y entendimiento de las matemáticas, las cuales están vinculadas con los aspectos característicos del quehacer de las matemáticas, es decir, con acciones cotidianas que realiza una persona que se encuentra inmersa en resolver problemas. Schoenfeld (1992) identifica estas acciones como las características del pensamiento matemático: tomar casos particulares, plantear conjeturas, descubrir patrones y relaciones, hacer generalizaciones y justificar resultados. También reconoce que el aprendizaje de las matemáticas es un proceso continuo que se ve favorecido en un ambiente de resolución de problemas, donde los estudiantes tienen oportunidad de desarrollar modos de pensar consistentes con el quehacer de la disciplina.

Así, el reto en la instrucción matemática es generar condiciones de aprendizaje para los estudiantes en las que se reflejen valores propios relacionados con el desarrollo de la disciplina. En particular, el salón de clases debe promover actividades y hábitos consistentes con la práctica real de la disciplina (Schoenfeld,1992, p. 345). La resolución de problemas parece ser función de varias categorías de factores interdependientes, como la adquisición y utilización de conocimientos, control, creencias y contextos sociales y culturales (Sepúlveda et al., 2009).

2.3.3 Tarea de aprendizaje y demanda cognitiva

Un elemento clave en las características del aprendizaje en los estudiantes son las tareas que el profesor implementa en el salón de clases, (Doyle, 1988). A contrapartida de los procedimientos memorísticos o rutinarios al momento de abordar una tarea, que no le demandan al estudiante un mayor esfuerzo ni poner en juego algunos conocimientos previos, una tarea de aprendizaje debe brindar experiencias no rutinarias, y que requieren de un mayor razonamiento conceptual y el establecimiento de conexiones entre diferentes contenidos y procedimientos, favoreciendo un aprendizaje con entendimiento (Hiebert et al., 1997 citado en Torres et al., 2022).

Durante el diseño de tareas de aprendizaje es fundamental tomar en cuenta aspectos relevantes como:

- Elegir adecuadamente el problema en torno al cual se diseñará la tarea de aprendizaje
- Definir con claridad el objetivo de aprendizaje que se persigue con la ejecución de la actividad
- Identificar los elementos matemáticos en torno al objetivo
- Considerar los recursos disponibles para resolverla.

Por otro lado, debemos de tener en mira un constructo teórico que sirve para medir el nivel de la demanda cognitiva de las tareas matemática creado por Stein, Remillard y Smith (2007), en el que clasifican las tareas con base en dos niveles de demanda, aquellas que incluyen a la memorización y a la realización de procedimientos sin conexión las cuales son clasificadas como tareas de bajo nivel de demanda cognitiva, y aquellos que se clasifican como alto nivel de demanda cognitiva, en las que se puede observar la realización de procedimientos con conexiones.

2.3.4 Teoría de representaciones semióticas de Duval

Según Raymond Duval (2004) el aprendizaje de las matemáticas constituye un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión. En la matemática encontramos distintos sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraicas, lógicas, funcionales que se tornan en lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas de barra, diagramas de pastel, etc. Cada una de las actividades anteriores constituye una forma semiótica diferente, entendiéndose por tal a la actividad de formación de representaciones realizadas por medio de signos. El dominio de las operaciones necesarias para cambiar la forma mediante la cual se representa un conocimiento es primordial, ya que se constituye en una operación cognitiva básica que está muy relacionada con los tratamientos de comprensión y con las dificultades del aprendizaje conceptual. Esto puede ser la causa de obstáculos que sólo la coordinación de varios registros semióticos ayuda a remontarlos, y en consecuencia el dominio de la habilidad para cambiar de registro de cualquier representación semiótica en el aprendizaje de la matemática se torna fundamental. En síntesis, los conceptos matemáticos no son objetos reales y por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio y para llevarlo a cabo resulta importante tener en cuenta que las mismas no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión. Si no se distingue el objeto matemático (números, funciones, rectas, triángulos, etc.) de sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, gráficos, trazados de figuras, etc.) no puede haber comprensión en matemática. Por otra parte, las representaciones semióticas no deben confundirse con las representaciones mentales es decir con el conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener acerca de un objeto, una situación y sobre todo lo asociado al mismo (Oviedo et al 2012).

2.3.5 Articulación de los marcos conceptuales

Se considera que dentro de la presente investigación se articulan los marcos conceptuales antes mencionados, de tal forma que la propia intención de hacer uso de una herramienta digital, en este caso una app, dentro de la tarea de aprendizaje involucra directamente al marco conceptual: Uso de herramientas tecnológicas, que como ya se mencionó anteriormente debido al desarrollo propio de la humanidad es conveniente propiciar una estrecha relación entre la educación y la tecnología.

En el mismo sentido es sumamente importante que durante el proceso de diseño de una tarea de aprendizaje, el profesor reflexione sobre la utilización de herramientas digitales, pues de hacerlo, debe asumir como parte de su rol, adecuar el escenario de instrucción y los recursos disponibles, para el logro de los objetivos de aprendizaje planteados. En la medida en que se diseñe adecuadamente una tarea de aprendizaje, se puede propiciar en los estudiantes el desarrollo de episodios en los que muestren elementos que caracterizan al pensar matemáticamente: identificar datos e incógnitas, representar la información en diferentes registros, identificar patrones, elaborar conjeturas, implementar y ejecutar estrategias de solución, discutir sus estrategias, comunicar resultados.

De esta manera se ve involucrado el marco conceptual: Resolución de problemas puesto que a lo largo del proceso de la tarea de aprendizaje están presentes los principales elementos propuestos por el método de Polya y modificados por Schoenfeld donde se toman en cuenta casos particulares, que permitan a los estudiantes plantear conjeturas, descubrir patrones y relaciones, para luego hacer generalizaciones y justificar resultados.

Tomando en cuenta que el proceso inquisitivo es la manera en que un profesor guía la fase de aplicación de una tarea de aprendizaje, el docente puede hacer uso adecuado de este proceso que le permita guiar y extender la actividad. De igual forma este proceso inquisitivo puede permitir que una tarea o actividad de aprendizaje matemática pueda alcanzar distintos niveles de demanda cognitiva (Stein y Smith, 1998), logrando así involucrar el constructo teórico: Tareas de aprendizaje y demanda cognitiva. Este constructo implica la realización de procedimientos que: permiten crear conexiones entre distintos conceptos y significados, proporcionan además tiempo suficiente para su realización, propician a los estudiantes a hacer preguntas y elaborar justificaciones y explicaciones.

Por otro lado, es importante mencionar que la demanda cognitiva de una tarea matemática puede decaer durante la implementación de esta, por lo cual el profesor debe prestar atención a las acciones de los estudiantes, para promover un ambiente de trabajo en el que el nivel de demanda cognitiva de la tarea se mantenga o incremente. (Torres et al., 2022). De igual manera no dejaremos de lado la teoría de las representaciones semióticas de Duval (2004), las cuáles se consideran importantes para que el estudiante visualice desde distintos enfoques un elemento matemático, con la finalidad de lograr una adecuada interpretación. En este sentido lograremos interrelacionar cada una de las bases conceptuales, de constructo y teóricas que fueron consideradas dentro de la presente investigación.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

En este capítulo se describen las características de la metodología empleada, y las razones por las que es conveniente trabajar con este tipo de aproximación, dando a conocer algunos de sus componentes e instrumentos de recolección de datos, mismos que fueron seleccionados para efectos de la presente investigación.

En una segunda parte del capítulo se describen el diseño de investigación, el alcance de la misma, las características de los sujetos de estudio y los aspectos relevantes del diseño e implementación de la tarea de aprendizaje.

3.1 Introducción

La investigación cualitativa y la cuantitativa son los dos principales tipos de métodos que emplean los científicos sociales, los psicólogos y otras personas cuando intentan comprender mejor un concepto de la sociedad. Ambos métodos de investigación varían en su enfoque y el método empleado.

Cuando se trata de elegir una metodología de investigación, es necesario considerar ciertos aspectos relevantes que permitan tomar la mejor decisión, por ejemplo, la investigación de tipo cualitativo se caracteriza por su renovado interés y sentida necesidad por aplicar su denominada metodología cualitativa demandada especialmente por parte de sociólogos, educadores, psicólogos, científicos sociales y planificadores urbanos, entre otros (Mesias, 2010). Las ciencias humanas implicadas siempre en la comprensión e intervención de la realidad en que viven las personas y sus comunidades está obligada a conocer exhaustivamente el contexto, por lo que analistas e investigadores sociales prefieren hacerlo desde dentro de las comunidades o grupos sociales implicados en la investigación para poder captar los significados profundos (Mesias, 2010).

Al respecto para Lester (2005) la investigación en educación matemática ha pasado de los estudios experimentales y cuantitativos a estudios de tipo cualitativo, pues entre sus objetivos está realizar descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que son observables (Borda 2013). En este sentido la Didáctica de la Matemática como disciplina joven, ha ido adoptando y adaptando para su campo de estudio, las metodologías cualitativas originadas desde las ciencias sociales.

Este enfoque cualitativo de investigación se preocupa por presentar y mostrar la esencia del fenómeno u objeto de estudio que se pretende investigar. Algunos especialistas, como Hernández, et al. (2014) identifican el paradigma cualitativo como el enfoque que utiliza la recopilación de datos sin medición numérica con el fin de lograr la interpretación del problema estudiado; y generalmente se les asocia a proyectos de investigación social.

De acuerdo a Martínez, citado en Campos (2010) una investigación de enfoque cualitativo tiene dos elementos básicos de actividad, y se considera primordial en cada proyecto identificar y a su vez exponer la manera en que se desarrollarán estos dos elementos básicos:

1.- Recoger toda la información necesaria y suficiente para alcanzar los objetivos de la investigación o solucionar el problema en cuestión.

2.- Estructurar esa información en un todo coherente y lógico.

Por su parte Fraenkel y Wallen (1996) mencionan que los estudios de tipo cualitativo presentan cinco características básicas: (i) El ambiente natural y el contexto en que se da el asunto o problema es la fuente directa y primaria, y la labor del investigador constituye ser el instrumento clave en la investigación. (ii) La recolección de los datos es mayormente verbal que cuantitativa. (iii) Los investigadores enfatizan tanto los procesos como los resultados. (iv) El análisis de los datos se da más de modo inductivo. (v) Se interesa mucho en saber cómo los sujetos en una investigación piensan y que significado poseen sus perspectivas en el asunto que se investiga.

A su vez Corbin y Strauss (2002) establecen tres componentes clave en el desarrollo de una investigación cualitativa que son los datos, los procedimientos y los informes.

3.2 Técnicas de investigación cualitativa

Entre las diferentes técnicas utilizadas por los distintos métodos de investigación cualitativa se destacan:

- Observación Participante: Consiste en la observación del contexto desde la participación directa del investigador o analista, no es encubierta y no es estructurada.
- Entrevista: Desarrollada en el contexto formal de la interacción entre el analista o investigador y la persona o grupo investigado, por tanto, puede ser de carácter individual, grupal, estructurada o semi-estructurada.
- Técnicas Grupales: Prefiere para su estudio a los Grupos de Discusión o Grupos Focales, pero también puede acudir a la Mesa Redonda, el Simposio, el Panel o a los Grupos de Consenso.
- Técnicas Documentales y Textuales: Acude a los textos de toda índole donde realiza el análisis del contenido y su discurso ahí inmerso.

3.3 Diseño de la investigación

Los diseños de investigación son considerados el plan, la estructura y las estrategias que se utilizarán para dar respuestas a las preguntas de investigación, parten de un marco de referencia y señalan cómo se obtendrán los datos. El diseño también señala cuántos y cuáles registros u observaciones se realizarán y cómo se analizará la información obtenida, que posteriormente se utilizará para responder la pregunta de investigación (Reidl, 2012).

Elaborar el diseño de una investigación cualitativa incluye algunos componentes que deben ser coherentes con las preguntas y el planteamiento del Problema de investigación. (Flick, 2015).

A continuación, anexamos una cita que nos permite puntualizar más sobre la naturaleza de los diseños cualitativos:

(…) cada estudio cualitativo es por sí mismo un diseño de investigación. Es decir, no hay dos investigaciones cualitativas iguales o equivalentes (son como hemos dicho piezas artesanales del conocimiento, “hechas a mano”, a la medida de las circunstancias) (Hernández, et, al. 2010, p. 492).

Existen múltiples modalidades dentro del diseño de una investigación cualitativa: i) La etnografía, ii) La investigación-acción, iii) La investigación participativa, iv) El estudio de casos, por mencionar algunos.

Hancock y Algozzine (2006) argumentan que los estudios de caso representan un tipo de investigación cualitativa que permiten realizar un análisis intenso y descriptivo de una unidad o sistema, que ayudará a obtener una comprensión profunda de situaciones y significados de los involucrados. Con base en el tipo de fenómeno a estudiar, que estaría circunscrito a un grupo de estudiantes y un docente de matemáticas, consideramos que el presente trabajo puede estudiarse mediante el diseño correspondiente al estudio de caso, ya que busca comprender el uso significativo de una app para la construcción de algunos objetos matemáticos.

3.3.1 Estudio de caso

El estudio de caso como diseño de investigación nace de la necesidad de comprender un fenómeno social complejo, permitiendo la comprensión de las características que representan de un modo integrado los eventos y/o fenómenos de la vida real (Escudero, Delfín y Gutiérrez, 2008).

Un estudio de caso es, según la definición de Yin (1994), “una investigación empírica que estudia un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto de la vida real, especialmente cuando los límites entre el fenómeno y su contexto no son claramente evidentes” (pág. 13).

Por su parte para Stake (1994) es el estudio de la particularidad y la complejidad de un caso único, con el que se busca comprender su dinamismo en circunstancias específicas.

La mayor ventaja que tiene un estudio de caso es la capacidad de brindar información para generar hipótesis a partir de una situación especial, ya que el estudio a profundidad de ésta puede llevar al investigador a descubrir situaciones y relaciones que en un principio no sean obvias.

Una investigación de estudio de caso trata exitosamente con una situación técnicamente distintiva en la cual hay muchas más variables de interés que datos observacionales; y, como resultado, se basa en múltiples fuentes de evidencia, con datos que deben converger en un estilo de triangulación; y, también como resultado, se beneficia del desarrollo previo de proposiciones teóricas que guían la recolección y el análisis de datos.

El estudio de caso incluye una recogida formal de datos presentada como una opinión interpretativa de un caso único, e incluye el análisis de los datos recogidos durante el trabajo de campo y redactado en la culminación de un ciclo de acción, o la participación en la investigación McKernam (1989).

El estudio de caso informa sobre un proyecto, innovación o acontecimiento durante un período prolongado de tiempo contando la evolución de un relato o historia (McKernam 1989). Para su desarrollo, el estudio de caso considera tres momentos importantes: 1) Observar 2) Recuperar la información y registrarla 3) Comprender el fenómeno

• La observación: Es la fase básica del estudio de caso. Cohen y Manion (1990), distinguen dos tipos de investigación de estudios de casos empleando técnicas de observación, estos son: participante y no participante; en el primer tipo el investigador se integra al grupo en estudio; mientras que en la segunda posibilidad el investigador actúa como un espectador, con una visión desde el exterior con respecto al caso. En la actualidad los estudios de caso por observación de participación directa han cobrado gran importancia tanto en la educación como en las ciencias fácticas.

• Recuperar la información y registrarla. Esta fase depende en gran medida de las técnicas de recolección de datos tales como cuestionarios, entrevistas, notas de las observaciones físicas del investigador, por mencionar algunos. Es importante señalar la relevancia que reviste el cifrado cualitativo, que hace posible la utilización de documentos en forma sistemática (Goode y Hatt, 1967).

• Comprender el fenómeno. Para llegar a la explicación del fenómeno hay que comprenderlo en su contexto. La información es analizada, destacando dos propósitos: 1) Formar modelos a partir de la información obtenida y 2) Buscar modelos significativos de estudio. Para el primer propósito, el investigador analiza la información obtenida, comprende e informa haciendo una representación de la situación. Para el segundo propósito se buscan modelos que dan significado al estudio. Aquí el investigador realiza comparaciones de los datos obtenidos con la finalidad de buscar rasgos, situaciones que se repiten, distinguiendo sus características para formar nuevos modelos con tendencia a lo que Stake (1999) llama generalización naturalista.

3.3.2 Características del estudio de caso

Las características son las partes distintivas de cualquier objeto. A continuación, se presentan, tomadas de diversos autores, (McKernam, 1989; Yin 1994; Cohen y Manion 1990; Goode y Hatt, 1967; Stake 1999) algunas de estas que refieren al Estudio de Caso. 1) El investigador descubre hechos o procesos que pueden pasar por alto si utilizan otros métodos. 2) Permite al investigador adoptar técnicas que sirvan a la tarea de distribuir, en lugar de imponerlas impidiendo dicha tarea. 3) Se enfoca hacia un solo objeto de estudio, lo que permite un análisis intenso y una abundancia de datos detallados. 4) No prueban hipótesis, pero en cambio, sugieren líneas de investigación subsecuentes. 5) Revela una diversidad y riqueza de conducta humana que sencillamente no está accesible por ningún otro método. 6) No presenta un plan de muestreo 7) La observación es parte fundamental en la obtención de la información. 8) Es rico en descripciones, interpretaciones, explicaciones y narraciones, trabajando más para la comprensión que para la medición, la predicción y el control científico riguroso de los entornos, las personas estudiadas, las acciones (McKernam, 1989) y otros aspectos. 9) No es posible establecer relaciones causa-efecto. El estudio de caso no basa su trabajo en el control de variables; sin embargo, una vez finalizado el estudio su producto de trabajo puede dejar en claro que el sistema analizado presenta una situación de causa y efecto, y puede ser tomado como puntos de partida de investigaciones posteriores. 10) Informa sobre la innovación o acontecimiento durante un tiempo prolongado. 11) Está orientado al proceso más que al producto. 12) Busca una comprensión holística del objeto de estudio 13) Los investigadores no se enfocan en el conocimiento de una verdad universal. 14) No se dirige ordinariamente al trabajo de investigación, sino hacia la comprensión de un problema personal. 15) No permite la generalización. Aunque Stake (1999), considera que es posible una generalización naturalista, es decir, aquella que solo debe ser válida para la población que se ha estudiado, pero no debe extrapolarse. 16) Utiliza la triangulación para evitar al máximo falsas percepciones y error en las conclusiones (Stake 1999). 17) Su redacción es menos erudita y formal y más parecido al discurso periodístico o crítico literario.

3.4 Sujetos de estudio

Cuando hablamos de sujetos de estudio, hacemos referencia a un tipo de investigación científica cuyo proceso de recolección de información se realiza mediante la aplicación de métodos y técnicas que implican trabajo de consulta y conversación con personas, cual es la investigación de campo.

Los sujetos de estudio son aquellas personas o grupos de personas que forman parte de los colectivos cuyas características, opiniones, experiencias, condiciones de vida, entre otros rasgos y atributos cobran interés particular para investigaciones con enfoque cuantitativo o cualitativo.

Sin embargo, más allá de las particularidades del enfoque y las de cada tipo de diseño, siempre será necesario establecer los sujetos de estudio de forma concreta, sin ambigüedades, definiendo con detalle los criterios que determinan su relevancia para la investigación.

Generalmente, dicha definición suele ser orientada a partir del planteamiento de criterios de exclusión e inclusión; es decir, de la serie de consideraciones de las que depende que ciertos rasgos o características específicas cobren o no interés para la investigación, de acuerdo con los objetivos formulados. De esta manera, los sujetos de estudio nunca son un asunto arbitrario ni azaroso, sino que su definición forma parte del conjunto de decisiones teórico-metodológicas que deben ser tomadas durante el proceso de investigación.

Para llevar a cabo esta investigación se consideraron en un principio alumnos de quinto semestre del Cbtis 8 de Pachuca, ubicado en el Boulevard Colosio, del programa educativo de Datos Informáticos del turno vespertino, y en una segunda fase alumnos de quinto semestre del Cbtis 199 en Mixquiahuala, Hgo. en un curso remedial de la materia de Cálculo

Integral. En principio se inició a trabajar con el primer grupo y de hecho en el capítulo de los resultados se toman en consideración algunos resultados preliminares de este primer grupo, sin embargo, ocurrieron circunstancias que nos hicieron tomar la decisión de buscar otro grupo con mejores características. En concreto la situación presentada con este primer grupo derivó que tenían dos semanas que había concluido su curso con su profesor habitual y habían ya sido evaluados por lo que se observaron casos de falta de interés y poca participación. Por lo tanto, se buscó un segundo grupo cuyo calendario de actividades estuviera activo para tratar de evitar los efectos de este tipo de factores que pudieran hacer que la implementación de la tarea de aprendizaje se viera afectada.

3.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de datos

Según Rusque (2003) los datos recolectados en una investigación se pueden categorizar en dos tipos: i) datos descriptivos; comprenden la descripción de los elementos concretos de la situación considerando los objetivos particulares de cada actor y la forma como describe la situación o fenómeno bajo estudio y sus relaciones inherentes, y ii) datos comprensivos; son aquellos datos que provienen de la reflexión personal y de la vivencia del investigador: sus intereses, satisfacciones, aspectos positivos y negativos detectados, entre otros. De este modo se dispone de dos tipos de técnicas que sirven para recolectar datos: interactivas y no interactivas.

De tal forma que al combinar estas técnicas se podrá realizar una triangulación de datos permitiendo obtener descripciones y conclusiones convincentes (Yin citado en Zapata 2004). Esto permitirá el análisis intensivo a través de múltiples fuentes de datos, la construcción de explicaciones integradas por medio de la triangulación de datos y soportadas por la revisión de temáticas relevantes, así como también de la utilización de modelos teóricos, permitiendo, además, la comparación de evidencias para asegurar la validez y consistencia de los resultados presentados (Gaó, 1990). Otro valor agregado de la triangulación de datos es solventar una de las dificultades del estudio de casos cuando se realizan entrevistas, la cual consiste en la imparcialidad u opiniones pre-concebidas de los entrevistados. Existen tres acciones que son suficientes para garantizar imparcialidad y precisión de la datos: presentar los reportes a las personas entrevistadas, utilizar múltiples métodos de recolección de datos y adoptar pistas de auditoría (ejemplos de estas últimas, citados por Cohen (2006), son: descripciones escritas de los pasos ejecutados para desarrollar la investigación y el levantamiento de datos, registro detallado de hallazgos, notas teóricas y de campo realizadas por el investigador, anotaciones en agenda sobre actividades realizadas, etc.).

En la categoría de interactivas se proponen la observación directa, la observación participante y la entrevista abierta. Esta última, se trata de un tipo de entrevista basada en directrices establecidas a partir de la revisión teórica. Se reconoce como entrevista focalizada y garantiza que se cubren los temas más relevantes y de interés para el investigador. Mediante esta técnica los informantes claves aportan opiniones sobre el fenómeno de interés y sugieren fuentes adicionales para corroborar la evidencia (Yin citado en Zapata 2004).

En esta investigación se utilizó principalmente la observación participante debido a que se consideró fundamental mantener una relación de confianza entre los estudiantes y el docente que permita que los alumnos se comporten de manera natural y de esta manera lograr obtener datos confiables respecto a la naturaleza de los estudiantes. De esta manera se dio a conocer previamente a los alumnos el objetivo de esta actividad, la forma en que desarrollaría la actividad y de igual manera se les informo que la sesión sería video grabada, dando certeza del buen uso de este material, garantizando la privacidad de sus datos.

Otro de los instrumentos empleados para la recolección de información consistió en las producciones escritas donde evidencian los procesos de solución de los ejercicios realizados en lápiz y papel y algunos de los resultados arrojados por la app, a su vez también se obtuvo en escrito las respuestas a un cuestionario corto que hacía referencia a conocimientos previos en el estudiante, así como su opinión acerca del uso de estas apps.

3.6 Las tareas de aprendizaje matemático

Durante el proceso de aprendizaje es de vital importancia elegir las actividades o tareas de aprendizaje que permitan al estudiante estructurar su conocimiento mediante la participación activa durante la implementación de estas.

Las actividades que se presentan en este trabajo tienen un doble objetivo; por un lado, que los profesores identifiquen aquellos elementos que constituyen a una tarea de aprendizaje matemático, y de este modo caractericen algunos principios teóricos y prácticos que pueden apoyarlos en el diseño de sus propias tareas de instrucción; y por otro, que al abordar las tareas se desarrolle una forma matemática de pensar, que les permita “desempacar” ideas matemáticas, procedimientos y principios (Ball y Bass, 2003). Es decir, las tareas se enfocan en la “promoción o construcción de formas particulares de pensamiento, más que en la adquisición de conceptos o habilidades específicas” (Harel, 1994, p. 117). A través del desarrollo de cada una de las actividades se resalta la importancia del uso de las tecnologías digitales durante el proceso de formulación de conjeturas y de procedimientos para resolver problemas; así como la importancia de elaborar justificaciones deductivas de las conjeturas u observaciones.

3.6.1 Características de las Tareas de Aprendizaje

De acuerdo a Barrera y Reyes (2010) las tareas son el medio para favorecer el proceso de construcción de conocimiento con entendimiento de los estudiantes, por ello es muy importante considerar durante el proceso de diseño de una tarea las características que permitan lograr este objetivo. Para estos autores es necesario que una tarea de aprendizaje matemático considere el conocimiento previo del estudiante y a su vez pueda proporcionarle los elementos para el desarrollo de nuevos conceptos que se articulen con los ya existentes en su red conceptual.

Por otra parte, Stein y Smith (1996) consideran que una tarea matemática es una actividad de clase cuya finalidad es que la atención del estudiante este centrada en una habilidad o en una idea matemática particular.

En este sentido, es importante reconocer que dichas tareas deben proveer a los estudiantes elementos que les permitan pensar matemáticamente, y que además servirán como punto de partida para la construcción de conceptos matemáticos. (Sierpinska, 2004, citado por Barrera, 2018).

De manera más concreta, se puede mencionar que una tarea de aprendizaje se debe de estructurar a partir de los siguientes elementos (Campos y Torres, 2022):

1) Un objetivo de aprendizaje. - Es un enunciado en el que se establecen los elementos conceptuales a ser desarrollados y articulados durante la ejecución de la tarea.
2) Elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo de aprendizaje. - En esta parte se identifican dos clases de elementos. Los externos a la actividad, también llamados recursos matemáticos, así como aquellos específicamente relacionados con el enunciado del problema.
3) Escenarios para ejecutar la tarea. - Por un escenario para desarrollar la tarea entenderemos un lugar físico provisto de los elementos apropiados para realizarla, así como una comunidad (compañeros, profesor) que permita al estudiante interactuar con sus miembros, con la finalidad de fomentar un proceso inquisitivo y de esta forma desarrollar los elementos que le ayuden a expresar o comunicar ideas matemáticas. Para que los estudiantes vean a la matemática como una actividad con sentido, necesitan aprenderlas en un salón de clase que sea un microcosmos de la cultura matemática, es decir, clases donde los valores de las matemáticas como una disciplina se reflejen en la práctica cotidiana. (Schoenfeld, 1988; citado en Santos-Trigo, 1997, p. 3)
4) Proceso inquisitivo. – Durante este proceso se dará lugar a formular preguntas tendientes a articular los elementos matemáticos iniciales con aquellos que conduzcan a la consecución de lo planteado en el objetivo de aprendizaje y posibles extensiones, el tipo de preguntas o dilemas que se formulen darán lugar al surgimiento de diferentes trayectorias hipotéticas de aprendizaje (Simon y Tzur, 2004)

Tomando en cuenta lo anterior en el presente trabajo se ha diseñado una tarea de aprendizaje matemático, que se implementó con un grupo de estudiantes y con la cual se pretende lograr estos propósitos.

