

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO**

**INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**

**ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA**



**PROCESO DE ADAPTACIÓN DE ACTIVIDADES DE  
INVESTIGACIÓN COMO TAREAS DE INSTRUCCIÓN**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:**

**MAESTRO EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA**

**PRESENTA:**

**Agustín Alfredo Torres Rodríguez**

**DIRIGIDA POR:**

**Dr. Fernando Barrera Mora**

**Dr. Aarón Reyes Rodríguez**

Tesis enmarcada en el proyecto CONACYT: “Bases Teóricas y Conceptuales en la Construcción del Conocimiento Matemático y el Empleo de Herramientas Digitales”, con registro#61996.

---

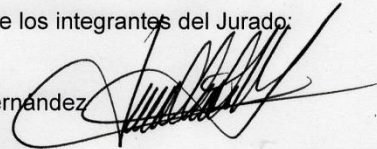
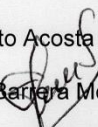




**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO**  
**INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**  
**DIRECCIÓN**

M. en A. JULIO CESAR LEINES MEDECIGO  
DIRECTOR DE CONTROL ESCOLAR  
P R E S E N T E

Por este conducto le comunico que el jurado asignado al pasante de la *Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica* **C. Ing. Agustín Torres Rodríguez**, quien presenta el trabajo de titulación "*Proceso de adaptación de actividades de investigación como tareas de instrucción*", después de revisar el trabajo en reunión de Sinodales ha decidido **autorizar la impresión** del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación se anotan las firmas de conformidad de los integrantes del Jurado:

PRESIDENTE:	Dr. Juan Alberto Acosta Hernández	
PRIMER VOCAL:	Dr. Fernando Barera Mora	
SECRETARIO:	Dr. Rubén Alejandro Martínez Avendaño	
SUPLENTE:	Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez	

Sin otro particular, reitero a usted la seguridad de mi atenta consideración.

A T E N T A M E N T E  
"AMOR, ORDEN Y PROGRESO"  
Mineral de la Reforma, Hgo., 29 de agosto de 2011.  
DIRECTOR

DR. ORLANDO ÁVILA POZOS



## **Agradecimientos:**

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo recibido para la realización de este trabajo a través del proyecto “Bases Teóricas y Conceptuales en la Construcción del Conocimiento Matemático y el Empleo de Herramientas Digitales” con registro 61996.

A los Doctores Fernando Barrera Mora y Aarón Reyes Rodríguez por guiar la realización de esta investigación y permitirme aprender de su experiencia.

A los profesores del Área Académica de Matemáticas Y Física del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería (ICBI) de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), que me formaron durante los cursos de maestría: Dr. Orlando Ávila Pozos, Dr. Fernando Barrera Mora, Dr. Jaime Cruz Sampedro, Dr. Aarón Reyes Rodríguez, M.C. Homero Roldán Rojas y Dr. Carlos Rondero Guerrero.

A mis compañeros de generación, por compartir tan gratas experiencias, en especial a Marcos Campos Nava.

## **Dedicatorias:**

A mis padres Agustín y Dolores por toda su comprensión y su apoyo incondicional durante todo el proceso.

A mis queridos hermanos Alfonso, Gloria, Laura y Jorge

A Ana Laura y Leonardo que son nuestro tesoro

A Jorge por su apoyo incondicional

## RESUMEN

Las tareas de aprendizaje<sup>1</sup> son un elemento fundamental para que los estudiantes construyan conocimiento matemático. Sin embargo, una tarea por sí sola no basta para que los estudiantes logren entender las ideas o conceptos implicados. Por esta razón, la interacción entre una tarea y la actividad que el docente desarrolla en el aula determinan las características del aprendizaje de los estudiantes. En este contexto, se analiza el proceso de diseño de tareas de aprendizaje con un alto nivel de demanda cognitiva<sup>2</sup>, así como la implementación de estas tareas. Los resultados de la investigación permitieron caracterizar algunos de los principios teóricos y prácticos utilizados por el profesor durante el diseño de las tareas, las acciones que llevó a cabo para mantener el nivel de demanda cognitiva durante la implementación de las mismas, así como las dificultades a las que se enfrentó durante ambos procesos.

---

1 Una actividad de aprendizaje consiste en una tarea desarrollada en el aula y que se caracteriza por promover en el estudiante un aprendizaje profundo. Para Barrera (2008) una tarea de aprendizaje debe poseer cuatro elementos distintivos: un objetivo de aprendizaje bien definido, los elementos matemáticos estructurados en torno a dicho objetivo, un escenario propicio para su desarrollo y un proceso inquisitivo como eje principal. Varios autores reportan el diseño de actividades de aprendizaje matemático basadas en los marcos de la resolución de problemas y el uso de la tecnología, (Barrera y Santos, 2002, p.167).

2Las tareas o actividades de alta demanda cognitiva tienen las siguientes características: permitir a los estudiantes describir, explicar, justificar, comparar, formular preguntas, tomar decisiones, trabajar con diferentes representaciones. La introducción de este marco conceptual se debe a Smith & Stein (2008).

## **ABSTRACT**

Learning tasks are an essential element for students to construct mathematical knowledge. However a task in itself is not sufficient for students to construct a conceptual understanding. For this reason, the interaction between a task and didactical activities that teachers develop in the classroom determined the characteristics of student learning. In this context, we analyze the process of designing learning tasks with high cognitive demand and the implementation of these tasks at the classroom. The results of the research allowed characterizing some of the theoretical and practical principles used by the teacher during the design of tasks, didactical actions developed to maintain the level of cognitive demand during the implementation phase and the difficulties appearing in both processes.

# ÍNDICE

<b>Contenido</b>	<b>Página</b>
<b>CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN</b>	
1.1. Introducción	1
1.2. Antecedentes	3
1.3. Reflexión en torno a la revisión de la literatura	6
1.4. Problema de investigación	8
1.5. Preguntas de investigación	10
<b>CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL</b>	
2.1. Introducción	13
2.2. Resolución de problemas	14
2.3. Tecnologías digitales como amplificadores y reorganizadores cognitivos	15
2.4. Diseño de tareas de instrucción	16
2.5. Demanda cognitiva de las tareas	17
2.6. Conocimientos del profesor de matemáticas	18
<b>CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA</b>	
3.1. Introducción	22
3.2. Características de la investigación cualitativa	22
3.3. Métodos en la investigación cualitativa	24
3.4. Participantes en la investigación	27
3.5. Actividades de aprendizaje	28
3.6. Escenarios para el desarrollo de las actividades	29
3.7. Fuentes de recolección de datos	30
3.8. Procedimiento de análisis de la información	30

<b>3.9. Caracterización de las acciones del docente</b>	<b>31</b>
<b>3.10. Categorías de análisis</b>	<b>33</b>
<b>CAPÍTULO 4. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS</b>	
<b>4.1. Introducción</b>	<b>36</b>
<b>4.2. Fase de planificación y diseño de las actividades de instrucción</b>	<b>36</b>
<b>4.3. Análisis de la etapa de planificación y diseño</b>	<b>45</b>
<b>4.4. Etapa de implementación de las tareas: observación de las sesiones.</b>	<b>50</b>
<b>4.5. Análisis de la etapa de implementación</b>	<b>66</b>
<b>CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES</b>	
<b>5.1. Respuestas a las preguntas de investigación</b>	<b>70</b>
<b>5.2. Implicaciones didácticas</b>	<b>73</b>
<b>5.3. Limitaciones</b>	<b>74</b>
<b>5.4. Propuestas</b>	<b>74</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>76</b>
<b>APÉNDICES A, B: PRIMERA TAREA DE APRENDIZAJE</b>	<b>81</b>
<b>APÉNDICE C: SEGUNDA TAREA DE APRENDIZAJE</b>	<b>99</b>
<b>APÉNDICE D: ENTREVISTA</b>	<b>101</b>
<b>APÉNDICE E: TRANSCRIPCIÓN DE LAS SESIONES</b>	<b>107</b>

# CAPÍTULO I

## EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

### 1.1. INTRODUCCIÓN

Actualmente en México los problemas de aprendizaje de las matemáticas son preocupantes en todos los niveles escolares. Particularmente, en secundaria y bachillerato las deficiencias en el conocimiento matemático de los estudiantes han sido expuestas a través de los resultados de evaluaciones internacionales como TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) o PISA (Programme for International Students Assessment). De acuerdo con este último estudio, en la prueba correspondiente al año 2006, México obtuvo una media global (nacional) en matemáticas de 406 puntos, lo que lo ubicó en el Nivel 1 de desempeño, mientras que en la prueba del año 2009 la media global (OECD) en matemáticas fue de 419 puntos (OECD, 2010).

Los estudiantes de este nivel [nivel 1] pueden contestar preguntas relacionadas con contextos familiares, en los que está presente toda la información relevante y las preguntas están claramente definidas. También son capaces de identificar la información y desarrollar procedimientos rutinarios conforme a instrucciones directas en situaciones explícitas. Además, pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos dados. (INEE, 2007, p. 105)

Otro dato relevante es que en la prueba del año 2006, el 56% de los estudiantes examinados se clasificaron en los niveles 0 y 1 de desempeño, mientras que en la prueba del año 2009, este porcentaje fue de 51%. La competencia matemática que poseen los estudiantes que pertenecen a estos niveles es insuficiente para que se integren a estudios superiores. Es importante resaltar que en el estado de Hidalgo, el porcentaje de estudiantes clasificados en los mismos niveles fue de 60% y 50% en los años 2006 y 2009, respectivamente; siendo Chiapas el estado con el mayor porcentaje de estudiantes (73%) con un nivel de competencia matemática inferior al mínimo durante 2006, ocupando esta misma posición con 72% de los estudiantes, junto con el estado de Tabasco en el año 2009. En lo que se refiere a la población de 15 años que al momento de la prueba PISA 2006, se encontraba inscrita en una institución educativa del nivel medio superior, en el ámbito nacional el 41% obtuvo un nivel inferior al mínimo requerido, mientras que en el estado de Hidalgo el porcentaje fue de 43% en ese mismo año.

...el Nivel 2 representa el mínimo necesario para que una persona se desenvuelva adecuadamente en la sociedad del conocimiento<sup>3</sup>...Así, independientemente del lugar que ocupe un país o una entidad en un ordenamiento, si muchos de sus jóvenes no alcanzan al menos el Nivel 2 de desempeño en las áreas de competencia de PISA, habrá que considerar que esa sociedad en su conjunto —y no sólo su sistema educativo— está fallando en preparar adecuadamente a las futuras generaciones de ciudadanos. (INEE, 2010, p. 141)

<sup>3</sup> Sociedad del conocimiento hace referencia a la apropiación crítica y selectiva de la información, ésta noción fue utilizada por primera vez en 1969 por Drucker y profundizada en 1990 por autores como Mansel o Stehr.



¿Cuáles son algunos de los factores que influyen en que los estudiantes mexicanos de 15 años presenten un desempeño bajo en la prueba PISA? El informe para México del año 2007 (INEE, 2007) concluye que uno de tales factores se relaciona con:

...la naturaleza tradicional y rutinaria de las prácticas docentes de muchos maestros mexicanos, así como las deficiencias de muchas de las instituciones en que reciben su formación inicial, y la insuficiencia de los esfuerzos de actualización dirigidos a los que están en servicio. (INEE, 2007, p. 235).

Los datos anteriores conducen a reflexionar que una mejora en el aprendizaje de los estudiantes requiere de programas de formación y actualización docente, en los que los profesores adquieran los conocimientos y habilidades que les permitan, a través del diseño y puesta en práctica de actividades de instrucción, propiciar un ambiente que favorezca el desarrollo de actividades cognitivas complejas y no sólo competencias de bajo nivel que pueden evaluarse mediante reactivos de opción múltiple o en las que se les pida realizar procedimientos rutinarios.

Los estudiantes *aprenden matemáticas a través de las experiencias que los profesores les proporcionan* [énfasis agregado]. Así, el entendimiento que los estudiantes adquieren de las matemáticas, su capacidad para usarlas para resolver problemas, su confianza en, y su disposición hacia las matemáticas son moldeadas por las formas de enseñanza que encuentran en la escuela. La mejora de la educación matemática para todos los estudiantes requiere una enseñanza efectiva en todos los salones de clase. (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000, p. 16)

Específicamente, el proceso de formación o actualización debe permitir al profesor poner en práctica postulados básicos de teorías sobre el aprendizaje, lo cual incluye tener una idea clara de los conceptos o conocimientos matemáticos que se busca que el estudiante construya, de los principios epistemológicos y mecanismos cognitivos que permiten construir un aprendizaje con entendimiento (Hiebert, 1997), así como de las estructuras cognitivas que posee un estudiante de cierta edad y medio sociocultural y la forma en cómo estas se modifican y reorganizan (Harel, 1994; INEE, 2007). Es importante que el profesor sea consciente de que el aprendizaje de las matemáticas va más allá de un conocimiento enciclopédico e implica estructurar saberes previos con aquellos que se van a aprender, así como poner en práctica competencias matemáticas. Además, que el medio para lograr este objetivo son tareas de aprendizaje que promuevan la creatividad de los estudiantes. La importancia de las tareas matemáticas para el desarrollo de una forma matemática de pensar ha sido reconocida en propuestas curriculares como la del Proyecto QUASAR<sup>4</sup> (Stein y Smith, 1998; Stein, Smith, Henningsen y Silver, 2000), o en los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM, 2000). En dichas propuestas se considera que las tareas usadas en el salón de clases son determinantes del tipo de aprendizaje que los estudiantes construyen.

---

<sup>4</sup> El proyecto QUASAR (Quantitative Understanding: Amplifying Students Achievement and Reasoning) es un proyecto dirigido por Edward Silver, cuyo objetivo es el desarrollo e implementación de programas de instrucción matemática en seis escuelas secundarias urbanas (urban middle school) en los Estados Unidos.

[Una de las] responsabilidades centrales de los maestros es...seleccionar y desarrollar tareas y materiales valiosos que creen oportunidades para que los estudiantes desarrollen...entendimiento matemático, competencia, interés y disposición [hacia el aprendizaje]. (NCTM, 1991, p. 24)

¿Cuáles son las características de las actividades que pueden ayudar a que los estudiantes desarrollen diversos elementos del pensamiento matemático, es decir, actividades que promuevan la indagación, la búsqueda, la experimentación, el intercambio de experiencias, la recuperación de procesos de pensamiento, el planteamiento y justificación de conjeturas? ¿Cómo puede el profesor diseñar ese tipo de tareas? ¿Cuáles principios teóricos pueden ser de utilidad al profesor durante el diseño de tareas que permitan a los estudiantes dar sentido a los conceptos matemáticos? ¿Cuáles son las fuentes que un profesor puede tomar como base para el diseño de actividades de aprendizaje matemático? ¿Qué características resultan relevantes en un docente de matemáticas para que diseñe e implemente actividades de aprendizaje con *alta demanda cognitiva*<sup>5</sup> (Stein y Smith, 1998)? ¿Cuáles son las dificultades a las que se enfrenta un docente durante el proceso de implementación de actividades de instrucción en el aula? Estas son algunas de las preguntas que orientan la agenda de investigación en la que se enmarca este trabajo (Barrera, 2008), cuyo objetivo es documentar el proceso de diseño de tareas de aprendizaje, a partir de actividades o problemas propuestos en artículos de investigación en educación matemática o en libros de texto; otro objetivo es analizar el proceso de implementación de estas tareas que lleva a cabo un profesor de matemáticas con tres grupos de estudiantes, dos de los primeros semestres de licenciatura, y uno de nivel medio superior.

## 1.2. ANTECEDENTES

En este apartado se realiza una revisión de diversos trabajos relacionados con el diseño e implementación de tareas de aprendizaje matemático, que se han abordado con grupos de estudiantes de diversos grados (niveles medio y medio superior); la cual será de utilidad para sustentar la pertinencia y relevancia del problema que se aborda en esta investigación.

Huang, Cai y Ye (2008) analizaron la demanda cognitiva de las tareas matemáticas, así como las estrategias para implementar las tareas que llevaron a cabo profesores de Estados Unidos y China. Se consideraron 10 lecciones consecutivas en cada uno de los países, las cuales trataron sobre sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Se elaboraron categorías que dan cuenta de factores que pueden propiciar un aumento o disminución de los niveles de demanda cognitiva durante la realización de las tareas: (i) el razonamiento de los estudiantes, (ii) ambiente propicio a la resolución de problemas, (iii) estilo de preguntas, (iv) retroalimentación a las respuestas dadas por los estudiantes, (v) conexión de conceptos y (vi) actividad exploratoria. A través de un análisis del porcentaje de tiempo en el que se desarrollaron las acciones anteriores, se concluyó que todos los profesores se esforzaron por implementar acciones que reforzaran el nivel de demanda cognitiva de las tareas; sin embargo, los profesores chinos tuvieron mayores niveles de éxito.

---

<sup>5</sup> Stein, Smith, Henningsen y Silver dieron vida al término de demanda cognitiva. La idea es transformar una tarea que involucre un cambio de lo sencillo a lo complejo, que promueva procedimientos con conexiones, para poder así alcanzar niveles altos de demanda cognitiva de parte de los estudiantes.

Bayazit (2006) por su parte, documenta el proceso de selección e implementación de tareas que llevan a cabo profesores experimentados, para enseñar el concepto de función. Particularmente, analiza los factores, tanto en la selección como en la implementación de las tareas que potencialmente inhiben el que los estudiantes se comprometan en el proceso de aprendizaje. El trabajo se llevó a cabo en Turquía como parte de un proyecto más extenso en el que los participantes fueron dos profesores experimentados y sus estudiantes de noveno grado (15 años). En el artículo se analiza solamente la actividad de uno de los profesores el cual contaba con una experiencia docente de 24 años. Los resultados del trabajo indican que hubo siete tipos de restricciones en la selección e implementación de las tareas que propuso el profesor, las cuales influyeron en que sus estudiantes sólo adquirieran la idea de función al nivel de acción. Las restricciones identificadas son: (i) el profesor eligió tareas que pueden resolverse a través de la aplicación de reglas, (ii) se dio mayor prioridad a los procedimientos que a los conceptos, (iii) se desvió la atención de los estudiantes del concepto de función hacia procedimientos u otras ideas matemáticas, (iv) aproximó tareas conceptuales en una forma procedimental, (v) hubo inconsistencias en la presentación e implementación de las tareas, (vi) no se establecieron conexiones entre representaciones y (vii) se sobresimplificaron las tareas cognitivamente demandantes. Se concluye que las tareas ofrecen un contexto para el aprendizaje de los estudiantes; sin embargo, las acciones que lleva a cabo el profesor al establecer conexiones entre ideas y representaciones son el elemento determinante que puede favorecer el que los estudiantes construyan un entendimiento conceptual de la idea de función.

En una línea de ideas semejante Leikin (2004) documenta el proceso de reformulación de tareas, tomadas de materiales curriculares, que llevan a cabo profesores de matemáticas en servicio. El análisis de las tareas se realizó a partir de los datos obtenidos de su implementación con profesores en formación, enfocando la atención en el cambio en la calidad de las tareas, derivado de adaptar problemas estándar (de libros de texto) como actividades que promueven la exploración de relaciones e invariantes a través del uso de un software de geometría dinámica. En la implementación de la tarea participaron 36 profesores en formación. La tarea original se tomó de un libro de texto y consiste en demostrar que la longitud de la altura de un trapecio isósceles, en el que sus diagonales son perpendiculares, es igual a la longitud del segmento que une los puntos medios de los lados del trapecio que no son paralelos. La modificación de la tarea consistió en solicitar a los estudiantes que buscaran relaciones entre los segmentos que unen puntos medios de los lados de un trapecio isósceles en el que sus diagonales son perpendiculares, mediante el uso de un software dinámico. La calidad de las tareas se consideró como dependiente de diversas condiciones: (i) la tarea motiva que los estudiantes la aborden, (ii) la tarea propicia la incertidumbre y la duda, (iii) la tarea puede abordarse desde múltiples aproximaciones, (iv) al desarrollar la tarea se pueden identificar similitudes y diferencias entre objetos y relaciones matemáticas, y (v) favorece la adquisición de una visión crítica acerca del uso de la tecnología educativa, y entender la forma en que piensan los estudiantes. Los resultados del trabajo permitieron al autor agregar una condición adicional a la lista: (vi) las tareas deben ofrecer la oportunidad de generar y discutir nuevas preguntas matemáticas.

Se tienen algunos antecedentes de estudios de caso, como el de Rizo y Campistrous (1999), donde uno de los objetivos fue aislar las estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas. Se encontró que algunas de estas estrategias son desarrolladas en

forma espontánea, y que por ello son irreflexivas. En este trabajo se resalta que para ayudar a los estudiantes a resolver problemas, los docentes previamente deben tener una hipótesis de las estrategias que los estudiantes podrían utilizar al resolver el problema. Es decir, el conocimiento de estas estrategias y las inferencias que se puedan hacer acerca de sus modos de razonamiento (cuándo los aplican y en qué circunstancias) es de utilidad en el diseño de estrategias que pueden implementarse durante el trabajo en el aula, con la finalidad de influir en el desarrollo de procesos de reflexión matemática de los estudiantes. Villarreal (2005) pone particular atención en las estrategias que desarrollaron los estudiantes al resolver problemas usando una herramienta computacional. Se observaron 4 clases de 1 hora 30 minutos cada una. En cada sesión, el profesor utilizó una guía de trabajo con una propuesta de problemas para los estudiantes. Se generaron siete categorías de análisis: (i) características del problema, (ii) métodos de enseñanza utilizados por el profesor; (iii) presencia de estrategias de resolución de problemas generales o heurísticas específicas, (iv) uso cognitivo o instrumental de las herramientas tecnológicas, (v) actitud, (vi) características de los aspectos observables de las tecnologías (cognitivos o metacognitivo), y (vii) organización. En este estudio se analizaron con detalle algunas de estas categorías; por ejemplo, la categoría referente al nivel de uso de las herramientas tecnológicas (instrumental o cognitivo). Las principales estrategias de resolución de problemas utilizadas por los estudiantes fueron: (i) leer el problema, (ii) buscar datos, y (iii) discutir al interior de los grupos. La observación de la clase permitió identificar, caracterizar y analizar las variables que intervienen en el trabajo de un profesor y sus estudiantes cuando se hace uso de material instruccional basado en la resolución de problemas y el uso de las tecnologías digitales. Respecto al uso de las herramientas, el profesor fue poco claro al usarla, pues no mostró ejemplos, y sólo llegó a utilizarlas de forma instrumental.

En otro análisis de caso realizado por Valle (2008), se observó una sesión con estudiantes de licenciatura en química. Uno de los puntos destacados del trabajo fue la elaboración de una categorización de los datos que obtuvo. En este estudio se establecieron cuatro categorías de análisis: (i) el problema como recurso didáctico, (ii) el modelo del docente, (iii) las estrategias vinculadas al proceso de resolución y (iv) las dificultades mostradas por los estudiantes. En ese mismo trabajo se documentó el cambio de las estructuras cognitivas del estudiante y se encontró que el profesor debe escuchar atentamente lo que los estudiantes dicen para detectar sus dificultades de aprendizaje. La observación y el análisis del trabajo de investigación se centraron en las acciones del docente, en lo que hace el profesor para iniciar su clase, y en las acciones que lleva a cabo durante el transcurso de la misma.

Arbaugh y Brown (2005) por otra parte, analizaron una estrategia con la que se buscaba comprometer a profesores en servicio para que examinaran el tipo de enseñanza que desarrollan cotidianamente en el salón de clase, de forma que esta experiencia sustentara su conocimiento pedagógico del contenido matemático que enseñan. En el estudio participaron siete profesores de matemáticas del nivel bachillerato, quienes revisaron el concepto de nivel de demanda cognitiva de una tarea. La investigación se enfocó en identificar cómo el análisis crítico que llevaron a cabo los profesores, con base en el marco de la demanda cognitiva, influyó en la forma de pensar de los maestros sobre la naturaleza de las tareas matemáticas, así como en la elección de las tareas que usan en sus clases. Los resultados indican que los maestros modificaron sus formas de pensar las tareas, además,

algunos de ellos cambiaron sus patrones de selección de las mismas; por lo que este estudio proporciona una herramienta útil para medir el avance de los maestros respecto de su conocimiento pedagógico del contenido matemático.

