UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

“Principios para el diseño de actividades de aprendizaje matemático con el uso de la tecnología”

TESIS

Que para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica

PRESENTA:

Marcos Campos Nava

DIRIGIDA POR:

Dr Fernando Barrera Mora
Dr Aarón Reyes Rodríguez

Enmarcada en el proyecto CONACYT “Bases Teóricas y Conceptuales en la Construcción del Conocimiento Matemático y el Empleo de Herramientas Digitales” con registro 61996

Mineral de la Reforma, Hgo. Octubre de 2010.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DIRECCIÓN

M. en A. JULIO CESAR LEINES MEDECIGO
DIRECTOR DE CONTROL ESCOLAR
P R E S E N T E

Por este conducto le comunico que el jurado asignado al pasante de la *Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica* **C. Ing. Marcos Campos Nava**, quien presenta el trabajo de titulación **"Principios para el diseño de actividades de aprendizaje matemático con el uso de la tecnología"**, después de revisar el trabajo en reunión de Sinodales ha decidido **autorizar la impresión** del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación se anotan las firmas de conformidad de los integrantes del Jurado:

PRESIDENTE:	M. en C. Juan Alberto Acosta Hernández
PRIMER VOCAL:	Dr. José Félix Fernando Barrera Mora
SECRETARIO:	Dr. Orlando Ávila Pozos
PRIMER SUPLENTE:	Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Sin otro particular, reitero a usted la seguridad de mi atenta consideración.

A T E N T A M E N T E
"AMOR, ORDEN Y PROGRESO"
Mineral de la Reforma, Hgo., 25 de octubre de 2010
DIRECTOR

M. en C. OCTAVIO CASTILLO ACOSTA

Ciudad Universitaria Carretera Pachuca – Tulancingo Km. 4.5 C.P. 42184
Col. Carboneras, Mineral de la Reforma, Hgo.
Tel. 017717172000 Ext. 2230, 2231 Fax ext. 2109
castillo@uaeh.reduaeh.mx

Agradecimientos:

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo recibido para la realización de este trabajo a través del proyecto "Bases Teóricas y Conceptuales en la Construcción del Conocimiento Matemático y el Empleo de Herramientas Digitales" con registro 61996.

.

A los Doctores Fernando Barrera Mora y Aarón Reyes Rodríguez por guiar la realización de esta investigación.

A los profesores del Área Académica de Matemáticas Y Física del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería (ICBI) de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), muy en particular a aquellos que me formaron durante los cursos de maestría. En estricto orden alfabético: Dr. Orlando Ávila Pozos, Dr. Fernando Barrera Mora, Dr. Jaime Cruz Sampedro, Dr. Aarón Reyes Rodríguez, M.C. Homero Roldán Rojas y Dr. Carlos Rondero Guerrero.

A todos los estudiantes que participaron en este estudio.

Dedicatorias:

A Karla por toda su comprensión y apoyo durante este largo proceso.

A mis compañeros de generación: Luisa, Beny, Mary, Yola, Lucy, Agustín, Rivelino y Orlando, por todos los momentos compartidos en nuestra formación.

RESUMEN

Dentro del marco de resolución de problemas, se presenta este estudio de carácter cualitativo en el cual se abordan cuestiones tales como: ¿qué elementos teóricos pueden considerarse al diseñar tareas de aprendizaje matemático, de tal forma que mediante la ejecución de las tareas los estudiantes adquieran una forma matemática de pensar?

El propósito que guió esta investigación consistió en determinar algunos de los principios teóricos que se pueden tomar en cuenta al diseñar tareas de aprendizaje matemático que valoren el uso de las tecnologías digitales, de forma tal que a través del desarrollo de las actividades propuestas, un estudiante logre un objetivo de aprendizaje particular, para lo cual se identificaron algunos principios y bases teóricas que pueden utilizarse en el diseño de tareas de aprendizaje matemático que permitan a los estudiantes de matemáticas de bachillerato estructurar redes conceptuales robustas.

Como elementos del marco conceptual, además de la perspectiva de resolución de problemas para el aprendizaje de las matemáticas y la incorporación de herramientas digitales en la solución de problemas, se adoptó el constructo de la demanda cognitiva de las tareas de aprendizaje matemático. Se diseñó una tarea de aprendizaje, en particular situada en el contexto de la mecánica y los mecanismos, la cual fue implementada con estudiantes de primeros semestres de licenciatura y bachillerato, con lo cual se buscó recolectar datos que permitieran saber si la demanda cognitiva de la tarea se mantuvo durante la realización didáctica, en qué momentos decayó y qué acciones del profesor lo provocaron, además de documentar las estrategias utilizadas por los estudiantes al verse enfrentados con la tarea, en un ambiente de resolución de problemas en el que se favorece el uso sistemático de un software dinámico.

La recolección de la información provino de al menos dos fuentes: protocolo para la ejecución de la actividad, el cual incluyó un cuestionario y grabaciones en video, las cuáles posteriormente se transcribieron y codificaron para extraer del grueso de los datos, lo relevante en relación con los objetivos y las preguntas de la investigación.

Con base en el análisis de los datos, se pudo determinar que los principios de las aproximaciones teóricas que integran el marco conceptual permitieron que los estudiantes alcanzaran los objetivos de aprendizaje a través del desarrollo de la tarea. Se elaboró también un análisis detallado de los factores que influyeron en el mantenimiento o decaimiento de la demanda cognitiva durante el desarrollo de la actividad con base en los datos recolectados, con lo cual se presenta al final una discusión sobre el alcance del objetivo planteado al inicio de la investigación y las respuestas a las preguntas de investigación.

Una de las principales aportaciones de este trabajo es que a diferencia de estudios previos relacionados con el diseño de tareas de aprendizaje, en esta investigación se trató de mostrar con detalle cómo fue diseñada una tarea en particular, con lo cual se espera que profesores interesados en diseñar tareas de aprendizaje matemático, encuentren en este estudio una guía de utilidad.

ABSTRACT

Within the framework of problem solving, this study presents a qualitative nature in which addresses issues such as: what theoretical elements can be considered when designing mathematical learning tasks, so that through the implementation of the tasks students acquire a mathematical way of thinking?

The purpose which guided this research was to determine some of the theoretical principles to be taken into account when designing mathematical learning tasks that value the use of the digital technologies, so that through the development of proposed activities, a student achieve a particular learning objective, for which identified certain principles and theoretical bases that can be used in the design of mathematical learning tasks that allow high school math students structure robust conceptual networks.

As elements of the conceptual framework, besides the perspective of problem-solving to learning mathematics and the incorporation of digital tools in solving problems, was also adopted the construct of cognitive demand of mathematical learning tasks. Was designed a learning task, particulary in the context of the mechanics and mechanisms, which was implemented with freshmen undergraduate and high school, which sought to collect data to establish whether the cognitive demand task was maintained during the conduct teaching, at what times fell and what caused the teacher's actions, and documenting the strategies used by students when faced with the task in a problem solving environment which favors the use systematic dynamic software.

The data collected came from at least two sources: protocol for the implementation of the activity, which included a questionnaire and video recordings, which were subsequently transcribed and coded to extract the bulk of the data, what is relevant in relation to objectives and research questions.

Based on the analysis of the data, it was determined that the principles that form the conceptual framework, allowed the students reach the learning objective through the development of the task. It also produced a detailed analysis of the factors influencing the maintenance or decline of cognitive demand during the development of the activity based on data collected, which is at the end a discussion of the scope of the target set at the benining research and answers to research questions. questions.

One of the main contributions of this work is that unlike previous research on the design of learning tasks, this research attempted to show in detail how it was designed a particular task, which is expected to teachers interested in designing mathematical learning tasks, found in this study a guide of utility.

ÍNDICE

Contenido **Página**

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

CAPÍTULO I. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

¿Cuál es la importancia de las tareas o actividades de instrucción en el proceso de aprendizaje de las matemáticas? ¿Qué elementos se deben considerar en su diseño? ¿Qué tipo de tareas o *actividades*[1] son adecuadas para promover el desarrollo de un pensamiento matemático en los estudiantes? Bajo la perspectiva de resolución de problemas, se considera que las tareas no rutinarias son vehículos que pueden promover en los estudiantes formas de pensar consistentes con el quehacer matemático. Estas tareas se caracterizan porque permiten: (i) identificar información, (ii) encontrar relaciones entre datos e incógnitas, (iii) observar patrones, (iv) formular y validar conjeturas, (v) comunicar resultados y (vi) elaborar generalizaciones. En el curso de este trabajo, se considera que pensar matemáticamente o que los estudiantes tengan un pensamiento matemático, consiste en que durante los episodios en que deben resolver problemas, exhiban las características antes mencionadas.

Es importante destacar que en la selección de *problemas*[2] que ayuden a los estudiantes a exhibir procesos de pensamiento consistentes con la disciplina se debe considerar que:

(i) Un problema matemático debe representar una dificultad intelectual y no solo operacional o algorítmica. Debe significar un desafío real para el *resolutor*[3].

(ii) Un problema debe ser en sí mismo un objeto de interés, por tanto debe ser motivante y contextual, es decir, debe orientar a los estudiantes para que desarrollen procesos creativos durante la solución del mismo, así como herramientas conceptuales que puedan transferirse a otras situaciones que se le presenten posteriormente.

(iii) El contexto de un problema puede ser del mundo real, matemático, o hipotético.

(iv) Es recomendable que un problema pueda abordarse y resolverse mediante diferentes métodos. (Santos-Trigo, 2007; Villalobos, 2008)

Una de las funciones principales de los profesores de matemáticas, debe consistir en diseñar actividades o tareas de aprendizaje que promuevan entre los estudiantes la discusión en clase, para lo cual es de gran importancia elegir problemas que les permitan desarrollar formas de pensar matemáticamente (identificar información, encontrar relaciones entre datos e incógnitas, observar e identificar patrones, formular y validar conjeturas, comunicar resultados y elaborar generalizaciones), cabe resaltar que en el contexto actual de la educación, son pocos los profesores que llevan a cabo esta función.

---

[1] A lo largo de este trabajo, se usará de manera indistinta el término tarea o actividad.
[2] El enunciado de un problema es parte de la actividad, pero no se considera la actividad en sí misma.
[3] Con esta palabra se hará referencia a la persona que resuelve un problema.

> […] el uso de problemas no rutinarios (problemas con varios métodos de solución o que requieren más que solamente la aplicación de reglas, fórmulas o algoritmos para resolverlos) puede constituir un recurso natural para discutir actividades que ilustren el uso de conjeturas, contraejemplos, aproximaciones y, en general, estrategias de carácter cognoscitivo y de monitoreo. (Santos-Trigo, 2007, p. 49)

En este sentido, Brousseau (2006) considera que un buen problema es aquel que es interesante y emocionante; adaptado a los objetivos de aprendizaje planteados por el profesor y que puede producir conocimiento y nuevas preguntas. En función de las circunstancias, los estudiantes y las intenciones del profesor, el mismo enunciado matemático puede generar problemas muy diferentes, situaciones o ejercicios. Inversamente, las situaciones o problemas pueden modificar profundamente el significado de los enunciados matemáticos y su papel en el aprendizaje.

Un ejemplo del tipo de problema que se menciona puede ser el siguiente, mejor conocido como el juego de la carrera veinte:

> El juego se juega por pares de jugadores. Cada jugado trata de decir "20" añadiendo 1 o 2 al número dada por el otro. Uno del par inicia diciendo 1 o 2 (por ejemplo. "1") y el otro sigue añadiendo 1 ó 2 a este número ("2" por ejemplo) y diciendo el resultado (el cual sería "3" en este ejemplo); la primera persona que sigue a continuación, mediante la adición de 1 o 2 a este número("1" por ejemplo) y diciendo el resultado (el cual sería "4" en este ejemplo), y así sucesivamente. (Brousseau, 1997).

¿Por qué la insistencia en destacar características de las actividades de resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas? Tradicionalmente, la idea que se tiene de las matemáticas escolares, particularmente en bachillerato, es que por medio de la memorización de reglas y algoritmos, el estudiante es capaz de resolver “problemas” como los que comúnmente aparecen en los libros de texto, la mayoría de las veces, los enunciados propuestos en los libros no son problemas, sino ejercicios cuya solución por lo general obedece a procedimientos algorítmicos y que se puede obtener en un periodo corto de tiempo.

Santos-Trigo (2007) menciona que la matemática es percibida como una disciplina fría y austera que da poco espacio al juicio y la creatividad. Este punto de vista refleja el tipo de matemáticas que se estudia en la escuela. En este sentido, la formulación de propuestas curriculares en las que se involucra a la resolución de problemas como eje principal, han cobrado fuerza, debido a las dificultades de comprensión de ideas matemáticas que se han detectado a partir de evaluaciones internacionales como el Estudio Sobre las Tendencias en Ciencias y Matemáticas, por sus siglas en inglés [TIMSS] o Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes, por sus siglas en inglés [PISA].

> Si la vida fuera de una naturaleza tan constante que sólo tuviéramos que hacer unas cuantas tareas y que éstas se tuvieran que hacer una y otra vez del mismo modo, las razones para resolver problemas no serían tan compulsivas […]La necesidad de enseñar a los estudiantes cómo formular y resolver problemas es clara por demás, tan pronto lleguen a los estudios superiores o un empleo, tendrán que ser capaces de

> resolver los problemas que se les presenten en la educación avanzada o en el empleo que consigan. (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos [NCTM], 1981, p. 14)

Aunado a lo anterior, el uso sistemático de las tecnologías digitales en el aprendizaje, plantea interrogantes tales como: ¿por qué es importante la incorporación de herramientas computacionales en los procesos de entendimiento de las ideas matemáticas? El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (NCTM, 2000) argumenta que la tecnología es una herramienta básica para la enseñanza y el aprendizaje efectivos de las matemáticas; ya que puede ampliar el espectro de contenidos y conceptos matemáticos que se pueden enseñar y puede mejorar el entendimiento de los estudiantes.

El uso de herramientas tecnológicas puede facilitar el logro escolar al influir en una variedad de aspectos que son esenciales para el aprendizaje de los estudiantes, tales como la reflexión, el razonamiento, el planteamiento y solución de problemas, así como la toma de decisiones. El NCTM (2000) manifiesta también que los profesores deben prepararse para tomar decisiones bien informadas con el fin de determinar cuándo y cómo pueden sus estudiantes utilizar efectivamente estas herramientas.

En este contexto, es que surge la necesidad de preguntarse sobre cuáles son los principios y bases teóricas que puede seguir el profesor de matemáticas durante el diseño de tareas de aprendizaje no rutinarias desarrolladas en escenarios de resolución de problemas, en los que: (a) se hace un uso sistemático de las tecnologías digitales y (b) se propicia en los estudiantes procesos de pensamiento matemático.

1.2 ANTECEDENTES

En este apartado se realiza una revisión de la literatura relacionada con el trabajo de investigación. Los artículos analizados tienen como característica común que reportan el diseño de actividades de aprendizaje matemático, basadas en los marcos de la resolución de problemas y el uso de la tecnologías digitales, las cuales se implementaron con estudiantes de nivel medio superior o superior (primeros semestres); y en diferentes contextos: puramente matemático, hipotético o del mundo real (Barrera y Santos, 2002); y cuya finalidad es analizar el desarrollo de diversas formas de pensamiento matemático o entendimiento conceptual de los estudiantes.

Benítez (2005), propuso la siguiente actividad a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas que habían cursado la asignatura de geometría euclidiana:

> Considera una circunferencia con centro en O y radio arbitrario. Sea P un punto en el plano y R un punto sobre la circunferencia. Se traza el segmento PR y la recta que pasa por O y R. Se construye la mediatriz del segmento PR. Sea S el punto de intersección del segmento PR y la recta que pasa por los puntos O y R. ¿Cuál es el lugar geométrico de S cuando R se mueve alrededor de la circunferencia?

Algunas de las conclusiones incluyen evidencia de que los estudiantes utilizaron Cabri con fines diferentes y bajo creencias diversas; como una herramienta de exploración y de validación, así como para comparar los resultados de una demostración, hecha con lápiz y papel y la visualización de la propiedad en la computadora (herramienta de comparación).

Iglesias (2006), presentó el reporte de resultados de una actividad que propuso a estudiantes de tercer semestre de bachillerato, los cuáles contaban con el antecedente de trabajar desde octavo grado (curso de geometría) con el uso de software dinámico (Cabri), el enunciado del problema es: “Angélica mide 1 m de estatura y se aleja a velocidad constante de un poste de alumbrado público de 3 metros de altura que tiene en la parte superior una lámpara encendida”.

Algunos de los planteamientos que formularon en conjunto estudiantes y profesor, después de dar a conocer la actividad son: ¿cuánto tiempo tarda Angélica en alejarse 3 metros del poste? ¿Qué distancia habrá recorrido cuando hayan transcurrido 20 segundos? ¿En qué momento la longitud de la sombra de Angélica es igual a su estatura? ¿En ese instante, qué ángulo forma la longitud de la sombra de Angélica con el rayo de luz? ¿Cuál es la expresión algebraica que mejor relaciona la longitud de la sombra de Angélica y la distancia recorrida por ella? Una de las conclusiones de mayor relevancia fue que el software Cabri Geometry, junto con una calculadora gráfica, brindó a los estudiantes la oportunidad de explorar diferentes formas de representación de una función. Se muestra evidencia de que a través de la tabla de datos recolectados y la aproximación gráfica de éstos mediante una función, permitió a los estudiantes obtener un entendimiento conceptual de las ideas de función, aproximación y ajuste de datos.

Benítez y Londoño (2009) presentan los resultados de un estudio en el que se documentan las características del razonamiento de un grupo de estudiantes universitarios, cuando abordan un problema en el contexto del mundo real. La actividad de aprendizaje planteada, conlleva a la modelación matemática de la evaporación de un líquido contenido en un recipiente. Mencionan que se utilizó la tecnología para estudiar las diferentes representaciones de las funciones candidatas a modelar el fenómeno.

> En la solución del problema de la evaporación los estudiantes pusieron en práctica varios procesos centrales del pensamiento matemático, como lo son: el uso de la creatividad para ingeniar un método de medición, el uso de distintos registros de representación, hacer interpretación de gráficas, predecir y construir un modelo matemático de un fenómeno real. La actividad permitió usar la tecnología para solucionar un problema en contexto real. En este proceso, la hoja electrónica de cálculo y la calculadora fueron utilizadas como herramientas de apoyo en la solución del problema. (Benítez y Londoño, 2009, p. 41)

Moreno y Santos-Trigo (2002), reportan los resultados de un estudio realizado con estudiantes de cuarto semestre de bachillerato, durante un seminario de cuatro semanas. La idea general del seminario fue utilizar software de geometría dinámica para resolver problemas, planteados por el profesor. Luego, se pidió a los alumnos que ellos mismos propusieran ejercicios y problemas. Los resultados presentados en este estudio, se derivaron de la tarea de construir un rectángulo dado su perímetro y una diagonal. Los autores mencionan que cuando los estudiantes idearon la forma de representar la información con ayuda del software dinámico, hicieron uso de la herramienta de arrastre y movieron puntos, encontraron distintos lugares geométricos, asignaron medidas y formularon y sustentaron conjeturas; en estas actividades el software se convirtió en una herramienta matemática poderosa para los estudiantes. Como observaciones finales se comenta que el trabajo mostrado por los participantes durante su interacción con el problema ilustra diferentes cualidades matemáticas de la tarea, que les permitieron explorar las fortalezas y debilidades de sus estrategias de solución.

Santos-Trigo (2008), presentó la siguiente actividad a un grupo de estudiantes de tercer semestre de bachillerato que trabajaron semanalmente una sesión de tres horas diarias durante un semestre:

> A dos estudiantes, Luis y Pablo, encargados de la siembra de hortalizas en el jardín de la escuela, se les asigna un pedazo de tierra en forma de un cuadrado y deciden repartirse el terreno en dos partes de tal manera que a cada uno le corresponda la misma área.

Esta actividad, aparentemente rutinaria, fue transformada por los estudiantes, mediante un proceso inquisitivo, orientado por el profesor y el uso del software de geometría dinámica, en una actividad que permitió identificar y explorar diversas relaciones matemáticas. Con base en los resultados del estudio, el autor argumenta que diversas herramientas pueden ofrecer oportunidades a los estudiantes para reconstruir o desarrollar conocimiento matemático. Por ejemplo, el uso del software dinámico favoreció la construcción y uso de representaciones dinámicas de los objetos matemáticos involucrados en el problema; y como consecuencia de lo anterior, algunas heurísticas como la medición de atributos (longitudes, áreas, perímetros), el arrastre de algunos elementos dentro de una construcción, la descripción de lugares geométricos, y el uso adecuado del sistema cartesiano, resultaron importantes en la búsqueda de conjeturas o relaciones, así como con los medios para justificarlas.

En un trabajo de Santos-Trigo y Benítez (2003) se realizó una experiencia con un grupo de estudiantes de tercer semestre de bachillerato, los cuales cursaron la asignatura de cálculo con énfasis en la resolución de problemas. Durante el semestre se abordaron problemas o ejercicios de libros de texto, así como problemas diseñados para el curso, por ejemplo:

> La distancia entre dos postes que se emplean en instalaciones telefónicas es de 10 m, la longitud de cada poste es 3 y 5 m. A manera de soporte, un cable que une la parte superior de los dos postes se sujetará a tierra, localizándolo sobre la línea que une los dos postes. ¿Dónde debe situarse el punto sobre la tierra, de tal manera que la longitud del cable sea la menor?

Entre los resultados se destaca que los estudiantes fueron capaces de reformular y extender el problema inicial, además se muestra evidencia de que el uso de la tecnología posibilita a los estudiantes observar comportamientos o relaciones importantes que pueden facilitar la organización o el análisis de datos y realizar análisis a través del uso de diversos sistemas de representación (tablas, gráficos, expresiones algebraicas). Así, las tecnologías digitales y una aproximación inquisitiva a la resolución de problemas resultaron elementos fundamentales para que los estudiantes pudieran establecer conexiones entre diferentes contenidos matemáticos.

Reflexión y algunas consideraciones en relación con la revisión de la literatura

Al analizar los reportes de investigación de esta sección se pudo notar que la gran mayoría omiten explicitar algunos elementos en el diseño de actividades que podrían ser de utilidad para los profesores de matemáticas, interesados en elaborar sus propias actividades de aprendizaje, sustentadas en el marco de la resolución de problemas y las teorías que analizan el efecto del uso de la tecnología sobre la construcción del conocimiento, me surgen entonces diversas interrogantes: ¿qué objetivo de aprendizaje se persigue con cada actividad? ¿Cuáles son los elementos y características comunes de cada una de las tareas? ¿Cómo se espera que el estudiante organice sus conocimientos previos durante el desarrollo de las actividades? ¿Qué nuevo conocimiento se busca estructurar en la red conceptual del estudiante cuando este interactúe con una tarea de aprendizaje? ¿Qué problemática tendría el profesor de bachillerato para tratar de implementar estas actividades con sus estudiantes? ¿De qué forma el software dinámico se convierte en una herramienta de resolución de problemas? ¿Cómo utilizar las tareas que aparecen en los reportes de investigación como base para el diseño de nuevas actividades? ¿Qué principios de la resolución de problemas y el uso de la tecnología se pueden utilizar para diseñar tareas de aprendizaje y en qué forma? Estas son preguntas de una agenda de investigación en resolución de problemas que busca analizar la importancia de las actividades en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de los niveles medio superior y superior. En esta investigación se espera responder algunas de estas preguntas, con la finalidad de contribuir con el cuerpo de conocimientos existentes en el área y a fortalecer la agenda de investigación con la formulación de nuevas preguntas e interrogantes.

Las tareas de aprendizaje que se proponen en los trabajos revisados, son actividades no rutinarias, que demandan de los estudiantes procesos de pensamiento más allá de los algoritmos o la simple memorización o tareas rutinarias que fueron transformadas, a través de una aproximación inquisitiva, en actividades no rutinarias; por otro lado, el uso de recursos tecnológicos como software dinámico para la representación de los datos y formulación de conjeturas es evidente. Sin embargo, no se hace explícito qué principios de la resolución de problemas y el uso de la tecnología fueron empleados para su diseño, ni cómo fueron utilizados.

En algunas actividades se da a conocer el enunciado de la tarea y se solicita al estudiante que interactúe con el software realizando una construcción que represente los datos del problema. En otras, se le proporcionan al estudiante instrucciones precisas de los pasos a seguir para desarrollar alguna construcción, y luego se le indica de qué forma debe interactuar con la misma, esperando que visualice invariantes, relaciones entre los datos e incógnitas. En otro caso, se le entrega al estudiante un archivo con la construcción previamente realizada y se dan instrucciones para que él la manipule.

¿Qué criterio se podría utilizar para decidir si hay que proporcionar al estudiante total libertad para representar la información del problema por medio del software; o si es necesario darle instrucciones precisas para elaborar una construcción, o entregarle un archivo con una representación ya elaborada? Se considera que esto dependerá en gran medida del objetivo de aprendizaje que se persigue. Hay problemas en los que la representación de los datos es punto de partida para que el resolutor empiece a relacionar información y elaborar conjeturas; en otros casos, la construcción puede ser compleja o demasiado elaborada y su desarrollo no apoya la articulación de conceptos matemáticos. Sin embargo, en las actividades presentadas, no se hace explícito el objetivo de aprendizaje que persigue cada tarea, ni cómo se utilizó dicho objetivo para el diseño de la misma.

En los reportes de investigación, se menciona como parte de la metodología, que los estudiantes tuvieron sesiones previas de entrenamiento para familiarizarse con el uso del software o para discutir conceptos matemáticos o propiedades de objetos geométricos que eran importantes dominar antes de plantearles la actividad o tarea por resolver. También se hace énfasis en el perfil, características y número de participantes, así como las condiciones del lugar de instrucción, por ejemplo aula con equipos de cómputo, calculadoras, software dinámico o de otro tipo y cañón proyector. En este sentido, se le da gran importancia al escenario de instrucción, aunque no se discuten abiertamente los criterios a seguir para organizar dicho escenario. Tampoco se analizan explícitamente los pre-requisitos matemáticos o informáticos necesarios para que el estudiante pueda abordar las actividades.

Es evidente, por lo que se menciona en todos los reportes, la importancia que juega el profesor durante el desarrollo de las tareas de aprendizaje, desde la manera en que presenta la actividad; y como organiza la dinámica de trabajo de los estudiantes, en ocasiones de forma individual y en otras en pequeños grupos; promoviendo intercambio de ideas y discusiones en torno a la actividad; así como interrogando a los estudiantes para orientarlos hacia una ruta de solución que involucre el logro de los objetivos de aprendizaje, aunque no se específica qué criterios se siguieron para organizar el trabajo de los estudiantes.

En todas las actividades se busca que el estudiante formule conjeturas al interactuar con el software, y observe invariantes en alguna construcción que represente los datos del problema; se espera también que el enunciado de la actividad le permita expresar bajo diferentes registros de representación (geométrico, algebraico y numérico), la información contenida en el problema (datos, incógnitas y relaciones entre éstos) y que además, existan diversos métodos de solución. En este sentido, se le da gran importancia a los elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo de aprendizaje, se espera que la resolución de la tarea de aprendizaje, parta de los conocimientos previos del estudiante y le provea de elementos para que desarrolle nuevos conceptos que se articulen con los ya existentes en su red conceptual (Barrera, 2008), pero se omite realizar una descripción detallada de cómo se espera que los elementos de la tarea conecten el conocimiento ya existente para crear nuevos conceptos matemáticos.

Se hace énfasis en la importancia que tiene para el aprendizaje de las matemáticas, que el estudiante pueda justificar sus resultados o conclusiones, es decir, que el software no sea usado únicamente como herramienta de validación, darle este uso al software puede ocasionar algunos resultados desfavorables para la formación matemática de los estudiantes (Benítez, 2005). Los estudiantes deben sentir la necesidad de hacer una prueba formal de las conjeturas que logren formular en su interacción con el software. También se espera que el estudiante amplíe, reformule el problema o enuncie nuevos problemas en torno al inicial, pero no se especifica cómo se espera que el software dinámico propicie en los estudiantes la formulación de conjeturas, o cómo interacción con las herramientas de medición y arrastre se relaciona con la construcción de una prueba formal, ni cómo reformulará o enunciará nuevos problemas, al resolver la tarea de aprendizaje.

Con base en lo anterior, se considera que este trabajo puede ofrecer información que permita complementar los resultados de las investigaciones previas, se espera que con la identificación de algunos principios teóricos para el diseño de tareas de aprendizaje, se pueda incidir en el currículo de matemáticas de nivel bachillerato, al tener que ajustar los contenidos al tipo de tareas que se pueden diseñar con características comunes a la resolución de problemas y el uso de la tecnología; también se espera que al identificar algunas características y elementos de las tareas de aprendizaje, se pueda sugerir algunos elementos del perfil del profesor de matemáticas, que oriente a una capacitación adecuada, en función a las tareas que debe ser capaz de diseñar para estructurar rutas de aprendizaje.

1.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Debido a la reciente incorporación de laboratorios de cómputo y aulas interactivas en las escuelas de nivel medio superior y superior, la aparición de software especializado para la enseñanza de las matemáticas, la incorporación de las tecnologías de la información y comunicación en el currículo; es pertinente discutir sobre el tipo y las características de las tareas de aprendizaje que los profesores de matemáticas deberán diseñar, para incorporarlas de forma sistemática a su práctica, sin reducir el uso de la tecnología al de agilizar procesos que con papel y lápiz son tediosos y tardados, o considerar que con el hecho de sentar al estudiante frente a una computadora y proponerle problemas éste construirá de forma automática conocimiento matemático.

> Los docentes deberían utilizar la tecnología con el fin de mejorar las oportunidades de aprendizaje de sus alumnos, seleccionando o creando tareas matemáticas que aprovechen lo que la tecnología puede hacer bien y eficientemente (graficar, visualizar, calcular). (NCTM, 2008, p. 1)

El profesor, a final de cuentas, es quien debe diseñar las tareas de aprendizaje que pondrá en práctica en el salón de clases, de él dependerá el uso adecuado de la tecnología para lograr el objetivo de aprendizaje y fomentar en los estudiantes elementos del pensamiento matemático.

> […] la tecnología no sustituye la labor del profesor, ya que parte de su labor consiste en tomar la decisión sobre cuándo y cómo aplicar la tecnología; examinar los procesos seguidos de los alumnos; prestarles ayuda cuando el camino de solución no es correcto o cuando la observación que realiza no es del todo adecuada. (Gamboa, 2007, p. 18)

En este contexto, el problema de investigación consiste en determinar algunos de los principios teóricos que se deben tomar en cuenta al diseñar tareas de aprendizaje matemático que valoren el uso de las tecnologías digitales, de forma tal que a través del desarrollo de las actividades propuestas, un estudiante logre un objetivo de aprendizaje particular, considerando que:

(i) El aprendizaje de las matemáticas involucra el desarrollo de cierta disposición de los estudiantes para explorar e investigar relaciones matemáticas, emplear diversas formas de representación al analizar fenómenos particulares, usar distintos tipos de argumentos y comunicar resultados (lo que en este trabajo se considera una forma matemática de pensar).

(ii) Aprender matemáticas es un proceso continuo que se ve favorecido en un ambiente de resolución de problemas (Schoenfeld, 1998), y dónde los estudiantes tienen oportunidad de desarrollar formas de pensar consistentes con el quehacer de la disciplina. Resulta relevante que los estudiantes formulen preguntas al intentar comprender ideas matemáticas. (Sepúlveda y Santos, 2006)

(iii) Entendemos algo, cuando podemos ver cómo este algo se relaciona con otras cosas que conocemos (Hiebert, et al., 1997). Es decir, el entendimiento de los contenidos matemáticos implica la construcción de redes conceptuales robustas.

> Por una red conceptual se entiende la forma en la cual los conceptos matemáticos se encuentran estructurados en la mente de un estudiante. Se considera que la red conceptual de un estudiante es robusta, si el estudiante es capaz de establecer conexiones múltiples entre los conceptos matemáticos presentes en su red conceptual. La idea anterior de una red conceptual robusta se basa en el constructo de aprendizaje con entendimiento propuesto por Hiebert et al. (1997) (ver Barrera y Reyes, en revisión).

1.4 OBJETIVOS

Objetivo General. Identificar algunos principios y bases teóricas que pueden utilizarse en el diseño de tareas de aprendizaje matemático que permitan a los estudiantes de matemáticas de bachillerato estructurar redes conceptuales robustas.

Objetivos específicos

(i) Identificar los elementos y características de aquellas tareas de aprendizaje que favorecen los elementos del pensar matemáticamente al introducir el uso de herramientas digitales (en particular software dinámico) en su solución.

(ii) Documentar y contrastar las estrategias, formas de representación, conjeturas y argumentos que exhiben los estudiantes al resolver tareas de aprendizaje, respecto a las rutas hipotéticas planteadas por el profesor.

(iii) Identificar el papel que debe jugar el profesor en el diseño y puesta en escena de las tareas de aprendizaje con los estudiantes.

1.5 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Las preguntas que guían esta investigación están orientadas hacia lo que se considera son los elementos que debe contener una tarea de aprendizaje matemático y están relacionadas con los objetivos presentados en la sección previa. En la determinación de las mismas se siguió la recomendación de pocas preguntas enfocadas al estudio de ideas concretas (Álvarez-Gayou, 2005; Fernandez, 2006; Miles y Huberman, 1994).

1. ¿Cuáles son las bases y principios teóricos dentro del marco de resolución de problemas que pueden orientar el diseño de actividades de aprendizaje, en particular de las que promueven la construcción de conocimiento matemático con entendimiento, apoyada en el uso de herramientas digitales?

Estamos interesados en identificar los principios de la resolución de problemas y del uso de la tecnología que se deben emplear al diseñar tareas de aprendizaje matemático, y la forma en que estos deben ser utilizados por los profesores para diseñar sus propias tareas, en particular, interesa establecer algunas pautas que permitan a los profesores, diseñar tareas de aprendizaje que les permitan a los estudiantes visualizar a la matemática como una ciencia experimental, al interactuar con ayuda del software dinámico en la elaboración de conjeturas, que le permita establecer conexiones con sus conocimientos previos no sólo dentro de la disciplina, sino también con otras áreas del conocimiento.

2. ¿Qué clase de transformaciones del currículo implica la introducción de este tipo de actividades en el aula de matemáticas?

El objetivo de esta pregunta es proponer modificaciones o cambios pertinentes en el currículo de matemáticas, acordes al tipo de tareas de aprendizaje que se deben diseñar e implementar, para fomentar entre los estudiantes la construcción de conocimiento matemático, en particular nos interesa proponer cambios respecto a la cantidad de contenidos temáticos que se pretende abordar en los distintos cursos de matemáticos a nivel bachillerato, que al parecer no favorece el aprendizaje con entendimiento, ya que la gran cantidad de temas que el profesor debe cubrir, puede ser un impedimento para que discuta a profundidad aspectos de interés con sus estudiantes respecto a las actividades que resuelven, al tener que preocuparse más por el avance programático que el currículo le señala.

3. ¿Qué características deben tener los diseñadores de tareas de aprendizaje matemático en las que se valora el uso de la tecnología?

Al tratar de responder a esta pregunta, se pretende sugerir algunos elementos del perfil del profesor de matemáticas de bachillerato, para que pueda diseñar tareas de aprendizaje que promuevan el pensamiento matemático de los estudiantes al incorporar sistemáticamente el uso de herramientas digitales para su solución, al igual que orientar posibles líneas de acción en cuanto a su formación y capacitación, nos interesa en particular tratar de incidir sobre los contenidos de cursos de capacitación y actualización que constantemente reciben los profesores de matemáticas, pero que en su mayoría están enfocados en aspectos generales de la didáctica y propuestas de enseñanza basados en el llamado constructivismo y educación por competencias. Se espera que este trabajo proporcione elementos sobre la importancia que tiene el diseño de las tareas para el aprendizaje de las matemáticas, y por lo tanto, la importancia que tiene para los profesores de matemáticas, contar con algunos elementos teóricos y prácticos para llevar a cabo tal fin.

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

2.1 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se describen los elementos teóricos que guían el trabajo de investigación, la manera en que éstos intervienen en el diseño de las tareas de aprendizaje y en el análisis de la información obtenida al implementarlas un grupo de estudiantes de los primeros semestres de licenciatura.

Lester (2005), sostiene que la importancia de elegir adecuadamente un marco de investigación, radica en que este ayuda a determinar: (a) la naturaleza de las preguntas de investigación; (b) la manera en que las preguntas son formuladas; (c) cómo se definen los conceptos y los procesos de la investigación, y (d) los principios de descubrimiento y de justificación. Asimismo, distingue tres tipos de marcos de investigación: (i) marcos teóricos, que se basan en teorías formales; (ii) marcos prácticos, que se basan en conocimiento práctico acumulado por el sujeto, descubrimientos de investigaciones previas y visiones de la opinión pública; y (iii) marcos conceptuales, que son vistos como argumentos en los cuales los conceptos elegidos para la investigación y sus relaciones se juzgan como apropiadas para sustentar un problema de investigación.

En este sentido, se decidió utilizar un marco conceptual, con la finalidad de hacer uso de conceptos de tres diferentes perspectivas teóricas (resolución de problemas, uso de herramientas digitales y demanda cognitiva) tanto para el diseño de las tareas de aprendizaje matemático, como para explicar los resultados de la investigación. El marco así construido proveerá de una estructura para dar sentido a los datos recolectados en la fase de trabajo de campo, para ir más allá del sentido común y ayudar a comprender el fenómeno que se estudia.

> La práctica de realizar investigación en educación matemática involucra un conjunto de conocimientos (incluyendo perspectivas teóricas), habilidades, formas de razonar, usos de herramientas y métodos de investigación que guían al investigador en la búsqueda y comprensión de relaciones alrededor del aprendizaje de los estudiantes. (Barrera, 2008, p.6)

En primer lugar se eligió la perspectiva de resolución de problemas ya que proporciona elementos para responder a preguntas tales como: ¿qué significa aprender matemáticas?, y ¿qué significa pensar matemáticamente? Una idea importante en resolución de problemas es que el aprendizaje de las matemáticas involucra el desarrollo de una disposición para explorar e investigar relaciones matemáticas, emplear distintas formas de representación al analizar fenómenos, usar distintos tipos de argumentos y comunicar resultados (Barrera, 2008). Es decir, que el estudiante use estrategias utilizadas comúnmente por los matemáticos al resolver problemas (Santos-Trigo, 2007).

Al elegir a la resolución de problemas como elemento del marco conceptual, se pretende fundamentar el diseño de tareas de aprendizaje en un conjunto de principios que promuevan en los estudiantes la construcción de conocimiento matemático con entendimiento. Por otra parte, ya que el uso de las tecnologías digitales es un elemento que influye en el proceso de aprendizaje es necesario integrar construcciones teóricas que ayuden a prever el efecto del uso de estas tecnologías sobre la actividad de los estudiantes y los procesos cognitivos que pueden desarrollar durante la adquisición de comprensión conceptual. Por ejemplo, el uso de una herramienta computacional no solo hace más potentes algunas heurísticas (estrategias de resolución de problemas), sino que también demanda del estudiante mayores niveles de razonamiento (Barrera, 2008). El tercer elemento que se incorpora al marco conceptual, es el constructo de la demanda cognitiva de las tareas de aprendizaje matemático, el cual se incluye porque es un aspecto fundamental para que el estudiante logre el objetivo u objetivos de aprendizaje (construya conocimiento matemático a través de su actuar sobre la tarea).

> La demanda cognitiva se refiere a los tipos de pensamiento propuestos por el profesor durante la fase de diseño (de la tarea) y el proceso de pensamiento en el que los estudiantes se involucran en la fase de ejecución de las tareas de aprendizaje matemático. (Stein y Smith, 1996; citados por Bayazit, 2006)

Antes de discutir cuáles son los principios que sustentan el diseño de las tareas de aprendizaje, desde las perspectivas elegidas (resolución de problemas, uso de la tecnología y demanda cognitiva), se establece lo que se entiende por una tarea de aprendizaje matemático, asimismo se explican sus elementos y características.