3.6.2 Diseño de la tarea de aprendizaje

El constructo teórico desarrollado por Stein y Smith, (2007) mide el nivel de demanda cognitiva de las tareas matemáticas, de tal manera que se puedan clasificar en dos tipos: (i) En las que se promueve la memorización y la realización de procedimientos sin conexión, consideradas como tareas de bajo nivel de demanda cognitiva y (ii) Aquellas en las que se realizan procedimientos con conexión y al hacer matemáticas para referirse a los diferentes niveles de procesos de razonamiento que generan las diferentes tareas de aprendizaje y que por lo tanto se consideran tareas de alto nivel de demanda cognitiva.

De esta manera se busca que la tarea de aprendizaje diseñada para esta investigación cumpla con los elementos que estructuran una tarea de aprendizaje y que logre situarse en una tarea de alta demanda cognitiva de la siguiente manera (Ver tabla 4).

Tabla 4.- Elementos que estructuran la tarea de aprendizaje

Elementos que forman parte de la estructura de una tarea de aprendizaje	**Acciones necesarias para cumplir con estos elementos.**
Objetivos de Aprendizaje planteados para la tarea	(i) identificar los procesos algorítmicos que realiza el estudiante al resolver una integral trigonométrica de manera tradicional (en lápiz y papel). (ii) identificar la forma en que distinguen cuándo es necesario involucrar alguna relación o identidad trigonométrica antes de aplicar el algoritmo de la integral. (iii) comparar los procesos utilizados por la aplicación para resolver una integral que para los fines de este estudio sea de tipo trigonométrica. (iv) justificar las acciones que enlista el software de edición matemática en su proceso de resolución. (v) comprender y analizar las distintas rutas de solución.
Elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo de aprendizaje	(i) Formulas de derivación e integración (ii) Relaciones trigonométricas (iii) Operaciones aritméticas básicas. (iv) Utilización de lenguaje algebraico.
Escenario de la tarea	Se requiere un aula con pizarrón, así como dispositivos móviles que pueden ser celulares o tabletas. Los estudiantes serán organizados de la siguiente forma: al inicio de la actividad trabajarán de forma individual, seguirán las indicaciones dadas por el profesor, resolverán
Proceso Inquisitivo	Durante la ejecución de la tarea de aprendizaje por parte de los estudiantes, el profesor debe tener especial cuidado en hacer preguntas relevantes que motiven a los estudiantes a trabajar en los aspectos propios de la actividad, a tratar de justificar sus observaciones, a comunicar sus ideas y resultados. Parte de este proceso inquisitivo está destinado, además, a mantener el nivel de demanda cognitiva de la tarea, las preguntas que el profesor realice no deben ayudar de más al estudiante, pero deben ser enunciadas para que lo guíen en su trabajo y le permita encontrar las conexiones propuestas en la actividad, siempre enmarcados en el objetivo de aprendizaje.

Fuente: Elaboración propia a partir de Stein y Smith (1998,2007)

Se realizó una tarea de aprendizaje basada específicamente en el tema de integrales de funciones trigonométricas, con la finalidad de incluir además de las respectivas técnicas de integración algunos elementos básicos de la trigonometría como son las relaciones trigonométricas.

A su vez en esta tarea de aprendizaje se promueve el uso de la app Phothomath con la finalidad de: (i) identificar los procesos algorítmicos que realiza el estudiante al resolver una integral trigonométrica de manera tradicional (en lápiz y papel) y contrastarla contra el proceso de solución proporcionado por un segundo registro de representación, que es la solución propuesta por la app, (ii) identificar la forma en que distinguen cuando es necesario involucrar alguna relación o identidad trigonométrica antes de aplicar el algoritmo de la integral, (iii) comparar los procesos utilizados por la aplicación para resolver una integral que para los fines de este estudio sea de tipo trigonométrica, (iv) justificar las acciones que enlista el software de edición matemática en su proceso de resolución y (v) comprender y analizar las distintas rutas de solución.

Por esta razón para el diseño de la tarea de aprendizaje se tomaron en cuenta elementos importantes de la app como lo son los métodos alternos de solución utilizados por la app, así como las diferentes herramientas de la aplicación que permiten que el estudiante pueda obtener información más detallada sobre su proceso de solución.

De igual forma se consideró importante propiciar la discusión colectiva y grupal y a su vez la capacidad de comunicar resultados, así como justificar y argumentar cada uno de los pasos ocupados tanto por el estudiante como por la app, misma situación que permite la comparación y análisis entre los diferentes procesos y rutas de solución.

De acuerdo con Ramírez (2009) se considera que se puede agrupar las funciones o integrandos de diversos tipos y ver que el método para obtener su antiderivada es bastante similar. Por ejemplo, los polinomios son muy fáciles de integrar, potencias enteras positivas de funciones trigonométricas (sobre todo senos y cosenos) son muy similares los métodos de integración (dependen de si el exponente es par oimpar), funciones racionales donde el denominador es producto de factores lineales es otro tipo de integral en que la respuesta se da en términos de logarítmos, y probablemente se puedan encontrar otros subconjuntos con características similares.

De este modo esta autora ha identificado dos tipos de integrales trigonométricas, aquellas que se pueden resolver de manera directa, haciendo uso de una fórmula de integración, y aquellos donde es necesario usar algunos métodos distintos debido a la complejidad de la integral, por lo que se considera necesario que los estudiantes comiencen por identificar y resolver ejercicios que se resuelven de manera directa, para posteriormente trabajar con ejercicios más complejos.

A continuación, se presenta de manera general un bosquejo del desarrollo de la tarea de aprendizaje que en este trabajo se propone (Figura 2).

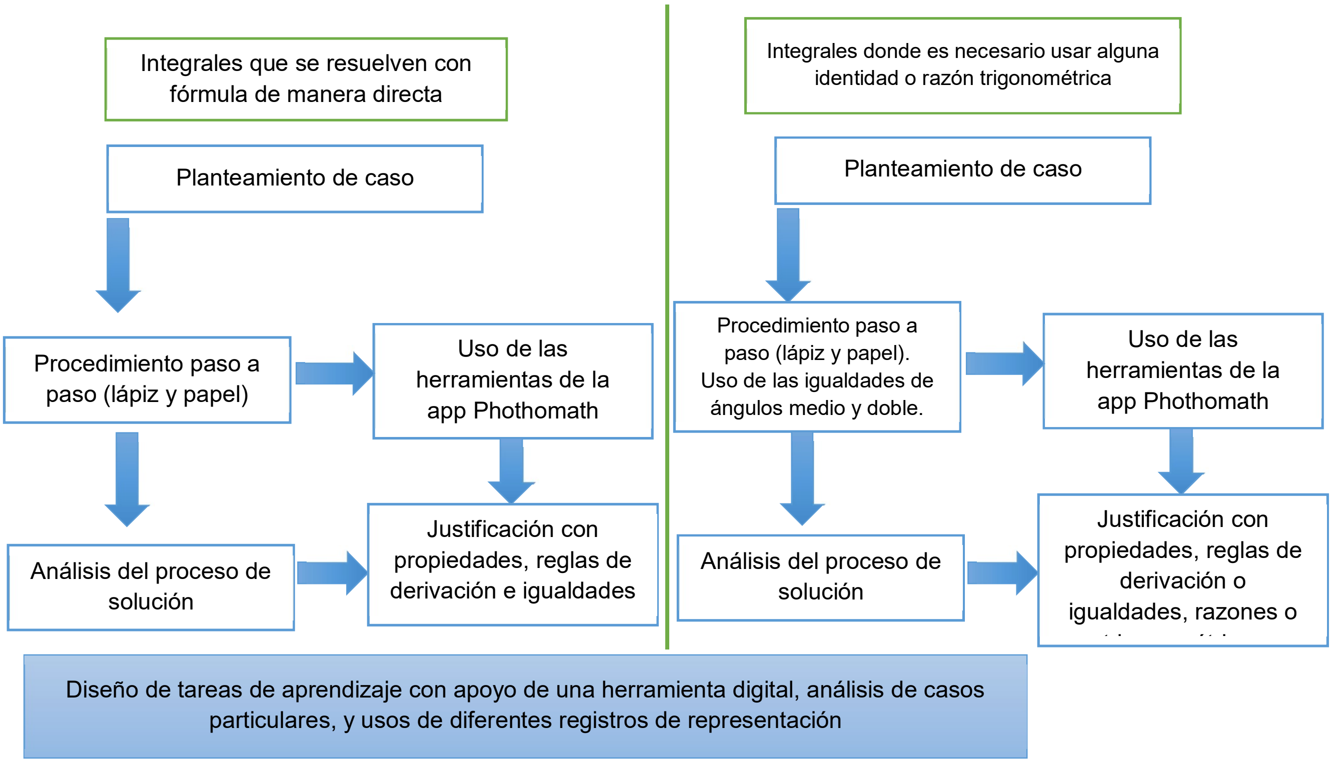


Figura 2.- Bosquejo general del desarrollo de la tarea de aprendizaje

Como puede observarse en el esquema de la figura 2 para el diseño de la tarea de aprendizaje se toman en consideración elementos recuperados de los marcos conceptuales referenciados en el capítulo 2, tales como: empleo de herramientas digitales, análisis de casos particulares, uso de diferentes registros de representación, procesos de reflexión y proceso inquisitivo guiado por el docente.

A continuación, se presentan algunos diagramas que describen la guía de aplicación de la tarea de aprendizaje que se diseñó.

Esta guía de aplicación se dividió en una secuencia de tres ejercicios para incrementar el nivel de complejidad de manera gradual y poner en práctica las ideas de Stein y Smith (2007) así como algunas de las características de los marcos de resolución de problemas, empleo de las herramientas digitales y el diseño de tareas de aprendizaje.

Ejercicio 1.-

Para el primer ejercicio se consideró trabajar con una integral trigonométrica que se puede resolver de manera directa, haciendo uso de fórmulas básicas para este tipo de ejercicios, donde de acuerdo al diseño de la actividad los estudiantes la resolverían de forma individual, haciéndolo en primera instancia de manera tradicional, a lápiz y papel, permitiéndoles trabajar con sus propias ideas y conocimientos adquiridos durante la clase de Cálculo Integral. Posterior a ellos uno de los estudiantes expone ante el grupo sus resultados e ideas, así como la solución encontrada, dando paso a un momento de discusión e intercambio de ideas.

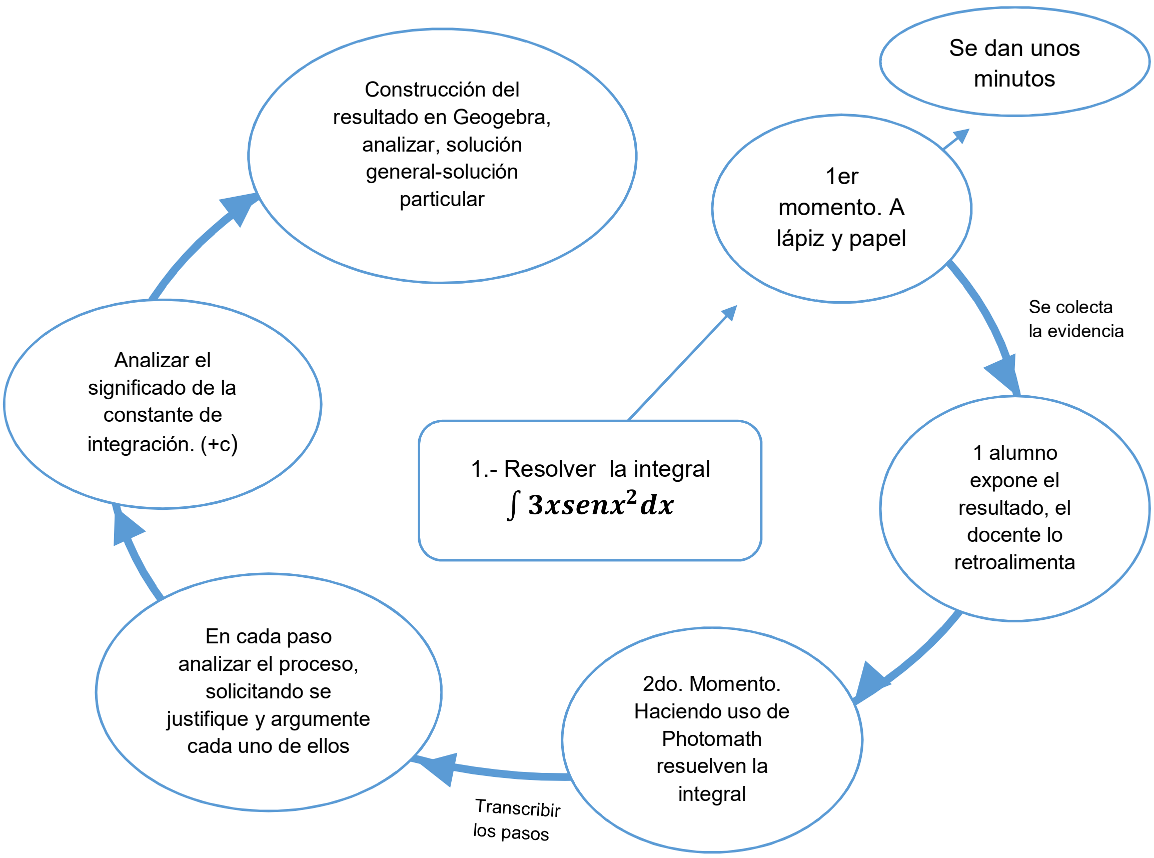


Figura 3.- Ejercicio 1. Integral trigonométrica que se resuelve de manera directa

Como se puede observar el primer ejercicio que se propuso para trabajar es un ejercicio de integral trigonométrica directa, es decir que se puede resolver haciendo uso de una fórmula, una vez que el estudiante logre identificar que se trata de una la función seno con argumento, acompañada de la derivada del argumento, lo cual permite que este ejercicio se resuelva con una fórmula de integración directa.

Ejercicio 2.-

En un segundo ejercicio (Ver figura 3) que de igual manera se puede resolver con la aplicación de una fórmula directa una vez que se identifique el argumento de la función y su derivada.

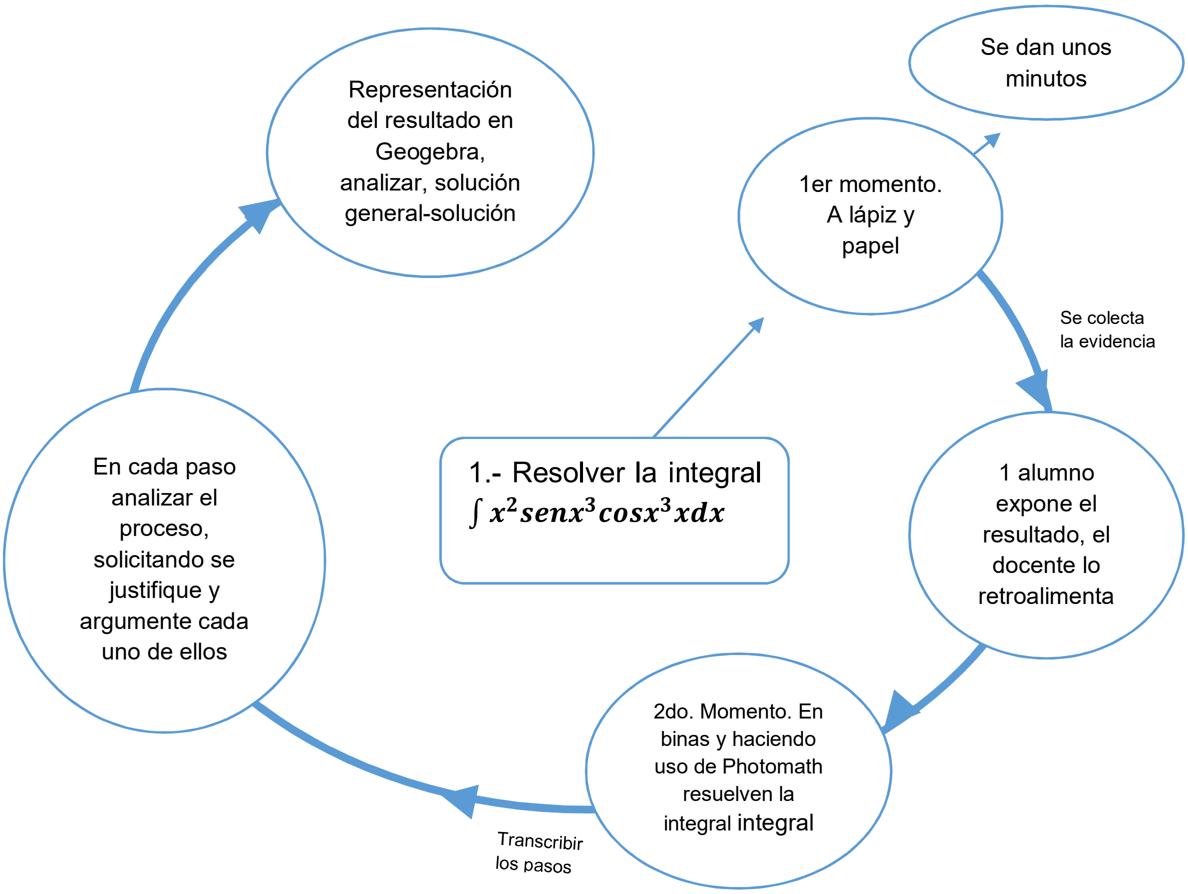


Figura 4.- Ejercicio 2. Integral trigonométrica que se resuelve de manera directa

El proceso sugerido para este ejercicio presenta las mismas características que el ejercicio anterior debido a que se considera necesario que el alumno identifique y reafirme el método de solución para ejercicios que se pueden resolver de manera directa.

Ejercicio 3.-

Se seleccionó un ejercicio de mayor complejidad al no ser un ejercicio que tenga solución directa haciendo uso de una fórmula de integración, si no que se necesita aplicar otros procedimientos para dar solución a este ejercicio.

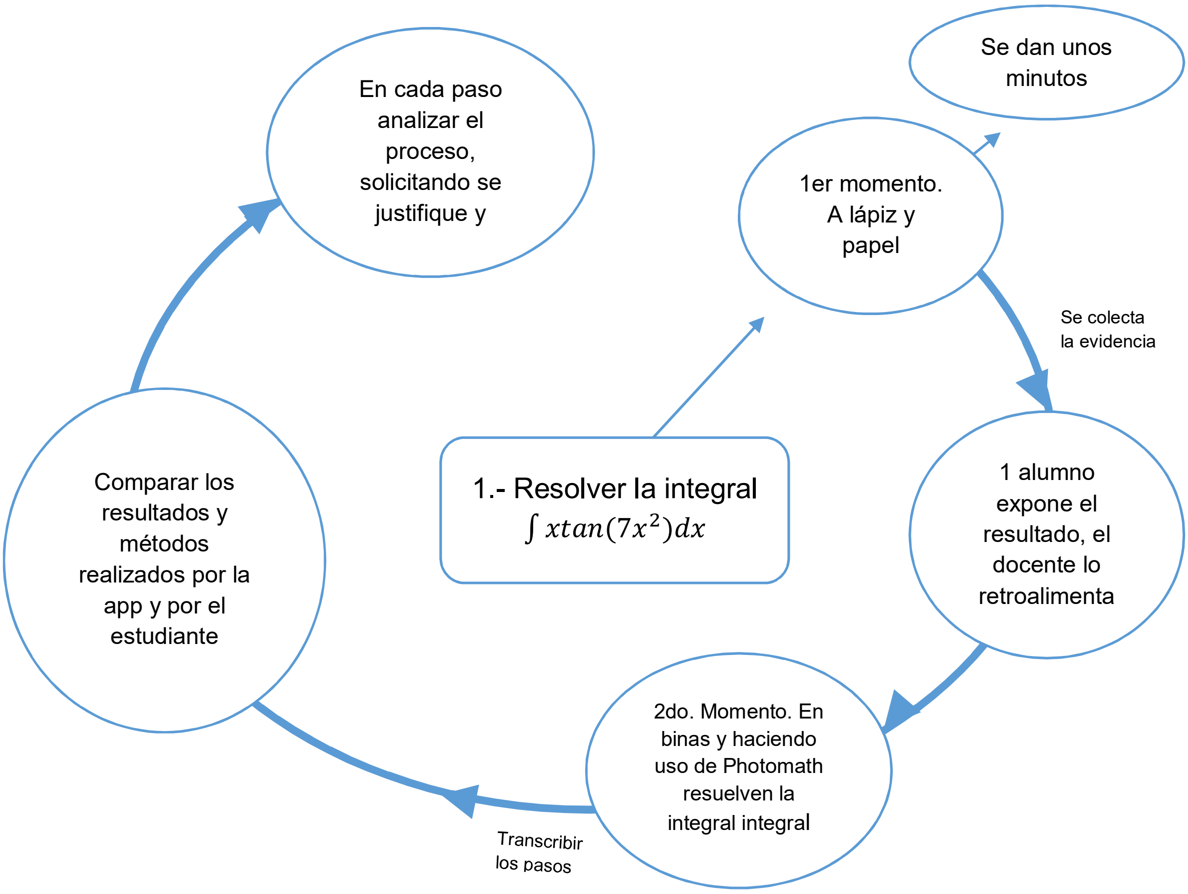


Figura 5.- Ejercicio 5. Integral trigonométrica donde la app realiza otro proceso de solución distinto a la solución directa

Se sugiere realizar el tercer ejercicio siguiente un orden similar a los dos anteriores, trabajando en equipo para que de esta manera se permita la discusión entre los estudiantes, la comparación y el intercambio de ideas.

CAPITULO 4.- ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1.- Introducción

En este capítulo se describen y analizan los datos obtenidos de la trascripción de las videograbaciones durante la implementación de la tarea de aprendizaje, así como algunas producciones escritas que se recopilaron de algunos participantes, las que incluyeron un cuestionario de exploración sobre la herramienta Phothomath. El cuestionario corto tuvo la finalidad de identificar algunos conocimientos previos respecto a las identidades o propiedades trigonométricas.

Para Balestrini (2013) el propósito de realizar este proceso es resumir las observaciones llevadas a cabo de forma tal que proporcionen respuestas a interrogantes de investigación. El análisis implica el establecimiento de categorías, la ordenación y manipulación de los datos para resumirlos y poder sacar algunos resultados, con la finalidad de reducir los datos de una manera comprensible, para poder interpretarlos, y poner a prueba algunas relaciones de los problemas estudiados.

Así mismo los resultados de la investigación se interpretan de manera descriptiva cualitativa, de acuerdo a un plan preestablecido por la investigadora, a fin de obtener sólidas conclusiones. Lo anterior con la finalidad de responder *a* las preguntas de investigación planteadas en el primer capítulo del trabajo.

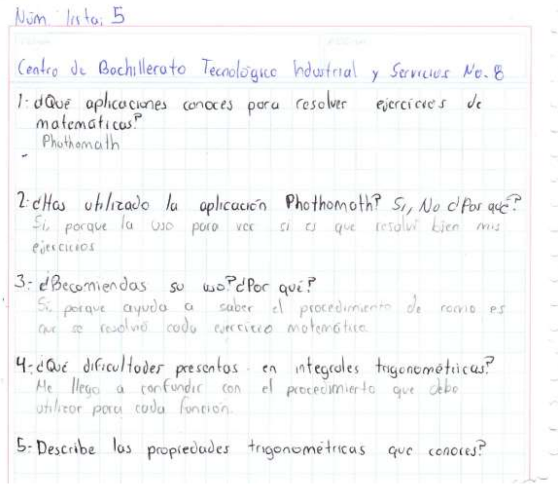
4.2.- Cuestionario de corto en la sesión preliminar

Con la finalidad de identificar el acercamiento que tienen los estudiantes con la app Phothomath se realizó un cuestionario previo a los alumnos de quinto semestre de la carrera de Ofimática en el Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios número 8, Cbtis 8, ubicado en el boulevard Colosio en Pachuca Hgo.

Cabe mencionar que este grupo de estudiantes se encontraban en las últimas semanas del semestre correspondiente y que a su vez específicamente en la materia de Cálculo Integral, ya se había concluido el programa de estudios.

En este cuestionario las preguntas buscaban identificar qué tanto conocía el estudiante la aplicación de Phothomath, y si bajo su punto de vista recomienda el uso de esta aplicación, de igual forma se pregunta al estudiante sobre las relaciones trigonométricas que conoce, con la finalidad de valorar sus conocimientos previos.

En la figura 6 se muestran las respuestas de un estudiante que conoce la aplicación y tiene una opinión positiva respecto a su uso, en razón de que les ayuda a saber cómo se resuelve cada ejercicio matemático, este mismo estudiante declara que en general le resulta confuso elegir el procedimiento correcto para resolver funciones trigonométricas distintas.



Núm. lista: 5

Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y Servicios No. 8

1: ¿Qué aplicaciones conoces para resolver ejercicios de matemáticas?
Photomath

2: ¿Has utilizado la aplicación Photomath? Si, No ¿Por qué?
Si, porque la uso para ver si es que resolví bien mis ejercicios

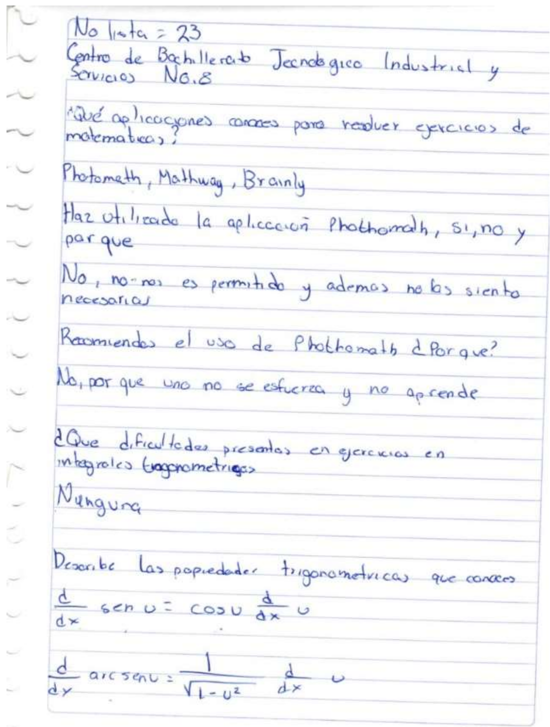
3: ¿Recomiendas su uso? ¿Por qué?
Si porque ayuda a saber el procedimiento de como es que se resolvió cada ejercicio matemático

4: ¿Qué dificultades presentas en integrales trigonométricas?
Me llego a confundir con el procedimiento que debo utilizar para cada función

5: Describe las propiedades trigonométricas que conoces?

Figura 6.- Respuestas del estudiante 1 al cuestionario de exploración.

En contraste a la respuesta anterior el estudiante 2 no considera pertinente hacer uso de estas aplicaciones ya que durante su clase no le es permitido y a su vez él siente innecesario su uso dado que bajo su perspectiva el estudiante que hace uso de estas aplicaciones no se esfuerza y por consecuencia no aprende. A su vez este estudiante declara no tener dificultades en la solución de este tipo de integrales e incluso describe dos fórmulas de derivación como respuesta a la pregunta donde se pide indicar las propiedades trigonométricas que conoce (Ver figura 7).