En relación con las investigaciones que analizan la actividad del profesor en el aula, González (2008) estudió los rasgos de las prácticas docentes de un profesor que impartía matemáticas en carreras de ingeniería, para lo cual hizo uso de un modelo denominado *relación pedagógica*. Este modelo de práctica docente consiste en seis dimensiones que caracterizan la praxis educativa. El autor caracterizó la práctica docente a través de diversos rasgos: (i) intervención docente, (ii) creación de espacios de construcción del conocimiento, (iii) resolución guiada, (iv) actitudes, (v) influencia histórica, (vi) conductas en espacios de autonomía, (vii) repercusión social, (viii) esquema relacional y (ix) esquema constructivista de aprendizaje. Este estudio reviste importancia como referente de un estudio cualitativo en el que el caso estudiado es un profesor en servicio.

En otro estudio, Doyle (2007) examina la naturaleza cambiante de la enseñanza y las tareas matemáticas. Se compararon dos grupos de estudiantes de cuarto grado, de 28 y 29 estudiantes cada uno, después de que se abordaron tareas matemáticas con y sin estructuración de alto nivel. La metodología utilizada fue un diseño experimental, en el que se contrastaron los dos grupos, en uno de los cuales se implementaron actividades de modelación con un alto nivel de estructuración. Los resultados indican que las tareas de modelación con alto nivel de demanda cognitiva pueden ayudar a lograr cierto grado de alfabetización matemática. Con base en este tipo de actividades, los estudiantes pueden dar sentido a las ideas matemáticas. Otra de las conclusiones fue que el papel del profesor es vital para crear un ambiente de aprendizaje positivo en el que se facilite el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

### **1.3. REFLEXIÓN EN TORNO A LA REVISIÓN DE LA LITERATURA**

En esta sección se bosquejan algunas reflexiones y consideraciones generales en torno a los trabajos revisados que abordan los procesos de diseño e implementación de tareas de aprendizaje con alta demanda cognitiva. También se analiza el tipo de conocimientos que influyen en las características de las tareas que diseña un profesor y en las acciones didácticas que implementa con el objetivo de mantener un nivel alto de demanda cognitiva durante el proceso de implementación de éstas.

Como se observó, diversos estudios analizan la actividad del profesor, centrando la atención en el proceso de implementación. Sin embargo, resulta importante enfocarse en el proceso de diseño, para obtener una visión más amplia de las razones por las cuales un profesor elige determinada actividad y conocer en qué medida el tipo de diseño influye en la implementación de la tarea y el logro de los objetivos de aprendizaje. En este trabajo también se busca determinar el tipo de conocimientos y habilidades del profesor de matemáticas que favorecen el mantenimiento de los niveles de demanda cognitiva en el salón de clase durante la implementación de la tarea.

Para poder cumplir el primer objetivo, referente al análisis del diseño, se requiere en primer término, consultar trabajos de investigación en educación matemática para conocer teorías

y marcos conceptuales con base en los cuales poder sustentar la construcción o diseño de tareas. En este contexto resulta relevante conocer y documentar las dificultades a las que se puede enfrentar el profesor en esta fase de su actividad. La revisión de los resultados de investigación permitirá a un profesor entender que una tarea la cual propicia el desarrollo de diversos elementos del pensamiento matemático de los estudiantes debe contar con características tales como tener diversos caminos de solución, permitir el uso de varias representaciones y fomentar varias formas o estilos de comunicación, desarrollar un proceso inquisitivo, para lograr que el estudiante dialogue, discuta y argumente.

¿Cuáles son los conocimientos base que pueden permitir a un profesordiseñar tareas de instrucción que favorezcan la actividad matemática de los estudiantes? Diversos estudios coinciden en que el profesor debe tener habilidad para innovar, indagar y crear, propiciar un ambiente favorable para el aprendizaje. Entre algunas competencias más especializadas, se puede mencionar a la habilidad para planificar acciones didácticas, capacidad de utilizar diversas estrategias de enseñanza, para comprender y utilizar o aplicar teorías del aprendizaje en matemáticas, competencia para favorecer el aprendizaje mediante la resolución de problemas, para la investigación en general, para la exposición de ideas matemáticas, habilidad para desarrollar y exponer un razonamiento matemático. Este tipo de habilidades se pueden potenciar si el docente inicia el proceso de incorporar a su práctica el diseño y la utilización de actividades de instrucción. Esto implica que el docente adquiera conciencia de las necesidades que ello conlleva y aborde el compromiso que supone, al permitirse reflexionar sobre su propia práctica y emprender las acciones para mejorarla.

El segundo aspecto que se pretende abordar en la investigación se relaciona con la etapa de implementación de las actividades en el aula. Como se puede observar en la revisión de los antecedentes, las tareas de instrucción con alta demanda cognitiva pueden constituirse en un contexto idóneo para que los estudiantes alcancen una comprensión conceptual. Sin embargo, la sola implementación de una actividad, incluso estando bien diseñada, no garantiza que se alcancen los objetivos de aprendizaje. También es requisito que el profesor propicie un contexto que permita a los estudiantes desarrollar un razonamiento crítico. De modo que una actividad no puede ser considerada como el único mediador entre las ideas matemáticas y el aprendizaje de los estudiantes. De hecho una actividad puede desarrollarse con diferentes niveles de demanda cognitiva, dependiendo de varios factores, entre ellos las acciones que lleve a cabo el docente en el momento de su implementación. Por consiguiente, es necesaria la interacción entre una tarea con un nivel de demanda cognitiva apropiado y una actividad del profesor que permita el desarrollo de la reflexión de los estudiantes, al crear condiciones para promover la experimentación, la búsqueda de relaciones e invariantes, para el establecimiento de conexiones entre las ideas y distintas formas de representaciones de las mismas, así como el desarrollo de diversas formas de justificación de resultados.

Diversos estudios que sirven de antecedentes a este trabajo, han identificado algunos de los factores que pueden influir de manera positiva o negativa sobre el logro de los objetivos de aprendizaje. Más específicamente, han identificado que algunas acciones del docente pueden promover o inhibir el nivel de demanda cognitiva de la actividad planeada. Existe evidencia de que un correcto planteamiento y utilización de las preguntas formuladas a los

estudiantes durante la sesión en el aula, así como una apropiada organización de las actividades exploratorias (lo que incluye una adecuada distribución de los tiempos empleados) puede apoyar el logro de los objetivos especificados en la tarea. Es importante considerar que la forma de formular preguntas impacta en las respuestas que proporcionan los estudiantes; también se ha encontrado que el tiempo en el aula es un factor limitante, y que los periodos en los que no se está trabajando propiamente en la actividad matemática, se pueden tornar en factores inhibidores del aprendizaje. Si el nivel de la demanda decae, puede que el estudiante no alcance los niveles de comprensión considerados durante el proceso de diseño.

Lo anterior lleva a plantear una serie de interrogantes ¿qué estrategias o acciones debe llevar a cabo el docente durante la implementación de las actividades de aprendizaje, para mantener el nivel de demanda cognitiva? ¿Cómo hacer una adecuada elección de dichas estrategias? La potencialidad de un recurso didáctico no se presenta automáticamente, se requiere que el profesor pueda desarrollar dichas potencialidades, no resulta suficiente el enunciar las tareas, tampoco pensar que el estudiante por sí solo puede construir un aprendizaje con entendimiento solamente interactuando con los recursos (en éste caso el software dinámico), o resolviendo problemas. Hay que considerar también las interacciones profesor-estudiante, estudiante-estudiante y las acciones del docente. Queda abierta entonces la posibilidad de que en otros trabajos se indague con mayor detalle sobre los roles del profesor que pueden impactar de forma negativa o positiva en el cumplimiento de los objetivos planteados e investigar las características que debe poseer o adquirir un docente en activo para convertirse en diseñador de actividades de instrucción. Esta información no se ha analizado con suficiente detalle y profundidad en el caso específico de nuestro país, por lo que resulta importante contar con un análisis que corresponda al contexto nacional, en la búsqueda de respuestas a las problemáticas particulares que ya han sido referidas en la sección introductoria. Dicha información reviste importancia y utilidad potencial para los educadores e investigadores en educación matemática. Se reitera que el desarrollo de una forma matemática de pensar<sup>6</sup> se favorecerá si el estudiante se enfrenta a actividades matemáticas significativas, en las que el docente propicie un ambiente inquisitivo.

#### **1.4. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

Como se señaló en la introducción de este trabajo, en nuestro país se han identificado serias dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles escolares, lo que hace pertinente el desarrollo de propuestas encaminadas a ofrecer alternativas para resolver esta situación. En este sentido, se considera que los procesos de formación docente son determinantes para enfrentar los problemas educativos, debido a que la actividad de los profesores en el aula es uno de los factores que establecen las características del conocimiento que un estudiante es capaz de construir.

---

<sup>6</sup>Para Polya (1954), la pedagogía y la epistemología de la matemática están estrechamente relacionadas y considera que los estudiantes tienen que adquirir el sentido de la matemática como una actividad; es decir, sus experiencias con la matemática deben ser consistentes con la forma en que la matemática es hecha.

Finalmente, es el profesor quien diseña y orienta las actividades que se implementan en el aula, y ello requiere que su acción se base en actividades de aprendizaje a través de las cuales los estudiantes puedan dar sentido y significado a los conceptos matemáticos (Barrera, 2009).

Como ya se ha mencionado, se reconoce que dos actividades centrales que realiza un docente son: (i) la identificación de principios y recursos que pueden orientar el diseño de tareas de aprendizaje que promuevan una reflexión matemática y (ii) el análisis de las condiciones para implementar estas actividades de forma que durante su desarrollo se mantenga un alto nivel de demanda cognitiva, el cual propicie la construcción de un aprendizaje con entendimiento. En este contexto, se considera que las actividades reportadas en artículos de investigación o en libros de texto son un recurso importante que los profesores pueden tomar como base para el diseño de tareas de instrucción. El proceso de transformación y ajuste de tales tareas para implementarlas en el aula es un tema que se ha explorado poco en México. Existen algunas experiencias internacionales uno de cuyos ejemplos más relevantes es el análisis de la evolución de las tareas al pasar del diseño a la implementación en las aulas QUASAR (Stein, Grover y Henningsen, 1996), el cual tiene el propósito de estudiar y analizar las acciones de los docentes de matemáticas en el nivel de educación media, enfocándose en el diseño e implementación de tareas matemáticas en el salón de clase, así como el análisis de aquellas acciones cuyo propósito es enriquecer la práctica del profesor e impactar en el aprendizaje de los estudiantes.

Por lo anterior, un elemento medular del proceso de instrucción es el diseño o re-diseño de tareas de aprendizaje. En este proceso, es el profesor de matemáticas y no el investigador educativo, quien tiene un papel decisivo, ya que es él quien implementará las tareas en el salón de clase; además de que es el profesor quien conoce de cerca las particularidades relativas a los conocimientos previos, problemáticas y los estilos de aprendizaje de cada uno de sus estudiantes.

Con base en las consideraciones previas, el objetivo de esta investigación consiste en analizar los procesos de diseño e implementación de actividades de aprendizaje que lleva a cabo un profesor de matemáticas. Se busca documentar y analizar los procesos antes mencionados, enfocando la atención en la medida en que las estrategias docentes puestas en práctica son efectivas o no para mantener un nivel alto de demanda cognitiva durante el desarrollo de las actividades, y para alcanzar los objetivos de aprendizaje. La importancia de este trabajo radica en que puede aportar información detallada de la forma en que una actividad de aprendizaje es llevada al aula.

Además, se explicitan las dificultades que pueden presentarse durante el proceso de implementación de las actividades; esto con la finalidad de poder hacer mejoras o adecuaciones a las tareas de aprendizaje y a las estrategias didácticas para implementarlas. Esta búsqueda es relevante porque en ocasiones los supuestos bajo los que se diseña una tarea, así como las rutas potenciales de instrucción, no coinciden o difieren de las condiciones reales de un aula en particular. Se espera que la información aportada por este trabajo sea de utilidad para los profesores de matemáticas, al contar con ejemplos de acciones útiles, así como problemáticas a las que se pueden enfrentar durante el desempeño de su profesión; también se espera que los resultados sean de utilidad en la construcción de



programas de formación docente en los que se incluya el diseño de tareas como un elemento clave en el proceso de formación y actualización de los profesores de matemáticas.

En el presente estudio se documenta y analiza el proceso de transformación de actividades de investigación o de libros de texto, en tareas de aprendizaje en el aula. Es importante mencionar que este trabajo se enmarca dentro de las investigaciones de corte cualitativo en las que se usa como método de indagación la *observación no participante*<sup>7</sup>, ya que el investigador sólo observará el proceso de diseño e implementación de una tarea, con el objetivo de recolectar la información que sustente los resultados del trabajo. Esta investigación, al integrarse dentro del paradigma cualitativo, tiene como una de sus finalidades principales indagar en los procesos de reflexión y crítica generados en los espacios educativos, así como identificar la naturaleza, la estructura y las relaciones presentes en la dinámica del salón de clase.

### **Objetivo General**

Analizar la acción docente durante los procesos de diseño y adaptación de tareas de instrucción que promueven el uso sistemático de tecnologías digitales, así como en la implementación de estas tareas en un grupo de estudiantes de los niveles medio superior y primeros semestres de licenciaturas en física y matemática.

#### *Objetivos Particulares*

1. Identificar y documentar las actividades desarrolladas por un docente durante la planeación y diseño de una actividad de instrucción con un alto nivel de demanda cognitiva, en la que se favorece el uso de tecnologías digitales; así como las dificultades a las que se enfrenta durante el diseño de éstas.
2. Analizar las acciones llevadas a cabo por un docente para mantener un alto nivel de demanda cognitiva durante la implementación de una tarea de instrucción, que permita a los estudiantes alcanzar un objetivo de aprendizaje específico.

### **1.5. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN**

1. ¿Cuáles son algunos de los principios teóricos y prácticos en los que se basa un profesor de matemáticas para diseñar o adaptar una actividad tomada de artículos de investigación o problemas de libros de texto, y transformarla en una tarea de instrucción en la que se promueva el uso de las tecnologías digitales?

Un punto de partida fundamental cuando se diseñan tareas de aprendizaje es contar con un marco conceptual, ya que éste sirve de base para orientar y planificar las acciones que realiza el docente durante el diseño de actividades.

---

<sup>7</sup> la observación no participante es una técnica donde el investigador registra lo observado sin involucrarse ni participar en la dinámica del grupo en estudio (Mata, 2000).

En particular, interesa estudiar la forma en que un profesor de matemáticas utiliza tales principios teóricos para realizar el diseño de actividades de instrucción, y cómo los emplea durante la fase de implementación en el aula. En esta investigación se busca identificar qué elementos teóricos y metodológicos son de utilidad a un profesor para explicar los procesos de aprendizaje que se observan y registran durante la aplicación de tareas de instrucción. También es recomendable considerar dichos marcos teóricos para evaluar el desempeño o aplicación de dichas actividades de instrucción. El análisis tiene la finalidad de proponer algunas sugerencias u observaciones que puedan tomarse en consideración para posteriores adecuaciones o implementaciones que puedan servir como ejemplo para que otros docentes obtengan ideas útiles para el diseño de sus propias actividades de aprendizaje. Por último, los resultados de este análisis puedan servir para enriquecer la discusión y revisión de los marcos teóricos que sustentan la resolución de problemas con el uso de la tecnología, como estrategia didáctica en la enseñanza de las matemáticas.

2. ¿Cuáles son algunas estrategias didácticas que utiliza un profesor para mantener un alto nivel de demanda cognitiva durante la ejecución de una tarea de instrucción y cuáles son los conocimientos y habilidades relevantes para que el profesor pueda implementar tales estrategias?

Se tienen diversos antecedentes acerca de la implementación de tareas de aprendizaje que hacen uso de situaciones problémicas. El empleo de este tipo de tareas aunado a la utilización de tecnologías digitales, es un aspecto que se ha considerado importante para el desarrollo de una comprensión conceptual. La clave para conseguirlo es realizar actividades que involucren un alta demanda cognitiva, lo que implica conseguir que el estudiante pueda potenciar diferentes elementos de su pensamiento en la solución de una tarea. Lo anterior finalmente puede llevarlo a ser capaz de desarrollar una forma matemática de pensar, es decir, determinar los conceptos necesarios para resolver un problema, definir e identificar las relaciones existentes entre diversos conceptos o variables, e incluso transferir estos conceptos para explicar y predecir otros fenómenos. Se espera que consiga integrar tales conceptos en estructuras más complejas, lo que de hecho significa la construcción de nuevos conceptos o conocimientos. Otros beneficios que conllevan el planteamiento de problemas y la utilización de tecnologías digitales son el desarrollo de autonomía y capacidad argumentativa.

En concreto, se pretende indagar acerca de cuáles son las acciones didácticas que un docente pone en práctica durante el desarrollo de una actividad de aprendizaje, con la finalidad de mantener el interés del estudiante durante el desarrollo de toda la actividad, y con ello evitar que decaiga el nivel de demanda cognitiva necesario para desarrollar un aprendizaje con entendimiento. En general se han identificado algunas de las características que deben poseer quienes enseñan matemáticas, tales como dominio de los contenidos a enseñar, habilidad para propiciar un ambiente de aprendizaje adecuado, capacidad para desarrollar el interés y participación del estudiante, disposición para promover el intercambio de ideas y el desarrollo de un pensamiento crítico y reflexivo, entre otras. Sin embargo, se considera que con base en este trabajo será posible precisar cuáles características son de mayor relevancia, así como qué papel juegan cada una de ellas para conseguir que la actividad de aprendizaje resulte en un entendimiento conceptual.

3. ¿Qué dificultades enfrenta un docente durante el proceso de diseño o adaptación de una tarea de instrucción y durante la implementación de la misma?

Para dar respuesta a esta interrogante, primeramente hay que hacer una revisión minuciosa del proceso de diseño de la actividad de aprendizaje, pues en ese momento es cuando el docente pone en juego sus conocimientos y habilidades para crear una situación instruccional que le permita conseguir un objetivo de aprendizaje concreto. En este proceso de diseñar actividades de instrucción el docente se enfrenta a retos que van desde la búsqueda y selección de las tareas o problemas, y durante la concepción de la idea que orientará el proceso de instrucción. Las preguntas iniciales que dan forma a sus objetivos, así como los conocimientos y habilidades que desea que el estudiante ponga en juego para construir nuevos conocimientos son un elemento importante que se debe tener en cuenta. Durante el proceso de diseño y puesta en práctica de la actividad, el profesor va a imprimir su forma particular de ver y conceptualizar a las matemáticas, y al aprendizaje de la disciplina. En el camino de comprender estos procesos es necesario describir con precisión las dificultades: tanto del profesor para conseguir las respuestas y/o actitudes esperadas y conducir con éxito el desarrollo de las tareas, como las dificultades de los estudiantes para desarrollar o ejecutar las acciones propuestas en una ruta de instrucción. Es importante identificar estas dificultades porque pueden constituirse en elementos que impidan alcanzar los objetivos de aprendizaje; además de que su conocimiento puede ser de utilidad durante el rediseño y ajuste de las tareas.

## CAPÍTULO II

### MARCO CONCEPTUAL

#### 2.1. INTRODUCCIÓN

Diversos autores coinciden en resaltar la importancia de contar con un marco que guíe el trabajo de investigación en educación matemática (Arcavi, 2000; Lester, 2005). Un marco es un conjunto de ideas, principios, acuerdos o reglas que establecen una forma particular de mirar y entender un fenómeno. En otras palabras, el marco es la estructura que sustenta una investigación. Dicho marco tiene influencia sobre todas las etapas del proceso de investigación, pues orienta el tipo y la naturaleza de las preguntas iniciales, hasta la forma de explicar o justificar los resultados. De ahí su relevancia, ya que permite al investigador interpretar un fenómeno y sustentar las conclusiones de un estudio con base en una visión particular de la realidad.

Los marcos de investigación se pueden clasificar en dos tipos principales, los marcos teóricos y los marcos conceptuales. Los primeros guían las actividades de investigación con base en una teoría formal ya establecida. Aunque varios autores han explicado las características, ventajas y desventajas de varias teorías bien desarrolladas, en muchas ocasiones, se prefiere el eclecticismo o sincretismo, ya que puede ser más productivo que tomar partido por un sólo enfoque o visión teórica, porque en no pocas ocasiones un fenómeno no puede explicarse satisfactoriamente por una sola teoría. Lester (2005) señala, que más que adherirse a una teoría en particular, resulta de utilidad adoptar y adaptar ideas de varias fuentes teóricas, con el objetivo de comprender mejor los procesos que tienen lugar durante el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Los marcos conceptuales consisten en un conjunto de argumentos o conceptos considerados como centrales en una investigación, en tanto que permiten comprender y, en ocasiones, explicar un fenómeno desde diversas perspectivas o enfoques. Tanto los marcos teóricos como los conceptuales están basados en investigaciones previas. La diferencia es que los marcos conceptuales pueden basarse en conceptos de diferentes teorías, o bien en algunos aspectos de las teorías existentes. Otra característica es que los marcos conceptuales pueden irse reestructurando conforme se obtiene más evidencia empírica que los apoye o que sugiera modificaciones.

Un concepto fundamental asociado con los marcos conceptuales es el de justificación, considerando a esta como un conjunto de explicaciones de por qué un fenómeno se estudia de cierta forma, privilegiando determinados factores y no otros. Ejemplos de marcos conceptuales en educación matemática son el de modelos y modelado (Lesh y Doerr, 2003) y el de resolución de problemas matemáticos (Schoenfeld, 1985). En resumen, se puede considerar que la finalidad de un marco conceptual es proporcionar un soporte con base en el cual un investigador diseña y conduce una investigación.

El marco conceptual de esta investigación está integrado por dos conjuntos de elementos, en el primero de ellos se incluyen aspectos teóricos considerados por el profesor que diseñó la tarea de aprendizaje así como aquellos que puso en práctica durante la implementación de la misma: (i) resolución de problemas (Polya, 1989; Santos-Trigo, 2007; Schoenfeld, 1985), (ii) la aproximación instrumental, y (iii) el marco de la demanda cognitiva (Stein y Smith, 1998). En el segundo, se incluyen aquellos elementos de utilidad para analizar los conocimientos y habilidades que apoyaron la ejecución de aquellas acciones del docente, orientadas al mantenimiento del nivel de demanda cognitiva de las tareas.

## 2.2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para diversos autores el currículo de matemáticas debe reflejar las actividades propias del trabajo de los matemáticos; es decir, aquellos métodos y acciones de los que se sirve para adquirir nuevo conocimiento (Lester, 2005; Schoenfeld, 1985; Santos-Trigo, 2007a). De ese modo, la resolución de problemas como método de aprendizaje, considera al mismo como una construcción que incluye diversas acciones o actividades cognitivas entre las que se encuentra formular conjeturas, pruebas y refutaciones con base en un proceso creativo y reflexivo, tal como ocurre cuando un matemático trabaja en resolver un problema, cuando hace una demostración, desarrolla un razonamiento o argumento, o cuando busca ejemplos y contraejemplos de una idea o concepto matemático.

En esta perspectiva se considera que las actividades que plantean situaciones problemáticas cuya resolución requiere analizar, descubrir, elaborar hipótesis, confrontar, reflexionar, argumentar y comunicar ideas, son un elemento central en el desarrollo de una forma matemática de pensar y en la construcción de un aprendizaje con entendimiento (Hiebert et al., 1997). Por ello, es importante reflexionar sobre lo que es un problema. Para Valle (2008) hablar de problemas significa considerar aquellas situaciones que demandan del estudiante mecanismos de reflexión, búsqueda, investigación. Además para obtener una respuesta hay que definir una estrategia, la cual, generalmente, no se puede construir de inmediato. Esto es, un *problema* es una tarea que incluye elementos que son desconocidos para la persona que lo aborda, pero es capaz de provocar la realización de acciones sucesivas para darle solución.