2.2 LAS TAREAS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

¿Por qué es importante la selección y el diseño de tareas para el aprendizaje de las matemáticas? ¿Qué características y elementos deben contener? Stein y Smith. (1996; citado en Bayazit, 2006), consideran una tarea matemática como una actividad de clase cuyo propósito es centrar la atención del estudiante en una idea matemática particular o habilidad. Para estos autores, diferentes tareas implican diferentes niveles de demanda cognitiva. En este sentido, es importante reconocer que las tareas de aprendizaje son un medio para proveer a los estudiantes elementos que les permitan pensar matemáticamente, y además pueden ser un punto de partida para realizar exploraciones e investigaciones que orienten la construcción de conceptos matemáticos.

> […] es importante justificar la elección de las tareas matemáticas usadas en una investigación, no sólo en términos de los objetivos generales y un marco teórico de investigación, sino en términos de características específicas de la tarea. (Sierpinska, 2004, citado por Barrera, 2008, p.19).

Desde la perspectiva de algunos investigadores, las tareas de aprendizaje en matemáticas son importantes por tres razones: (i) la instrucción en clase, por lo general, es organizada y dirigida alrededor de las tareas matemáticas, (ii) las tareas en que los estudiantes se involucran determinan lo que aprenden y cómo lo aprenden y (iii) las tareas son un medio para que los investigadores realicen estudios y propongan la formulación y organización de planes curriculares. (Stein, Remillard y Smith, 2007). Para los fines que se persiguen en esta investigación, se considera que una tarea de aprendizaje matemático consta de los siguientes elementos:

(i) *Objetivo de aprendizaje*: Es el enunciado en que se establecen los elementos conceptuales que deberán ser desarrollados y articulados por el estudiante durante la ejecución de la tarea.

(ii) *Elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo de aprendizaje*: Parte de estos elementos son los datos o la información con la que se cuenta para tratar de resolver la tarea, la(s) incógnita(s), la relación entre datos e incógnitas, así como los conceptos matemáticos que el estudiante ya conoce y deberá articular en su red conceptual para generar nuevos conceptos.

(iii) *Escenario para desarrollar la tarea*: Se considera que los escenarios en los que se llevan a cabo las tareas de aprendizaje deben constar de tres componentes esenciales: el lugar para desarrollar la tarea, el cual debe incluir la infraestructura y equipo necesario; la organización de los estudiantes para ejecutar la tarea (individual o en equipo); y el tiempo disponible para la ejecución de la tarea.

Al respecto, es conveniente mencionar que la teoría de situaciones didácticas (TSD), desarrollada por Guy Brousseau, se incluye un elemento parecido al escenario para desarrollar la tarea, denominado milieu.

> Del milieu forman parte los objetos materiales o simbólicos mediante los cuales se va a organizar la interacción con un saber (constituido o en vías de constitución); otros alumnos pueden formar parte del milieu. […] Las interacciones entre el alumno y el milieu se describen a través del concepto teórico de situación a-didáctica, que explica la producción de conocimiento por parte del alumno, de manera independiente de la interacción con el profesor. (Brousseau, 2007, pp.17-18)

Algunos elementos similares entre ambos constructos son los objetos materiales como parte del escenario o medio (incluido equipo de cómputo o calculadoras), sin embargo se debe resaltar que otro tipo de elementos, por ejemplo, los conocimientos previos, que bajo nuestra perspectiva no están incorporados dentro del escenario, sino en los elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo de aprendizaje; por otro lado, el tiempo del que se dispone para realizar la tarea, no es un elemento que se mencione como parte del milieu, y desde el enfoque de este trabajo, el tiempo para ejecutar la tarea es uno de los elementos del escenario. Otra diferencia a resaltar es que las interacciones del estudiante con el milieu en la TSD se observan independientemente de las acciones del profesor; bajo el enfoque de este trabajo, la función del profesor durante la fase de ejecución de las tareas de aprendizaje, se considera un elemento más de la tarea.

(iv) *Proceso inquisitivo*: Es la formulación de preguntas o dilemas que se le presentan al resolutor, las cuales lo conducirán a la articulación de los elementos matemáticos puestos en juego y que lo guiarán a la consecución del objetivo planteado. (Barrera, 2008)

Es conveniente considerar también como parte de la tarea de aprendizaje, el enunciado del problema, a partir del cual se inicia el trabajo con los estudiantes, además de la función del profesor durante el desarrollo de la actividad. ¿De qué depende la estructura que debe tener el enunciado de un problema? en buena parte del objetivo de aprendizaje que se persigue y del interés que se tenga por producir entre los estudiantes episodios de intercambio de opiniones, discusión y debate sobre los aspectos centrales a indagar en la actividad. También depende de la fuente de la cual provenga, ya que si el enunciado proviene de libros de textos convencionales, la actividad pudiera parecer rutinaria, pero la mayoría de éstas se pueden transformar en problemas no rutinarios a través de un proceso inquisitivo (Santos y Benítez, 2003).

¿Cuáles son las fuentes a las que el profesor puede recurrir para diseñar actividades de aprendizaje matemático? Como ya se mencionó, los libros de texto son una fuente importante para desarrollar tareas de aprendizaje, ajustándolas de tal forma que demanden de los estudiantes procesos inherentes al quehacer matemático.

Los enunciados de los problemas varían en cuanto a contexto, se pueden clasificar en tres categorías: contexto puramente matemático, hipotético o del mundo real. ¿Qué criterio seguir para decidir si la actividad se debe plantear en uno u otro contexto? Barrera y Santos (2002) consideran que no importa si el contexto es puramente matemático, de la vida real o hipotético, el estudiante tiene que acceder a una serie de recursos matemáticos y estrategias que le permitan analizar sistemáticamente el comportamiento de ciertos parámetros, mencionan también que sea cual sea el contexto elegido para la actividad, en los tres casos es importante plantear conjeturas, utilizar diferentes representaciones, plantear argumentos, comunicar e interpretar resultados. De lo anterior, se concluye que las tareas de aprendizaje matemático pueden ser diseñadas con base en problemas o enunciados que partan de cualquier contexto, lo primordial es que dicha tarea demande de los estudiantes comportamientos y planteamientos de estrategias como los ya mencionados. En los siguientes apartados, se explica qué principios de cada perspectiva teórica que integra el marco conceptual se utilizan en esta investigación, así como la forma en que los mismos se incorporan en el diseño de las tareas de aprendizaje matemático, y su utilidad en el proceso de análisis de la información recolectada en la fase de trabajo de campo.

2.3 ALGUNOS PRINCIPIOS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Estudios basados en aproximaciones de resolución de problemas (Schoenfeld, 1992, 1994; citado en Barrera, 2008) enfatizan la importancia de que los estudiantes desarrollen recursos y estrategias para pensar matemáticamente. Aquí las actividades de resolución de problemas son cruciales para que el estudiante aprenda y construya conocimiento matemático. Algunos principios asociados con la resolución de problemas que se consideran en este trabajo son:

(i) En el aprendizaje a través de la resolución de problemas se pone énfasis en los procesos de pensamientos, no en el resultado.

(ii) En la resolución de problemas se favorece la autonomía del estudiante en cuanto al proceso de solución y el reconocimiento de múltiples soluciones de un problema.

(iii) Las actividades se ligan tanto con habilidades que capacitan para el uso de herramientas y procedimientos basados en rutinas, como en la aplicación de principios o criterios que orientan un entendimiento conceptual.

(iv) La resolución de problemas matemáticos debe facilitar el abordar a las actividades de una manera reflexiva y metódica y con una disposición crítica.

(v) En el aprendizaje basado en la resolución de problemas se busca conectar y aplicar los nuevos aprendizajes con las matemáticas que se conocen y se conocerán. (Adaptado de Villalobos, 2008)

(vi) El papel del profesor en la resolución de problemas, es ayudar al estudiante, pero esa ayuda, no tiene que ser ni mucha, ni poca. La ayuda que da el profesor debe ser la suficiente y necesaria, el profesor debe constantemente ponerse en el papel del estudiante. (Polya, 1996/1945)

Algunas de las características con que deben contar las tareas de aprendizaje propuestas bajo un enfoque de resolución de problemas son:

(i) Ser no rutinarias, demandar del resolutor más que sólo el uso de procedimientos algorítmicos y memorísticos.

(ii) Tener más de una forma de resolverse (numérica, algebraica, geométrica).

(iii) Promover y facilitar la experimentación, así como la elaboración de conjeturas.

(iv) Motivar al resolutor a quererlas resolver.

(v) Promover la discusión y comunicación de ideas y estrategias para su solución.

(vi) Ser factibles de modificarse, por ejemplo al variar sus condiciones iniciales.

(vii) Conectarse con conocimientos matemáticos que ya existen en la red conceptual del estudiante.

(viii) Conectar distintas áreas de las matemáticas u otras áreas del conocimiento.

(ix) Promover la construcción de redes conceptuales robustas.

2.4 USO DE LAS TECNOLOGÍAS DIGITALES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

¿Cómo pueden influir las herramientas computacionales en el desarrollo de un pensamiento matemático? ¿Qué ajustes se deben hacer al diseño de tareas de aprendizaje matemático enmarcadas en resolución de problemas, cuando se introduce el uso de estas herramientas? El uso de las tecnologías digitales facilita la organización y el análisis de datos durante el proceso de resolver problemas, por lo que si los estudiantes disponen de estas herramientas pueden enfocar su atención en procesos claves del pensar matemáticamente como la toma de decisiones, la reflexión matemática y el razonamiento, más que en la realización de procedimientos rutinarios (Santos-Trigo, 2001). Estas herramientas también pueden proporcionar apoyo para desarrollar fluidez conceptual, para explorar ideas matemáticas, promover el auto-aprendizaje (Borchelth, 2007), identificar e implementar heurísticas, ampliar el repertorio de éstas, e incrementar su campo de aplicabilidad (Santos-Trigo, 2008).

> Un aspecto muy importante del uso de la tecnología como apoyo para el aprendizaje de las matemáticas, es que proporciona retroalimentación inmediata, lo que permite al alumno descubrir sus errores, analizarlos y corregirlos. En estos ambientes el error ya no es algo que hay que esconder, se vuelve más bien un medio para profundizar en el aprendizaje. (Ursini, 2006, p.25)

Por otra parte, los profesores de matemáticas que utilicen recursos tecnológicos para impartir sus lecciones deben identificar el tipo de razonamiento que los estudiantes pueden desarrollar al interactuar con tareas en las que se promueva el uso de algunas herramientas digitales (Imaz y Santos-Trigo, 2007), ya que el tipo de problema y la tecnología que se utilice para resolverlo (representación mental, dibujo a mano alzada, regla y compás o software) resalta algunos elementos del problema y suprime otros, por lo cual el profesor debe tener claro cuál es el objetivo de aprendizaje, y así elegir adecuadamente el tipo de tecnología o tecnologías que puede utilizar el estudiante (Goldenberg, 2000).

En resumen, durante el diseño de tareas de aprendizaje es fundamental: (a) elegir adecuadamente el problema en torno al cual se diseñará la tarea de aprendizaje, (b) definir con claridad el objetivo de aprendizaje que se persigue con la ejecución de la actividad, (c) identificar los elementos matemáticos en torno al objetivo, y (d) considerar los recursos disponibles para resolverla. Es de suma importancia que el profesor reflexione sobre la utilización de herramientas digitales en el diseño y ejecución de las tareas, pues de hacerlo, debe asumir como parte de su rol, adecuar el escenario de instrucción y los recursos disponibles, para el logro de los objetivos de aprendizaje planteados. En la medida en que se elija adecuadamente un enunciado o problema para diseñar una tarea de aprendizaje y las herramientas digitales que se utilizarán para abordarla, se puede propiciar en los estudiantes el desarrollo de episodios en los que muestren elementos que caracterizan al pensar matemáticamente (identificar datos e incógnitas, representar la información en diferentes registros, identificar patrones, elaborar conjeturas, implementar y ejecutar estrategias de solución, discutir sus estrategias, comunicar resultados).

2.5 DEMANDA COGNITIVA DE LAS TAREAS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Stein et al., (2007) desarrollaron un marco teórico para medir el nivel de demanda cognitiva de las tareas matemáticas, clasifican las tareas con base en dos niveles de demanda: (i) bajo nivel de demanda, el cual incluye a la memorización y a la realización de procedimientos sin conexión y (ii) alto nivel de demanda, el cual se observa en la realización de procedimientos con conexión y al *hacer matemáticas*[4].

Las "tareas de memorización" que no requieren ni siquiera de un procedimiento algorítmico, son contestadas al instante, por ejemplo preguntar al estudiante ¿a qué decimal y porcentual equivale la fracción $\frac{1}{2}$? Los "procedimientos sin conexión", exigen del resolutor a lo más el uso de algoritmos, por ejemplo solicitar al estudiante que convierta la fracción $\frac{3}{8}$ a decimal y porcentual. Por otro lado, las tareas de alta demanda cognitiva denominadas "procedimientos con conexión", además de requerirle al resolutor el uso de algoritmos, le demandará el uso de procedimientos que involucren varios conceptos matemáticos y más de una representación, por ejemplo, solicitar al estudiante que en una

---

[4] Bajo el enfoque de resolución de problemas y del constructo teórico de la demanda cognitiva, hacer matemáticas no se refiere a que los estudiantes hagan investigación en matemáticas a nivel profesional en el salón de clases, ni que descubran o demuestren nuevos teoremas, se refiere a que durante la solución de tareas de aprendizaje, lleven a cabo acciones similares a las que desarrollan los investigadores en matemáticas, acordes a su nivel, al redescubrir un resultado, al probar por primera vez un teorema o la resolver un problema.

cuadrícula de 10x10, represente sombreando la equivalencia decimal y porcentual de la fracción $\frac{3}{5}$. El nivel más alto que puede exigir una tarea de aprendizaje es hacer matemáticas, que demanda del estudiante un pensamiento complejo y no algorítmico, en el que deben explorar y entender la naturaleza de los conceptos matemáticos; requiere por parte del resolutor el uso de aprendizajes previos y la autorregulación de sus procesos, por ejemplo, en una cuadrícula de 4x10, mostrar 6 cuadros sombreados y solicitar al estudiante que determine el porcentaje de área sombreada, la fracción y el decimal que representa.

En este sentido, es importante recalcar la importancia de la función del profesor durante la ejecución de las tareas por parte de los estudiantes, puesto que la tarea puede estar diseñada para que requiera de los estudiantes altos niveles de demanda cognitiva, sin embargo, si el profesor no logra mantener el nivel de demanda, la actividad puede decaer. ¿Qué acciones debe implementar el profesor durante la ejecución de la tarea, para que el nivel de demanda cognitiva no decaiga? ¿Cómo puede intervenir la tecnología computacional en el desarrollo de las tareas para mantener o aumentar el nivel de demanda? Se espera que por medio de un proceso inquisitivo desarrollado por los estudiantes y promovido por el profesor, la demanda cognitiva de la tarea se mantenga, además de que con la introducción de herramientas digitales en el proceso de solución, el nivel de demanda aumente.

Algo que ya se ha mencionado, es que las tareas de aprendizaje deben presentar las matemáticas al estudiante como una disciplina experimental, que le permita hacer matemáticas al interactuar con los problemas que resuelve, se pretende evitar que el estudiante conciba a la disciplina como ciencia terminada, en la que solamente se siguen reglas, procedimientos y algoritmos para resolver problemas. En esta línea de ideas, la resolución de problemas y la incorporación de las tecnologías digitales en clase, puede proporcionar al profesor elementos para diseñar tareas en las que los estudiantes experimenten sus ideas matemáticas. Los problemas “matemáticamente ricos” con alto nivel de demanda cognitiva admiten varias soluciones y representaciones, permiten que el estudiante establezca conexiones entre diferentes conceptos y áreas de las matemáticas y puede ser el punto de partida para la generación de nuevos problemas a través de la generalización, la analogía, entre otros (Kribs, 2009).

Ya se mencionó que la demanda cognitiva de una tarea matemática puede decaer durante la implementación, por lo cual el profesor debe estar atento al desarrollo de la tarea, para promover que el nivel de demanda no se pierda. Stein et al. (2007) sugieren tener en cuenta los procesos asociados con el mantenimiento o disminución de los niveles de demanda, los cuales se resumen en la siguiente tabla:

Procesos asociados con la disminución de la demanda cognitiva	Procesos asociados con el mantenimiento de un alto nivel de demanda cognitiva
(i) Hacer rutinarios aspectos problemáticos de la tarea. (ii) Desviar la atención del significado, conceptos, o la comprensión de la idea central de la actividad. (iii) Proporcionar poco tiempo para entender la tarea, o dar demasiado al grado de que los estudiantes queden a la deriva. (iv) Seleccionar tareas inapropiadas para determinado grupo de estudiantes. (v) Considerar que los estudiantes no son capaces de generar procesos de alto nivel de demanda cognitiva.	(i) Proporcionar un medio por el cual los estudiantes pueden seguir sus propios progresos. (ii) “Presionar” a los estudiantes para que den justificaciones, explicaciones y/o significado a través preguntas y/o comentarios. (iii) Seleccionar tareas que se basan en conocimientos previos del estudiante. (iv) Elaborar dibujos frecuentemente, para buscar conexiones conceptuales. (v) Proporcionar suficiente tiempo para explorar. (Stein et al., 2007, p.351)

2.6 USO DE ALGUNOS PRINCIPIOS EN EL DISEÑO TAREAS DE APRENDIZAJE

Un primer paso para aprender a plantear problemas matemáticos que propicien la investigación matemática independiente de los estudiantes, es replantear problemas de forma sistemática, a partir de un problema base. Otro enfoque para generar nuevos problemas a partir de un problema dado, consiste en modificar algunos de sus atributos, utilizando estrategias tales como: extender el problema, hacer generalizaciones, plantear problemas conversos y probar (Flores, 2008). Algunas sugerencias para la selección de los problemas y el diseño de las tareas de aprendizaje son:

(i) Trabajar con tareas de aprendizaje que consideren los contenidos curriculares y sean adecuadas para el tiempo disponible en el aula.

(ii) Elegir problemas matemáticos vinculados con el nivel educativo y contexto sociocultural de los estudiantes.

(iii) Relacionar los problemas matemáticos con otras situaciones de la vida cotidiana de los estudiantes.

(iv) Insistir en la justificación de los razonamientos presentes durante los procesos de resolución de problemas, a través de diversos medios.

(v) Trabajar con actividades donde los estudiantes deben formular problemas. (Villalobos 2008)

Para diseñar tareas de aprendizaje matemático, enmarcadas en la resolución de problemas, en las cuales se pueda incorporar la tecnología digital como un eje que proporcione a los estudiantes elementos que les permitan experimentar, plantear conjeturas, realizar conexiones en su red conceptual entre lo que ya saben y lo que están por aprender, se puede partir de una situación rutinaria, con base en la cual el profesor debe reflexionar sobre qué preguntas puede hacer a los estudiantes para originar un proceso inquisitivo, así como qué modificaciones puede hacer al enunciado original del problema para que los estudiantes alcancen el objetivo de aprendizaje.

Otro aspecto relevante es que el profesor reflexione sobre los antecedentes con que cuentan sus estudiantes, qué conceptos se supone ya conocen y qué nuevos conceptos y habilidades deben desarrollar, de manera que la tarea de aprendizaje le permita construirlos. Es indispensable que el profesor determine también las características del lugar de instrucción (infraestructura y equipo), para que en un momento dado, pueda adecuarse a la realidad en la cual desempeña su labor docente, además de determinar la organización que deberán tener sus estudiantes para ejecutar la tarea; deberá considerar en qué momento se requiere que los estudiantes trabajen en equipo, para que puedan intercambiar opiniones entre sí y posiblemente darlas a conocer al resto del grupo, también deberá considerar en qué etapa de la resolución de la tarea es conveniente que los estudiantes trabajen de forma individual, o en qué momento hay que implementar una discusión plenaria.

Es importante considerar también cuál es el tiempo adecuado para el desarrollo de la actividad, ya que al igual que la ayuda que el profesor debe dar a los estudiantes, el tiempo no debe ser ni mucho, ni poco; si no se asigna el tiempo necesario, es posible que los estudiantes no alcancen a profundizar en los elementos matemáticos estructurados en torno a la tarea; por el contrario, si el tiempo es demasiado, los estudiantes pueden perder el interés. El profesor debe considerar además en qué momento es necesario incorporar el uso de las herramientas computacionales durante el desarrollo de la tarea, sin que sea estrictamente necesario que esto ocurra desde un inicio; los estudiantes pueden comenzar el trabajo en el ambiente de lápiz y papel, y a medida que avanzan y sea necesario acceder a otras representaciones, que les permitan elaborar conjeturas y posteriormente tratar de justificarlas, se puede introducir el uso de algunas herramientas digitales.

A manera de ejemplo, se describe un problema aparentemente rutinario que puede transformarse en una tarea con un alto nivel de demanda cognitiva. En el curso de Matemáticas II de nivel Bachillerato (Geometría y Trigonometría), los estudiantes abordan contenidos temáticos tales como el cálculo de perímetros y áreas; en el apartado de circunferencia, es común, dado que es un tema que discutido en los niveles de enseñanza previos (primaria y secundaria), que el profesor simplemente recuerde a los estudiantes las expresiones con las cuáles se puede calcular el perímetro y área de una circunferencia, dado el radio como dato. En esta actividad no hay mayor reflexión en torno a los elementos que intervienen en dichas expresiones, por ejemplo el valor del número π. Una posible ruta con un alto nivel de demanda cognitiva, consiste en inscribir polígonos regulares, con un número cada vez mayor de lados en una circunferencia, de los cuáles se pueda calcular el perímetro y área, teniendo como dato el radio de la circunferencia y por este medio obtener las fórmulas para el perímetro y el área. Con base en mi experiencia como profesor de bachillerato, entre los recursos matemáticos necesarios para que los estudiantes aborden esta actividad se encuentran: el Teorema de Pitágoras y el Teorema de Tales, no es necesario que los estudiantes hagan uso de recursos de trigonometría.

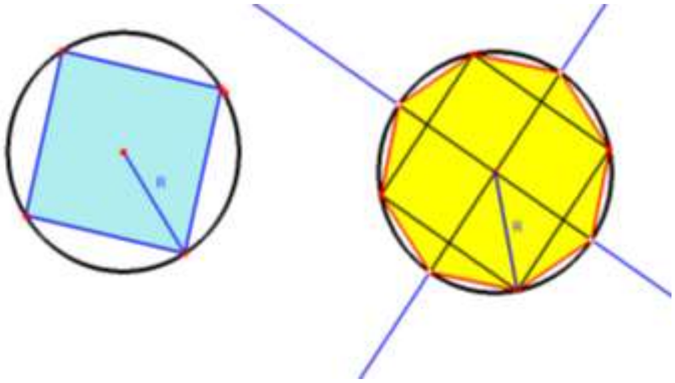


Figura 2.1: Inscribir polígonos regulares para aproximar el área del círculo.

Otro ejemplo de un problema que permite observar el potencial del software dinámico en la elaboración de conjeturas es: Sharon vive a 7 kilómetros de la escuela y Monse vive a 5 kilómetros de la escuela ¿A qué distancia vive Sharon de Monse? Al trabajar en un ambiente de lápiz y papel, los estudiantes pueden concluir que existen dos posibilidades únicamente, que la distancia entre las casas sea de doce kilómetros o de dos kilómetros, dos casos particulares, en los que las casas de Monse y Sharon son colineales.

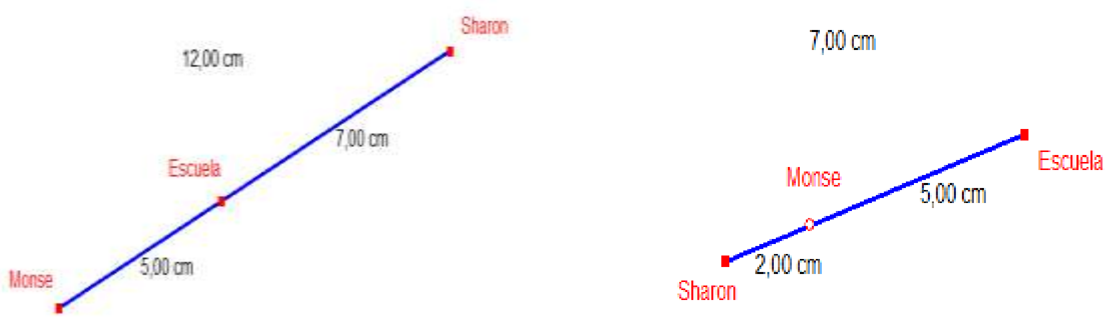


Figura2. 2: Dos casos particulares en los que la solución es la suma o la diferencia de dos distancias.

Al incorporar el uso del software, y elaborar una representación dinámica de la información, los estudiantes pueden conjeturar que las dos posibles soluciones propuestas anteriormente, son únicamente casos particulares de la solución general.

Lo que se pretende mostrar con los ejemplos anteriores, es el potencial que se puede desarrollar con tareas aparentemente rutinarias, al seguir los principios del marco conceptual, descritos en los apartados anteriores. En el siguiente capítulo, como parte de la metodología, se diseñará una tarea de aprendizaje matemático que se ajusta a las características mencionadas en este capítulo.

Se explicará con detalle cómo intervienen los elementos y los principios aquí descritos, para su diseño. Con la implementación de la tarea, se espera obtener datos que permitan analizar cómo se modificaron las heurísticas de resolución de problemas ante la utilización de software dinámico, se espera observar si la demanda cognitiva que la tarea generó en los estudiantes fue la esperada, se pretende identificar si los estudiantes presentaron procesos relacionados con el pensar matemáticamente, y en caso de que no fuera así, tratar de entender qué elementos del diseño de la tarea o del proceso de ejecución, no permitieron que los estudiantes siguieran las rutas de solución propuestas en la fase de diseño

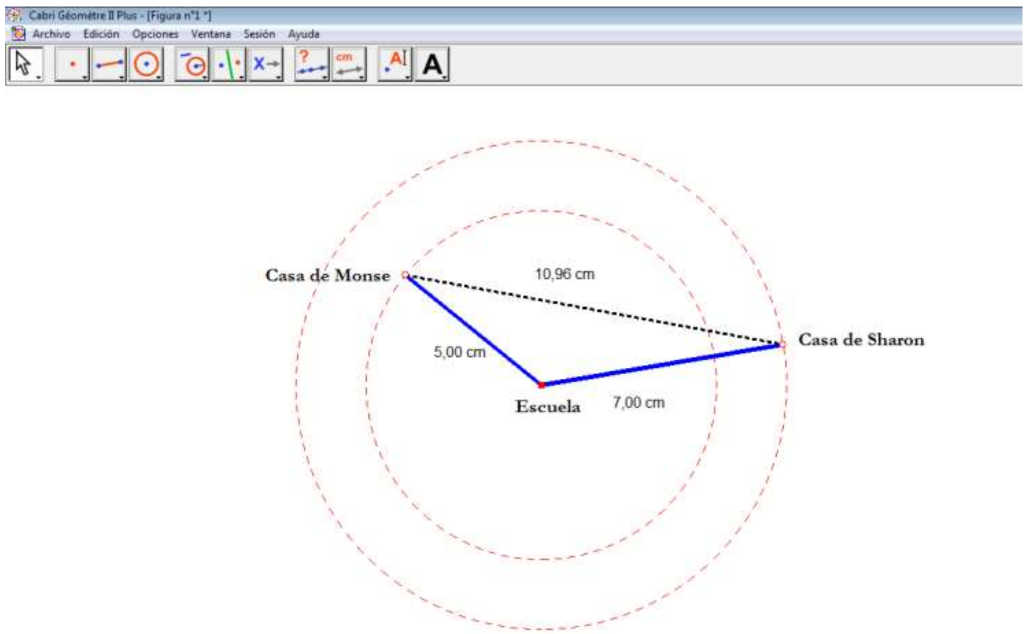


Figura 2.3: Representación dinámica en Cabri Geometry de los datos de la actividad, permite observar rápidamente que las soluciones anteriores son casos particulares.

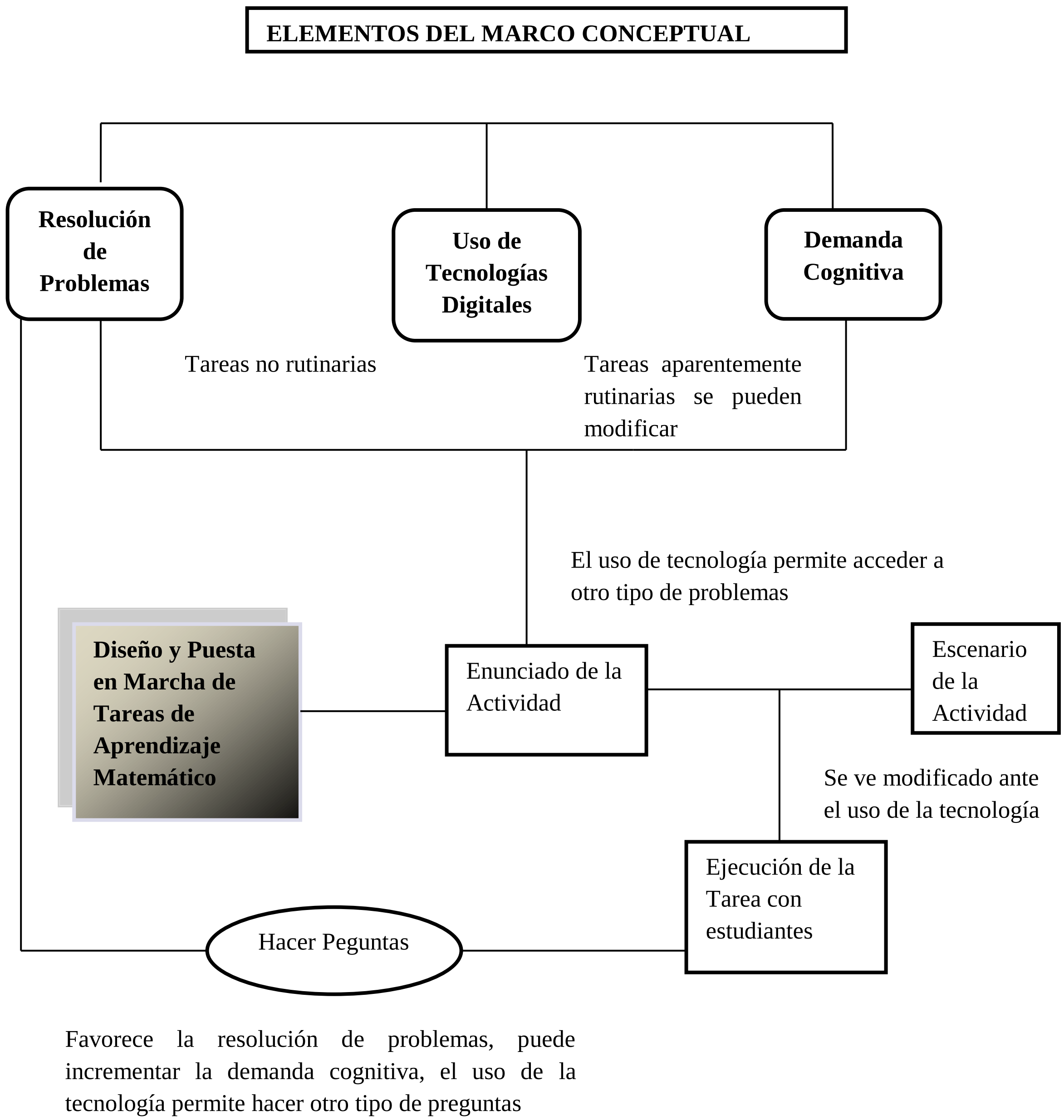


Diagrama 2.1: Muestra la forma que los elementos del marco conceptual inciden en el diseño y puesta en práctica de las tareas de aprendizaje matemático

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1 INTRODUCCIÓN

La investigación de corte cualitativo se utiliza generalmente cuando la fuente o fuentes principales de información con las que cuenta el investigador se presentan en forma de palabras, las cuales describen y pueden utilizarse para explicar fenómenos que se desarrollan en contextos locales. El uso de datos cualitativos permite preservar el flujo cronológico de los eventos, determinar la forma en que diversas variables que influyen en el fenómeno de interés interactúan entre sí, lo cual puede ayudar a refinar las concepciones iniciales del investigador y ser la base para la construcción o revisión de marcos conceptuales. (Álvarez y Gayou, 2005; Denzin y Lincon, 2003).

Algunas características de la investigación cualitativa son: (i) se lleva a cabo a través de una interacción intensa o prolongada con las situaciones "de campo", (ii) el investigador busca obtener una visión *holística*[5] del fenómeno bajo estudio, (iii) el investigador busca obtener datos que ayuden a comprender las acciones de los individuos que intervienen en el fenómeno, (iv) a través del análisis de las palabras se intenta encontrar patrones, relaciones y significados (Miles y Huberman, 1994).

De acuerdo con Goetz y LeCompte (1988), la investigación educativa tiene como finalidad primordial apoyar los procesos de reflexión y crítica, para tratar de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Los objetivos planteados en el primer capítulo de este trabajo, son compatibles con la finalidad de la investigación educativa, dado que entre otras cosas, se persigue identificar los principios que se pueden seguir para el diseño de tareas de aprendizaje, que permitan la construcción del conocimiento matemático en los estudiantes de bachillerato.

Martínez, (2006), menciona que toda investigación de cualquier enfoque que sea, (cualitativo o cuantitativo), tiene dos elementos básicos de actividad: (i) recoger toda la información necesaria y suficiente para alcanzar los objetivos de la investigación o solucionar el problema en cuestión y (ii) estructurar esa información en un todo coherente y lógico. Con base en lo anterior, en este capítulo se pretende exponer la manera en que se desarrollarán estos dos elementos básicos, por un lado la recolección de información y por el otro, el análisis y estructura de los datos obtenidos, para estos propósitos, se ha diseñado una tarea de aprendizaje matemático, que se implementará con un grupo de estudiantes y con la cual se pretende lograr estos propósitos.

Se pretende además, que la tarea diseñada para esta investigación, sirva como punto de partida, para que los profesores interesados en diseñar sus propias tareas o modificar las

[5] Es decir, una visión sistémica, integrada.

que aparecen en los libros de texto o material curricular, lo puedan hacer, al seguir los principios y metodología que aquí se expone, entendiendo por ésta a la manera en cómo se enfoca el problema y el procedimiento mediante el cual se busca darle respuesta (Taylor y Bodgan, citado en Sandoval, 2002). Se debe determinar por tanto, cuál es la metodología más apropiada para este trabajo, que arroje resultados y conclusiones confiables, para que los profesores e investigadores interesados puedan hacer uso de los resultados de la investigación.

A diferencia de los estudios descriptivos, correlacionales o experimentales que buscan determinar la relación de causa y efecto entre dos o más variables, la investigación cualitativa se interesa más en saber cómo ocurren los procesos que originan o dan lugar al fenómeno de interés.

> La palabra cualitativa implica un énfasis en las cualidades de las entidades y en los procesos y los significados que no están examinado experimentalmente o medidos en términos de cantidad, intensidad o frecuencia. Los investigadores cualitativos hacen hincapié en el carácter socialmente construido de la realidad, la íntima relación entre el investigador y lo que se estudia, y de la situación, las limitaciones que la investigación forma. (Denzin y Lincoln, 2003, p. 13)

En el curso de esta investigación, nos interesa entender qué principios puede seguir un profesor al diseñar tareas de aprendizaje matemático que sean útiles en el entendimiento de ideas o conceptos matemáticos, nos interesa además contrastar las diversas representaciones, conjeturas y argumentos que exhiben los estudiantes durante las realizaciones didácticas (implementación de las tareas); con las rutas hipotéticas propuestas por el investigador, además de identificar las funciones del instructor durante la ejecución de la tarea; por ello, se considera que la metodología de este trabajo, debe enmarcarse en el paradigma cualitativo, lo cual no significa dejar de lado los métodos cuantitativos.

Algunas de las principales características de la investigación cualitativa son:

(i) Es cuasi-inductiva; su ruta metodológica se relaciona más con el descubrimiento y el hallazgo que con la comprobación o la verificación.

(ii) Es holística. El investigador ve el escenario y a las personas en una perspectiva de totalidad. Las personas, los escenarios o los grupos no son reducidos a variables, sino considerados como un todo integral.

(iii) Es interactiva y reflexiva. Los investigadores son sensibles a los efectos que ellos mismos causan sobre las personas que son objeto de su estudio.

(iv) Es naturalista y se centra en la lógica interna de la realidad que analiza. Los investigadores cualitativos tratan de comprender a las personas dentro del marco de referencia de ellas mismas.

(v) No impone visiones previas. El investigador cualitativo suspende o se aparta temporalmente de sus propias creencias, perspectivas y predisposiciones.

(vi) Es abierta. No excluye la recolección y el análisis de datos y puntos de vista distintos.

(vii) Para el investigador cualitativo, todas las perspectivas son valiosas. En consecuencia, todos los escenarios y personas son dignos de estudio.

(viii) Es humanista. El investigador cualitativo busca acceder por distintos medios a lo privado o lo personal como experiencias particulares; captado desde las percepciones, concepciones y actuaciones de quien los protagoniza.

(ix) Es rigurosa aunque de un modo distinto al de la investigación denominada cuantitativa.

(x) Los investigadores cualitativos buscan resolver los problemas de validez y de confiabilidad por las vías de la exhaustividad (análisis detallado y profundo) y del consenso intersubjetivo (interpretación y sentidos compartidos). (Taylor y Bodgan, citado en Sandoval, 2002)

En particular, el estudio cualitativo de casos, es la estrategia metodológica que se utiliza en este trabajo. El propósito del estudio de casos como estilo de investigación, consiste en retratar, analizar e interpretar la singularidad de la realidad individual a través de experiencias limitadas, en las que se buscan detalles a profundidad a partir de la observación participante y no participante (Cohen, Manion y Morrison, 2004). El estudio de caso como estrategia de investigación ha sido utilizado en muchas situaciones que han ayudado a generar conocimiento de fenómenos individuales, grupales, políticos entre otros, por lo que no es extraño que se utilice en áreas como la psicología, la sociología, las ciencias políticas, entre otras. En este sentido, es conveniente señalar que el estudio de casos no es una estrategia metodológica exclusiva de la investigación educativa, tampoco se debe confundir con la estrategia de enseñanza conocida como estudio de casos.

> [..] lo que distingue a los estudios de caso es que nacen de la necesidad o deseo de entender un fenómeno social complejo, puesto que permite a los investigadores detectar las características más representativas y holísticas de los eventos y/o fenómenos de la vida real. (Escudero, et al., 2008, p. 8)

3.2 EL PROCESO DE INVESTIGACIÓN CUALITATIVA

Sandoval (2002) menciona que en la investigación cualitativa lo característico es la simultaneidad de prácticamente todos los procesos, por lo que se dice que es “multiciclo”, es decir, que varias veces se pasa por la etapa de formulación, otras tantas por las de diseño o propiamente de rediseño, varias veces se gestionan o ejecutan los procesos de recolección de información y análisis.