No lista = 23

Centro de Bachillerato Tecnologico Industrial y Servicios No.8

¿Qué aplicaciones conoces para resolver ejercicios de matematicas?

Photomath, Mathway, Brainly

Haz utilizado la aplicación Photomath, si, no y porque

No, no nos es permitido y ademas no las siento necesarias

Recomiendas el uso de Photomath ¿Por que?

No, por que uno no se esfuerza y no aprende

¿Que dificultades presentas en ejercicios en integrales trigonometricas

Ninguna

Describe las propiedades trigonometricas que conoces

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} u = \cos u \frac{d}{dx} u$$

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arcsen} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{d}{dx} u$$

Figura 7.- Respuestas del estudiante 2 al cuestionario de exploración.

Este cuestionario se aplicó a un total de 24 estudiantes, de los cuales 10 de ellos declaran conocer la aplicación Phothomath y haberla utilizado en diversas situaciones, además de recomendar su uso con base en algunas razones esgrimidas:

E3: Te ayuda a comprender cosas un poco más complicadas
E4: A veces te da resultados mucho más avanzados de lo que nosotros llevamos, o más simplificados
E5: Siempre y cuando hagamos un uso adecuado y sea para ayudarnos en poder guiarnos y saber si estamos bien o mal en nuestro problema.
E6: Si porque evalúa y muestra el proceso.

En contraparte 6 estudiantes declaran no conocer la aplicación y en consecuencia no haberla utilizado, ni recomendar su uso. Algunas de las razones de esta última aseveración son las siguientes:

E7: No, no sé cómo funciona.
E8: No, porque da resultados muy extensos y la maestra se da cuenta.
E9: No, da erróneas.

Como puede apreciarse en algunas de estas respuestas el procedimiento que la aplicación presenta no siempre le resulta familiar al estudiante, o bien es aparentemente diferente al resultado que el profesor y los estudiantes están obteniendo a lápiz y papel. En principio podemos suponer que ambos resultados no son distintos partiendo de la certeza que el docente ha supervisado adecuadamente el proceso de solución con sus estudiantes. Es más probable que el resultado al que llega la aplicación esté más elaborado o más simplificado, pero en principio tendría que ser equivalente al resultado obtenido a lápiz y papel por el grupo.

Este resultado refuerza la selección que se realizó de las subcategorías consideradas dentro de la categoría de tarea de aprendizaje y demanda cognitiva; esto es, elementos como el proceso inquisitivo del docente, el uso adecuado de la herramienta digital, el propiciar la comparación y el análisis y el ir justificando los pasos empleando propiedades y métodos de integración. Lo anterior en razón de que estas acciones reguladas por el profesor deben buscar la adquisición de nuevas heurísticas y rutas de solución.

El cuestionario también tuvo como propósito indagar acerca de algunas dificultades identificadas por los estudiantes al resolver ejercicios de integrales trigonométricas, así como explorar los conocimientos previos que tienen en referencia a las identidades o propiedades trigonométricas.

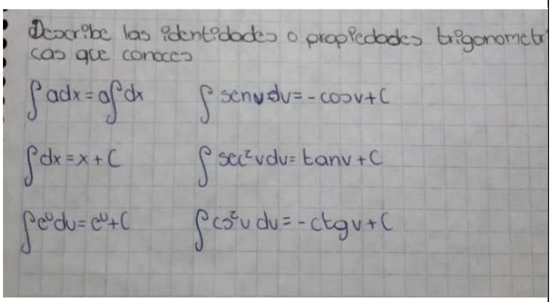
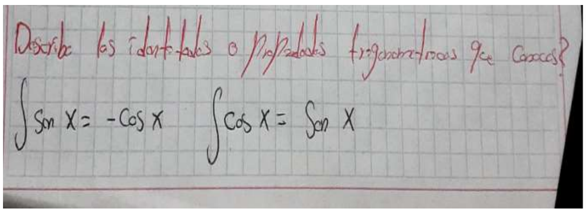
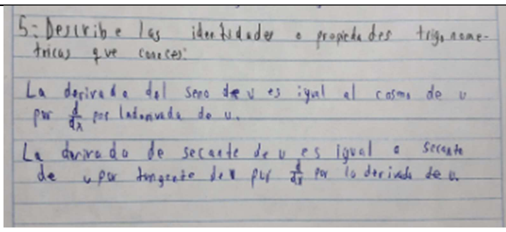
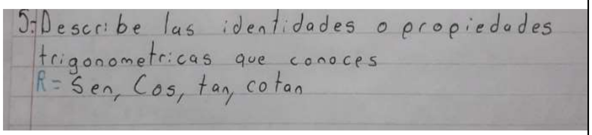
Algunas de las dificultades referidas por los estudiantes fueron las siguientes:

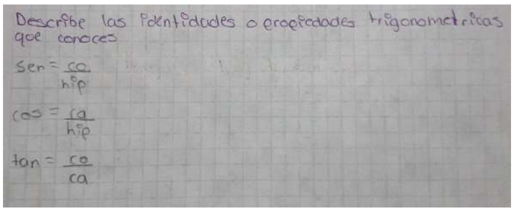
E1: Luego me confundo entre los tipos de integración que hay dentro de las integrales trigonométricas.
E2: Identificar la integral de la función trigonométrica
E3: Se me dificulta identificar las fórmulas.
E4: Se me dificultan las integrales trigonométricas elevadas a un exponente.
E5: El problema de no saber cómo se resuelve cuando tiene un exponente $\sin^2 x dx$.
E6: Son muy laboriosas y normalmente no lo entiendo.
E7: En que algunas integrales vas sacándolas por partes y en unos ejercicios sacas muchos resultados y me pierdo o me confundo en los resultados.

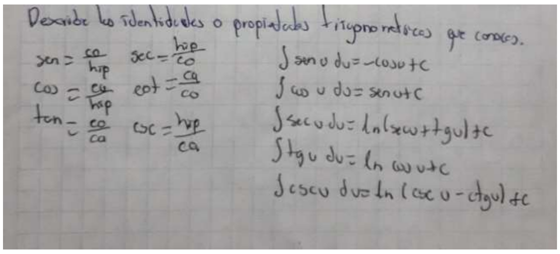
Dadas las respuestas anteriores es importante mencionar que al resolver integrales trigonométricas se considera fundamental que el estudiante conozca las técnicas de integración correspondientes.

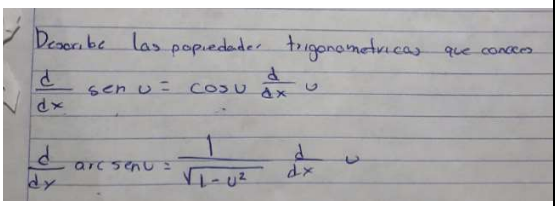
Respecto a la pregunta que busca indagar algunos conocimientos de los estudiantes sobre identidades o propiedades trigonométricas, las respuestas de los alumnos fueron muy diversas, y en su gran mayoría se destaca que no recuerdan cuales son estas o en su defecto las confunden con fórmulas de integración o con razones trigonométricas como se puede ver a continuación. En la tabla siguiente (Tabla 5) se muestran varias de las respuestas que se mencionan en esta parte.

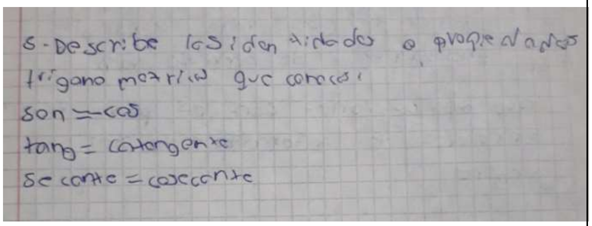
Tabla 5.- Algunas respuestas de los estudiantes en referencia a las identidades trigonométricas que conocen los estudiantes.

 Describe las identidades o propiedades trigonometricas que conoces $\int a dx = a\int dx$ $\int \text{sen}\, v\, dv = -\cos v + C$ $\int dx = x + C$ $\int \sec^2 v\, dv = \tan v + C$ $\int e^u du = e^u + C$ $\int \csc^2 v\, dv = -\text{ctg}\, v + C$ (a)	 Describe las identidades o propiedades trigonometricas que conoces? $\int \text{Sen}\, X = -\text{Cos}\, X$ $\int \text{Cos}\, X = \text{Sen}\, X$ (b)
 5: Describe las identidades o propiedades trigonometricas que conoces: La derivada del seno de u es igual al coseno de u por $\frac{d}{dx}$ por la derivada de u. La derivada de secante de u es igual a secante de u por tangente de u por $\frac{d}{dx}$ por la derivada de u. (c)	 5: Describe las identidades o propiedades trigonometricas que conoces R = Sen, Cos, tan, cotan (d)

<table>
<tr>
<td>

(e)</td>
<td>

(f)</td>
</tr>
<tr>
<td>

(g)</td>
<td>

(h)</td>
</tr>
</table>

Como puede apreciarse en la tabla previa algunos estudiantes confundieron las identidades solicitadas con fórmulas de integración, generalmente las fórmulas directas (Tabla 5, incisos a,b).

En el caso de la tabla 5 inciso c, otro estudiante consideró dos formas de derivación como equivalentes a lo que se está solicitando, mientras que para el inciso c, se observa como el estudiante solamente logra recordar el nombre de algunas funciones trigonométricas.

Es notorio también en el caso de dos estudiantes (inciso d y e) como describen las definiciones de las funciones trigonométricas como razones en un triángulo rectángulo y por último en las imágenes de los incisos g y h muestran en un caso fórmulas de integración y en el otro caso algunas confusiones.

Derivado de las observaciones anteriores podemos destacar que ninguno de los alumnos tiene claro conocimiento de lo que son las identidades trigonométricas, lo cual resulta una limitante al momento de resolver el tipo de integrales trigonométricas.

4.3.- Resolución de integrales a lápiz y papel y usando Phothomath en una sesión preliminar

La primera sesión donde se propuso resolver dos integrales de funciones trigonométricas, aplicando los elementos identificados en el diseño de la tarea de aprendizaje, se desarrolló con un grupo de diez estudiantes que cursaban la materia de Cálculo Integral, mismos que pertenecían al grupo donde se recolectaron previamente los cuestionarios analizados en la sesión anterior. En esta ocasión la asistencia fue menor, por lo que solo se colectaron las producciones escritas de los estudiantes mencionados.

Una vez terminada la experiencia esta investigadora consideró que no se cumplieron los propósitos con los cuales fue diseñada la tarea de aprendizaje debido a las siguientes razones:

1.- La fecha en la que fue implementada la actividad no resultó apropiada, debido a que los estudiantes ya habían terminado su curso e incluso ya habían sido evaluados, incidiendo esta situación en un nulo interés del cual se percató la instructora desde el inicio.

2.- El tipo de integrales que se utilizó para este ejercicio eran dos cuya estructura contenía una función y su derivada, en la forma $\int udu$ dentro de la misma expresión, sin embargo debido a los resultados obtenidos pensamos que quizá esta temática en concreto no fue abordada de forma completa en el curso normal, esta sospecha se sostiene también por una revisión realizada a algunos cuadernos de los estudiantes donde se pudo observar que el nivel de complejidad de los ejercicios era muy básico, como lo son aquellas integrales de funciones trigonométricas que se pueden resolver mediante fórmulas directas de integración. (ver tabla 6)

Tabla 6.- Fórmulas de integración directa para funciones trigonométricas

$1.-\int sen\, u\, du = -\cos u + c$	$6.-\int csc\, u\, du = \ln(csc\ u - ctg\ u) + c$
$2.-\int cos\, u\, du = sen\, u + c$	$7.-\int sec^2\, u\, du = tan\, u + c$
$3.-\int tan\, u\, du = \ln sec\ u = -\ln\cos u + c$	$8.-\int csc^2\, u\, du = -cot\, u + c$
$4.-\int cot\, u\, du = ln\, sen\, u + c$	$9.-\int \tan u \sec u\ du = sec\, u + c$
$5.-\int sec\, u\, du = \ln(\, tan\, u + secu\,) + c$	$10.-\int \cot u \csc u\ du = -csc\, u + c$

De los diez estudiantes, seis de ellos fueron capaces de resolver el primer ejercicio en forma correcta a lápiz y papel, y pudieron contrastar su resultado con la solución proporcionada con el Phothomath (Ver fig. 8)

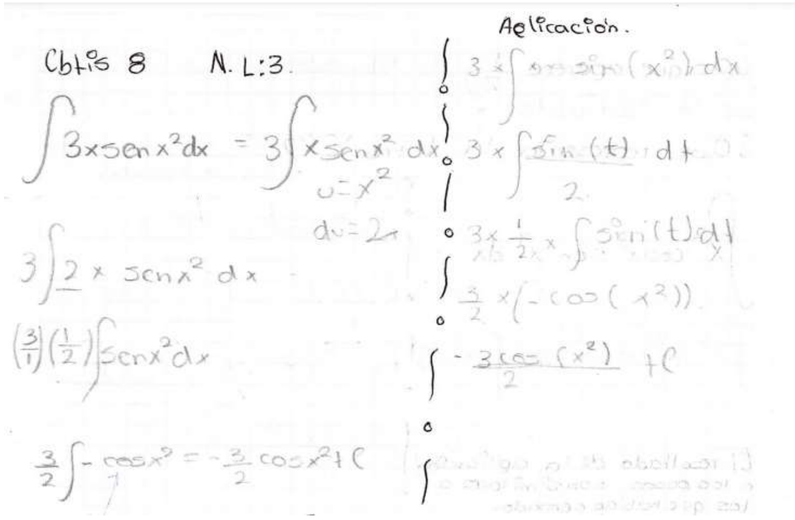


Figura 8.- Primer ejercicio presentado resuelto en lápiz y papel y con Phothomath

En la parte izquierda de la figura 8 se presenta el desarrollo que realiza el estudiante 1, y en la parte derecha se muestra el desarrollo brindado por la aplicación.

Esta actividad se implementó siguiendo la estructura propuesta en la etapa de diseño de la actividad, a modo de garantizar que el estudiante accedió a la app, una vez terminado el desarrollo a lápiz y papel, bajo la supervisión de la instructora.

En este caso los 6 estudiantes identificaron al termino $2x$ como la derivada del ángulo de la función seno (x^2), y en consecuencia solo utilizaron la fórmula 1 de la tabla 7.

Sin embargo, de estos seis estudiantes, cinco no pudieron resolver el segundo ejercicio que, aunque más complejo es de una estructura similar donde había que identificar que una parte correspondía a la función u y la otra a su derivada, en consecuencia se requería utilizar una segunda fórmula que es la siguiente: $\int udu = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$.

En la figura 9 se muestra el ejercicio en cuestión y la forma en que la contestó el único estudiante de este grupo que hizo el intento.

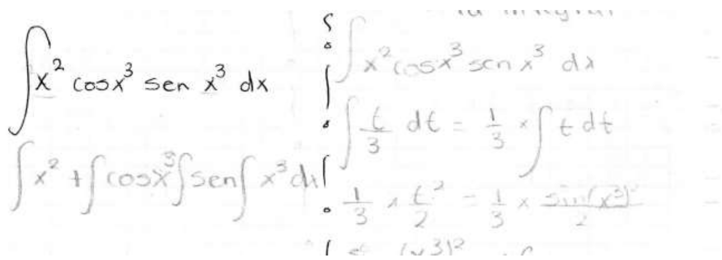


Figura 9- Propuesta de solución al ejercicio 2 por el estudiante 1.

En este caso se puede observar que nunca se identificó la relación que existe entre las funciones seno y coseno del mismo ángulo, siendo que una es derivada de la otra, y plantea una solución peculiar donde la convierte en una integral que se suma a un producto de tres integrales.

Los cinco estudiantes restantes no propusieron ninguna respuesta cuando trabajaron este ejercicio a lápiz y papel, por lo que no es posible contrastar su resultado o los resultados que hubieran tenido al respecto con el resultado proporcionado con la app.

Este estudiante que resolvió satisfactoriamente el primer ejercicio declara que prefiere realizar su procedimiento a lápiz y papel, pues le parece que la aplicación arroja un resultado más largo además de hacer un cambio de variable, lo que considera más confuso (Ver fig. 9). En contraste al resolver el segundo ejercicio declara no entender el resultado que proporciona la app debido entre otras razones a que él no realiza ninguna propuesta propia en forma previa, y solo hacia el final reflexiona que quizá pueda resolverse por partes (lo cual no aplica para ese caso).

Dentro del grupo de los estudiantes que no resolvieron esta segunda integral, hasta que pudieron utilizar la aplicación una vez que la instructora se los permitió, consideraron que el resultado aportado por Phothomath está más largo, más detallado, que no se les habría ocurrido a ellos mismos, aunque también hacen la observación de no entender por completo por qué la aplicación hace cambio o sustitución de variable (x por t).

En el subgrupo de cuatro estudiantes que no pudieron resolver ninguno de los dos ejercicios, se identifican algunas de las respuestas que incluyeron en sus resultados:

Manifiestan que no es para nada un procedimiento parecido el que arroja la aplicación, hace un cambio de variable que no entienden y que en todo caso el procedimiento mostrado por la aplicación no les resultaba familiar.

Con base en estos resultados preliminares, podemos identificar algunas posibles causas que se presentan: en el caso del único estudiante que propone una solución a lápiz y papel para ambos ejercicios, solo obtuvo un resultado acertado al aplicar una forma directa de una integral trigonométrica $\int sen\, u\, du = -\cos u + c$, pero no pudo identificar que el segundo ejercicio requería también la utilización de una fórmula adicional a la anterior $\int udu = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$. El empleo consecutivo de estas dos fórmulas requiere a su vez comprender que pueden usarse en forma conjunta, sin embargo, el estudiante solo pensó en la fórmula que involucraba solo a las funciones seno y coseno que el observa en la expresión; otra explicación que puede observarse de su solución (ver fig. 8) es que visualiza a la expresión como un producto de funciones y no logra identificar que una parte es derivada de la otra.

En este punto es importante señalar algunas otras reflexiones: para integrar cualquier otra función trigonométrica que no pueda resolverse de manera directa deben emplearse diferentes técnicas y recursos algebraicos para reducir la función original a una forma equivalente ya integrable.

Igualmente, el estudiante debe de tener presente algunas normas generales para evitar transformar la integral original en otra función más complicada:

a) Si la función a integrar está compuesta por dos o más factores trigonométricos, éstos deben tener el mismo argumento; lo cual permitirá que el estudiante logre identificar que hay una relación entre estos factores de lo contrario, mientras no se igualen los argumentos no se podrá integrar.

b) Debe evitarse pasar de una integral del seno a otra del coseno de la misma forma, porque se considera que una y otra son lo mismo en cuanto a su técnica de integración, lo cual se convertiría en un proceso cíclico.

c) Cuando deba emplearse más de una vez la técnica de los cuadrados, debe seguirse siempre el mismo criterio porque de lo contrario se regresa a la integral original.

Emplear el mismo criterio significa utilizar siempre la misma función trigonométrica al cuadrado para sustituirla por su equivalente de dos términos, no una vez una y otra vez otra.

Las principales técnicas son: i) Técnica de los cuadrados, ii) Técnica de pasar a senos y/o cosenos, (Zill, 2015).

4.4.-Implementación de la tarea de aprendizaje con un segundo grupo

4.4.1.- Aplicación del cuestionario corto

La implementación de la actividad se llevó a cabo durante una sesión de un curso de recuperación de Cálculo Integral, esto después de definir que el grupo al que se le aplicó preliminarmente la actividad no contaba con las características necesarias para alcanzar los objetivos deseados como se mencionó anteriormente, en este nuevo grupo participaron 23 alumnos de diferentes especialidades de quinto semestre del Centro de Bachillerato No. 199 (Cbtis 199) ubicado en el municipio de Mixquiahuala de Juárez. Cabe mencionar que esta sesión fue video grabada con la finalidad de tener herramientas y datos necesarios para poder llevar a cabo este análisis, para lo cual la instructora dio a conocer a los estudiantes el orden y la dinámica con la cual se realizaría la sesión.

De manera introductoria en esta actividad se aplicó el mismo cuestionario exploratorio que al grupo de estudio anterior y se conformaba de las siguientes preguntas:

P1.- ¿Conoces la aplicación de Phothomath?
P2.- ¿Has hecho uso de ella?
P3.- ¿Recomiendas la aplicación?

Esto con la intención de indagar sobre el conocimiento que tenía este grupo de estudiantes sobre la aplicación, así como su experiencia de quienes han hecho uso de ella.

De las preguntas exploratorias, cabe mencionar que de los 23 alumnos que participaron en la implementación de la actividad, 18 de ellos afirman sí hacer uso de la aplicación, y en su mayoría recomiendan su uso dado que bajo las palabras de algunos alumnos la aplicación es sencilla de usar y ayuda a guiar el proceso de solución de ejercicios que les resultan complicados:

E1: Sí, esta fácil la aplicación y se hace sencillo de usar porque esta fácil de entender.
E2: Opino que es una buena aplicación, los procedimientos son cortos, es sencilla la manera de usar, al igual que las respuestas que da por cada problema y ecuación.
E3: Si, sobre todo para resolver problemas fácilmente, en mi opinión está bien responder ejercicios, y despejar dudas de manera sencilla, es una aplicación que en lo personal puedo recomendar.
E4: Si recomiendo la aplicación ya que es muy fácil de usar y también te puede ayudar a comparar tus resultados.
E5: Si la he usado principalmente para conocer el procedimiento y no solo tener el resultado de un ejercicio, la recomiendo porque sí da la respuesta correcta, el único problema es que no puede resolver ejercicios que llevan tan, sen, cos, no los puede resolver.
E6: Recomiendo la aplicación para personas que reconocen fórmulas sí, pero para las personas que no saben nada del tema que primero sepan acerca del tema.

De acuerdo con las respuestas anteriores y en contraste con las que se dieron en la sesión del primer grupo podemos destacar la notoria diferencia de opiniones respecto al uso de la aplicación entre un grupo y otro. De manera general en este nuevo grupo de trabajo podemos notar una mayor proporción de recomendaciones positivas acerca de la aplicación, donde manifiestan recomendarla pues consideran que es una aplicación sencilla que brinda procedimientos en algunas ocasiones cortos y que además sirve como guía y comparación al momento de resolver ejercicios, sin embargo como lo menciona un estudiante es necesario que las personas que hagan uso de esta aplicación tengan conocimientos previos respecto al tema.

Los 5 estudiantes restantes, manifiestan haber oído de la aplicación, sin embargo, no haber hecho uso de la misma por lo tanto 4 de estos estudiantes, no pueden recomendarla y solo uno de ellos se atreve a recomendar el uso de esta aplicación.

E7: Si la recomiendo porque al elaborar un problema se hace más fácil.

Posterior a ello se implementó la actividad de acuerdo a la propuesta de tarea de aprendizaje la cual consta de tres ejercicios de integrales trigonométricas de las cuáles la primera se resolvía haciendo uso de fórmulas de integración directas para funciones trigonométricas, otra de las integrales propuestas se resolvía identificado una función y su derivada dentro de la integral propuesta y por último un ejercicio donde existen dos rutas de solución, una de manera directa y la otra haciendo uso de las identidades trigonométricas elementales.

Otro aspecto importante que se puede notar en el segundo grupo es que debido a la complejidad de los ejercicios que el docente les propone los estudiantes se ven en la necesidad de buscar herramientas que les apoyen en el proceso de solución, a su vez fue notorio que el propio docente no está totalmente en desacuerdo con el uso de estas aplicaciones siempre y cuando le sirvan al estudiante como guía en el proceso de solución.

Por lo tanto, se considera que estos factores puedan influir en las opiniones que tienen los estudiantes respecto al uso de estas aplicaciones y en el hecho de que un mayor porcentaje de estudiantes declara conocer y hacer uso con mayor frecuencia de estas herramientas.

4.4.2.- Resolución de la tarea de aprendizaje propuesta

Se dio inicio con el primer ejercicio para lo cual la instructora mencionó a los estudiantes cual sería la dinámica de trabajo de acuerdo con la propuesta de tarea de aprendizaje (Ver fig. 1), los alumnos se enfrentan a tres ejercicios (Ver Figuras 2, 3 y 4), los cuales en un inició resolvieron de manera tradicional, a papel y lápiz haciendo uso de los conocimientos adquiridos durante el curso, y posteriormente se realizó cada uno de los ejercicios mediante la aplicación con la finalidad de poder comparar el proceso que presenta el alumno con el proceso que presenta la aplicación. La resolución del primer ejercicio se realizó de manera individual y posteriormente uno de los alumnos pasó al pizarrón para compartir su proceso de solución, y después hicieron uso de la aplicación para llevar a cabo una comparación entre el proceso que ellos realizaron a lápiz y papel y la solución que arroja la aplicación.

Un segundo y tercer ejercicio se trabajaron en equipos de tres bajo la misma dinámica del primer ejercicio, resolviendo primero de manera tradicional, un equipo compartió su proceso de solución y posterior a ello se llevó a cabo la comparación entre su resultado y el resultado obtenido en la aplicación llevando a cabo una retroalimentación grupal.

Cabe mencionar que todas estas actividades fueron guiadas por la instructora y a su vez esta, determinó los tiempos asignados a cada actividad, así como algunas preguntas que sirvieron de guía dentro del mismo proceso y la retroalimentación necesaria para cada ejercicio.

Ejercicio 1.- $\int \mathbf{3xsenx^2dx}$

Como se mencionó anteriormente este primer ejercicio es un ejercicio que se resuelve con la fórmula de integración directa $\int sen\,u\,du = -\cos u + c$, por lo tanto los estudiantes procedieron a resolverla de manera tradicional en su cuaderno de los cuales se puede mencionar que en su mayoría los estudiantes no tuvieron mayor dificultad en resolverlo pues aunque en dos casos pese a llegar al resultado, el planteamiento de la solución no es correcta y en un solo caso el estudiante no logra plantear un proceso de solución correcto ni llegar a la solución, puesto que la expresa como una cifra decimal, como se puede observar en las siguientes figuras (Ver figuras 10 y 11):

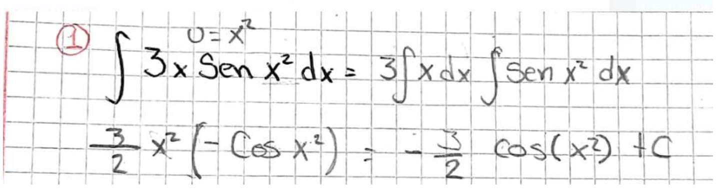


Figura 10.- Ejemplo de una producción escrita de un alumno que llega al resultado correcto, sin embargo, el planteamiento de la solución no es correcto.

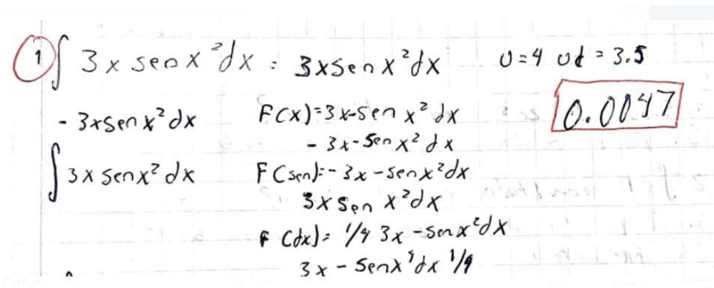


Figura 11.- Producción escrita del único estudiante que no logró plantear un proceso de solución correcto ni llegar a la solución.