En esta línea de ideas, Polya (1945, 1989) considera que un problema es una tarea con un objetivo claramente definido, el cual no puede alcanzarse de forma inmediata por el resolutor<sup>8</sup>. Este autor propuso un modelo de la actividad de resolución de problemas que consta de cuatro fases: (i) comprender las condiciones del problema, (ii) planificar su solución, (iii) implementar el plan, y (iv) comprobar o corroborar la solución. Posteriormente, Schoenfeld (1985) retoma algunas ideas de Polya y profundiza en el análisis de la aplicabilidad de las heurísticas, considerando que para que éstas sean una herramienta útil para el estudiante al resolver problemas, el profesor debe ejemplificar su uso en contextos específicos. Además, Schoenfeld construye un modelo en el cual identifica diversas variables que influyen en el proceso de resolver problemas: (i) los recursos, (ii) las heurísticas, (iii) las creencias y (iv) las estrategias metacognitivas o de monitoreo.

---

<sup>8</sup> con el término resolutor se hace referencia a la persona que resuelve un problema.

Desde la perspectiva del marco de resolución de problemas una tarea debe contar con las siguientes características para considerarse un problema que puede apoyar la construcción de conocimiento matemático:

- (a) Motivación: La tarea debe ofrecer al estudiante un desafío, una contradicción que lo impulse hacia la búsqueda de la solución.
- (b) Sincretismo: La tarea se presenta de forma tal que orienta al estudiante a la discriminación de la información útil de aquella que es irrelevante o a la búsqueda de información complementaria con base en la cual se pueda iniciar el proceso de solución de la tarea.
- (c) Acciones: La tarea debe permitir al estudiante darse cuenta de que debe ejecutar una serie de acciones para encontrar una solución.

Además, es deseable que el problema se encuentre inmerso en un contexto, pues éste puede ayudar al estudiante a darle sentido a la situación problemática e incluso servir de guía en la solución del problema. Arcavi (2000) considera que el docente debe ser capaz de seleccionar o diseñar actividades cuyo contexto propicie el interés del estudiante en el problema, además de llevar a cabo acciones que orienten al estudiante en la elección de diversas estrategias de solución. Otro elemento importante en el enfoque de resolución de problemas es el proceso de deconstrucción de conocimiento o construcción de significado (Kalman, 2005), que se refiere a que el verdadero aprendizaje se logra cuando el estudiante descubre por sí mismo relaciones entre diferentes ideas matemáticas o al reconstruir y redescubrir patrones e invariantes entre conceptos. Entonces, para conseguir un entendimiento conceptual, se requiere realizar actividades donde el estudiante actúe sobre el objeto de conocimiento, proponga soluciones, elabore demostraciones, compruebe, utilice objetos manipulables o artefactos tecnológicos para crear y utilizar distintas representaciones, construya ejemplos y puntos de vista para comunicarlos y compararlos con los de sus compañeros. Así, la construcción de significado implica conectar ideas y conceptos en redes conceptuales robustas<sup>9</sup>.

### **2.3. TECNOLOGÍAS DIGITALES COMO AMPLIFICADORES Y REORGANIZADORES COGNITIVOS**

Diversos trabajos de investigación han analizado la influencia de las tecnologías digitales en el proceso de aprendizaje de las matemáticas (Arcavi y Hadas, 2000; Balacheff y Kaput, 1996; Moreno-Armella, 2002; Drijvers, 2002; Laborde y Sträßer, 2010; Sacristán et al., 2010; Santos-Trigo, 2010) y coinciden en considerar que el uso de estas tecnologías es un elemento que puede favorecer el proceso de comprensión de ideas y conceptos. Las características de las herramientas computacionales junto con el uso de tareas de instrucción de alta demanda cognitiva pueden incidir en que el estudiante adquiera un papel más activo en la construcción de un entendimiento conceptual.

---

<sup>9</sup> Por una red conceptual se entiende la forma en la cual los conceptos matemáticos se encuentran estructurados en la mente de un individuo. Se considera que la red conceptual de una persona es robusta, si el individuo es capaz de establecer conexiones múltiples entre los conceptos matemáticos presentes en su red conceptual. La idea anterior se basa en el concepto denominado aprendizaje con entendimiento, propuesto por Hiebert et al. (1997). (Barrera y Reyes, en revisión).

Pea y Roy (1987) desarrollan la idea de que los instrumentos de mediación funcionan como tecnologías cognitivas que ayudan a amplificar y reorganizar el conocimiento matemático. En este sentido, Moreno (2002) establece que toda actividad cognitiva está ligada estrechamente con la mediación instrumental, en otros términos, toda acción orientada a un aprendizaje, es una acción instrumental. Una tesis central en este marco es que la presencia de los instrumentos de mediación transforma de raíz la estructura cognitiva del estudiante (Werstch, 1993), en forma análoga a lo que ocurre ante la presencia de una herramienta material vinculada a un proceso mecánico.

En este contexto, resulta imperativo que los profesores revisen sus conocimientos sobre el manejo de diversas herramientas tecnológicas, con el objetivo de que las utilicen para favorecer el interés de los estudiantes por el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, no basta que los profesores sepan manejar las herramientas, sino que se requiere que conozcan cómo emplearlas de forma que su uso apoye el desarrollo de una forma matemática de pensar en los estudiantes, así como la estructuración de su conocimiento. Entonces se trata de combinar una mayor habilidad en el uso de las herramientas tecnológicas, aunado al desarrollo de estrategias didácticas para su empleo en el aula de matemáticas.

## **2.4. DISEÑO DE TAREAS DE INSTRUCCIÓN**

Una de las actividades principales del docente consiste en el diseño de actividades de instrucción, pero ¿cuáles son las características de las tareas que permiten una actividad matemática orientada a la construcción de un aprendizaje con entendimiento? De acuerdo con Barrera (2008) las tareas de instrucción deben contar con cuatro elementos:

- (i) *Objetivo de aprendizaje*. Es el enunciado en que se establecen los elementos conceptuales que deberán ser desarrollados y articulados por el estudiante durante la ejecución de la tarea.
- (ii) *Elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo de aprendizaje*. Parte de estos elementos son los datos o la información con la que se cuenta para tratar de resolver la tarea, la(s) incógnita(s), la relación entre datos e incógnitas, así como los conceptos matemáticos que el estudiante ya conoce y deberá articular en su red conceptual para generar nuevos conceptos.
- (iii) *Escenario para desarrollar la tarea*. Se considera que los escenarios en los que se llevan a cabo las tareas de aprendizaje deben constar de tres componentes esenciales: el lugar para desarrollar la tarea, el cual debe incluir la infraestructura y equipo necesario; la organización de los estudiantes para ejecutar la tarea (individual o en equipo) y el tiempo disponible para la ejecución de la tarea.
- (iv) *Proceso inquisitivo*. Es la formulación de preguntas o dilemas que se le presentan al resolutor, las cuales lo conducirán a la articulación de los elementos matemáticos puestos en juego y que lo guiarán a la consecución del objetivo de aprendizaje. (Barrera, 2008)

## 2.5. DEMANDA COGNITIVA DE LAS TAREAS

En el *marco de las tareas matemáticas* (Stein y Smith, 1998) se considera que una tarea puede tener diferentes niveles de demanda cognitiva. En las tareas con un nivel bajo de demanda cognitiva se privilegia la memorización y la realización de procedimientos sin conexiones -no se asocian entre sí ideas o conceptos matemáticos-; mientras que en las tareas con un nivel alto de demanda cognitiva se favorece la realización de procedimientos que permiten construir conexiones con el significado matemático de los conceptos que se abordan en la tarea, o permiten al estudiante *hacer matemáticas* (en el sentido que tiene el término en el marco de la resolución de problemas). De acuerdo con las autoras, una tarea pasa por al menos tres fases: la primera fase es la forma en que las tareas aparecen en los libros de texto u otros materiales curriculares; la segunda fase es la forma en cómo la tarea es propuesta por el profesor, y la tercera fase es cómo la tarea es realmente abordada por los estudiantes en el salón de clase. Todas esas fases, pero particularmente la fase de implementación tienen una fuerte influencia en lo que los estudiantes realmente aprenden. Un supuesto fundamental de este marco es que la naturaleza de las tareas cambia en función de la fase en la que se encuentren. Además, enuncia algunos aspectos que pueden influir en el nivel de demanda cognitiva presente durante el desarrollo de las tareas.

<b>Procesos asociados con la disminución de la demanda cognitiva</b>	<b>Procesos asociados con el mantenimiento de un alto nivel de demanda cognitiva</b>
(i) Hacer rutinarios aspectos problemáticos de la tarea. (ii) Desviar la atención del significado, conceptos, o la comprensión de la idea central de la actividad. (iii) Proporcionar poco tiempo para entender la tarea, o dar demasiado, al grado de que los estudiantes queden a la deriva. (iv) Seleccionar tareas inapropiadas para determinado grupo de estudiantes. (v) Considerar que los estudiantes no son capaces de generar procesos de alto nivel de demanda cognitiva.	(i) Proporcionar un medio por el cual los estudiantes pueden seguir sus propios progresos. (ii) Propiciar que los estudiantes den justificaciones, explicaciones y/o significado a través de preguntas y/o comentarios. (iii) Seleccionar tareas que se basan en conocimientos previos del estudiante. (iv) Elaborar dibujos frecuentemente para buscar conexiones conceptuales. (v) Proporcionar suficiente tiempo para explorar.

Cuadro I. Fuente: Stein et al., 2007, p.351.

Aunque este marco fue desarrollado a partir de tareas planeadas para estudiantes de secundaria las cuales se resolvieron en ambientes de papel y lápiz, se considera que puede ser de utilidad para analizar tareas propuestas para estudiantes de los niveles medio superior y superior, en las que se hace un uso sistemático de las tecnologías digitales. Por otra parte, el uso del marco en un contexto diferente a aquel con base en el que fue diseñado, ofrece la oportunidad de revisarlo y aportar conclusiones u observaciones al respecto.



## 2.6. CONOCIMIENTOS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

¿Cuáles son los conocimientos deseables de un profesor de matemáticas que le permitan diseñar tareas de instrucción y poner en práctica estrategias didácticas para mantener el nivel de demanda cognitiva durante el desarrollo de las tareas? Báez et al. (2007) consideran que “los cambios conceptuales requeridos por la escuela, exigen la redefinición de los roles de profesor... [Por lo que] se considera imprescindible su formación como investigador capaz de diseñar, desarrollar y evaluar estrategias que le permitan resolver los problemas que la realidad [educativa] le presenta”(p.9). Para la UNESCO los docentes deben tener un perfil acorde con las necesidades actuales por lo que es necesario que desarrollen y mejoren sus estrategias de enseñanza (Díaz y Poblete, 2000). En este sentido, se habla de que el docente debe poseer y/o adquirir ciertas características que le permitan afrontar su labor con mayor eficacia. No se debe olvidar que es el docente quien desarrolla estrategias o acciones para que los estudiantes aprendan matemáticas. En este contexto, se han sugerido varias características deseables en el docente.

a) Dominar a profundidad la materia que enseña (matemáticas); ser un experto en el contenido disciplinario y estar actualizado en los últimos avances del conocimiento de la disciplina. Para poder enseñar algo, el profesor debe conocerlo profundamente, tener dominio del contenido.
b) Contar con la capacidad para enseñar matemáticas; conocer los medios para lograr que el estudiante desarrolle conceptos, procedimientos, estrategias, habilidades matemáticas. Este aspecto se ubica en la formación didáctica.
c) Tener la capacidad para propiciar en sus estudiantes aprendizajes, así como para planear y resolver problemas en contextos auténticos (vinculados con situaciones ricas en sentidos y significados para los estudiantes).
d) Poseer la capacidad para mantenerse en constante actualización. Ser un activo buscador y constructor de saberes que le aseguren la formación de comunidades de aprendizaje matemático.
e) Ser un usuario inteligente y crítico del currículo de matemáticas.
f) Estar preparado para la investigación y la experimentación en lo que se refiere a su práctica docente y los diversos aspectos que comprenden la matemática educativa.

Cuadro II. Fuente: Báez et al. (2007, p. 10).

El inciso *a*) se refiere a lo que se denomina conocimiento matemático, el cual debe ser un conocimiento profundo de lo que está enseñando. Además todo docente debe de considerar que nunca va a dejar de aprender algo nuevo dentro de su dominio disciplinar. En tanto el inciso *b*) se refiere a lo que se denomina conocimientos didácticos del contenido CDC(figura1), esto es, los conocimientos que permiten enseñar cierto contenido matemático. Díaz y Poblete (2007) identifican en este caso tres competencias: habilidad

para aplicar conocimientos disciplinares, habilidad para innovar, indagar y crear en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y capacidad para propiciar un ambiente favorable para el aprendizaje de las matemáticas. Para los autores estas tres características o competencias tienen el carácter de generales, es decir, que son básicas para todo docente de matemáticas.

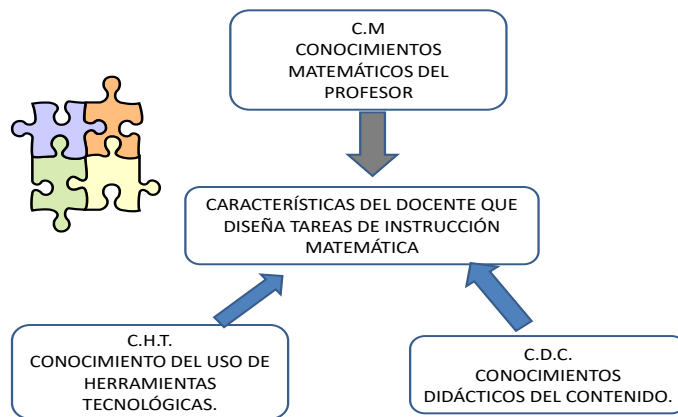


Figura1. Conocimientos deseables en un docente de matemáticas.

Además de las competencias anteriores, se ha propuesto la pertinencia de contar con habilidades o competencias específicas, como capacidad para asumir nuevas exigencias metodológicas y tecnológicas, habilidad para planificar acciones didácticas en matemáticas, capacidad para utilizar diversas estrategias de enseñanza, habilidad para comprender y utilizar teorías del aprendizaje en matemática, habilidad para favorecer el aprendizaje mediante el enfoque de resolución de problemas, habilidad para exponer y desarrollar ideas matemáticas, e incluso habilidades para la investigación en esta área disciplinar (Báez et al., 2007).

En un estudio reciente, Gilbert y Coomes (2010) clasificaron contenidos que debe dominar un profesor de matemáticas del nivel bachillerato, los cuales determinaron a partir de un estudio de campo con profesores en activo en los Estados Unidos (figura 2). Los autores establecen que un profesor de matemáticas debe poseer, primeramente, lo que denominan el conocimiento matemático (SMK, subject matter knowledge), además deben desarrollar un conocimiento profundo o especializado de los contenidos que enseñan (SCK). La combinación de estos dos tipos de conocimiento es denominado por los autores conocimiento en la frontera. Sin embargo, dichos conocimientos no garantizan por sí solos una enseñanza efectiva. Por otra parte se tienen los conocimientos pedagógicos del contenido CDC (conocimiento didáctico del contenido). Dentro de este campo se tiene el conocimiento del contenido y del estudiante (KCS), el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT) y el conocimiento del currículum (CK).

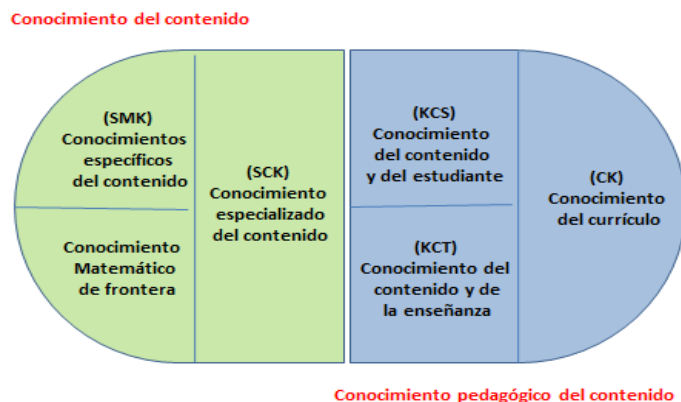


Figura 2. Conocimientos del profesor de matemáticas. Adaptado de Gilbert y Coomes (2010).

Para comprender mejor estas categorías, considerese un ejemplo del conocimiento del contenido y el estudiante, que es cuando un profesor adquiere la habilidad de anticiparse a sus estudiantes y reconocer concepciones erróneas o respuestas incorrectas. En tanto que respecto del conocimiento del contenido y la enseñanza, sería por ejemplo capaz de saber qué necesita hacer para ayudar a un estudiante a corregir errores conceptuales. Gilbert y Coomes (2010) enfatizan que lo relevante es que el docente pueda articular estos diferentes tipos de conocimiento para potenciar el nivel de aprendizaje de sus estudiantes, es decir conocer cómo poner en juego tales conocimientos en la clase de matemáticas.

Además, existen otros elementos importantes cuando se analiza el papel del profesor de matemáticas. Báez et al. (2007) identifican tres aspectos que tienen influencia en la práctica docente: las creencias del profesor, su experiencia y su formación. Se considera que entre los factores que pueden contribuir a que los estudiantes construyan las habilidades necesarias para resolver problemas de matemáticas se incluye la concepción que el docente tenga sobre el papel de la resolución de problemas en el aula, así como el rol que juega el empleo de las herramientas tecnológicas. Porque de esta concepción dependen la interpretación y toma de decisiones acerca de las creencias, errores de aprendizaje u obstáculos epistemológicos que sostengan los estudiantes. Así mismo, de sus concepciones depende el modo en que aborda los contenidos, las situaciones didácticas que desarrolla y las estrategias que utiliza.

No debe perderse de vista que el docente sólo puede indicar ciertas formas de llegar a la solución del problema que orienten las acciones del estudiante, pero no las determinan completamente. El resolutor es quien debe abordar en forma autónoma el problema, encontrar y llevar a cabo las acciones que la situación requiera. En el cuadro III se resumen algunas características deseables en el docente y el estudiante, en un contexto de resolución de problemas.

DOCENTE	ESTUDIANTE
1.-Mostrar preocupación por los estudiantes. 2.-Demostrar interés por el éxito de los estudiantes. 3.-Incluir actividades que preparen al estudiante para el campo profesional. 4.-Responsabilizar al estudiante de su proceso de aprendizaje. 5.-Clarificar metas de aprendizaje. 6.-Lograr la coherencia entre el proceso de evaluación y las metas de aprendizaje. 7.-Incluir actividades que ayuden el estudiante a crear una estructura de conocimiento útil. 8.-Proporcionar retroalimentación inmediata. 9.-Motivar a los estudiantes.	10.-Ser activo. 11.-trabajar cooperativamente. 12.-Entender claramente la tarea y el tiempo para realizarla. 13.-Dedicarse diligentemente a la tarea. 14.-Ser consciente de su propio estilo de aprendizaje y utilizarlo efectivamente. 15.-Serconciente de crear una estructura de conocimiento. 16.-Ser responsable de su proceso de aprendizaje.

Cuadro III: Algunas características deseables en docentes y estudiantes dentro del enfoque de resolución de problemas. Fuente: Riverón et al. (2000).

En lo referente al empleo de herramientas tecnológicas, Riverón (2000) considera que el profesor debe constituirse en un creador, un guía, que impulse a sus estudiantes a aprender mediante el uso de dichas herramientas. Es decir, no basta que conozca su uso, sino cómo emplearlas como instrumento de enseñanza. Así por ejemplo, para lograr esto puede utilizar las herramientas tecnológicas para promover el aprendizaje y para despertar necesidades cognoscitivas, para enseñar al estudiante cómo aprender de forma autónoma. Para este autor, las bases del empleo de herramientas tecnológicas, son el trabajo con grupos pequeños, la interdependencia, la autoevaluación, y la autodirección.

Para el caso particular de una actividad de aprendizaje que se basa en un software dinámico, la herramienta ayuda a investigar un objeto de conocimiento y sus diferentes representaciones. Arcavi (2000) le llama a esto oportunidades didácticas. Como última consideración, en el modelo de resolución de problemas de Mason, Burton y Stacey (1989) se destacan dos aspectos que en ocasiones pasan inadvertidos: el primero, que el tránsito entre las fases de trabajo con el problema no se realiza de forma lineal; el segundo que la resolución de problemas se concibe como un proceso dialéctico, donde las tareas pueden sufrir altibajos, es decir, se puede avanzar, pero también retroceder.

# **CAPÍTULO III**

## **METODOLOGÍA**

### **3.1. INTRODUCCIÓN**

En este capítulo se exponen los elementos metodológicos considerados en el desarrollo de la presente investigación. En primer término se establecen algunas características que definen a la investigación cualitativa, a continuación se lleva a cabo una revisión sobre los métodos utilizados en este tipo de investigaciones y posteriormente se exponen las técnicas de recolección de datos. Una parte importante de este capítulo consiste en la descripción del procedimiento de análisis, el cual incluye la construcción de categorías que permiten organizar e interpretar la información obtenida durante el trabajo de campo. También se describe brevemente en qué consisten las dos actividades de aprendizaje diseñadas por el docente (Apéndices A y B).

### **3.2. CARACTERÍSTICAS DE LA INVESTIGACIÓN CUALITATIVA**

Como se estableció en el primer capítulo, este trabajo tiene el objetivo de realizar un análisis cualitativo de la implementación de una actividad de aprendizaje con la finalidad de responder a dos preguntas básicas. La primera acerca de qué acciones implementa un docente de matemáticas durante la planeación y diseño de una actividad de instrucción basada en el uso de un software dinámico. La segunda tiene que ver con las estrategias didácticas que emplea para mantener un alto nivel de demanda cognitiva durante el desarrollo de la actividad en el salón de clase. El foco de atención son las actividades del docente en un escenario de práctica social, por ello se utilizarán como apoyo las directrices y métodos propios de las investigaciones de corte cualitativo.

En este tipo de investigaciones se estudian cualidades de los fenómenos, así como las relaciones que se presentan entre los distintos elementos que conforman la situación bajo estudio. En estos casos no interesa analizar una relación causa-efecto sino un proceso. Algunos ejemplos de preguntas que pueden plantearse en una investigación de este tipo son ¿qué estrategias utilizan los estudiantes para aprender? ¿Cómo aplican dichas estrategias en resolver cierta actividad? ¿Cómo interviene el docente? Fraenkel y Wallen (1996) presentan cinco características básicas que identifican a las investigaciones cualitativas: (1) mayor relevancia del ambiente natural y el contexto, (2) la recolección de los datos es fundamentalmente basada en palabras o acciones, (3) los investigadores enfatizan tanto los procesos como los resultados, (4) el análisis de los datos es esencialmente inductivo, (5) interesa conocer cómo piensan los individuos y los significados que otorgan a la situación que se estudia.

Actualmente la investigación en matemática educativa ha pasado de los estudios experimentales y cuantitativos, a estudios de tipo cualitativo, pues en éstos se hace un mayor énfasis en la interpretación de los resultados (Lester, 2005). Dicha interpretación resulta más productiva para comprender los diferentes fenómenos didácticos, entendiendo

como tales a todos aquellos que se presentan durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Los datos recolectados proporcionan una idea de los procesos cognitivos que ponen en juego los estudiantes que abordan las tareas, y permiten conocer las dificultades que tuvieron durante el proceso de solución. Esta información es de utilidad para poder ofrecer algunas sugerencias de adecuaciones o ajustes a las tareas. Además, el diseño y prueba de materiales ayuda a tener una visión más práctica de las estrategias didácticas a utilizar en el salón de clase. En los estudios de tipo cualitativo, las respuestas que dan los estudiantes son un indicador del tipo de aprendizaje que están construyendo.

Para la investigación cualitativa, la técnica de observación es fundamental. Existen dos tipos de observación: la participante y la no participante. En la primera de ellas el investigador interviene activamente en la situación o problema a investigar, en tanto que en la segunda sólo observa y recaba datos. A su vez, dentro de las observaciones no participativas, existen dos tipos de métodos, el de simulaciones, donde el investigador crea una situación y la estudia, o el método denominado *estudio de caso*, donde se estudia a una persona o grupo de personas en un medio “natural”. La actividad en un aula puede ser analizada con este último método. Las descripciones precisas de fenómenos pueden ayudar a comprenderlos y pueden por sí mismas llegar a ser resultados sólidos de investigación (Arcavi, 2000). Los instrumentos y procedimientos que emplea la investigación cualitativa son diversos, pero la mayoría se centran alrededor de la observación. Los principales son las entrevistas y las grabaciones de audio y video (Martínez, 2006).