> Los instrumentos, al igual que los procedimientos y estrategias a utilizar, las dicta el método escogido, aunque básicamente [en la investigación cualitativa], se centra alrededor de la observación participativa y la entrevista semi-estructurada. (Martínez, 2006, p. 136)

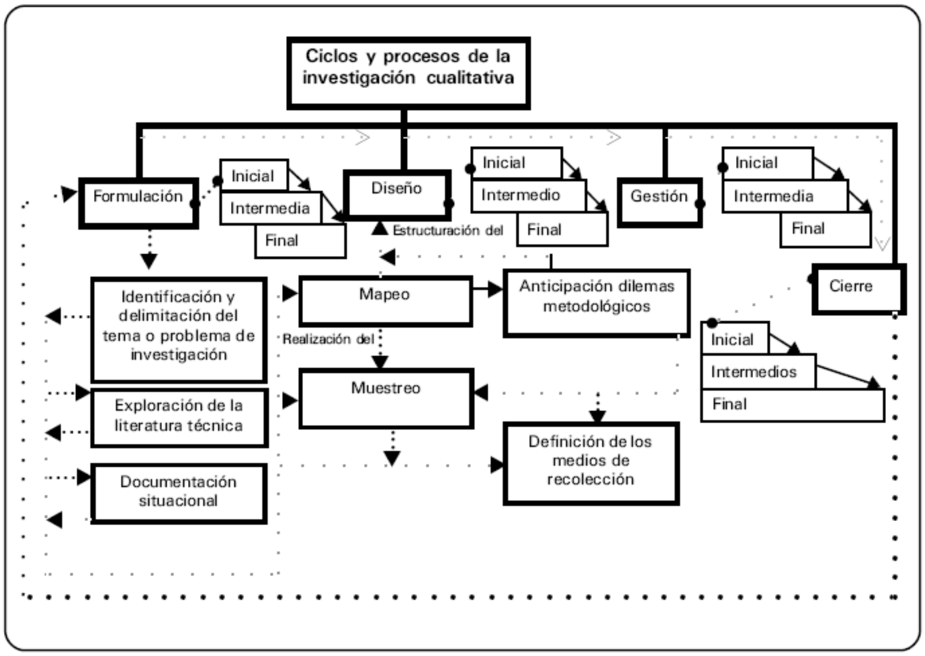


Figura 3. 1: Diagrama que representa el proceso de la investigación cualitativa (Sandoval, 2002, p 114)

3.3 PARTICIPANTES EN LA INVESTIGACIÓN (GRUPO BAJO ESTUDIO)

En el capítulo uno (planteamiento del problema), se incluyó una revisión de la literatura, en la cual se expusieron conclusiones de estudios realizados con estudiantes de bachillerato o primeros semestres de licenciatura, y se mencionó que se espera que la presente investigación pueda ofrecer información que permita complementar los resultados de las investigaciones previas.

Para la fase experimental se diseñó una tarea de aprendizaje matemático que se implementó en dos escenarios distintos: el primero en la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH) con un grupo de doce estudiantes de segundo semestre de la licenciatura en física y tecnología avanzada, cuyas edades estuvieron comprendidas entre los dieciocho y veinticinco años de edad, los estudiantes manifestaron haber cursado las asignaturas de *Matemáticas Superiores y Computación*, y durante el periodo en que se implementó la actividad *Cálculo Diferencial* y *Geometría Analítica*, la mayoría manifestó tener poca experiencia con el uso del software de geometría dinámica Cabri Geometry, aunque en algunas de las asignaturas cursadas hicieron uso de software como Geogebra y Maple.

El segundo escenario para la puesta en marcha de la actividad fue el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) plantel Vallejo de la Ciudad de México, con un grupo de veintiún estudiantes de segundo semestre de bachillerato, sus edades estuvieron comprendidas entre los quince y diecisiete años de edad, como cursos previos únicamente mencionaron Álgebra y Geometría. A diferencia del grupo de universitarios, los estudiantes de bachillerato en su mayoría manifestaron tener experiencia en el uso del software dinámico Cabri Geometry.

La sesión con el grupo de licenciatura tuvo una duración de dos horas, se optó por este tiempo debido a que se esperaba que los participantes tuvieran menos dificultades para desarrollar la tarea que el grupo de bachillerato, con quienes el trabajo se dividió en dos sesiones no continuas de dos horas cada una, con lo que se buscó que los estudiantes, al tener en apariencia menos recursos matemáticos, contaran con mayor tiempo para la reflexión, la discusión y el intercambio de ideas con el instructor que implementó la tarea.

Los resultados del trabajo se refieren al grupo de licenciatura con el fin de contrastar con detalle las rutas de resolución que siguieron los estudiantes durante las realizaciones didácticas, respecto a lo que se tenía previsto en la trayectoria hipotética, así como para analizar si los objetivos de aprendizaje planteados en el diseño de la tarea fueron alcanzados en términos de los principios establecidos en el marco conceptual.

3.4 LA RECOLECCIÓN DE DATOS

En este estudio se recolectó información proveniente de al menos dos fuentes: (i) protocolo para la ejecución de la actividad, el cual incluyó un cuestionario y (ii) grabaciones en video. La realización didáctica de la tarea de aprendizaje fue dirigida por el investigador que presenta este reporte, otros tres investigadores video grabaron las sesiones; se trató de seguir la sesión desde una perspectiva global, al registrar la interacción entre el profesor y el grupo en general, además de tener registros del trabajo individual, así como de la interacción entre los estudiantes durante la fase de trabajo en equipos, cabe mencionar que en general el grupo conformado por estos tres investigadores observó con un enfoque no participativo, pues no se interactuó de forma intensiva con los participantes; en este caso los observadores desempeñaron su papel ajenos a los procesos de instrucción.

Además de los archivos en video, los cuales posteriormente se transcribieron y codificaron, el protocolo de la actividad consistió en instrumento para orientar a los estudiantes durante el desarrollo de la actividad y en la cual anotaron respuestas a algunos cuestionamientos propios de la tarea, por medio de preguntas abiertas. Al final del protocolo aparece una encuesta de salida, también con preguntas abiertas, en la cual se cuestionaron aspectos generales acerca de la opinión que tuvieron los participantes respecto a la actividad. (Para más detalles, consultar Apéndice B).

El proceso de análisis de los datos recolectados consistió en diversas etapas, las cuales incluyen: (i) extraer del grueso de los datos aquellos que tienen relevancia en relación con los objetivos y las preguntas de investigación, (ii) establecer relaciones entre los datos que faciliten la detección o identificación de patrones de comportamiento, la generación de conceptos, proposiciones o modelos para entender el proceso de aprendizaje (González y Cano b, 2010).

3.5 LA TAREA DE APRENDIZAJE

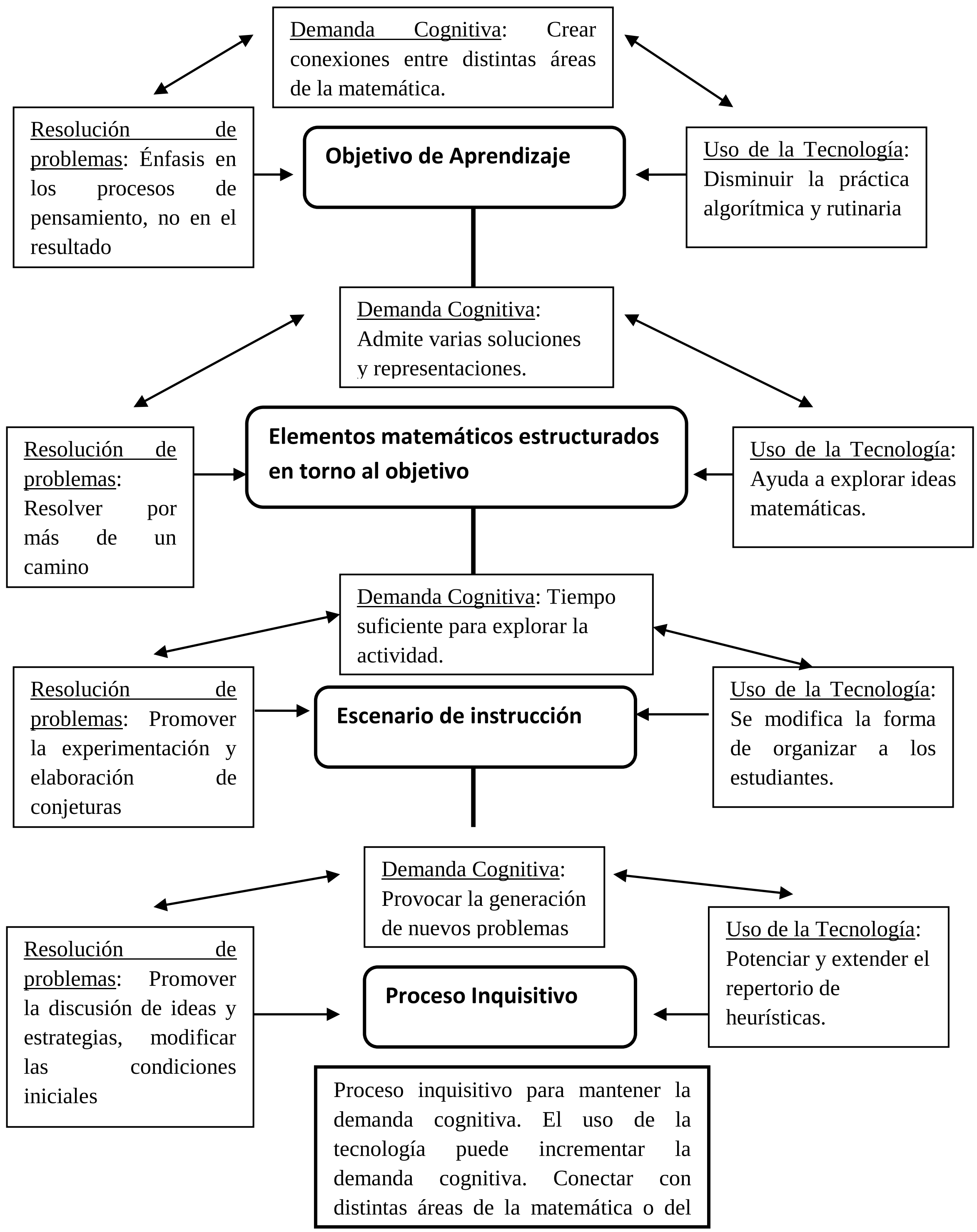


Diagrama 3.1: Elementos que integran las tareas de aprendizaje y principios del marco conceptual utilizados para diseñarlos.

Antecedentes de la tarea

Se optó por diseñar una tarea de aprendizaje en el contexto del mundo real, relacionada con conceptos de geometría y trigonometría, surgida en el área de la mecánica, en particular de la cinemática de los mecanismos. Tras una revisión exhaustiva, se identificó que en el campo de la cinemática de mecanismos, existe un criterio sencillo para verificar que en un mecanismo de cuatro barras articuladas, una de las barras podrá efectuar revoluciones completas con relación a alguna de las otras tres. Este criterio se conoce como *Ley de Grashof* [6] y tiene relación con las propiedades geométricas de los cuadriláteros. La motivación principal para elegir este contexto fue que en la literatura consultada, se enuncia dicho criterio, sin hacer una discusión al respecto de su validez.

Referencias sobre el criterio de Grashof

En la literatura consultada, se menciona que cuando se trata de un eslabonamiento de cuatro barras, existe una prueba muy sencilla para saber si una de las barras puede efectuar revoluciones completas alrededor de alguna de las otras:

> La Ley de Grashof, dada por Harding, establece que la suma de barras más corta y más larga de un mecanismo plano de cuatro barras articuladas, no puede superar la suma de las otras dos barras, cuando entre dos miembros se desea una rotación relativa completa. (Shigley, 1970, p.184)
>
> Una manera de determinar si un mecanismo de cuatro barras va a operar como balancín de manivela, doble manivela o doble balancín consiste en emplear la ley de Grashof. Esta ley señala que si la suma de las longitudes del eslabón más largo y del más corto es menor que la suma de las longitudes de los otros dos, se forman:
>
> 1. Dos balancines de manivela distintos cuando el eslabón más corto es la manivela y cualquiera de los otros dos eslabones es el fijo.
> 2. Una doble manivela cuando el eslabón más corto es el fijo.
> 3. Un doble balancín cuando el eslabón opuesto al más corto es el fijo. (Mabie y Reinholtz, 2004, p.43)
>
> La Ley de Grashof afirma que, para un eslabonamiento plano de cuatro barras, la suma de las longitudes más corta y más larga de los eslabones, no puede ser mayor que la suma de las longitudes de las dos restantes, si se desea que exista una rotación relativa continua entre dos elementos.
>
> Si s y l son las longitudes de los eslabones más corto y más largo respectivamente, p y q son las longitudes de los otros dos:

---

[6] Franz Grashof (1826-1893) Ingeniero mecánico alemán que realizó contribuciones principalmente en las áreas de transferencia de calor, en particular por convección natural; fundamentos de elasticidad y en movilidad de mecanismos de cuatro barras.

> $s + l \leq p + q$
>
> Si no se satisface esta desigualdad, ningún eslabón efectuará una revolución completa con relación a otro. (Shigley y Uicker, 1999, p.19)

En este sentido, como ya mencionó, la aplicación del criterio es relativamente sencilla y se garantiza contar con un mecanismo de cuatro barras articuladas en el que una de estas, pueda hacer giros completos; sin embargo no se discute la validez de este criterio.

Objetivos de Aprendizaje planteados para la tarea

(i) Identificar algunas propiedades geométricas de los triángulos y cuadriláteros.

(ii) Transitar del pensamiento geométrico al aritmético y algebraico.

(iii) Utilizar distintos registros de representación.

(iii) Incorporar algunos recursos de la geometría analítica a la solución de un problema de geometría sintética.

Elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo de aprendizaje

<u>Conocimientos matemáticos previos</u>

(i) La desigualdad del triángulo.

(ii) Relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos y ley de los cosenos.

(iii) Operaciones aritméticas básicas.

(iv) Utilización de lenguaje algebraico.

<u>Conocimientos informáticos previos</u>

Utilización de comandos del software de geometría dinámica Cabri Geometry tales como: segmento, compás, medir longitud, medir ángulo, animación, calculadora, mostrar los ejes y lugar geométrico. Se puede incorporar adicionalmente el uso de una hoja de cálculo como Excel para verificar algunos de los resultados que aparezcan en el software dinámico. Se espera que la interacción del estudiante con el software de geometría dinámica, le permita establecer rápidamente conexiones conceptuales entre las condiciones para poder construir un cuadrilátero, la relación con la desigualdad del triángulo y ley de cosenos, así como observar por medio de la animación el comportamiento que tendría un mecanismo en particular, a partir de las longitudes de sus lados.

Escenario de la tarea.

Se requiere de un aula con pizarrón, pantalla de proyección, equipos de cómputo con software dinámico para cada estudiante y para el profesor, además de cañón proyector. Los estudiantes serán organizados de la siguiente forma: al inicio de la actividad trabajarán de forma individual, seguirán las indicaciones dadas por el profesor, realizarán las construcciones que éste les solicite, para lo cual será indispensable que se utilice el recurso del cañón proyector como guía para los estudiantes. Posteriormente cuando se pasa a la etapa de tratar de argumentar los criterios o condiciones solicitadas en la actividad y las posibles conjeturas surgidas con la interacción entre estudiante-software-profesor, los estudiantes trabajarán en parejas, se espera que el intercambio de ideas les permita justificar las conjeturas que posiblemente fueron planteadas en la etapa inicial. Se dispondrá de una sesión de dos horas para el trabajo propuesto.

Proceso Inquisitivo

Durante la ejecución de la tarea de aprendizaje por parte de los estudiantes, el profesor debe tener especial cuidado en hacer preguntas relevantes que motiven a los estudiantes a trabajar en los aspectos propios de la actividad, a tratar de justificar sus observaciones, a comunicar sus ideas y resultados. Parte de este proceso inquisitivo está destinado además, a mantener el nivel de demanda cognitiva de la tarea, las preguntas que el profesor realice no deben ayudar de más al estudiante, pero deben ser enunciadas para que lo guíen en su trabajo y le permita encontrar las conexiones propuestas en la actividad, siempre enmarcados en el objetivo de aprendizaje. A continuación, se describe la guía de aplicación de la tarea de aprendizaje que se diseñó, se especifican las preguntas que en cada etapa de la tarea el profesor debe plantear y las posibles rutas que se espera que el estudiante siga orientado por dichas preguntas.

Preámbulo de la actividad

Del aritmética se sabe que para todos los números *a* y *b* se tiene que:

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad \text{(Spivak, 1996, pp.13,14)}$$

Este resultado tiene relación con lo que en geometría se conoce como la desigualdad del triángulo, la cual menciona que existe un criterio muy útil para saber si con tres segmentos de recta es posible construir un triángulo, se suman las longitudes de dos lados y el resultado se compara con la longitud del otro,. En general si los lados de un triángulo tienen longitudes *a*, *b* y *c* se debe cumplir que:

$a + b > c$

Este resultado tiene que ver con que sea posible la intersección de dos círculos de radios *a* y *b*, si sus centros están separados una distancia *c*, si se intersectan en dos puntos, se asegura que se puede construir un triángulo de lados *a*, *b* y *c* con área mayor que cero (figura 3.2).

> Dos círculos con centros *O* y *P* con radios *a* y *b*, se intersectan exactamente en dos puntos, si la distancia *c* entre sus centros es menor que la suma de sus radios pero mayor que la diferencia entre ellos. (Hemmerling, 1996, p. 332)

Otra forma de presentar la desigualdad del triángulo es: la diferencia de dos lados de un triángulo es menor que el tercero. (Karelin, Rondero, Tarasenko, 2008, p.51). Es algo casi natural preguntarse: ¿Existe un criterio similar para verificar si dados cuatro segmentos *A*, *B*, *C* y *D* es posible construir un cuadrilátero?

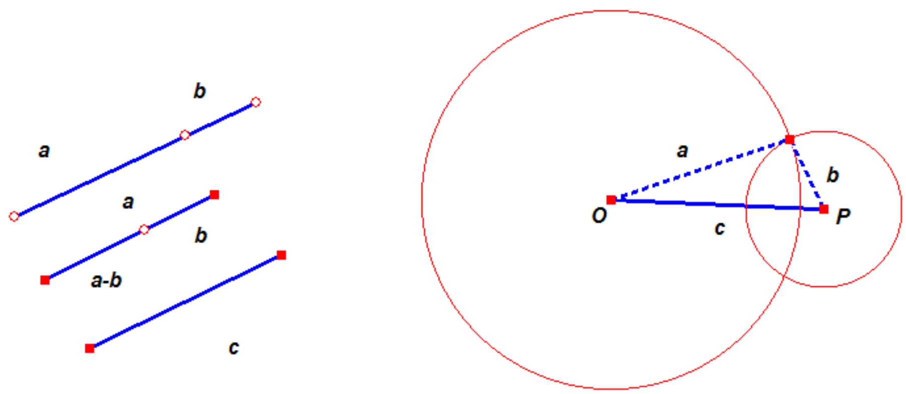


Figura 3.2: Condición para que dos círculos se intersequen en dos puntos, lo cual permite construir un triángulo de lados a, b y c con área distinta de cero. ¿Existe relación con el criterio de la desigualdad del triángulo?

Ruta hipotética de instrucción

Se pide a los estudiantes que construyan con ayuda del software dinámico, un cuadrilátero de lados 5, 7, 8 y 13 centímetros de longitud, se espera que sin mayores dificultades, puedan construirlo. Después de que todos terminen, se pueden comparar los cuadriláteros de cada participante y se puede reflexionar en el hecho de que no basta con conocer las longitudes de los lados de un cuadrilátero para que este quede determinado, pues probablemente cada estudiante construyó un cuadrilátero distinto. También se puede solicitar a los participantes, que con el uso de la herramienta de arrastre, muevan alguno de los vértices, para que observen la familia de cuadriláteros que se genera cuando sólo se establecen las longitudes de los lados (a diferencia de los triángulos, que al especificar la longitud de sus tres lados, quedan determinados).

A continuación los estudiantes deben construir un cuadrilátero de lados 2, 3, 4 y 11 centímetros de longitud ¿pudieron hacerlo? Es posible que algún estudiante conozca de antemano un criterio similar a la desigualdad del triángulo, para verificar por medio de las longitudes de los lados de un cuadrilátero, si es posible construirlo o no, en caso de que ninguno lo recuerde, se espera que al intentar construirlo y notar que no es posible, puedan conjeturar la condición para que un cuadrilátero pueda construirse, en función de la longitud de sus lados.

Como sugerencia, se puede pedir a los estudiantes que recuerden el criterio para saber si un triángulo puede ser construido o no (desigualdad del triángulo), se espera concluyan que para saber si es posible construir un cuadrilátero, basta con identificar cual es la longitud del segmento mayor, y verificar que la suma de los otros tres lados sea mayor. En esta etapa, es recomendable hacer a los estudiantes la siguiente observación: Un triángulo construido con regla y compás con ayuda del software, en general no pierde su forma (indeformable) al tratar de mover o arrastrar alguno de los vértices, se puede pensar que el triángulo está formado por tres barras articuladas y unidas en sus extremos; por esta razón, suele ser considerada esta forma geométrica, en el diseño de estructuras estáticas.

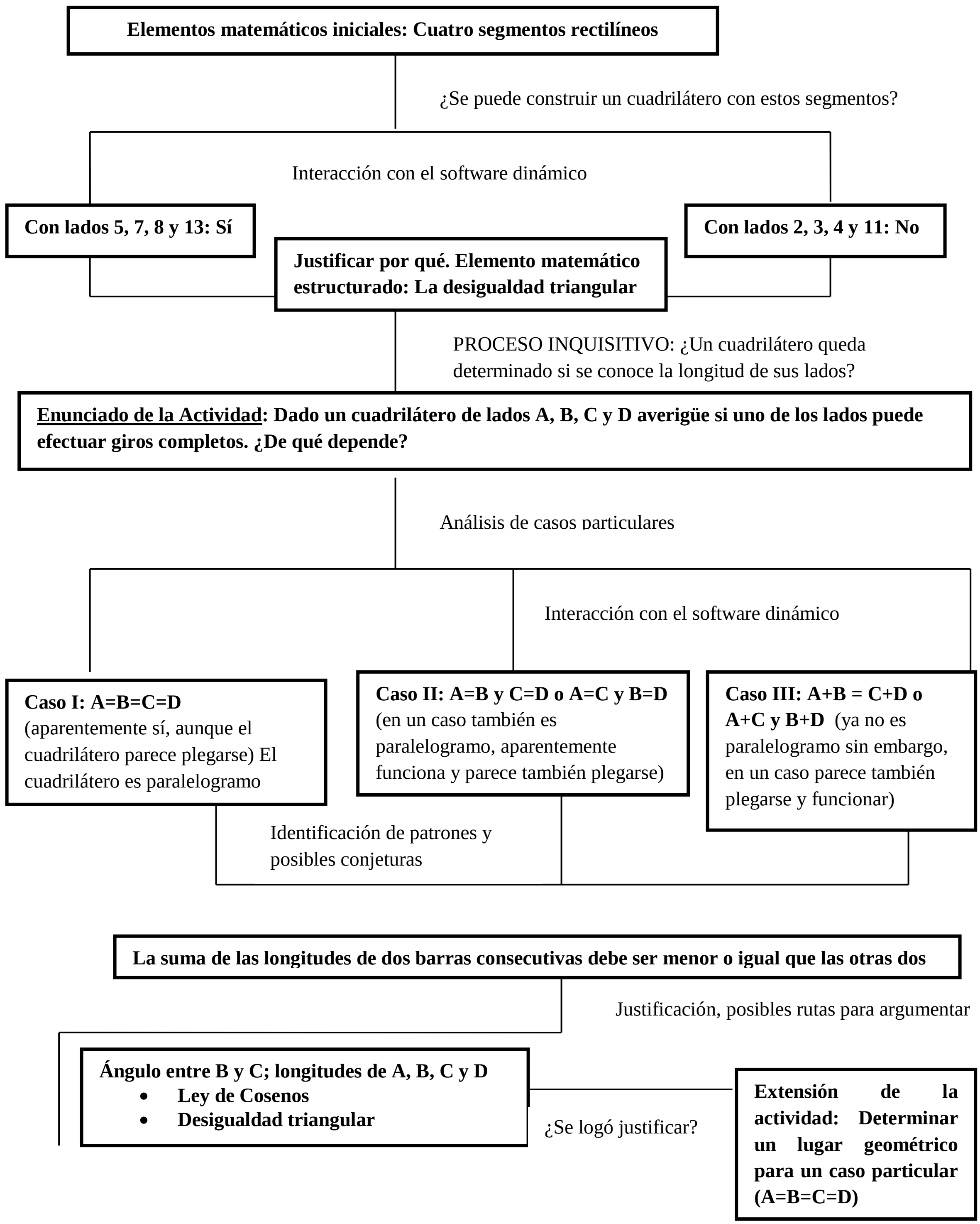


Diagrama 3.2: Una Ruta hipotética para abordar la tarea de aprendizaje.

Por otro lado, si el cuadrilátero se concibe formado por cuatro barras articuladas en sus extremos, tiene la capacidad de deformar sus ángulos, lo que permite generar una familia de cuadriláteros con las mismas dimensiones en sus lados. Como menciona Hemmerling

(1996), a diferencia del triángulo, el cuadrilátero no es una figura rígida. El cuadrilátero puede tomar muchas formas diferentes. Esta propiedad que no es deseable en la construcción de estructuras estáticas, se puede aprovechar en el diseño de mecanismos para la transmisión del movimiento. Concluida la etapa preliminar, se puede enunciar el problema central de la tarea de aprendizaje.

Enunciado de la actividad:

En mecánica, un mecanismo de 4 barras no deformables, articuladas en sus extremos, es también conocido como mecanismo de Grashof, si se cumple que al menos una de las barras pueda dar una revolución completa con relación a alguna otra barra.

Dado un cuadrilátero cualquiera de lados *A*, *B*, *C* y *D*, averigüe si es un mecanismo de Grashof. ¿Qué criterio puede usar para saber si un mecanismo de 4 barras, es de Grashof?

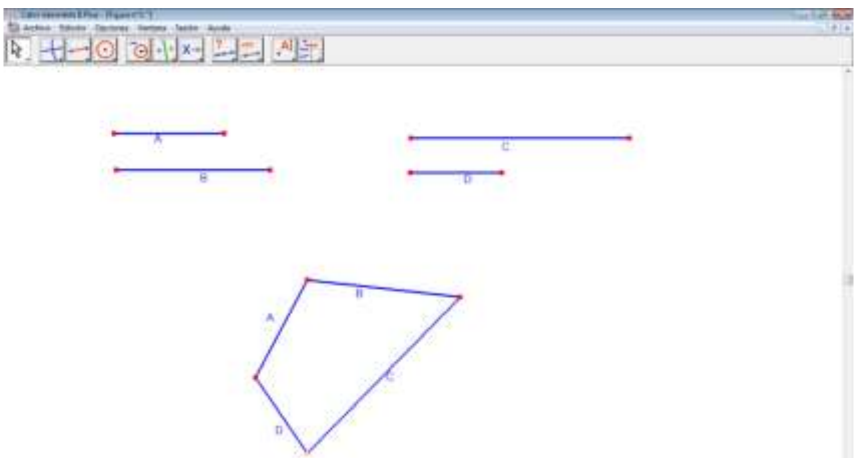


Figura 3.3: Una posible configuración elaborada en Cabri Geometry que representa los datos de la actividad, ¿alguna de las barras gira una revolución completa?

Lo primero que debe verificarse es que las longitudes propuestas, satisfagan la condición encontrada previamente, y que permite asegurar que es posible construir un cuadrilátero con las dimensiones propuestas, de no ser esto posible, de antemano tampoco se podrá representar el mecanismo de 4 barras articuladas.

Fase exploratoria:

Se espera que el estudiante sea capaz de realizar una construcción con el software dinámico, que corresponda a los datos del problema; pudiera requerir la guía de profesor, para poder realizar la construcción. Una vez realizada, se espera que por medio de la herramienta de arrastre o con el uso de la herramienta animación, el estudiante pueda simular el funcionamiento del mecanismo, al hacer que una de las barras (manivela) gire completamente y observar el efecto que tiene en las demás barras. Es importante mencionar, que para que el mecanismo opere correctamente, una de las barras debe permanecer fija como eslabón estacionario (bastidor del mecanismo), debido a que en términos prácticos, el mecanismo está sujeto a la superficie de una máquina. Si fuera necesario, se deben fijar los extremos de la barra que se considere como bastidor. ¿En qué casos si es posible que una de las barras gire una revolución completa? Se espera que mediante la interacción con el software, el estudiante conjeture que existe una relación entre la longitud de los lados del cuadrilátero y el hecho de que una de las barras pueda dar una revolución completa.

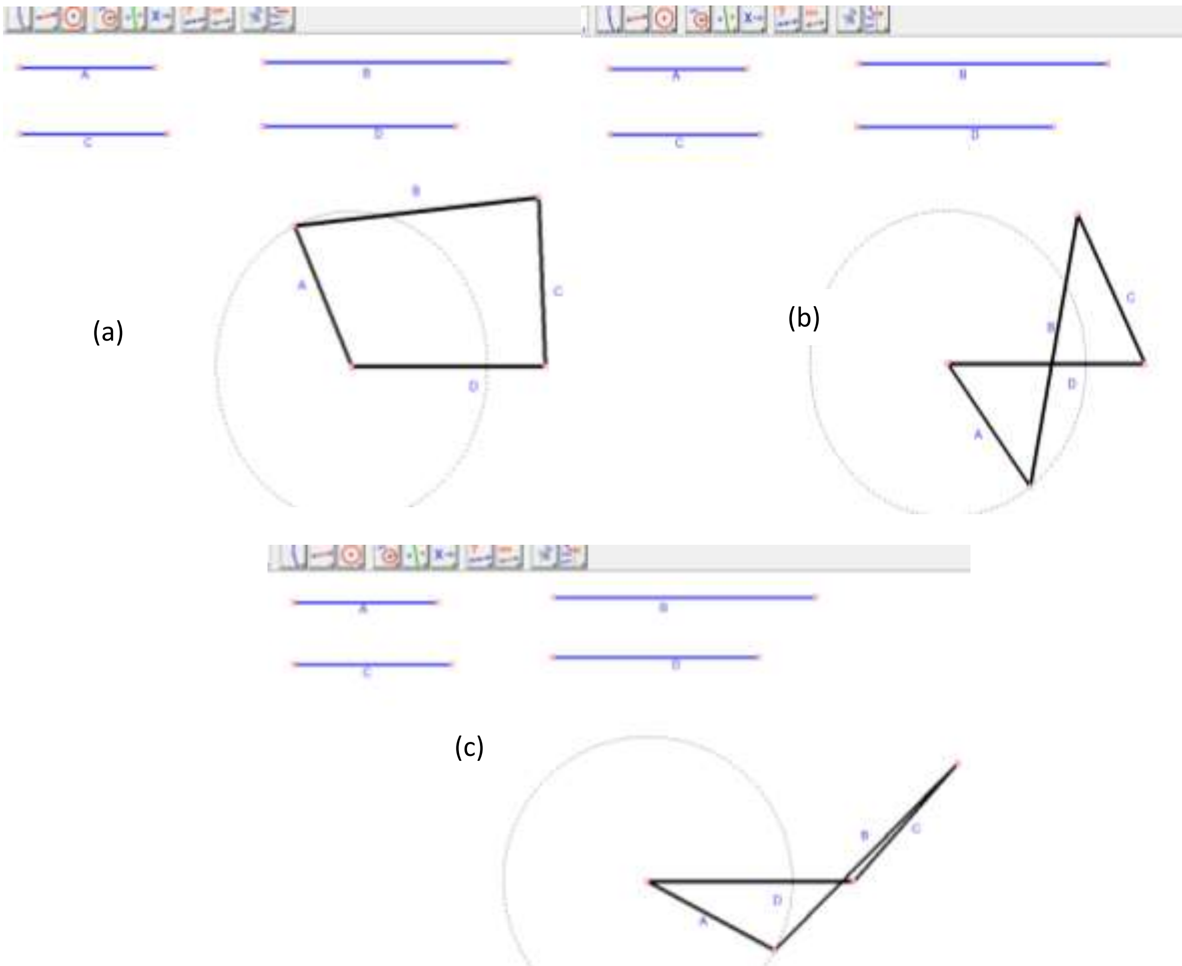


Figura 3.4: Representación en Cabri de 4 barras articuladas, que se espera sea un mecanismo de Grashof. Al usar el comando arrastre o animación, se obtienen diferentes configuraciones del mecanismo

En la figura 3.4, se propone la construcción de un mecanismo de 4 barras articuladas, se ha decidido que la barra *A* sea la manivela o eslabón impulsor y la barra *D* el bastidor o eslabón estacionario, por medio del arrastre o del comando *animación*, se mueve el punto de conexión entre las barras *A* y *B*; este gira en una circunferencia con radio *A*; en (a) se muestra la configuración inicial que se obtuvo al construir el cuadrilátero, dados los segmentos *A, B, C* y *D*. En (b) la manivela ha girado prácticamente media vuelta en sentido contrario al reloj, y no parece haber problemas; en (c) se observa que para alguna configuración, las barras *B* y *C* tienden a sobreponerse, si esto sucede, el mecanismo desaparece, lo cual indica que la manivela *A* no puede dar un giro completo para estos valores de *A, B, C* y *D*.

¿Se ha encontrado una conjetura al respecto de la relación que guardan los lados del cuadrilátero para que este sea un mecanismo de Grashof? Se puede solicitar a los estudiantes que modifiquen las longitudes de los segmentos A, B, C y D; para que efectúen otras pruebas sobre el funcionamiento del mecanismo; en algún momento es posible que logren que la manivela A realice giros completos; es un buen momento para preguntar ¿de qué depende que A gire completamente? Se espera que los estudiantes puedan notar con la interacción del software, que depende las longitudes de las barras y de que las barras B y C no se plieguen, es decir que el ángulo entre estas barras sea distinto de cero.

Análisis de casos particulares

Caso I. ¿Qué pasa si $A = B = C = D$? Si se construye un mecanismo de cuatro barras articuladas, con segmentos de la misma longitud, se asegura que el cuadrilátero se puede construir, además de que para cualquier configuración que se tenga, el cuadrilátero será un paralelogramo. ¿Es un mecanismo de 4 barras de Grashof? Se pide a los estudiantes que dado un segmento de cualquier longitud, construyan el mecanismo de 4 barras y verifiquen si una de las barras puede dar giros completos.

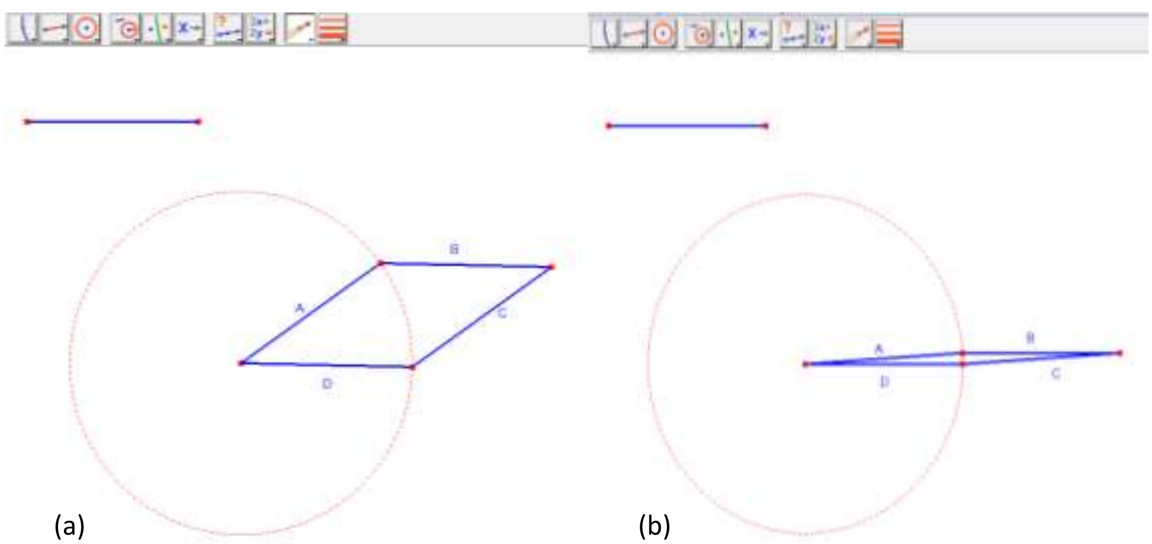


Figura 3.5: Representación en Cabri de un mecanismo de cuatro barras articuladas, en el cual las cuatro barras son de la misma longitud

En la figura 3.5 (a) se observa una posible configuración para el mecanismo con cuatro barras de la misma longitud; en 3.5 (b) se puede notar que llega un momento en que las cuatro barras A, B, C y D se pliegan. Al parecer si se usa el comando animación, el mecanismo opera correctamente, pero es de llamar la atención la posición en la que las cuatro barras se alinean ¿este diseño funcionará físicamente?

Caso II. ¿Qué pasa si $A=B$ y $C=D$ o $A=C$ y $B=D$? A continuación, se pueden revisar casos en los que las 4 barras no tengan la misma longitud, pero que se tengan dos barras de la misma longitud, y otras dos de diferente longitud a las primeras, pero iguales entre sí.

Figura 3.6: Configuración en Cabri de un mecanismo cuatro barras en el que no todas las barras son de la misma longitud, en este caso son iguales dos a dos.

Se pide a los estudiantes que propongan dos segmentos de diferente longitud que representarán las longitudes de las 4 barras, en primer lugar se conectan como barras adyacentes los segmentos de menor longitud, y se conectan con los otros dos; otra posible configuración, es que las barras opuestas sean iguales (el cuadrilátero es paralelogramo de nueva cuenta). Al animar a la barra *A* (manivela), se observa que en la primer configuración, al parecer el mecanismo no funciona correctamente, hay posiciones en las que desaparece; en la segunda configuración, al parecer si funciona, pero tiene un comportamiento extraño; en ambos casos, las barras tienden a plegarse, todo parece indicar que existe relación entre el hecho de que la suma de las longitudes de dos barras sea igual que las otras dos y el hecho de que el mecanismo se pliegue.

Caso III. $A + B = C + D$; o $A + C = B + D$. Si se tiene la sospecha de que las barras tienden a plegarse cuando la suma de las longitudes de dos barras son igual a la suma de las otras dos, se pide a los estudiantes que realicen la configuración de un mecanismo, en el cual las cuatro barras sean de diferente longitud, pero que la suma de longitudes de dos, sea igual a la suma de otras dos, por ejemplo, configurar el mecanismo cuatro barras con los datos $A=2$; $B=7$; $C=4$; $D=5$. En la figura 3.7 se muestra la configuración propuesta para un mecanismo cuatro barras y otra posible configuración de las mismas 4 barras; en la primer configuración, tal como se sospechó las barras se pliegan, el mecanismo parece ser de Grashof, en la segunda configuración, a pesar de ser las mismas 4 barras conectadas en otro orden, el mecanismo al parecer no puede operar con giros completos de la manivela.

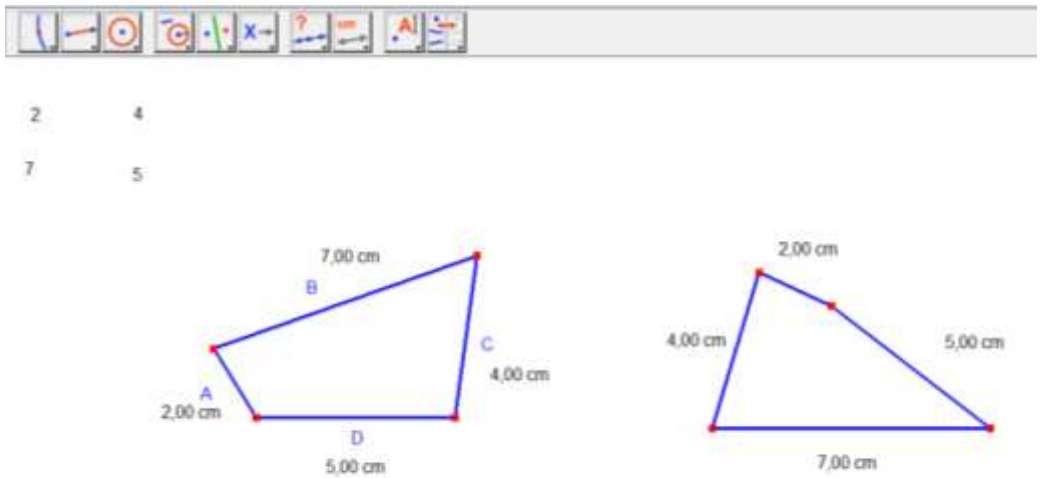


Figura 3.7: Dos posibles configuraciones de un mecanismo cuatro barras con medidas 2, 4, 5 y 7. ¿Importa el orden en que se conecten las barras?