La siguiente figura muestra el ejemplo del momento en que un estudiante se encuentra resolviendo el ejercicio de manera tradicional a lápiz y papel, al mismo tiempo que la instructora verificó que los estudiantes no hicieran uso de la aplicación en este primer momento, recordando que la finalidad de esta etapa es que el estudiante resuelva este ejercicio con los conocimientos adquiridos en este curso.

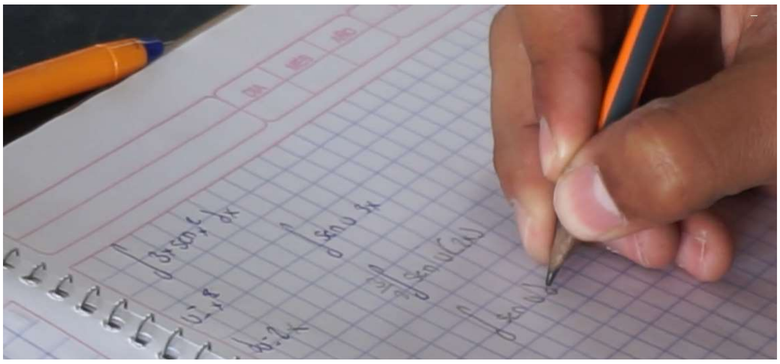


Figura 12.- Ejemplo del momento de solución a lápiz y papel del ejercicio 1

Una vez que se consideró suficiente el tiempo asignado para resolver este ejercicio, se pidió a un estudiante pasar al pizarrón para compartir su solución, esta parte de la actividad se considera dentro de la subcategoría comunicar resultados (CR), que a su vez pertenece a la categoría de la aproximación de la resolución de problemas, identificada en la tabla 4.

E2. ¿Yo? No, bueno (se acerca al pizarrón) lo primero que haríamos aquí, es saber cuál es la u de mi derivada, de mi integral perdón, lo cual yo supuse que va a ser equis al cuadrado, y entonces lo ponemos acá, aja así lo hago yo, seno de u por tres equis a la de equis, porque me paso los pasos y luego ya de aquí sacamos la de u seria multiplicando equis por, dos por uno dos, seria dos equis, seria integral seno de u y aquí comparamos tenemos tres equis y dos equis y como no son iguales entonces colocamos el tres y el dos debajo, y si checamos nuestro formulario hay una fórmula que dice que el seno de u por de u es igual al menos coseno, bueno antes se agrega la fracción tres medios menos coseno de u que es equis cuadrada.

En la siguiente figura (Figura 13) se muestra el proceso seguido por el estudiante mencionado en el pizarrón.

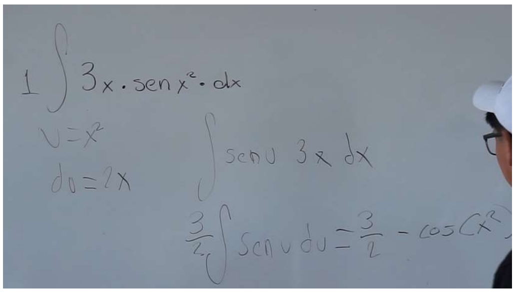


Figura 13.- Momento en que el estudiante pasó al pizarrón a compartir su proceso de solución

D. Y sería correcto dejarlo así, tres medios menos coseno de equis cuadrada
E2. No porque se le hace algo así como, tres medios multiplicada por uno sobre menos coseno de equis cuadrada.
D. ¿Ahí estamos de acuerdo?
E1. No
D. ¿Por qué no?
E1. Porque está multiplicando
D. ¿Qué sería lo correcto entonces?
El alumno que se encuentra al frente del pizarrón está un poco confundido y no sabe qué hacer
D. Porque no solo pones el tres menos enfrente de los tres medios por toda la expresión
E1. El menos va enfrente
D. Entonces nuestro resultado, menos tres medios del coseno de equis cuadrada, que le falta, algo llevan las integrales al final
D. La constante, la ce.

Como se aprecia en la explicación que el estudiante hace cuando pasa al pizarrón, al resolver este ejercicio es necesario la presencia de conocimientos previos, como por ejemplo identificar la fórmula con la que dio solución al ejercicio, así como identificar cada una de las partes que intervienen en esta solución dentro de la cual también está presente la necesidad de incorporar constantes para tener completa la integral y poder aplicar la fórmula de manera directa.

Sin embargo, como se puede apreciar en la figura 12 cuando coloca el resultado lo expresa de manera errónea puesto que en lugar de expresar un producto se aprecia como resultado la diferencia de una fracción y el coseno de la función.

Por otro lado, también reconoce la intervención de la instructora al momento en que se identifica que la solución es expresada de manera incorrecta, haciendo preguntas que, de acuerdo a Cabrera, et al. (2011) propician lo que se reconoce como comunicación heurística, mismo proceso que permite retroalimentar de manera grupal la solución de un ejercicio, y permite a los estudiantes participar y expresar sus ideas para llegar a un mismo fin.

Siguiendo con el orden de la propuesta de tarea de aprendizaje, se les pidió a los alumnos ahora resolver la integral anterior haciendo uso de la app Phothomath, para poder llevar a cabo la comparación entre el proceso de solución a lápiz y papel y el resultado propuesto por la aplicación, como se ve en la siguiente figura (Figura 14) donde el estudiante transcribió el resultado que arroja la aplicación.

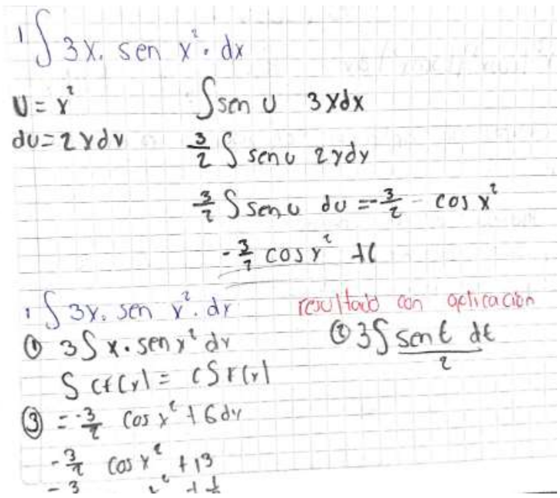


Figura 14.- Producción escrita de la solución dada por un estudiante y la solución propuesta por la aplicación.

Con la finalidad de comparar la producción escrita anterior, donde el estudiante transcribió la solución propuesta por la app, se presenta a continuación la forma precisa en la que la app muestra los resultados para dicho ejercicio. (Ver figura 15)

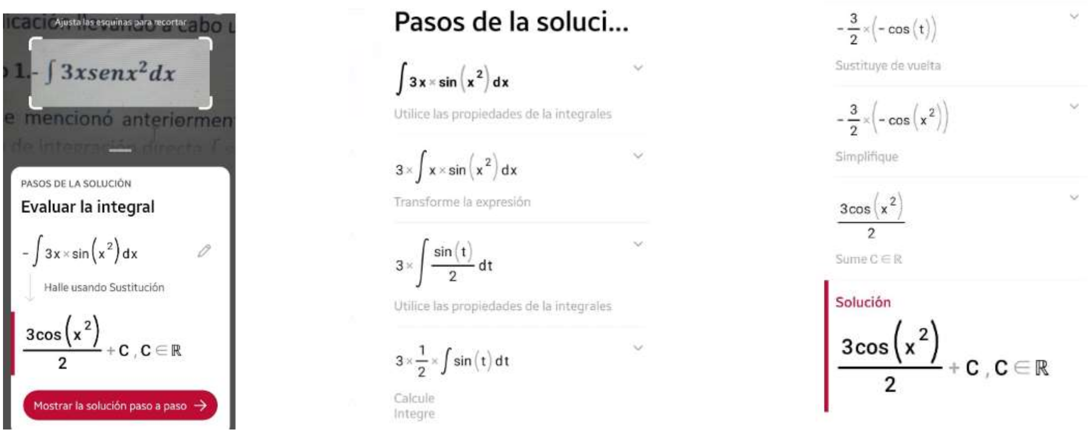


Figura 15.- Proceso de solución propuesto por la app Phothomat para la integral $\int 3xsenx^2dx$

La aplicación Phothomath tiene la opción de mostrar el proceso más detallado para cada ejercicio, como se muestra en la figura 16.

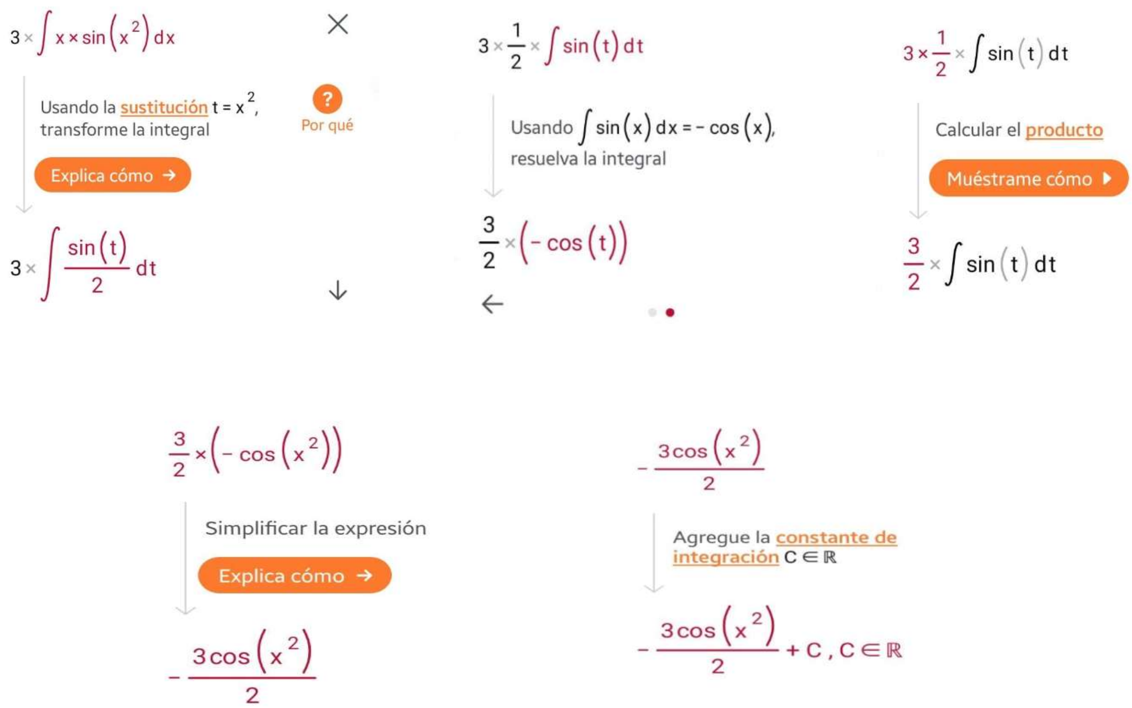


Figura 16.- Proceso de solución detallado propuesto por la app Phothomat para la integral $\int 3xsenx^2dx$

Al comparar la producción escrita de un estudiante (fig. 13) con la imagen donde se detalla el proceso de solución propuesto por la aplicación (fig. 15), es notorio que pese a que a los estudiantes se les pidió transcribir en su cuaderno la solución propuesta por la app, con la finalidad de poder comparar con mayor claridad ambos procesos, los estudiantes no lo hicieron de manera completa, puesto que se observa en la producción escrita solo escribió de manera clara cuál es el resultado que arroja la aplicación y el proceso de solución se observa un tanto incompleto.

De esta manera el momento fue aprovechado para que la instructora realizara algunas preguntas para guiar a los estudiantes en el uso de la aplicación:

D. ¿Qué nos dice el procedimiento? ¿Quién comparte el primer paso que sale ahí?
E4. Utilicé las propiedades de la integral
D. ¿Cuál es la propiedad de la integral que manejan?
E4. Equis dos
D. Punto uno, utilice las propiedades de las integrales, permítanme anotar en el pizarrón, nos marca, nos dice, tres integral de equis seno cuadrado de equis de equis
D. ¿Porque este tres esta de este lado? (señala el número que se encuentra antes del símbolo de integral) ¿Si saben por qué?
E4. Porque es una constante
D. Porque es una constante, ¿Qué propiedad me ayuda a definir que esto es una constante? O ¿Qué propiedad te permite que este constante pase del otro lado de la integración?
E4. Porque no tiene potencia
D. Porque no tiene potencia, pero hay una propiedad y ahí en la aplicación la dice, nos dice que la integral de una constante por una función, es igual a la constante por la integral de la función, si, lo que quiere decir es que la constante puede salir de la integral.
D. ¿Cuál es el segundo paso?
E4. Utiliza la propiedad distributiva
D. ¿Qué es lo que te indica?
E2. Transformando la función
D. ¿Cómo se transforma?
D. ¿Qué es lo que hace?, ¿Qué sigue? Díctenme por favor
E4. Tres por integral del seno de equis cuadrada entre dos
D. ¿Por qué dos?
E4. Porque la derivada es dos equis, se pone multiplicando y también dividiendo.
D. ¿Aquí tiene algo más? O ya es todo (señala la parte final que se ha escrito)
E4. De equis
D. Pero faltaría la equis ¿o no?, porque la equis del seno es cuadrada entonces su derivada es dos equis
E4. Sí, pero aquí ya no la ponen ya no la toman en cuenta
D. ¿Cuál es el tercer paso?, alguien más jóvenes, alguien de atrás, señorita ¿Cuál es el tercer paso?
E6. No me cargaron los datos

D. No te cargaron los datos, ¿alguien más?
E7. Calcula e integra
D. Calcula e integra, ¿Cómo la calcula y como la integra? ¿Qué método usa o que fórmula utiliza?
D. ¿Qué dice chicos?, solamente es leer la aplicación, ¿Qué dice? (se acerca a ver el celular de uno de los alumnos para apoyar en la lectura)
E7. Integral, pero simplificamos 3 integral de t
(regresa el docente al pizarrón al darse cuenta que la expresión anterior no se dictó de la manera correcta)
D. Aquí omitimos, (corrigiendo la expresión escrita anteriormente)
D. Nos dice tres seno de t entre dos por de t, más bien a quien me dicto esto, fue incorrecto
D. ¿Por qué cambia esta expresión a te? ¿Por qué ahora tenemos la presencia de te? Ahí lo dice
E8. Dice. Usa la sustitución de te que es igual a equis cuadrada para conformar la integral
D. ¿Qué quiere decir esto? Esto nos indica entonces que solo realizamos un proceso de sustitución.
D. En este proceso nosotros podemos sustituir la equis por la te, o por cualquier otra constante, es decir aquí podemos poner seno de u por de u qué es lo más común que podemos observar, si revisan su fórmula al final dice seno de u por de u, pero en esta ocasión se utiliza la te, una vez que estamos sustituyendo por te quiere decir que podemos aplicar la fórmula, ¿qué fórmula aplican para resolver esta función, o esta integral?
E9. Permítame
D. Alguien más que formula ocupan, observen su formulario y vean que fórmula les sirve para resolver esta integral
E10. La de seno de u
D. ¿Cómo dice la fórmula?
E10. Integral del seno de u por de u
D. ¿Y cuál es el resultado? Según la fórmula
E10. Menos coseno de u más c
D. Al aplicar la fórmula pues simplemente obtenemos menos coseno de te más c, y ¿como regresamos a los términos de equis, es decir ya no queremos tener te en nuestra respuesta final?
E10. Cambiamos la te por equis cuadrada y nos quedaría menos tres medios del coseno de equis cuadrada en de equis
D. ¿Qué quiere decir esta constante? ¿Por qué se coloca la ce?
E2. Porque todas las integrales la llevan
D. ¿Por qué la llevan?
A2. No sabemos
D. A esta ce se le conoce como constante de integración, lo que sucede es que este resultado pertenece a una familia de integrales, si ustedes saben a la integral se le conoce como anti derivada, que quiere decir, que esto que nosotros obtenemos aquí al derivarlo nos tiene que dar la función original.

Al realizar la comparación de la solución que realizan los estudiantes en contraste con la solución propuesta con la aplicación podemos destacar que esta app hace uso de un método de solución distinto al que utilizan los alumnos, pues en este caso la app ocupa el método de cambio de variable, completa las partes de la integral y vuelve a la variable original una vez integrada la función. Estos elementos le permitieron a la instructora discutir con sus estudiantes esta técnica del cambio de variable como otra ruta de solución, además le permitió discutir con sus estudiantes otros elementos como la forma de completar una integral para poder aplicar la fórmula directa, así como la reflexión acerca de la constante de integración, utilizando para ello preguntas dirigidas a los estudiantes avanzando en el análisis del proceso de solución, es decir que en este caso se pudo constatar algunas de las ventajas que puede tener el uso de esta app, para apoyar el proceso inquisitivo del profesor y potenciar los procesos de reflexión en los estudiantes, haciendo un contraste con lo realizado anteriormente a lápiz y papel.

De igual manera este proceso nos permitió darnos cuenta las dificultades que presentan los estudiantes al momento de leer o interpretar, o incluso transcribir correctamente lo que la app presenta, abriendo otra oportunidad para la intervención del docente que refuerce el lenguaje algebraico.

Ejercicio 2.- $\int x^2 senx^3 cosx^3 xdx$

Como se puede observar, el ejercicio dos, es un ejercicio un poco más complejo que el anterior, en el sentido, en que ya no es posible resolver la integral con una fórmula de integración de funciones trigonométricas de manera directa, más bien lo que se tiene que lograr es identificar que estamos frente a una integral que contiene a una función trigonométrica y su derivada, lo cual se puede resolver haciendo uso de la fórmula

$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c.$

Este ejercicio fue puesto en escena a los estudiantes y de acuerdo a la propuesta de la tarea de aprendizaje en esta ocasión se trabajaría en parejas, sin embargo, la instructora considero conveniente trabajar en equipos de tres estudiantes, para lo cual se les dio un tiempo de diez minutos.

Figura 17.- Momento en que los estudiantes intercambiaron opiniones entre su equipo y con otros equipos durante el ejercicio 2.

Durante los cinco primeros minutos, se observó a los estudiantes intercambiar opiniones, revisar sus apuntes, haciendo intentos fallidos para llegar a una solución, por lo cual al percatarse la instructora de que ningún equipo se aproximaba a la solución y que el proceso que estaban siguiendo no era el correcto decidió intervenir con la finalidad de orientarlos para resolver de manera correcta el ejercicio:

D.- ¿Alguien ya tiene la solución?, observo, la mayoría está tratando a "u" como que
A8.- Equis cúbica, ah no equis cuadrada.
D.- La mayoría está haciendo algo similar a lo anterior, y quieren resolverla como el ejercicio, anterior ¿cierto?
A7.- Si
D.- Eso realmente no se puede, observen, aquí lo que podemos hacer es tomar el seno o el coseno la que sea, para considerar que cualquiera de estas es u, si yo digo, que seno de equis cúbica es u, ¿cuál sería "de u"?
A6.- De u es coseno de equis cúbica, ahhh ya.
¿Les ayuda esto?, ¿pueden continuar?
D. ¿Sucede lo mismo si lo consideramos diferente? Si "u" es coseno de equis cúbica, ¿Quién es de u?
A6.- El seno
D.- ¿El seno de quién? Como derivo esto
A5.-De equis cúbica
D.- U es una función de u es la derivada, cuando se deriva el seno de u también se deriva a u
D.- ¿Cuál es la derivada de coseno de equis cúbica?
A5.- Seno de equis
D.- Seno de equis cúbica por quién? Recuerden si es que así se los enseñaron, esto se aplica como la regla de la cadena, entonces seno de equis cúbica por la derivada de esto, ¿Quién es la derivada de esto? (se señala la equis cúbica)
A6.- Tres equis cuadrada
D.- Tres equis cuadrada, y si observo si yo tomo esto, una parte sería mi u y la otra mi de u, entonces observamos nuevamente el ejercicio y una parte seria u y la otra, el resto de la expresión. Sería de u, y con eso puedo derivar perdón integrar con una fórmula, cual es la fórmula, pues u a la n. Por favor traten de terminarla.

De acuerdo con el episodio anterior, podemos darnos cuenta que los estudiantes no lograron identificar de manera inmediata cuál sería el proceso de solución que se debe de seguir frente a un tipo de integral como el ejercicio dos y buscaban la manera de resolverla haciendo uso de la metodología utilizada en el ejercicio uno. También podemos destacar que la oportuna participación de la instructora les muestra una posible ruta de solución haciendo uso nuevamente de la comunicación heurística destacada anteriormente, con lo cual la mayoría de los equipos lograron terminar el ejercicio, y al igual que en el ejercicio anterior, se solicitó al equipo que terminó primero, pasaran al pizarrón a compartir su proceso de solución.

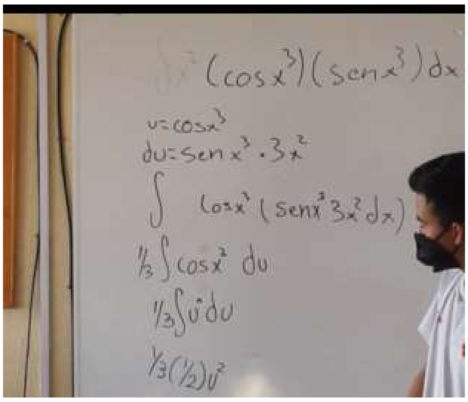


Figura 18.- Momento en que el equipo de estudiantes que terminaron primero pasaron al pizarrón a compartir su proceso de solución

Como se observa en la imagen anterior los estudiantes compartieron su proceso de solución y se puede notar en el pizarrón, que luego de la intervención de la instructora, lograron concretar de manera correcta la solución del ejercicio, haciendo uso correcto de la fórmula y empleando las estrategias de solución correctas y que comúnmente se utilizan en el proceso de solución de integrales, como completar las integrales de la manera mencionada desde el ejercicio 1. Parte central del diálogo que estableció el equipo con la instructora y con el resto del grupo fue lo siguiente:

E7.- Nosotros escogimos a u como coseno de tres equis cúbica.
E7.- Bueno en esta parte podemos ver que de pende lo que escojamos como u, lo demás seria como de u, por lo cual reestructuramos la integral de tal manera que nos queda la función y su derivada.
E7.- Al darnos cuenta que para tener completa la derivada necesitamos tener un tres, lo agregamos y recordamos que también lo ponemos como un tercio del otro lado, y entonces tenemos un tercio por la integral del coseno de equis cúbica por el seno de equis cúbica por tres equis cuadrada.
D.- Si queda claro porque queda fuera un tercio, porque él un tercio, recuerden como el tres no lo teníamos tenemos que crear un balance en la ecuación, puesto que no podemos agregar un número por agregarlo entonces al colocar el tres que nos falta de la derivada, tenemos que tener un tercio por fuera, para crear ese balance.
E7.- Entonces tengo coseno de equis a la tres por du, puesto que ya cuento con su derivada, entonces tengo un tercio de la integral del coseno de equis a ala tres por de u, lo cual quedaría como un tercio de la integral de u a la n.
D.- Y si se dan cuenta ya tenemos una fórmula que nos ayuda a resolver este tipo de integral verdad, que nos dice esa fórmula
E9.- a por logaritmo de a
D.- No, revisen bien
E7.- La de u a la n es igual u a la ene más 1 entre ene más uno
D.- Entonces ya solo aplicamos la fórmula para obtener el resultado, cuánto vale ene
E1.-Uno

E7.- Entonces por fórmula tenemos un tercio de la integral de u al cuadrado entre 2, como u es coseno de equis cúbica entonces tenemos un tercio de equis cúbica al cuadrado sobre dos, podemos multiplicar el dos por el seis, y entonces me queda, un sexto del coseno de equis cúbica al cuadrado más ce.

En este punto es importante señalar la siguiente apreciación:

Es común que al momento de trabajar en el aula los estudiantes den por hecho que los ejercicios que se desarrollan durante una sesión tendrán una estructura similar y por ende el mismo proceso de solución, de tal modo que no identifican que pueden existir variantes en los ejercicios que los lleve a buscar algunas rutas de solución diferentes y que se enfrasquen en querer resolver los ejercicios siguiendo el mismo proceso que en el ejercicio anterior.

Una vez concluido el proceso de solución de manera tradicional, se prosiguió a trabajar con la app, para dar seguimiento a la secuencia de la tarea de aprendizaje, y nuevamente los estudiantes hicieron uso de Phothomath para llevar a cabo el proceso de comparación entre sus resultados.

En la siguiente figura se muestra el caso particular de una estudiante, haciendo uso de la app para resolver el ejercicio 2

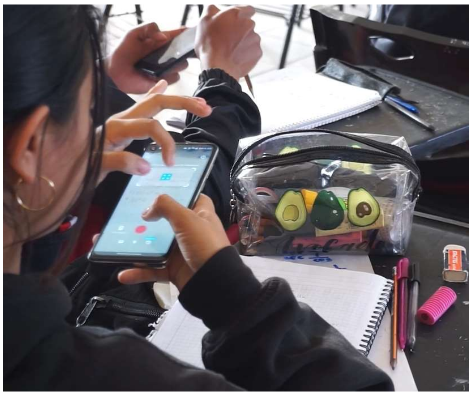


Figura 19.- Momento en el que una estudiante hace uso de la aplicación apoyándose de la herramienta que te permite hacer uso de la cámara para poder ingresar la integral.

De acuerdo a los momentos en que la aplicación aborda la solución del ejercicio 2, se puede observar nuevamente como la app hace uso del cambio de variable para dar solución a este ejercicio (Ver figura 20), por lo cual se les pidió a los estudiantes copiar en su cuaderno de manera fiel, para lograr identificar los métodos y técnicas empleadas por la app.