Un término que se ha utilizado en la educación matemática es el de análisis didáctico (Moreno, 2007), y se usa para definir los procedimientos o métodos para diseñar, poner en práctica y evaluar las actividades de enseñanza-aprendizaje. Se pueden identificar cuatro vertientes: el análisis del contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación. Es relevante resaltar que en este estudio se trabaja hacia el análisis del proceso de instrucción y actuación del docente, tal como se marca en los objetivos específicos. El punto de partida es el contenido matemático y los objetivos que se quieren alcanzar con la actividad de aprendizaje, los cuales se detallarán en el apartado denominado grupo de estudio, escenarios para el desarrollo de la actividad, y la descripción de la actividad de aprendizaje. Sin embargo, interesan particularmente las actuaciones del docente, desde la planeación y el diseño de la actividad de instrucción hasta su implementación con un grupo de estudiantes. Además de documentar y analizar el tipo de estrategias didácticas empleadas para mantener el nivel de demanda cognitiva de las actividades de instrucción. Estos aspectos se revisan en los apartados denominados actividades de aprendizaje y categorización de las acciones del docente.

¿Por qué centrar la atención en las acciones del docente? Se considera que una parte fundamental del proceso de aprendizaje, cuando se implementa una actividad de instrucción, es precisamente el conjunto de estrategias que utiliza el profesor para apoyar al estudiante en la comprensión de los contenidos, y para lograrlo no basta que se hayan especificado un conjunto de objetivos y una metodología o plan previo, sino que se ejecuten acciones adecuadas durante el transcurso de la sesión, acciones encaminadas a

lograr el cumplimiento de sus objetivos, pero además a que el estudiante consiga un aprendizaje profundo y significativo de los conceptos e ideas matemáticos.

De esta manera, a través del análisis de la actividad de instrucción, se pretende caracterizar las acciones del docente, desde el momento en que planea y diseña una actividad de aprendizaje, hasta que la pone en práctica con un grupo de estudiantes. La idea es obtener diversos niveles de detalle de los elementos que permitan analizar tales acciones y su influencia sobre el logro del objetivo de aprendizaje. Los resultados obtenidos de este análisis pueden servir para retroalimentar la propia actuación del profesor, y en segunda instancia, para conocer más acerca de la forma en que un objeto de conocimiento puede ser transformado desde la etapa del diseño hasta la de su enseñanza en el aula. En suma, el análisis que se haga de la implementación de esta actividad en el salón de clase, pretende realizar observaciones y sugerencias que puedan apoyar a otros docentes, también tiene la finalidad de documentar todas las estrategias que un profesor puede emplear para conseguir que sus estudiantes lleguen a comprender un concepto matemático.

### **3.3. METODOS EN LA INVESTIGACIÓN CUALITATIVA.**

En este apartado se describen las características del método de estudio de caso, el cual se emplea comúnmente en la investigación en educación matemática. Dicha metodología se consideró apropiada ya que en la investigación se estudia un proceso, aquel de transformación de las tareas de aprendizaje en sus distintas fases: como aparece en los libros de texto o en los artículos de investigación; como aparece en el protocolo que un profesor elabora con el objetivo de que la desarrollen sus estudiantes, y finalmente como es implementada en el salón de clase.

#### **3.3.1. Estudio de caso**

El estudio de caso como metodología de la investigación cualitativa, se ha constituido en una herramienta valiosa, y que ha demostrado poseer fiabilidad y validez metodológica (Martínez, 2006), además de que puede aplicarse en prácticamente todas las disciplinas científicas. Yin (2003) destaca la relevancia que ha ganado en los estudios dentro del área de la investigación educativa. El estudio de caso es una instancia específica, puede tratarse de un sólo individuo, como un estudiante o un profesor, o de una clase, una escuela o una comunidad completa. La característica relevante es que se trata siempre de una instancia real. El investigador analiza con profundidad dicha instancia, con la finalidad de comprender su funcionamiento, pues estudia la dinámica que se presenta entre sus elementos, que pueden ser las interacciones entre eventos, o las relaciones humanas que se presentan. Generalmente estas situaciones de estudio no son apropiadas para un análisis cuantitativo, así que el estudio de caso se enmarca perfectamente dentro de los trabajos de corte cualitativo. Sosa (2006; citado en González, 2008) señala que los fenómenos que son complejos, requieren de investigaciones de carácter exploratorio y comprensivo, más que una búsqueda de explicaciones causales y que, en esta situación, los estudios de caso son los más adecuados. En la figura 3 se muestra la estructura general de un estudio de caso, donde se pueden observar sus elementos constitutivos más sobresalientes.

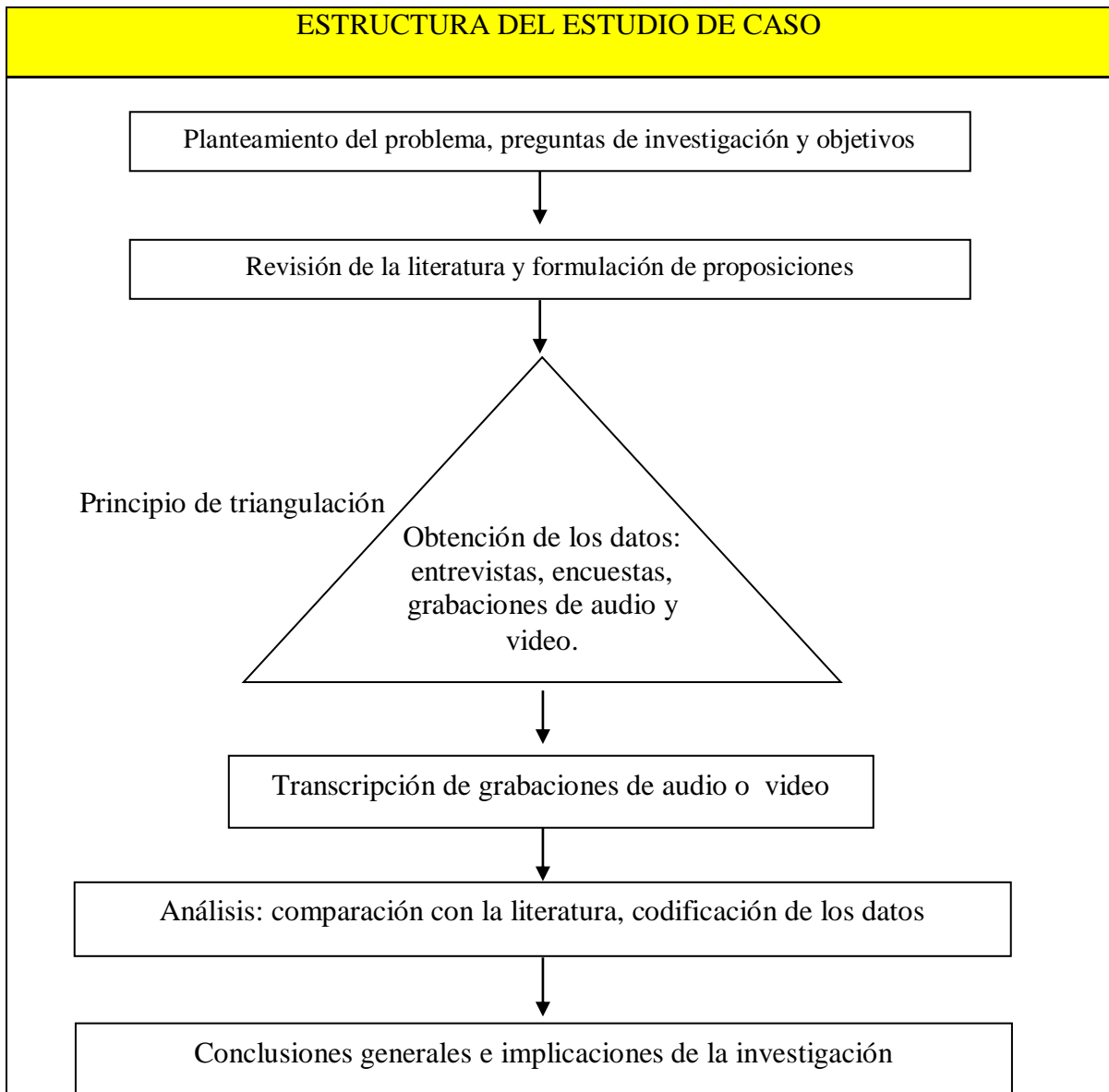


Figura 3. Estructura del Estudio de caso elaborada con base en Martínez (2006).

Bajo la perspectiva de este tipo de estudios, es muy importante definir el contexto en el que sucede el fenómeno de interés; así como la visión que se adopta, la cual es de tipo integral u holística: el todo es más que la suma de las partes. En la siguiente tabla se presentan algunas características del método de estudio de caso:

1.-constituye una narrativa cronológica de eventos.
2.-describe ricamente los eventos relevantes
3.-analiza simultáneamente los eventos descritos.
4.-trata de entender las percepciones de los actores involucrados.
5.-describe características del grupo, y el rol o función de cada actor.

Cuadro IV. Fuente: Cohen et al. (2000).



De acuerdo con Yin (2003), hay tres tipos de estudios de caso, según el tipo de información que proporcionan: los explorativos, los descriptivos y los explicativos o interpretativos. Los primeros son estudios piloto, que preparan la situación para estudios posteriores, los segundos sólo relatan puntualmente los eventos, y los últimos además de relatar los eventos, intentan explicarlos bajo el enfoque de las teorías en cuestión. La mayoría de los estudios de casos siguen la tradición del tipo interpretativo. Los estudios de caso muestran una serie de ventajas o fortalezas, también desde luego pueden implicar ciertas desventajas. A continuación se presenta un cuadro dónde se resumen las principales fortalezas y debilidades de este tipo de método.

Desventajas o debilidades	Ventajas o fortalezas.
1.-Presentan dificultades para organizar la información, la cual puede ser muy extensa.	1.-La información es muy rica y refleja fuertemente la realidad, de hecho su fuerza radica en la complejidad de la información.
2.-Se pueden tener diferentes puntos de vista de los mismos datos.	2.-El estudio de caso puede admitir interpretaciones alternas.
3.-Comúnmente los resultados no se pueden generalizar.	3.-Pueden lograrse ciertas generalizaciones, por ejemplo de una situación única a una clase de situaciones que la representen.
4.-Es complicado que los resultados puedan verificarse por otro investigador, es decir, la información es subjetiva, personal y selectiva.	4.-No se pueden verificar o reproducir, pero constituyen materiales descriptivos ricos que pueden admitir subsecuentes reinterpretaciones.

Cuadro V. Ventajas y debilidades del estudio de caso. Fuente: Cohen et al. (2000).

Con respecto al tipo de resultados que proporciona el estudio de caso, varios autores coinciden en que éstos pueden ser fácilmente comprendidos por audiencias más amplias, si se les compara con los resultados de un análisis cuantitativo, aunque para ello es necesario que los datos sean expuestos en forma clara. Para lograrlo puede ayudar el que se ponga énfasis en capturar las características o aspectos únicos del fenómeno que sean clave en la comprensión del proceso de implementación de las tareas. Es muy importante identificar tales detalles relevantes, porque van a dar realce a la investigación, y de hecho constituyen una de las fortalezas de este tipo de estudios.

Es relevante también mencionar que los resultados que se obtienen de una investigación cualitativa, deben poder contribuir a la toma de decisiones y acciones posteriores, tales como retroalimentación, evaluación formativa, e incluso la reorientación de políticas educativas. Nisbet y Watt (citado en Cohen et al., 2000) mencionan algunos puntos en los que los investigadores deben poner cuidado especial para no cometer errores: el no focalizar la atención en un aspecto que apoye ciertos prejuicios o preconcepciones del investigador (selección de la información), y también evitar que durante la descripción cronológica del proceso se utilice un estilo anecdótico (sensacionalismo) o bien incluir solamente aspectos con los que la gente esté de acuerdo, en detrimento de aspectos en los que se presenten desacuerdos.

Un aspecto importante se refiere a la generalización o transferencia que se pueda hacer de los resultados obtenidos de una investigación cualitativa. Hay que reconocer que sí es posible hacer generalizaciones en este tipo de análisis, aunque conociendo de antemano sus limitaciones. Es decir, aunque comúnmente es difícil realizar generalizaciones, es posible

lograrlas en cierto modo: por ejemplo cuando de una situación única se puede llegar a una clase de situaciones que la representen; o bien de las características de un caso único a la multiplicidad de casos dónde podemos hallar las mismas características.

### **3.4. PARTICIPANTES EN LA INVESTIGACIÓN**

#### **3.4.1. Características del docente.**

El docente de este estudio es ingeniero mecánico de profesión, con una experiencia aproximada de ocho años como profesor de matemáticas en el nivel medio superior y superior. Durante ese tiempo recibió algunos cursos sobre enseñanza y aprendizaje, así como en el desarrollo de competencias (modelo correspondiente a la educación media superior). Cabe destacar que ha impartido algunos cursos a sus pares académicos, por lo cual ha obtenido una certificación en impartición de cursos. El profesor cursó un programa de posgrado en ciencias en matemáticas y su didáctica, obteniendo el grado de maestro en ciencias.

Una constante en su práctica -y según el mismo lo refiere- ha sido su inquietud por incorporar el empleo de diferentes herramientas tecnológicas para apoyar su labor, además de ser un lector asiduo de textos acerca de la historia de la matemática. La formación recibida en el posgrado le permitió ampliar sus intereses de lectura e investigación hacia otras áreas de la enseñanza de la matemática, tales como la resolución de problemas como metodología para la enseñanza de la disciplina, la revisión de diversos marcos teóricos, así como la literatura de investigación que se realiza en esta área del conocimiento.

#### **3.4.2. Los grupos y las actividades.**

Las actividades de aprendizaje diseñadas por el profesor, consistieron en la resolución de problemas geométricos empleando un software dinámico, y se implementaron en tres escenarios, en dos casos con estudiantes de licenciatura y en el tercer caso con estudiantes de bachillerato. En el primer caso, la actividad se desarrolló con un grupo de doce estudiantes de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, que cursaban el segundo semestre de licenciatura en física. Las edades de los estudiantes se encontraban comprendidas entre los 18 y los 25 años, y los cursos previos de matemáticas de los estudiantes fueron cálculo diferencial y matemáticas superiores y computación. En el momento de la recolección de los datos, los estudiantes cursaban la asignatura de geometría analítica, en la cual habían utilizado el software GeoGebra. La mayoría de los estudiantes manifestó tener poca experiencia en el uso del software Cabri Geometry. En el segundo escenario, se implementó la misma actividad pero con estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la ciudad de México. El grupo estaba conformado por 21 estudiantes, con edades comprendidas entre los 15 y los 17 años, y cuya experiencia se resumía en un curso previo de álgebra y uno de geometría que estaban cursando. Los estudiantes manifestaron tener experiencia previa en el uso del software Cabri.

En el tercer caso, se implementó una segunda actividad con un grupo de estudiantes de primer semestre de licenciatura en matemáticas aplicadas de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, que se encontraban cursando la asignatura de computación y matemáticas, razonamiento matemático, geometría y cálculo elemental. Estos estudiantes tenían experiencia en el uso del software GeoGebra.

### 3.5. ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

La primera actividad diseñada por el docente consistió en construir un cuadrilátero con cuatro barras, de modo que, tomando como base una de las barras, las restantes puedan moverse formando un mecanismo articulado tipo Grashof. El software donde se trabajó la actividad fue Cabri Geometry II+ (ver figura4).

En el recuadro *a* de la figura 4, se muestra la selección inicial de los segmentos de recta que van a formar parte del cuadrilátero, en el recuadro *b* la construcción elaborada con la ayuda de la herramienta compás. Por su parte, en el recuadro *c* se utiliza la herramienta animación para verificar si la figura puede realizar giros completos constituyéndose en un mecanismo articulado de Grashof, y finalmente en el último recuadro se muestra a manera de ilustración un mecanismo articulado construido con barras sólidas.

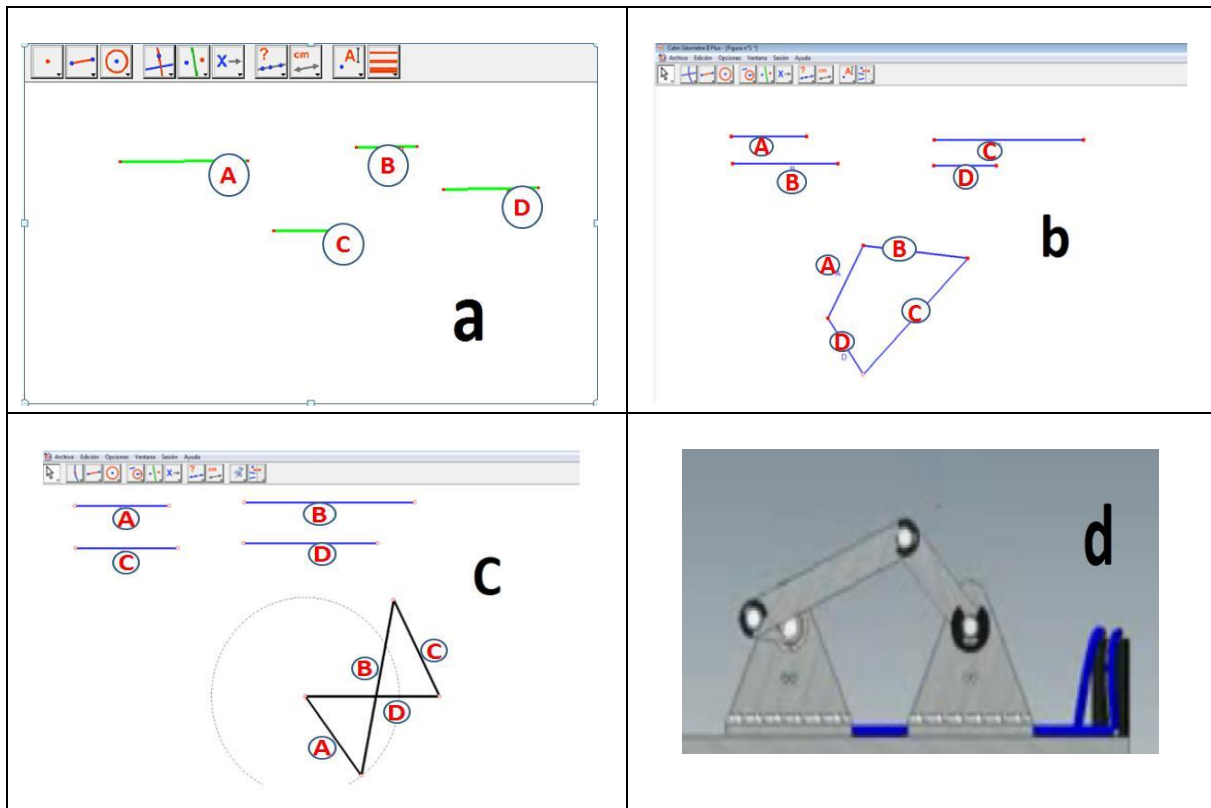


Figura 4. Diferentes etapas en la construcción de un cuadrilátero articulado, y diagrama de un mecanismo articulado.

La idea central de esta actividad de aprendizaje consiste en que a partir de un problema en apariencia sencillo, se puede desarrollar una intensa actividad matemática. La solución del problema admite varios caminos que pueden favorecer el pensamiento conceptual, ya que el empleo del software dinámico permite el tránsito entre diferentes representaciones, lo que se traduce en la construcción y relación de conceptos e ideas en el campo de la geometría. También incluye el planteamiento de preguntas, las actividades en pequeños grupos, la prueba de conjeturas, la comunicación de resultados, y otros elementos del pensar matemáticamente que se ven favorecidos dentro del enfoque de resolución de problemas. El diseño completo de esta actividad se muestra en el apéndice A.

La segunda actividad consistió en elaborar una construcción usando el software de geometría dinámica: partiendo de un segmento de recta  $AB$ , trazar su mediatriz, a continuación colocar un punto cualquiera  $C$  sobre la mediatriz, de modo que sea un punto móvil que recorra la trayectoria de la mediatriz. Enseguida trazar una recta que una los puntos  $B$  y  $C$ , esto es uno de los extremos del segmento original, con el punto  $C$  que se desplaza sobre la mediatriz. Por último, trazar la mediatriz de dicho segmento  $BC$ , y marcar el punto de intersección entre ésta segunda mediatriz y la recta perpendicular que pasa por el punto  $C$ . Se desea una construcción como la que muestra la figura 5. En el apéndice B se encuentra el protocolo de esta segunda actividad, tal como lo propuso el docente que participó en este estudio.

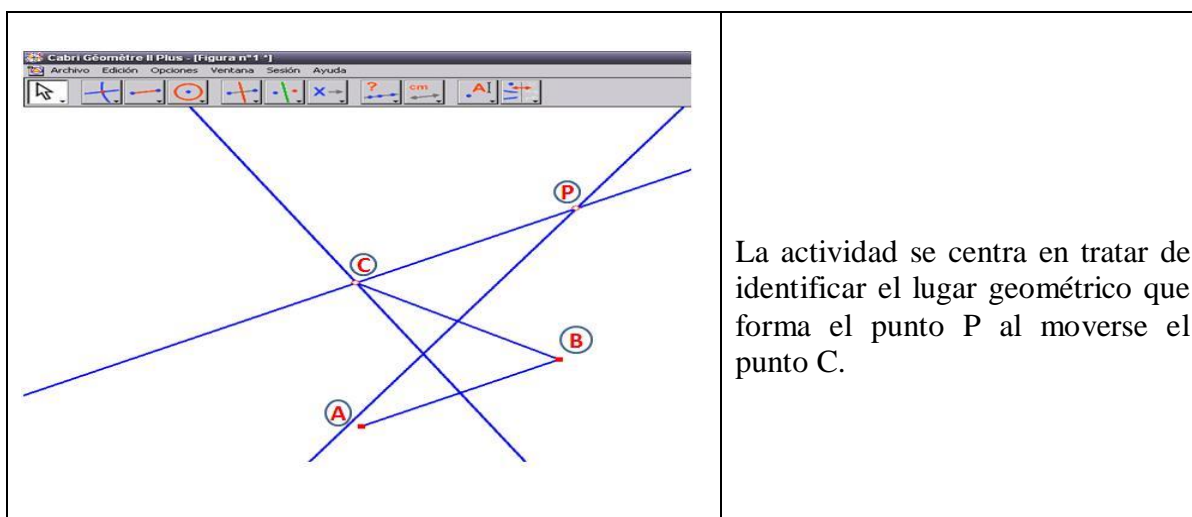


Figura5. Construcción solicitada en la segunda actividad de instrucción.

### 3.6. ESCENARIOS PARA EL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

Con los estudiantes de la licenciatura en física, la actividad se desarrolló en un laboratorio de cómputo, el cual estaba equipado con cañón proyector, así como una computadora para cada uno de los estudiantes, en la que se encontraba instalado el software Cabri Geometry versión II+.

Para la segunda sesión, implementada en el CCH, se contó igualmente con un laboratorio de cómputo, cañón proyector y cada estudiante trabajó con un equipo. Para la tercera sesión, se utilizó nuevamente el primer laboratorio, y en dicha ocasión se usó el software dinámico GeoGebra<sup>10</sup>.

### **3.7. FUENTES DE RECOLECCIÓN DE DATOS**

En este trabajo se utilizaron como principales fuentes de información, las grabaciones en video de las sesiones. La sesión con el primer grupo tuvo una duración de dos horas, pues el profesor consideró que era tiempo suficiente para terminarla. De esta sesión se tienen grabadas dos horas de video. Para el segundo grupo, se grabaron 4 horas de video, ya que la actividad de instrucción se desarrolló en dos sesiones de dos horas cada una. Para el tercer grupo, se tuvo una sesión de aproximadamente 60 minutos, ya que el docente consideró que este tiempo sería suficiente para desarrollar la actividad.