Búsqueda de relaciones entre la longitud de los lados y los ángulos entre barras.

Toda vez que se han construido con ayuda del software dinámico algunos casos particulares, es posible que se tengan dos conjeturas, una relacionada con el momento en que las barras B y C se alinean; dado que es posible que los estudiantes pudieran percatarse de que en caso de que la barra A no pueda efectuar giros completos, las barras mencionadas se alinearon, el ángulo entre ellas fue de 180°. La otra conjetura puede estar basada en que la suma de las longitudes de dos barras, comparadas con las otras dos, tiene relación con la rotación completa de la manivela; además de que pudo haber conjeturado que si la suma de longitudes de dos de las barras, es igual a las otras dos, el mecanismo tiende a plegarse.

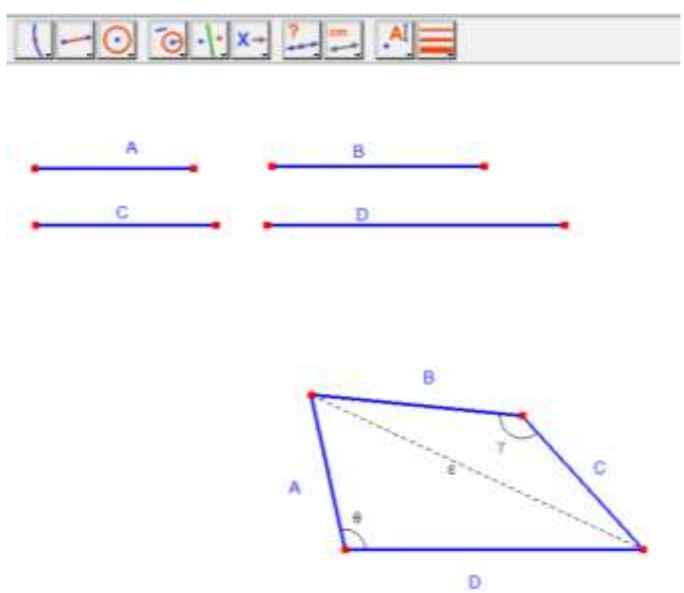


Figura 3.8: Se divide el cuadrilátero en 2 triángulos por medio de la diagonal, para buscar relaciones entre sus lados y el ángulo γ

Denotemos como θ el ángulo formado entre las barras *A* y *D*; γ el ángulo formado entre las barras *B* y *C* y nombremos como ε, a la diagonal del cuadrilátero que va de la articulación *A*, *B* a la *C*, *D* , como se muestra en la figura 3.8. Ya que se conjetura que es posible que *A* no gire una revolución completa cuando γ=180°, se procede a buscar relaciones entre los datos (longitudes de las barras, para determinar el ángulo γ:

Se puede escribir la Ley de cosenos para los triángulos *A*, *D*, ε y para *B*, *C*, ε, como sigue:

$$\varepsilon^2 = A^2 + D^2 - 2AD\cos\theta \quad ...(1)$$

$$\varepsilon^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos\gamma ...(2)$$

Al igualar (1) y (2) y despejar γ se obtiene:

$$\gamma = Arc\cos\left[\frac{B^2 + C^2 + 2AD\cos\theta - (A^2 + D^2)}{2BC}\right] ...(3)$$

Con la ecuación (3) se puede encontrar el ángulo entre las barras *B* y *C*, para cualesquiera valores de *A*, *B*, *C*, *D* y θ. Algunas preguntas que se pueden plantear a los estudiantes son: ¿qué debe suceder para que $\gamma = 180°$? ¿Cómo se pueden saber los valores mínimo y máximo para γ a partir de la expresión (3)? ¿Se puede asegurar que *A* gira una revolución completa si $0 < \gamma < 180°$?

Lo que se espera es que los estudiantes puedan hacer un análisis cualitativo de la expresión (3), teniendo en cuenta las propiedades de la función $\cos^{-1}$. Otra posible ruta para tratar de encontrar condiciones que aseguren que la barra *A* gira revoluciones completas, consiste en denotar como α al ángulo formado entre las barras *A*, *B*; β el ángulo formado entre las barras *C*, *D* y δ, ala diagonal del cuadrilátero que va de la articulación *A*, *D* a la *B*, *C*, como se muestra en la figura 3.9:

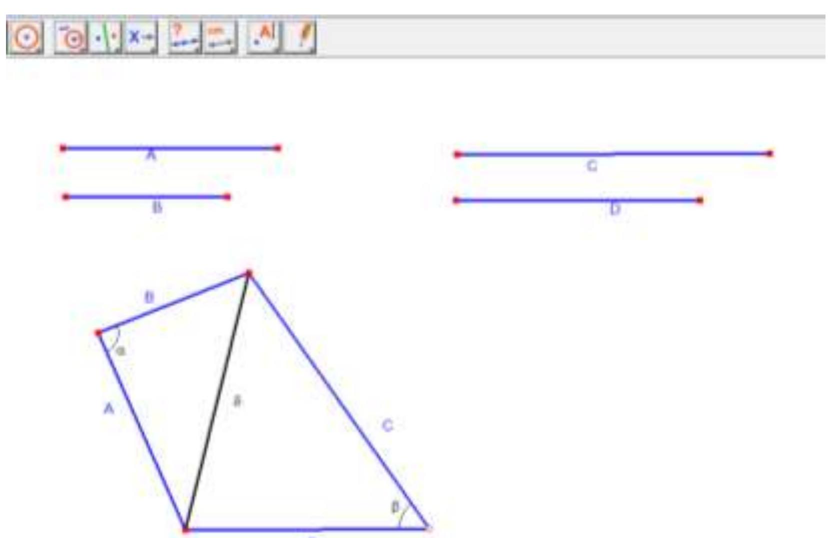


Figura 3.9: Se divide el cuadrilátero por medio de la otra diagonal, para buscar las condiciones que permiten el giro completo de A.

Se puede escribir la Ley de los cosenos para el triángulo *C*, *D*, δ, como sigue:

$$C^2 + D^2 - 2CD\cos\beta = \delta^2 \text{.........(4)}$$

Supongamos que la barra *A* es capaz de girar una revolución completa, entonces los valores para δ mínimo y máximo, se obtienen cuando las barras *A* y *B* se alinean, es decir cuando α=0 o cuando α=180°:

$\delta_{min} = |A - B|$ y $\delta_{máx.} = A + B$ ……(5)

De (4) se sigue que, dado que $-1 \leq \cos\beta \leq 1$ y dado que $C^2 + D^2$ es por lo regular mayor que $2CD$; similares cuando $C \approx D$; (sólo iguales cuando *C*=*D*), se puede afirmar que:

$C^2 + D^2 - 2CD \leq \delta^2$ …(6)

(La igualdad se cumple sólo con $\cos\beta = 1$)

De (6) se sigue que:

$(C - D)^2 \leq \delta^2$ Lo que implica que:

$|C - D| \leq \delta$…(7)

Por la desigualdad del triángulo se puede afirmar que:

$C + D \geq \delta$…(8)

De (7) y (8) se puede concluir que:

$C + D \geq \delta \geq |C - D|$…(9)

Con (5) y (9) se pueden escribir las condiciones para que la barra *A* realice un giro completo:

$|A - B| \geq |C - D|$

$A + B \leq C + D$

Algunas preguntas que se pueden realizar a los estudiantes, después de concluir lo anterior son: ¿si las cuatro barras son de la misma longitud, el mecanismo es de Grashof? ¿Si $A < B < C < D$, se puede asegurar que el mecanismo sea de Grashof? ¿Qué pasa si se conectan *A*, *B*, *C* y *D* en orden no consecutivo?

Para su correcta operación, los mecanismos de 4 barras, deben mantener una barra fija o estacionaria, que haga la función de bastidor o bancada; ¿qué diferencia existe al tomar como bastidor cada una de las 4 barras? Con la interacción con el software dinámico, se espera que los estudiantes puedan descubrir por ellos mismos, un criterio similar al enunciado conocido como la Ley de Grashof para mecanismos de 4 barras articuladas:

Para que una de las barras alcance a dar una revolución completa respecto a las otras, se debe cumplir que la suma de las longitudes de las barras más corta y más larga, debe ser menor o igual que la suma de las longitudes de las otras dos. Si s y l son las barras más corta y más larga, q y p son las otras dos, se debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$s + l \leq p + q$$

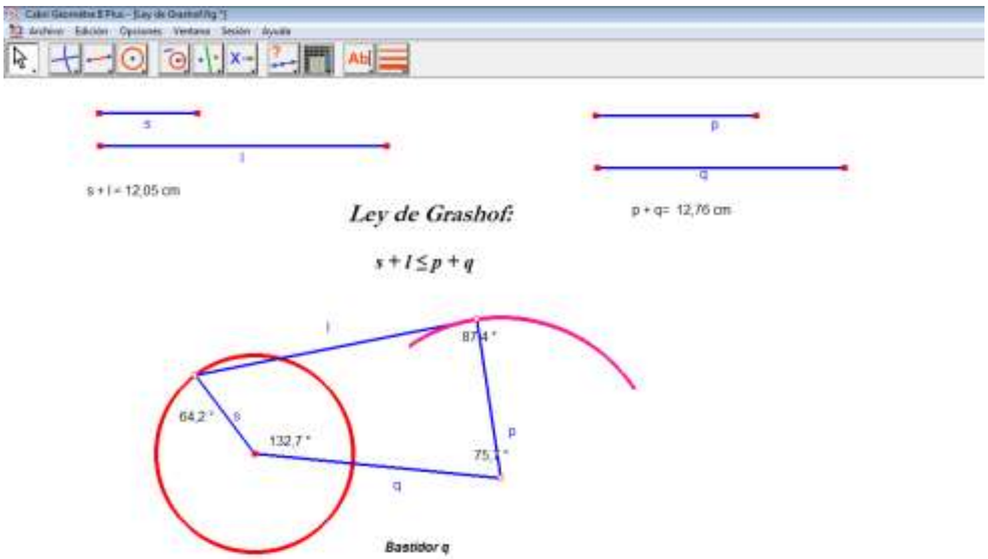


Figura 3.10: Se pide a los estudiantes que fijen cada una de las barras del mecanismo, para que experimenten los diferentes efectos que pueden ocurrir con Cabri Geometry

Importancia de asegurarse que una de las barras gira revoluciones completas

Al respecto de la importancia de asegurarse que en el diseño un mecanismo de 4 barras articuladas, una de las barras pueda fungir como manivela, Shigley y Uicker (1999), mencionan que una de las consideraciones de mayor importancia cuando se diseña un mecanismo que se impulsará con un motor, es asegurarse que la manivela de entrada puede realizar una revolución completa. Los mecanismos en los que ningún eslabón describe una revolución completa no serían útiles para estas aplicaciones.

Extensión de la actividad: Determinación del lugar geométrico descrito por un punto.

Es fácil notar que las barras *A* y *C* que están articuladas en uno de sus extremos a la barra *D (*estacionaria), tratan de efectuar movimientos de rotación pura (figura 8), sin embargo la barra *B* tiene una tendencia muy particular: trata de rotar, pues sus extremos están articulados con los extremos libres de *A* y *C*, y además tiene tendencia a trasladarse. Este tipo de movimiento, se conoce en cinemática, como movimiento plano general. Los puntos intermedios de la barra *B*, también llamada barra acopladora, describen por lo general lugares geométricos poco comunes, que suelen representarse con polinomios de hasta sexto grado (Shigley y Uicker, 1999, p.23).

Un caso particular en que las longitudes de las cuatro barras son iguales (figura 5), puede ser útil para que los estudiantes traten de justificar el tipo de lugar geométrico que describe un punto de la barra acopladora *B*. Para este caso particular, se solicita a los estudiantes que traten de justificar qué lugar geométrico describe el punto medio *P* de la barra acopladora. Con el comando traza o lugar geométrico, los estudiantes pueden conjeturar que el lugar descrito es una circunferencia, pero dado que en general los lugares geométricos descritos por los puntos intermedios de la barra acopladora no son cónicas, se solicita al estudiante que trate de encontrar una justificación formal.

La sugerencia para los estudiantes es que introduzcan un sistema de referencia, lo cual no había sido necesario antes, se espera que los estudiantes propongan por simplicidad, que la barra estacionaria *D*, coincida con el eje de las abscisas y que el punto de articulación entre la barra impulsora *A* y el bastidor *D*, se sitúe en el origen (figura 11). Una forma de tratar de justificar qué lugar geométrico describe el punto medio de la barra *B*, es que a partir del sistema de referencia seleccionado, se traten de encontrar las coordenadas que representan la posición de *P*, para la configuración elegida. Es fundamental para tratar de expresar las coordenadas de *P*, que los estudiantes identifiquen que independientemente del ángulo de entrada entre la barra impulsora *A* y el bastidor *D*, el cuadrilátero es paralelogramo, se puede solicitar a los estudiantes que traten de explicar este hecho.

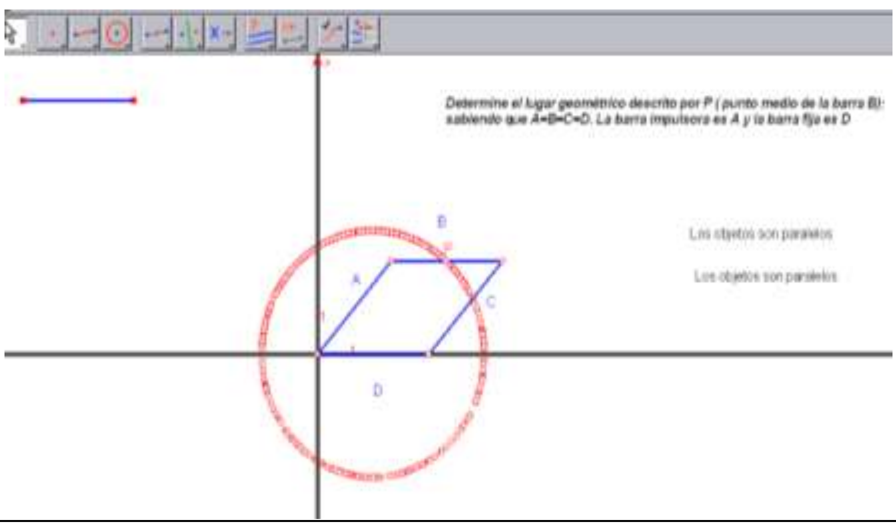


Figura 3.11: Para el caso particular en que las cuatro barras son de la misma longitud, se busca justificar que el lugar geométrico descrito por el punto medio de la barra B es una circunferencia.

Si se designa como θ al ángulo agudo entre las barras *A* y *D* (figura 11), se espera que los estudiantes puedan tratar de escribir las coordenadas del punto *P*, a partir del sistema de referencia seleccionado, y logren llegar a $x = A\cos\theta + \frac{A}{2}$, $y = A\operatorname{sen}\theta$, lo cual confirma que el lugar descrito por el punto *P* es una circunferencia con centro en $\left(\frac{A}{2}, 0\right)$, forma polar de la ecuación de una circunferencia de radio *A*.

3.6 PRINCIPIOS UTILIZADOS PARA EL DISEÑO DE LA TAREA

En el capítulo anterior (marco conceptual), se mencionaron algunos principios de las perspectivas de resolución de problemas, el uso de herramientas digitales en el aprendizaje de las matemáticas y la demanda cognitiva de las tareas de aprendizaje. A continuación se explica cuáles de esos principios se tomaron en consideración para el diseño de la tarea de aprendizaje:

Determinar Objetivo(s) de Aprendizaje (Enfocados en Resolución de Problemas), evitar prácticas algorítmicas solamente, fomentar el pensar matemáticamente.

⇓

Elección del contexto: (Puramente matemático, hipotético o del mundo real), en este caso se seleccionó un contexto del mundo real relacionado con mecanismos de barras articuladas. La tecnología permite incursionar en este ámbito, entre otros aspectos por la herramienta de arrastre y animación.

⇓

¿La actividad es rutinaria? Modificarla con base en el objetivo de aprendizaje. En este caso la aplicación del criterio de Grashof es rutinario, buscar la justificación del mismo, no lo es.

⇓

Identificar los conocimientos previos que requiere el estudiante (Desigualdad triangular, ley de cosenos, relaciones trigonométricas). Conexiones entre diversas áreas de la matemática y del conocimiento en general.

⇓

Pensar en las diversas representaciones que se pueden hacer con los datos de la actividad: Visual gráfica (software dinámico), Algebraica (uso de ley de cosenos) y Aritmética (comparar las longitudes de las barras).

⇓

Identificación de patrones: Análisis de 3 casos particulares, elaborar conjeturas y tratar de justificarlas. "Presionar" a los estudiantes para que den justificaciones.

⇓

Por medio de un proceso inquisitivo se busca extender el problema y elevar la demanda cognitiva. Por ejemplo al buscar determinar un lugar geométrico. La tecnología permite abordar la extensión y elaborar nuevas conjeturas que se tratarán de justificar.

Diagrama 3.3: Algunos principios del marco conceptual utilizados en el diseño de la tarea.

En primer lugar se buscó una tarea que pudiera partir de algo aparentemente rutinario, en este caso, las condiciones para poder construir un cuadrilátero dadas las longitudes de sus cuatro lados, sin embargo con el enfoque que se le da, al introducir el contexto de los mecanismos articulados de cuatro barras, la tarea se puede considerar como no rutinaria, ya que entre otros aspectos, no se pretende llegar a un resultado por medio de un algoritmo, es decir, le presentará dilemas al resolutor.

Se identificaron los conocimientos previos que son requeridos para abordar la actividad, así como los nuevos conocimientos que se pueden generar y la forma en la que estos se conectan en la red conceptual del estudiante y se espera que con la información que se proporciona para la solución de la tarea, se pueda acceder a distintas representaciones.

Por medio del estudio de casos particulares, se espera que el resolutor identifique patrones presentes en la actividad, que le permitan proponer conjeturas sobre el comportamiento de los mecanismos bajo observación, los estudiantes deben ser presionados por el profesor para que traten de justificar las conjeturas planteadas. A través del proceso inquisitivo que surja de la interacción instructor-estudiantes- software, se propone la extensión de la actividad, en este caso, tratar de determinar un lugar geométrico en particular, que se espera requiera mayor demanda cognitiva por parte de los estudiantes.

3.7 PROCEDIMIENTO PARA EL ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Después de realizar las transcripciones de los videos en ambos escenarios, como ya fue mencionado en apartados anteriores, se optó por elegir al grupo de doce estudiantes de la licenciatura en física y tecnología avanzada de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo; para garantizar la confidencialidad de los participantes, no se mencionan sus nombres, se optó por elegir este grupo de estudiantes debido a que su trabajo y diálogos fueron de interés para dirigir la discusión hacia las preguntas de investigación; en estos casos se utilizaron seudónimos o simplemente se hace referencia a ellos como alumnos para identificar a los estudiantes en cuestión, cuando dialogan entre ellos y con el profesor.

> Lo que debe decidir al investigador para llevar a cabo un estudio de caso es su significatividad, es decir, su especificidad; no la representatividad. Lo que se pretende es descubrir, entender, comprender casos (personas, situaciones, instituciones, comportamientos, etc.) para los que el conocimiento disponible con “carácter general” no se ajuste, no se adecue o presente ciertas discrepancias. (Jiménez y Tejada, 2006, pp. 63-64)

Desde la perspectiva de diversos autores, el análisis de datos cualitativos es sistemático y debe seguir una secuencia y un orden:

1. Obtener la información: a través del registro sistemático de notas de campo, de la obtención de documentos de diversa índole, y de la realización de entrevistas, observaciones o grupos de discusión.

2. Capturar, transcribir y ordenar la información: la captura de la información se hace a través de diversos medios. Específicamente, en el caso de entrevistas y grupos de discusión, a través de un registro electrónico (grabación en cassettes o en formato digital). En el caso de las observaciones, a través de un registro electrónico (grabación en vídeo) o en papel (notas tomadas por el investigador). En el caso de documentos, a través de la recolección de material original, o de la realización de fotocopias o el escaneo de esos originales. Y en el caso de las notas de campo, a través de un registro en papel mediante notas manuscritas. Toda la información obtenida, sin importar el medio utilizado para capturarla y registrarla, debe ser transcrita en un formato que sea perfectamente legible.

3. Codificar la información: codificar es el proceso mediante el cual se agrupa la información obtenida en categorías que concentran las ideas, conceptos o temas similares descubiertos por el investigador, o los pasos o fases dentro de un proceso Los códigos son palabras, son recursos mnemónicos utilizados para identificar o marcar los temas específicos en un texto particular. El agrupar y desplegar los trozos condensados, sienta las bases para elaborar conclusiones.

4. Integrar la información: relacionar las categorías obtenidas en el paso anterior, entre sí y con los fundamentos teóricos de la investigación. El proceso de codificación fragmenta las transcripciones en categorías separadas de temas, conceptos, eventos o estados. La codificación fuerza al investigador a ver cada detalle, cada cita textual, para determinar qué aporta al análisis. Una vez que se han encontrado esos conceptos y temas individuales, se deben relacionar entre sí para poder elaborar una explicación integrada. (Basado en Fernández, 2006, pp. 3-4)

Bajo esta perspectiva, en el siguiente capítulo (presentación de resultados), se presenta el condensado de la información obtenida en la fase experimental, tras lo cual se elaborará el reporte final y se realizará una discusión de los resultados obtenidos y conclusiones del estudio.

CAPÍTULO 4. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta una discusión acerca de si los principios con base en los cuales se diseñó la tarea de aprendizaje permitieron que los estudiantes alcanzaran los objetivos a través de desarrollo de las mismas. Lo anterior se lleva a cabo al contrastar los resultados de la realización didáctica con la ruta hipotética de instrucción planteada durante la fase de diseño de la tarea. Se elabora un análisis detallado de los factores que influyeron en el mantenimiento o decaimiento de la demanda cognitiva durante el desarrollo de la actividad con base en los datos recolectados. Lo anterior con la finalidad de responder a las preguntas de investigación planteadas en el primer capítulo del trabajo.

4.2 OBSERVACIONES GENERALES DE LA REALIZACIÓN DIDÁCTICA

En este apartado se menciona lo que se considera algunas de las observaciones más relevantes durante el desarrollo de la tarea, cada una de las afirmaciones se sustenta en párrafos de la transcripción de las actividades, las cuales se pueden consultar en el Apéndice A. Los números entre paréntesis indican el número de párrafo de la transcripción de la actividad, al que corresponde la evidencia que sustenta las afirmaciones respectivas.

Al principio de la realización didáctica, fue notorio que los estudiantes tuvieron problemas para construir un cuadrilátero teniendo como datos las longitudes de los lados, en parte por no tener práctica con el uso del software, aunque también fue evidente que no estructuraron de inicio elementos matemáticos en torno al concepto de cuadrilátero y sus propiedades, en la mayoría de casos, trazaban dos de los lados con el uso del compás, y cuando tenían que trazar los otros dos lados, no se percataron que debía ser a la intersección de dos circunferencias. (12-23) En este sentido, las acciones de los estudiantes fueron influenciadas por dos elementos de la tarea de aprendizaje: los elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo y el escenario de instrucción.

Una práctica común durante el desarrollo de la sesión fue que después de darles a conocer la existencia del comando distancia o longitud, los estudiantes utilizaron esta herramienta constantemente para corroborar que los segmentos que trazaban medían lo indicado. (24). Es decir, los estudiantes modificaron sus criterios de validación, que por lo regular están referidos a la aceptación por parte del docente. En un ambiente de resolución de problemas con el uso de la tecnología, el resolutor puede depositar en el uso de herramientas digitales la confianza de que el trabajo realizado e intentos de solución van por buen camino (128-130).

En la solución de esta tarea en particular, (aceptada como una actividad no rutinaria), el uso del software dinámico fue crucial para entender aspectos centrales de la misma, por ejemplo, en construcciones elaboradas por los estudiantes, al arrastrar alguno de los vértices del cuadrilátero, se modificaba la longitud de uno de sus lados (lo cual no debe suceder), esto porque no habían trazado los últimos dos lados en intersección de dos circunferencias. (92-94, 310-314). La interacción con el software y el uso de herramientas que permiten medir atributos de forma dinámica, como la longitud de segmentos, permitió a los estudiantes cerciorarse que los mecanismos que proponían tenían comportamientos cercanos a la realidad, en el sentido de asegurarse que las dimensiones de las barras no se modificaran. Por otro lado, el comando animación permitió de forma práctica a los estudiantes verificar en qué casos una de las barras podía operar como manivela al dar giros completos. (52-64; 228-233). La interacción con el software, permite además, de forma inmediata desechar ideas erróneas, como en el caso de un estudiante, que al proponer la construcción de un mecanismo de 4 lados iguales, consideró que la figura tenía que ser siempre cuadrado, sin embargo la construcción en el software dinámico, permitió notar que el cuadrilátero de 4 lados iguales no tiene que ser cuadrado. (73-78)

En un ambiente de resolución de problemas, se espera que los estudiantes sean capaces, entre otras cosas de identificar patrones, elaborar conjeturas, tratar de justificarlas y comunicar resultados. El uso de tecnología puede favorecer algunos de estos aspectos, por ejemplo, al tratar de construir el segundo cuadrilátero propuesto en la actividad, los estudiantes observaron de inmediato que no era posible cerrarlo, lo cual les permitió argumentar un criterio para saber en qué casos un cuadrilátero es posible de construir en función de la longitud de sus lados.(30-43)

El constructo de la demanda cognitiva y el marco de la resolución de problemas para el aprendizaje de las matemáticas, tienen principios que resultan similares, como por ejemplo, buscar la autonomía de solución de las tareas por parte de los estudiantes, promover el planteamiento y justificación de conjeturas y tratar de extender la actividad o generar nuevos problemas en torno al inicial, en este sentido, durante la realización didáctica se observó que la mayoría de los estudiantes abordó casos particulares que ellos mismos propusieron, por ejemplo el mecanismo de cuatro barras cuyas longitudes fueran 3, 4, 5 y 6. (166-172), por otro lado los estudiantes empezaron a conjeturar que la condición para que la manivela gire completamente tiene que ver con la suma de longitudes dos de las barras y su comparación con la suma de las longitudes de las otras dos. (233-245; 255-261; 270-275; 364-370). Algunos estudiantes tuvieron la iniciativa de explorar el comportamiento de los ángulos para encontrar relaciones entre las longitudes de los lados, los ángulos y el hecho de que el mecanismo funcione (134-136; 276-281). Un equipo por cuenta propia empezó a cuestionarse ¿qué pasará si en la misma configuración tratamos de dar giros a otra de las barras?, es decir, sugirieron cambiar de manivela (327-331). Otro equipo dividió el cuadrilátero en dos triángulos por medio de una diagonal, para analizar los ángulos, lo que les permitió argumentar que las diagonales del mecanismo podía medir a lo más la suma o a lo menos la diferencia de dos de las barras (371-374). El mismo equipo propuso utilizar la ley de cosenos para tratar de calcular los ángulos del mecanismo en términos de las longitudes de las barras (375-377). El elemento de la tarea de aprendizaje que permitió que los estudiantes exhibieran este tipo de acciones, fue el proceso inquisitivo, que se describió previamente en el diseño de la actividad.

En términos generales, las observaciones preliminares al término de la realización didáctica, permiten considerar que los objetivos planteados para la tarea de aprendizaje fueron alcanzados y el software de geometría dinámica fue relevante para esto, ya que les permitió a los estudiantes descubrir por cuenta propia el criterio conocido como Ley de Grashof, aunque no se llegó a una justificación formal y aunque el tiempo no fue suficiente, los estudiantes mostraron disposición para tratar de justificar formalmente sus conjeturas. (364-370)

4.3 CONTRASTE ENTRE LA RUTA HIPOTÉTICA Y LA REALIZACIÓN DIDÁCTICA

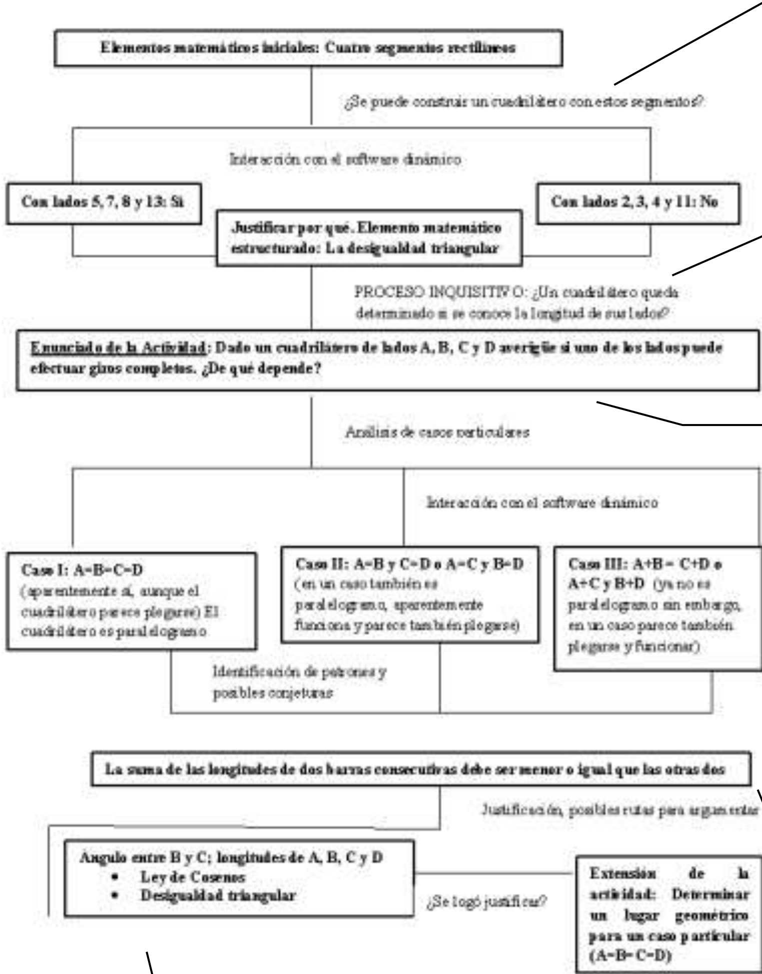
En el capítulo anterior, al diseñar la tarea de aprendizaje, se propuso una ruta hipotética de resolución que se esperaba que los estudiantes siguieran y se representó también por medio de un diagrama (diagrama 3.2). En este apartado se contrasta con base en las observaciones de la realización didáctica y de la transcripción de la sesión, si los estudiantes siguieron la ruta supuesta o plantearon rutas alternas de solución.

El inicio de la sesión fue distinto a lo planeado en cuanto al tiempo considerado debido a las dificultades que tuvieron los estudiantes para manipular el software, el ajuste que se hizo fue regresar a la explicación inicial y hacerlo de forma pausada, además de pedir a los estudiantes que siguieran paso a paso la construcción que el profesor ejemplificó para ellos.

Superada la etapa inicial, el desarrollo siguió de acuerdo al diseño, los estudiantes enunciaron por cuenta propia un criterio para saber en qué casos la construcción de un cuadrilátero es posible, dadas las longitudes de los lados; no se previó que los estudiantes trataran de adelantarse a la actividad central, se dio un caso en que un estudiante inclusive buscaba información en internet sobre los mecanismos de Grashof, mientras el resto del grupo apenas estaba concluyendo la segunda construcción.

En este sentido, no se consideró en el diseño de la tarea, qué acciones implementar en caso de que el ritmo de trabajo de los estudiantes fuera tan distinto y que mientras algunos realizaban construcciones con rapidez, otros tenían dificultades técnicas con los comandos del software; como medida correctiva, el profesor decidió hacer pausas entre cada etapa de la actividad, ejemplificó construcciones en plenaria con ayuda del cañón proyector y trató de buscar consenso promoviendo conclusiones grupales.

En términos generales, la mayor parte de la ruta que siguieron los estudiantes durante la realización didáctica empata con los supuestos hechos durante el diseño de la actividad, (al trabajar de acuerdo a lo planificado los casos particulares), excepto la fase final en la que no se llegó a justificaciones formales ni extensión de la actividad.



Tardaron demasiado en construir el primer cuadrilátero, en cuanto tuvieron cierto dominio del software, intentaron sin problemas la segunda construcción y concluyeron que no era posible.

Lograron dar una justificación apoyados en el criterio de la desigualdad triangular y el software fue un factor determinante.

La interacción con el software fue crucial para entender la actividad, en particular por el uso del comando animación

Los estudiantes mostraron autonomía y disposición para el trabajo en equipo al abordar los casos particulares propuestos, e incluso explorando ideas propias.

Lograron en algunos casos enunciar criterios parecidos a la Ley de Grashof, utilizaron el software como herramienta de validación de sus conjeturas.

Por cuenta propia, algunos estudiantes exploraron relaciones entre los ángulos del mecanismo y lo intentaron incorporar para justificar el criterio.

Por falta de tiempo no fue posible llegar a la extensión de la actividad, presumiblemente se debió a que al inicio de la sesión tardaron tiempo que no se contempló para familiarizarse con el uso del software

Diagrama 4.1: Contraste entre la ruta hipotética de resolución (planteada al diseñar la tarea de aprendizaje) y el desarrollo de la realización didáctica.

4.4 DEMANDA COGNITIVA DURANTE LA REALIZACIÓN DIDÁCTICA

En el marco conceptual de este trabajo, se estableció que existen dos grandes clasificaciones para las tareas de aprendizaje en matemáticas, con base en la demanda cognitiva que generan en el resolutor: tareas de baja demanda cognitiva y tareas de alta demanda cognitiva.

En este sentido, la actividad diseñada para la realización didáctica de la actividad denominada “Mecanismo de Grashof” (capítulo 3), entra en la clasificación de tareas de alta demanda cognitiva, específicamente: hacer matemáticas, dado que los resolutores se enfrentaron a una tarea que les demandó más que el uso de algoritmos, tuvieron que recurrir a distintas representaciones de la información, además del uso de conocimientos previos y en términos generales la autorregulación sus intentos de solución .

En el capítulo 2, se especificó también, que de acuerdo con lo autores del marco teórico de la demanda cognitiva, es más difícil mantener ésta durante la fase de ejecución de la tarea, que seleccionar o diseñar tareas con alta demanda cognitiva.

¿Qué acciones del profesor durante la implementación didáctica favorecieron el mantenimiento de la demanda cognitiva de la tarea? ¿En qué momentos de la realización decayó la demanda? ¿Cuáles fueron las acciones a las que recurrió el profesor para mantener o tratar de elevar la demanda cognitiva? ¿De qué forma el ambiente de resolución de problemas y el uso de la tecnología influyeron en la demanda cognitiva?

En este apartado se trata de dar respuesta a las interrogantes planteadas, apoyados en la evidencia recolectada, principalmente las acciones del profesor, los estudiantes y la interacción que tuvieron con el software al resolver la tarea (mostradas como fragmentos de diálogos, extraídos de la transcripción de la sesión, Apéndice A).

Retomando parte de lo que se declaró en el marco conceptual, Stein et al. (2007), mencionan que existen procesos asociados con la disminución o el mantenimiento de la alta demanda cognitiva (capítulo 2), con base en esto, se presenta a continuación un condensado de los factores o acciones seguidas por el profesor que favorecieron el mantenimiento de la alta demanda cognitiva de la tarea, o en su defecto que causaron disminución:

Las siguientes tablas (4.1 y 4.2) tratan de ilustrar qué fue lo que el profesor dejó de hacer o de qué manera sus diálogos o acciones contribuyeron a que la demanda cognitiva de la tarea decayera durante la realización didáctica.

Por ejemplo, el profesor hizo rutinarios algunos aspectos de la tarea, como se aprecia en los párrafos 62-64 de la transcripción, cuando les sugiere a los estudiantes que giren otra de las barras o por así decirlo, que cambien de manivela en una construcción que ya estaba elaborada; en términos generales, el cambiar de manivela en una configuración, puede ocasionar efectos distintos, lo cual no es señalado por el profesor para iniciar un proceso inquisitivo y fomentar la discusión y argumentación, usando como apoyo el software dinámico.

También se observa en el párrafo 336 de la transcripción, al dialogar el profesor con los estudiantes, les sugiere que hagan dos construcciones diferentes con los mismos datos, prácticamente afirma que existen solo dos formas de hacerlo, sin embargo no aprovecha la ocasión para discutir ¿de cuántas formas distintas se pueden articular 4 barras para generar distintos mecanismos?

	Elementos del marco conceptual	Acciones del profesor / fragmento de la transcripción
Procesos asociados con la disminución de la alta demanda cognitiva	• **Hacer rutinarios aspectos problemáticos de la tarea.** La tarea diseñada puede ser extendida y ampliada en varios aspectos, por ejemplo algunas de las preguntas que se pueden hacer a los resolutores son: dadas las dimensiones de cuatro barras ¿de cuántas diferentes formas se pueden configurar para construir un mecanismo?, ¿es posible configurar las mismas cuatro barras de tal forma que en algunos casos el mecanismo funcione correctamente y en otros no?, ¿qué efectos puede tener el cambiar de manivela en el mismo mecanismo?, ¿por qué en ocasiones la barra que efectúa el trabajo oscila y en otros casos parece dar revoluciones? En este sentido, el profesor no promovió la discusión de estos aspectos o fue en un sentido muy restringido, se presentó un caso particular en que los estudiantes por cuenta propia se preguntaron ¿qué pasaría si cambiaban de manivela? y el profesor no aprovechó para generar la discusión.	62. M = nosotros queremos que pueda dar giros completos esa barra […] 63. A = mmm, sí… 64. M = […] ¿por qué no mueves la otra?, […] parece que, se comporta medio raro, hace algo extraño ese mecanismo, pero si tú logras que se mantenga todo el tiempo, […] ya tienes unas dimensiones propuestas para 4 barras que cuando las articulas, esperas que alguna pueda dar un giros completos […] 336. M= […] vean con calma ese caso, constrúyanlo y discutan en equipo qué es lo que pasa, ahí lo pueden construir de dos formas, de hecho me gustaría que hicieran las dos […]

Tabla 4.1: La demanda cognitiva de la tarea diseñada disminuyó durante la realización didáctica porque a través de sus acciones el profesor hizo rutinarios aspectos problemáticos de la tarea.

En 4.2 se ilustra que el tiempo, mencionado en el marco conceptual como uno de los factores que pueden hacer que la demanda cognitiva decaiga y que además es considerado parte de los elementos de la tarea de aprendizaje, particularmente dentro del escenario de instrucción, provocó disminución en la demanda cognitiva, al no ser administrado correctamente al inicio de la realización didáctica (24), lo cual no permitió extender la actividad como estaba planeado al final (375).

	Elementos del marco conceptual	Acciones del profesor / fragmento de la transcripción
Procesos asociados con la disminución de la alta demanda cognitiva	• **Proporcionar poco tiempo para entender la tarea, o dar demasiado al grado de que los estudiantes queden a la deriva.** Al inicio de la sesión, los estudiantes tardaron más tiempo de lo previsto en familiarizarse con el software, de acuerdo a la guía de la actividad, la primer parte estaba programada para quince minutos y se consumió más del doble de tiempo planeado. Al final de la sesión, según lo programado, la actividad se debería extender, los estudiantes deberían tratar de dar justificaciones formales a las conjeturas observadas con la manipulación del software y se esperaba que trataran de justificar un lugar geométrico con ideas de la geometría analítica. El tiempo terminó y no fue posible concluir con lo planeado, dividir la realización didáctica en dos sesiones de dos horas, pudiera ser mejor opción.	24. M= […] como ya nos tardamos un poco en esta actividad inicial, que es importante pero ya llevamos más tiempo de lo planeado, les voy a pedir de favor a todos que dirijan su atención otra vez hacia la pantalla de proyección y lo voy a volver a hacer con más calma parece que la explicación del inicio fue muy rápida, pero ya estuvieron trabajando y eso es bueno, ya empezaron a interactuar con el software y eso es bueno […] 82. M= […] entonces en esta parte muchachos, este lo que ya hicieron individual, si se pasan a la segunda hoja, y dice al principio, que se observe el video, dice tiempo máximo 15 minutos, me gustaría que de manera individual todavía contesten esa parte, les preguntan si aún no han logrado hacer un mecanismo de Grashof […] 375. M= […] ya casi terminamos, haber acá me acaban de platicar una idea que se me hace interesante y como ya casi terminamos, lamento que no puedan extender más la actividad porque de hecho estaba para más […]

Tabla 4.2: Otro elemento mencionado en el marco conceptual que provocó disminución en la demanda cognitiva de la tarea fue la falta de tiempo.