Figura 20.- Proceso de solución propuesto por la app Phothomat para la integral $\int x^2 senx^3 cosx^3 xdx$

En este sentido de igual manera se les pidió a los estudiantes abrir los pasos de manera más detallada, para observar íntimamente la cronología del proceso de solución, como se muestra en la siguiente figura (Figura 21)

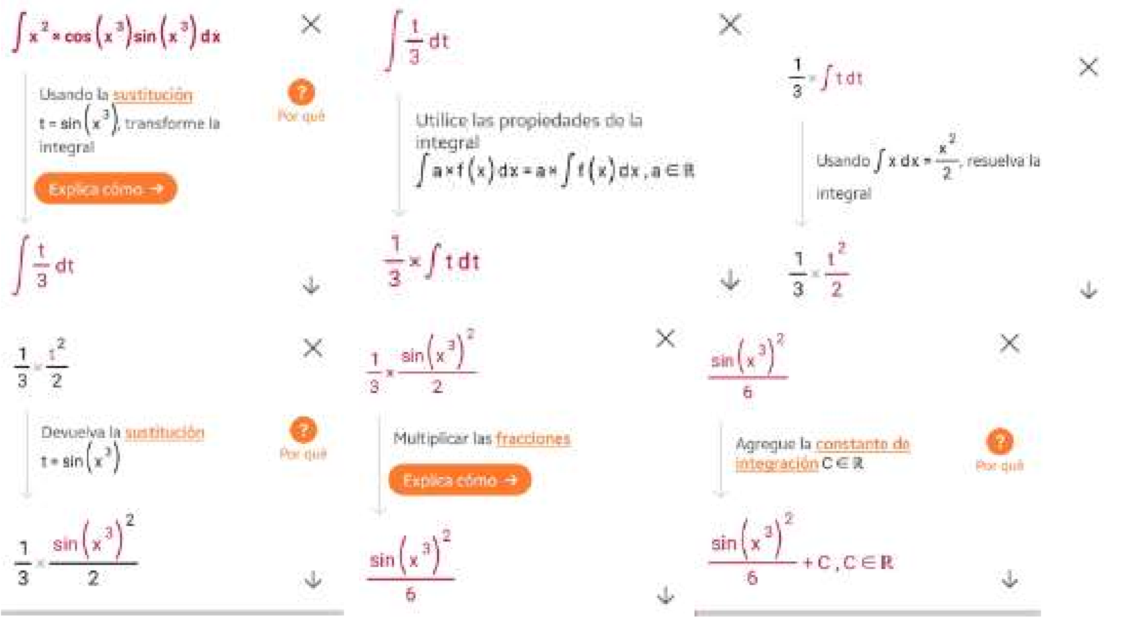


Figura 21.- Proceso de solución detallado propuesto por la app Phothomat para la integral $\int x^2 senx^3 cosx^3 xdx$

Una vez que transcribieron el proceso detallado proporcionado por la app se pidió analizar, reflexionar y contestar algunas preguntas relacionadas a los resultados obtenidos por la app y mediante el proceso de solución a lápiz y papel, como puede observarse en la instrucción dada por la docente mediante preguntas reflexivas para el estudiante.

D.- Ahí en su hoja, coloquen la siguiente pregunta, ¿si tu utilizas la aplicación, el resultado es el mismo? Y ¿el proceso es el mismo?, si el proceso no es el mismo, ¿en qué diferencia?, ¿lo resuelven con la misma fórmula? ¿es la mimas secuencia de pasos?, respóndanlo ahí en su hoja por favor.

De este modo los estudiantes dieron respuesta las preguntas a reflexionar de la siguiente manera:

P1: ¿El resultado es el mismo?
P2: ¿El proceso es el mismo?

Respecto a la pregunta 1 (P1) trece estudiantes responden que sí, es el mismo resultado que se obtiene cuando se resuelve el ejercicio de manera tradicional y cuando se utiliza la aplicación para resolverlo. Mientras que para la pregunta 2 (P2), la totalidad de estos estudiantes consideran que no es el mismo procedimiento pues en ocasiones la app utiliza otras fórmulas o procedimientos distintos a los estudiados en la clase, pero que al final se llega al mismo resultado. (Ver figura 22)

Por otro lado, los 10 estudiantes restantes consideran que los resultados no son los mismos cuando se resuelve de manera tradicional y utilizando la app, puesto que varían los procedimientos y las fórmulas utilizadas. (Ver figura 22)

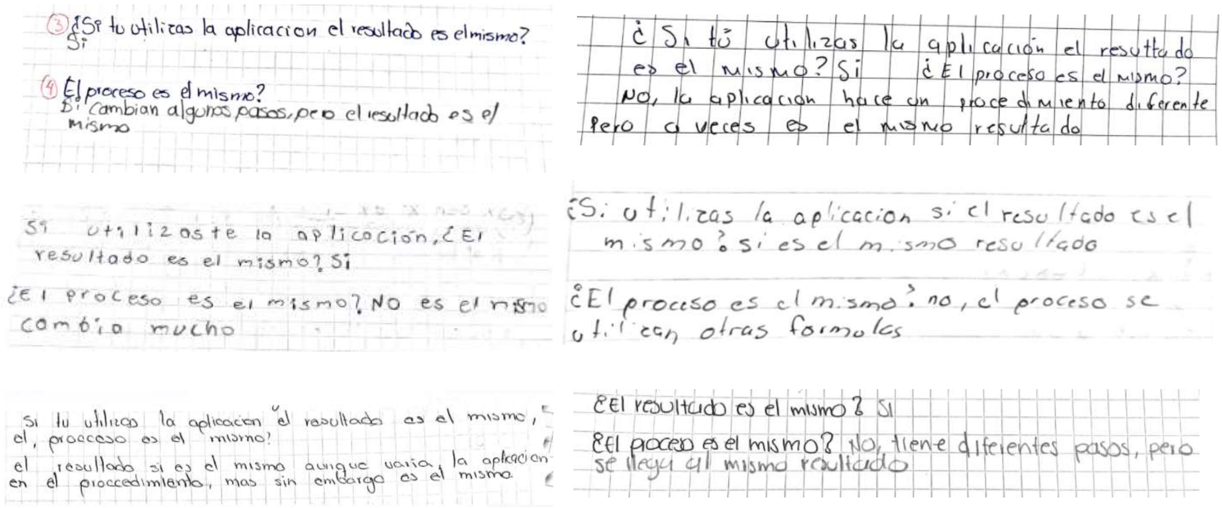


Figura 22.- Extractos de la producción escrita de los estudiantes donde dan respuesta a las preguntas P1 y P2

De manera general se puede deducir que la mayoría de los estudiantes sí logran identificar, que, aunque la aplicación en ocasiones hace un proceso más extenso el resultado al que se llega es el mismo pese al cambio de variable que aplica la app, sin embargo, aún existe un porcentaje, de estudiantes que piensan que por ser rutas de solución distintas o con más elementos, la solución no es la misma.

En este sentido lo anteriormente mencionado refuerza una de las ideas que se consideró al momento de plantear la tarea de aprendizaje, que es aquella que permite que el estudiante logre la comparación entre resultados e identifique que existen diferentes métodos de solución como se vio desde la solución del ejercicio1, donde es importante destacar la participación de la docente como guía en el proceso de implementación de la tarea de aprendizaje.

Ejercicio 3.- $\int \boldsymbol{xtan7x^2dx}$

Para realizar un tercer ejercicio de acuerdo a la propuesta de tarea de aprendizaje, se presentó a los estudiantes la integral de una función trigonométrica que puede resolverse por dos diferentes rutas, una de ellas de manera directa, haciendo uso de las fórmulas de integración directa que se encuentran en el formulario y otra haciendo uso de las razones trigonométricas elementales que involucran al seno, coseno y tangente.

Para su solución se trabajó bajo la misma mecánica que los dos ejercicios anteriores de tal manera que los estudiantes en un primer momento resolvieron la integral de manera tradicional, a lápiz y papel, en equipos de tres personas.

En la siguiente figura se muestra en producción escrita la solución que realizan los estudiantes haciendo uso de la fórmula de integración directa $\int tanu\, du = -lncosu^2 + c$, donde se puede notar que los estudiantes lograron identificar quien es la función y posteriormente quienes el argumento de la función, así como el elemento que forma parte de la derivada del argumento y el momento en que se necesita complementar la derivada para poder resolver la integral, aunque como se puede observar en la imagen los estudiantes olvidan colocar la constante de integración a pesar de hacer hincapié continuamente en la importancia y el significado que tiene esta constante.

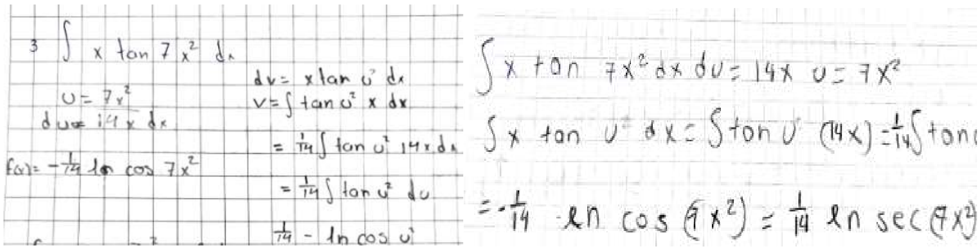


Figura 23.- Ejemplo de la producción escrita de la solución de dos estudiantes para la integral $\int \boldsymbol{xtan7x^2dx}$

En un segundo momento respetando la cronología de la propuesta de actividad, uno de los equipos pasó a compartir su solución para este ejercicio, momento para aclarar la representación simbólica del valor absoluto como se puede apreciar en el siguiente episodio.

D.- Bien, el último ejercicio para quienes vallan terminando, integral de equis por la tangente de siete equis cuadrada, por de equis. Trabajamos por favor, resolvemos la integral utilizando sus conocimientos. Damos 10 minutos para ello.
D.- ¿Listo? ¿Qué equipo nos comparte su solución? Haber pasen ustedes, los del fondo.

El equipo de tres estudiantes pasa al pizarrón.

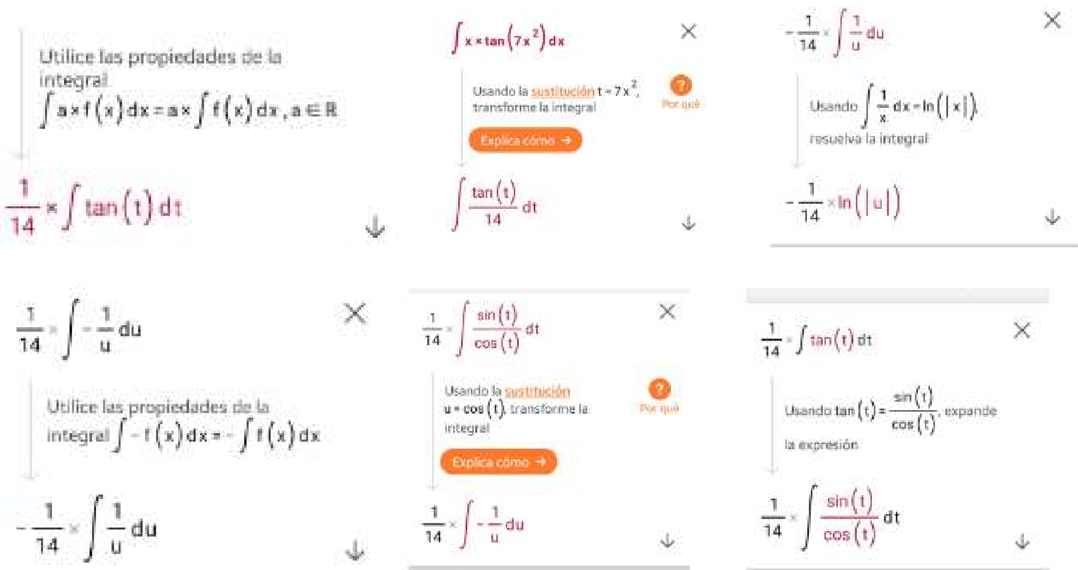
E11.- Nosotros tomamos la fórmula que está en nuestro formulario, que dice integral de la tangente de u por du es igual a menos logaritmo del coseno bueno aquí se ven dos rayitas.
D.- Se lee módulo o valor absoluto, el valor absoluto de cosenos de u.
E11.- Bueno otra vez menos logaritmo natural del valor absoluto de coseno de u más ce.
D.- ¿A qué se refiere el valor absoluto? ¿Porque la fórmula lo marca así?
E12.- Que el número siempre va ser positivo
D.- De acuerdo, ¿Qué más hicieron?
E12.-Pues solamente seguimos la fórmula y para ello tenemos que designar que u es igual a siete equis cuadrada y por lo tanto de u es igual a catorce equis, como podemos observar solo tenemos la equis y nos falta el catorce.
E11.- Aja si, entonces ponemos el catorce para complementar el ejercicio, pero es necesario ponerlo también como fracción por fuera de la integral.
E12.- Ya le toca a él. (señala a su otro compañero)
E13.- Pues ya, bueno, pues ya nada más hacemos lo que dice la fórmula, que es resolver la integral y queda en menos un catorceavo del logaritmo, la rayita coseno de siete equis cuadrada, ponemos la otra rayita, como si fueran paréntesis más ce.
D.- Muy bien, ¿se les complico?
A7.- No, bueno solo al inicio no sabía qué hacer con la equis que esta al principio, pero ya después me apoyaron mis compañeros.

De acuerdo con el episodio anterior podemos mencionar la importancia de que los estudiantes expresen sus ideas y aprendan a comunicar sus resultados haciendo uso correcto del lenguaje algebraico, así como la importancia y las ventajas que arroja el pensar trabajar en equipos o en parejas ya que como lo menciona Vygotsky (1962) resulta beneficioso para el aprendizaje de los estudiantes la interacción con los demás, dando la oportunidad a la discusión, el diálogo y el intercambio de ideas.
En un segundo momento nuevamente se les pidió a los estudiantes hacer uso de la app para resolver la integral y poder llevar a cabo nuevamente el proceso de comparación y análisis que guía la propuesta de tarea de aprendizaje, en esta ocasión los estudiantes notaron una diferencia den el proceso de solución propuesto por la app como se muestra en la siguiente imagen que describe el procedimiento propuesto por la aplicación donde se puede notar como después de hacer el uso de cambio de variable que es característico en

la aplicación, ahora utiliza la sustitución $\tan u = \frac{sen\,u}{\cos u}$ para posteriormente utilizar la fórmula de integración $\int \frac{1}{u} du = ln|u|du + c$.

Figura 24.- Proceso de solución detallado propuesto por la app Phothomat para la integral $\int \boldsymbol{xtan7x^2dx}$

Al observar la imagen anterior podemos notar que el proceso que se observa para dar solución a la integral puede resultar un tanto confuso al momento en que se cambia de una función tangente a una identidad trigonométrica, sin embargo, podemos hacer uso del proceso detallado que brinda la aplicación para comprender un poco mejor el procedimiento que se realiza.



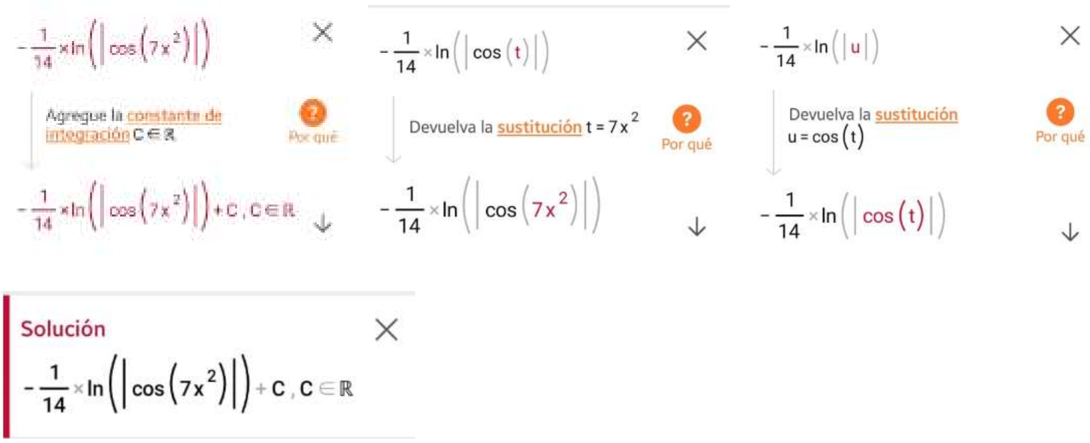


Figura 25.- Proceso de solución detallado propuesto por la app Phothomat para la integral $\int xtan7x^2dx$

Se les pidió a los estudiantes que copiaran el resultado de la aplicación y después de casi cinco minutos se les preguntó nuevamente respecto al ejercicio 3.

D.- ¿Cuál fue el resultado? ¿Es igual a lo que ustedes realizaron?
E1.- No
D.- ¿En que varía?
E8.- O sea si es igual el resultado, pero cambia un poco el proceso, porque en la aplicación cambian la tan por seno sobre coseno, y después ya lo resuelven con otra fórmula.
D.- Y ¿Por qué hacen ese cambio? ¿Por qué es válido realizar ese cambio?
D.- Observen acá en el pizarrón, ustedes recuerdan que la tangente es una función trigonométrica que está presente en un triángulo rectángulo. ¿Recuerdan cuáles son las funciones trigonométricas?
E7.- Seno, coseno, tangente
A10.- Seno es igual a cateto opuesto ente hipotenusa
E12.- Coseno es igual a cateto adyacente entre hipotenusa, y tangente
E1.- cateto opuesto entre cateto adyacente
D.- De acuerdo, y si conocen lo que es el circulo unitario, recordaran que la tangente también es igual al seno sobre el coseno, debido a que el seno se encuentra en el cateto opuesto y el coseno sobre el cateto adyacente.
D.- Por esta razón es válido hacer ese cambio y considerar que la tangente es igual a seno sobre coseno, entonces si nosotros tenemos esta igualdad, ¿Cuál es la fórmula que se ocupa para integrar esta función? ¿Qué es lo que copiaron de la aplicación, que hace la aplicación después de cambiar a la tangente?
E11.- Pues ya se escribe logaritmo natural
D.- Menos logaritmo natural, y esto es porque al tener seno de siete equis cuadrada sobre coseno de 7 equis cuadrada, se puede resolver considerando que tenemos a la derivada de una función, sobre la misma función, por lo tanto se aplica la fórmula de de u sobre u
E1.- Ah si aquí dice uno sobre u por du

D.- Entonces si se dan cuenta el proceso que realiza la aplicación, aunque es una ruta diferente, te lleva a el mismo resultado, bien quien puede compartir algo respecto a esto.
E7.- Lo que podemos decir es que para resolver esta integral podemos ocupar dos procesos.
D.- eso es correcto. ¿Cuáles son estos procesos?
E9.- Pues lo más fácil que podemos hacer es ocupar la fórmula de integración directa, que en este caso se resuelve con la integral de la tangente.
D.- Muy bien, y cuál sería el otro caso
E7.- Bueno, para el otro caso necesitamos conocer las identidades trigonométricas, para poder sustituir a la tangente por su identidad, y de esta manera hacer uso de la otra fórmula que ocupamos.
D.- Muy, bien, entonces ¿Reconocen la importancia de tener en cuenta las relaciones trigonométricas? Porque si se dan cuenta, si a ustedes se les complica resolver una integral de este tipo, y deciden hacer uso de una aplicación como Phothomath, es importante que ustedes puedan entender el proceso que hace la aplicación para llegar al resultado, porque de otra manera, puede suceder que ustedes den por hecho que está mal realizado el ejercicio, o que como comúnmente lo hacen, solo copien en su cuaderno y no entiendan que es lo que paso para llegar a este resultado.

4.5.- Categorías de análisis

Para realizar el análisis de la información que fue colectada durante la sesión donde se desarrolló la tarea de aprendizaje, se utilizó una matriz de categorías que se basa en los constructos teórico-conceptuales que fueron considerados en el marco referencial (ver tabla 7).

Tabla 7.- Matriz de categorías para el análisis de la implementación de la tarea de aprendizaje

	CATEGORIAS	SUBCATEGORIAS	CÓDIGO
1	Aproximación didáctica de resolución de problemas	Analizar casos particulares	ACP
		Observar patrones	OP
		Comunicar resultados	CR
2	Herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas	Guía el proceso de solución	GPS
		Muestra otras rutas de solución	ORS
		Emplea otras heurísticas	EH
		Permite comparación con la solución a lápiz y papel	CLP
3	Tarea de aprendizaje y demanda cognitiva	Guía del profesor	GP
		Proceso inquisitivo del profesor	PI
		Empleo de la herramienta digital	EHD
		Propicia la comparación y el análisis	PCA
		Permite conectar conocimientos previos	PCP
		Permite justificar pasos empleando propiedades y métodos de integración	JPCP

Para el tipo de tópico abordado en la tarea de aprendizaje nos interesó destacar tres subcategorías del enfoque de resolución de problemas: el análisis de casos particulares, la observación de patrones y la comunicación de resultados.

a) Subcategorías en el enfoque de resolución de problemas

En este orden de ideas consideramos importante analizar casos particulares, ya que, a través del estudio objetivo de ejercicios seleccionados para esta actividad, nos permite observar el proceso de solución que el alumno plantea haciendo uso de los conocimientos adquiridos durante el curso de Cálculo Integral, mismos serán reforzados al realizar la comparación con el proceso que sugiere la aplicación Phothomath analizando el mismo ejercicio.

También se puede mencionar la intención de la tarea de presentar ejercicios que tengan características similares de acuerdo a su jerarquía u organización, con la finalidad de que el estudiante identifique características y patrones similares entre un grupo de funciones, asumiendo que el proceso de solución es similar entre ellos. A su vez durante la actividad se considera importante hacer partícipe a los alumnos de manera tal que frente al grupo compartan su procedimiento, con la finalidad de comparar y retroalimentar.

b) Subcategorías en el uso de herramientas digitales

La implementación de una app en la tarea de aprendizaje puede ser utilizada como una guía en el proceso de solución ya que en distintas ocasiones debido a la complejidad de los ejercicios el estudiante no puede elegir de manera concreta el método de resolución de ejercicios de integrales trigonométricas, creando incertidumbre, al mismo tiempo al hacer uso de la app el estudiante puede observar otras rutas de solución, de modo tal que el estudiante no solo se quede con el proceso mostrado por el docente, sino que se permita conocer distintos procesos de solución.

Al integrar estas tecnologías en la tarea de aprendizaje se sugiere que el docente hago uso de otras heurísticas que faciliten la comprensión de las distintas rutas de solución propuestas por la app, guiando e introduciendo al estudiante en conceptos distintos que le permitan hacer uso correcto de la información que se obtiene de la app y a su vez permitir la comparación con la solución a lápiz y papel.

c) Subcategorías de la tarea de aprendizaje y su demanda cognitiva

Uno de los elementos más importantes durante la implementación de una tarea de aprendizaje es sin duda la guía del profesor, ya que de esta depende los resultados obtenidos, dentro de este proceso de implementación de la tarea de aprendizaje uno de los momentos que serán eje de la actividad es el momento en que el profesor realiza procesos inquisitivos, mismos que son claves para el buen desarrollo de la actividad.

La inclusión de una herramienta digital en el diseño de una tarea de aprendizaje puede dotarla de ciertas ventajas, en el caso concreto de la app empleada puede propiciar la comparación y el análisis que les permita conectar conocimientos previos con los objetivos de la tarea de aprendizaje.

El uso de Phothomath puede permitir justificar pasos empleando propiedades y métodos de integración que a su vez coadyuvan en la mejor comprensión del tema de integrales trigonométricas.

Sin embargo, el solo uso de la herramienta no garantiza un resultado exitoso, más bien dependerá del docente y sus acciones lograr mantener la atención e interés de los estudiantes y con ello contribuir a lograr un nivel aceptable de la demanda cognitiva.

4.6 Análisis de las subcategorías

Para llevar a cabo un análisis de la información obtenida se utilizó como base la clasificación de subcategorías anteriormente establecidas, añadiendo las tres columnas denominadas: episodio, teórico y autor.

En la columna episodio se encuentran extractos del diálogo en donde se puede evidenciar la presencia de una determinada subcategoria, en la columna teóricos se encuentran las bases que sustentan la relación del episodio con la subcategoría desde la perspectiva de un referente teórico y finalmente en la columna autor encontramos la opinión o juicio de esta investigadora con base en las experiencias adquiridas.

Este tipo de análisis permite la triangulación entre el discurso del sujeto estudiado, los autores con mayor experticia y la investigadora.

El esquema utilizado con algunas modificaciones está basado en la propuesta de Bertely (2000), para el análisis de datos etnográficos a través de categorías y subcategorías.

a) Tabla 8.- Categoría de la aproximación didáctica de resolución de problemas

SUBCATEGORÍA	EPISODIO	TEÓRICO	AUTOR
Analizar casos particulares (ACP)	1. D. Iniciamos, la primera integral, el primer ejercicio es tres equis, seno de equis cuadrada, este es el primer ejercicio, entonces tendremos unos diez minutos si les parece, en diez minutos la resolvemos, o ¿cuánto tiempo requieren? $$\int 3xsenx^2dx$$	El empleo de casos es una herramienta educativa que incluye información y datos, un buen caso es un vehículo por medio del cual se hace un análisis minucioso enmarcado dentro de una temática específica. (Wassermann, 1994). El estudio de un caso se complementa con preguntas críticas, trabajo en pequeños grupos, actividades de seguimiento y conclusiones. (Wassermann, 1994). Comprender un problema pasa por diversas fases, en principio debe escogerse adecuadamente, de modo que no resulte ni muy difícil ni muy fácil, de modo que el aprendiz identifique los datos y si es posible satisfacer las condiciones dadas (Polya, 1945). Schoenfeld 1985, propone cuatro fases para la resolución de problemas: dentro de la fase de análisis ubica la importancia de resolver casos particulares. Y dentro de la fase de exploración identifica la relevancia de examinar problemas equivalentes, y posteriormente otros ligeramente modificados.	La estructura de la tarea intencionalmente se basa en el análisis de tres casos particulares: Para el primer ejercicio se determinó una integral trigonométrica que se puede resolver con fórmulas de integración directa, donde únicamente se tiene que identificar que tenemos una función acompañada de su derivada.
	145. D. El ejercicio número dos, equis cuadrada por coseno de equis cúbica por seno de equis de equis. $$\int x^2senx^3cosx^3xdx$$		Posteriormente para aumentar el grado de complejidad de manera gradual se pensó para el ejercicio 2, una integral donde es necesario completar la expresión para poder tener nuevamente una función acompañada de su derivada y poder derivar de manera directa.
	215. D.- Bien, el último ejercicio para quienes vallan terminando, integral de equis por la tangente de siete equis cuadrada, por de equis. Trabajamos por favor, resolvemos la integral utilizando sus conocimientos. Damos 10 minutos para ello. $$\int xtan(7x^2)dx$$		Por último, para el ejercicio 3, se eligió un ejercicio de mayor complejidad, donde si bien se puede realizar de manera directa al hacer uso de Phothomath, la aplicación realiza una sustitución trigonométrica. Por lo tanto este ejercicio se considera un buen ejemplo para explorar distintas rutas de solución que nos permite hacer comparaciones entre lo realizado a lápiz y papel y lo arrojado por la aplicación.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Observar patrones (OP)</td>
<td>En el ejercicio 1
$$\int 3xsenx^2dx$$
35. A2. ¿Yo? No, bueno (se acerca al pizarrón) lo primero que haríamos aquí, es saber cuál es la u de mi derivada, de mi integral perdón, lo cual yo supuse que va a ser equis al cuadrado, y entonces lo ponemos acá, aja así lo hago yo, seno de u por tres equis a la de equis, porque me paso los pasos y luego ya de aquí sacamos la de u seria multiplicando equis por, dos por uno dos, seria dos equis, seria integral seno de u y aquí comparamos tenemos tres equis y dos equis y como no son iguales entonces colocamos el tres y el dos debajo, y si checamos nuestro formulario hay una fórmula que dice que el seno de u por de u es igual al menos coseno, bueno antes se agrega la fracción tres medios menos coseno de u que es equis cuadrada.</td>
<td rowspan="2">Schoenfeld (1985), clasifica algunos factores en el proceso de solución de problemas: uno de ellos es el de recursos matemáticos que se refieren a los conceptos previos que posee el individuo para resolver problemas. Estos conceptos incluyen algoritmos, fórmulas y todas las funciones necesarias (Patiño, Prada y Hernández, 2021).

Según el esquema de Polya (1945), la segunda fase es la elaboración de un plan, que implica precisar el problema, analizar los medios y buscar una idea de solución, para explorar las posibles vías de solución, el docente puede sugerir: “recuerdas otro problema similar o parecido que hayas resuelto”, de modo que estimule al estudiante a descubrir relaciones que quizá no sean tan evidentes directamente. (Díaz y Díaz, 2018).