Con respecto a las grabaciones en video, se utilizaron debido a que el interés principal del estudio son las acciones que desarrolla el docente. En los videos se da cuenta de todo el actuar del profesor durante la ejecución de la actividad de instrucción. Para el análisis de la fase de diseño, se consideraron como fuentes primarias de información los protocolos escritos que el profesor elaboró como guías de implementación. Estos documentos se encuentran en los apéndices A y B. También se consideraron dos entrevistas efectuadas al docente que participó en el estudio, las cuales se desarrollaron en forma de pláticas con un formato flexible, por lo que se pueden considerar como entrevistas de tipo no estructurado. La relevancia de estas fuentes primarias de información es que permiten conocer de forma directa el pensamiento y las experiencias del docente, además de que también nos acercan a algunas de sus concepciones sobre lo qué es la enseñanza de las matemáticas, sus perspectivas teóricas y las características que debe tener un profesor de matemáticas, según su propia interpretación como un docente que ha utilizado herramientas tecnológicas en el diseño de actividades de instrucción.

### **3.8. PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS**

Para diseñar una actividad de aprendizaje, se requieren de varias etapas (ver fig.6). En la primera de ellas, se debe delinear una necesidad específica o problema, así como definir los objetivos que se perseguirían con el diseño de la actividad. Posteriormente, el profesor pone en juego sus conocimientos, concepciones y competencias para diseñar el contenido de la actividad. La siguiente etapa consiste en la implementación de la actividad de aprendizaje con un grupo de estudiantes.

El estudio o análisis que se realiza en este trabajo es documentar las acciones llevadas a cabo por un docente en las etapas de planeación, diseño e implementación. Esto es, la atención de la investigación se centra en el docente. Esto no implica soslayar o hacer a un lado los restantes actores del proceso educativo, tales como los contenidos (objetos de aprendizaje) o a los estudiantes, sólo que se está delimitando como foco del análisis a este factor imprescindible del proceso de instrucción.

---

<sup>10</sup> ver <http://www.geogebra.org/cms/>

De hecho en la parte dónde se presenta la descripción de las actividades, (los apéndices A y B) se presentan tal como las concibió el profesor, con la finalidad de que el lector pueda comprender las ideas y concepciones que empleó para diseñar su trabajo, y contrastar su visión con los resultados que fueron obtenidos en el momento de la implementación de las tareas en el aula.

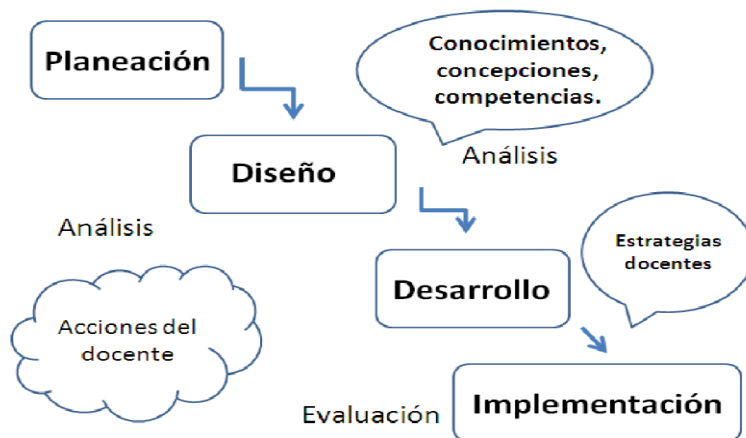


Figura 6. Etapas en la transformación de una actividad de aprendizaje en una actividad de instrucción .Fuente: Ogalde-Careaga et al.,(2008).

### 3.9.CARACTERIZACIÓN DE LAS ACCIONES DEL DOCENTE

La caracterización persigue reducir el volumen de los datos y dosificarlos en categorías y subcategorías. De este modo los datos quedan clasificados y pueden resultar más inteligibles, facilitando su posterior análisis e interpretación. De modo que las categorías no son más que clasificaciones de objetos por clases o tipos. La elaboración de categorías tiene como objetivo segmentar la información en elementos singulares o elementales. Sin embargo tales elementos deben ser representativos de los puntos de interés en los que se quiera poner énfasis en un trabajo de investigación. Para la definición de las categorías se tomaron como base algunos trabajos que han caracterizado las acciones que realizan los docentes cuando ponen en práctica una actividad de aprendizaje bajo el enfoque de la resolución de problemas y el uso de las herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas.

Mazarío (2002) describe algunas acciones generales (cuadro VI) que un profesor puede poner en práctica para ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades para resolver problemas entre las que destacan: analizar el problema, desarrollar estrategias de trabajo, valorar la aplicación de distintas estrategias, ejecutar las estrategias seleccionadas y evaluar los logros y las dificultades, así como la asignación de tareas a los estudiantes. En este último caso las tareas pueden consistir en resolver problemas con lápiz y papel, o realizar alguna pequeña investigación para documentarse, por ejemplo investigar acerca de un teorema o concepto. Una acción específica del docente consiste en estructurar el problema, dónde debe de considerar los siguientes aspectos: tipo de datos, tipo de enunciado, datos

conocidos, organización de la información proporcionada (tablas, gráficos, etc.), vocabulario empleado y preguntas-guía.

FASE	ACCIONES DEL DOCENTE
Análisis del problema	Leer enunciados, aclarar términos, definir variables, ilustrar la situación. Centrar la atención en puntos importantes, buscar patrones, aislar dificultades.
Desarrollo de estrategias de trabajo.	Relacionar el problema con conocimientos y experiencias previos, indagar acerca de experiencias análogas o similares de los estudiantes, establecer hipótesis o conjeturas provisionales, experimentar, probar estrategias alternas.
Valorar la aplicación de distintas estrategias.	Pensar y reconsiderar estrategias, compartir las estrategias de los estudiantes, definir formas de solución adecuadas o no adecuadas.
Ejecutar estrategia seleccionada.	Estructurar el problema, desarrollar sub-problemas, probar las hipótesis previas, escribir y explicar, priorizar las actividades.
Evaluar logros y dificultades.	Contrastar la solución con la pregunta formulada inicialmente, escribir todos sus resultados, revisar cronológicamente lo hecho.

Cuadro VI. Fuente: Mazarío (2002).

En otro estudio (Villarreal, 2005), se definen siete categorías. Dichas categorías fueron: características del problema, métodos de enseñanza usados por el profesor, estrategias generales, heurísticas particulares, uso de las herramientas digitales (instrumental/cognitivo), actitud y organización. Se presentan en el cuadro siguiente, las categorías y subcategorías utilizadas por este autor para describir las acciones del docente:

CATEGORÍA GENERAL	CATEGORÍA ESPECÍFICA	DESCRIPCIÓN
Métodos de enseñanza utilizados por el profesor.	Actuación del profesor.	Indicaciones, explicaciones y preguntas que hace.
	Estrategias metodológicas.	Uso de preguntas, retroalimentaciones, orientaciones, tiempo, desarrollo y conclusiones.
	Motivación.	Motivaciones entregadas durante el inicio y el desarrollo de la sesión.
	Evaluación.	Instrumentos de evaluación, anotaciones, guías.
Estrategias de resolución y heurísticas específicas.	Sugerencias para desarrollar estrategias.	El docente sugiere la aplicación de estrategias.
	Estrategias para resolución de problemas.	Estrategias implementadas por iniciativa del profesor.
	Búsqueda de datos.	A instrucción expresa del docente.
	Organización en grupos.	Formación de equipos o binas a iniciativa del docente.
	Estrategias superiores	Establecer plan de trabajo.
	Discusión en grupo.	Promovida por el profesor.
	Búsqueda de nuevas estrategias.	Anotar datos hacer tablas, buscar información complementaria.

Cuadro VII. Fuente: Villarreal (2005).

En otro estudio sobre las prácticas docentes en el aula de matemáticas (García, 2006), la autora clasifica las acciones del profesor como lo muestra el cuadro VIII.

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍA	ACCIÓN
1.-Motivación inicial.		El profesor motiva a sus estudiantes al inicio de la sesión.
2.-Estrategias de enseñanza empleadas.	1.-Preguntas	a) preguntas auxiliares en el discurso expositivo. b) preguntas dirigidas a los estudiantes para obtener respuesta.
	2.-Empleo de explicaciones.	El docente pide a sus estudiantes que redacten con sus propias palabras las explicaciones de cómo o por qué se había empleado algún procedimiento.
	3.-Retroalimentación de los ejercicios.	Recomendaciones de cómo resolverlos, correcciones.
	4.-Repetición de ideas.	En esta estrategia, el profesor repite, de diferentes formas, una idea.

Cuadro VIII. Fuente: García (2006).

### 3.10. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Como se mencionó previamente, en los trabajos de investigación cualitativa, generalmente se recolecta un volumen de datos muy grande, por lo que se hace necesario categorizarlos para facilitar su análisis. Como la información sobre las acciones que emprende el profesor requiere clasificarse, las categorías pueden formarse utilizando una palabra o una idea que sea similar con otras ideas, creando un nombre con base en un criterio unificador, logrando que al final todas las ideas estén incluidas en alguna categoría.

A partir de los objetivos planteados en este estudio, se consideran dos momentos en dónde se analizan las acciones del profesor: el primero corresponde a la etapa de planeación y diseño de la actividad de instrucción, y el segundo momento corresponde a la ejecución de la actividad de instrucción en el aula. Este segundo momento en realidad está conformado por tres sesiones con tres grupos distintos, en los cuales se implementaron las dos actividades propuestas por el profesor. Por lo anterior, se dividirán las distintas categorías de análisis en dos tipos: relativas al diseño y relativas a la ejecución de la actividad instruccional. Tomando como base otras categorizaciones hechas en estudios similares, así como las preguntas de investigación, se han construido las siguientes categorías, clasificadas también en subcategorías, y divididas en dos partes, que corresponden a los dos momentos del análisis.



**a) Categorías para analizar el diseño de la actividad de aprendizaje**

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍAS	ACCIONES DEL DOCENTE
Formación, dominio y uso de las herramientas tecnológicas.	Conocimiento de herramientas tecnológicas.	Domina el software empleado
		Utiliza las potencialidades del software.
	Frecuencia del uso de los recursos tecnológicos al diseñar actividades de aprendizaje.	Cuando planifica y diseña actividades de instrucción, lo hace considerando el empleo de alguna herramienta tecnológica.
	Importancia asignada a las herramientas digitales dentro del enfoque de resolución de problemas.	Empleo del software para probar conjeturas.
Empleo del software para obtener diferentes representaciones.		
Planteamiento general, y objetivos.	Elección adecuada del tema.	Da a conocer la relevancia del tema.
	Definición clara del objetivo de aprendizaje.	Establece desde el inicio los objetivos a alcanzar.
		Para el diseño de los objetivos considera los marcos teóricos y conceptuales.
Conocimientos disciplinares y didácticos del profesor.	Conocimiento del contenido y del estudiante	Considera los conocimientos previos del estudiante.
		Define los conceptos y habilidades a desarrollar en el estudiante.
	Conocimiento didáctico del contenido.	Emplea estrategias didácticas.
	Conocimiento especializado del contenido.	Exhibe conocimientos profundos del contenido.
Diseño de la actividad de instrucción.	Actividad de aprendizaje adecuada al contexto y nivel educativo.	Toma en cuenta el contexto y el nivel educativo al que va dirigido.
	Promueve la extensión del problema.	Promueve el que los estudiantes formulen problemas propios.
	Considera las rutas hipotéticas de aprendizaje	Guía al estudiante en sus rutas de solución
	Fomenta el aprendizaje individual	Diseña actividades que deba realizar el estudiante en forma individual.
	Fomenta el aprendizaje en grupos	Implementa actividades en pequeños grupos.
Enfoque de resolución de problemas.	Plantea conjeturas.	Ayuda al estudiante a formular conjeturas.
	Prueba hipótesis o conjeturas.	Propone que el estudiante compruebe las conjeturas planteadas.
	Preguntas-guía	Hace preguntas que guíen las acciones a tomar.
	Explicaciones del docente.	Explica cuando es necesario.
	Comunicación de resultados.	Comunica resultados en forma general.
Demanda cognitiva de la actividad de instrucción.	Considera la demanda cognitiva en el diseño de las tareas.	Establece en forma explícita el nivel de demanda cognitiva a desarrollar dentro de la actividad instruccional.
	Planifica acciones del docente para mantener la demanda cognitiva.	Hace explícitas las acciones de mantenimiento de la demanda cognitiva en su protocolo de la actividad de instrucción.

**b) Categorías para analizarla implementación de la actividad de aprendizaje**

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍA	ACCIONES DEL DOCENTE
Recursos didácticos empleados	Utiliza imágenes, videos, u otras representaciones.	¿Utiliza imágenes como recurso didáctico?
	Utilización del software como herramienta didáctica.	¿Aprovecha las potencialidades del software?
Uso de la tecnología	Conocimiento de herramientas tecnológicas.	¿Domina el software?
	Importancia asignada a las herramientas digitales dentro del enfoque de resolución de problemas.	¿Se apoya en el software justificar conjeturas?
		¿Orienta a los estudiantes para que elaboren diversas representaciones con el software?
Heurísticas particulares empleadas.	Reformulación del problema	¿Plantear extensiones del problema?
	Pruebas de conjeturas.	¿Solicita que los estudiantes justifiquen sus observaciones y conjeturas?
Proceso inquisitivo.	Preguntas-guía.	¿Realiza preguntas que guían a los estudiantes?
	Preguntas que fomentan la discusión.	¿Promueve la discusión entre los integrantes del grupo?
Retroalimentación, respuesta a dudas.	Discutir estrategias.	¿Discute estrategias de solución con los estudiantes?
	Identificar y resolver dificultades.	¿Resuelve dudas y preguntas del estudiante?
	Comunicar resultados	Comunica resultados en forma general y/o particular.
Acciones para mantener alto el nivel de demanda cognitiva	Conocimiento y empleo de la demanda cognitiva	Uso de las herramientas digitales para sostener y/o incrementar la demanda cognitiva
		Proceso inquisitivo del docente en relación a la demanda cognitiva.
		“Presiona” al estudiante para que busque significados, explique o busque relaciones.
	Acciones para mantener el interés del estudiante.	Utiliza cambios de voz.
		Cambia de estrategia o actividad.

# CAPÍTULO IV

## ANÁLISIS DE RESULTADOS.

### 4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los resultados de la investigación. En primer término se analizan los procesos de planificación y diseño de las actividades de instrucción con base en los documentos de los apéndices A y B. También se usó la información que se obtuvo a través de entrevistas no estructuradas (apéndice C). Con estos datos se busca caracterizar algunas de las ideas previas y concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que sostiene el profesor, así como sus posturas personales; además de indagar acerca de los conocimientos que puso en juego para la planificación y el diseño de sus actividades de instrucción.

En una segunda parte se analizan los resultados derivados de la implementación de las actividades de instrucción con tres diferentes grupos de estudiantes. La atención del análisis se centra en las acciones docentes desplegadas durante el transcurso de las sesiones, tomando como base las categorías seleccionadas para caracterizar tales acciones docentes, que fueron detalladas en el capítulo III, en el apartado en el que se describen las categorías de análisis de la información. La fuente de información o material base lo constituyen las transcripciones de las grabaciones en video correspondientes a tales sesiones (apéndices D y E).

### 4.2. FASE DE PLANIFICACIÓN Y DISEÑO DE LAS ACTIVIDADES DE INSTRUCCIÓN

#### a) Empleo de los marcos conceptuales en la planificación de las actividades

De acuerdo con el profesor, la selección del tema nació al combinarse por un lado, la necesidad de realizar una actividad de geometría -específicamente de geometría analítica- para aprovechar las potencialidades de un software de geometría dinámica con el que tenía cierta experiencia; y por el otro lado un factor meramente casual. En este último caso, hay que anotar que en ese entonces el docente se encontraba impartiendo la asignatura de *mecánica para la automatización* a estudiantes de una licenciatura de ingeniería mecatrónica. Dentro del currículo de la asignatura, se encuentra el tema de mecanismos articulados de cuatro barras, y al profundizar más sobre el tema se encontró con el principio conocido como ley de Grashof, y se percató que los libros de texto usuales no explicaban las bases matemáticas de dicho principio. Así que decidió profundizar en el contenido y planificó una sesión piloto con sus propios estudiantes de ingeniería, utilizando el software dinámico Cabri Geometry II. Esta sesión le permitió darse cuenta que dicho contenido tenía potencial para poder diseñar una actividad de aprendizaje dirigida a estudiantes de matemáticas de bachillerato o de licenciatura, que cursaran la asignatura de geometría, tomando un tema que permitía relacionar algunas ideas básicas de la disciplina.

El docente explica que se dió cuenta de que podía partir de un enunciado en apariencia sencillo, que podría considerarse como una tarea rutinaria, como construir un cuadrilátero dadas las longitudes de sus cuatro lados; y que sin embargo este contenido cubría los requisitos para diseñar una actividad bajo el enfoque de la resolución de problemas y con el atractivo de iniciar de un contexto real, los mecanismos articulados, que tienen aplicaciones en diversas áreas de mecánica. Es importante señalar que pensó que podía rescatar de este tema un problema a partir del cual los estudiantes de bachillerato que cursan geometría pudieran desarrollar una actividad matemática significativa. Además, el profesor pensó que dicha actividad tenía potencial suficiente para fomentar el pensamiento geométrico en los estudiantes. En el capítulo II (marco conceptual), se mencionaron algunos principios que el docente consideró para la planificación y el diseño de la actividad de aprendizaje. Tales principios se relacionan con los marcos de la resolución de problemas, el uso de herramientas digitales en el aprendizaje de las matemáticas y la demanda cognitiva de las tareas de aprendizaje. En el apéndice A se muestra un diagrama elaborado por el docente donde justifica la inclusión de tales principios cuando concibió la idea central de su actividad de instrucción.

Analizando este diagrama, es posible establecer algunas de las posiciones y concepciones del profesor. Primeramente, partió del enfoque de resolución de problemas porque no quería que los estudiantes realizaran actividades rutinarias. Pensó que una actividad de instrucción bajo este enfoque puede fomentar el pensamiento matemático en el estudiante; posteriormente, reflexionó acerca del tipo de problema más adecuado y se decidió por un problema contextualizado en el ámbito de la ingeniería, y que muestra tener variadas aplicaciones.

Al respecto, el propio docente define algunas de sus intenciones durante el diseño de la tarea: *“...En primer lugar se buscó una tarea que pudiera partir de algo aparentemente rutinario, en este caso, las condiciones para poder construir un cuadrilátero dadas las longitudes de sus cuatro lados, sin embargo con el enfoque que se le da, al introducir el contexto de los mecanismos articulados de cuatro barras, la tarea se puede considerar como no rutinaria, ya que entre otros aspectos, no se pretende llegar a un resultado por medio de un algoritmo, es decir, le presentará dilemas al resolutor.”*

Otro factor que lo inclinó a elegir este contenido en particular, fue que el software de geometría dinámica Cabri Geometry II podría ser utilizado para proporcionar ciertas herramientas que enriquecerían las representaciones del problema y así potenciar los descubrimientos y argumentaciones de los estudiantes durante el proceso de solución. Una vez que pudo intuir las potencialidades de tal diseño, entonces definió los objetivos de aprendizaje, para ello consideró que en particular el descubrimiento y demostración de la ley de Grashof no era una tarea rutinaria, sino que podía constituirse en un contexto “enriquecido” que permitiera el desarrollo de una forma matemática de pensar. Para ello también consideró aquellos conceptos matemáticos de la geometría que podrían estructurarse durante el desarrollo de esta actividad, y por último los conocimientos previos que deberían poseerlos los estudiantes para poder abordar y completar la tarea.

*“...Se identificaron los conocimientos previos que son requeridos para abordar la actividad, así como los nuevos conocimientos que se pueden generar y la forma en la que*

*estos se conectan en la red conceptual del estudiante y se espera que con la información que se proporciona para la solución de la tarea, se pueda acceder a distintas representaciones...”.*

El docente estimó que el utilizar el software dinámico podía fomentar el que los estudiantes accedieran a diversas representaciones (algebraica, gráfica, numérica) del problema, que pudieran identificar patrones, plantear hipótesis o conjeturas que las comprobaran, además de tratar de formular y responder preguntas. Es decir, que el empleo de esta herramienta tecnológica le permitiese al estudiante abordar diferentes formas del pensar, contribuyendo con ello a la construcción colectiva de conocimiento, tal como lo define el enfoque de resolución de problemas. En el siguiente extracto de la entrevista se observan los elementos antes mencionados.

*“...Por medio del estudio de casos particulares, se espera que el resolutor identifique patrones presentes en la actividad, que le permitan proponer conjeturas sobre el comportamiento de los mecanismos bajo observación, los estudiantes deben ser presionados por el profesor para que traten de justificar las conjeturas planteadas. A través del proceso inquisitivo que surja de la interacción instructor-estudiantes-software, se propone la extensión de la actividad, en este caso, tratar de determinar un lugar geométrico en particular, que se espera requiera mayor demanda cognitiva por parte de los estudiantes...”.*

Aquí es dónde articula el principio de la demanda cognitiva con el marco de resolución de problemas. La actividad debe diseñarse de modo que exija gradualmente al estudiante poner en práctica formas de pensamiento cognitivamente demandantes. Un reto importante consiste en que el profesor consiga mantener un alto nivel de demanda cognitiva, para que la actividad matemática no decaiga, y pueda lograrse una comprensión conceptual a partir del desarrollo de la tarea. En suma, el docente consideró elementos de tres marcos para planificar la tarea de aprendizaje que quería diseñar, la resolución de problemas, el empleo de la tecnología y la noción de demanda cognitiva. Estos principios los fue aplicando en su planeación inicial (Apéndice A, diagrama 1).

#### **b) Concepciones y posturas personales del docente acerca de la enseñanza y el diseño de actividades de instrucción**

Para sondear algunas de las ideas y concepciones del docente, en lo referente a la enseñanza de las matemáticas, y más específicamente al diseño de actividades de instrucción que se basan en el empleo de un software dinámico, se tuvo la oportunidad de platicar con él en varias ocasiones. A partir de dichas conversaciones, se exponen algunas de sus ideas que permiten conocer y entender sus concepciones al respecto del diseño de tareas y del proceso de instrucción en general.

Con respecto al surgimiento o selección del tema de la tarea, el docente comentó que ya había formulado algunas propuestas previas, sólo tenía en mente el que la tarea debía de abordar conceptos geométricos –para poder emplear cabri– y ser factible de implementarse con estudiantes del nivel bachillerato o de los primeros semestres de nivel profesional: *“... al principio se pensó en otras tareas, lo que si teníamos claro desde un principio era que la*

*tarea de aprendizaje tenía que estar contextualizada.....durante las lecturas que se hicieron para establecer el problema ... pues de antemano sabíamos que tenía que ser una tarea no rutinaria.....al final de cuentas, en parte por los antecedentes que yo tenía previos a mi formación, y por algo que estuve trabajando con estudiantes de licenciatura, fué que nos decidimos por esta tarea que tenía que ver con el contexto de los mecanismos, y que se adaptaba a las condiciones que nosotros queríamos, entre otras cosas, tener una tarea no rutinaria, trabajarla con un software dinámico, nos pareció atractivo de la tarea que estaba en el contexto del mundo real, de hecho se trata de modelar, de manera cinemática lo que sería el funcionamiento de un mecanismo.....y que permitiría hacer conexiones en la red conceptual del estudiante, entre los conocimientos previos y lo que en el objetivo de aprendizaje se logre....”*

Entonces para la selección de esta actividad se consideraron dos aspectos, por un lado la experiencia del docente, y por otro que la actividad cubriera una serie de requisitos que habían sido definidos anticipadamente, conbase en algunas líneas de trabajo propuestas. En referencia a qué tipo de ideas provenientes de los marcos conceptuales fueron relevantes a la hora de definir la actividad central de aprendizaje, el profesor comenta: “...bueno de entrada ... primero es en la resolución de problemas, en la resolución de problemas se parte, de una actividad no rutinaria, esto es que sea una actividad matemática que se tenga que resolver por medio de no solamente algoritmos y lo menos importante es que se tenga que llegar a un resultado, sino todo el trabajo que el estudiante realiza al quererla resolver .... En la resolución de problemas se sugiere trabajar con distintas representaciones, que es lo que se pretende hacer con el uso del software dinámico, se espera por ejemplo que se puedan plantear diferentes expresiones algebraicas ... se espera igual que cuando el estudiante la empiece a resolver, llegue un momento en el que quiera extenderla, debe tratar también de formalizar lo que el está conjeturando....la otra perspectiva es el incremento de la demanda cognitiva durante la tarea de aprendizaje, entonces en este sentido nosotros consideramos que esta tarea requiere altos niveles de demanda cognitiva en los estudiantes ... de hecho una de las cosas que se espera es que la demanda cognitiva vaya creciendo y se mantenga alto el nivel, y para eso nos apoyaremos en el uso de la tecnología , que es la tercera perspectiva..... de hecho queremos ver cómo es que el uso de un software dinámico como Cabri permite que el estudiante pueda elaborar conjeturas, pueda ver algunas representaciones dinámicas que en lápiz y papel sería muy difícil....”