En contraste, las siguientes tablas (4.3, 4.4. y 4.5), recopilan algunas de las acciones que el profesor implementó durante el desarrollo de la actividad y que permitieron mantener el nivel de demanda cognitiva que se planteó en la estapa del diseño.

En 4.3 se ilustra que debido a que se diseñó una tarea de aprendizaje que se basa en los conocimientos previos de los estudiantes, el profesor pudo orientar las preguntas a la búsqueda de justificaciones formales, basadas en esos conocimientos, tal como se previó en el diseño de la tarea, como se puede observar en los párrafos 371-376; el profesor orienta a los estudiantes a que centren su atención a la relación que existe entre los ángulos y las longitudes de las barras para buscar conexiones con conocimientos previos, particularmente con ley de cosenos.

	Elementos del marco conceptual	Acciones del profesor / fragmento de la transcripción
Procesos asociados con el mantenimiento de un alto nivel de demanda cognitiva	• **Seleccionar tareas que se basan en conocimientos previos del estudiante.** Los estudiantes tenían como antecedentes previos los cursos de matemáticas del nivel medio, el primer semestre de licenciatura, además de estar cursando actualmente geometría analítica. En este sentido el profesor insistió en que trataran de recordar conceptos matemáticos de cursos previos para tratar de dar justificaciones formales.	371. M = esto se ve interesante, ¿qué se te ocurrió ahí? 372. A = Una línea que uniera a estos dos vértices y para poder observar mejor lo de los ángulos 373. M = Perfecto, tú ya pensaste en dividirlo y formar 2 triángulos, o sea en un cuadrilátero si trazas una diagonal… 374. A = Va variando, es que por ejemplo aquí no está así la figura, pero cuando la suma de estos 2 lados y de estos dos lados es la misma, cuando esto va girando así, esta diagonal, digamos que está es igual que esta, cuando esta de aquí forma un ángulo de 0 o de 180 grados con este, o sea esta de aquí va a quedar encimada, ahí es donde quedan sobrepuestas. 375. M […] como dicen sus compañeros este ángulo es crucial, entonces en Cabri lo que nos permite ver, es que cuando este ángulo se hace de 180° es cuando el mecanismo no podría funcionar o en su defecto es cuando las 4 barras se sobreponen y entonces dicen sus compañeros, vamos a tratar de analizar qué pasa con ese ángulo […] como el cuadrilátero se deforma, esta diagonal va cambiando […] ¿qué relaciones se les ocurre que pueden encontrar con los datos? , […] ¿qué pueden hacer entonces para involucrar a la incógnita o al dato que queremos estudiar?, […] haber algo que se les ocurra, algo que recuerden de sus cursos de matemáticas, fíjense tienen dos lados y tienen el ángulo entre ellos y pues acá hay un lado que no conocen muy bien, pero haber dos lados de un triángulo y el ángulo entre esos lados. 376. A1 = ley de cosenos

Tabla 4.3: Uno de los factores que durante la realización didáctica favoreció que el nivel de demanda cognitiva de la tarea permaneciera alto, fue que la tarea estaba diseñada teniendo en cuenta los conocimientos previos del estudiante.

En 4.4 se ilustra el hecho de que al proporcionarles el profesor a los estudiantes un medio para medir sus progresos, los resolutores adquieren cierta autonomía, en el sentido de no depender de la aprobación o rechazo por parte del profesor, lo cual se aprecia en los párrafos 310-314. El uso de la tecnología y en particular la medición de atributos, permite a los estudiantes verificar por cuenta propia que su construcción es incorrecta.

Procesos asociados con el mantenimiento de un alto nivel de demanda cognitiva	Elementos del marco conceptual	Acciones del profesor / fragmento de la transcripción
	• **Proporcionar un medio por el cual los estudiantes pueden seguir sus propios progresos.** Al utilizar el software para tratar de representar un mecanismo de 4 barras que cumpliera con el criterio de Grashof, algunos estudiantes lo manipularon inadecuadamente y suponían haberlo logrado, sin embargo no notaron que al animar su construcción, el mecanismo no se comportaba con las barras rígidas, el profesor intervino para proporcionarles ideas que les permitieran notar en qué casos la construcción no era válida, posteriormente cuando volvió a suceder, los estudiantes por sí mismos reconocieron que la construcción era incorrecta.	92. M = ok, eso se ve muy bien pero hay una observación que te puedo hacer, si te das cuenta la longitud de esa barra cambia y son barras rígidas, no debería de estarse deformando 93. A =… ¿Esta? 94. M = Exactamente, las otras 3 si están bien, pero en la practica el mecanismo es rígido […] 310. A1 = ah bueno, entonces esta se va aquedar fija, y ¿cuál es la que se va a mover, cual es la manivela? 311. A2 = esta 312. A1 = entonces agarra ese, no la sueltes, ¿ok? ahí está, se truena porque estos dos se mueven, se supone que no se deberían de mover 313. A2 = no, ¿sabes qué? esta se está haciendo más larga 314. A1 = igual lo podemos hacer con el maple, igual te permite animaciones

Tabla 4.4: La autonomía y toma de decisiones favorecen la alta demanda cognitiva durante la realización didáctica, en este caso los estudiantes pueden tomar decisiones personales después de que el profesor, por medio del uso de la tecnología, les proporciona un medio para seguir sus progresos.

En 4.5 se puede observar que el profesor "presionó" a los estudiantes para que traten de dar justificaciones sobre sus supuestos o las observaciones realizadas: en 121-127 el profesor utiliza un proceso inquisitivo que consistió en hacer preguntas al grupo y también de manera individual, sobre la familia de cuadriláteros que se logró obtener en cierta construcción particular, esto para que los estudiantes pudieran desechar algunas ideas erróneas; en 32-42 el profesor promueve la comunicación de resultados, al solicitar a quienes ya lograron encontrar un criterio para poder afirmar que la construcción de un cuadrilátero es posible, lo expresen en plenaria al resto del grupo y los trate de convencer.

	Elementos del marco conceptual	Acciones del profesor / fragmento de la transcripción
Procesos asociados con el mantenimiento de un alto nivel de demanda cognitiva	• **“Presionar” a los estudiantes para que den justificaciones, explicaciones y/o significado a través preguntas y/o comentarios.** Durante la realización didáctica el profesor insistió a los estudiantes para que trataran de dar justificaciones a algunas ideas que ellos mismos plantearon, por ejemplo en un diálogo con un estudiante le pregunta sobre la familia de cuadriláteros con lados iguales que se generan en uno de los casos particulares. En otro momento de la sesión, se propone a los estudiantes que construyan con el software un cuadrilátero que no puede ser construido, aunque el uso del software les proveyó de un medio para asegurarse que la construcción era imposible, el profesor insiste en que argumenten su conjetura	121. M= […] aquí lo que estamos viendo es una familia de cuadriláteros con lados iguales, ¿cómo clasificarían todos estos cuadriláteros que se van formando […] ¿qué tipo de cuadriláteros son? 122. A = Romboides 123. M = ¿qué es un romboide? 124. A = No, son paralelogramos 125. M = ¿A qué te refieres con paralelogramo? 126. A = Que los lados son paralelos 127. M = Que en todo momento los pares de lados son paralelos [...] puede ser que sí, sería algo que tendríamos que verificar [...] 32. M = ¿Quien ya construyó el cuadrilátero de 2, 3, 4 y 11?, 33. A = ¿cuál? 34. M = El segundo cuadrilátero. 35. A = No se puede. 36. M = ¿No se puede? 37. A = No cruzan. 38. M = No cierra, pero hace rato, tampoco cerraba. 39. A = Pero es que aquí la suma de los otros 3 lados, no llega a hacer la otra. 40. M = Ah, ya, ¿entonces? 41. A = No existe. 42. A = Es que estos 3, nunca va a cerrar.

Tabla 4.5: Presionar a los estudiantes a través de preguntas para que traten de justificar sus observaciones, permite al profesor mantener el nivel de demanda cognitiva de la tarea de aprendizaje

Tras lo anterior, se considera que durante la realización didáctica, hubo momentos en los que la demanda cognitiva decayó, particularmente cuando el profesor se vio obligado a dar por terminada la sesión y no se pudo continuar con la justificación formal y la extensión de la actividad, también hubo decaimiento en la demanda cognitiva al momento que el profesor no se percató de las ideas o iniciativa de alguno de los equipos, por ejemplo intentar usar una barra distinta como la manivela del mecanismo, para aprovecharlas y discutir con el grupo los posibles efectos que causaría o en los casos en los que al percatarse que un equipo lograba configurar un mecanismo de cuatro barras que funcionara adecuadamente, el profesor no sugirió que con las mismas dimensiones, se configurara otro mecanismo (cambiar el orden en que se articularon las barras) y se observara su comportamiento.

Por otro lado, las acciones del profesor que propiciaron que el nivel de demanda cognitiva se mantuviera, fueron principalmente los comentarios o preguntas que hizo a los estudiantes durante la realización (proceso inquisitivo).

4.5 ELEMENTOS DE LA TAREA DE APRENDIZAJE DURANTE LA REALIZACIÓN DIDÁCTICA

En el segundo capítulo se determinaron los elementos que caracterizan a una tarea de aprendizaje matemático (Barrera, 2008), además de su importancia en el aprendizaje de las matemáticas (Stein y Simith, 1996; citados por Bayazit, 2006). También se presentó un esquema (diagrama 2.1) el cual ilustra la forma que los elementos del marco conceptual (resolución de problemas, uso de tecnologías digitales y demanda cognitiva) inciden en el diseño y puesta en práctica de las tareas de aprendizaje matemático.

En este apartado se presenta en forma de tablas, la relación entre los elementos de las tareas de aprendizaje con los elementos del marco conceptual (base teórica), algunos principios para el diseño de las tareas y se contrastan con los fragmentos de la transcripción de la sesión (Apéndice A), que dan evidencia del resultado esperado:

Al diseñar la tarea, como parte del objetivo de aprendizaje que se pretende lograr, se utilizaron algunos de los principios descritos en el marco teórico y señalados en la tabla 4.6, se puede observar en los párrafos 24-26, que durante la actividad, el profesor estaba más interesado en los procesos de pensamiento de los estudiantes, que llegar a un resultado, en este caso más que esperar que los estudiantes fueran capaces de realizar una construcción, se espera que al realizarla, identifiquen que aunque todos recibieron las mismas instrucciones, el resultado puede ser distinto.

También como parte del objetivo de aprendizaje y en busca de mantener el nivel de demanda cognitiva alto, se espera que los estudiantes puedan crear conexiones entre distintas áreas de las matemáticas; el profesor a través del diálogo, busca que los estudiantes logren lo anterior al sugerirles que dejen de pensar en las formas geométricas como algo estático (49).

Otro principio estructurado en torno al objetivo de aprendizaje fue disminuir la práctica algorítmica y rutinaria, lo cual es favorecido por medio del uso de la tecnología, como se puede observar en los párrafos 345-351; en donde se observa que los estudiantes están mas interesados en explorar ideas que tienen por medio del software, que tratar de seguir un algoritmo para resolver el problema planteado.

Elemento de la tarea de aprendizaje	Elemento del marco conceptual y principios para el diseño.	Acciones/Diálogos entre estudiantes y/o profesor (M=Profesor, A=estudiantes)
Objetivo de Aprendizaje	Resolución de Problemas: Énfasis en los procesos de pensamiento, no en el resultado.	24. M = [...] espero que ya hayan terminado, ahora mi pregunta es; ¿todos obtuvimos el mismo cuadrilátero? 25. A = Si 26. M = ¿es el mismo, tiene la misma forma?, es más, vean el del compañero de al lado, ¿todos obtuvieron el mismo cuadrilátero? […] como que no son iguales, tienen las mismas dimensiones, pero como que no tiene la misma forma, acá hasta lo está deformando, [...] la pregunta es; ¿hay diferencia? En cuanto a dimensiones pues no hay diferencia pues son los mismos lados pero parece que ustedes ya están notando algunas diferencias [...]
	Demanda Cognitiva: Crear conexiones entre distintas áreas de la matemática.	49. M = [...] les voy a pedir que tengan un poco de imaginación y que supongan que los lados de este triángulo son barras sólidas por ejemplo de metal o de madera y que voy a conectar los otros lados [...] tal vez con un perno y entonces [...] estas barras podría girar, [...] sí es posible construirlo porque sus lados cumplen con la desigualdad del triángulo [...] la cuestión es esta; ¿ese triángulo que acabo de construir, no se deforma?, [...] voy a tratar de arrastrar alguno de los vértices, o sea es algo similar a que si yo lo tuviera físicamente y quisiera deformarlo aplicándole una fuerza, [...] no se deforma, es decir la figura geométrica que conocemos como triángulo, [...] no cambia de forma, [...] en cambio ustedes ya lo vieron, [...] este cuadrilátero que sí se pudo construir porque cumple el criterio[...] es deformable, [...] ustedes pueden girar una de las barras y cambia la forma de la figura [...]
	Uso de la Tecnología: Disminuir la práctica algorítmica y rutinaria	345. A1 = es posible crear un mecanismo de Grashof de 4 barras iguales, ¿qué más? 346. A2 = pues ese es el caso en el que todas (las barras) sean iguales… 347. A1 = y el caso en el que sean desiguales también es posible ¿no?, 348. A2 = ¿qué pasa cuando A es igual a B? 349. A1 = mira aquí también es raro ¿no?, aquí también da todo, no hace esto realmente, lo que haría es que se iría acá 350. A2 = no, si haría eso, este no está creciendo 351. A1 = no, no está creciendo, mira aquí tiene una aceleración muy fuerte [...]

Tabla 4.6: Al diseñar la tarea, se pretendió el objetivo de aprendizaje se alcanzara por medio de los principios establecidos en el marco conceptual, durante la realización didáctica se observaron aspectos que permiten corroborar su alcance.

En la siguiente tabla (4.7), se presentan algunos principios del marco conceptual relacionados con los elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo de aprendizaje, en el caso del principio de resolver por más de un camino, asociado con la resolución de problemas, se observa en los párrafos 131-135 de la transcripción que los estudiantes buscan estructurar elementos de los triángulos rectángulos para justificar alguna idea relacionada con el mecanismo; de igual forma se observa el tránsito que hay entre distintas representaciones, por ejemplo de la numérica a la geométrica principalmente. Particularmente en los párrafos de la transcripción presentados en la tabla 4.7 se puede observar que el uso del software les permitió validar algunas de las observaciones.

Elemento de la tarea de aprendizaje	**Elemento del marco conceptual y principios para el diseño.**	**Acciones/Diálogos entre estudiantes y/o profesor (M=Profesor, A=estudiantes)**
Elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo	<u>Resolución de problemas</u>: Resolver por más de un camino	131. A2 = [...] este está recto ¿te parece bien?, este tiene 16, entonces este es la hipotenusa entonces 4 x 4 son 16, 9 x 9 son 81, entonces esto va hacer lo que nos va a dar la otra longitud, 16 + 81 es 97, raíz de 97 132. A1 = no, no, por ejemplo si mueves este segmento... 133. A2 = para que sea mecanismo de Grashof, estas 3 longitudes deben ser mayor a esta [...] 134. A1 = pero al momento que sean colineales todos, se va a romper, porque este está más largo, mide más que este 135. A2 = no porque por eso están los ángulos
	<u>Demanda Cognitiva</u>: Admite varias soluciones y representaciones.	166. A1 = […] si la suma de este y este es mayor que el acoplador y esta, si lo haces más pequeño 167. A2 = no, entonces debe ser mayor, la suma de estos dos debe ser mayor que el otro 168. A3 = ¿su suma cuanto es? 169. A1 = 6 y 5 170. A2 = haber si le pongo 6, 171. A1 = si sale porque su suma no debe… ¿ya vez? no se pierde 172. A2 = entonces, ya está
	<u>Uso de la Tecnología</u>: Ayuda a explorar ideas matemáticas.	209. A1 = Ya vi un factor 210. A2 = ¿Este factor? 211. A1 = Sí 212. A2 = Mira no te la sabías, ya aprendí. 213. A1 = Entonces la barra conectora y este tienen que ser mayor que la manivela y el soporte. 214. A2 = Si, o iguales 215. A1 = O iguales, sí también iguales 216. A2 = Haber si los hago que sean iguales, entonces a esta vamos a ponerle 2, 6 y 4 a esta, no 5 y 3, chécate que tal funciona 217. A1 = Si, si funciona

Tabla 4.7: Al considerar los elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo, se espera que a partir de conocimientos previos y conceptos que ya están en la red conceptual del estudiante, la tarea promueva que los pueda articular para crear nuevos conceptos.

uso de la tecnología, además considerar el tiempo que se requiere para resolver cada etapa de la actividad, puede favorecer mantener alto el nivel de demanda cognitiva o en su defecto, como ya se expuso en el apartado anterior, disminuirla. En 4.8 se observan algunos de los principios utilizados para planear el escenario de instrucción y parte de la transcripción que muestra la interacción del profesor con estudiantes o con el software durante la realización didáctica respecto a esos principios.

Elemento de la tarea de aprendizaje	**Elemento del marco conceptual y principios para el diseño.**	**Acciones/Diálogos entre estudiantes y/o profesor (M=Profesor, A=estudiantes)**
Escenario de instrucción	Resolución de problemas: Promover la experimentación y elaboración de conjeturas	47. M= [...] ¿nos puedes decir en voz alta, por qué te diste cuenta que el cuadrilátero anterior no se va a poder construir? 48. A = [...] Esto es porque si sumamos las longitudes de tres de los lados, esta suma debe de ser mayor al cuarto lado, porque si fuera igual quedarían sobrepuestas, entonces sería una línea recta, entonces la suma de tres (lados) debe ser mayor al cuarto. 49. M = Entonces, tú lo que dices es que si sumamos 2, 3 y 4 eso nos da 9, pero tú dices que eso tendría que haber superado 11, ¿si están de acuerdo con su compañero?, de hecho es un criterio que se parece a la desigualdad del triángulo.
	Demanda Cognitiva: Tiempo suficiente para explorar la actividad.	24. M = [...] Miren, como ya nos tardamos un poco en esta actividad inicial, que es importante pero ya llevamos más tiempo de lo planeado, les voy a pedir de favor a todos que dirijan su atención otra vez hacia la pantalla de proyección y lo voy a volver a hacer con más calma parece que la explicación del inicio fue muy rápida [...]
	Uso de la Tecnología: Se modifica la forma de organizar a los estudiantes.	117. M= [...] como de antemano ya los veo muy interesados en discutir algunas cosas con un compañero , lo cuál está muy bien, vamos a pasar a la siguiente parte […] sí me interesaría que sus conclusiones personales, individuales, las pongan, pero pasemos a la parte de trabajar ya con un compañero , dice que para que tratemos de entender qué está pasando, por qué algunos cuadriláteros trabajan como mecanismos de cuatro barras articuladas tipo Grashof, pero otros no, los estoy invitando a que trabajen tres casos particulares, formando equipo con un compañero cercano, lo van a trabajar en binas [...]

Tabla 4.8: El escenario de instrucción se ve modificado por las perspectivas teóricas adoptadas para favorecer el aprendizaje de los estudiantes, en este caso, el uso de la tecnología es fundamental para organizar la forma de trabajo.

En 4.9 se muestra algunos principios tomados del marco conceptual para preparar el proceso inquisitivo durante la realización didáctica y se presentan algunos párrafos de la transcripción de la sesión (Apéndice A), que tratan de ilustrar la forma en que se dio este proceso, se señala particularmente el párrafo 329 en el que un estudiante hace una pregunta de gran interés, al sugerir utilizar una manivela diferente al eslabón de menor longitud, también se señala en particular que en los párrafos 270-274, 277-279 y 295-296 se observa que una de las heurísticas más utilizadas por los estudiantes fue la modificación de atributos (longitudes de las barras) y el uso del comando animación.

Elemento de la tarea de aprendizaje	**Elemento del marco conceptual y principios para el diseño.**	**Acciones/Diálogos entre estudiantes y/o profesor (M=Profesor, A=estudiantes)**
Proceso Inquisitivo	Resolución de problemas: Promover la discusión de ideas y estrategias, modificar las condiciones iniciales	307. A2 = [...] ¿cuál es que tengo que animar? 308. A1 = Depende cual sea tu barra acopladora, ¿cuál es tu barra fija? 309. A2 = Es este 310. A1 = entonces esta se va aquedar fija, y ¿cuál es la que se va a mover, cual es la manivela? 311. A2 = Esta 312. A1 = Entonces agarra ese, no la sueltes, ¿ok? ahí está, se truena porque estos dos se mueven, se supone que no se deberían de mover 313. A2 = No, ¿sabes qué? esta se está haciendo más larga.
	Demanda Cognitiva: Provocar la generación de nuevos problemas	327. A3 = [...] el que debe de girar es el que tiene menor longitud. 328. A2 = Exactamente, el que tiene menor longitud es el que debe de girar, si giras el grande pues se va a tronar 329. A3 = ¿Qué pasa si gira otro?
	Uso de la Tecnología: Potenciar y extender el repertorio de heurísticas.	270. A1 = Para que el mecanismo de Grashof funcione, la diferencia entre el lado fijo y la manivela debe ser igual o mayor que la diferencia de la barra acopladora y el balancín. 271. A2 = Y la barra fija debe ser menor 272. A1 = Debe ser menor que la acopladora ¿no? 273. A2 = Ajá y que la manivela sea menor que el balancín 274. A1 = O sea la manivela es menor que esta ¿no?, 277. A2 = Haber 8, 10 278. A1 = Auméntale 1 279. A2 = Pero acuérdate que ya no nos va a dar, haber 6, 9, 7, 11 295. A2 = ¿Qué pasa si le cambiamos ahora al revés?, cámbiale… ahora la diferencia entre uno y otro, es decir esta diferencia es menor o igual que esta 296. A1 = ahora, esta de aquí es menor

Tabla 4.9: El proceso inquisitivo que se le planteará al resolutor, debe ser concebido por el profesor desde el diseño de la tarea, durante la realización didáctica la tecnología permite que los resolutores se hagan un tipo de preguntas que sin su uso sería difícil entender.

Tras lo anterior, se puede considerar que los estudiantes utilizaron el software como una herramienta que les permitió validar sus observaciones, sin llegar a justificaciones formales, además de explorar ideas tanto propuestas en el protocolo de la sesión o por el instructor, como personales; para lo anterior el comando número o arrastre les permitió modificar los atributos de la construcción; en algunos casos modificaban directamente la longitud de una o más barras con el comando número y lo hacían exclusivamente para números enteros, en particular porque querían observar la suma o diferencia entre dos barras y tenían la necesidad de comparar el resultado con otras longitudes, lo cual hicieron mentalmente pues desconocían el comando calculadora del software y el instructor no lo presentó en el transcurso de la sesión; en pocos casos modificaron atributos mediante la herramienta de arrastre directamente sobre algún segmento que representara la longitud de una de las barras.

El comando animación o arrastre fue utilizado con frecuencia para asegurarse que al realizar una propuesta de mecanismo, este funcionara como mecanismo de Grashof, aunque prácticamente no se presentaron casos en los que tras un trabajo en lápiz y papel se propusiera las dimensiones de un mecanismo y el software se utilizara para comprobar su funcionamiento.

En general, los estudiantes propusieron casos particulares que les permitió identificar patrones, no llegaron a una justificación formal, más bien usaron el mismo software como herramientas de validación de sus conjeturas.

En el siguiente fragmento de la transcripción de la sesión (Apéndice A), se puede observar cómo de manera autónoma, en ausencia del profesor, dos estudiantes discuten cuáles deben ser las condiciones a cumplir para que el mecanismo de cuatro barras funciones como mecanismo de Grashof e interactúan con el software para tratar de validar sus observaciones:

248. A1 = la diferencia entre el lado fijo y la manivela, tiene que ser igual a la del acoplador y a la de… no me acuerdo, ¿cómo dijo que se llamaba?
249. A2 =no se, entonces si le ponemos, la diferencia entre…
250. A1 = si mira, por ejemplo aquí, igual en el otro si le ponemos 10, si gira
251. A2 = si gira, sigue girando ¿no?,
252. A2 = entonces si funciona, cuando la diferencia es la misma, siempre y cuando estos dos lados sean más grandes ¿no?,
253. A1 = o sea los opuestos
254. A2 = si, mira ahí la diferencia es una línea recta y sigue girando, digamos que la manivela y el lado fijo deben ser menos a los lados opuestos, pero las diferencias deben ser iguales, ah pero…
255. A1 = bueno esta es la conclusión de esta ¿no?, ¿cómo le ponemos?
256. A2 = para que el mecanismo de Grashof funcione, la diferencia entre el lado fijo y la manivela debe ser igual
257. A1 = o mayor ¿no?,
258. A2 = haber, no, si es mayor, desaparecen
259. A1 = entonces la diferencia debe ser mayor a la diferencia del acoplador
260. A2 = ¿y cómo se llama el otro lado?
261. A1 = debe ser mayor o igual a la diferencia de la barra acopladora y ¿cómo se llama esta barra que une?,

4.6 CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DE LA TAREA DE APRENDIZAJE Y FACTORES QUE INFLUYERON

¿Qué factores influyeron en el alcance de los objetivos de aprendizaje? ¿Cómo influyó el uso de la tecnología en el logro de los objetivos? ¿Qué principios de la resolución de problemas promovieron el cumplimiento de los objetivos?

En términos generales, se esperaba que con la tarea de aprendizaje, los estudiantes tuvieran acceso a diferentes sistemas de representación, por ejemplo que transitaran de las representaciones geométricas a las aritméticas o de las representaciones aritméticas a las algebraicas; también se esperaba que la tarea motivara a los estudiantes a identificar patrones, plantear conjeturas y tratar de justificarlas, lo anterior en un ambiente de resolución de problemas, es decir enfrentando a los estudiantes a una tarea no rutinaria, que demandara de ellos no sólo procesos algorítmicos, sino que articulara conocimientos previos con elementos de la tarea para generar nuevos conceptos, además de favorecer en los estudiantes aspectos relacionados con la experimentación de sus propias ideas.

En este sentido los objetivos de la tarea fueron alcanzados, dado que los estudiantes en la mayor parte del tiempo transitaron del pensamiento geométrico al aritmético, al buscar relación entre las posiciones adoptadas por el mecanismo y las longitudes de las barras que lo forman. Hubo tránsito hacia el pensamiento algebraico, sobre todo en intentos por expresar criterios que les permitieran saber si un cuadrilátero es posible de construir o si un cuadrilátero puede funcionar como mecanismo de Grashof, al utilizar desigualdades e igualdades para tratar de explicarlo.

A continuación se muestra un fragmento del Apéndice C (condensado de respuestas), en el que los estudiantes antes de pasar al trabajo por equipos, respondieron de forma individual, la pregunta ¿De que crees que depende que una de las barras del mecanismo pueda dar una revolución completa? Esto después de intentar representar un mecanismo de Grashof con el uso del software dinámico.

¿De que crees que depende que una de las barras del mecanismo pueda dar una revolución completa?

Participante	
1	**El tamaño de las barras, la barra móvil debe ser más pequeña que las otras**
2	**La longitud del paralelogramo**
3	**Que la suma de 2 lados es igual a la suma de los otros dos**
4	**De que la medida de dos de los lados (el fijo y el que gira) sea mayor que el lado acoplador**
5	**Yo pienso que deben ser iguales los lados o números continuos**
6	**Que la suma de dos lados debe ser igual a la suma de los otros dos**
7	**Que la suma de las longitudes de la barra y de la manivela debe ser menor a la suma de los dos segmentos restantes**

8	**Que la suma de las barras consecutivas sea igual a las otras dos, o que el de la manivela y la de soporte sea ≥ que las otras dos**
9	**El lado más grande es la base, la suma de el lado base y la manivela tiene que ser menor que los otros 2 lados**
10	**Que la suma de los lados A+B = C + D**
11	**Que la suma de dos lados sea igual a la suma de los otros dos lados**
12	**Que una debe ser pequeña en relación a las demás o 2 barras sumadas sus longitudes deben ser igual a la suma de las otras dos**

Se pudo constatar que los estudiantes pasaron del registro visual gráfico, al inicio de la actividad, al registro numérico y al algebraico. En general se observó una interacción visual (software, construcción inicial)- numérica (software, modificación de parámetros, longitudes)- visual (software, construcción modificada)- algebraica (lápiz y papel, expresión que representaba sus observaciones). En un caso, un equipo dejó de lado el software y trabajó representaciones geométricas con lápiz y papel, para posteriormente regresar al software y verificar con este, si sus supuestos eran correctos.

A continuación se presenta un fragmento de la transcripción de la sesión (Apéndice A) en el que se observa el diálogo entre los dos estudiantes (en ausencia del profesor), en un intento de formalizar sus ideas y la necesidad de interactuar con el software para corroborar sus supuestos:

270. A1 = para que el mecanismo de Grashof funcione, la diferencia entre el lado fijo y la manivela debe ser igual o mayor que la diferencia de la barra acopladora y el balancín
271. A2 = y la barra fija debe ser menor
272. A1 = debe ser menor que la acopladora ¿no?
273. A2 = ajá y que la manivela sea menor que el balancín
274. A1 = o sea la manivela es menor que esta ¿no?,
276. A1 = oye también la diferencia de su ángulos tiene que ser la misma, es decir este con este y este con este tiene que ser la misma de este con este ¿no?, haber chécalo
277. A2 = haber 8, 10
278. A1 = auméntale 1
279. A2 = pero acuérdate que ya no nos va a dar, haber 6, 9, 7, 11
283. A2 = otra condición es la diferencia entre el acoplador y el lado fijo debe ser igual a la diferencia entre el balancín y la manivela ¿no?, haber espérate, voy a ver qué pasa si le aumento y me da la diferencia entre este y este
286. A1 = si es menor la diferencia entre el acoplador y el balancín
287. A2 = si funciona así
289. A2 = con 9 desaparece
290. A1 = haber con 5, aquí la diferencia
291. A2 = es 1 y 2
292. A1 = si mira deben ser deben ser menor o igual
293. A2 = pero la del acoplador con el lado fijo
294. A1 = si mira, la diferencia del acoplador con el lado fijo debe ser menor o igual que la diferencia con estos, mira aquí la diferencia es menor

Al término de realización didáctica, se pudo corroborar tras recuperar la guía de la actividad contestada por cada estudiante (Apéndice B), que en general la experiencia de participar en la solución de esta tarea resultó de valor para ellos, a pesar de no conocer en su mayoría el software de geometría dinámica, les ocupó poco tiempo de la actividad familiarizarse con este y consideraron que la organización del trabajo (al inicio individual y posteriormente en equipo), el tipo de tarea y el uso del software, fue una experiencia que les agradó y les gustaría repetir, pues les permitió discutir ideas y aprender algo nuevo. Para mayor detalle, se puede consultar el condensado de respuestas de los estudiantes en la guía de actividad (Apéndice C).

Fue notable que en general lo que más les gustó de la experiencia a los participantes fue el uso del software dinámico, y llama la atención que al preguntarles qué fue lo que menos les gustó de la experiencia, la mayoría se refirió al nulo conocimiento que tenían en el uso del software o a que por falta del tiempo no se pudo concluir la actividad y en particular un estudiante contestó que lo que menos le gustó fue que el software evita que él se esfuerce en imaginar. (Fragmento Apéndice C)

8.- ¿Qué es lo que menos te ha gustado de esta experiencia?

Participante	
1	**Al principio no saber usar el programa**
2	**Mucho tiempo para poca información**
3	**Nada**
4	**Fue corto tiempo**
5	**Estaba agradable**
6	**Que me tardé mucho tiempo en entenderle al programa Cabri**
7	**Que no conocía el software**
8	**No me esfuerzo por imaginar ya que el software lo muestra**
9	**No contestó la pregunta**
10	**Que no acabamos**
11	**Nada**
12	**Nada en lo absoluto todo estuvo bien**

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta una discusión sobre los resultados presentados en el capítulo anterior, además de las conclusiones de la investigación con en base en los objetivos del estudio, con la finalidad de responder a las preguntas de investigación.

El problema de investigación consiste en determinar algunos de los principios teóricos que se deben tomar en cuenta al diseñar tareas de aprendizaje matemático que valoren el uso de la tecnología, de forma tal que a través del desarrollo de la misma, un estudiante pueda alcanzar un objetivo de aprendizaje particular (ver tabla 5.2). El análisis se basó en contrastar una ruta hipotética de instrucción, elaborada en la fase de diseño de las tareas, contra rutas seguidas por los estudiantes durante la realización didáctica de las actividades, así como en identificar el papel del profesor en relación con el mantenimiento de la demanda cognitiva de las tareas de aprendizaje durante el proceso de instrucción.

Se identificaron algunos elementos y características que deben tener las tareas de aprendizaje matemático, diseñadas con el enfoque de resolución de problemas, al utilizar en particular software de geometría dinámica para su solución (capítulo 2).

Se documentó el proceso que se siguió para diseñar una tarea de aprendizaje en particular, se evidenció la manera en que los principios del marco conceptual influyeron en su diseño, se elaboró una ruta hipotética de instrucción y se contrastó con las rutas seguidas en la realización didáctica (capítulos 3 y 4).

5.2 FUNCIONES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Una perspectiva errónea de algunos profesores de matemáticas, es que pretenden "inyectar" en los estudiantes el conocimiento matemático, cuando deberían construirlo día con día por medio del trabajo arduo. Una idea que se mencionó a lo largo de este trabajo y que en esta última sección se sostiene, es que el profesor de matemáticas debería diseñar tareas de aprendizaje con las que pretende que los estudiantes aprendan matemáticas y no ser solamente un "puente" entre las actividades propuestas o diseñadas por otros, por ejemplo las que aparecen en las libros de texto y guías didácticas. Consideramos fundamental que el profesor participe en el diseño o modificación de las actividades para que sea consciente de las distintas rutas que pueden seguir los resolutores, así como de las dificultades que se pueden presentar.

En este sentido, se pueden establecer algunas de las actividades que debe realizar el profesor de matemáticas durante el diseño e implementación de las tareas de aprendizaje, las cuales se resumen en la siguiente tabla.

	Durante el diseño de la tarea	Durante la ejecución de la tarea
FUNCIONES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS	– Elaborar el objetivo de aprendizaje que se pretende alcanzar con la tarea. – Elegir adecuadamente el contexto en que se situará la tarea (puramente matemático, hipotético, del mundo real). – Seleccionar o elaborar el problema central a resolver (en caso de ser un problema rutinario, hacer modificaciones para que sea no rutinario). – Identificar los elementos matemáticos estructurados en torno el objetivo de aprendizaje (conocimientos previos requeridos, conceptos que ya tienen los estudiantes en su red de conocimientos, nuevos conceptos o conocimiento que se pretende articular con el existente). – Planear el escenario de instrucción (tiempo para la ejecución de la tarea, organización de los estudiantes: individual o grupal, recursos a utilizar: equipos de cómputo, calculadoras, etc.). – Identificar posibles rutas a seguir por parte de los estudiantes durante la ejecución de la tarea. – Elaborar una guía de aplicación o guión para la ejecución de la actividad, incluyendo las preguntas que deba proponer a los estudiantes para encaminarlos al logro del objetivo de aprendizaje.	– Preparar el escenario de instrucción según lo planificado. – Ayudar a los estudiantes para que desarrollen elementos del pensar matemáticamente (identificar información, identificar patrones, elaborar conjeturas, etc.) con cuidado de no ayudarlos de más ni de prestarles poca ayuda. – Asegurarse que el enunciado de la tarea ha sido entendido por parte de los estudiantes, por medio de preguntas, o solicitando que ellos lo expliquen. – Dialogar constantemente con los estudiantes para promover que ellos expongan sus ideas y estrategias de resolución. – Tener especial atención en el trabajo desarrollado por los estudiantes con el uso del software, para asegurarse que lo utilicen como una herramienta que les permita explorar ideas matemáticas, elaborar conjeturas, tratar de dar justificaciones formales, etc. – Mantener la demanda cognitiva de la tarea, sobre todo por medio de las preguntas que haga a los estudiantes (proceso inquisitivo). – Tratar de relacionar contenidos de diversas áreas de las matemáticas o con otras áreas del conocimiento por medio de comentarios o preguntas. – Fomentar extensiones de la actividad, elaboración de nuevas preguntas y generación de nuevos problemas relacionados con la actividad.

Tabla 5.1: Resume algunas de las funciones que debe realizar el profesor al diseñar una tarea de aprendizaje y al implementarla con los estudiantes

5.3 RESPUESTA A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

En cuanto a las tres preguntas de investigación planteadas al inicio:

1. ¿Cuáles son las bases y principios teóricos dentro del marco de resolución de problemas que pueden orientar el diseño de actividades de aprendizaje, en particular de las que promueven la construcción de conocimiento matemático con entendimiento, apoyada en el uso de herramientas digitales?

Tras la investigación documental realizada para este estudio, el diseño de una tarea de aprendizaje con el enfoque en las perspectivas teóricas adoptadas y realización didáctica que permitió recopilar los datos que contribuyen a dar respuestas a las preguntas de investigación, se presenta la siguiente tabla, que resume lo que se propone como las bases y principios para el diseño de tareas de aprendizaje matemático. Se considera que lo relevante de la propuesta es que además de haberlos identificado en tres diferentes perspectivas teóricas, es que se utilizaron en la práctica para el diseño de una actividad que dio sustento a esta propuesta, además en la sección 5.4 (aportaciones de esta investigación), se sugiere tomar en cuenta otros principios para diseñar tareas de aprendizaje matemático.

Base Teórica / Elemento del Marco Conceptual	**Principios para el diseño de Tareas de Aprendizaje Matemático**
Resolución de Problemas	– Las actividades planteadas deben centrarse en el proceso de pensamiento de los estudiantes, no en el resultado. – Por medio de las actividades se debe favorecer la autonomía de resolución y el reconocimiento de múltiples soluciones por parte de los estudiantes. – Las actividades deben promover y facilitar la experimentación, así como la elaboración de conjeturas. – Las tareas de aprendizaje deben motivar al resolutor a quererlas resolver. – Las actividades planteadas deben promover la discusión y comunicación de ideas y estrategias para su solución. – Deben conectarse con conocimientos matemáticos que ya existen en la red conceptual del estudiante. – Deben conectar distintas áreas de las matemáticas u otras áreas del conocimiento. – Las tareas de aprendizaje deben ser factibles de resolverse por más de un camino o método.
Demanda Cognitiva	– Plantear problemas que admiten varias soluciones y representaciones. – Plantear problemas que creen conexiones entre distintas áreas de las matemáticas. – Proveer el tiempo adecuado para solución de la tarea, (ni mucho, ni

	poco). – Plantear problemas que se basen en los conocimientos previos de los estudiantes. – Realizar preguntas que permita a los estudiantes la extensión de la actividad y la generación de nuevos problemas
Tecnología Digital	– El uso de software dinámico para resolver las tareas debe contribuir a evitar o disminuir prácticas algorítmicas únicamente. – La tecnología puede favorecer la identificación de patrones subyacentes a la resolución de la tarea. – El uso de la tecnología en la resolución de problemas debe ayudar a explorar las ideas matemáticas que tenga el resolutor. – La tecnología digital debe promover el uso de distintos tipos de representaciones de la información contenida en la actividad. – El software se debe usar para facilitar la identificación e implementación de heurísticas en la solución de los problemas e incluso para extenderlas. – La incorporación de herramientas digitales puede permitir a los estudiantes explorar problemas que con sólo lápiz y papel serían menos accesibles.

Tabla 5.2: Bases y principios que se proponen utilizar para diseñar tareas de aprendizaje matemático

2. ¿Qué clase de transformaciones del currículo implica la introducción de este tipo de actividades en el aula de matemáticas?