En la etapa de comprensión del problema se pueden detonar los procedimientos heurísticos a través de las siguientes preguntas: según la información de que se dispones, ¿De qué tipo de problema se trata?, ¿Qué se necesita encontrar para responder a la pregunta?, ¿recuerdo haber resuelto otro problema en las mismas condiciones? (Díaz y Díaz, 2018).

Devlin caracteriza a las matemáticas como la ciencia de los patrones, “es una forma de ver el mundo físico, biológico y sociológico que</td>
<td>Dentro de los patrones que se pueden observar en la solución de una integral podemos mencionar el momento en donde es necesario que los estudiantes identifiquen la presencia de una función y su derivada para poder hacer uso de una fórmula de integración directa.

Otro de los patrones observados es el momento en que se complementa la integral, al identificar que la constante de la derivada de la función es distintita a la que se debe tener, por tanto se realiza un balance en la ecuación, lo cual respecto al episodio identificado para el ejercicio 1, podemos observar que el estudiante hace claro uso de estos dos patrones de solución.</td>
</tr>
<tr>
<td>En el ejercicio 2
$$\int x^2senx^3cosx^3xdx$$
182. A7.- Nosotros escogimos a u como coseno de tres equis cúbica.

183. A7.- Bueno en esta parte podemos ver que de pende lo que escojamos como u, lo demás seria como de u, por lo cual reestructuramos la integral de tal manera que nos queda la función y su derivada.

185. A7.- Al darnos cuenta que para tener completa la derivada necesitamos tener un tres, lo agregamos y recordamos que también lo ponemos como un tercio del otro lado, y entonces tenemos un tercio por la integral del coseno de equis cúbica por el</td>
<td>De igual manera para el ejercicio 2 es necesario volver a identificar una función y su derivada, sin embargo debido a la estructura de este ejercicio resulta un poco más complejo identificar o determinar quién será la función y quien la derivada de la función, lo cual se puede constatar en los extractos de diálogo seleccionados para este ejercicio.</td>
</tr>
</table>

	seno de equis cúbica por tres equis cuadrada.	habitamos". Realiza una clasificación en cuatro tipos de patrones: numéricos, patrones de movimiento y cambio, geométricos y de razonamiento y comunicación. Dentro de estos últimos se incluyen procesos de argumentación y prueba, reglas de inferencia (Rangel, 2012).	
	En el ejercicio 3 $\int xtan(7x^2)dx$ 192. A7.- Entonces tengo coseno de equis a la tres por du, puesto que ya cuento con su derivada, entonces tengo un tercio de la integral del coseno de equis a ala tres por de u, lo cual quedaría como un tercio de la integral de u a la n. 227. E12.-Pues solamente seguimos la fórmula y para ello tenemos que designar que u es igual a siete equis cuadrada y por lo tanto de u es igual a catorce equis, como podemos observar solo tenemos la equis y nos falta el catorce. 230.E11.- Aja si, entonces ponemos el catorce para complementar el ejercicio, pero es necesario ponerlo también como fracción por fuera de la integral.	El profesor de matemáticas puede propiciar la participación de sus estudiantes en actividades que impliquen el reconocimiento de regularidades, es decir procesos reiterativos, para ello se debe solicitar que examinen atentamente una situación y reconozcan la información relevante. (Enrique, 2013).	Debido a que el ejercicio 3 tiene distintas rutas de solución, como ya lo hemos presentado anteriormente, podemos rescatar nuevamente el identificar parte de la integral como una función y la otra parte como la derivada de esta función, donde en el caso de este ejercicio también es necesario complementar la integral, para que la estructura de la derivada sea la correcta. Otro punto relevante para este ejercicio, es que al momento de hacer uso de la aplicación dentro de las fases de implementación de la tarea, la aplicación hace uso de una identidad trigonométrica para dar solución a este ejercicio, por lo tanto es importante que el estudiante logre identificar que aun al hacer este cambio es necesario determinar quién es la función y quien la derivada para poder hacer uso de una fórmula de integración directa.
Comunicar resultados (CR)	En el ejercicio 1 $\int 3xsenx^2dx$ 35. A2. ¿Yo? No, bueno (se acerca al pizarrón) lo primero que haríamos aquí, es saber cuál es	Lee (2010) señala que la capacidad de expresar sus ideas proporciona a los alumnos la posibilidad de solventar con eficacia problemas de matemáticas y,	Una de las fases en la tarea de aprendizaje está pensada de modo que los estudiantes tengan la oportunidad de

	la u de mi derivada, de mi integral perdón, lo cual yo supuse que va a ser equis al cuadrado, y entonces lo ponemos acá, aja así lo hago yo, seno de u por tres equis a la de equis, porque me paso los pasos y luego ya de aquí sacamos la de u seria multiplicando equis por, dos por uno dos, seria dos equis, seria integral seno de u y aquí comparamos tenemos tres equis y dos equis y como no son iguales entonces colocamos el tres y el dos debajo, y si checamos nuestro formulario hay una fórmula que dice que el seno de u por de u es igual al menos coseno, bueno antes se agrega la fracción tres medios menos coseno de u que es equis cuadrada.	por tanto, adquirir la destreza de afrontar nuevos retos. Ponte et al. (1997), afirman que los alumnos a través de la comunicación, toman conciencia de los procesos de construcción y validación de los conocimientos matemáticos, aprenden las razones que hacen que algo tenga o no sentido y determinan si una afirmación es verdadera o no en matemáticas. Lee (2010) sugiere que la razón principal por la que el incremento del discurso es importante es porque aumenta el potencial de los alumnos para aprender matemáticas y el de los profesores para ayudarles a aprender. El modo en que los escolares justifican sus afirmaciones constituye una rica fuente de información para el profesor acerca del conocimiento matemático de esos escolares y del modo en que lo movilizan y ponen en juego (Rico y Lupiáñez, 2008). “La capacidad de comunicar, explicar y argumentar matemáticamente significa que los estudiantes deben llegar a ser capaces de proporcionar suficientes razones para que sus compañeros y el profesor puedan llegar a intuir por qué han hecho lo que han hecho”. (Chamorro, 2013, p.18)	compartir sus ideas y el proceso de solución para cada ejercicio, con el objetivo de que sus compañeros y el docente conozcan cuales son los criterios o características que el estudiante tomó en cuenta para poder dar solución al ejercicio, como se puede ver en el fragmento compartido, donde el estudiante comparte a sus compañeros porque decidió hacer uso de la fórmula elegida.
	En el ejercicio 2 $\int x^2 senx^3 cosx^3 xdx$ 182. A7.- Nosotros escogimos a u como coseno de tres equis cúbica. 183. A7.- Bueno en esta parte podemos ver que de pende lo que escojamos como u, lo demás seria como de u, por lo cual reestructuramos la integral de tal manera que nos queda la función y su derivada. 185. A7.- Al darnos cuenta que para tener completa la derivada necesitamos tener un tres, lo agregamos y recordamos que también lo ponemos como un tercio del otro lado, y entonces tenemos un tercio por la integral del coseno de equis cúbica por el seno de equis cúbica por tres equis cuadrada.		Del mismo modo para el ejercicio 2 se sugirió a los estudiantes pasar al pizarrón para compartir su solución, ahora en equipos de tres estudiantes, donde además se pudo destacar la organización que tuvo el equipo de tal manera en que todos los estudiantes del equipo participaron e hicieron uso del lenguaje matemático para expresar su resultado.

	En el ejercicio 3 $\int xtan(7x^2)dx$ 192. A7.- Entonces tengo coseno de equis a la tres por du, puesto que ya cuento con su derivada, entonces tengo un tercio de la integral del coseno de equis a ala tres por de u, lo cual quedaría como un tercio de la integral de u a la n. 227. E12.-Pues solamente seguimos la fórmula y para ello tenemos que designar que u es igual a siete equis cuadrada y por lo tanto de u es igual a catorce equis, como podemos observar solo tenemos la equis y nos falta el catorce. 230. E11.- Aja si, entonces ponemos el catorce para complementar el ejercicio, pero es necesario ponerlo también como fracción por fuera de la integral.	Para que el incremento del discurso se haga efectivo es necesario que el profesor proporcione regularmente oportunidades para que los alumnos puedan hablar de los conceptos y procedimientos que han utilizado y proporcionar razones de por qué han hecho lo que han hecho (Chamorro, 2003).	El ejercicio 3 al ser el de mayor complejidad causó cierta confusión en los estudiantes, y entre la manera en que resolvieron a lápiz y papel y el resultado obtenido en la aplicación, por ello es que a los estudiantes se les dificultó expresar su resultado de manera correcta y tuvo que intervenir la instructora para aclarar que en este tipo de ejercicios existen por lo menos dos tipos de solución donde una de ellas involucra algunas identidades trigonométricas.

El empleo de la aproximación didáctica de resolución de problemas incluye algunos elementos que permite acercarse al cumplimiento de los objetivos planteados en la tarea de aprendizaje tales como i) Analizar casos particulares, ii) Observar patrones y iii) Comunicar resultados.

La tarea de aprendizaje fue diseñada con la intención de trabajar con casos específicos, con características particulares donde el grado de complejidad va aumentando gradualmente de modo que el ejercicio 1, se considera de baja complejidad donde el estudiante no tenga ni tanta facilidad ni tanta dificultad como lo señala Polya (1945). Para el ejercicio 2 la complejidad aumenta gradualmente pues en esta ocasión no es tan evidente quien será la función y cuál será su derivada, además de presentar una derivada que se resuelve con el método de la cadena, proceso que en algunas ocasiones causa confusión en los estudiantes. Por último, el tercer ejercicio tiene cierta modificación debido a que es un ejercicio que puede ser cambiado por una identidad trigonométrica, pues como lo menciona Schoenfeld (1994), es importante analizar casos con características similares, ligeramente modificados.

De este modo la tarea de aprendizaje está pensada en proponer a los estudiantes una serie de ejercicios que le permitan al estudiante desarrollar la capacidad de analizar e identificar los elementos de un ejercicio que le sirvan para poder seleccionar adecuadamente las fórmulas para la solución. La idea de abordar casos particulares es realizar un análisis a profundidad dentro de un tema específico tal como lo señala Wassermann (1994).

b) Tabla 9.- Subcategoría del marco del empleo de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas

SUBCATEGORÍA	EPISODIO	TEÓRICO	AUTOR
Guía el proceso de solución (GPS)	En el ejercicio 1 $$\int 3xsenx^2dx$$ D. ¿Qué nos dice el procedimiento? ¿Quién comparte el primer paso que sale ahí? A4. Utilice las propiedades de la integral D. ¿Cuál es la propiedad de la integral que manejan? A4. Equis dos D. Punto uno, utilice las propiedades de las integrales, permítanme anotar en el pizarrón, nos marca, nos dice, tres integrales de equis seno cuadrado de equis de equis D. ¿Cuál es el segundo paso? A4. Utiliza la propiedad distributiva A2. Transformando la función D. ¿Cómo se transforma? A4. Tres por integral del seno de equis cuadrada entre dos D. ¿Cuál es el tercer paso?, alguien más jóvenes, alguien de atrás, señorita ¿Cuál es el tercer paso? A7. Calcula e integra D. Calcula e integra, ¿Cómo la calcula y como la integra? ¿Qué método usa o que fórmula utiliza? A7. Integral, pero simplificamos 3 integral de t A8. Dice. Usa la sustitución de te que es igual a equis cuadrada para conformar la integral D. ¿Qué quiere decir esto? Esto nos indica entonces que solo realizamos un proceso de sustitución.	Actualmente existe una gran diversidad de aplicaciones y software educativo con una orientación didáctica hacia las matemáticas. La capacidad expresiva de esta tecnología permite al estudiante nuevos acercamientos a las ideas matemáticas (Moreno y Hegedus, 2009, p. 508); el tipo de recurso elegido para la exploración determina en gran medida la manera como un individuo asume la tarea matemática. Las actividades didácticas de esta propuesta incorporan tecnología digital a través de apps, donde algunas de ellas absorben la carga procedimental de cálculos engorrosos, con el fin de que los estudiantes se centren en ideas más complejas y fundamentales (Moreno-Armella, Hegedus y Kaput, 2008). Photomath, que es una aplicación que, mediante una fotografía del ejercicio matemático, presentan el método y el procedimiento para su desarrollo, de manera que el estudiante, puede comprender le paso a paso y no solo enfocarse en el resultado final, es preciso mencionar que esta es una APP disponible para Android y IOS, (Alonso et al. 2023). En la compresión del lenguaje matemático, no basta con saber el	Cuando los estudiantes se enfrentaron a la etapa en donde se hace uso de la aplicación, fue notorio que de manera general conocen la aplicación Phothomath, pues no les resulto difícil realizar el procedimiento de capturar la imagen con su celular para que la aplicación resolviera el ejercicio. De esta manera dentro de la actividad la herramienta brinda la oportunidad de guiar el proceso de solución, ya que si el estudiante tiene alguna duda en un momento, puede consultar los pasos arrojados por la aplicación.
	En el ejercicio 2 $$\int x^2senx^3cosx^3xdx$$		El uso de la aplicación permite a los estudiantes tener un orden respecto al proceso de solución, pues en algunas

	A7.- Entonces por fórmula tenemos un tercio de la integral de u al cuadrado entre 2, como u es coseno de equis cúbica entonces tenemos un tercio de equis cúbica al cuadrado sobre dos, podemos multiplicar el dos por el seis, y entonces me queda, un sexto del coseno de equis cúbica al cuadrado más ce.	algoritmo de memoria, se necesita que el estudiante contextualice la información y la aplique efectivamente en una situación problema, lo que evidentemente, no se puede lograr con tan solo la información, es necesario, que, mediante el uso adecuado de herramientas y apps digitales, el concepto matemático abstracto se formalice y materialice (Jimenéz Daza, 2019)	ocasiones al estudiante le resulta confuso el orden en que se presentan los ejercicios de integrales, como se puede observar en la estructura del ejercicio dos, donde de cierta manera no guarda un orden estricto que le permita al estudiante identificar quien es la función y quien es la derivada.
	En el ejercicio 3 $$\int xtan(7x^2)dx$$ A8.- Osea si es igual el resultado, pero cambia un poco el proceso, porque en la aplicación cambian la tan por seno sobre coseno, y después ya lo resuelven con otra fórmula.		Cabe resaltar que un ejercicio como el que se presentó en el ejercicio 3, permite aprovechar las herramientas que brinda la aplicación, donde es posible observar detalladamente el proceso de solución.
Muestra otras rutas de solución (ORS)	104.- D. ¿Por qué cambia esta expresión a te? ¿Por qué ahora tenemos la presencia de te? Ahí lo dice A8. Dice. Usa la sustitución de te que es igual a equis cuadrada para conformar la integral D. ¿Qué quiere decir esto? Esto nos indica entonces que solo realizamos un proceso de sustitución. D. En este proceso nosotros podemos sustituir la equis por la te, o por cualquier otra constante, es decir aquí podemos poner seno de u por de u qué es lo más común que podemos observar, si revisan su fórmula al final dice seno de u por de u, pero en esta ocasión se utiliza la te, una vez que estamos sustituyendo por te quiere decir que podemos aplicar la fórmula, ¿qué fórmula aplican para resolver esta función, o esta integral?	Martin (2000) señala que la tecnología debe ser utilizada en la educación matemática, y que ésta puede ser usada para enfatizar el uso del conocimiento matemático, yendo más allá de los procedimientos rutinarios que han estado tan prevalecientes en los cursos de matemáticas. Los cambios recientes en el currículo de matemáticas reconocen la importancia del uso de las calculadoras y computadoras en el aprendizaje de los estudiantes.	Dentro de esta subcategoría podemos enfatizar de manera general que la aplicación comúnmente utiliza lo que se conoce como cambio de variable al resolver la mayoría de los ejercicios propuestos, lo cual es un proceso diferente al que realizan los estudiantes generalmente. De igual manera destacaremos que específicamente en el ejercicio 3 es más notorio la utilización de un proceso distinto para resolver, pues la app Phothomath utiliza una identidad trigonométrica en lugar de resolverlo con una fórmula de integración directa como lo hicieron en su mayoría los estudiantes de manera tradicional.
	En el ejercicio 2 $$\int x^2senx^3cosx^3xdx$$ A7.- Nosotros escogimos a u como coseno de tres equis cúbica.		Dada la naturaleza del ejercicio 2, en donde se puede elegir una u otra función cono derivada de la otra, es notorio en el episodio seleccionado

Emplea otras heurísticas (EH)	A7.- Bueno en esta parte podemos ver que de pende lo que escojamos como u, lo demás seria como de u, por lo cual reestructuramos la integral de tal manera que nos queda la función y su derivada. A7.- Al darnos cuenta que para tener completa la derivada necesitamos tener un tres, lo agregamos y recordamos que también lo ponemos como un tercio del otro lado, y entonces tenemos un tercio por la integral del coseno de equis cúbica por el seno de equis cúbica por tres equis cuadrada.	De acuerdo con Lesh y Doerr (2003, citados por Henriquez, 2021), las heurísticas son aquellos procedimientos específicos y aproximaciones en la búsqueda de solución de un problema, que va más allá de su conocimiento matemático específico, y que le permiten a un individuo encontrar formas productivas de adaptar, modificar y refinar las ideas que tiene.	que el estudiante tiene que tomar la decisión sobre con cuál función trabajar para solucionar este ejercicio.
	En el ejercicio 3 $\int xtan(7x^2)dx$ E11.- Nosotros tomamos la fórmula que está en nuestro formulario, que dice integral de la tangente de u por du es igual a menos logaritmo del coseno bueno aquí se ven dos rayitas. D.- Se lee módulo o valor absoluto, el valor absoluto de cosenos de u. E11.- Bueno otra vez menos logaritmo natural del valor absoluto de coseno de u más ce.		En el ejercicio tres se puede observar que los estudiantes de manera directa eligen una fórmula específica para dar solución a este ejercicio, mientras que la app propone otra ruta para dar la solución.
Permite comparación con la solución a lápiz y papel (CLP)	59.- D. Vamos a comparar, ¿el resultado o el procedimiento de la aplicación, es igual al de tu resultado? D. ¿Es mismo resultado o no? AS. Si D. Ahora, los pasos el procedimiento ¿es el mismo?, creo que si les deja ver los pasos D. Revisen su procedimiento, revisen el procedimiento de la solución. D. ¿Qué nos dice el procedimiento? ¿Quién comparte el primer paso que sale ahí? A4. Utilice las propiedades de la integral	Al implementar Photomath como herramienta educativa se promueve la autoevaluación y retroalimentación por parte de los estudiantes, pueden analizar el procedimiento paso a paso, y comparar las respuestas de Photomath con las suyas. (Garzón, 2020)	La tarea de aprendizaje propuesta para el desarrollo del presente trabajo, fue pensada de tal manera que durante las fases de desarrollo de los tres ejercicios sugeridos, exista una fase donde el estudiante puede comparar los resultados obtenidos por sus propios medios con los resultados que arroja la app, lo cual nos permite poner en juego un escenario en donde el estudiante puede llevar a cabo un análisis de las diferencias o semejanzas en ambos procesos de solución, como es ilustrado en el episodio mencionado.

Usar el marco del empleo de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas, nos permite analizar las subcategorías mencionadas en la tabla anterior, donde una acción importante que se identifica al hacer uso de esta aplicación es la posibilidad de usar sus herramientas para poder observar el proceso de solución de manera detallada, donde es posible identificar cada uno de los pasos que realiza la aplicación para llegar al resultado propuesto, este elemento es lo que denominamos la subcategoría *Guía del Proceso de solución (GPS),* lo cual es aprovechado por el docente como medio a través del cual los estudiantes realizan un análisis minucioso y se plantean cuestionamientos sobre porque o como usar cada uno de los pasos sugeridos, misma situación que puede generar un debate de retroalimentación dentro del salón de clases, de esta manera también podemos mencionar que la aplicación utiliza distintos procesos de solución a los empleados por el estudiante (*Muestra otras rutas de solución, ORS),* cuando se realiza de manera tradicional permitiendo mostrar otras rutas de solución a los diferentes ejercicios, lo cual vierte en la oportunidad del estudiante de elegir de entre las distintas heurísticas proporcionadas *(Emplea otras heurísticas, EH),*al momento de dar solución a un ejercicio, así mismo permitiendo la comparación entre ambos resultados, misma acción que da la oportunidad de detectar posibles errores y retroalimentar los saberes adquiridos clasificada dentro de la subcategoría *Permite comparación con la solución a lápiz y papel (CLP).*

c) Tabla 10 Marco conceptual de las tareas de aprendizaje y demanda cognitiva.

SUBCATEGORÍA	EPISODIO	TEÓRICO	AUTOR
Guía del profesor (GP)	En el ejercicio 1 $\int 3xsenx^2dx$ 43.- D. Y sería correcto dejarlo así, tres medios menos coseno de equis cuadrada A2. No porque se le hace algo así como, tres medios multiplicada por uno sobre menos coseno de equis cuadrada. D. ¿Ahí estamos de acuerdo? AS. No D. ¿Por qué no? AS. Porque está multiplicando D. ¿Qué sería lo correcto entonces? El alumno que se encuentra al frente del pizarrón está un poco confundido y no sabe qué hacer D. Porque no solo pones el tres menos enfrente de los tres medios por toda la expresión AS. El menos va enfrente D. Entonces nuestro resultado, menos tres medios del coseno de equis cuadrada, que le falta, algo llevan las integrales al final D. La constante, la ce.	Dentro de la labor docente se considera importante guiar al estudiante hacia la aprehensión del conocimiento y conocer el saber a enseñar antes de ser presentado al alumno. Además, debe promover que en su lección los estudiantes conformen algo semejante a una sociedad científica, en donde descubran el conocimiento mediante las situaciones-problemas planteadas con este fin (Espinoza et al., 2008). La ayuda que el profesor brinda al estudiante variará cuantitativa y cualitativamente a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir, como plantea Pérez Cabaní (1995). "la ayuda requerida en cada	De manera general podemos observar a lo largo del desarrollo de las fases de la tarea de aprendizaje, la constante participación del docente como guía en cada ejercicio propuesto, de manera tal que los estudiantes sintieran la confianza de un entorno en donde es válido expresar sus inquietudes y dudas, así como manifestar sus ideas al momento de solucionar un ejercicio. Del mismo modo el docente debe de contar con la capacidad de identificar las oportunidades que se presentan para su intervención al momento de corregir o realizar alguna pregunta que favorezca el correcto desarrollo de cada ejercicio. De esta manera podemos denotar una de las clasificaciones que realiza Cabaniní (1995), donde sugiere que el docente proporcione

	108.-D. En este proceso nosotros podemos sustituir la equis por la te, o por cualquier otra constante, es decir aquí podemos poner seno de u por de u qué es lo más común que podemos observar, si revisan su fórmula al final dice seno de u por de u, pero en esta ocasión se utiliza la te, una vez que estamos sustituyendo por te quiere decir que podemos aplicar la fórmula, ¿qué fórmula aplican para resolver esta función, o esta integral?	momento del proceso será variable en forma y cantidad. A veces, el ajuste de la ayuda pedagógica se conseguirá proporcionando al alumno una información organizada y estructurada; en otras ocasiones, ofreciendo modelos de acción a imitar, en otras, formulando indicaciones y sugerencias más o menos detalladas para abordar los trabajos, o en otros casos, permitiéndole que escoja y desarrolle de forma totalmente autónoma la actividad de aprendizaje".(p.2)	al estudiante información organizada y estructurada cuando se requiere.
	En el ejercicio 2 $\int x^2 senx^3 cosx^3 xdx$ D.- ¿Alguien ya tiene la solución?, observo, la mayoría está tratando a u como que A8.- Equis cúbica, ah no equis cuadrada. D.- La mayoría está haciendo algo similar a lo anterior, y quieren resolverla como el ejercicio, anterior ¿cierto? A7.- Si D.- Eso realmente no se puede, observen, aquí lo que podemos hacer es tomar el seno o el coseno la que sea, para considerar que cualquiera de estas es u, si yo digo, que seno de equis cúbica es u, ¿cuál sería de u? A6.- De u es coseno de equis cúbica, ahhh ya. ¿Les ayuda esto?, ¿pueden continuar? D. ¿Sucede lo mismo si lo consideramos diferente? Si u es coseno de equis cúbica, ¿Quién es de u?	Salinas (1998) citado en del Moral Pérez y Martínez (2010) establece tres nuevos roles que el profesor ha de asumir con la integración de las nuevas tecnologías en los procesos de enseñanza-aprendizaje que deben contribuir a: guiar a los estudiantes en el uso de los medios, potenciar en ellos una actitud más activa y comprometida con su propio aprendizaje y gestionar los nuevos recursos tecnológicos y entornos de aprendizaje para facilitar su adecuada incorporación en la acción formativa	De manera concreta en el episodio seleccionado para esta clasificación podemos observar que en el ejercicio 2, ninguno de los estudiantes logro de manera inicial comenzar a realizar el proceso de solución, por lo cual como lo menciona Cabaniní (1995), la docente intervino ofreciendo indicaciones o sugerencias más o menos de talladas que orientaron a los estudiantes a iniciar con el desarrollo el ejercicio. Es importante denotar que en esta actividad se cumple principalmente con 2 de los 3 roles que se mencionan en la clasificación dada por Salinas (1988), donde es el profesor adquiere el papel de guía y el promueve que los estudiantes tengan una actitud más activa y comprometida con su propio aprendizaje.