Para determinar los objetivos de la actividad, el docente reporta que desde un inicio se pensó en una tarea de aprendizaje dirigida a estudiantes de bachillerato y posiblemente a estudiantes de licenciatura de los primeros semestres considerando que, como antecedentes, los estudiantes deberían contar con conocimientos de álgebra, geometría y trigonometría, así que los objetivos tienen relación con lo que se esperaría que estudiantes de este nivel pudieran resolver. De forma general uno de los objetivos era que los estudiantes pudieran identificar algunas propiedades de figuras geométricas, y utilizaran un lenguaje algebraico para representar las situaciones que se le presentan, también usar recursos de la trigonometría tales como las leyes de senos y cosenos.

Por otro lado, cuando se le preguntó al profesor qué elementos debe considerar un docente de matemáticas que quiera diseñar una actividad de aprendizaje, él comentó que un primer aspecto que el profesor debe tener conocimientos matemáticos sólidos, y por otro lado,

si va a diseñar una tarea específica de instrucción, tiene que experimentar él mismo el proceso de solución, ya que si bien es cierto que puede emplear y adaptar alguna tarea elaborada por alguien más, también es importante que aprenda a hacerlo en forma autónoma. Claro que para lograrlo debe poseer conocimientos adicionales a su campo disciplinar; por ejemplo, conocimientos pedagógicos y relacionados con el empleo de herramientas computacionales en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

*“...podría tomar una tarea de un libro de texto y hacerle cambios o adecuaciones, o hacer un rediseño y considerar los elementos que nosotros hemos mencionado..., y que entre otras cosas lo que se persigue es que con la implementación de estas tareas, el estudiante pueda tener [desarrollar] procesos cognitivos o procesos mentales que sean equivalentes al trabajo de un matemático profesional, lo que llamamos el pensar matemáticamente...”*

Como puede constatarse por las afirmaciones del profesor, él considera que es importante que sea el propio profesor de matemáticas, que está ejerciendo su labor diariamente en el aula, el que diseñe sus propias tareas de instrucción, porque podría lograr mejores resultados que si solamente emplea recursos elaborados por otros docentes o por investigadores en educación matemática, pues el proceso de diseñar actividades de aprendizaje permite entender de mejor manera cómo piensan los estudiantes al resolver problemas. Un docente de matemáticas debe adquirir una formación no solamente disciplinar, sino en las áreas de didáctica de las matemáticas, epistemología y tecnologías digitales en la enseñanza.

En relación con el conocimiento de las nuevas tecnologías, y en las ventajas que supone para el profesor ser diseñador de sus tareas de aprendizaje, comenta *“...que el profesor sepa qué le ofrece un recurso como el software dinámico, y algo que nos parece fundamental, es que cuando él mismo diseña la tarea, la experimenta consigo mismo.... él piensa que la tarea puede ir por cierto camino cuando la empieza a desarrollar, cuando la trata de resolver, se da cuenta de las problemáticas que podrían presentársele al estudiante, así que él mismo empieza a corregirlo...”*

En esta misma línea de ideas, se comentaron con el docente cuestiones relativas al tipo de dificultades que ha encontrado cuando ha planificado o diseñado una actividad de instrucción, *“... ya que se había decidido el hacer una tarea de aprendizaje, se diseñó una tarea que tuviera que ver con este criterio de Grashof o ley de Grashof de la cinemática de mecanismos, pues nos dimos a la tarea de hacer una revisión de la literatura al respecto, y de hecho crecía más nuestra motivación por implementar esta tarea, ya que no encontramos una justificación de esta ley, sin embargo la ley es enunciada en varios textos, más o menos de la misma forma..... y entonces cuando nosotros quisimos encontrar ese criterio por algún medio, digamos geométrico o trigonométrico al alcance de los estudiantes, nos dimos cuenta que no era algo factible en ese sentido, es decir tuvimos dificultades nosotros mismos en enunciar o llegar aun resultado como el que aparece en los libros...”*

Se refiere a que se encontró con un problema pues en los libros de texto que revisó no se representaba una forma de obtener y justificar dicho principio de la cinemática, lo que abrió la oportunidad de diseñar una actividad donde el estudiante pudiera indagar, mediante el uso de un software, acerca de qué condiciones podrían justificar o explicar la ley referida.

Se considera que este elemento resultó nodal en la selección que finalmente se hizo de la actividad, y el docente reconoció en esta situación, un problema que podía constituirse en una oportunidad propicia para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

### **C) Elementos considerados en el diseño de la primera actividad de instrucción (mecanismos de Grashof)**

Para llevar a cabo este análisis, se tomó como base el cuadro 1 (apéndice A). Los objetivos de la actividad de instrucción fueron definidos por el docente de la siguiente manera:

#### ***Objetivos de Aprendizaje***

- Identificar algunas propiedades geométricas de los triángulos y cuadriláteros.
- Transitar del pensamiento geométrico al aritmético y algebraico.
- Utilizar distintos registros de representación.
- Incorporar algunos recursos de la geometría analítica a la solución de un problema de geometría sintética.

En el diagrama se plantea que los tres principios seleccionados desde el marco teórico fueron considerados en el diseño de los objetivos. Es de notar que en los objetivos no se plantea dar solución al problema, sino identificar propiedades geométricas de los cuadriláteros y los triángulos, al intentar justificar los requisitos para que un mecanismo de cuatro barras articulado cumpla con la ley de Grashof. Aquí se están tomando en cuenta tres principios del enfoque de resolución de problemas: identificar patrones, buscar relaciones y tratar de buscar explicaciones o justificaciones de una afirmación o aseveración.

Como también se buscaba que el estudiante pudiera transitar entre distintos tipos de registros o representaciones<sup>11</sup>, se toma en cuenta al marco conceptual del uso de las herramientas tecnológicas, pues se ha reportado que el empleo de un software dinámico puede ayudar a establecer ese tránsito en forma rápida y efectiva, además de que también apoya que el estudiante pueda explorar con ello nuevas rutas para resolver un problema. La necesidad de retomar conocimientos previos, así como de otras áreas de la matemática, permitiría en teoría que los estudiantes las pongan en juego, y las relacionen para poder extender la solución hacia las representaciones de tipo algebraico y trigonométrico.

En suma, el diagrama permite identificar los elementos teóricos considerados en el diseño de la tarea, que pueden incorporarse directamente en el tipo de objetivos que pueden establecerse, o más claramente, que tales elementos del marco conceptual influyen directamente en el alcance de los objetivos. Si se analiza la segunda parte de ese mismo diagrama, es posible encontrar otros elementos provenientes de los marcos conceptuales, estructurados en torno a la actividad central que plantea la tarea.

---

<sup>11</sup> Siguiendo a Duval, por registro de representación entendemos a un sistema de signos utilizados para representar una idea u objeto matemático y que además cumple con las siguientes características: es identificable, permite el tratamiento, esto es, la manipulación y transformación dentro del mismo registro, y por último, permite la conversión, consistente en la transformación total o parcial en otro registro.



Dentro del escenario de instrucción, se considera el trabajo individual, es decir, las sucesivas aproximaciones que cada estudiante realice hacia la solución del problema, pero también permite la interacción entre estudiantes al realizar trabajo en parejas, éste es otro de los elementos importantes dentro del enfoque de resolución de problemas, pues se considera que los procesos de interacción entre los estudiantes contribuyen a la construcción gradual del conocimiento.

Otro elemento importante es el proceso inquisitivo que el docente promueve en forma continua durante el transcurso de la sesión. El proceso inquisitivo tiene como propósitos, por un lado motivar el interés del estudiante y no permitir que decaiga la demanda cognitiva, y por otro guiar al estudiante para que pueda seguir indagando y experimentando con ayuda del software, al intentar responder a las preguntas planteadas por el profesor o por sus compañeros.

La actividad de instrucción consistió primeramente en la construcción de un cuadrilátero, dados cuatro segmentos de dimensiones determinadas, usando Cabri. Después se introduce el concepto de los mecanismos de Grashof, que son mecanismos articulados formados por cuatro barras, una de las cuales puede dar una revolución completa respecto de otra que permanece fija. Se propone la realización de varias construcciones bajo diferentes condiciones, agrupándolas en casos particulares, y como no siempre resulta posible realizar la construcción, o los mecanismos no muestran un comportamiento de mecanismos de Grashof -ya que existen combinaciones específicas de medidas de sus lados que no posibilitan la construcción-, entonces el proceso de resolución del problema se extiende mediante el análisis y discusión de cada uno de los casos particulares, con la finalidad que los estudiantes elaboren conjeturas acerca de las condiciones necesarias para construir cuadriláteros, y que puedan además funcionar como mecanismos Grashof.

En la figura siguiente, se muestran, a manera de ilustración el tipo de construcciones que se les solicitó a los estudiantes. A la izquierda se muestra un cuadrilátero y a la derecha su funcionamiento como mecanismo de tipo Grashof.

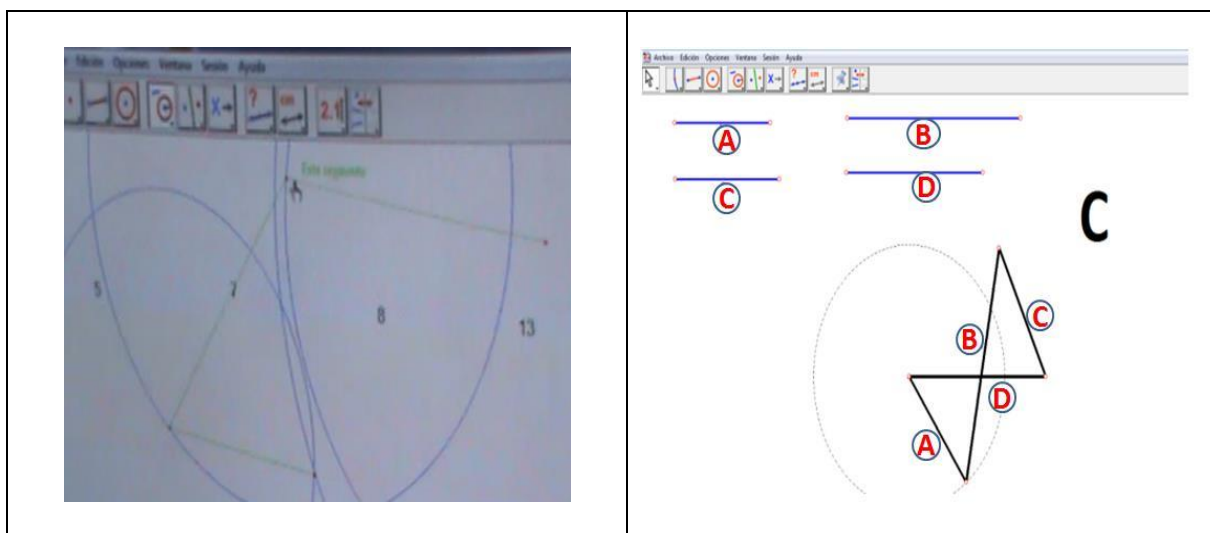


Figura 7. Construcción de un cuadrilátero, y animación como mecanismo tipo Grashof.

## D) Elementos considerados en el diseño de la segunda actividad de instrucción (lugares geométricos)

Una segunda actividad fue planificada para estudiantes del primer semestre de una licenciatura en matemáticas. Las características de este grupo se describen con mayor detalle en la sección de metodología. En este caso, la intencionalidad del docente fue incluir un elemento que, aunque había sido considerado desde la primera actividad de instrucción, no se había conseguido durante la implementación de dicha actividad, debido a que las condiciones no lo permitieron. Tal elemento, y que se considera indispensable dentro del enfoque de resolución de problemas se refiere a posibilitar que los estudiantes registraran el tránsito entre diferentes representaciones<sup>11</sup> –algebraica, numérica y gráfica- y que además la actividad girara en torno a la argumentación, es decir la manera en que los estudiantes podían justificar de forma algebraica los resultados y relaciones observados en una construcción geométrica. La descripción y análisis del diseño de esta actividad se basa en el documento denominado *Actividad de aprendizaje: Identificación de lugares Geométricos* (Apéndice B), el cual es un protocolo o guía de implementación de la actividad.

Se iniciará con la descripción de los objetivos propuestos, los cuales se muestran en el cuadro IX. En esta actividad se da mayor relevancia a dos aspectos considerados inicialmente desde la etapa de revisión bibliográfica que se llevó a cabo para delimitar el marco conceptual: primeramente, el empleo de una herramienta tecnológica –el software dinámico- para poder facilitar el tránsito entre distintas representaciones de un problema, y en segunda instancia, el poder hacer conjeturas e intentar justificarlas en forma analítica. En el cuadro siguiente se muestran entonces los objetivos tal como fueron planteados por el profesor:

Objetivos de aprendizaje	1.-Identificar lugares geométricos generados por configuraciones simples, al mover alguno de los elementos iniciales.
	2.-Identificar variantes e invariantes en una configuración geométrica dinámica.
	3.-Transitar de representaciones geométricas a representaciones algebraicas con ayuda del software de geometría dinámico.
	4.-Dar argumentos algebraicos para justificar conjeturas geométricas elaboradas con ayuda del software dinámico.

Cuadro IX. Objetivos de aprendizaje de la segunda actividad.

Los conocimientos previos considerados por el docente en el diseño de esta segunda actividad, incluyeron: la ecuación de la recta dados dos puntos o un punto y su pendiente, la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano cartesiano, los sistemas de ecuaciones lineales, la definición de mediatriz y conocimientos previos sobre ecuaciones y elementos de las cónicas, en este caso específico de la parábola.

Se estimó pertinente implementar la actividad de instrucción con estudiantes de una licenciatura en matemáticas, porque se consideró que ellos poseían los conocimientos

previos para abordar la actividad. Otro de los elementos centrales de este diseño es la importancia que el docente le asignó al proceso inquisitivo, como una parte fundamental de toda la actividad, en sus propias palabras: “...*El profesor debe tener especial cuidado en hacer preguntas que guíen a los estudiantes sin darles la ruta de resolución o respuesta de forma explícita: debe motivarles a tratar de justificar sus observaciones en el software...*”. Como en el caso de la primera actividad, el docente partió de un problema o situación sencilla, que consistió en una construcción geométrica. La idea es que este contexto inicial se fuese enriqueciendo de forma que los estudiantes desarrollaran una actividad cognitiva de alto nivel, al involucrar diferentes registros de representación, así como el establecer conexiones entre diferentes conocimientos previos, además de recurrir al trabajo en equipos o pequeños grupos para discutir las ideas, así como justificar conjeturas matemáticamente. De este modo, el diseño de esta segunda actividad de instrucción, también consideró la mayor parte de los elementos teóricos puestos en práctica en el diseño de la primera actividad.

La actividad consistió en construir un segmento de recta (AB), trazar su mediatriz y colocar un punto (C) sobre esta, de modo tal que el punto tenga libre movimiento a lo largo de la mediatriz. A continuación se solicitó trazar una línea perpendicular a la mediatriz y que pasara por el punto C. Posteriormente, trazar el segmento BC, así como su mediatriz, y finalmente nombrar como P al punto de intersección entre la segunda mediatriz y la perpendicular (Figura 8). En el protocolo de implementación el docente especificó que primero se promovería el que los estudiantes identificaran el lugar geométrico que describe el punto P cuando se mueve el punto C; y en segundo lugar se orientaría un proceso de discusión grupal para que los estudiantes justificaran la naturaleza de dicho lugar geométrico. También se consideró como parte del protocolo de implementación una posible ruta de instrucción que podrían seguir los estudiantes para resolver el problema, y que consistía en percatarse de que el punto P representaba también el punto de intersección de dos rectas, y que por lo tanto un camino para avanzar en la solución del problema consistía en identificar las coordenadas de dicho punto. En otras palabras, la resolución de un sistema de ecuaciones. También era necesario que los estudiantes se percataran de la necesidad de emplear un plano cartesiano para poder contextualizar la construcción y facilitar la obtención de tales coordenadas.

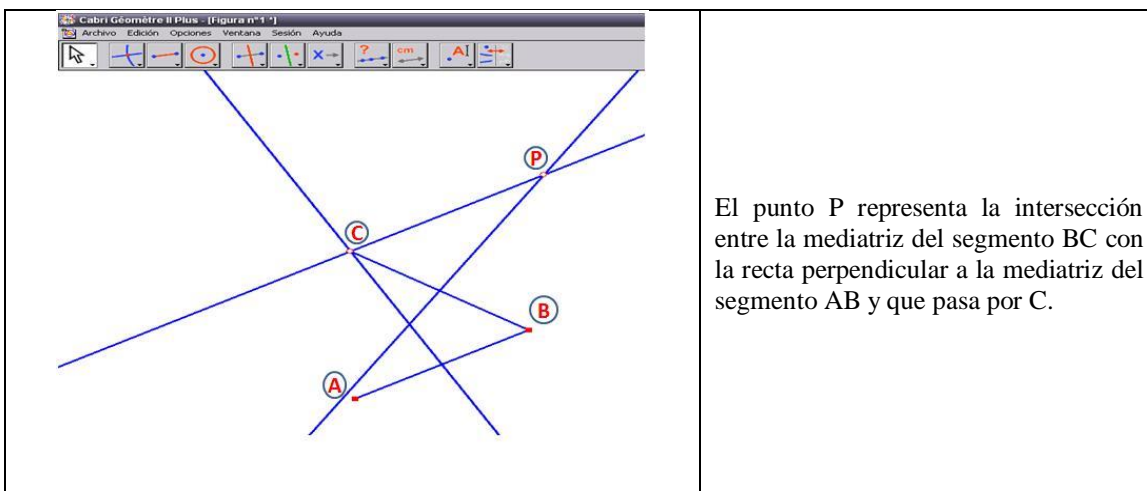


Figura 8. Ejemplo de la construcción inicial solicitada para la segunda actividad de instrucción

### 4.3. ANÁLISIS DE LA ETAPA DE PLANIFICACIÓN Y DISEÑO DE LAS ACTIVIDADES DE INSTRUCCIÓN.

Para identificar claramente aquellas acciones, conocimientos, experiencias y estrategias que el docente puso en juego al planificar y diseñar las dos actividades de instrucción que fueron previamente detalladas, se tomará como base la clasificación elaborada en la tabla respectiva del capítulo III. Se proponen cinco categorías generales, el dominio y uso de herramientas tecnológicas, el planteamiento general del problema o actividad incluyendo sus objetivos, los conocimientos del profesor, características propias del diseño, la resolución de problemas y el marco de la demanda cognitiva. Tres de estas categorías están directamente relacionadas con los marcos conceptuales considerados por el docente desde el inicio del proceso.

A continuación se presenta una serie de cuadros donde se resumen algunos de los resultados observados al analizar la etapa de planificación y diseño, comparando lo acontecido en las dos actividades de instrucción diseñadas e implementadas. La primera actividad se refiere a los cuadriláteros articulados o mecanismos de Grashof, y la segunda actividad se refiere a la construcción y determinación de un lugar geométrico.

#### 1.-Conocimiento, dominio y uso de las herramientas tecnológicas.

SUBCATEGORÍA	ACCIONES DEL DOCENTE	PRIMERA ACTIVIDAD	SEGUNDA ACTIVIDAD	OBSERVACIONES
Conocimiento de herramientas tecnológicas.	Domina el software empleado	El docente utiliza en forma aceptable el software de cabri.	El docente utiliza en forma aceptable el geogebra.	Reporta tener experiencias previas con geogebra y cabri geometry II.
	Utiliza correctamente las potencialidades del software	Desde el inicio de su diseño, plantea que el software no proporcione respuestas, sino que sirva de herramienta para encontrarlas.	En este caso, su interés principal es la utilización del software para facilitar el tránsito desde una representación geométrica hasta una algebraica.	
Frecuencia del uso de los recursos tecnológicos al diseñar actividades de aprendizaje.	Cuando planifica y diseña actividades de instrucción, lo hace considerando el empleo de alguna herramienta tecnológica.	La actividad es planificada para usar un software de geometría dinámico	La actividad es planificada para usar un software de geometría dinámico.	El profesor comenta que desde tiempo atrás siempre había tenido el interés por trabajar actividades usando la tecnología, pero anteriormente no lo hacía bajo la organización de un marco teórico adecuado.
Importancia asignada a las herramientas digitales dentro del enfoque de resolución de problemas.	Empleo del software para probar conjeturas.	Con el software podían analizarse casos particulares que sirvieran para poder justificar el principio de Grashof.	En este caso el software debería servir como guía para elaborar las conjeturas, pero no para probarlas.	Procuró que el software fungiera como una herramienta que facilitase la comprobación de conjeturas
	Empleo del software para obtener diferentes representaciones.	Para la primera actividad consideró las representaciones gráfica, numérica (longitudes de los lados), y algebraica (relaciones trigonométricas).	Para esta actividad consideró el tránsito entre las representaciones geométrica y algebraica.	Desde un inicio consideró que el software es una herramienta poderosa para facilitar el tránsito entre representaciones.

## 2.-Planteamiento general y objetivos.

SUBCATEGORÍA	ACCIONES DEL DOCENTE	PRIMERA ACTIVIDAD	SEGUNDA ACTIVIDAD	OBSERVACIONES
Elección adecuada del tema	Da a conocer la relevancia del tema	El docente manifiesta que el tema central es en apariencia sencillo, pero que tiene mucho potencial para desarrollar una actividad “enriquecida” y no rutinaria.	En este caso, el profesor consideró importante registrar cómo la ayuda del software permite con mayor facilidad el tránsito entre representaciones	En la primera actividad, se trata de un tema en contexto, que podía despertar mayor interés en los estudiantes.  En el segundo caso, el tema era de un contexto totalmente matemático.
Definición clara del objetivo de aprendizaje	Establece desde el inicio los objetivos a alcanzar.	De forma general uno de los objetivos era que los estudiantes pudieran identificar algunas propiedades de figuras geométricas, poder utilizar un lenguaje algebraico para representar las situaciones que se le presentan, también usar recursos de la trigonometría tales como las leyes de senos y cosenos que rigen los triángulos.	En forma general, que los estudiantes pudieran utilizar diferentes recursos para poder describir un lugar geométrico, y ayudándose de un software dinámico, poder definir el lugar geométrico de forma algebraica.	
	Para el diseño de los objetivos considera los marcos teóricos y conceptuales.	En esta actividad, los tres marcos conceptuales se vieron reflejados en la redacción misma de los objetivos.	En la segunda actividad se concentró en forma más particular en el tránsito entre el pensamiento geométrico y el algebraico, un aspecto más específico del enfoque de resolución de problemas y el uso de la tecnología.	Los objetivos de hecho fueron diseñados una vez que fueron revisados y seleccionados los marcos conceptuales a emplear, y su contenido está en función de tales marcos.