Al pretender que las actividades en el aula de matemáticas estén enfocadas a la perspectiva de resolución de problemas y se incorpore el uso de la tecnología, se debe pensar en hacer transformaciones al currículum de matemáticas, estas transformaciones deberían ser profundas, pues deberá involucrar: objetivos del programa, contenidos matemáticos, tópicos a desarrollar, tiempos de instrucción, requerimientos y en general un cambio de enfoque de lo que tradicionalmente se concibe como la enseñanza de las matemáticas.

Es evidente que además de preocuparse por las transformaciones al currículum de matemáticas con base en la perspectiva bajo la cual se pretende enseñar (en nuestro caso bajo el enfoque de resolución de problemas), se debe considerar también el papel que jugará la tecnología en estos cambios.

Para responder a esta pregunta, con base en la realización didáctica, se puede concluir que:

(i) Los contenidos matemáticos a discutir en clase deberían estar enfocados a no sólo fomentar aspectos rutinarios y memorísticos de las matemáticas, tales como resolver problemas por medio de algún algoritmo una y otra vez, sino a promover lo que durante este trabajo se considera pensar matemáticamente (establecer relaciones entre datos e incógnitas, identificar patrones, elaborar conjeturas, hacer generalizaciones, etc.).

(ii) Los contenidos matemáticos no deberían enseñarse como tópicos aislados o sin relación, es decir, para implementar actividades en el salón de clase bajo el enfoque de este trabajo, el profesor no debe pretender abordar los contenidos en una secuencia lineal, que es como suelen aparecer en el currículum, sino diseñar actividades que le demanden al resolutor crear conexiones entre distintas áreas de la matemática, así como elaborar diferentes representaciones de la información.

(iii) El tiempo asignado a la revisión de cada contenido debería ser lo suficientemente extenso para que se discutan a fondo aspectos relacionados con la resolución de problemas que permita a los estudiantes involucrarse con aspectos no rutinarios, tales como identificar patrones, plantear estrategias de resolución de problemas, experimentar ideas, plantear conjeturas, tratar de dar justificaciones formales, extender y formular nuevos problemas (pensar matemáticamente).

(iv) La tecnología digital en clase de matemáticas no debería ser sugerida como un recurso didáctico solamente, su incorporación al currículum de matemáticas escolares debería ser sistemática, ya que existe consenso en cuanto a la importancia que tiene.

(v) La demanda cognitiva debería ser un elemento a tomar en cuanto para diseñar el currículum de matemáticas, establecer actividades de aprendizaje que fomente el mantenimiento e incremento de la demanda cognitiva debería ser primordial.

3. ¿Qué características deben tener los diseñadores de tareas de aprendizaje matemático en las que se valora el uso de la tecnología?

Para iniciar la discusión, se debe partir de una idea que ya se mencionó en apartados anteriores: una de las funciones principales de los profesores de matemáticas, debiera consistir en diseñar actividades o tareas de aprendizaje que promuevan entre los estudiantes en términos generales un pensamiento matemático, en este sentido, para tratar de discutir la respuesta a esta pregunta, los diseñadores de tareas de aprendizaje deberían ser los profesores de matemáticas.

Existe consenso respecto al hecho de que para ser profesor de matemáticas, se debe por un lado, saber matemáticas y por otro lado saber enseñar matemáticas, sin embargo, como mencionan Ávila, Pérez y Santillán, (2008), lo primero no implica lo segundo. Para lograr ser un buen profesor de matemáticas, es indispensable la actualización constante en estas dos componentes.

Para que el profesor de matemáticas conozca la tecnología de que puede disponer y el uso que le puede dar, es necesario que participe en programas de formación y actualización permanentes, en los que además de profesores se deberán incluir a profesionales en educación matemática y en términos generales fomentarse el uso de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas

Para tratar de responder a esta pregunta, por un lado ya fueron identificadas algunas de las funciones que el profesor de matemáticas debe realizar durante el diseño y la ejecución de las tareas de aprendizaje, lo cual se puede retomar para enunciar algunas de las características que se sugiere debe reunir el profesor de matemáticas de bachillerato

En la siguiente tabla, se resumen lo que a la luz de los resultados obtenidos en este trabajo, se consideran algunos de los elementos que debe contener el perfil del profesor de matemáticas, en particular de nivel medio superior y superior, esto con base en las lecturas para establecer los antecedentes y marco teórico de la presente investigación, además de la experiencia de diseñar la tarea de aprendizaje utilizada para la recolección de datos.

Conocimientos matemáticos	**Elementos de educación matemática**	**Uso de tecnologías digitales**
– Conocimientos profundos de los tópicos que aparecen en el currículum de matemáticas del nivel escolar en que se desempeña. – Habilidad para realizar distintas formas de representación de información matemática. – Saber mucho más de lo que enseña, en cuanto a tópicos de matemáticas se refiere. – Entender aspectos de otras áreas del conocimiento como química, biología o física, que le permita establecer relaciones con los tópicos de matemáticas.	– Conocimientos sobre historia de las matemáticas. – Saber acerca de los principales aspectos de algunas teorías sobre la construcción del conocimiento en los individuos. – Conocimiento sobre los aspectos centrales de las principales teorías, perspectivas o marcos teóricos sobre educación matemática.	– Conocimientos y habilidad para manipular distintos tipos de software para la enseñanza de las matemáticas. – Conocimiento sobre algunos aspectos de las perspectivas teóricas que estudian la forma en que un individuo se apropia de un instrumento para convertirlo en una herramienta de resolución de problemas. – Apertura para cambiar o modificar aspectos metodológicos de la forma en que imparte clase. – Interés investigativo para buscar constantemente nuevas formas de presentar contenidos matemáticos con el uso de la tecnología digital

Tabla 5.3: Características de los diseñadores de tareas de aprendizaje matemático.

5.4 APORTACIONES DE ESTA INVESTIGACIÓN RESPECTO A OTROS TRABAJOS.

Una de las aportaciones de interés que se pueden considerar dentro de este estudio es la identificación e incorporación para el diseño de actividades, del constructo de la demanda cognitiva de las tareas de aprendizaje matemático (Stein y Smith, capítulo 2), que aunque es utilizado y referenciado en diversos estudios publicados en inglés desde hace varios años, al momento de escribir este capítulo final, aún no se encuentran referencias al respecto en español.

Esta perspectiva teórica que se adoptó como parte del marco conceptual, además de aportar elementos para diseñar las tareas de aprendizaje, permite también abrir líneas de investigación en cuanto a cómo medir y mantener la demanda cognitiva de una tarea de aprendizaje.

Otra de las aportaciones que se consideran relevantes dentro de este estudio, es que a diferencia de estudios previos relacionados con el diseño de tareas de aprendizaje, en esta investigación se trató de mostrar con detalle cómo fue diseñada una tarea en particular, desde la elección de un contexto, el establecimiento de los objetivos de aprendizaje, la forma en que los elementos del marco conceptual incidieron en el diseño, hasta el desarrollo de la guía de aplicación, el establecimiento de rutas hipotéticas de solución y el proceso inquisitivo que el profesor pudiera entablar con los estudiantes para guiarlos al cumplimiento del objetivo de aprendizaje durante la implementación.

Tras la experiencia de diseñar la tarea de aprendizaje utilizada para recolectar los datos de este estudio, y la identificación de algunos principios teóricos que pueden orientar el diseño de otras tareas, con base en la investigación documental que se efectuó para establecer el marco conceptual de esta investigación; nos animamos a sugerir que se debieran considerar como principios adicionales: (i) la elección y justificación de un contexto para los problemas (hipotético, matemático o real), acorde con el objetivo de aprendizaje; (ii) la adaptabilidad y adecuación de la tarea a los distintos escenarios que se pueden presentar y (iii) el establecimiento de rutas hipotéticas de solución.

En este sentido, se espera que aquellos profesores interesados en diseñar o rediseñar tareas de aprendizaje matemático, bajo la perspectiva de resolución de problemas, encuentren en este estudio una guía, que les permita además usar la tecnología como un elemento que favorezca el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje propuestos.

5.5 LIMITACIONES DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Este trabajo no está exento de ciertas limitaciones, algunas debido a la cantidad de información que se recopiló con base en la metodología propuesta y otras debido al tiempo disponible para el análisis de dichos datos, Estas limitaciones determinan en gran parte la, posibilidad de investigaciones futuras utilizando el mismo enfoque.

Se llevó a cabo la realización didáctica de una tarea de aprendizaje diseñada previamente bajo los principios descritos en el marco conceptual, en dos diferentes escenarios (capítulo 3) sin embargo, por limitaciones de tiempo entre otros factores, se decidió analizar los datos recabados en uno de los escenarios de instrucción.

Al decidirse por el estudio de caso como opción metodológica, se optó por diseñar e implementar una tarea en un contexto específico, (mundo real), queda pendiente explorar bajo el mismo enfoque, tareas diseñadas en otros contextos.

Se utilizaron algunos principios del constructo demanda cognitiva, para garantizar que durante la realización didáctica, la demanda cognitiva se mantuviera, sin embargo no se identificó una escala o parámetros para medir en qué nivel de demanda cognitiva se mantuvo la actividad en cada etapa de la realización didáctica.

5.6 IMPLICACIONES DIDÁCTICAS DEL TRABAJO

Algunas de las implicaciones que pueden derivarse de este trabajo son:

(i) El profesor de matemáticas juega un papel protagónico en el logro de los objetivos de aprendizaje por parte de los estudiantes, entre las funciones que debe cubrir es el diseñar tareas de aprendizaje acordes a esto, motivo por el cual el profesor de matemáticas debe contar con cierto perfil (tabla 5.3).

(ii) El uso de herramientas digitales en el aprendizaje de las matemáticas favorece aspectos del pensamiento matemático que con el sólo uso de lápiz y papel no son tan claros, en este sentido, el profesor debe decidir en qué momento y de qué forma debe hacer uso de estos recursos.

(iii) Implementar en el aula de matemáticas tareas de aprendizaje como las que en este trabajo se proponen, requiere que de inicio que el profesor de matemáticas modifique su visión sobre ¿qué significa aprender matemáticas? además de los aspectos importantes a resaltar durante las clases, pero se requiere también reestructurar la visión en general de lo que son las matemáticas en la escuela.

5.7 ALGUNAS PROPUESTAS A FUTURO

Con base en los resultados obtenidos en este trabajo se sugieren algunas líneas de investigación que permitirían avanzar en la agenda de investigación orientada a establecer el papel de las tareas de instrucción en el desarrollo de un pensamiento matemático en los estudiantes.

(1) Contrastar las estrategias de resolución de tareas de aprendizaje diseñadas bajo los principios aquí establecidos en diferentes escenarios de instrucción.

(2) Análisis de los principios establecidos para el diseño de tareas de aprendizaje cuando éstas se encuentran situadas en diferentes contextos (puramente matemático, hipotético y del mundo real).

(3) Revisar el marco de la demanda cognitiva de las tareas de aprendizaje con base en tareas diseñadas bajo el enfoque adoptado este trabajo.

(4) Profundizar en el análisis de un cambio curricular basado en tareas de aprendizaje matemático en las que se hace un uso sistemático de las tecnologías digitales.

(5) Analizar las características de los sistemas de formación profesional que propicien que el profesor de matemáticas, adquiera conocimientos y habilidades que le permitan diseñar tareas de aprendizaje matemático orientadas a fomentar el desarrollo de un pensamiento matemático en los estudiantes.

REFERENCIAS

Álvarez-Gayou, J. L. (2005). *¿Cómo hacer investigación cualitativa? Fundamentos y metodología*, México: Paidos Educador.

Ávila, A., Pérez, V. y Santillán, M. (2008). La formación de profesores de matemáticas en el CCH. En Barrera, F. et al. (Eds). *Memorias del Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas*. (pp. 59-65). Pachuca, Hidalgo.

Barrera, F. y Santos-Trigo, M. (2002). Cualidades y Procesos Matemáticos Importantes en la Resolución de Problemas: Un Caso Hipotético de suministro de medicamento. En Ministerio de Educación Nacional (Ed). *Memorias de Incorporación de nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media en Colombia*. (pp. 166-185). Bogotá, Colombia.

Barrera, F. (2008). Reporte de la primera etapa del Proyecto CONACYT*: "Bases Teóricas y Conceptuales en la Construcción del Conocimiento Matemático y el Empleo de Herramientas Digitales.* (Número de Registro: 61996), México.

Barrera, F., & Reyes, A. (in process). Instructional routes and teacher's conceptual network: the case of irrationality of square root of two. *Primus (Problems Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies).*

Bayazit, I. (2006). Task Selection and Task Implementation: Seven Constraints Affecting The Teacher's Instruction. En Hewitt, D. (Ed) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics.* (vol. 26, pp.23-28).

Benítez Mojica, D. (2005) Resolución de problemas de cónicas con el apoyo de la geometría dinámica. En *Memorias del XVI Encuentro de Geometría y sus aplicaciones y IV encuentro de aritmética. I,* pp (77-88). Bogotá, Colombia.

Benítez Mojica, D. y Londoño Millán, N**.** (2009) Situaciones Problemáticas en Contexto en el Aprendizaje del Cálculo. *El Cálculo y su Enseñanza* © 2009 Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México D.F.

Borchelth, N. (2007). Cognitive Computer Tools in the Teaching and Learning of Undergraduate Calculus. *International Journal for the Scholarship of Teaching and Learning, 1*, (2).

Brosseau, G. (1997). Foundations and Methods of Didactique. *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. En N. Balacheff et al (Ed), (pp 3, 75). Kluwer Academic Publisher. Great Britain.

Brousseau, G. (2006). Mathematics, Didactical Engineering and Observation. En Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1, pp. 3-18). Prague: PME.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas.* Buenos Aires : Libros del Zorzal.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2004). *Research Methods in Education* (5th edition). London: RoutledgeFalmer.

Denzin, N. & Lincon, Y. (2003). *Collecting and Interpreting Qualitative Materials.* (2nd Edition). London*:* Sage Publications.

Escudero, J., Delfino, L. y Gutiérrez, L. (2008). El estudio de casos como estrategia de investigación en las ciencias sociales. *Ciencia Administrativa* (pp. 7-10).

Fernández, L. (2006). ¿Cómo analizar datos cualitativos? *Butlletí LaRecerca.* Universitat de Barcelona. Institut de Ciències de l'Educació. (pp.1-13)

Flores, A. (2008). Plantear y replantear problemas para propiciar la investigación matemática independiente. En Barrera, F. et al. (Eds), *Memorias del Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas*. Pachuca, Hidalgo. (pp.33-40).

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 20, 2*(3), 11-44.

Goetz, J. y LeCompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Ediciones Morata.

Goldenberg, P. (2000). Thinking (and Talking) About Technology in Math Classrooms. *Issues in Mathematics Education*. (pp. 1-8)

González, T. y Cano, A. (2010, a). Introducción al análisis de datos en investigación cualitativa: concepto y características. *Revista de investigación NURE,* 44, 1-5.

González, T. y Cano, A. (2010, b). Introducción al análisis de datos en investigación cualitativa: Tipos de análisis y procesos de codificación. *Revista de investigación NURE,* 46, 1-10.

Hemmerling, E. (1996). *Geometría Elemental (*Decimosexta reimpresión). México: Limusa.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann

Iglesias, R. (2006) Análisis de la sombra proyectada por una persona en movimiento. En *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Cabri 2006,* Colombia. (pp. 1-10)

Imaz, C. y Santos-Trigo, M. (2007). Sobre las Reformas en Educación Matemática. *Conversus*, (pp. 38-40).

Jiménez, B. y Tejada, J. (2006). *Procesos y Métodos de Investigación* CIFO.

Karelin, O. Rondero, C. y Tarasenko, A. (2008). *Desigualdades: Métodos de Cálculo no Tradicionales.* México: Ediciones Díaz de Santos.

Kribs, C. (2009). *Un marco para analizar demanda cognitiva y riqueza matemática en la resolución de problemas*. Conferencia presentada en la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH). Fecha: 20 de Marzo de 2009.

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM, 37* (6), 457-467.

Mabie, H. y Reinholtz, C. (2004). *Mecanismos y Dinámica de Maquinaria.* México: Limusa.

Martínez, M. (2006). La Investigación Cualitativa (Síntesis Conceptual). *Revista IIPSI, 9* (1), 123-146.

Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis* (2nd edition).Thousand Oaks, California: SAGE.

Moreno, L. y Santos, M. (2002) Proceso de transformación del uso de tecnología en herramienta para solucionar problemas de matemáticas por los estudiantes. En Ministerio de Educación Nacional (Ed). *Memorias de Incorporación de nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media en Colombia*. (pp. 263-268)

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1981). *Sugerencias para resolver problemas*. México: Trillas.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles & Standards For School Mathematics.*
Recuperado de: http://www.nctm.org/fullstandards/document/chapter2/techn.asp el 20 de Octubre de 2009.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2008). *The Role of Technolgy in the Teaching and Learning of Mathematics: A Position of the National Council of Teachers of Mathematics*
Recuperado de: http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=14233 el 26 de Octubre de 2009.

Polya, G. (1996) *Cómo Plantear y Resolver Problemas.* México: Trillas. (Trabajo original publicado en 1945)

Sandoval, C. (2002). *Investigación Cualitativa*. (Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior, ICFES). Colombia: ARFO Editores e Impresores Ltda.

Santos-Trigo, M. (2001). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. *Avance y Perspectiva,* 20, 247-258.

Santos-Trigo, M. (2003). Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas. En A. Arriata (Ed.), *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X,(2). (pp. 195-212)

Santos-Trigo, M. (2007). *La Resolución de Problemas Matemáticos: Fundamentos Cognitivos*. México: Trillas.

Santos-Trigo, M. (2008) Sobre la Construcción de una Comunidad de Práctica en la Resolución de Problemas. En Barrera, F. et al (Eds). *Memorias del Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas*. Pachuca, Hidalgo. (pp. 133-144)

Santos-Trigo, M. y Benítez, D. (2003) Herramientas Tecnológicas en el Desarrollo de Sistemas de Representación para la Resolución de Problemas. *Perfiles Educativos*, *XXV*, 100, 23-41.

Sepúlveda, A. y Santos-Trigo, M. (2006). Desarrollo de episodios de comprensión matemática: Estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *11* (31), 1389-1422.

Shigley, J. (1970). *Análisis Cinemático de Mecanismos.* México: MacGraw Hill.

Shigley, J. y Uicker, J. (1999). *Teoría de Máquinas y Mecanismos.* México: McGraw Hill.

Schoenfeld, A. H. (1998). Reflections on a course in mathematical problem solving. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (pp. 81-113). Washington, DC: American Mathematical Society.

Spivak, M. (1996). *Cálculo Infinitesimal* (segunda edición). México: Editorial Rverté.

Stein, M., Remillard, J. & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. En F. Lester (Ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.319-369). New York: Macmillan.

Ursini, S. (2006) Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología. En Rojano, T. (Ed.) *Enseñanza de las Física y las Matemática con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula* (pp. 25-41). México, DF.

Villalobos, X. (2008). Resolución de problemas matemáticos: Un cambio epistemológico con resultados metodológicos. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en la Educación. 6* (3), 36-58.

APÉNDICE A

Transcripción de la sesión con alumnos de Física UAEH

(M=instructor, A= estudiante, O= observador)

1. M= […] vamos a empezar con algo muy sencillo, como dice ahí vamos a trabajar sobre esas hojas y ustedes también van a estar trabajando en el software, vamos a empezar con la primera actividad o con lo que dice preámbulo, inicien entonces el software y si ya tienen Cabri, la actividad del inciso a) es muy sencilla, por favor construyan un cuadrilátero con las dimensiones de los lados que ahí se marcan; 5, 7, 8 y 13 centímetros, si alguien tiene alguna duda nos preguntan, sino empiecen a trabajar, yo igual lo voy a ir construyendo para que puedan guiarse si ustedes no recuerdan de repente como hacerlo, como tenemos ya unas dimensiones determinadas, lo ideal sería primero introducir esos números, es decir no tratar de atinarle a la medida de los segmentos arrastrándolos, entonces voy a definir esas medidas con la opción de "número" y bueno, pues una forma adecuada de hacerlos sería ahora con el compás ir tomando las dimensiones ahí directamente, entonces cada quien construya el cuadrilátero, vamos a ver qué obtenemos, les digo una forma de hacerlo es con el compás ir tomando las medidas, simplemente lo voy a hacer en un orden, no tiene que ser necesariamente en ese, voy a empezar con el de 5, ahí trazo ese círculo de radio 5, entonces ya puedo dibujar el primer lado del cuadrilátero o un segmento que represente ese lado, los círculos los voy a ir ocultando para que no me estorben, si tienen dudas repito nos preguntan, entonces ya hice el lado de 5, pues a mí me place que el lado de 13 sea como que una base, lo voy a poner a continuación ese otro lado, ustedes lo pueden hacer en el orden que quieran, yo llevo dos lados el 5 y el de 13 y ahora algo muy importante tienen que ver; cómo hacerle para que los otros dos lados les den las dimensiones que queremos, entonces yo voy a continuar con el compás, me faltan el lado de 7 y el lado de 8, y tengo dos extremos libres… yo ya termine, si tienen alguna duda…

Instructor con un estudiantes…

2. M= primero, ya definiste esos números, sino hay que definirlos, ese comando va a reconocer las longitudes en centímetros, entonces activas tu compás, selecciona por ejemplo el numero 5, y te apoyas en donde tú quieras y te va a tratar un círculo de radio 5, entonces tú ya puedes ahora apoyarte en el centro y trazar un segmento y tienes la seguridad de que mide 5 centímetros, ¿sale?, entonces abres ese botón, ahí viene la opción de segmento, entonces de ahí a cualquier punto de ese círculo tu sabes que ya tienes un segmento de longitud 5, que es lo que querías y ahora tienes que ir colocando los otros lados de una forma similar con el compás….
3. A = ah, o sea este y luego 7 acá,

4. M = El orden no es relevante, no hay un orden en especial para irlo construyendo, yo por ejemplo lo hice en un orden en específico pero no tiene que ser el mismo, entonces lo interesante es que tú al final construyas un cuadrilátero donde los lados midan esos números y se puede hacer con el compás seleccionando esas medidas, haber ¿alguien ya terminó…?

Instructor con estudiante…

5. M= yo creo maximizamos para que nos ayude, entonces tú ya introdujiste esos números, esos datos, ahora si utilizas la opción de compás te los reconoce como longitudes en centímetros, en este caso, si tú con el compás seleccionas el número 5 y te apoyas aquí te traza un círculo de radio 5, ¿por qué es bueno hacerlo así? porque entonces cualquier segmento que vaya del centro a cualquier punto del circulo es un segmento de radio 5, que es lo que queríamos, yo les decía que lo iba ir ocultando para que no nos estorbe, lo oculto y entonces ahora hay que colocar en el orden que tú quieras los otros 3 lados, usando igual el compás de forma que lo que obtengamos sea un cuadrilátero,
6. M = Aquí el objetivo al inicio es que todos obtengamos un cuadrilátero donde incluso podemos medir con la herramienta medida de longitud del Cabri y que tenga 4 lados con esas dimensiones,
7. A = una pregunta, ¿para seleccionar el compás?,
8. M = les sugiero a los que no han maximizado la pantalla de Cabri, lo maximicen para que podamos trabajar con más comodidad…

Instructor con estudiante…

9. M= aquí está la herramienta compas, tú por ejemplo seleccionas este número y es como si el compás lo hubieras abierto 5 centímetros, ponlo donde gustes…
10. A = este mide 5 centímetros,
11. M = exactamente , por ejemplo aquí si trazas un radio de este círculo, tienes la seguridad de que este segmento mide 5, entonces por ejemplo dices; ahora quiero, conectar el lado que mide 8 aquí en este extremo, por ejemplo tomas ahora con tu compás y te apoyas aquí y ya vas a poder trazar un segmento que parta de ahí y ya tienes la seguridad que mide 8 y ahí te faltaría articular los otros dos, si quieres seguir con ese orden ya tienes ahí el de 5 y 8, te faltarían el de 7 y 13.
12. A = una pregunta, ¿cómo va?, no se pueden cruzar las que iba trazando de radios con los puntos de la circunferencia, no se mueve este con este,
13. M = haber, ¿cuál fue el primer círculo que trazaste?,
14. A = el de radio 5,
15. M = me imagino que es este y trazaste este segmento…
16. A = este de aquí
17. M = ¿luego?

18. A = el de radio 7
19. M = te apoyaste aquí y ya tienes el lado de radio 7, hasta ahí vas bien, tienes dos lados del cuadrilátero, luego tienes que trazar el de 8 y el de 13, me imagino que este es el de 8, a mí se me hace que ahí te tenías que esperar, porque si te das cuenta cuando trazas el de 8 y lo pones donde tú quieras, realmente no sabes para donde tiene que ir para que te cierre con 13, … como que cuando trazas los dos primeros lados no importa los que tú decidas pero trazas los dos lados, si te das cuenta como que tienes libertad, dices quiero empezar con el lado de 13 lo trazo como caiga, luego dices quiero trazar el lado 5, lo trazas en un extremo del anterior y también como que no es muy relevante pensar hacia dónde va, pero los siguientes dos lados tienen que cerrar de tal forma que te den las longitudes que tu quieres, entonces fíjate que, aquí vas bien, luego cuando trazas el de 8, yo creo que te tenías que esperar, trazar primero el círculo de radio 8 y luego trazar el de radio 13 y ver en donde se cruzan, porque donde se cruzan es a donde tú debes trazar…
20. A = este de aquí de este punto del segmento es el 8 y este de aquí a este de aquí es el de 13
21. M = pero como que, el de 13 tiene que salir realmente de acá si te das cuenta, porque los 4 lados tienen que estar conectados, digamos de los extremos, entonces ahí, esa fue la situación, cuando trazaste estos dos y cuando apoyado aquí trazaste el 8, aquí debiste apoyarte y trazado el de 13 y ver en donde se cruzan eso dos círculos, parece que eso es mejor idea.
22. A = ¿tiene alguna herramienta para regresar?
23. M = solo te deshace la última acción con “control Z”, aquí no es como otros software que te regresas hasta el inicio, entonces a veces es bueno, no te preocupes, darle en archivo nuevo y volvemos a empezar…
24. M = ok, ahí ya terminamos y es el cuadrilátero que estábamos buscando, de hecho una opción es activar este menú también y ahí dice distancia o longitud… seleccionamos directamente cada segmento y nos tiene que dar su medida en centímetros para que corroboremos que fue el cuadrilátero… ah, entonces algo pasó, probablemente cuando quisiste darle algún cruce de dos circunferencias no le atinaste, entonces por eso es buena idea verificar. Bueno miren, como ya nos tardamos un poco en esta actividad inicial, que es importante pero ya llevamos más tiempo de lo planeado, les voy a pedir de favor a todos que dirijan su atención otra vez hacia la pantalla de proyección y lo voy a volver a hacer con más calma parece que la explicación del inicio fue muy rápida, pero ya estuvieron trabajando y eso es bueno, ya empezaron a interactuar con el software y eso es bueno, miren de inicio, en el penúltimo botón, tenemos una instrucción que dice número, como ustedes quieren construir un polígono, en este caso un cuadrilátero con lados ya definidos es buena idea que introduzcan las medidas que quieren, que en este caso son: 5, 7, 8 y 13, hasta ahí creo no tuvimos ningún problema, luego como ya tenemos esas medidas definidas, bueno esos números, ahora sería bueno tomarlos con el compás, sacar nuestro compás, abrirlo a cada una de esas medidas para asegurarnos que vamos a tener segmentos de esa longitud, entonces otra vez aquí en el quinto botón, si yo lo despliego ahí dice compás, lo selecciono y eso me va a servir mucho ahora , por ejemplo si quiero trazar un segmento de longitud 5, tomo con el compás esa medida, selecciono el número que dice 5, me apoyo en algún lado, donde yo quiera y ese

círculo es de radio 5, entonces ahora me voy al tercer botón y con la herramienta segmento, yo se que si me apoyo en el centro de ese círculo y luego traza a cualquier punto de su periferia, es un segmento de radio 5, que eso es lo que yo quería… platicaba con algunos de sus compañeros , si se dan cuenta, los primeros dos lados como que tienen mucha libertad, porque yo por ejemplo aquí tracé a donde quise, realmente no tengo alguna restricción, ahora vi que muchos ya tenían círculos y ya era como que hasta confuso, yo les preguntaba y este círculo de que radio es y ya no se acordaban, entonces el ultimo botón si lo despliegan tiene una instrucción que dice ocultar/mostrar, yo sugiero que vayan ocultando lo que ya no van a usar, seleccionan el circulo y dan un click por aquí afuera para que "no les haga ruido" ese círculo, entonces esta el primer segmento de radio 5 y yo hace rato dije a mi en particular me place seguir ahora este orden, el lado de 13 conectarlo aquí con este extremo del segmento, entonces lo cual va hacer en otro orden pero el orden que yo siga hace rato fue ese orden, entonces ahora con el compás selecciono el número 13, obviamente me tengo que apoyar ahí, me tengo que apoyar en un extremo del segmento anterior, para que de ahí salga el otro lado, entonces ahí trazo el círculo de radio 13, de aquí que es el centro de la circunferencia a cualquier otro punto de la periferia es un radio de 13 centímetros, por eso lo hice de esa manera, entonces ahora otra vez selecciono segmento y lo trazo como caiga, no se si dan cuenta, pero es lo que yo decía, aquí no importa mucho hacia donde vayan esos dos lados, entonces lo trazo y ya tengo los dos lados construidos, voy a ocultar este círculo para que no me haga ruido y ahí están dos lados el de 5 y el de 13, me faltan el de 7 y el de 8, es necesario que partan de los extremos libres de esos dos segmentos, entonces como que aquí no tengo que hacerle a donde caiga, voy a trazar un círculo de radio 7 aquí y voy a trazar otro círculo con radio 8 acá y los segmentos no salen a donde yo quiera, tienen que salir a la intersección sino no voy a cerrar el cuadrilátero como yo lo necesito, entonces eso es lo que hago a continuación, el de 7, tomo la medida con el compás me apoyo en el extremo que está todavía libre en el de 5, ahora tomo el 8 con el compás, me apoyo en el otro extremo, ah miren fíjense aquí paso algo curioso ¿qué se supone que debería haber pasado?, pues que se interceptaran porque si no como cierro el cuadrilátero, si ustedes se acuerdan estos dos segmentos iniciales como que son libres, yo los puedo modificar de posición ahorita todavía, entonces si me regreso aquí al primer botón, esa flechita siempre me permite arrastrar objetos, moverlos, entonces ahorita con lo que sucedió, creo que me convendría tomar este extremo y moverlo porque es lo que yo estaba esperando que se cruzaran esas circunferencias, que se interceptaran, entonces pues ya saben de aquí para acá va hacer 7 y de aquí para acá 8 y entonces ya estaría terminado el cuadrilátero en cuestión, entonces lo termino trazando un segmento que parta de los extremos libres de los lados que ya construí, hacia la intersección de los dos círculos anteriores y ahí está, voy a ocultar esos dos círculos igual porque ahí como que me confunden un poco, me pueden estorbar y esa es una opción, ese es el cuadrilátero que yo quería construir, de hecho y fue una muy buena idea, hace rato que fui con uno de sus compañeros le dije; Cabri tiene una herramienta que mide longitudes de segmentos y le dije para corroborar, para que estés seguro de que ese cuadrilátero que buscabas mide los segmentos y resultó que el de 7, media 6.99, algo había pasado, no tiene que suceder eso, entonces miren, yo para cerciorarme tomo la herramienta que dice: distancia o longitud y selecciono cada uno de los segmentos, ahí está el de 5, el de 13, el de 8 y el de 7, espero que ya con esta ayuda lo puedan terminar, creo que algunos ya lo terminaron, algo importante los lados no deben cambiar de dimensiones, no importa el orden en el que tracen los segmentos, no importa como hayan construido su cuadrilátero debe tener dimensiones 5,7, 8 y 13 porque fue la instrucción, de repente como que vi que el cuadrilátero de alguien si se alargaban más los lados y uno no está pensando en que puedan deformarse los lados porque ya son datos dados… si ya lo hicieron espero que ya hayan terminado, ahora mi pregunta es; ¿todos obtuvimos el mismo cuadrilátero?, es decir los que ya lo hicieron, ¿obtuvieron este?

25. A = Si
26. M = ¿es el mismo, tiene la misma forma?, es más, vean el del compañero de al lado, ¿todos obtuvieron el mismo cuadrilátero?… aquí hasta le está moviendo… como que no son iguales, tienen las mismas dimensiones, pero como que no tiene la misma forma, acá hasta lo está deformando, entonces haber si siguen la guía de la actividad, nos dice, compara tu cuadrilátero con el de tus compañeros más cercano y la pregunta es; ¿hay diferencia? En cuanto a dimensiones pues no hay diferencia pues son los mismos lados pero parece que ustedes ya están notando algunas diferencias, a mi me gustaría que contestaran esa pregunta, dice que en caso de que haya diferencia, a que se lo atribuyen, o sea ¿qué razón pueden dar ustedes para que, a un grupo de personas se les diga que construyan un cuadrilátero pero dándole las dimensiones, dando como dato las dimensiones y cada uno obtenga cuadriláteros de distinta forma?, no exactamente el mismo, sí con las mismas dimensiones pero no necesariamente el mismo y tampoco estoy hablando de la posición, a lo mejor alguien lo puede girar un poco el cuadrilátero pero completo, o sea no me refiero a que este en otra posición o algo así, me refiero a que literalmente si ustedes lo ven tiene otra forma, el que hice yo tiene distinta forma a alguno de los que hicieron ustedes, repito no me refiero a la posición del polígono, me refiero a la forma que tiene e incluso yo vi que alguien por este lado empezó a arrastrar algún vértice y el cuadrilátero seguía teniendo las dimensiones, de hecho yo los invito si ya construyeron el cuadrilátero, por ejemplo puedo arrastrar este punto y fíjense que este cuadrilátero es ahora muy distinto al primero que construí pero sigue teniendo las dimensiones o puedo por ejemplo manipular este otro lado, yo digo que ahí ya cambió la forma, no solamente cambió de posición, si yo muevo esto como que cambia la forma, entonces ¿a qué le atribuyen ustedes o qué explicación pueden dar en el sentido de que dados los 4 lados de un cuadrilátero no todos obtengamos el mismo?, no le piensen mucho, creo que es algo que pueden escribir ahorita rápido, sobre todo porque perdemos un poco de tiempo, no se preocupen ahorita nos vamos a apurar, me gustaría que ahora hagan el otro ejercicio, el inciso b) les pide que construyan un nuevo cuadrilátero, creo que ese lo van a poder hacer más rápido porque ahorita ya tienen la experiencia de haber hecho el primero , no tienen que borrar eso que ya hicieron, tampoco tienen que cerrar el programa o trabajar ahí mismo en esa hoja, simplemente si van a hacer una nueva construcción, yo les sugiero que aquí se vayan a la opción archivo y le den nuevo y nos abre una hoja en blanco y podemos trabajar libremente ahí otra vez y no ha borrado o no se ha perdido lo que ya hicimos antes, en la opción ventana sigue estando la construcción anterior, entonces por dudas en el software no se preocupen, cuando ustedes tengan una idea y la quieran llevar a cabo, nada

más nos preguntan y nosotros les auxiliamos, entonces hagan ese nuevo cuadrilátero de lados 2, 3, 4 y 11

27. A = aquí no lo logré cerrar
28. M = hace rato recuerdas, que yo tampoco lo logré cerrar al principio, pero moví y sí cerró, lo pude construir, originalmente el cuadrilátero anterior, cuando yo lo tracé, si algunos estuvieron poniendo atención, el cuadrilátero no cerraba tampoco,

Instructor con Estudiante…

29. A= oh ya, entonces hay que mover los puntos, porque tiene que dar una intersección con el de aquí
30. M = entonces ahora que ya tienen más soltura con el software, entonces ahora introducen esos datos; 2, 3, 4 y 11 y con el compás empezamos a trazar los segmentos

31. A= no se va a poder, la suma de los tres lados, no es mayor que 11
32. M = ¿quién ya construyó el cuadrilátero de 2, 3, 4 y 11, quién ya lo construyó?
33. A = ¿cuál?
34. M = el segundo cuadrilátero
35. A = no se puede
36. M = ¿no se puede?
37. A = no cruzan,
38. M = no cierra, pero hace rato, tampoco cerraba…
39. A = pero es que aquí la suma de los otros 3 lados, no llega a hacer la otra
40. M = ah ya, ¿entonces?
41. A = no existe
42. A = es que estos 3, nunca va a cerrar
43. M = entonces eso parece interesante, queremos construir otro cuadrilátero y definimos las dimensiones y resulta que cuando lo quisieron construir, ya unos se dieron cuenta y espero que estén convencidos de que, como dicen no cierra, aunque empiecen a cambiar de posición algunos de los lados, si alguien no ha terminado la construcción, sería bueno que sí lo hagan para que se cercioren de que efectivamente con esas medidas 2, 3, 4 y 11, no se cruzan y uno piensa, bueno yo puedo manipular la posición de este segmento para ver si se cruzan como hace rato le hicimos y simplemente vemos que no, o sea por más que yo quiera no se van a cruzar y entonces definitivamente ese cuadrilátero no se puede construir, si seguimos la guía, ahora hay 2 preguntas que me gustaría que respondan, ya trataron de hacer el inciso b), ya concluimos que no se puede y ahora hay 2 preguntas, que me gustaría que de forma individual , cada uno de ustedes conteste, con la experiencia que tiene ahorita de a ver querido construir el cuadrilátero del inciso a) y el del inciso b). Entonces si ya tienen alguna idea, por favor contesten esas preguntas, contesten esas 2 preguntas que están antes de donde dice actividad central, donde dice primer pregunta: ¿un cuadrilátero queda bien definido al especificar las longitudes de sus 4 lados? Y hay que explicar por qué estamos respondiendo, si o no, y la

segunda pregunta dice: ¿qué criterio puedes seguir para que dados los lados de un cuadrilátero, puedas decidir si su construcción es posible o no? Esas dos de forma individual, por favor, ya ahorita que terminen, si quisiera oír la opinión de alguno de ustedes o sus respuestas pero de entrada individual, lo que ustedes hayan percibido, lo que ustedes hayan notado con las dos construcciones que acaban de intentar hacer

44. M = Acá ya nos están haciendo trampa
45. A = solo que quería saber que es,
46. M = ahorita les voy a explicar, no te preocupes vamos con calma, es bueno, pues dices aquí está la tecnología, y dices aquí tengo el internet, ahorita reviso, pero vamos por partes, no hay que saltarse a donde dice actividad central, vamos a acabar esta, vamos a concluir algunas cosas y ya luego vemos lo de la actividad y vemos ese término raro que tú ya buscaste en internet, van a ver que suena raro para nosotros, pero tú ya notaste que es muy conocido, pues salieron muchos resultados en la búsqueda, ahorita vamos a eso, no te preocupes.
47. M= […] muy bien, ¿nos puedes decir lo que hace rato nos comentaste, nos puedes decir en voz alta, porque te diste cuenta que el cuadrilátero anterior no se va a poder construir?
48. A = bueno eso era parte de la pregunta, la segunda pregunta dice: ¿qué criterio puedes seguir para que dados los lados de un cuadrilátero, puedas decidir si su construcción es posible o no? Esto es porque si sumamos las longitudes de 3 de los lados, esta suma debe de ser mayor al cuarto lado, porque si fuera igual quedarían sobre puestas, entonces sería una línea recta, entonces la suma de 3 debe ser mayor a la cuarta
49. M = entonces, tú lo que dices es que si sumamos 2, 3 y 4 eso nos da 9, pero dices que eso tendría que haber superado 11, ¿si están de acuerdo con su compañero?, de hecho es un criterio que se parece a la desigualdad del triángulo, cuando ustedes van a construir un triángulo, si se les dan los lados no están seguros si lo van a poder hacer o no, las longitudes, claro de los lados, hasta que verifican la desigualdad triangular, bueno pues hay un criterio, si se dan cuenta, similar para poder construir cuadriláteros, si yo doy 4 lados eso no me asegura que el cuadrilátero se pueda construir, que es aquí lo que hemos visto, bueno antes de pasar a la actividad central, déjenme platicarles algo, por ejemplo ustedes piensen que van a construir un triángulo que sí se puede construir, es decir, tienen 3 segmentos y con esos 3 segmentos si es posible construir un triángulo, entonces fíjense, voy a definir ahora 3 segmentos, yo espero que cumplan con la desigualdad triangular y si defino 3 segmentos y si construyo un triángulo, lo cual voy a hacer ahora muy rápido , tomo este como base por ejemplo, ahora les voy a pedir que tengan un poco de imaginación y que supongan que los lados de este triángulo son barras solidas por ejemplo de metal o de madera y que en los extremos voy a conectar los otros lados con otras barras de metal y tal vez con un perno y entonces como va haber pernos en los extremos estas barras podría girar, tendría esa facilidad, entonces déjenme terminar este triángulo, sí es posible construirlo porque sus lados cumplen con la desigualdad del triángulo, no voy a tener mucho problema y efectivamente ahí el cruce o la intersección de esas dos circunferencias me a segura que este triángulo, pensamos que sus lados son barras de metal o de madera se puede construir, bueno la cuestión es esta; ¿ese triángulo que acabo de construir, no se deforma?, no se si me explico con eso, voy a tratar de arrastrar alguno de los vértices, o sea es algo similar a que si yo lo tuviera físicamente y quisiera deformarlo

aplicándole una fuerza, pero pues no, lo que puedo hacer es trasladarlo, girarlo, cambiarlo de posición pero no se deforma, es decir la figura geométrica que conocemos como triángulo, ya que se define y sí se puede construir es una figura que no cambia de forma, si le aplicamos fuerza, es por eso común que las estructuras estáticas, en los puentes por ejemplo el arreglo que se hace son barras que forman triángulos, en cambio ustedes ya lo vieron, déjenme regresar a una de las construcciones anteriores, en cambio este cuadrilátero que sí se pudo construir porque cumple el criterio; sumo 5, 7 y 8 y eso me da 20 y 20 supera a 13 que es el otro lado, por eso lo pude construir, sin embargo esta figura es deformable, si estuviera hecha de barras, si estuviera hecha de metal por ejemplo, y aquí tuviera pernos, pues ustedes pueden girar una de las barras y cambia de forma la figura, es decir un cuadrilátero es una figura que puede cambiar de forma pese a que ya estén dados sus 4 lados… bueno la cuestión es esta, en estática si ustedes van a construir una torre piensan que va a estar rígida y que no quieren que se mueva y tal vez usan triángulos pero cuando quieren ustedes transmitir movimiento y es a lo que vamos en la actividad central, tienen que pensar en algo que si pueda cambiar de forma y que pueda transmitir cierto tipo de movimiento, en particular hay algo que se llama mecanismos, en mecánica se utilizan, unos dispositivos mecánicos, muchas veces formados por barras articuladas, que se llaman mecanismos, hay un caso particular, un mecanismo llamado 4 barras, ahora sí vamos a pasar a la actividad central, lean con atención ese enunciado, ahora va a aparecer una palabra que a lo mejor no conocían que es Grashof o mecanismo de Grashof… entonces si ya leyeron, resulta que un cuadrilátero articulado, como lo habíamos platicado, puede ser utilizado como un mecanismo, un mecanismo que si cumple ciertas características, en particular en mecánica se le llaman mecanismo de Grashof, un mecanismo en el cual alguna de las barras, pueda dar giros completos, fíjense, yo sigo con esta figura y ustedes creo no la han perdido, el primer cuadrilátero que hicieron el de medidas 5, 7, 8 y 13, el cuadrilátero físicamente se puede construir, pero ahora nos preguntamos ¿será este cuadrilátero un mecanismo de Grashof ?