Proceso inquisitivo del profesor (PI)	D. ¿Porque este tres esta de este lado? (señala el número que se encuentra antes del símbolo de integral) ¿Si saben por qué? A4. Porque es una constante D. Porque es una constante, ¿Qué propiedad me ayuda a definir que esto es una constante? O ¿Qué propiedad te permite que este constante pase del otro lado de la integración? A4. Porque no tiene potencia D. Porque no tiene potencia, pero hay una propiedad y ahí en la aplicación la dice, nos dice que la integral de una constante por una función, es igual a la constante por la integral de la función, si, lo que quiere decir es que la constante puede salir de la integral. D. ¿Cuál es el segundo paso? A4. Utiliza la propiedad distributiva D. ¿Qué es lo que te indica? A2. Transformando la función D. ¿Cómo se transforma?	Se considera que una de las acciones más importantes del profesor durante la implementación de una tarea de aprendizaje, es precisamente el proceso inquisitivo que desarrolla con sus estudiantes (Campos y Torres, 2022). Según estos autores este proceso consiste en que el docente elabore una serie de preguntas que vayan guiando la actividad, además decidir el momento en que las debe presentar, lo anterior con la finalidad de conducir a los estudiantes al camino de solución del problema. Este proceso también tiene la finalidad de mantener el interés del estudiante a lo largo de la sesión.	Una de las intenciones más claras dentro del desarrollo de esta tarea de aprendizaje, es aquella que permite que el docente identifique los momentos indicados de intervención para lograr hacer preguntas o cuestionamientos cruciales a los estudiantes que les permitan llevar a cabo un proceso de reflexión y retroalimentación respecto a los saberes adquiridos anteriormente. Para puntualizar esta situación podemos denotar el episodio seleccionado para esta categoría donde la docente decidió hacer estas preguntas con la finalidad de que los estudiantes tuvieran claro el proceso de solución analizado por la aplicación y no solamente se dedicarán a copiar el resultado como en otras ocasiones lo hicieron.
Incluye la herramienta digital (IHD)	D. Iguales ok, hacemos entonces a la misma integral, pero con aplicación D. Vamos a comparar, ¿el resultado o el procedimiento de la aplicación, es igual al de tu resultado? D. ¿Es mismo resultado o no? AS. Si D. Ahora, los pasos el procedimiento ¿es el mismo?, creo que si les deja ver los pasos D. Revisen su procedimiento, revisen el procedimiento de la solución.	Se puede considerar que el uso de los avances tecnológicos, favorece el desarrollo de capacidades intelectuales y la adquisición de destrezas por parte del alumno, mediante una nueva forma de organizar, distribuir, representar y codificar la realidad". (Ferrer, 2017) La didáctica de las matemáticas utilizando el ordenador o cualquier otro dispositivo tecnológico enriquece el aprendizaje. Se trata de una modalidad educativa en la que las nuevas tecnologías son el medio utilizado para enseñar y no el fin. En este sentido, se debe hacer un uso adecuado de las herramientas digitales, diseñando estrategias específicas de aprendizaje. El uso de estos instrumentos debe estar justificado para	La inclusión de una herramienta digital, es el eje de partida dela tarea de aprendizaje con la finalidad de aprovechar estos recursos de la manera más eficiente posible, logrando un uso regulado de las herramientas digitales promoviendo el análisis y aprendizaje de cada uno de los procesos de solución que ofrecen para cada ejercicio. De esta manera se busca evitar que el proceso de enseñanza aprendizaje se convierta en algo más complejo, toda vez que los estudiantes cuentan con acceso directo a este tipo de aplicaciones. Por tal motivo se buscó integrar una herramienta digital que es de uso común en los estudiantes, dándole de cierta manera un uso eficaz a estas aplicaciones y evitando la el libre albedrio en su uso para no distorsionar el objetivo de esta actividad, como podría ser el caso de que el estudiante simplemente copie el resultado sin llevar a cabo

		obtener así unos resultados positivos. De lo contrario, puede complicarse aún más el proceso de aprendizaje. (Quesada, 2007) Emplear tecnologías, concatenándolas con experiencias significativas, se convierten en herramientas cognitivas que el estudiante emplea para provocar y desarrollar habilidades del pensamiento (Jonassen, Carr, y Ping, 2005).	un proceso de reflexión en cada uno de los procedimientos, tal como lo menciona Quesada (2007). El uso de la herramienta digital no es útil en sí mismo, sino que su utilidad se deriva de que se encuentra al servicio de la tarea de aprendizaje propuesta y no al contrario, coincidiendo con las ideas de Jonassen et al. (2005).
Propicia la comparación y el análisis (PCA)	59.- D. Vamos a comparar, ¿el resultado o el procedimiento de la aplicación, es igual al de tu resultado? D. ¿Es mismo resultado o no? AS. Si D. Ahora, los pasos el procedimiento ¿es el mismo?, creo que si les deja ver los pasos D. Revisen su procedimiento, revisen el procedimiento de la solución. D. ¿Qué nos dice el procedimiento? ¿Quién comparte el primer paso que sale ahí? A4. Utilice las propiedades de la integral	En el uso adecuado de estas herramientas el alumno y la alumna son asesorados por el profesor, pueden realizar actividades que les permitan conjeturar, explorar, experimentar y extraer conclusiones. Dichos procesos, les fomentan en el discente la toma de conciencia de la factibilidad de sus ideas, haciendo su aprendizaje más comprensivo que memorístico (Garza y Leventhal, 2004). Dentro de las características centrales del rol del profesor se pueden enumerar las siguientes: la selección y/o adecuación de tareas, proporcionar al estudiante la información esencial que le permita resolverla, y crear un ambiente propicio dentro del aula que promueva el desarrollo del proceso de solución. (Campos y Torres, 2022).	Uno de los momentos fundamentales de la tarea de aprendizaje propuesta es la parte donde el estudiante realiza una comparación entre el resultado obtenido en el primer momento al resolver el ejercicio de manera tradicional en comparación con el resultado que propone la app, pues este proceso permitirá que el estudiante reconozca que existen distintas rutas de solución si es el caso, o en su defecto identifique algún error, o simplemente refuerce y tenga la certeza de que su resultado es el correcto, lo cual favorece la seguridad de los estudiantes al momento de realizar ejercicios matemáticos.
Permite conectar conocimientos previos (PCP)	D.- Seno de equis cúbica por quién? Recuerden si es que así se los enseñaron, esto se aplica como la regla de la cadena, entonces seno de equis cúbica por la derivada de esto, ¿Quién es la derivada de esto? (se señala la equis cúbica) A6.- Tres equis cuadrada	En el caso de las matemáticas es fundamental construir desde el pensamiento matemático, para Arévalo y Gamboa (2015) el área debe partir del carácter histórico y cultural, el cual le permite la conexión	Durante la implementación de la actividad es claro que los estudiantes tuvieron la necesidad de hacer uso de los conocimientos previos con los que cuentan, que van desde las más sencillas operaciones hasta algo un poco

	D.- Tres equis cuadrada, y si observo si yo tomo esto, una parte sería mi u y la otra mi de u, entonces observamos nuevamente el ejercicio y una parte seria u y la otra, el resto de la expresión. Sería de u, y con eso puedo derivar perdón integrar con una fórmula, cual es la fórmula, pues u a la n. Por favor traten de terminarla. Durante siete minutos los estudiantes discuten con la información que ahora conocen respecto al ejercicios identificando y haciendo uso de las fórmulas encontradas en su formulario.	con otros saberes a través de la creatividad, la lógica, el razonamiento y la capacidad de desarrollar avances tecnológicos para la sociedad actual. En la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, se presupone la disposición del alumno a relacionar el nuevo material con su estructura cognoscitiva en forma no arbitraria (es decir, que las ideas se relacionan con algún aspecto existente en la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición) y si además, la tarea de aprendizaje en sí es potencialmente significativa tendríamos que cualquiera de los dos tipos de aprendizaje mencionados, pueden llegar a ser significativos.	más complejo, como es el caso de la forma de derivar una función para el momento en que se requirió identificar la derivada de una función, así como las relaciones trigonométricas que existen, tópicos que son abordados en semestres anteriores a este.
Permite justificar pasos empleando propiedades y métodos de integración (JPCP)	En el ejercicio 1 $\int 3xsenx^2dx$ A7.- Bueno en esta parte podemos ver que de pende lo que escojamos como u, lo demás seria como de u, por lo cual reestructuramos la integral de tal manera que nos queda la función y su derivada. A7.- Al darnos cuenta que para tener completa la derivada necesitamos tener un tres, lo agregamos y recordamos que también lo ponemos como un tercio del otro lado, y entonces tenemos un tercio por la integral del coseno de equis cúbica por el seno de equis cúbica por tres equis cuadrada.	El modelo de demanda cognitiva de Stein y Smith (1998), considera que una actividad o tarea de aprendizaje con alta demanda cognitiva debe considerar los siguientes elementos: favorecer conexiones entre distintos conceptos e ideas, propiciar que los estudiantes se realizan preguntas, formulen conjeturas y elaboren explicaciones o	En los episodios mostrados en esta sección para el ejercicio 1 y para el ejercicio 2, es claro que el estudiante trata de justificar del porque se le añada una fracción a las integrales antes de dar una solución, lo que comúnmente conocemos como el proceso de complementar la integral para posteriormente poder aplicar una fórmula directa o llevar a cabo el proceso de solución requerido.

	En el ejercicio 2 $\int x^2 senx^3 cosx^3 xdx$ 227.- E12.-Pues solamente seguimos la fórmula y para ello tenemos que designar que u es igual a siete equis cuadrada y por lo tanto de u es igual a catorce equis, como podemos observar solo tenemos la equis y nos falta el catorce. E11.- Aja si, entonces ponemos el catorce para complementar el ejercicio, pero es necesario ponerlo también como fracción por fuera de la integral	justificaciones. (Campos y Torres, 2022). La exploración y la búsqueda de conjeturas y pruebas son esenciales para que los estudiantes logren darle sentido a la demostración matemática y puedan potenciar su competencia demostrativa y argumentativa, entendiéndose esta como la capacidad que desarrollan los estudiantes para aplicar diferentes tipos de razonamiento y plantearse argumentos y justificaciones (Parra, et al. 2010).	Este proceso es importante para que la tarea de aprendizaje se considere una tarea con alta demanda cognitiva según lo menciona Campos y Torres (2022). Del mismo modo de siguiendo las ideas de Parra et al. (2010), de esta manera se permitirá que el estudiante transite entre el razonamiento y la argumentación al realizar este proceso de justificación.

La propuesta de esta tarea de aprendizaje se diseñó desde un inicio pensando en que el docente pudiera cumplir el papel de guía en cada uno de los ejercicios propuestos lo cual se está clasificando en una subcategoría que se denominó *Guía del profesor (GP),* de igual manera esta actividad permite que el profesor encuentre oportunidades precisas para realizar preguntas claves que guíen al estudiante a un proceso de análisis y reflexión, provocando diálogos con los estudiantes a través de lo que denominamos *Proceso inquisitivo del profesor (PI).*

Otra de las subcategorías a la que hacemos referencia es a la denominada *Incluye la herramienta digital (IHD),* la cual se incorporó en esta tarea con los propósitos de incluir los procesos de reflexión, de análisis y comparación, ya que como lo mencionan Jonassen et al. (2005) el uso de una herramienta digital se debe incorporar con el propósito de llevar a cabo una experiencia significativa, definida con anterioridad en el objetivo de la tarea de aprendizaje.

En cuanto a la subcategoría denominada *Permite la comparación y análisis (PCA),* se puede afirmar que en la mayoría de los ejercicios se cumplió con este propósito, ya que el estudiante tuvo la oportunidad de comparar sus resultados obtenidos de manera tradicional con los resultados arrojados por la aplicación, y en especial en el ejercicio 3 darse cuenta que se pueden realizar rutas de solución distintas, a su vez también se permite que el estudiante justifique sus procedimientos desde lo más simple como es completar la integral, o la presencia de la constante c, hasta algo un poco más complejo como lo es el cambio de variable o incluso el empleo de una identidad trigonométrica, enmarcando todo esto en la subcategoría que denominamos *Permite justificar pasos empleando propiedades y métodos de integración(JPCP).*

CAPITULO 5.- CONCLUSIONES

El aprendizaje de las matemáticas no sólo requiere conceptos fundamentales y algunos procedimientos necesarios, sino que es indispensable tener presentes las dificultades que se pueden generar en los estudiantes, el papel del docente dentro del aula y su relación con los estudiantes. En cuanto a la enseñanza, se concentra en el rol del docente y las prácticas que éste desarrolla en el aula siempre con miras a obtener resultados exitosos, y en este sentido la didáctica de las matemáticas estudia sus procesos de enseñanza con el objetivo de comprender sus problemas y solucionarlos, generando diferentes teorías y prácticas a fin de fortalecer los procesos de aprendizaje en los estudiantes (Serrano, 1993).

En este sentido el presente trabajo tuvo como propósito general dar respuesta a la pregunta planteada en un inicio **¿Cómo emplear la app Phothomath como un elemento central en el diseño de una tarea de aprendizaje, para mejorar el proceso de entendimiento en el tema de integrales trigonométricas?** De la cual se desprendió el objetivo general de la investigación que se refiere a la caracterización de los procesos de entendimiento de los estudiantes en la solución de integrales de funciones trigonométricas mediante el uso de una aplicación matemática integrada en una tarea de aprendizaje.

De igual manera a partir de esta pregunta de investigación lograron desprenderse tres objetivos específicos que radican esencialmente, el primero en definir las características de la aplicación que pueden emplearse en el diseño de una tarea de aprendizaje en el tema de integrales de funciones trigonométricas, el segundo en implementar la tarea diseñada con un grupo de estudiantes del curso de cálculo integral de quinto semestre de bachillerato y el tercero en identificar los procesos de entendimiento, y las posibles dificultades de los estudiantes durante la implementación de la actividad.

5.1 Sobre el diseño de la tarea de aprendizaje

En la tabla siguiente (Ver tabla 9) se presentan los elementos de la app que consideramos al inicio de esta investigación como importantes para el diseño de la tarea de aprendizaje: los métodos alternos de solución que emplea la app y las herramientas propias de la aplicación. El primer elemento se refiere a la técnica del cambio de variable que comúnmente usa la aplicación para dar solución a integrales trigonométricas, por lo que la instructora consideró importante aprovechar estas rutas alternas para poder realizar un análisis mayor del proceso de solución y además hacer una comparación con los procesos realizados por el estudiante a lápiz y papel. El segundo elemento tiene relación con una herramienta de la app que consiste en permitir al aprendiz observar un proceso más detallado de solución, paso a paso, lo que incluye notas al pie del procedimiento.

Tabla 11.- Elementos considerados para el diseño de la tarea de aprendizaje.

Elemento	Descripción	Referente teórico
Método alterno de solución empleado por la app	La aplicación comúnmente hace uso de lo que conocemos como el cambio de variable para dar solución a los ejercicios propuestos.	Uso de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas
Herramientas de la aplicación	Ver pasos detallados. - Permite observar el proceso detallado de la solución	Uso de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas

En la figura 2 del capítulo Metodológico, se muestran los aspectos generales del diseño de las actividades a realizar, donde se puede constatar que desde un inicio se pensó en diseñar una tarea de aprendizaje que permitiera aprovechar las herramientas con las que cuenta la app, ya que por ejemplo el cambio de variable que utiliza la aplicación podía ser aprovechado por la docente para discutir con los estudiantes rutas alternas de solución, del mismo modo la herramienta que permite al estudiante observar los detalles del proceso de solución posibilita que visualicen otros elementos que resulten un poco más complejos para ellos, como fórmulas, identidades trigonométricas y notas breves.

También para el diseño de la tarea se consideraron diferentes elementos teóricos que provienen de la parte de diferentes teorías y aproximaciones didácticas que emergieron al hacer una revisión documental para fortalecer el marco referencial de esta investigación: i) Uso de herramientas digitales, ii) Aproximación didáctica de resolución de problemas, iii) Tareas de aprendizaje y demanda cognitiva y iv) Uso de representaciones semióticas.

De estos referentes, así como de la naturaleza del tópico a desarrollar en la tarea de aprendizaje se identificaron aquellos elementos que a nuestro juicio de podían constituir como elementos centrales de la estructura de la tarea. Estos elementos son los que se enumeran a continuación en la tabla 12.

Tabla 12.- Elementos teóricos considerados en el diseño de la tarea de aprendizaje

Elemento	Descripción	Referente teórico
Uso de otros registros de representación	Al hacer uso de la app para dar solución a un ejercicio podemos observar que en ella encontramos detalles de los pasos empleados, la constante de integración, e incluso puedes observar gráficamente el comportamiento de las funciones si así se desea.	Uso de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas Teoría de representaciones semióticas de Duval.
Discusión en pequeños grupos y en colectivo	Dentro de la implementación de la tarea de aprendizaje se favorece la discusión entre pequeños equipos y de manera grupal con la finalidad de permitir la discusión y expresión de ideas entre los estudiantes.	Uso de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas Tareas de aprendizaje matemático y demanda cognitiva
Distintas rutas de solución	Al hacer uso de una herramienta digital para la solución de ejercicios de integrales podemos observar distintas rutas de solución para un ejercicio de integral trigonométrica, ya que comúnmente la app utiliza el cambio de variable para dar solución a este tipo de ejercicios.	Aproximación didáctica de resolución de problemas. Uso de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas Tareas de aprendizaje matemático y demanda cognitiva
Comunicar resultados	Al generar un debate grupal, comúnmente se elige a algunos estudiantes para exponer su proceso de solución, así como sus resultados, esto da paso a que los estudiantes fortalezcan su capacidad de expresarse matemáticamente y comunicar sus resultados.	Aproximación didáctica de resolución de problemas Uso de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas Tareas de aprendizaje matemático y demanda cognitiva
Argumentación y justificación	El proceso de argumentación y justificación puede darse en los pequeños equipos o de manera grupal, ya que cuando el estudiante requiera comunicar sus resultados, al mismo tiempo será necesario la justificación y argumentación de cada proceso que realizo para llegar al resultado final.	Aproximación didáctica de resolución de problemas Uso de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas Tareas de aprendizaje matemático y demanda cognitiva

Comparación y análisis de casos particulares	Durante el desarrollo de las actividades los estudiantes tienen la oportunidad de trabajar con ejercicios específicos, que fueron seleccionados con un grado de dificultad progresivo que les permita tener casos particulares, mismos que podrán analizar y realizar comparaciones entre sus resultados y los arrojados por la app.	Aproximación didáctica de resolución de problemas Uso de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas Tareas de aprendizaje matemático y demanda cognitiva
Proceso inquisitivo del profesor	Es importante que el docente cuente con la capacidad de identificar y aprovechar los momentos justos de su intervención, haciendo preguntas que propicien la reflexión en los estudiantes.	Aproximación didáctica de resolución de problemas Uso de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas Tareas de aprendizaje matemático y demanda cognitiva

Para el diseño de la tarea de aprendizaje pensó en tres ejercicios que se consideran casos particulares, ya que cuentan con características especiales que distinguen a cada uno, además de aumentar de manera gradual el grado de complejidad de cada ejercicio, misma situación que es ampliamente recomendada por la aproximación didáctica de resolución de problemas (Schoenfeld 1985), al momento de abordar una tarea matemática. Recordemos que este autor propone examinar siempre problemas equivalentes y abordar posteriormente otros ligeramente modificados.

Otro de los elementos teóricos que se pensó debería de estar presente en la realización de las actividades de la tarea de aprendizaje, es el proceso inquisitivo del profesor, pues es importante que el docente identifique los momentos oportunos para intervenir a través de preguntas o de palabras guía con la finalidad de llevar al estudiante hacia un proceso de reflexión, pues como lo mencionan Campos y Torres (2022), se considera que una de las acciones más importantes del profesor durante la implementación de una tarea de aprendizaje, logrando mantener el interés del estudiante a lo largo de la sesión.

Para el primer ejercicio donde se eligió una integral trigonométrica que puede resolverse de manera directa, se consideró que los estudiantes resolvieran el ejercicio de manera individual a lápiz y papel dando un tiempo oportuno para realizar este proceso, posterior a ello el docente daría oportunidad a que un estudiante comparta con sus compañeros los resultados obtenidos, para atender el elemento incluido en la tabla 10 denominado comunicación de resultados y que es un elemento considerado tanto en la aproximación didáctica de resolución de problemas como en el uso de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas y las tareas de aprendizaje matemático y demanda cognitiva. Como un segundo momento se pidió a los estudiantes hacer uso de la App para resolver el ejercicio anteriormente propuesto con la finalidad de que el estudiante realizara una comparación entre el resultado obtenido de manera tradicional y el propuesto por la app, que se enmarca dentro del elemento comparación y análisis (Ver tabla 10)., y con ello el docente genera una discusión grupal que permitiese hacer un análisis de estos resultados, así como la justificación de cada uno de los procesos utilizados por la app y por el estudiante al resolver esta integral trigonométrica, ya que como menciona Parra et al. (2010) esto permitirá a los estudiantes potenciar su competencia demostrativa y argumentativa cuando aplican diferentes tipos de razonamiento y se plantean argumentos y justificaciones. Hacia la última etapa de esta actividad se propone retomar el concepto y significado de la constante de integración, así como la vista gráfica de la familia de funciones de la solución de esta integral, lo cual nos permite adentrarnos en el elemento de la tabla 10 denominado diferentes registros de representación, enmarcado dentro de la teoría de representaciones semióticas y el uso de herramientas digitales (Ver tabla 10).

Para el ejercicio 2 se consideró una integral un poco más compleja, pues en esta ocasión es importante que el estudiante determine cuál de las dos funciones que se encuentran en la integral será derivada de la otra para poder dar solución a este ejercicio, haciendo así el uso de diferentes heurísticas, pues como lo mencionan Lesh y Doerr (2003, citados por Henriquez, 2021), esto permite al estudiante encontrar formas productivas de aceptar, modificar y refinar sus ideas. De igual forma se inicia con un primer momento donde los estudiantes realizaran a lápiz y papel este ejercicio, con la finalidad de que puedan retomar sus conocimientos previos que de acuerdo a Arévalo y Gamboa (2015) es importante construir desde el pensamiento matemático, ya que permite la conexión con otros saberes a través de la creatividad, la lógica, el razonamiento y la capacidad de desarrollar avances tecnológicos para la sociedad actual. De igual forma se pide a un estudiante que comparta su resultado con el grupo (Comunicación de resultados, tabla 10), como un segundo momento se hace uso de la app para dar solución a este ejercicio, pero en esta ocasión se trabajara en binas para propiciar la discusión y al mismo tiempo la comparación y el análisis de estos resultados, y a su vez generar un intercambio de ideas y debate de cada situación, este trabajo en equipo requiere la movilización de recursos propios y externos, de ciertos conocimientos, habilidades y aptitudes que posibilitan a un individuo alcanzar junto a otros una meta especifica (Torrelles et al., 2011). En la etapa final de este ejercicio se realiza la visualización gráfica del resultado de la integral lo cual permite observar un distinto registro de representación y a su vez hacer uso de otra herramienta digital, que se base en los marcos referencial del uso de herramientas digitales y la teoría de las representaciones semióticas de Duval.

Un tercer ejercicio fue seleccionado debido a que, al usar la aplicación para resolver este ejercicio, esta herramienta hace uso de una identidad trigonométrica al resolverlo, lo cual se aprovechará para hacer referencia a los estudiantes sobre las distintas rutas de solución para un ejercicio. (Diferentes rutas de solución, tabla 10). Siguiendo con la estructura de los ejercicios anteriores, los estudiantes comienzan con resolver el ejercicio de manera tradicional, trabajándolo en pares, para propiciar la discusión con su compañero, a su vez una pareja comparte su solución frente al grupo y posteriormente hacen uso de la app para observar, analizar y a su vez comparar el resultado obtenido a lápiz y papel y el resultado propuesto por la app, luego de esta situación se procede a justificar cada una de las acciones realizadas por los estudiantes y por la aplicación.

Como una primera conclusión referente al primer objetivo de esta investigación podemos identificar que fue posible incorporar algunos de los elementos provenientes de los referentes teóricos considerados, en la estructura de las tres actividades que conforman la tarea de aprendizaje. Sin embargo, la presencia de estos elementos no garantiza en forma automática la obtención de los resultados esperados, como lo es mejorar el entendimiento de la solución de integrales trigonométricas, por ello es necesario analizar los resultados que se obtienen en el proceso de implementación de la actividad.

5.2 Sobre la etapa de implementación de la tarea

Para dar respuesta al segundo objetivo que se planteó en esta investigación que fue implementar la tarea diseñada con un grupo de estudiantes del curso de cálculo integral de quinto semestre de bachillerato, se realizó una categorización de los elementos considerados en los referentes teóricos (Ver tablas 8, 9 y 10 en el capítulo 4).

Para la primera categoría que es, aproximación didáctica de resolución de problemas, tomamos en cuenta la división de 3 subcategorías; analizar casos particulares (ACP), observar patrones (OP) y comunicar resultados (CR).

Se considera que la primera subcategoría fue alcanzada desde el momento en que la tarea de aprendizaje se estructuró a través del análisis de tres casos particulares, se considera que son casos particulares, en virtud de que en cada uno se realiza un análisis minucioso (Wassermann, 1994), y porque en cada uno de ellos se complementa con preguntas críticas, trabajo en pequeños grupos, actividades de seguimiento y conclusiones.

En el caso de la subcategoría de observar patrones consideramos que no se logró en su totalidad, ya que solo muy pocos estudiantes lograron identificar algunos patrones como lo son la estructura del propio ejercicio donde es necesario identificar una función y su derivada, a su vez otro patrón importante es aquel en donde es necesario complementar las partes de la integral balanceando la ecuación. Una probable hipótesis es que la mayoría de los estudiantes no están familiarizados con actividades que incluyan la acción de observar e identificar patrones.

A su vez estos estudiantes que hicieron dicha identificación de patrones fueron aquellos a los que se les solicito que participaran y de este modo cumplir con el elemento de comunicación de resultados. Esta comunicación de resultados permitió a la instructora tener la oportunidad de retroalimentar al resto de los estudiantes y generar un momento de análisis y reflexión con el grupo. De este modo como opina Martínez (2020), al no existir un procedimiento para calcular integrales, (no ubican el patrón en la estructura de la integral) las tareas docentes adquieren la connotación de problema; lo que justifica la utilización de métodos que propicien la reflexión, la actividad productiva y el desarrollo del pensamiento creador de los estudiantes.

Para la segunda categoría referente al marco del empleo de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas, la cual de igual forma se dividió en 4 subcategorías; guía el proceso de solución (GPS), muestra otras rutas de solución (ORS), emplea otras heurísticas (OH) y permite comparación con la solución a lápiz y papel (CLP).

Referente a esta etapa que engloba el uso de las herramientas digitales podemos destacar que el uso de este tipo de herramientas como ya se ha mencionada antes no es nuevo para los estudiantes pues la mayoría de ellos ya están familiarizados con su uso, sin embargo durante las tareas de aprendizajes propuestas en este trabajo se propone que los estudiantes aprovechen las bondades que brinda la aplicación y que de manera general aprendan a leer correctamente los resultados propuestos por la app y reconozcan distintas rutas, procedimientos y expresiones que se engloban dentro de ella, Martin (2000) señala que la tecnología debe ser utilizada en la educación matemática, y que ésta puede ser usada para enfatizar el uso del conocimiento matemático logrando así aproximarnos a cumplir con el propósito de las subcategorías guía el proceso de solución (GPS) y muestra otras rutas de solución (ORS). Para la subcategoría emplea otras heurísticas (OH) creemos que se cumple con el objetivo ya que por el propio diseño de la aplicación hace uso común de la técnica de cambio de variable para dar solución a los ejercicios propuestos, lo cual da oportunidad a los estudiantes de familiarizarse con este método pues de acuerdo con Lesh y Doerr (2003, citados por Henriquez, 2021), las heurísticas son aquellos procedimientos específicos y aproximaciones en la búsqueda de solución de un problema, que va más allá de su conocimiento matemático específico, y que le permiten a un individuo encontrar formas productivas de adaptar, modificar y refinar las ideas que tiene, a su vez realizar una comparación entre el método y resultado propuesto por los estudiantes y el método y resultado propuesto por la aplicación, lo que permite cumplir con la subcategoría permite la comparación con la solución a lápiz y papel (CLP), pues como lo menciona Garzón (2020) Al implementar Photomath como herramienta educativa se promueve la autoevaluación y retroalimentación por parte de los estudiantes, pueden analizar el procedimiento paso a paso, y comparar las respuestas de Photomath con las suyas.

La tercer categoría respecto al marco conceptual de las tareas de aprendizaje y demanda cognitiva, fue dividida en subcategorías Guía del profesor (GP), Proceso inquisitivo del profesor (PI), Incluye la herramienta digital (IHD), Propicia la comparación y el análisis (PCA), Permite conectar conocimientos previos (PCP) y Permite justificar pasos empleando propiedades y métodos de integración (JPCP).