### 3.-Conocimientos disciplinares y didácticos del profesor.

SUBCATEGORÍA	ACCIONES	PRIMERA ACTIVIDAD	SEGUNDA ACTIVIDAD	OBSERVACIONES
Conocimiento del contenido y del estudiante.	Considera los conocimientos previos del estudiante	Consideró las relaciones trigonométricas y el teorema de la desigualdad del triángulo, así como propiedades de los cuadriláteros.	Consideró las ecuaciones de la recta, de la parábola, la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.	
Conocimiento del contenido y del estudiante	Define los conceptos y habilidades a desarrollar en el estudiante.	En el análisis de los casos particulares, promueve que los estudiantes elaboren sus propias ideas, lo insta también a escribirlas.	El docente promueve que el estudiante realice sus propias construcciones, y posteriormente desarrolla un proceso inquisitivo para lograr que identifique los diferentes elementos de su construcción	
Conocimientos didácticos del contenido	Emplea estrategias didácticas.	Utiliza el trabajo individual, el trabajo en pequeños grupos, la expresión y discusión de ideas.	Promueve la discusión y refinamiento de ideas, también la comprobación de hipótesis y conjeturas.	En general, conoce varias de las estrategias didácticas utilizadas cuando se desarrollan actividades bajo el enfoque de resolución de problemas y el uso de la tecnología..
Conocimientos especializados del contenido	Exhibe conocimientos profundos del contenido	Las propiedades de los cuadriláteros, así como los elementos que deben conformar un mecanismo articulado tipo Grashof, así como su funcionamiento.	Las propiedades generales de las cónicas, en particular las diferentes ecuaciones para definir las, así como la resolución de sistemas de ecuaciones.	

#### 4.-Diseño de la actividad de instrucción.

SUBCATEGORÍA	ACCIONES DEL DOCENTE	PRIMERA ACTIVIDAD	SEGUNDA ACTIVIDAD	OBSERVACIONES
Actividad de aprendizaje adecuada al contexto y nivel educativo	Toma en consideración el contexto y el nivel educativo al que va dirigido.	Era un problema con contexto real, más adecuado a los estudiantes del grupo de bachillerato, pero también podría interesarles a estudiantes de física.	Desde un inicio se pensó en un problema de contexto puramente matemático, para estudiantes de la licenciatura en matemáticas.	El profesor sí tomó en consideración el tipo de tarea de aprendizaje, dependiendo del tipo de estudiante al cual iría dirigido.
Promueve la extensión del problema.	Actividad donde los estudiantes formulen problemas propios.	Se diseñó con la idea de que los mismos estudiantes pudieran proponer y analizar sus propios casos particulares, además de emprender acciones en grupos.		En la segunda actividad no se consideró, al menos en forma explícita, la extensión del problema por iniciativas individuales de los estudiantes.
Considera las rutas hipotéticas de aprendizaje	Considera las rutas de solución desde el diseño.			En ambos protocolos hizo explícitas las rutas hipotéticas de aprendizaje, y él mismo las ensayó.
Fomenta aprendizaje individual	Diseña actividades que deba realizar el estudiante individualmente	En el protocolo de la actividad se hace explícito las actividades individuales a realizar.	La actividad se diseñó para elaborar una construcción geométrica en forma casi autónoma.	
Fomenta actividades por equipos	Implementa actividades en parejoso pequeños grupos.	En el protocolo se mencionan las actividades a realizar en binas o grupos pequeños.	La discusión sobre los elementos y características de la construcción se diseñaron para realizarse en forma grupal.	

## 5.-Enfoque de resolución de problemas

SUBCATEGORÍA	ACCIONES	PRIMERA ACTIVIDAD	SEGUNDA ACTIVIDAD	OBSERVACIONES
Plantear conjeturas.	Ayuda al estudiante en el planteamiento de conjeturas.			Desde el diseño de las actividades se consideró plantear conjeturas a los estudiantes
Pruebas de hipótesis o conjeturas.	Propone que el estudiante compruebe las conjeturas planteadas.	El estudiante debe demostrar o justificar las condiciones que debe de cumplir un mecanismo de cuatro barras para funcionar como mecanismo de Grashof.  Debe también intentar hacer generalizaciones al respecto.	El estudiante debe identificar y definir los elementos de la cónica construida, en base a la demostración de algunas conjeturas.	
Preguntas-guía	Hace preguntas que guíen las acciones a tomar.	El proceso inquisitivo fue una constante en todo el proceso.	El proceso inquisitivo guió la construcción geométrica, así como la ruta de solución.	Fue el elemento más constante empleado por el docente.
Explicaciones del docente.	Explica cuando es necesario.	Explicaciones tanto para la construcción de los cuadriláteros, como en general del empleo del software.	Explicaciones para la construcción del lugar geométrico, como para definir las propiedades de las cónicas.	
Comunicación de resultados.	Comunica resultados en forma general.	Los estudiantes deben escribir sus observaciones, ideas y conclusiones.  Se propició la actividad de comunicar y compartir información con compañeros de equipo, elaborando, explicando y escribiendo sus ideas.	El protocolo de esta actividad contempla que los estudiantes deben manifestar sus ideas y conjeturas frente al grupo, a modo de generar un proceso de discusión grupal.	



## 6.-Demanda cognitiva de la actividad de instrucción.

SUBCATEGORÍA	ACCIONES DEL DOCENTE	PRIMERA ACTIVIDAD	SEGUNDA ACTIVIDAD	OBSERVACIONES
Considera la demanda cognitiva en el diseño de las tareas.	Establece en forma explícita el nivel de demanda cognitiva a desarrollar dentro de la actividad instruccional.	En el diseño se hace explícito que se desea alcanzar un alto nivel de demanda cognitiva, mediante varias heurísticas propias del enfoque de resolución de problemas.	No resulta explícito en el protocolo de la actividad, sin embargo el tránsito hacia la interpretación algebraica considera este marco conceptual	
Planifica acciones del docente para mantener la demanda cognitiva.	Hace explícitas las acciones de mantenimiento de la demanda cognitiva en su protocolo de la actividad de instrucción.	En tres momentos del diseño identifica acciones a realizar para mantener la demanda cognitiva.	Para mantener el nivel de demanda, propone un proceso inquisitivo con preguntas guía.	

### 4.4. ETAPA DEIMPLEMENTACIÓN DE LAS TAREAS: OBSERVACIÓN DE LAS SESIONES

#### a) Observación de lasesión con estudiantes de una licenciatura en Física: implementación de la primera actividad de instrucción

La primera sesión se llevó a cabo en marzo de 2010 con un grupo de estudiantes de segundo semestre de unaliciencia en física. Primeramente el docente dió las instrucciones generales, así como la bienvenida a la sesión, posteriormente repartió los formatos o guías de la actividad de aprendizaje, a todos los estudiantes. Una de las acciones que el docente llevó a cabo desde el inicio, y durante toda la sesión fue asesorar a los estudiantes en algunos problemas técnicos con respecto al manejo del software. Varios estudiantes presentaron dificultades para realizar sus trazos, y el profesor explicó, en forma general, y luego en casos particulares, cómo utilizar la herramienta compás para el trazo del sistema de barras. Entonces la meta en la primera parte de la actividad, fue que todos los estudiantes pudieran construir uncuadrilátero (de lados 5,7,8 y 13).

Posteriormente se llevó a cabouna retroalimentación, pues todavía algunos estudiantes no habían podido terminar sus trazos. Después que todos hubieronterminado, el docente preguntó al grupo, si todos habían obtenido el mismo cuadrilátero con el objetivo de que se percataran que es posible construir diversos cuadriláteros a partir de las longitudes de sus lados: “....eh...si ya lo hicieron, espero que ya hayan terminado, ahora mi pregunta es... ¿todos obtuvimos el mismo cuadrilátero? Es decir, los que ya lo hicieron... ¿obtuvieron este? ¿Es el mismo, tiene la misma forma? Es más, vean el del compañero de al lado.

*¿Todos obtuvieron el mismo cuadrilátero?.....como que cambia la forma, entonces ¿a qué lo atribuyen ustedes? ¿O qué explicación pueden dar en el sentido de dados los cuatro lados de un cuadrilátero, no todos obtengamos el mismo?”(Apéndice D, líneas 130-148)*

En esta etapa el docente los invita a que contesten el cuestionario que se les proporcionó al inicio de la sesión. En dicho documento pregunta si hay diferencias entre el cuadrilátero que se construyó con el que construyó un compañero, y también a qué atribuyen dichas diferencias. Posteriormente les solicitó construir un segundo cuadrilátero, esta vez con las dimensiones 2, 3, 4 y 11. En esta etapa varios de los estudiantes consiguieron realizar la construcción con mayor rapidez debido a la experiencia previa. En particular dos estudiantes, se percataron que la figura no se podía construir a partir de las condiciones dadas:

*P: muy bien... ¿quién ya tiene el cuadrilátero? ...*

*A: la suma de los otros tres lados....*

*P: de lados 2,3,4 y 11? ¿Quién ya lo construyó?*

*A: oye ve...¿el cuál?*

*P el segundo cuadrilátero...*

*A: no se puede.... no se puede*

*A2: no se puede*

*P: ¿no se puede?*

*A2: no cruza...*

*P: ¿no cierra?*

*A2: no*

*P: pero hace rato tampoco cerraba el anterior....*

*A2: pero es que aquí la suma de los otros tres lados no llega a ser la otra... (Apéndice D, líneas 165-177)*

El profesor consultó con otros de los estudiantes para ver los resultados que obtuvieron. Los estudiantes obtuvieron un resultado parecido al de los estudiantes anteriores. A continuación el docente volvió a cuestionarlos, es decir, a utilizar preguntas para provocar que los estudiantes explicaran la razón de tales resultados. A continuación dió un tiempo para que los estudiantes escribieran sus ideas en el cuestionario escrito que les fue proporcionado al inicio de la clase. Posteriormente el profesor pidió a los estudiantes compartir sus observaciones con el resto de sus compañeros del grupo, intentando enriquecer las concepciones de los estudiantes respecto del problema:

*P: ... nos puedes decir lo que hace rato me comentaste, nos puedes decir en voz alta ¿por qué te diste cuenta que el cuadrilátero anterior no se iba a poder construir?*

*A4: bueno, eso era parte de la pregunta ¿no? ¿Qué criterios puedes seguir para que dados los lados de un cuadrilátero puedas decir si su construcción es posible o no... esto es porque si sumamos las longitudes de tres de los lados, esta suma debe de ser mayor al cuarto lado, porque si queda igual entonces quedaría sobrepuesto y entonces sería una línea recta ¿no? Entonces la suma de tres debe ser mayor a la cuarta... (Apéndice D, líneas 216-222)*

Posteriormente, el docente trasladó la construcción de estas figuras geométricas a otro contexto, que es el de construcciones sólidas con barras rígidas unidas mediante pernos,

formando mecanismos articulados de cuatro barras. Así mismo, solicitó a los estudiantes que leyeran un texto incluido en las hojas de trabajo sobre el principio de Grashof, que establece las condiciones para que en un mecanismo de cuatro barras rígidas, una de las barras pueda dar giros completos. En seguida, el docente construyó un cuadrilátero y ejemplificó el uso de la herramienta de animación, para poder corroborar rápidamente si un cuadrilátero de dimensiones dadas funciona como un mecanismo de Grashof. A partir de aquí, el docente planteó una extensión del problema, que es una de las estrategias sugeridas cuando se trabaja bajo el enfoque de resolución de problemas.

La actividad consistió en que los estudiantes construyeran un cuadrilátero de diversas medidas, y después experimentar bajo qué condiciones el cuadrilátero funcionaba como un mecanismo Grashof. La intención del profesor era potenciar el uso del software dinámico para realizar pruebas de conjeturas y analizar casos particulares. Se proporcionó algún tiempo para que pudieran experimentar con el software, durante este lapso se acercó a varios estudiantes para revisar con ellos sus construcciones, ayudándoles en casos donde presentaron problemas para terminarlas, y en otros casos para contestar alguna duda o verificar algún resultado. Transcurridos unos minutos, volvió a cuestionar a los estudiantes sobre el criterio o condiciones bajo las cuales un mecanismo articulado de cuatro barras puede funcionar como mecanismo de Grashof.

Posteriormente el profesor utilizó un video para ejemplificar la aplicación de un mecanismo de Grashof como manivela, o acoplado a un motor. Este recurso didáctico persigue que obtengan una idea de la importancia y el contexto dentro del cual se está enmarcando el problema abordado. Así mismo explicó los elementos que conforman un mecanismo de barras articulado que sigue el principio mencionado. Pidió a los estudiantes, que observando la construcción que cada uno realizó, trataran de conjeturar de qué factores dependía que una de las barras del mecanismo articulado pudiera dar un giro completo. Luego el profesor organizó a los estudiantes en parejas para que analizaran otros dos casos particulares. La tarea consistió en discutir con sus pares sobre el caso particular en que los cuadriláteros tienen lados iguales. Luego analizaron otros dos casos: cuando se tienen dos pares de barras iguales, y cuando las longitudes de las cuatro barras son distintas. La idea principal fue que los estudiantes discutieran las condiciones generales que debían satisfacer las cuatro barras para que pudieran considerarse un mecanismo de Grashof. De este modo, lo que se pretendió es que plantearan conjeturas. Algunos diálogos interesantes en esta parte se muestran a continuación:

*A1: miden... completas éstas... deben de medir cinco ... nueve, exactamente para que no se rompa, estamos de acuerdo, esta la puedes hacer así, de nueve, entonces como esta al girar va a medir la dimensión de estas tres juntas.....no se va a romper. (Apéndice D, líneas 508-510)*

*A1,A2: no, no, no, no, pero por ejemplo si mueves este... este segmento...*

*A1, A2: pero para que esta cosa sea de Grashof...*

*A3: la suma de estos tres debe ser mayor a esta... (Apéndice D, párrafos 519-521)*

O este otro diálogo, en el cual se muestra que el proceso inquisitivo del docente promovió que los estudiantes traten de probar sus conjeturas:

*A4: la barra conectora tiene que ser mayor que la manivela y el soporte...*

A5: *sí... o iguales.*

A4: *sí...*

A5: *a ver, si los hago que sean iguales...entonces...esta vamos a ponerle 2...y esta la voy a dejar en seis...esta en cuatro y esta en tres..... y ve....*

A5: *la suma del que está fijo y de la manivela, la suma de esas longitudes debe ser menor o igual que...no.... mayor o igual que la suma de los otros dos...*

A4: *menor...*

A5: *debe ser menor o igual... por eso*

A4: *te estaba diciendo...*

Durante 5 minutos el docente permitió que se desarrollara este proceso de discusión en pequeños grupos, con la finalidad de que escribieran una conclusión. Al término de este tiempo, el docente revisó algunas de las construcciones de los estudiantes, asesorándolos cuando tuvieron algunos errores de construcción, o bien para comentar con ellos algunas de sus ideas. En el caso particular del par de alumnos A1 y A2, comentó el caso del cuadrilátero de dimensiones 5,5, 4 y 9, pues ellos se dieron cuenta que si cambiaban la selección de cuál era la barra fija y cuál la barra acopladora, se presentaban diferencias en cuanto a si funcionaba como un mecanismo de Grashof o no.

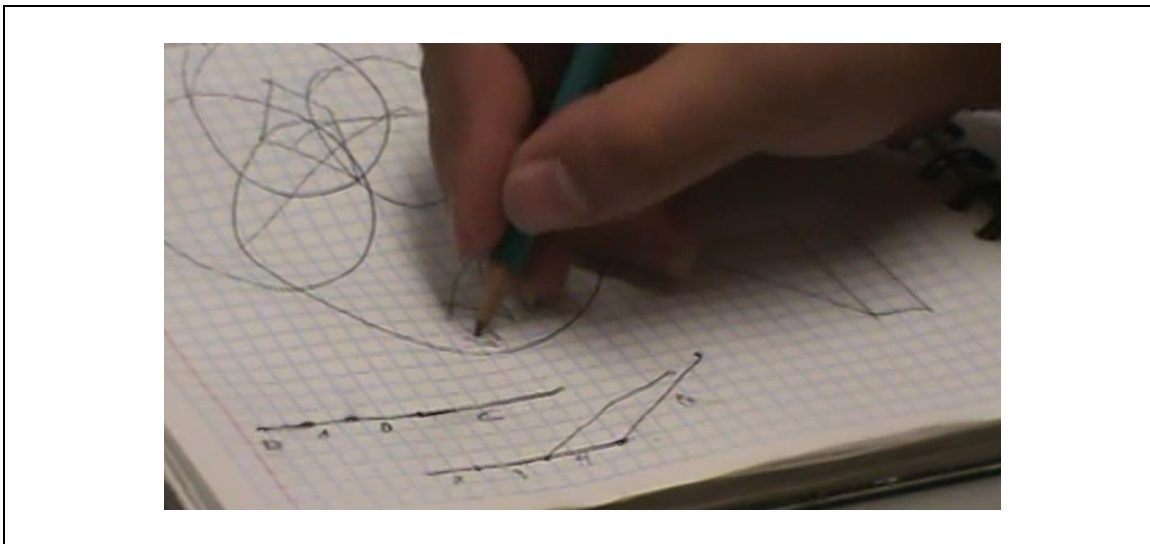


Figura9. Estudiantes A1 y A2 discuten el cuadrilátero de dimensiones 5,5,4 y 9.

Posteriormente, el docente realizó una retroalimentación de los dos casos particulares que se encontraban analizando los estudiantes, el primero de ellos con dos pares de barras iguales. Después de la retroalimentación, estimuló a los estudiantes para que analizaran, igualmente en parejas o equipos, el tercer caso particular, donde ya se proporcionan de antemano ciertas medidas. Les solicitó construir el cuadrilátero, explorar los resultados obtenidos y discutir en equipo. Para finalizar proporcionó un tiempo para que completaran el cuestionario. A continuación el docente llevó a cabo otra retroalimentación de los casos particulares estudiados. Comparó los casos donde el mecanismo lograba hacer giros completos, y aquellos donde las barras se plegaban formando una línea recta, discutiendo acerca de las características de cada caso. Se compararon todas las construcciones que se habían hecho, encontrando que también los ángulos que se forman entre las barras

acopladora y balancín (también llamada barra de salida, que es la que hace el trabajo) son importantes, o tienen algo que ver con el hecho de que no funcionen como mecanismos de Grashof, en el caso que el ángulo sea muy abierto (ver figura 10). Entonces planteó al grupo tratar de encontrar qué relación puede existir entre las longitudes de los lados del cuadrilátero y dicho ángulo, y cómo se relaciona con el hecho de que el mecanismo funcione o no como mecanismo de Grashof.

El profesor también centró el interés de los estudiantes en las dimensiones de los lados del cuadrilátero. Específicamente en el cuadrilátero de lados 2, 5, 7 y 4, donde las barras tienen la siguiente disposición: la base (7), la manivela (2), la acopladora 5 y el balancín 4. Entonces la suma de la base y la manivela resulta ser igual a la suma de las otras dos barras. Les pregunta ¿qué sucede en este caso particular? Les solicita escribir las ideas que ya tienen, pero tratando de dar una razón o justificación matemática, empleando argumentos de geometría o incluso de trigonometría. El docente proporciona unos cinco minutos aproximadamente para que los estudiantes escriban sus ideas.

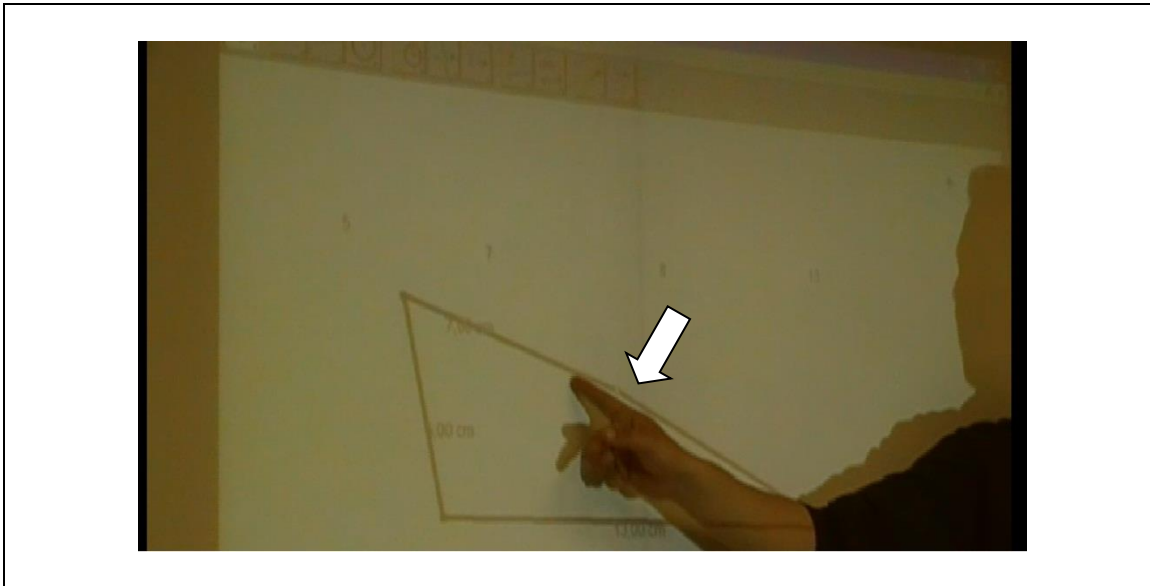


Figura10. A partir de cierta medida del ángulo, el cuadrilátero no puede mantenerse.

Al final de la sesión, un estudiante propone una idea, y el docente decide compartirla con toda la clase. Si el ángulo entre las barras acopladoras y el balancín llega a  $180^\circ$ , entonces pueden suceder dos cosas: que el mecanismo no funcione, o que las cuatro barras se superpongan formando una línea recta. La cuestión que surge es ¿qué relaciones pueden existir entre las longitudes de los lados del cuadrilátero y el ángulo entre la barra acopladora y balancín? (ver figura11).

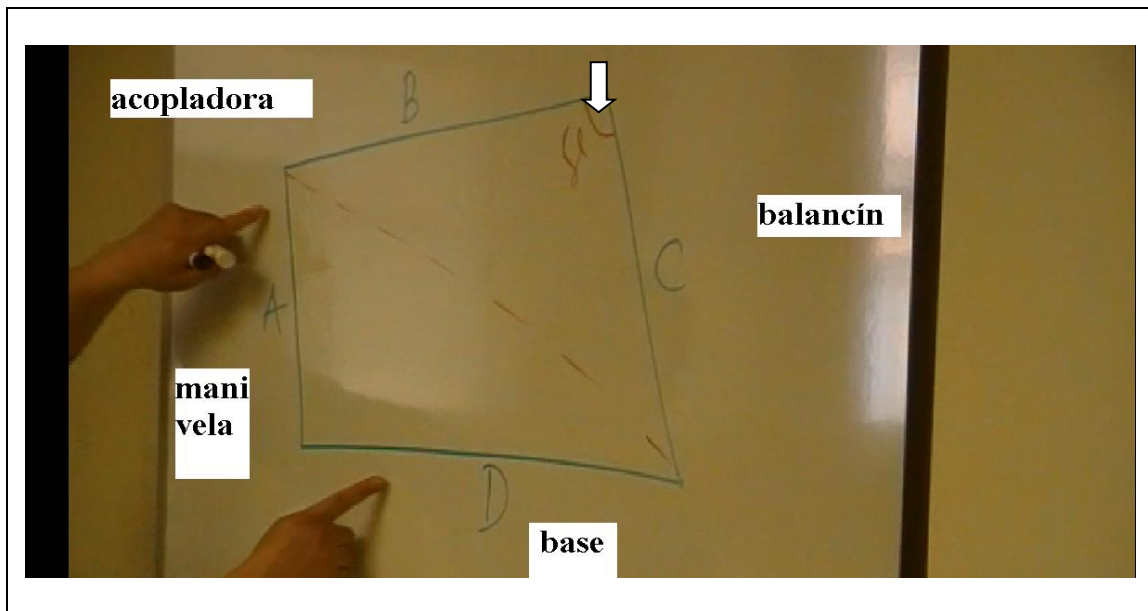


Figura. 11. Representación de un mecanismo, la flecha indica el ángulo formado entre las barras acopladora y balancín.