50. A = parece mucho
51. M = cuando digo que es un mecanismo de Grashof, me refiero a que por ejemplo si yo le doy un giro, supongo que esto está fijo y si yo quiero girar esta barra, algo así como una manivela, cuando ustedes le dan vueltas a la manivela del parabrisas de la ventanilla, si esto logra dar un giro completo esta construcción puede considerarse como un mecanismo de Grashof, entonces fíjense, hay un comando en el Cabri, que se llama animación, está en el penúltimo botón, entonces por ejemplo si ustedes quieren animar algo, darle movimiento, yo puedo mover este punto, puedo simular que esta barra da giros, entonces selecciono animación, me apoyo en este punto, no lo suelto oprimo ahí y es como si yo tuviera un resortito, este resortito yo lo puedo manipular y le va a dar movimiento, entonces para que se mueva lento no lo estiro mucho y miren ahí va, parece que eso es lo que queremos… ah caray, esta raro ¿verdad?, pero, nosotros queremos, que esa barra la que mide 5, de revoluciones, “chin” parece que no puede dar un revolución completa, parece que no la puede dar… entonces esa es la actividad central y es la pregunta, el cuadrilátero si se pudo construir pero eso no me asegura que una barra pueda dar giros, aquí la otra barra que puede girar es esta, si se dan cuenta las dos primeras que trazan son libres y son las que pueden hacer girar porque acá

estas no porque hay un cruce, las obtuve por intersección de dos círculos, entonces esta no puede dar giros, pero voy a tratar de girar la otra, en este caso la grande, la de 13, igual con el comando animación, me pongo en este extremo y ahí va, no peor esa más rápido tronó el mecanismo, miren hace cosas muy raras, si quisiéramos un mecanismo de esas dimensiones parece que no se va a poder hacer, entonces les sugiero como dice ahí "en negritas", sugerencia, traten ustedes de simplemente proponer 4 segmentos, los segmentos A, B, C y D, que de entrada cumplan con el criterio que ya vimos para poder construir un cuadrilátero, propongan 4 segmentos con los que puedan construir un cuadrilátero pero pueden arrastrar un punto con esta herramienta, pueden darle animación, traten de construir un mecanismo que si sea de Grashof, traten de experimentar y como dice ahí traten de encontrar un criterio que les permita saber en qué casos un cuadrilátero si puede ser usado como un mecanismo de Grashof de 4 barras articuladas

Instructor con Estudiantes:

52. A1 = Ese nunca truena
53. A2 = mmm
54. A1 = ese si funcionó
55. A1 = ¿si?, pero aquí truena…
56. A2= hay una parte donde truena… ¡no!
57. A1 = ajá
58. A2 = donde ya no pasa es por abajo
59. A1 = se desaparece ahí
60. M = ese iba muy bien ¿verdad?, pero…
61. A = pero se truena
62. M = nosotros queremos que pueda dar giros completos esa barra, si lo logramos ya tenemos… haber ese se ve bien… haber ahí hay 2 barras que puedes mover
63. A = mmm, sí…
64. M = haber ¿por qué no mueves la otra?, haber es esta y ¿cuál es la otra?, parece que, se comporta me dio raro hace algo extraño ese mecanismo, pero si tú logras que se mantenga todo el tiempo, o sea ya das el giro y tú logras que se esté manteniendo, ese es una buena opción, ya tienes unas dimensiones propuestas para 4 barras que cuando las articulas, esperas que alguna ya pueda dar un giro completo o sea las otras barras se configuran de tal forma que le permiten girar
65. A = una pregunta
66. M = ¿qué pasó?
67. A = estoy seleccionando compás y número y uno de los puntos que yo tengo pero no me traza el círculo
68. M = haber, compás…
69. A = ya tracé estos dos
70. M = sí te lo traza de hecho ya te lo trazó un montón de veces, ¿sabes que es lo que está sucediendo?, que estas proponiendo las longitudes iguales, entonces este círculo…

71. A = lo trazó varias veces
72. M = exactamente, te lo trazó varias veces ahí
73. A = entonces por ejemplo si quisiera trazar un cuadrado ¿cómo le hago?, bueno o sea de esa forma, utilizando circunferencia
74. M = haber dale uno nuevo, entonces tú en general quieres proponer un mecanismo que tenga 4 lados iguales… traza un segmento, ese, ¿te parece que ese sea la longitud de las barras?, ahora saca el compás…
75. A = ahí esta
76. M = toma el segmento, selecciónalo y traza el circulo, entonces igual que hace rato, o sea traza dos lados, los primeros dos, como que no hay mucho de que pensar, con segmentos, ese ya es un lado de tu mecanismo y ese ya es otro lado, entonces ¿qué te parece si seleccionas ahora círculo?, porque eso te va a permitir, si abres, si te apoyas aquí y abres acá, aquí, aquí dale click, ese es otro círculo de radio 4; bueno de este radio, ahora haz lo mismo de aquí para acá, ya esta seleccionado, no, bueno ahora ya te cambiaste, circulo, click en ese punto, click en el otro y son esta y esta ¿no?,
77. A = si
78. M = ahí donde se crucen te da exactamente, lo que tú querías, no se si es un cuadrado de hecho, no estoy seguro, pero sí son los 4 lados iguales, entonces puedes ocultar los 3 círculos que trazaste… muy bien, ahora tratas de mover a lo mejor, son iguales, ¿verdad? y además si tu modificas este segmento, cambian ahí las medidas de tus barras, las puedes modificar con libertad, puedes animar el movimiento haber que pasa, parece que todo va bien, ya casi da el giro completo, ok, parece que si ¿verdad?, parece que ahí tienes un mecanismo de Grashof
79. A = ¿aquí para que se mueva?
80. M = ah, aquí hay un pequeño detalle, tus puntos todos son intersecciones, los puntos que son intersecciones no están libres, para poderse mover, ahí en todo caso lo puedes trasladar, este es el punto que puedes mover, entonces con animación, le das click y no sueltas el botón para que arrastres el resorte y lo sueltas…
81. M = ah, es que si te das cuenta es que toda tu configuración, o sea todo el cuadrilátero, es rígido, para que me entiendas, ese no cambia de forma y solo lo estas girando simplemente alrededor de un punto solamente… bueno haber muchacho, creo que es un buen momento, tal vez se están preguntando ustedes, ¿qué es eso de los dichosos mecanismos de Grashof, que aquí nos están diciendo que tratemos de encontrar una forma de cómo se pueden construir?, miren esto es una animación hecha en un software de ingeniería, esto ya no es Cabri , en la vida real si ustedes agarraran 4 barras, bueno aquí la cuarta barra seria esta, pero uno entiende que el mecanismo tiene que estar fijo en algo, entonces les voy a presentar la animación hecha en un software de ingeniería de un mecanismo de 4 barras, se parece mucho a lo que están haciendo, tal vez ustedes se pregunten donde está la cuarta barra, la cuarta barra va de aquí a acá, repito se entiende, que el mecanismo tiene que estar fijo en algo y por lo tanto una de las barras simplemente la tengo que usar como el ancla digamos, entonces fíjense, tal vez esto les ayude a entender mejor qué se supone que está pasando o que debería pasar con ese mecanismo…

Proyección del video

82. M=… entonces más o menos esa es la idea, ustedes es lo que están tratando de hacer ahorita, encontrar un cuadrilátero que tenga la capacidad de poder comportarse de esa forma, si se le dan movimiento a una de las barras, ¿ok?, digamos que los nombres técnicos no son relevantes o muy relevantes pero se los voy a mencionar, la barra que da giros completos, se le llama manivela, uno siempre que piensa en algo que gira como que se le viene ese nombre a la mente, entonces la barra que gira, que impulsa al mecanismo, se le llama manivela en ingeniería, la barra que es fija, aquí en este caso esta, aunque no existe, podríamos considerar que es una barra, se le llama bastidor o bancada, porque está fijo en algo, la barra que acopla a la manivela con la otra, se le llama barra acopladora porque es la que lo está "acoplando" y la barra que finalmente hace el trabajo, aquí ¿cuál es la barra de salida o la que hace el trabajo?, esta es la manivela o sea es la que yo muevo a lo mejor con un motor por eso es importante que de giros y esta es la que me está realizando algún trabajo que yo quiero, a esta barra cuando se comporta de esta forma que nada más se balancea, de hecho se le llama balancín y esta barra que su función es acoplar la manivela con la barra que hace el trabajo se le llama barra acopladora entonces, digo para que ustedes sepan que incluso tiene nombres y que si de repente yo ahorita durante la actividad digo algo de la manivela, o de la barra acopladora, todos entendamos de qué estamos hablando, entonces aquí yo cuando intento que esta sea la manivela resulta que como que se rompería la barra acopladora, no se si lo notan, es cuando desaparece, cuando le trato de dar giros a la manivela, fíjense que lo voy a hacer y lo voy a hacer sin animación, poco a poco por ejemplo si quiero girar en el sentido del reloj como que me permite más, aquí como que va bien, ahí no hay mucho problema miren, está girando, pero por acá abajo, algo pasa por ahí miren, y desaparece por acá abajo, acá igual, miren cuando viene como que todo está bien pero de repente algo pasa y como que, dicen los que dedican a esto que se rompería la barra copladora, literalmente pudiera ser que se rompiera o que simplemente el mecanismo se trabe y ya no pueda seguir girando y a nosotros nos importaría que el mecanismo si gire porque si esta barra, si la manivela esta acoplada a un motor pues el motor va estar continuamente moviéndola y nosotros queremos que la barra de salida pues realice cierto trabajo, ahí ustedes pueden pensar de qué les serviría convertir un movimiento de rotación en un movimiento de vaivén, bueno algún uso se le podrá dar, de hecho tiene bastantes usos, pero ahorita lo que nos interesa más es que los usos es como le hago para saber, cuando dadas las dimensiones del mecanismo, si va a ser un mecanismo de Grashof, entonces en esta parte muchachos, este lo que ya hicieron individual, si se pasan a la segunda hoja, y dice al principio, que se observe el video, dice tiempo máximo 15 minutos, me gustaría que de manera individual todavía contesten esa parte, les preguntan si aún no han logrado hacer un mecanismo de Grashof, creo que algunos sí, creo que algunos otros todavía no lo hicieron, eso ahorita no importa, no se preocupen, lo importe es que observen con atención lo que hayan hecho, ya sean en el caso de que sí hayan podido hacer un mecanismo de Grashof o que no, sería importante que escriban ahí, de que creen, de que depende de que una de las barras de una revolución completa, lo que han observado hasta ahorita, su idea de porqué si funciona a veces y porque no funciona en otros casos, entonces

escriban eso, porque la siguiente parte de la actividad se va a desarrollar en equipos, esto es lo último que les voy a pedir que hagan de forma individual, escribir lo que ahorita creen que está pasando, en la segunda hoja donde dice algo así; como ¿de qué creen que dependa que la manivela, en este caso una de las barras si pueda dar giros completos?

Entre Estudiantes…

83. A1 = ¿qué paso de que?...
84. A2 = en este, debe tener dos lados iguales menores al mayor
85. A1 = dos lados iguales menores al mayor
86. A1 = si, para que cuando se queden, mmm, uno a atrás de otro, pues todavía tengan longitud para…
87. A2 = sí, si la tienen
88. A3 = este punto,
89. A2 = pero te cambia el punto ¿no?…
90. A1 = si es la misma longitud
91. A1 = maldición, ya no entiendo cómo hacerle
92. M = ok, eso se ve muy bien pero hay una observación que te puedo hacer, si te das cuenta la longitud de esa barra cambia y son barras rígidas, no debería de estarse deformando
93. A = ¿Esta?
94. M = exactamente, las otras 3 si están bien, pero en la practica el mecanismo es rígido, bueno uno piensa que no se va deformar y que en todo caso sería mínima la deformación por eso las barras se consideran rígidas

95. A = es que no puedo lograr que ese punto se quede fijo
96. M = ¿qué pasó, cómo vas?,
97. A = es que necesito que este punto de acá se quede con ese punto porque muevo y se mueve
98. M = ah, eso quiere decir, que cuando tú construiste el cuadrilátero, este segmento no va exactamente de este punto a la terminación de este otro segmento que es lo que querías, entonces una buena idea…
99. A = borrar este segmento
100. M = si, o si quieres, tú quieres construir este cuadrilátero, crees que va a ser mecanismo de Grashof
101. A = puede ser
102. M = si quieres, selecciona todo y borrarlo y lo hacemos rapidísimo, esto no, esto déjalo porque estos son tus datos, ¿ok?, eso muy bien, y otra vez, con compás trazas, traza uno de los segmentos, ese sabes que es a donde caiga
103. A = acá, otro
104. M = el de 5 y también va a donde tú quieras de entrada, si quieres oculta estos dos para que no nos vayan a confundir, sale trazaste 2, 5, y quieres repetir un lado, otro de 5 y otro lado de 8, entonces otra vez

105.A = tomas el este

106.M = pues claro y ahora el de 8

107.A = ¿el de 8?

108.M = el de 8 porque es el que te falta ahora en el otro extremo, entonces tu cuadrilátero va a cerrar así, porque para acá es 5 también y para acá es 8

109.A = entonces es donde se unen los círculos

110.M = ok, ahí y ahí, esta es tu propuesta del mecanismo, si quieres oculta los círculos para que no nos confundan ahorita, esa es tu propuesta, tú vas a poder mover alguna de las dos barras primeras que trazaste,

111.A = si

112.M = y ya no pasa ese problema de que se separaban

113.A = así

114.M = entonces esa es una buena propuestas, si tu ya quienes alguna idea la escribes aquí, "yo creo que el mecanismo va a ser de Grashof cuando pasa tal cosa", o sea si tienes alguna idea

115.A = si tengo algunas

116.M = ok, les voy a pedir de favor que ya no se tomen mucho tiempo en escribir sus conclusiones para que pasen a la siguiente etapa, que es donde van a trabajar en equipo, lo que sí, es que varios ya lograron simular un mecanismo de Grashof con el software.

117.M = muy bien, muchachos les voy a pedir que me pongan un poco de atención, préstenme tantito su atención, como de antemano ya los veo muy interesados en discutir algunas cosas con un compañero, lo cual está muy bien, vamos a pasar a la siguiente parte, dice, bueno sí me interesaría que sus conclusiones personales-individuales las pongan de lo que ahorita creen, pero pasemos a la parte de trabajar ya con un compañero, dice que para que tratemos de entender qué está pasando, porqué algunos cuadriláteros trabajan como mecanismos de 4 barras articuladas tipo Grashof pero otros no, los está invitando a que trabajen 3 casos particulares formando equipo con un compañero cercano, lo van a trabajar en binas, cualquier duda nos preguntan, de hecho el primer caso lo quiero abordar yo y que me vayan siguiendo, es un caso en el que algunos de manera individual ya habían abordado. El primer caso no dice "si suponemos que las 4 barras son iguales" pues ¿por qué no?, entonces fíjense, síganme por favor aquí, algunos ya lo hicieron en individual pero de todos modos quiero que lo tomemos como ejemplo para que los otros dos caso los desarrollen en equipo en binas, entonces si mi propuesta es que el mecanismo tenga 4 barras de la misma longitud, lo que puedo hacer es esto, en vez de dar una medida en particular, yo doy un segmento que para mi represente la longitud que voy a utilizar para construir el mecanismo que espero que sea de Grashof, entonces procedo de la misma forma; tomo el compás y trazo por acá un circulo y aquí no voy a tener que hacer tantos trazos porque las longitudes son iguales, yo se que los primeros dos lados son un tanto libres y los trazo sobre la misma circunferencia no tengo que cambiar, entonces eso ya está, ahora los otros dos lados siguen siendo de la misma longitud, tengo que apoyarme aquí y aquí, para trazar círculos con el mismo radio, entonces lo que puedo hacer de hecho es cambiar la herramienta de compás a círculo simplemente, cambio la herramienta a círculo porque yo ya tengo definido el radio, me apoyo ahí que sería el centro y abro hacia este punto y ahora hago lo mismo apoyándome aquí como centro y abriendo para acá, entonces el cruce de estos dos últimos círculos aquí me da ya la construcción donde cierra el cuadrilátero y tengo el mecanismo que espero que sea de Grashof, déjenme ocultar esos círculos, hace rato alguien me decía, es que quiero hacer un cuadro y yo digo no estoy seguro que vaya hacer un cuadrado lo que si estoy seguro es que es cuadrilátero de 4 lados iguales de hecho, ustedes que dicen, ¿es cuadrado, tiene que ser cuadrado de hecho?,

118.A = no

119.M = no tiene que ser cuadrado, muy bien, pudiera ser cuadrado pero ni si quiera me interesa que lo sea, lo que me interesa es que una barra, por ejemplo voy a tomar esta como manivela, me interesa que pueda dar giros completos, entonces vamos a ver si con el comando animación, bueno va a una velocidad un tanto lenta pero sirve que vamos viendo el comportamiento, pues hasta ahí todo va bien la manivela se está moviendo en el sentido contrario al reloj, ahí pasó algo curioso ¿verdad?, como que las cuatro barras se juntan pero sigue girando

120.A = puede ser algo proporcional

121.M = sigue girando, sigue girando, ¿qué tipo de figura dirían ustedes que es?, o sea aquí lo que estamos viendo es un familia de cuadriláteros con lados iguales, ¿cómo clasificarían todos estos cuadriláteros que se van formando?, pudiera haber un caso, bueno si le tomamos una foto cuando este ángulo sea recto… más o menos por ahí, o sea si le tomamos ahí la foto diéramos que es un cuadrado ahí sí, pero en general se forma todo una familia de cuadriláteros de lados iguales y ¿qué tipo de cuadriláteros son?, no se si tengan alguna idea

122.A = romboides

123.M = ¿qué es un romboide?

124.A = No, son paralelogramos

125.M = ¿a qué te refieres con paralelogramo?

126.A = que los lados son paralelos

127.M = que en todo momento los pares de lados son paralelos me dices, puede ser que si, sería algo que tendríamos que verificar, ustedes a lo mejor lo que están observando, que este cuadrilátero, este mecanismo que parece que si es Grashof, se comportan muy diferente al de la animación del video o a algunos otros, donde la barra, si se acuerdan esta es la manivela, esta es la barra copladora y esta es la… se suponen que nada mas debería de hacer esto, un vaivén y aquí vemos que también aquí está girando, bueno les platico rápido, las locomotoras antiguas se basaban más o menos en este principio, una rueda al empezar a girar tenía que impulsar a todo el otro juego de ruedas porque tenían varias, entonces de hecho, mecanismos de este tipo, se utilizaban para impulsar las ruedas de las locomotoras antiguas, entonces si tiene sentido y nos hace ver que es un mecanismo tipo Grashof. Bueno ahora sí, ya que están platicando, agárrense una parejita, si alguien no tiene equipo y dice yo sobré, no importa trabajen tres y bueno, el caso 1, como les dije yo lo iba a abordar y yo hice la construcción, pero sus conclusiones, discutan ahora en equipo y pongan ahí qué concluyen de este caso en particular, cuando las 4 barras son iguales, ¿por qué creen que es un mecanismo

Grashof? y aborden el caso 2 y el caso 3, cualquier duda aquí estoy yo o mis compañeros, pero ahora sí, hace rato ya estaban muy animados platicando y discutiendo algunas ideas, aborden los dos siguientes casos y discutan las ideas que tengan al respecto, lo importante es encontrar o estamos buscando un criterio general, por ejemplo parece que cuando las barras son iguales, ya tenemos un mecanismo de Grashof, pero las barras no tienen que ser necesariamente iguales

Entre Estudiantes…

128. A1 = esta barra mide 2, 3 y 4, esta última longitud debe de sumarlas para que me den vueltas completas
129. A2 = 2 + 3 + 4 = 9
130. A1 = exactamente, para que no se rompan, o sea esta la puedes hacer así de 9, entonces como esta al girar va a medir la dimensión de estas 3 juntas, no se va a romper
131. A2 = no, no, hay un pequeño error que tienes, permíteme, porque si esta mide 9, créeme que tus 2 de aquí, tus 3, no van a llegar acá, si la haces de forma pitagórica, ok, tenemos estos dos, vamos a intentar hacerlo sin tantos tránsito, es más, este está recto ¿te parece bien?, este tiene 16, entonces este es la hipotenusa entonces 4 x 4 son 16, 9 x 9 son 81, entonces esto va hacer lo que nos va a dar la otra longitud, 16 + 81 es 97, raíz de 97,
132. A1 = no, no, por ejemplo si mueves este segmento…
133. A2 = para que sea mecanismo de Grashof, estas 3 longitudes deben ser mayor a esta, si da 10 jala, si este es 3, aquí ya da 10, 10 es mayor que 9
134. A1 = pero al momento que sean “coplanares” (se refiere a que las cuatro barras se pliegan) todos, se va a romper, porque este está más largo, mide más que este
135. A2 = no porque por eso están los ángulos
136. A1 = si, pero al momento que todos sean “colineales” (se refiere a que las cuatro barras se pliegan), estos 3 van a medir este
137. A2 = no tiene porque serlo… como las ruedas de un ferrocarril
138. A1 = no pero chécalo, tan solo ahí,

Haciendo dibujos con lápiz y papel

139. A2 = ese es un ejemplo, yo había sacado el mismo, mira este su tránsito, ve como está el lugar como están las llantas, este el sistema, ¿ves que está esto así, ves que esto va dando vueltas y aun así se va moviendo todo el sistema?, aquí si estos 3 lados son mayores que este, tienes la opción de que, de que cuando va a hacer esto, va a regresar, tal vez no se quede en lo que es la recta pero va a quedar arriba, o sea esto se va abajar con una ángulo de inclinación
140. A1 = entonces si esto mide lo mismo como te dije, este nada más se va a mover a acá, se va a estar moviendo así y no se va a romper, este es el que va a estar girando
141. A2 = quieres que se gire esto para que se junte con lo de acá
142. A1 = este es el que va a girar, este va a dar

143.A2 = hasta los 3 no, mira, este de 3, otro de 3, necesitamos uno de 4, pero este lo ponemos por acá y este de aquí debería de ser de 9 aproximadamente, este su movimiento va a ser a partir de este aproximadamente, ¿ok?

144.A1 = ¿cuál va a girar?,

145.A2 = vamos a decir que gire este, cuando gira para acá, esta se desplaza hacia allá

146.A1 = por eso, pero al momento que esta, sea "coplanar" (se refiere a que las cuatro barras se pliegan) con esta,

147.A2 = no tiene porque serlo,

148.A1 = pero es que este va a girar, va a estar revolucionando, entonces al momento que este coincida con este, tienes que 3 y 4 son 7 y no va a alcanzar a dar una vuelta

149.A2 = y no tenemos estos 3 de aquí, nos da 10 en total

150.A1 = por eso, al momento que este sea "coplanar" (se refiere a que las cuatro barras se pliegan) con este, se tocará con este 3, este 3 ¿no? y 4 de este son 7 y estos son 9, se va a romper,

151.A2 = así si, podemos cambiar esta por 5

152.A1 = por eso, es lo que te estoy diciendo, esto

153.A2 = tu aquí lo hiciste con 2, si trabajamos aquí con 5

154.A1 = ajá, 5 y 3

155.A2 = si a la hora de girar

156.A1 = son 2

157.A2 = si, si estás bien, 5, 4 y 3, 9

158.A1 = ahí si no se va a romper

159.A2 = y va a sobrar lo que es un espacio

160.A1 = no va a ser exacto, porque si haces la suma,

161.A2 = vamos a hacerlo, si esta correcto

162.A1 = ¿si o no lo que te decía?

163.A2 = yo lo entendí de otra forma, en particular

164.A2 = ajá, mira, de la forma en que te digo, que gire esta o que gire esta, si esta gira, si esta barra gira la más pequeña, esta nada mas va a tener un movimiento de vaivén, cierto o no, incluso si esta grande gira, si se va a romper

165.M = me gustaría que si se reúnan con alguien, cuando menos 2 o 3, si alguien sobra, si quieren cambiarse de lugar adelante, ya lo que resta de la actividad van a estar trabajando con algún compañero

Entre Estudiantes…

166.A1 = si te dije si la suma de este y este es mayor que el acoplador y esta, si lo haces más pequeño

167.A2 = no, entonces debe ser mayor, la suma de estos dos debe ser mayor que el otro

168.A3 = ¿su suma cuanto es?

169.A1 = 6 y 5

170.A2 = haber si le pongo 6,

171.A1 = si sale porque su suma no debe… ¿ya vez? no se pierde
172.A2 = entonces, ya está

Observador con Estudiantes

173.A = haber está bien este de 4, o ahí no mide 4, si ahí está, mide 4, no salió, ¿por qué no me salió?
174.O = haber, ahí son 4 lados iguales no,
175.A = si, pero no sale
176.O =haber
177.A = aquí nada mas aparece una parte
178.O = ¿como la construiste, igual que ahorita con círculos?
179.A = puse un segmento y trace círculos
180.O = ¿cual trazaste primero?
181.A = este de acá
182.O = de ahí trazaste ese y ese con ese mismo círculo, ¿luego?
183.A = después con ese mismo círculo tracé el de aquí y el de acá y a unir segmentos
184.O = este lo hiciste de aquí para acá o de aquí para acá
185.A = de aquí para allá
186.O = ah, creo que es eso, lo haces de aquí a acá y de acá para acá, haber checa la construcción
187.A = ¿cómo borro?
188.O = porque a veces puede ser ese pequeño detalle y como lo pusiste
189.A = de aquí para acá
190.O = y luego de ese punto con este otro punto, ahora sí, los círculos ya los borraste ¿verdad?, ahí está ahora vamos a hacer la animación, no, igual desaparece de este lado, se supone que lo hiciste como él (se refiere al instructor), con compás, que lo hagas ahora con compás
191.A = o sea si lo hice con compás, tracé un segmento y ya tracé con compás
192.O = tienes la instrucción para que nos anime todo lo que fuiste haciendo, el orden, se llama ¿Qué?,
193.A = no se
194.O = hay una
195.A = pues hay que voy ver a hacer este ¿no?,
196.O =haber otra vez, vuelve a poner el primer círculo, si a veces el orden cambia tantito y ya no te da
197.A = ahí está, tracé un segmento
198.O = trazas 2 de una vez, lo que sería la manivela que es esa, ahora, ahí ya es con circulo, ya no es con compas, porque se supone que ya tienes la medida, ahora une los segmentos pero en el orden que habíamos comentado, de ahí a la intersección, ahora si ya
199.A = ok
200.O = ahora sí,
201.A = si

202.O = se supone que fue igual, ¿cuál fue la diferencia?
203.A = que para a hacer estos 2 usé compás, pero ¿cuál es la diferencia?
204.O = se supone que no hay diferencia, en este caso ya habíamos nosotros descubierto que lo haces con circulo o ya tienes la medida y ahí si no hay ningún problema
205.A = Porque igual incluso en el anterior, traté de hacer uno con medidas iguales y no se podía
206.O = en teoría tiene que salir siempre, porque se supone que cumple la ley de Grashof, de entrada la cumple

Instructor con Estudiante…

207.A = la suma de estos dos lados es igual a la suma de los otros dos lados
208.M = bueno ahora se requiere que lo comenten entre ustedes y hagan el caso 2 y el caso 3

Entre Estudiantes…

209.A1 = ya vi un factor
210.A2 = ¿este factor?
211.A1 = sí
212.A2 = mira no te la sabías, ya aprendí
213.A1 = entonces la barra conectora y este tienen que ser mayor que la manivela y el soporte
214.A2 = si, o iguales
215.A1 = o iguales, si también iguales
216.A2 = haber si los hago que sean iguales, entonces a esta vamos a ponerle 2, 6 y 4 a esta, no 5 y 3, chécate que tal funciona
217.A1 = si, si funciona
218.A2 = ¿por qué no funciona?
219.A1 = porque tienes dos puntos diferentes, mira dale ahí donde dice que objeto y dile
220.A2 = ¿pero qué punto?
221.A1 = no, borra todo eso, selecciona todo y bórralo, no, elimina ese punto para que no estorbe y el otro de allá, ahora pon tus 4 líneas
222.A2 = ¿así?,
223.A1 = ahora una larga, traza tus segmentos, toma ese segmento y con compás, ahora esa
224.A2 = esta es la que esta fija ¿no?,
225.A1 = sí, ahora el círculo de ese, no... Bórralo
226.A2 = tranquilo, este aquí y ahora este va acá
227.A1 = no salió
228.A2 = dale control “z, y ahora traza el otro, el de arriba, ahora júntalo, ahí, de ahí a la intersección ahora el otro punto, ya
229.A1 = ahora, ponle el resortito (se refiere a usar el comando animación), uy se rompió, acórtala
230.A2 = esta, ¿no? esa hay que hacerla más larga, acorta la otra, ahora trázalas, en las intersecciones de los círculos son los segmentos, entonces de ahí a la intersección y de ahí al otro punto
231.A1 = ya está

232.A2 = ahora ocúltalos y ponle el resortito en ese punto, uy se rompió, acórtala y esa mas grande, más, más, por ahí, ya esta

233.A1 = ya funcionó

234.A2 = entonces este es el balancín

235.A1 = entonces la suma de este que está fijo y la manivela

236.A2 = la manivela y la fase

237.A1 = la suma de esas longitudes debe ser mayor o igual que la suma de los otros dos

238.A2 = menor

239.A1 = no mayor o igual

240.A2 = no menor, mira la suma de este y este dan 5 y algo y las otras dan 10 y algo

241.A1 = entonces la suma debe ser menor o igual

242.A2 = por eso, eso te estaba diciendo y tu decías que mayor

243.A1 = entonces la de la barra y la manivela

244.A2 menor o igual que las otras dos

245.A1 = ya está

Entre Estudiantes…

246.A1 = Haber, primera consideración

247.A2 = Para este primer caso, con la guía del profesor, construyan un mecanismo de 4 barras articuladas, en el cual las cuatro barras tengan la misma longitud y anoten sus conclusiones, ¿qué le ponemos?

248.A1 = la diferencia entre el lado fijo y la manivela, tiene que ser igual a la del acoplador y a la de… no me acuerdo, ¿cómo dijo que se llamaba?

249.A2 =no se, entonces si le ponemos, la diferencia entre…

250.A1 = si mira, por ejemplo aquí, igual en el otro si le ponemos 10, si gira

251.A2 = si gira, sigue girando ¿no?,

252.A2 = entonces si funciona, cuando la diferencia es la misma, siempre y cuando estos dos lados sean más grandes ¿no?,

253.A1 = o sea los opuestos

254.A2 = si, mira ahí la diferencia es una línea recta y sigue girando, digamos que la manivela y el lado fijo deben ser menos a los lados opuestos, pero las diferencias deben ser iguales, ah pero…

255.A1 = bueno esta es la conclusión de esta ¿no?, ¿cómo le ponemos?

256.A2 = para que el mecanismo de Grashof funcione, la diferencia entre el lado fijo y la manivela debe ser igual

257.A1 = o mayor ¿no?,

258.A2 = haber, no, si es mayor, desaparecen

259.A1 = entonces la diferencia debe ser mayor a la diferencia del acoplador

260.A2 = ¿y cómo se llama el otro lado?

261.A1 = debe ser mayor o igual a la diferencia de la barra acopladora y ¿cómo se llama esta barra que une?,
262.M = la que une a la manivela con la que hace el trabajo, se llaman barra acopladora
263.A1 = no la otra
264.M = ¿esta?, depende, si está oscilando, si ya tienes el mecanismo que oscila, le llaman balancín
265.A1 = balancín
266.M = si así se le llama porque, nada mas hace eso oscilar, hace como que una barrida… ahí no aguanta
267.A1 = ya vimos porqué y así es cuando ya funciona
268.A1 = entonces el balancín
269.A2 = pero aparte deben de cumplir la otra condición ¿no?, que lados opuestos sean…
270.A1 = para que el mecanismo de Grashof funcione, la diferencia entre el lado fijo y la manivela debe ser igual o mayor que la diferencia de la barra acopladora y el balancín
271.A2 = y la barra fija debe ser menor
272.A1 = debe ser menor que la acopladora ¿no?
273.A2 = ajá y que la manivela sea menor que el balancín
274.A1 = o sea la manivela es menor que esta ¿no?,
275.A2 = ajá
276.A1 = oye también la diferencia de su ángulos tiene que ser la misma, es decir este con este y este con este tiene que ser la misma de este con este ¿no?, haber chécalo
277.A2 = haber 8, 10
278.A1 = auméntale 1
279.A2 = pero acuérdate que ya no nos va a dar, haber 6, 9, 7, 11
280.A1 = pues salió lo mismo, si la diferencia entre los lados es la misma
281.A2 = entonces le ponemos, ¿cómo le ponemos?
282.A1 = la diferencia entre…
283.A2 = otra condición es la diferencia entre el acoplador y el lado fijo debe ser igual a la diferencia entre el balancín y la manivela ¿no?, haber espérate, voy a ver qué pasa si le aumento y me da la diferencia entre este y este
284.A1 = si es menor también
285.A2 = si es menor la diferencia entre ambos
286.A1 = si es menor la diferencia entre el acoplador y el balancín
287.A2 = si funciona así
288.A1 = la diferencia es de 1 y la diferencia entre ambos es, ahora ¿qué pasa si esta cosa en lugar de 7 es 9?, mmm ya valió, si ya no, entonces esta diferencia debe ser menor o igual ¿no?,
289.A2 = con 9 desaparece
290.A1 = haber con 5, aquí la diferencia
291.A2 = es 1 y 2
292.A1 = si mira deben ser deben ser menor o igual
293.A2 = pero la del acoplador con el lado fijo

294.A1 = si mira, la diferencia del acoplador con el lado fijo debe ser menor o igual que la diferencia con estos, mira aquí la diferencia es menor

295.A2 = ¿qué pasa si le cambiamos? ahora al revés, cámbiale… ahora la diferencia entre uno y otro, es decir esta diferencia es menor o igual que esta

296.A1 = ahora, esta de aquí es menor…

Instructor con Estudiante…

297.M = 5, 5, 4, 9, haber la volvemos a intentar hacer, 5, 5, 4 y 9, haber ¿cuál es la que usaste como manivela?,

298.A= esta

299.M = con compás la de 5, o ¿cuál estabas usando?

300.A = no me acuerdo con cual el sistema funciona

301.M = ok, tu ahí estas introduciendo 2 barras de la misma longitud, es una de las cosas que estoy viendo, la de 5, si tenías 2 de 5 ¿verdad?, aquí podría poner la otra de 5 de hecho de una vez, esa sería tu propuesta, 5 y 5 y ya está, fíjate que ahora esta puede ser candidata a manivela, aquí puede girar, no hay problema, esta es otra candidata a manivela, igual puede girar, entonces ahí como que vamos bien, ahora necesito terminar la construcción con la de 4 que puede ir aquí o acá, se me ocurre que vaya aquí y la de 9 que ahí si no hay de otra, la de 9 tiene que ir acá y yo buscaba este cruce, porque de aquí para acá hay 4 y de aquí para acá hay 9, entonces esa es una propuesta con las dimensiones que tu das de 5, 5, 4 y 9 y ahora esperamos que la animación funcione, porque este punto puede girar en torno a este, entonces ahora si debe permitir ver su funcionamiento

302.A = …

303.M = ok aquí una sugerencia, para que no estén introduce e introduce números a cada rato, si tu quieres construir un mecanismo, si te dicen, tienes 4 barras, dime si con esas 4 barras es posible construir el mecanismo de Grashof, vamos a dar los segmentos, sin importarnos mucho la longitud, yo doy 4 segmentos, por darlos de hecho los dí diferentes, nada mas por alguna razón y con esos segmentos queremos construir el mecanismo, esa va hacer mi candidata a manivela y se me ocurre que el más grande, el que se ve más grande, se me ocurre que sea mi candidato al eslabón fijo al que no se mueva, el que esta fijo en una maquina tal vez, entonces ahí está, hice este e hice este, ahora tengo que acoplar este aquí, y este

304.A = del otro lado

305.M = exactamente, ahí esta la intersección que yo buscaba, ¿cuál es entre comillas la ventaja de hacerlo así?, la siguiente, yo por ejemplo animo y espero que el mecanismo funcione, ah, ¡no funcionó!, entonces vengo acá y digo haber a lo mejor la manivela la hago más chiquita, haber que pasa y animamos, haber ahora que sucede, vamos a ver, ahí está ese mecanismo sería uno que si nos interesa, se parece incluso mucho al del videíto que les pase en el software de ingeniería, entonces ahora uno dice, este mecanismo sí es de Grashof, ¿por qué se comportará así?, tú dices pues, hace rato te interesaba mucho las dimensiones pues podemos seguir, de hecho aquí directamente no, lo vemos acá más directo, o sea este segmento es este, o sea las dimensiones se las podemos pedir al software y tú dices a ver qué pasa si cambio las dimensiones, a lo mejor dices, la barra acopladora; si es grande el mecanismo no funciona, la barra acopladora es esta, fíjate ahí directamente el único que modifico es la barra copladora y dices ¿qué pasa si la barra copladora cambia?, no pasó nada, bueno es otro mecanismo pero siguió funcionando, entonces ahí como que más claramente te das unas ideas porque ya tienes marcadas dimensiones, tú puedes manipular acá tus barras y no tiene que estar introduce e introduce a cada rato números, ahí nada mas si quieres arrastrar con esa instrucción.