Dar cumplimiento a la primer subcategoría Guía del profesor (GP) resultó importante al momento de llevar a cabo la fase de aplicación de la tarea de aprendizaje pues es sin duda esta guía uno de los ejes de la actividad, por lo cual consideramos que durante el transcurso de esta fase se logra cumplir con este objetivo, pues es una constante la participación de la instructora durante el desarrollo de las actividades promoviendo como lo menciona Espinoza et al. (2008) se considera importante guiar al estudiante hacia la aprehensión del conocimiento y conocer el saber a enseñar antes de ser presentado al alumno. De esta manera podemos observar a lo largo del desarrollo de las fases de la tarea de aprendizaje, la constante participación del docente como guía en cada ejercicio propuesto, de manera tal que los estudiantes sintieran la confianza de un entorno en donde es válido expresar sus inquietudes y dudas, así como manifestar sus ideas al momento de solucionar un ejercicio.

Para la segunda subcategoría Proceso Inquisitivo del profesor (PI), podemos hacer énfasis en los episodios donde la docente decidió hacer estas preguntas con la finalidad de que los estudiantes tuvieran claro el proceso de solución analizado por la aplicación y no solamente se dedicarán a copiar el resultado como en otras ocasiones lo hicieron pues una de las intenciones más claras dentro del desarrollo de esta tarea de aprendizaje, es aquella que permite que el docente identifique los momentos indicados de intervención para lograr hacer preguntas o cuestionamientos cruciales a los estudiantes que les permitan llevar a cabo un proceso de reflexión y retroalimentación respecto a los saberes adquiridos anteriormente pues como lo mencionan Campos y Torres (2020) una de las acciones más importantes del profesor durante la implementación de una tarea de aprendizaje, es precisamente el proceso inquisitivo que desarrolla con sus estudiantes, lo cual se logra según estos autores elaborando una serie de preguntas que vayan guiando la actividad, además decidir el momento en que las debe presentar, lo anterior con la finalidad de conducir a los estudiantes al camino de solución del problema. Este proceso también tiene la finalidad de mantener el interés del estudiante a lo largo de la sesión. Dicha situación nos permite identificar el cumplimiento de esta subcategoría.

Consideramos que la tercera subcategoría, Incluye la herramienta digital (IH), se cumple desde el diseño de la tarea de aprendizaje, pues es esta un elemento importante para el desarrollo de esta actividad. Se puede considerar que el uso de los avances tecnológicos, favorece el desarrollo de capacidades intelectuales y la adquisición de destrezas por parte del alumno, mediante una nueva forma de organizar, distribuir, representar y codificar la realidad". (Ferrer, 2017) sin dejar de lado que el uso de estos instrumentos debe estar justificado para obtener así unos resultados positivos. De lo contrario, puede complicarse aún más el proceso de aprendizaje (Quesada, 2007). La tarea de aprendizaje promueve el uso de herramientas digitales como una herramienta que permite al estudiante desarrollar habilidades en el pensamiento.

La cuarta subactegoría Propicia la comparación y el análisis (PCA), uno de los momentos fundamentales de la tarea de aprendizaje propuesta es la parte donde el estudiante realiza una comparación entre el resultado obtenido en el primer momento al resolver el ejercicio de manera tradicional en comparación con el resultado que propone la app, pues este proceso permitirá que el estudiante reconozca que existen distintas rutas de solución si es el caso, o en su defecto identifique algún error, o simplemente refuerce y tenga la certeza de que su resultado es el correcto, lo cual favorece la seguridad de los estudiantes al momento de realizar ejercicios matemáticos, misma situación que nos permite considerar que esta subcategoría se cumple durante el proceso de implementación de la tarea de aprendizaje.

La quinta subcategoría Permite conectar conocimientos previos (PCP) se considera cumplida ya que durante la implementación de la actividad es claro que los estudiantes tuvieron la necesidad de hacer uso de los conocimientos previos con los que cuentan, que van desde las más sencillas operaciones hasta algo un poco más complejo, como es el caso de la forma de derivar una función para el momento en que se requirió identificar la derivada de una función, así como las relaciones trigonométricas que existen, tópicos que son abordados en semestres anteriores a este.

Para la última subcategoría Permite justificar pasos empleando propiedades y métodos de integración (JPCP) consideramos que se logró cumplir con este proceso pues, es claro que los estudiantes tratan de justificar del porque se añade una fracción a las integrales antes de dar una solución, lo que comúnmente conocemos como el proceso de complementar la integral para posteriormente poder aplicar una fórmula directa o llevar a cabo el proceso de solución requerido.

Del mismo modo de siguiendo las ideas de Parra et al. (2010), de esta manera se permitirá que el estudiante transite entre el razonamiento y argumentación al realizar este proceso de justificación.

De manera general podemos comentar que en el proceso de diseño e implementación de la tarea de aprendizaje se han logrado cumplir en su mayoría con los objetivos planteados en este trabajo, sin embargo, existen áreas de oportunidad que dan pie a continuar con esta investigación haciendo algunas adecuaciones y sobre todo potenciar más la participación del docente para lograr que los estudiantes utilicen de manera adecuada este tipo de aplicaciones.

5.3 Sobre el uso de la aplicación Photomath

Si bien es cierto que en el transcurso de esta investigación se ha hablado sobre la importancia y beneficios del uso de la tecnología y en este caso en específico de la app Photomath en el proceso de entendimiento de los procesos de solución de integrales trigonométricas, es también importante reconocer las limitaciones que durante el proceso de implementación de la actividad se pudieron observar:

1) Se reconoce que la mayoría de las versiones que hasta el momento existen en el mercado de la aplicación Photomath, no es suficientemente confiable para que los estudiantes trabajen solo sin el apoyo y guía de un instructor dado que los procesos suelen ser técnicos y en ocasiones a los estudiantes se les dificulta entender el proceso que esta herramienta propone.
2) Es necesario que el estudiante tengo conocimiento explícito sobre las funciones que tiene la aplicación y que pueden servir como herramienta para llevar a cabo el proceso de aprendizaje, de lo contrario se puede dar una situación desfavorable y de confusión para los estudiantes.

No obstante, solo son observaciones que se cree pueden ser superadas si se lleva a cabo un buen proceso de tarea de aprendizaje, donde se podría agregar una etapa breve de reconocimiento de todas las funciones y posibilidades que esta herramienta contiene y que pueden servir de aliados para mejorar el proceso de entendimiento de integrales de funciones trigonométricas.

Referencias

Alanís, J. (1987). Algunos aspectos sobre la enseñanza del concepto de función. *Revista Matemática Educativa* 1. Programa Nacional de Formación y Actualización de profesores de Matemáticas. México.

Alguacil de Nicolás, M., Boqué, M. y Pañellas, M. (2016). Dificultades en conceptos matemáticos básicos de los estudiantes para maestro. *Revista de Psicología*, 1(1), 419-430.

Alonso, I. et al. (2023). Photomath como alternativa para mejorar la calidad de proceso de enseñanza –aprendizaje en el área de matemática en los estudiantes de 1ro de bachillerato. Ciencia Latina *Revista Científica Multidisciplinar*, 7(3), 4105-4132. DOI:https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i3.6468P

Alvarez, C., y Fernández, E. (2016). Epistemología y praxis educativa de las matemáticas. *Revista ciencias de la educación*, (48), 218-231.

Ander-Egg, E. (1990). Técnicas de investigación social. Buenos Aires: Lumen

Ángel y Bautista (2001). Didácticas de las matemáticas en enseñanza superior: La utilización de software especializado. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación,* 7(2), 1-34.

Arreguín, Guillermo (1989). *Algunos trabajos recientes sobre integración.* Educación Matemática, 01(01), 10-14.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *En: Ingeniería Didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matematicas.* (Eds.) M. Artigue, R Douday, L. Moreno y P. Gómez. Grupo Editorial Iberoamérica, México, pp. 97-140.

Awang-Salleh, y Zakaria, E. (2012). The effects of integrating technology on students' conceptual and procedural understandings in integral calculus. Asian Social Science, 8(16), 8.

Ball, D., y Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis y E. Simmt (Eds.), Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM

Barrera-Mora, F., Reyes-Rodríguez, A., Mendoza-Hernández, J. G. (2018). Estrategias de cálculo mental para sumas y restas desarrolladas por estudiantes de secundaria. *Educación matemática*, *30*(3), 122-150.

Bavaresco, A. (2006). *Proceso Metodológico en la Investigación*. 5ta. Edición. Maracaibo, Venezuela. Editorial de La Universidad del Zulia.

Bertely, M. (2000) *Conociendo nuestras escuelas, un acercamiento etnográfico a la cultura escolar.* México: Paidós

Berry y Nyman (2003). Promoting students‘ graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 481-497.

Bonilla, I. (2013) ¿Qué es Matemática? Barcelona: Espasa [Folleto]

Borda P., M. (2013). *El proceso de investigación. Visión general de su desarrollo*. Barranquilla: Universidad de Norte.

Cabrera, L., y Zaldívar, D. (2007). Formación didáctica en cálculo universitario. Una propuesta basada en el diseño de actividades como eje rector. Mérida, Yucatán, México. https://Cabrera2007Formacion.pdf (uniandes.edu.co)

Camacho Machín, M. (2010). La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS (computer algebra system). *Investigación en educación matemática: noveno simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Córdoba, 2005; p. 97-110*.

Campos, M. (2010) Principios para el diseño de actividades de aprendizaje con el uso de tecnología. [Tesis de maestría] Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. https://drive.google.com/file/d/1JSMW_Yk6lWKqlk_b0gwI4gdXV_s59qGW/view?pli=1

Campos, M. y Torres, A. (2022). El proceso inquisitivo como un elemento central en la resolución de problemas: un caso sobre cuadriláteros. En: Hernández, L.A. y E. Juárez (Eds.) *Tendencias en la educación Matemática 2022.* (pp. 66-83). Comunicación Científica.

Castellano, Jiménez y Urosa (2012). El buen uso de los paquetes de cálculo simbólico en la enseñanza aprendizaje del Cálculo en Ingeniería. *Pensamiento Matemático*, 2(2), 35-44. Acceso: 03/10/2018. Disponible en: Disponible en: http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas

Carrasco, Del Castillo, Ansola, y Rodríguez, (2012). *Desarrollo de habilidades matemáticas para el uso de las tecnologías. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 1407-1414). México: CLAME. Acceso: 02/10/2018. Disponible en: Disponible en: http://www.clame.org.mx/documentos/alme2

Chaverra, K. y Ortiz, D. (2021) *Estrategias de aprendizaje apoyada en una aplicación móvil para mejorar la comprensión de operaciones matemáticas*.[Tesis de maestría] Universidad de Santander.

Ceberio, M. y Watzlawick P. 1998. *La Construcción del Universo*. Herder. Barcelona

Clements, D. H., & Sarama, J. (2013). Rethinking early mathematics: What is research-based curriculum for young children?. *Reconceptualizing early mathematics learning*, 121-147.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B., y Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for research in mathematics education*, *22*(1), 3-29.

Cohen, C. 2006. Audit Trail. Qualitative Research Guidelines Project. Fuente: http://bit.ly/TJ76z

Cohen, L. y Manion, L. (1990). Estudio de casos en Métodos de investigación educativa. Trad. Francisco Agudo López, Madrid: Editorial Muralla, S.A

Corbin y Strauss (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Editorial Universidad de Antioquia

Cuicas, Debel, Casadei y Alvarez (2007). El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educació*, *7*(2), 1-34.

Díaz, J. A. y Díaz, R. (2018) Los métodos de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático. *Revista Bolema.* 32(60), 57-74.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23, 167-180. https://doi.org/10.1207/s15326985ep2302_6.

Duval, R. 2004. Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Universidad del Valle, Colombia.

Edwards B.I., Shukor N.A., Cheok A.D. (2021) Emerging Learning Technologies in Next Generation Learning Spaces: Implications for Learning and Cognition. In: Edwards B.I., Shukor N.A., Cheok A.D. (eds) *Emerging Technologies for Next Generation Learning Spaces. Lecture Notes in Educational* Technology. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-16-3521-2_1

Eisenhart, M. A. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education researchers. Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 202 – 219). Blacksburg, VA. Obtenido de: http://www.colorado.edu/education/faculty/margareteisenhart/Docs/Eisenhart_Conceptual%20Frameworks%20for%20Research.pdf.

Enrique, F. (2013) Introducción al pensamiento algebraico mediante el estudio de regularidades y el reconocimiento de patrones. Séptimo Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), Montevideo, Uruguay 16 al 20 de S

Escudero, J., Delfín, L. y Gutiérrez, L. (2008). El estudio de caso como estrategia de -investigación en las ciencias sociales. *Ciencia Administrativa*,1, 7-10.

Esteban, Manuel. (2002). *El diseño de entornos de aprendizaje constructivista.* El diseño de la instrucción. Madrid: Aula XXI Santillana

Fernández, I., Riveros, V., y Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación. *Omnia*,23(1),9-19.

Ferrer, D. M. (2017). Las nuevas Tecnologías y el Aprendizaje de las Matemáticas Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. Revista Iberoamericana de Educación, 42(January 2007)

Flick, U. (2015). *El diseño de la investigación cualitativa* (Vol. 1). Ediciones Morata.

Flores Martínez, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.* Investigación durante las prácticas de enseñanza. Mathema Colección. Granada: Editorial Comares.

Font, V. (2014) Epistemología y Didáctica de las Matemáticas. Barcelona: Gedisa

Fraenkel, J. R., y Wallen, N. E. (1996). *How to design and evaluate research*. New York: Mc Graww-Hill.

Gao (1990). Case Study Evaluation. Program Evaluation and Methodology Division. United States General Accounting Office. United States. Fuente: http://bit.ly/feyn

García, P. (2017). *El celular como herramienta pedagógica.* Serie: Prácticas Innovadoras México: INNE

Garzón Rojas, J. S. (2020). *Influencia del uso de Photomath en el refuerzo académico del proceso enseñanza-aprendizaje de ecuaciones algebraicas en los estudiantes de segundo semestre de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales, Matemática y Física, de la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación de la Universidad Central del Ecuador, período 2019-2020* (Bachelor's thesis, Quito: UCE).

Goode, W. Y Hatt, P. (1967). Estudio de casos, en Métodos de Investigación Social. Novena reimpresión 1977. Trad. Ramón Palazón B. México: Ed. Trillas.

González, P. (2004). De la creencia en la razón a la razón de las creencias. *Reconstrucción racional como competencia cognitiva en educación matemática.* Carabobo. Valencia: Universidad de Carabobo.

Gröger, C., Silcher, S., Westkämper, E. & Mitschang, B. (2013). Leveraging apps in manufacturing.A framework for app technology in the enterprise. PROCEDIA CIRP 7. Forty Sixth CIRPConference on Manufacturing Systems (pp. 664 – 669).https://doi.org/10.1016/j.procir.2013.06.050

Gutiérrez, L., Ariza, L. M., y Mujica, J. A. J. (2014). Estrategias didácticas en el uso y aplicación de herramientas virtuales para el mejoramiento en la enseñanza del cálculo integral. *Revista academia y virtualidad*, *7*(2), 64-75.

Hancook, D. y Algozzine, R (2006). Doing Case Studyng Research. *Practical. Guide for Beginning Researchers.* New York: Teachers College.

Harel, G. (1994). On teacher education programmes in mathematics. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 25(1), 113-119.

Harel, G., y Dubinsky, E. (1992). The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. *Mathematical Association of America Notes* (25), 85-106.

Henríquez, C., Guerreo, C. y Ávila, A., (2021). Trabajo Matemático de profesores universitarios: Heurísticas de solución de una tarea. *Revista Educación Matemática,* 33(3), 233-262.

Hernandez. (2008). Modelo constructivista con las nuevas tecnologias. *Revista Universidad y Sociedad del Conocimiento.* 5(2), 26-35

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista L. (2010). Metodología de la investigación (5ta. ed.). México: McGraw-Hill.

Hernández S., Fernández-Collado y Baptista L. (2014). Metodología de la investigación. (6ª ed.) México: McGraw-Hill-Interamericana editores.

Herrera, B., Diez, G. A., y Buenabad, M. A. (2007). El uso de los teléfonos móviles, las aplicaciones y su rendimiento académico en los alumnos de la DES DACI. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo.* 12, 1-18.

Hiebert, J., Thomas P., Fennema C., Wearne D., Human P., Murray H., y Olivier A.. *Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding.* Potsmouth, NH: Heinemann. 1997.

Insuasti R. M. y Mendoza J. M., (2021). Análisis de integrales trigonométricos notables. *AlfaPublicaciones*. 16(3), DOI:https://doi.org/10.33262/ap.v3i3.1.89

Kalman, J. (5 Junio 2012). “Educación a debate. Primer portal periodístico sobre la educación en México”. [En línea]. Available: http://educacionadebate.org/36993/las-tic-y-la-transformacion-de-laeducacion/.

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundation for research in mathematics education. *ZDM* 2005, 37(6), 457-467.

Lagrange, J. (2005). Transposing computer tools from the mathematical sciences into teaching. In D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. New York: Springer, 67-82.

Mackernan, J. (1989). “El estudio de casos” en Investigación – acción y currículum. Madrid: Morata.

Marín-Salas, C. (2012). *Nuevas tecnologías para motivar el aprendizaje de las integrales* (Master's thesis).

Martin, W. (2000). Lasting effects of the integrated use of graphing technologies in precalculus mathematics. In E. Dubinsky; A. Schoenfeld; J. Kaput (Eds.), CBMS Issues in Mathematics Education. MathematicalAssociation ofAmerica, Washington, D. C. Vol. 8, pp. 154-187.

Mesías, O. (2010). La investigación cualitativa. [Tesis doctoral]. *Universidad Central de raVenezuela*. Recuperado de: https://www.academia.edu/22351468/LA_INVESTIGACION_CUALITATIVA

Momposita, O. (2019) *Software Photomath para el estudio de matemática en octavo año de educación básica.* [Tesis de maestría] Universidad Tecnológica de Israel

Montero, L. (2006). Enseñanza de la Matemática dominada por algoritmos versus una enseñanza más conceptual. *J. Segura (2006):“Actas digitales del I Encuentro de Enseñanza de la Matemática”. Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica*.

Morales, Cuevas, Martínez, y Mario, (2013). Análisis de software matemático usados en nivel superior. *Vínculos*, 10(1), 299-307. Acceso: 03/10/2018. Disponible en: Disponible en: http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/vinculos/article/view/4670/6412

Moreno-Armella, L. (2013). La semiótica y lo digital: dominios coextensivos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (11), 339-348.

Moreno, L. y Hegedus, S. (2009). Co-action with digital technologies. Mathematics Education, 41(4) 505-519.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S. y Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68, 99-111. doi:10.1007/s10649-008-9116-6

Muñoz, J. (2009) La importancia de las matemáticas en la educación secundaria. *Revista innovación y experiencias educativas.* (24), 1-9.

Nieves, S; Caraballo, C.M. y Fernández, C.L. (2019). Metodología para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático desde la demostración por inducción complete. *Revista Mendive*, 17 (3), 393-408.

Ortiz (2019), *Aplicaciones móviles como una forma de comprobación para funciones racionales de los aprendizajes en el bachillerato,* UNAM: CODEIC.

Oviedo, L., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, *13*, 29-36.

Oviedo, L. E. (2019). Aplicaciones móviles para fortalecer los procesos de enseñanza-aprendizaje de cálculo integral. *Revista Acta Educativa*, *1*(1), 1-16.

Ozuorcun, N. y Tabak, F. (2012). Is M-learning Versus E-learning or are They Supporting Each Other?. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 46, 299-305. DOI: https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.05.110

Parra, M., Zapata, M. N., Toro J. A. y Durango J. H. (2010). Contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas. *Revista Virtual, Universidad Católica del Norte,* 66-81.

Patiño, K. N., Prada, R. y Hernández C. A. (2021) La resolución de problemas matemáticos y los factores que intervienen en su enseñanza aprendizaje. *Revista Boletín REDIPE.* 10(9), 459-471.

Perez, J. (2014). Empleo del software educativo y su eficiencia en el rendimiento académico del Cál**c**ulo Integral en la Universidad Peruana Unión, Perú. *Apuntes Universitarios. Revista de Investigación,* 4 (1), 43-56.

Pérez, M. (2019). ¿Qué es el Marco Referencial de una Investigación?, Lifeder. Tomado de https://www. lifeder. com/marco-referencial-de-investigacion.

Pikri, A. Z., Yulia, P., & Putri, R. (2023). Photomath Applications for Learning Mathematics Analysis. *Mathline: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, *8*(2), 295-312.

Polya, G. 1945. How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. . Princeton University Press: Princeton, New Jersey.P.25

Ponce, J. C., y Rivera, A. (2011). Un análisis del uso de la tecnología para el cálculo de primitivas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *77*, 85-98.

Quesada, E. V. (2007). Sistemas expertos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la educación superior. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática., 3, 45–67

Ramírez, C. M. U. (2009). El problema de Integración simbólica. *Pensamiento Actual*, *9*(12-13).

Rangel, L. N. (2012). Patrones y regularidades numéricas: razonamiento inductivo. [Tesis de maestría]. Facultad de ciencias, Universidad Nacional de Colombia.

Radford y André (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(2) 215-250. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33511498004

Reidl, L. M. (2012). El diseño de investigación en educación: conceptos actuales. *Investigación en educación médica*, 1(1), 35-39.

Rodríguez Cubillo, M. D. R., Castillo, H. D., & Arteaga Martínez, B. P. (2021). El uso de aplicaciones móviles en el aprendizaje de las matemáticas: una revisión sistemática. *Ensayos: revista de la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de Albacete.*36(1), 17-34. **DOI:** https://doi.org/10.18239/ensayos.v36i1.2631

Ruiz, E. F., Hernández, J. D., y Gutiérrez, J. J. (2015). Aplicaciones en dispositivos móviles enfocadas al estudio de conceptos de cálculo. *El cálculo y su enseñanza*, *6*, 123-144.

Rusque, A. (2003). *De la diversidad a la unidad en la investigación cualitativa.* Caracas: Vadell Hermanos Editores.

Salat Figols, Ramón Sebastián. (2013). La enseñanza de las matemáticas y la tecnología. *Innovación educativa,* 13(62), 61-74. Recuperado en 25 de agosto de 2022, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732013000200005&lng=es&tlng=es.

Santos Trigo, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Santos Trigo, M. (2011). La Educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.* 6(8), 35-54.

Santos-Trigo, M. (2020). Problem-Solving in Mathematics Education. In: Lerman, S. (eds) Encyclopedia of Mathematics Education. *Springer, Cham*. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_129

Sandoval, I.T. y Moreno-Armella, L. (2012). Tecnología Digital y Cognición Matemática: retos para la educación. *Revista Horizontes Pedagógicos*, 14(1), 21-29.

Sarama, J., y Clements D. (2009). Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children. London and New York, UK and USA: Routledge.

Segura, M. y Chacón, I. (1996). Competitividad en la educación superior. *Umbral*, 11(5), 29-37.

Sepúlveda, A., Medina, C., y Sepúlveda , D., (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, 21(2), 79-115.

Serrano, M.S. (1993). “Didáctica de las Matemáticas”.En: Ensayos: *Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, (8), 173-194.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grows (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). NY: Macmillan.

Schoenfeld, A. H., (1994). *Reflections on doing and teaching mathematics.* In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp.53-70).

SEP (2017) Programa de estudios del componente básico del marco curricular común de la educación media superior. México: SEP.

Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 91-104.

Smith, M. S., y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 3, 344-350.

Stake, R. (1994). Case studies en Norman K. Dezwhytein y Yvonna Lincoln, (eds.) Handbook of cualitative research, Thousand Oaks, Sage Publications, 236- 245.

Stake, R. (1999). Investigación con estudio de casos. Segunda edición. Madrid: Morata.

Stein, M. y, Smith, L.. (1996). “Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: an analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project” (pp. 50-80). Pittsburg: Educational Research and Evaluation.

Stein, M. K., Remillard, J., y Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *1*(1), 319-370.

Taco, R. A. (2021). Efectos del uso del software libre photomath para el fortalecimiento de las competencias matemáticas en los estudiantes de tercero y cuarto grado del centro educativo Yunguilla. [Tesis de licenciatura]. Repositorio Institucional UNAD. https://repository.unad.edu.co/handle/10596/44051.

Tall, D. (1991c). Reflections. En: Advanced mathematical thinking. 251-259. Kluwer. Dordrecht.

Torrelles, C., Coiduras, J., Isus, S., Carrera, F., París, G., y Cela, J. M. (2011). Competencia de trabajo en equipo: definición y categorización. *Profesorado, revista de curriculum y formación del profesorado,* 15(3), 329-344.

Torres-Rodríguez, A. A., Campos-Nava, M., Reyes-Rodríguez, A. V., y Soto-Campos, C. A. (2022). Diseño de tareas con tecnología: entre investigación y docencia. *Pädi Boletín Científico De Ciencias Básicas E Ingenierías Del ICBI*, *9*(18), 29-34.

Torregrosa-Gironés, G., Delicado, M. J. H., Martínez, M. D. C. P., y Ciscar, S. L. (2010). Concepciones del profesor sobre la prueba y software dinámico. Desarrollo en un entorno virtual de aprendizaje. Conception of teachers about proofs and dynamic software*. Revista de educación*, 352, 379-404.

Toto, M., López Fernández, R., y Crespo Borges, T. (2017). Empleo del software Geo-gebra como medio auxiliar heurístico para el tratamiento de funciones en el Instituto Superior de Ciencias Policiales y Criminal de la República de Angola. *Revista Conrado*, 13(57), 169-173. Recuperado de http://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado

Ursini (2006). Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT). pp. 25-41. En Rojano, T. (ed), Enseñanza de la Física y las Matemática con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula. Organización de Estados Iberoamericanos y Secretaría de Educación Pública. México. Disponible en: http://www.matedu.cinvestav.mx/~asacristan/EFIT- EMAT_RojanoEd_06.pdf

Valdez, E. A., y Gavilanez, C. I. (2021). *Implementación del programa educativo Wolfram Alpha orientado al aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes del primer año de bachillerato general unificado de el colegio particular mixto interandino en el año lectivo 2020-2021* (Bachelor's thesis, Quito: UCE).

Waldegg, G. (2002). El uso de las nuevas tecnologías para la enseñanza y aprendizaje de las ciencias. *Revista electrónica de investigación educativa*, 4(1), 1-23.

Wassermann, S. (1994) *El estudio de casos como método de enseñanza.* Buenos Aires: Amorrortu Editores.

Wertsch, J. (1993). Voces de la Mente. *Un Enfoque Sociocultural Para el Estudio de la Acción Mediada.* Madrid, España: Visor

Yin, R. (1994). *Method case studies research and readings.* Applied social research Methods Series, Newbury Park CA, Sage.

Zambrano, J. (2009). Aprendizaje móvil (M-Learning). *Inventum*, 1(7), 38-41.

Zapata, L. 2004. Los determinantes de la generación y la transferencia del conocimiento en pequeñas y medianas empresas de tecnologías de la información de Barcelona. [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma de Barcelona. Disponible en http://bit.ly/P4Se.

Zain, I. N., Setambah, M. A., Othman, M. S., & Hanapi, M. H. (2023). Use of Photomath Applications in Helping Improving Students' Mathematical (Algebra) Achievement. *European Journal of Education and Pedagogy*, *4*(2), 85-87

Zakaria, E., & Salleh, T. S. (2015). Using technology in learning integral calculus. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, *6*(5), 144.