Entre Estudiantes…

306.A1 = ¿qué es eso?

307.A2 = como te decía 2 y 3 son 5 y 7 es el más largo, entonces ahora este, ¿cuál es que tengo que animar, es este?,

308.A1 = depende cual sea tu barra acopladora, ¿cuál es tu barra fija?

309.A2 = es este

310.A1 = ah bueno, entonces esta se va aquedar fija, y ¿cuál es la que se va a mover, cual es la manivela?

311.A2 = esta

312.A1 = entonces agarra ese, no la sueltes, ¿ok? ahí está, se truena porque estos dos se mueven, se supone que no se deberían de mover

313.A2 = no, ¿sabes qué? esta se está haciendo más larga

314.A1 = igual lo podemos hacer con el maple, igual te permite animaciones

315.A2 = bueno en si lo que pienso yo siento que es, cierto o no

316.A2 = ¿ya les salió?

317.A3 = no

318.A2 = es que por ejemplo tienes estos dos, este es el más largo ¿no?, sumas estos dos y este, son 9, entonces este tiene que ser exactamente 9 para que funcione y pueda girar y no se va a romper

319.A3 = no ¿cómo?,

320.A2 = es que al momento, por ejemplo aquí cuando son colineales, en ese momento debe de medir los 3 juntos deben de medir la longitud del más largo para que no se reviente, cuando son colineales, en el momento que son colineales

321.A3 = sería como el primero que hicimos ¿no?,

322.A2 = ajá, bueno cuando gira, por ejemplo ¿cuánto les da la suma?

323.A3 = la suma de estos dos debe ser la misma que la de estos dos, ¿sí? porque intentamos con otros y no nos da

324.A2 = ¿cómo, cómo?

325.A3 = ajá, este y este si los sumas te da lo mismo si sumas este y este

326.A2 = aaah, si por eso, debe ser porque por ejemplo cuando este está exactamente colineal todo, debe ser la misma longitud, por ejemplo estos dos y estos dos deben dar lo mismo o como te digo los 3 debe ser la misma longitud que uno

327.A3 = a parte el que debe de girar es el que tiene menor longitud

328.A2 = exactamente, el que tiene menor longitud es el que debe de girar, si giras el grande pues se va a tronar

329.A3 = ¿qué pasa si gira otro?

330.A1 = el sistema funciona a partir de que la base y el ¿cómo se llama?, estas tengan la misma longitud y sin importar que estas sean diferentes, inténtalo

331.A2 = lo voy a volver a hacer todo

332.A1 = esta y esta son las que se van a mover

333.A2 = ahí por ejemplo, la suma de los dos que se están moviéndose

334.A1 = da 5

335.A2 = bueno por ejemplo ahí, no queda coplanar porque una longitud es mayor que las otras dos completas, bueno es que si sumas dos

336.M = fíjense que algunos de repente si se fueron un tanto por la libre, otros si vi que estuvieron analizando estos dos casos particulares, miren el caso dos, nos dice que si tengo solamente dos barras distintas, decía a = b y c = d o a = c y b = d, entonces por ejemplo, yo aquí estas dos longitudes que di son distintas y hay dos formas de acoplar las 4 barras o de hacer dos mecanismos distintos, este sería uno donde las dos barras iguales son las que se conectan, se ve que si funciona aunque hace cosas me dio raras y la otra forma es esta, las barras opuestas sean las iguales como aquí, esta con esta y esta con esta, como que ahí funciona más bonito el mecanismo, bueno se parece de hecho mucho en alguna parte de su movimiento a lo que hicimos en el caso 1, cuando las 4 barras eran iguales, en el sentido de que en esta parte parece que es un paralelogramo igual ¿no?, toda esta parte la configuración se comporta como un paralelogramo, allí ya se cruzan las barras y pasa algo me dio raro, es decir no da la vuelta completa la otra barra sino que regresa y acá pues como que la que mueve como que arrastra a totalmente a la otra, fíjense y además como que teletransporta al mecanismo, ya vieron, si como que aquí nos hace trampa, este me gusta menos que el otro pero en apariencia son mecanismo de Grashof , en apariencia una de las barras si puede girar, ahorita van a ver lo que les digo como se teletransporta, pero ya vieron que además se juntan ahí, ya vieron, eso como que no lo haría en la realidad, esta raro porque creo más que podría comportarse así y además aquí creo que no es muy difícil justificar que en toda esta parte la configuración es un paralelogramo también, bueno ese es un caso, me gustaría que si no lo han hecho con un poco de más orden en cuanto a lo que planeamos para hoy, aborden el tercer caso, ahí de plano las 4 barras ya son distintas y les da unas medidas en especial, en el caso 3, que está en la tercera hoja, dice, haber piensa que una barra, la barra A mide 2, la barra B = 7, C mide 4 y D = 5, y hay dos formas también de configurar ese mecanismo, nos dice que exploremos el caso en el que la suma de A y B es igual a C y D o que la suma de A y C es igual a la suma de B y D, entonces traten de explorar ese caso si no lo han hecho y haber que cosas concluyen, yo ya he escuchado y algunos ya tienen como que muchas ideas sobre qué es lo que debe pasar para que si de giros completos la manivela, entonces vean con calma ese caso, constrúyanlo y discutan en equipo que es lo que pasa, ahí lo pueden construir de dos formas, de hecho me gustaría que hicieran las dos formas y vean de ambas formas funciona o no funciona, entonces váyanlo trabajando por favor como están en equipo con esas medidas en particular para que ahí así todos de alguna manera tengamos algo similar, el caso 3, A vale 2, B vale 7, C vale 4 y D vale 5 nos dice

Entre Estudiantes…

337.A2 = ¿cuáles son tus conclusiones?
338.A1 = que es posible el mecanismo de Grashof con 4 lados iguales
339.A1 = es posible crear un mecanismo de Grashof
340.A2 = que no me convence, o diría que no
341.A1 = es que porque está mal dibujado, bueno no mal dibujado sino que la ubicación, si esto no pasa acá, cuando esta cosa gire, llega acá su máximo entonces esto se iría para abajo y este tendría que bajar, pero el programa te lo tiene que acotar, realmente en la realidad debería de ocurrir que este pase por atrás, entonces sigue ¿no?,
342.A2 = ¿entonces?
343.A1 = mira por ejemplo el que continua es este punto, no es este, entonces este punto debería de seguir así y el otro por acá, realmente, o sea que si existe pero el programa no, digamos que no te "experiencia"
344.A2 = experiencia, entonces
345.A1 = es posible crear un mecanismo de Grashof de 4 barras iguales, ¿qué más?
346.A2 = pues ese es el caso en el que todas sean iguales
347.A1 = y el caso en el que sean desiguales también es posible ¿no?,
348.A2 = ¿qué pasa cuando A es igual a B?
349.A1 = mira aquí también es raro ¿no?, aquí también da todo, no hace esto realmente, lo que haría es que se iría acá
350.A2 = no, si haría eso, este no está creciendo
351.A1 = no, no está creciendo, mira aquí tiene una aceleración muy fuerte, lo podrías utilizar como una catapulta
352.A2 = no, el software no lo hace físicamente, es decir da la vuelta pero el software no lo hace
353.A1 = entonces el software es chismoso, ¿no? si lo hace
354.A2 = ok si podría hacerlo pero realmente esto también lo podría hacer, mira si aquí no golpeara, si en este punto no golpeara en el punto rojo, si no golpea entonces esta cosa puede pasar sobre él, mira esta así,
355.A1 = ya te entendí
356.A2 = si puede
357.A1 = como si este punto estuviera pegado a la pared
358.A2 = pero que no rozara, o sea estos están libres
359.A1 = este punto está aquí y lo que hace es flotar aquí en el aire, este punto daría toda la vuelta así, entonces el software es chismoso ¿sí?
360.A2 = entonces eso hay que anotar
361.A1 = ¿te convenció o no te agradó?,
362.A2 = es que se debe poder con el software

363.A1 = es que esto que hace seria bien cañón y es que es el tiempo que lleva la aceleración y la velocidad, lo que se tarda en llegar, toda la vuelta y regresa más rápido, si te fijas la distancia que hay de este punto a este punto, es menor que la que hay en dar toda la vuelta, entonces de cierta forma tiene que regresar más rápido

Entre Estudiantes…

364.A1 = si mira yo le puse a, b, c y d, uy en ese punto se van para allá, se disparan, ¿no? se ven muy raro, nada mas como que llegaría aquí de ahí se regresa
365.A2 = ¿y cuál es su diferencia ahí?
366.A1 = diferencias, 2, 2, son las mismas ¿no?,
367.A2 = si funciona
368.A1 = haber lo que le habías puesto anteriormente
369.A2 = que la diferencia tenía que ser igual o menor
370.A1 = igual o menor, aquí la diferencia entre el balancín y esta son iguales….
371.M = esto se ve interesante, ¿qué se te ocurrió ahí?,
372.A = una línea que uniera a estos dos vértices y para poder observar mejor lo de los ángulos
373.M = ah, perfecto tú ya pensaste en dividirlo y formar 2 triángulos, o sea en un cuadrilátero si trazas una diagonal…
374.A = va variando, es que por ejemplo aquí no está así la figura, pero cuando la suma de estos 2 lados y de estos dos lados es la misma, cuando esto va girando así, esta diagonal, digamos que esta es igual que esta, cuando esta de aquí forma un ángulo de 0 grados o de 180 grados con este, o sea esta de aquí va a quedar encimada, ahí es donde quedan sobre puestas
375.M = muy bien esa es una muy buena idea, de hecho se me hace muy buena, ¿les parece si la compartimos?, ya casi terminamos, haber acá me acaban de platicar una idea que se me hace interesante y como ya casi terminamos, lamento que no puedan extender más la actividad porque de hecho estaba para más, como dicen sus compañeros este ángulo es crucial, bueno ver los ángulos es algo interesante, entonces en Cabri lo que nos permite ver, es que cuando este ángulo de hace de 180° es cuando el mecanismo no podría funcionar o en su defecto es cuando las 4 barras se sobreponen y entonces dicen sus compañeros, vamos a tratar de analizar qué pasa con ese ángulo, ellos proponen lo siguiente, ellos proponen trazar una diagonal, obviamente cono esta diagonal como el cuadrilátero no esta estático, como el cuadrilátero se deforma, esta diagonal va cambiando de hecho dicen, llega un momento en que esa diagonal vale exactamente A + D o llega un momento en que esa diagonal vale A – D, puede ser y quieren encontrar relaciones de entre estos lados y este ángulo, bueno obviamente uno también piensa en este ángulo, que de hecho en términos prácticos este ángulo es importante, de hecho pueden pensar que este ángulo es un dato que les dan, por ejemplo el ángulo teta, es un dato que les dan porque ustedes en algún momento le toman a lo mejor un fotografía al mecanismo y dicen, ahorita el ángulo entre la manivela y el

estacionario o el fijo “es tanto” y lo que quieren ver es como se está comportando el otro, pensemos que este es el ángulo que nos interesa y que A, B, C y D y este ángulo son datos, ¿qué relaciones se les ocurre que pueden encontrar con los datos?, con esos 4 lados y este ángulo para tratar de involucrar a este y vean aquí que ya se les ocurrió la idea de trazar la diagonal, que aunque cambia, no se, le podríamos llamar por ejemplo épsilon a esa diagonal, de entrada me dicen es que ya hay dos triángulos, ¿qué pueden hacer entonces para involucrar a la incógnita o al dato que queremos estudiar?, tienen dos triángulos, tienen sus lados de hecho, digamos que los lados, épsilon varia, épsilon va a cambiando eso sí, A, B, C y D son datos fijos, teta varia pero podemos pensar que en momento particular que no lo dan como un dato de entrada, haber algo que se les ocurra algo que recuerden de sus cursos de matemáticas, fíjense tienen dos lados y tienen el ángulo entre ellos y pues acá hay un lado que no conocen muy bien, pero haber dos lados de un triángulo y el ángulo entre esos lados

376.A1 = ley de cosenos

377.M = ley de cosenos, ¿les parece?, entonces ley de cosenos, que les parece si escribimos la ley de cosenos para este lado, porque conocemos A, D y teta y queremos entonces saber épsilon, entonces el cuadrado de épsilon... eso es ¿verdad? y yo creo que ustedes están pensando que también puedo hacer lo mismo para el otro lado, porque B y C son datos y ahí me va a parecer este que me interesa, entonces la ley de cosenos escrita para el otro, la otra parte del cuadrilátero y este ángulo es el que me interesa, no importa cuánto valga épsilon ni cuánto valga el cuadrado de épsilon, tengo dos expresiones que me relacionan épsilon, ¿qué les parece si las igualan y me dicen en términos de todo lo que obtengan cuánto vale gama?, ya van a poder saber cómo encontrar este ángulo y es un ángulo muy importante ya en el contexto de los mecanismos a este le llaman ángulo de transmisión y de hecho cuando se construye un mecanismo hay que tener cuidado entre qué valores y que valores va a oscilar ese llamado ángulo de transmisión, entonces haber ¿quien me dice?… Fin de la sesión

APÉNDICE B

PROTOCOLO DE LA TAREA DE APRENDIZAJE PARA LA REALIZACIÓN DIDÁCTICA

Fecha:___________________________
Guía de la actividad

Instrucciones: Lee con atención lo que se te solicita, **si tienes dudas pregunta al profesor**, es importante que trates de responder a todas las preguntas, escribiendo todas las ideas y recursos matemáticos que utilices para dar solución.

PREÁMBULO

Abre el software de geometría dinámica Cabri Geometry y construye lo siguiente de forma individual:

a) Un cuadrilátero de lados 5, 7, 8 y 13 centímetros
¿Tuviste alguna dificultad?
Compara el cuadrilátero que tú construiste con el de tus compañeros más cercanos
¿Hay diferencia?
En caso de existir diferencia ¿a qué lo atribuyes?

b) Un cuadrilátero de lados 2, 3, 4, y 11 centímetros
¿Tuviste alguna dificultad?
Pregunta a tus compañeros más cercanos si ellos pudieron construirlo o no.
¿Qué diferencia percibes con respecto al cuadrilátero que se te solicitó construir anteriormente?

Responde a las siguientes preguntas:
¿Un cuadrilátero queda bien definido al especificar las longitudes de sus cuatro lados? ¿Por qué?

¿Qué criterio puedes seguir para que dados los lados de un cuadrilátero, puedas decidir si su construcción es posible o no?

Tiempo máximo: 15 minutos

ACTIVIDAD CENTRAL (lee con atención)

En mecánica, un mecanismo de 4 barras no deformables, articuladas en sus extremos, es también conocido como mecanismo de Grashof, si se cumple que al menos una de las barras pueda dar una revolución completa con relación a alguna otra barra.

Dado un cuadrilátero cualquiera de lados A, B, C y D, averigüe si es un mecanismo de Grashof. ¿Qué criterio puede usar para saber si un mecanismo de 4 barras, es de Grashof?

Sugerencia:
Trata de representar la información con ayuda del software dinámico, si tienes dudas respecto a la actividad pregunta al profesor. Puedes usar el comando animación para confirmar si alguna de las barras da giros completos.

Si todavía no logras construir un cuadrilátero que funcione como un mecanismo de Grashof, observa con atención la animación en video que se proyectará de un mecanismo cuatro barras:

(Observar video)

¿Aún no logras representar un mecanismo de Grashof?
Observa con atención los intentos que realizaste en el software dinámico
¿De qué crees que depende que una de las barras del mecanismo pueda dar una revolución completa?

Tiempo máximo para explorar: 15 minutos

Para tratar de entender qué está pasando, por qué algunos cuadriláteros trabajan como mecanismos de cuatro barras articuladas tipo Grashof y otros no, te invitamos que trabajes los siguientes casos particulares, formando equipo con otro compañero cercano. Si tienes dudas de la forma en que vas a trabajar, pregunta al profesor.

Análisis de casos particulares

Caso I. ¿Qué pasa si $A = B = C = D$?

Para este primer caso, con la guía del profesor, construyan un mecanismo de 4 barras articuladas, en el cual, las cuatro barras tengan la misma longitud.

Anoten sus conclusiones y observaciones (discute con tu compañero y lleguen a un acuerdo)

II. ¿Qué pasa si $A=B$ y $C=D$ o $A=C$ y $B=D$? A continuación, revisen en equipo los casos en los que las 4 barras no tengan la misma longitud, pero que se tengan dos barras de la misma longitud, y otras dos de diferente longitud a las primeras, pero iguales entre sí.

Anoten sus conclusiones y observaciones (discute con tu compañero y lleguen a un acuerdo)

Caso III. ***A + B = C + D;*** **o** ***A + C = B + D***. Ahora realicen la configuración de un mecanismo, en el cual las cuatro barras sean de diferente longitud, pero que la suma de longitudes de dos, sea igual a la suma de otras dos, por ejemplo, configurar el mecanismo cuatro barras con los datos ***A=2; B=7 ; C=4 ; D =5.***

Anoten sus conclusiones y observaciones (discute con tu compañero y lleguen a un acuerdo)

Tiempo máximo para analizar los tres casos: 30 minutos

Después de revisar los casos anteriores ¿tienen alguna conclusión respecto a la pregunta inicial? ¿Tienen sospechas respecto a qué se debe cumplir para que una de las barras gire vueltas completas? Discutan entre compañeros de equipo y escriban las conclusiones que tienen o los acuerdos a los que han llegado respecto a la pregunta.

Búsqueda de relaciones entre la longitud de los lados y los ángulos entre barras.

Toda vez que se han construido con ayuda del software dinámico algunos casos particulares, es posible que tengan algunas sospechas, una tal vez relacionada con el momento en que las barras *B* y *C* se alinean; si fueron observadores, la barra *A* no pudo efectuar giros completos cuando el ángulo entre *B* y *C* fue de 180°.

Otra sospecha puede estar basada en que la suma de las longitudes de dos barras, comparadas con las otras dos, tiene relación con la rotación completa de la manivela.

Para tratar de entender el comportamiento de estos mecanismos, trata de establecer relaciones matemáticas que involucren los datos que se sospecha tienen que ver con la rotación en particular de la barra *A*.

¿Qué relaciones pueden establecer que involucren los ángulos y las dimensiones de las barras del mecanismo? Discutan en equipo y traten de escribirlas. **Si tiene dudas, pregunten al profesor.**

ENCUESTA DE SALIDA

Te agradecemos tu participación y te solicitamos para finalizar que respondas la siguiente encuesta:

Edad:____________________
Semestre y carrera:_____________________________

¿Cuáles han sido los últimos que cursos que llevaste de matemáticas?

¿Has tenido dificultades para hacer las actividades? Explica por qué

¿Prefieres esta forma de trabajar que la tradicional? Explica por qué

¿Te ha gustado la experiencia? Explica por qué

¿Te ha gustado trabajar en equipo? Explica por qué

¿Te gustaría continuar trabajando de esta forma? Explica por qué

¿Qué es lo que más te ha gustado de esta experiencia?:

¿Qué es lo que menos te ha gustado de esta experiencia?

Expresa tu valoración general o los comentarios que creas que son de interés:

APÉNDICE C

CONDENSADO DE RESPUESTAS DE LA ACTIVIDAD IMPLEMENTADA EN LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO (23 de Marzo de 2010)

PREÁMBULO

INSTRUCCIONES: ABRE EL SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA CABRI GEOMETRY Y CONSTRUYE LO SIGUIENTE DE FORMA INDIVIDUAL.

a) Un cuadrilátero de lados 5, 7, 8 y 13 cm. ¿Tuviste alguna dificultad?

participante	Al principio	Un poco	si	No	No contestó
1	✓				
2		✓			
3			✓		
4					✓
5			✓		
6		✓			
7		✓			
8	✓				
9				✓	
10				✓	
11		✓			
12		✓			

Compara el cuadrilátero que tú construiste con el de tus compañeros más cercanos. ¿Hay diferencias?

Participante	Si	No
1	✓	
2	✓	
3	✓	
4	✓	
5	✓ En la forma	
6		✓
7	✓	
8	✓ En la forma y en la posición	
9	✓	
10	✓	
11	✓	
12	✓ En algunos casos	

En caso de existir diferencia, ¿a qué lo atribuyes?

Participante	Causas de las diferencias
1	Aunque las dimensiones son las mismas, la posición de los segmentos puede ser diferente
2	Cada uno es diferente
3	Porque los lados no definen por completo el cuadrilátero
4	Al ángulo en que se colocan los primeros dos lados
5	A las diferentes formas de construirlo
6	No contestó
7	A que cada compañero partió con distintos lugares y distintos ángulos
8	A los ángulos que se forman entre las rectas
9	Solo es una rotación y también hay variación en los ángulos internos
10	A que la suma de los lados con menor magnitud es mayor que el lado con mayor longitud y entonces se pueden acomodar a distintos ángulos para obtener el cuadrilátero
11	A la selección de los puntos que se eligieron
12	A la orden de la selección de los números

b) **Un cuadrilátero de lados 2,3,4,11 cm.** ¿Tuviste alguna dificultad?

Participante	no	si	
1	✓		
2			Mas o menos
3	✓		
4	✓		
5		✓	
6		✓	
7	✓		
8			No lo pude crear
9		✓	
10		✓	
11		✓	
12	✓		

¿Qué diferencia percibes con respecto al cuadrilátero que se te solicitó construir anteriormente?

Participante	
1	No se puede construir, dada la medida de los lados
2	Un poco, porque no se puede construir
3	Que no se puede construir porque los lados por más que movemos no cierra
4	Que no se puede construir ya que la suma de tres de sus lados no es mayor que el lado faltante

5	La suma de los tres lados es mucho menor que uno de sus lados
6	Que no tiene solución este problema
7	Que este es imposible porque la suma de tres de sus lados debe ser mayor al cuarto lado que es de 11
8	Este cuadrilátero no existe
9	Las longitudes de los lados
10	El lado de mayor longitud es mayor a la suma de los demás lados
11	La longitud de los segmentos no permitía que se formará el cuadrilátero con los lados dados
12	Que el segundo no se puede construir

Responde a las siguientes preguntas:

¿Un cuadrilátero queda bien definido al especificar las longitudes de sus cuatro lados? ¿Por qué?

Participante	
1	Si, dadas las medidas de los lados, se puede especificar si el cuadrilátero se puede construir o no
2	No porque la distancia entre los vértices de la figura no debe ser más que el otro 2 + 3+4 = 11
3	No, porque para definir un cuadrilátero no son suficientes la longitud sino también requerimos los ángulos internos
4	Sí porque al trazar con compás no cierra, es algo similar a la desigualdad del triángulo
5	No porque no sabes si la suma de tres lados es igual o mayor
6	No para que quede bien un cuadrilátero debe ser intersección de cada uno de sus lados
7	Porque los ángulos le dan diferente dirección a los segmentos
8	No, las longitudes pueden no indicar un cuadrilátero
9	No, porque existen variaciones entre los ángulos interiores
10	No, porque puede tomar formas diferentes aunque las dimensiones son las mismas
11	No siempre ya que algunas veces no se puede cumplir con los datos dados
12	No porque puede ocurrir como en el caso del segundo, un lado era más grande en relación a los otros 3

¿Qué criterio puedes seguir para que dados los lados de un cuadrilátero, puede decidir si su construcción es posible o no?

Participante	
1	Dados los datos de los lados, la suma de los tres lados menores, debe ser mayor al último lado
2	Sumando 2 +3+4<11
3	Que la suma de 3 lados sea mayor al 4to restante
4	Si la suma de 3 de sus lados es mayor al lado faltante
5	Que la suma de 3 de sus lados debe ser mayor y no igual
6	Que la suma de 3 lados es mayor al cuarto, de lo contrario no habría intersección
7	Que la suma de 3 de sus lados sea mayor a la del 4to lado

8	Que la suma de 3 lados sea mayor que la longitud del cuarto
9	Es posible en caso de que la longitud del lado mayor debe ser menor que la suma de las otras tres longitudes
10	Que el lado que tenga mayor longitud sea menor a la suma de los otros 3 lados
11	Tomando en cuenta la longitud de sus lados. Que la suma de tres de sus lados sea mayor al cuarto lado
12	Que no puede ser cualquier longitud para construirlo. Los 3 lados sumados tienen que ser mayor que la longitud del último

ACTIVIDAD CENTRAL

En mecánica, un mecanismo de 4 barras no deformables, articuladas en sus extremos, es también conocido como mecanismo de Grashof, si se cumple que al menos una de las barras pueda dar una revolución completa con relación a alguna otra barra.
Dado un cuadrilátero cualquiera de lados A,B,C y D, averigüe si es un mecanismo de Grashof. ¿Qué criterio puede usar para saber si un mecanismo de 4 barras, es de Grashof?
¿De que crees que depende que una de las barras del mecanismo pueda dar una revolución completa?

Participante	
1	El tamaño de las barras, la barra móvil debe ser más pequeña que las otras
2	La longitud del paralelogramo
3	Que la suma de 2 lados es igual a la suma de los otros dos
4	De que la medida de dos de los lados (el fijo y el que gira) sea mayor que el lado acoplador
5	Yo pienso que deben ser iguales los lados o números continuos
6	Que la suma de dos lados debe ser igual a la suma de los otros dos
7	Que la suma de las longitudes de la barra y de la manivela debe ser menor a la suma de los dos segmentos restantes
8	Que la suma de las barras consecutivas sea igual a las otras dos, o que el de la manivela y la de soporte sea $\geq$ que las otras dos
9	El lado más grande es la base, la suma de el lado base y la manivela tiene que ser menor que los otros 2 lados
10	Que la suma de los lados A+B = C + D
11	Que la suma de dos lados sea igual a la suma de los otros dos lados
12	Que una debe ser pequeña en relación a las demás o 2 barras sumadas sus longitudes deben ser igual a la suma de las otras dos

ACTIVIDADES EN BINAS

Para tratar de entender que está pasando, porqué algunos cuadriláteros trabajan como mecanismos de cuatro barras articuladas tipo Grashof y otros no se trabajarán los siguientes casos particulares, formando equipo con otro compañero cercano.

Análisis de casos particulares:

Caso 1. ¿Qué pasa si A = B = C = D?

Anotaciones de las conclusiones y observaciones (discutir con el compañero de equipo y llegar a un acuerdo)

Participante	
1	Para que el mecanismo de Grashof funcione, la diferencia entre el lado fijo y la manivela debe ser igual o mayor a la diferencia de la barra acopladora y el balancín. Otra condición, es que la diferencia entre el acoplador y el lado fijo, debe ser igual o mayor que la diferencia entre el balancín y la manivela.
2	Existe línea recta
3	Que al tener 4 lados iguales si es un mecanismo de Grashof pero para construir el cuadrilátero requiere cierto procedimiento
4	Para que el mecanismo de Grashof funcione la diferencia entre el lado fijo y la manivela debe ser igual al acoplador y el balancín. La diferencia entre el acoplador y el lado fijo debe ser igual o mayor que la diferencia entre el balancín y la manivela
5	Este caso es un mecanismo de Grashof. Para construir el cuadrilátero con lados iguales se tiene ya un procedimiento para poder hacerlo
6	Que al tener 4 lados iguales si es un mecanismo de Grashof pero para construir el cuadrilátero requiere de cierto procedimiento
7	Es posible construir un mecanismo de Grashof con 4 barras iguales.
8	Es posible crear un mecanismo de Grashof con 4 barras iguales
9	Si es posible crear un mecanismo de Grashof con loas 4 barras iguales, pero el software no nos permitió observarlo
10	Al tener los 4 lados iguales si es un mecanismo de Grashof porque la suma A+B = C + D ó A + C = B + D
11	Cuando las 4 barras son iguales se consigue un mecanismo de Grashof pero se forman dos segmentos iguales cada que se completa un giro
12	No es una máquina de Grashof

Caso II: ¿Qué pasa si A = B y C=D ó A= C y B = D?

Revisar en equipo los casos en que las 4 barras no tengan la misma longitud, pero que se tengan dos barras de la misma longitud, y otras dos de diferente longitud a las primeras, pero iguales entre sí.

Anotaciones de las conclusiones y observaciones (discutir con el compañero de equipo y llegar a un acuerdo)

Participante	
1	Lo anterior se cumple si la medida del lado fijo y la manivela son distintas
2	teletransportación
3	Para que sea un mecanismo de Grashof va a depender de la construcción
4	Lo anterior se cumple si la medida de el lado fijo es distinta a la manivela
5	Se deben hacer la combinación de dos para que tengan el mismo diámetro pero en la realidad esto se trabajaría cuando los diámetros se pliegan
6	Para que sea un mecanismo de Grashof dependerá mucho de su

	construcción
7	Es posible crear el mecanismo de Grashof
8	Es posible crear un mecanismo de Grashof con dos pares de lados iguales
9	Si es posible en ambos casos, pero en el primer caso hay una parte de la trayectoria en la que las barras se pliegan
10	También es un mecanismo de Grashof
11	También es un mecanismo de Grashof
12	En este caso si es una máquina de Grashof por la relación de igualdad de longitud entre las barras

Caso III: A + B = C + D; ó A+ C = B + D.

Ahora realizar la configuración de un mecanismo, en el cual las cuatro barras sean de diferente longitud, pero que la suma de longitudes de dos, sea igual a la suma de otras dos, por ejemplo, configurar el mecanismo de cuatro barras con los datos A= 2; B =7; C= 4; D = 5

Anotaciones de las conclusiones y observaciones (discutir con el compañero de equipo y llegar a un acuerdo)

Participante	
1	La diferencia entre el acoplador y el lado fijo debe ser mayor o igual a la diferencia entre el balancín y la manivela para que sea mecanismo de Grashof
2	Si funciona y utilizan 2 manivelas con los efectos de los casos anteriores.
3	En este caso no importa la forma de construcción
4	De que la medida de dos de los lados (el fijo y el que gira) sea mayor el lado acoplador
5	Este caso es mucho mejor
6	En este caso no importa la forma de construcción
7	También es un mecanismo de Grashof
8	No hubo anotaciones
9	Si A + B = C + D entonces en la trayectoria de las barras, existe un momento en que se pliegan Si A + C = B + D entonces si es posible , pero existe un punto crítico en el movimiento.
10	También es un mecanismo de Grashof pero notamos que el lado que tiene menor longitud es el que tiene que dar las revoluciones o el que tiene mayor longitud
11	En este ejemplo observamos que para tener un mecanismo de Grashof tenemos que hacer girar el lado menor o el lado mayor, pero no a los lados que son mayores a la menor o menores a la mayor
12	También es máquina de Grashof pero está limitada en longitudes

Después de revisar los casos anteriores ¿Tienen alguna conclusión respecto a la pregunta inicial? ¿Tienen sospechas respecto a qué se debe cumplir para que una de las barras gire vueltas completas?

Anotaciones de las conclusiones y observaciones.

Participante	
1	No hubo anotaciones
2	Sea AB y BC segmentos de un triángulo, AC es la hipotenusa y sí y solo sí AC es también la hipotenusa de los segmentos AD y DE esta existe.
3	No hubo anotaciones
4	No hubo anotaciones
5	No hubo anotaciones
6	No hubo anotaciones
7	No hubo anotaciones
8	No hubo anotaciones
9	No hubo anotaciones
10	Que se cumpla A+B = C+ D y que la barra que gire sea la de menor longitud o la de mayor longitud
11	No hubo anotaciones
12	La suma entre un par de barras en relación a la otra debe ser igual a la suma de las otras 2 A + B = C + D o por lo menos una barra debe ser mayor a la suma de las otras 3. D> A + B+C

Búsqueda de relaciones entre la longitud de los lados y los ángulos entre barras.
Toda vez que se han construido con ayuda del software dinámico algunos casos particulares, es posible que tengan algunas sospechas, una tal vez relacionada con el momento en que las barras B y C se alinean; si fueron observadores, la barra A no pudo efectuar giros completos cuando el ángulo entre B y C fue de 180° Otra sospecha puede estar basada en que la suma de las longitudes de dos barras, comparadas con las otras dos, tiene relación con la rotación completa de la manivela. Para tratar de entender el comportamiento de estos mecanismos, trata de establecer relaciones matemáticas que involucren los datos que se sospecha tienen que ver con la rotación en particular de la barra A.
¿Qué relaciones pueden establecer que involucren los ángulos y las dimensiones de las barras del mecanismo? Discutan en equipo y traten de escribirlas. Si tiene dudas, pregunten al profesor.
LA ÚLTIMA ACTIVIDAD NO SE REALIZÓ DEBIDO A QUE FUE INSUFICIENTE EL TIEMPO DEL QUE SE DISPONÍA PARA IMPLEMENTARLA.

ENCUESTA DE SALIDA

Edades de los participantes del proyecto a los cuales se les aplicó la actividad.
Todos del segundo semestre de la carrera de Física y Tecnología avanzada

Participante	**Edad**
1	**18**
2	**-**
3	**20**
4	**18**

5	**18**
6	**20**
7	**18**
8	**19**
9	**18**
10	**20**
11	**19**
12	**25**

1.- ¿Cuáles han sido los últimos cursos que llevaste de matemáticas?

Participante	
1	Matemáticas superiores y Computación. Geometría Analítica. Cálculo diferencial.
2	Cálculo. Matemáticas superiores
3	Cálculo. Geometría
4	Matemáticas superiores y Computación. Geometría Analítica y Cálculo Diferencial
5	Cálculo. Geometría Analítica
6	No recuerdo
7	Matemáticas superiores y Computación. Geometría Analítica
8	Geometría Analítica, cálculo, Matemáticas superiores y computación
9	Cálculo, Geometría Analítica, Matemáticas superiores y computación
10	Cálculo, Geometría Analítica, Matemáticas superiores y computación
11	Geometría Analítica, Matemáticas superiores y computación
12	Precálculo

2.- ¿Has tenido dificultades para hacer las actividades? Explica por qué

Participante	
1	Al principio porque no sabía exactamente cómo usar el software
2	No estoy acostumbrado a utilizar el Cabri Geometre II plus
3	Sí, no se utilizar el programa
4	No, se explicó muy bien en clase
5	Un poco porque no tenía el gusto de usar el programa
6	Sí cuando es con algún software
7	Poca, por el hecho de no tener una buena preparación en el bachillerato
8	No, el software es fácil de usar
9	No, hubo buena asesoría
10	No porque se me facilita el uso de la computadora
11	Si un poco porque no conocíamos como utilizar el programa
12	No

3.- ¿Prefieres esta forma de trabajar que la tradicional? Explica por qué

Participante	
1	Es muy buena, me agradó, tiene didáctica y es fácil apreciar movimientos geométricos
2	No, bastante lenta
3	Sí, porque es didáctica y observas y analizas lo que realizas
4	Sí, es muy dinámico trabajar con el software
5	Sí, es más dinámica e interesante que estar 2 horas en el pizarrón
6	No. Se pierde mucho el tiempo
7	No sabría decir pues es solo una clase, necesito tomar más para poder comparar
8	Sí, el software es de gran apoyo
9	Sí, porque es más dinámica y tangible
10	Sí, porque en lugar de imaginarte las cosas de esta forma las puedes observar
11	Sí, porque la explicación la ve uno gráficamente y también se puede ver analíticamente
12	Sí, porque se me hace interactiva con el software.

4.- ¿Te ha gustado la experiencia? Explica por qué

Participante	
1	Sí, es una buena forma de trabajar
2	Si, aprendí alguno nuevo
3	Sí, primero porque he aprendido a utilizar un nuevo programa y porque fue entretenido
4	Sí, porque aprendí a usar un programa nuevo
5	Sí, es muy buena en la explicación, además te aclara las dudas
6	Sí, aprendí a usar un nuevo programa
7	Sí porque no conocía a este nivel el mecanismo de Grashof
8	Sí, me gusta trabajar con software
9	Sí, por la dinámica
10	Sí, porque he aprendido algo
11	Si es bueno interactuar en distintos medios
12	Sí, porque entiendo mejor las maneras de hacer matemática

5.- ¿Te ha gustado trabajar en equipo? Explica porqué

Participante	
1	Sí, la comunicación con mis compañeros es buena, compartiendo ideas se puede llegar a mejores conclusiones
2	No es muy diferente entre el trabajo habitual en clase
3	Sí, para conocer la opinión del compañero
4	Sí es más fácil deducir cosas y obtener conclusiones
5	Sí, se aclaran mejor las dudas y si uno tiene dudas el equipo las aclara
6	Sí, de esa forma es más fácil el trabajo además que se aprende más

7	Sí, porque fue divertido y entretenido
8	Sí, el trabajo se simplifica
9	Sí, porque se pueden discutir ideas
10	Sí, para resolver dudas y opinar lo que pienso
11	Sí, porque puedes discutir tus ideas
12	Si porque discutimos las diferentes ideas personales

6.- ¿Te gustaría continuar trabajando de esta forma? Explica por qué

Participante	
1	Sí, al ser dinámica, se puede aprender de otra forma
2	Sí porque es más didáctica. No porque no soy muy paciente
3	Sí, es agradable
4	Sí, las clases serían más prácticas y el aprendizaje sería mucho mayor
5	Sí, es dinámica
6	No porque el que explica se va de largo y los alumnos que no le van entendiendo le pierden interés y da sueño
7	Si porque es divertida
8	Solo como apoyo, creo que es importante practicar de la forma tradicional
9	Si porque se pueden discutir ideas
10	Sí, porque es más gráfica
11	Si porque el apoyo es mutuo y de esta manera se puede comprender mejor algunos puntos
12	Si porque lo entendí y relacioné mejor

7.- ¿Qué es lo que más te ha gustado de esta experiencia?

Participante	
1	El trabajar con el software
2	No hay comentarios
3	Que analizo lo que hago tanto visual como de una forma analítica
4	El trabajar los temas con el software
5	La utilización de Cabri y la dinámica del profesor en la clase
6	Que aprendí un poco a usar el programa de Cabri Geometre
7	Manejar el software y poder manipular las barras y los mecanismos
8	El uso de software
9	Porque se pueden discutir ideas
10	Aprender que es un mecanismo de Grashof
11	La utilización de software
12	La manera interactiva que se hace en el software con las matemáticas y sus aplicaciones en la realidad

8.- ¿Qué es lo que menos te ha gustado de esta experiencia?

Participante	
1	Al principio no saber usar el programa
2	Mucho tiempo para poca información
3	Nada
4	Fue corto tiempo
5	Estaba agradable
6	Que me tardé mucho tiempo en entenderle al programa Cabri
7	Que no conocía el software
8	No me esfuerzo por imaginar ya que el software lo muestra
9	No contestó la pregunta
10	Que no acabamos
11	Nada
12	Nada en lo absoluto todo estuvo bien

9.- Expresa tu valoración o los comentarios que creas que son de interés

Participante	
1	Buen control de grupo y buen asesoramiento
2	No contestó la pregunta
3	Pues buena porque sabía y tenía seguridad
4	Pues el trabajo con el software es mucho mejor ya que es más sofisticado además de que también se lleva a cabo la solución analítica
5	9.9
6	Se requería de más tiempo para que se entendiera al 100%
7	Que es interesante la manera de trabajar y no es aburrida
8	No contestó la pregunta
9	Me pareció una clase interesante, con buenas explicaciones
10	Muy bien
11	No contestó la pregunta
12	La analogía de las matemáticas que se involucran en la creación de artefactos, máquinas, etc. En lo personal lo entiendo mejor