El profesor estimuló a los estudiantes para que proporcionaran ideas acerca de las relaciones que se presentan entre los lados y los ángulos de la figura, incluso trazó una diagonal que divide a la construcción en dos triángulos, siguiendo la sugerencia de un estudiante. En conjunto con los estudiantes, se discutió cómo se podría conocer el valor del ángulo mencionado, que en el contexto de los mecanismos articulados se conoce como ángulo de transmisión, y que de hecho sólo puede tomar ciertos valores para que un mecanismo funcione en forma eficiente. Se concluyó que, con base en las dimensiones de las barras, y utilizando la ley de cosenos, se podía obtener una expresión para determinar el valor del ángulo buscado. En este caso, el docente intentó introducir a sus estudiantes a otro registro de representación para este problema, implicando ahora elementos algebraicos y trigonométricos. La sesión terminó con la discusión de que mediante el empleo de la ley de cosenos era posible determinar el ángulo para que un mecanismo de cuatro barras articuladas funcione como mecanismo de Grashof.

#### **b) Observación de una sesión con estudiantes de bachillerato: implementación de la primera actividad de instrucción**

El trabajo con los estudiantes del CCH se distribuyó en dos sesiones, que se llevaron a cabo en el mes de abril de 2010. Los estudiantes de este grupo tenían algunas experiencias en el manejo del software Cabri. La sesión comenzó con una presentación del profesor, sobre el objetivo de la actividad, y de la confidencialidad de los datos que se recolectarían.

A continuación explicó detalladamente cómo trazar el primer cuadrilátero con las condiciones indicadas, pero durante la construcción del mismo, planteó algunas preguntas, considerando que los estudiantes de este grupo ya tenían experiencias previas en el manejo del software. Una vez que los estudiantes terminaron y/o corrigieron su construcción, el docente formula una pregunta general:

*P: ¿tuvieron alguna dificultad? Si tuvieron alguna dificultad para hacerlo, me gustaría... ahí tienen estas hojas individualmente, y ahí escriban si tuvieron dificultades o no, y luego que hagamos lo que dice, comparen el cuadrilátero que construyeron, con el de sus compañeros más cercanos, y la pregunta es si existen diferencias... ¿hay sus diferencias o todos construyeron lo mismo?*

*A: síii*

*P: había diferencias... ¿qué tipo de diferencias había?*

*A: en la forma (Apéndice D, líneas 1065-1088)*

Varios estudiantes constataron inmediatamente que los cuadriláteros de sus compañeros eran distintos a los suyos. El docente solicitó a los estudiantes escribir una razón de por qué creían que eran distintos los cuadriláteros. Algunos estudiantes mencionaron que eran distintos por el orden en que se construyeron los lados y también porque los ángulos internos del cuadrilátero resultaron diferentes en cada construcción. Las opiniones de los estudiantes se encontraban divididas, pues algunos afirmaron que sí obtuvieron la misma figura trazada por el profesor en la pizarra.

*P:.... ¿quiénes siguieron ese mismo orden y dicen que sí obtuvieron el mismo cuadrilátero que yo? ... ¿en verdad tiene las mismas medidas?*

*A: no*

*P: ahh, entonces varía, a ti ese ángulo que a mí me da 98.4 te da 96.5... a ver a ti ese ángulo que a mí me dio de 74.2 a ti te da de 89.5... oigan, entonces en general no obtuvimos el mismo cuadrilátero...*

*A: no (Apendice D, líneas 1114-1119)*

La segunda construcción solicitada por el docente consistió en el cuadrilátero de lados 2,3,4 y 11. Es interesante constatar que un estudiante, casi de manera inmediata, argumenta que no puede completarse la figura solicitada:

*P: ...pasen ahora sí al inciso b y construyan el cuadrilátero de lados 2 ,3 ,4 y 11 por favor...*

*A: no se puede*

*P: ¿no se puede?... 1124...Ahh... bueno te dejo que lo pienses bien... sí, vamos a dar la oportunidad de que todos lo intenten, algunos lo hicieron... ¿qué pasó?*

*A: yo digo que no se puede porque 2,3, y 4 en su suma tan solo, ¡ay se me fue! son siete, no, son nueve y tenemos 11 centímetros, entonces por eso no se puede...*

*P: oh...entonces...*

*A: tiene que ser más*

*P: bueno entonces mi pregunta es ¿primero lo intentaste o te diste cuenta de eso?...*

*A: al sumarlo (Apéndice D, líneas 1122-1137)*

El docente continuó formulando preguntas que favorecieran el proceso de discusión:

*P: pero tal vez se logre, y que tal que cambio el orden porque, ¿cuál quisiste hacer primero?*

*A: pero no se puede.*

*AH: pero no se puede, siempre va a quedar...va a tener que dar aunque sea 11 para que se pueda. (Apéndice D, líneas 1148-1150)*

Entonces, una vez que otros estudiantes se percataron también de la imposibilidad de construir el cuadrilátero solicitado, intervienen en el diálogo, impulsados por una cuestión que planteó el profesor.

*P: ¿quién me dice la razón por la que no se puede construir? A ver*

*AI: la suma de los tres lados menores tiene que ser mayor al del más grande ¿no?*

*P: la suma de los tres lados menores tiene que ser mayor al del más grande, nos dicen acá... o ¿alguien encuentra otra razón?*

*AJ: no, nadamás que no deben ser a fuerza los menores, con cualquiera de los otros tres*

*P: sí, sí, te escucho*

*AJ: cualquiera debe, es que como ya...*

*P: entonces no importa que agarre yo los tres menores, simplemente agarro tres y los sumo...no tienen que ser los tres menores, es lo que entendí*

*AJ: pero deben de sumar menos que el cuarto lado (Apéndice D, líneas 1164-1173)*

Los estudiantes AI y AJ tenían ya una idea más clara acerca de qué relaciones se debían cumplir con respecto a las dimensiones de los lados, para que pudiera contruirse el cuadrilátero. El profesor estimuló a los mismos estudiantes, para que relacionaran este hallazgo con sus conocimientos y/o experiencias previos, y pusieran en juego otros conocimientos:

*P: ok, bueno, oigan ¿esto les recuerda algo que a lo mejor ya sabían? Hace rato escuché que a tí en particular te recordó...*

*A: los triángulos*

*P: ¿tú ya conocías algo sobre los triángulos? ¿Qué es lo que sabías?*

*A: pues es que es igual con el compás, la suma de los dos lados menores tiene que ser más grande a la mayor, y...*

*P: ¿si se acuerdan los demás que hay algo parecido para los triángulos? ¿No? A ver ¿puedes otra vez repetirnos en voz alta? vamos a escuchar lo que dice su compañero, tú te acordaste de algo sobre los triángulos que ya sabías ¿quéera?*

*A: que la suma de los dos lados menores tiene que ser más grande a la del lado mayor*

*P: si eso no es así, ¿qué pasa cuando lo quieres construir?*

*A: no se intersecta (Apéndice D, líneas 1174-1184)*

El profesor pidió a los estudiantes que reflexionaran acerca de este hallazgo o relación entre las longitudes de los lados. Esta discusión permitió preguntar a los estudiantes acerca de un principio parecido en la construcción de los triángulos en general, y algunos estudiantes recordaron la desigualdad del triángulo. También les solicitaron responder a la pregunta que se refería a las diferencias entre el cuadrilátero de ese caso (que no se pudo completar) y el cuadrilátero del primer caso.

La siguiente tarea consistió en un cuadrilátero de 5 centímetros de lado. Varios estudiantes se percataron rápidamente, aún sin construirlo, que sí era posible esa construcción, entonces el docente les planteó escribir en forma individual las razones o criterios a considerar para sabersi es posible la construcción de un cuadrilátero, dadas previamente las medidas de sus lados. Sin embargo, al construir la figura todos se percataron que se podían obtener diferentes cuadriláteros considerando la misma longitud. Concluyeron que las longitudes de los lados, aún cumpliendo con el criterio de la desigualdad, no resultaban suficientes para



definir totalmente a un cuadrilátero. En base a esta discusión grupal, el docente planteó la pregunta de si, dadas las longitudes de los lados de un cuadrilátero, es posible decidir si se puede lograr su construcción.

En la etapa siguiente, introdujo a los estudiantes a la noción de los mecanismos articulados de cuatro barras, así como algunas de sus aplicaciones. Para ello se apoyó en el material escrito que se les entregó al inicio de la sesión. En esta parte es donde les pidió leer una sección del material impreso que les había sido entregado al inicio de la sesión, donde se describían las características de los mecanismos articulados de cuatro barras (mecanismos de Grashof), y sus aplicaciones en la cinemática. Esta acción revistió importancia, pues pretendía mantener el interés del estudiante, pues ahora se les presentaba como parte de un contexto más real.

La segunda tarea consistió en solicitar a los estudiantes que construyeran un cuadrilátero que funcionara como un mecanismo tipo Grashof, esto es, que una de las barras pudiese dar giros completos. En esta parte el profesor brindó asesoría en forma particular a varios estudiantes que así lo requirieron, hasta que la mayoría pudo proponer un cuadrilátero que cumpliera con las condiciones establecidas. El docente realizó entonces una pausa en la actividad para poder abordar algunos ejemplos de mecanismos donde se puede utilizar el principio de Grashof, apoyándose en un video que proyectó en la pantalla, cuestionando a los estudiantes en qué otros casos se tendrían mecanismos similares. Los estudiantes mencionan entonces diferentes tipos de mecanismos como los engranes de una bicicleta o de un ferrocarril, y grupalmente llegan a la conclusión que un mecanismo articulado de tipo Grashof puede servir en general para proporcionar distintos tipos de movimiento de la barra ejecutora, si se acopla a un motor.

En el siguiente momento de la sesión, el docente les solicita volver a escribir sus reflexiones a otra pregunta, en este caso, de qué depende que una de las barras pueda dar vueltas, es decir, de qué depende que un mecanismo pueda funcionar o no como uno de tipo Grashof. A continuación les solicita formar equipo con el compañero más próximo para continuar resolviendo la actividad:

*“...lo importante es que a partir de ahora en adelante todo lo trabajen en equipo, de por sí han estado comentando, pero ahora entre dos o tres personas van a tratar de darle solución a lo que sigue, van a tratar de dar razones de por qué a veces funciona y a veces no.....”*

*“...entonces si seguimos la actividad muchachos, ahora dice, para tratar de entender qué está pasando, por qué algunos cuadriláteros trabajan como mecanismos tipo grashof, y otros no.....”(Apéndice D, líneas 1555-1559).*

Para poder dar respuesta les propone analizar un segundo caso particular, cuando hay dos parejas de lados iguales. *P: ahora su objetivo muchachos, es construir un cuadrilátero donde dos lados sean iguales, y los otros dos también sean iguales, pero distintos entre sí, y verificamos si eso nos da un mecanismo tipo Grashof*(Apéndice D, líneas 1613-1614).

Este caso se trabajó en dos formas: primero se analizó la construcción de cuadriláteros formados por dos pares de lados iguales, colocados en forma alterna, es decir, siguiendo un

orden A-A-B-B, y también el caso dónde se posicionaron de forma alternada, esto es A-B-A-B (figura 12).

*“...entonces esta actividad, este caso particular, a ustedes se les está pidiendo que analicen cuando tienen mecanismos de este tipo, con sólo dos medidas distintas,  $A=B$  y  $C=D$  y vamos a ver qué pasa, cómo funciona ese mecanismo, como pudiera ser otro caso ¿no?  $A=C$  y  $B=D$ , entonces qué les parece si entonces ustedes proponen dos medidas distintas, y construyen mecanismos de cuatro barras y los tratan de hacer funcionar...”*(Apéndice D, líneas 1740-1743).

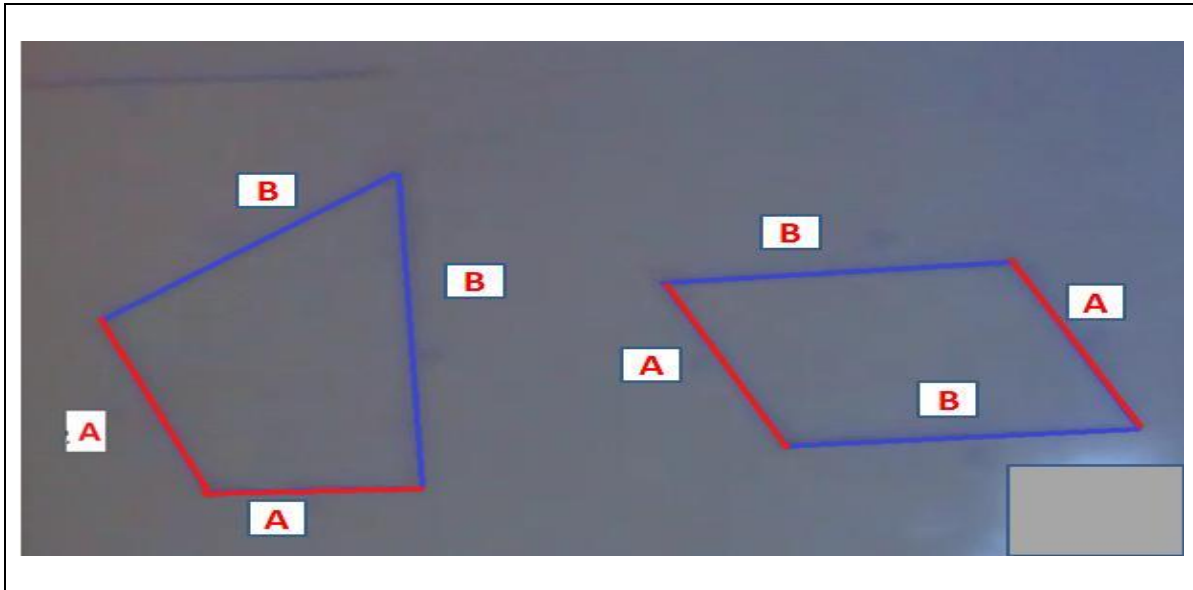


Figura 12. Caso de los cuadriláteros construidos con dos pares de lados iguales.

El profesor puso énfasis en el planteamiento de preguntas que guiaran las acciones del estudiante, proponiendo no solamente las instrucciones que debía ejecutar, sino cuál era la meta y la manera de lograrla:

*“...esto me gustaría que lo trabajen y lo comenten entre dos o entre tres personas, ¿qué es lo que estamos buscando? Estamos tratando de encontrar un criterio o una condición con la cual yo sepa en qué casos un mecanismo si pueda funcionar como de Gashof, y en qué casos no...”*(Apéndice D, líneas 1744-1746).

También utilizó el proceso inquisitivo para poder conseguir que los estudiantes, una vez que habían terminado sus construcciones y verificado si funcionaban o no como mecanismos tipo Grashof, pudieran esgrimir razones o justificaciones que explicaran sus resultados (ver nuevamente figs.11 y 12): *“...¿cuál es la diferencia entre los mecanismos? Parece que uno sí funciona y otro no, a ver, ¿alguien concluye o alguien tiene una idea sobre qué pasa acá o cuál es la diferencia entre este y ese?...”*(Apéndice D, líneas 1856-1858).

Algunas de las ideas que se discutieron con los estudiantes fueron el paralelismo de los lados opuestos (sobre todo en el cuadrilátero formado por dos pares de lados iguales

opuestos), así como los ángulos internos formados en cada una de las construcciones, este diálogo se presentó cuando el docente les solicitó justificar por qué en un caso el cuadrilátero parecía funcionar correctamente como mecanismo Grashof, y en el otro caso no. Posteriormente les enseñó cómo utilizar el software para verificar, mediante las herramientas de medida, algunas de las suposiciones hechas acerca de los ángulos y las condiciones de paralelismo entre sus lados opuestos, en la búsqueda de razones o justificaciones para definir criterios de funcionamiento de los cuadriláteros como mecanismos tipo Grashof.

*“...el software nos está diciendo que cuando las barras opuestas son iguales, los lados opuestos son paralelos, me gustaría que traten de dar una razón de eso, porque el que el software lo diga y que alguien de ustedes lo haya supuesto, no quiere decir que sea una razón, o sobretodo habría que conocer cuál es la razón o cuál es la justificación de que los lados son paralelos, entonces trabajen, como les dije, trabajen en parejas o en tercias y traten de justificar, traten de dar alguna razón, algún argumento del por qué éstos lados siempre son paralelos...”*(Apéndice D, líneas 1897-1901).

El proceso inquisitivo que promovió el profesor tuvo resultados después de varios minutos de discusión, cuando una estudiante relacionó la figura del cuadrilátero con un sistema de rectas paralelas cortadas con una secante, considerando que el sistema bajo estudio podía ser explicado en forma análoga al sistema paralelas-secante mencionado. Esto permitió que la discusión girara hacia la importancia de que un cuadrilátero fuera un paralelogramo como uno de los casos particulares en que un cuadrilátero puede funcionar correctamente como un mecanismo articulado.

Por último, propone a sus estudiantes la realización de una tercera actividad, consistente en construir cuadriláteros con lados de distintas medidas, comenzando por el caso particular donde lo que deben ser iguales son las sumas de dos lados:

*“...el caso 3 que está ya en la tercer hoja, dice que exploremos un caso en el que  $A+B$  sea igual a  $C+D$ , es decir ahora ya no tienen que ser iguales las barras, lo que tienen que ser iguales son las sumas de las longitudes, de hecho ahí nos da un caso muy particular que me gustaría que construyan, un caso muy particular en el que la barra  $A$  mide 2, la  $B$  mide 7, la  $C$  mide 4 y la  $D$  mide 5. Por favor construyan ese caso, el caso en el que la barra  $A$  mide 2,  $B$  mide 7,  $C$  mide 4 y  $D$  mide 5”*(Apéndice D, líneas 2126-2130).

La figura 13 muestra las dos figuras que se construyeron para el análisis del caso tres. La de la izquierda tiene las medidas 2-7-4-5 (identificadas en el sentido de las manecillas del reloj), de modo que la suma de los dos primeros lados equivale a la suma de los dos últimos lados. La figura de la derecha se construyó alterando el orden de los lados, de modo que la condición de las sumas ya no se cumple. En general se obtuvo como resultado que el primer cuadrilátero sí cubre los requisitos para ser mecanismo tipo Grashof y el segundo no. Podría pensarse, y de hecho así se discutió durante la sesión, que la condición de las sumas de dos pares de lados podría siempre llevar a un cuadrilátero a funcionar correctamente como un mecanismo tipo Grashof; sin embargo, una estudiante halló un ejemplo que contradecía esa hipótesis.

La sugerencia de la estudiante fue el cuadrilátero 12-6-9-9. Dónde halló ciertas particularidades, que compartió con sus compañeros y el profesor. El docente solicitó que los demás estudiantes también abordaran esta construcción en particular: “...ok construyan éste, a ver por favor todos construyan ese mecanismo, 12-6-9-9 y me dicen si funciona con 12-6-9-9, se sigue cumpliendo la condición de que la suma de dos barras, en este caso 12 y 6 dieciocho, sea igual a la suma de otras dos barras, que es nueve y nueve dieciocho, sin embargo hay dos formas de hacerlo...” (Apéndice D, líneas 2171-2173).

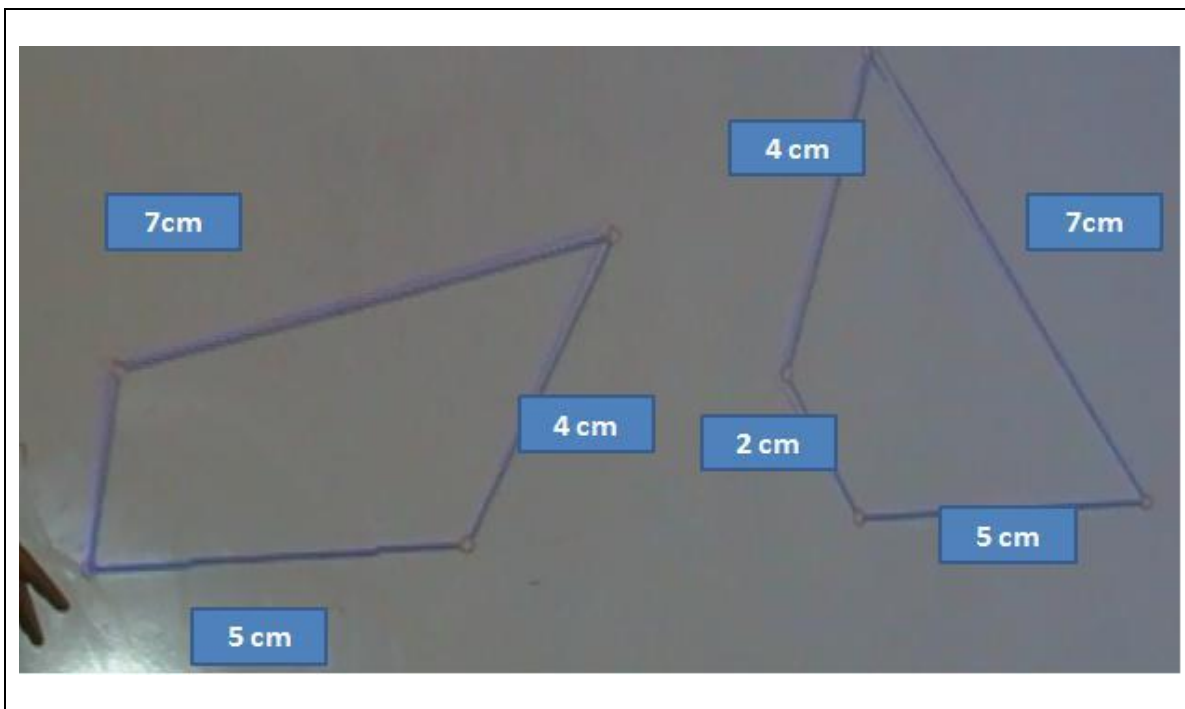


Figura 13: La suma de dos lados es igual a la suma de los otros dos.

Se exploraron para este ejemplo, dos formas diferentes de construirlo, la 12-6-9-9 y la 6-12-9-9, cumpliendo ambas la condición característica referente a la igualdad de las sumas de dos pares de lados, encontrándose que el primer ejemplo funcionaba perfectamente, no así el segundo. Para concluir con este ejercicio les solicitó escribir las razones que pueden explicar los hallazgos.

Hacia la última parte de la sesión, el profesor propuso una actividad consistente en analizar el caso de un cuadrilátero en el que las cuatro barras eran de diferente medida, no existía paralelismo entre sus lados opuestos, y tampoco se daba la relación de suma de ángulos vista en el caso anterior, y sin embargo el cuadrilátero funcionaba como mecanismo articulado, además de que nunca se presentaban complicaciones, como el arrastre de los demás lados o la superposición de barras, como sucedió en algunos de los casos analizados con anterioridad. El profesor pidió a los estudiantes discutir en grupos pequeños todas las condiciones de los casos particulares analizados y compararlas con éste último caso: “...la última etapa es que ustedes, y van a tener algunos minutos, como diez nadamás, para que en grupos de dos o tres personas, discutan todo lo que se ha estado viendo, todo lo que crean, y traten de escribir cuál es la regla a seguir para que dados cuatro segmentos o cuatro longitudes, el mecanismo funcione...” (Apéndice D, líneas 2242-2244).

**c) Observación de una sesión con estudiantes de licenciatura en matemáticas, implementación de la segunda actividad de instrucción**

En la tercera sesión el docente utilizó una actividad planificada para desarrollarse con cabri, sin embargo finalmente se decidió utilizar Geogebra, aprovechando la experiencia de los estudiantes con esta herramienta. Este cambio no alteró el desarrollo de la actividad. En esta ocasión se desarrolló una actividad de aprendizaje diseñada con la intención de documentar el proceso de tránsito entre diferentes representaciones al resolver un problema. El grupo de 15 estudiantes cursaba la materia de Computación y Matemáticas, en una licenciatura en matemáticas, y como lo mencionamos anteriormente, ya tenían experiencia en el uso de GeoGebra, así como algunas de las bases consideradas como requisitos de conocimientos previos (ver anexo B).

Una parte importante de la actividad desarrollada por el profesor consistió en brindar asesoría a los estudiantes que tuvieron dudas con respecto al empleo de algunos comandos, por ejemplo, para trazar una mediatriz, o renombrar los puntos de interés de una construcción. Lo anterior debido a que Geogebra asigna de forma automática una letra consecutiva a cada punto que se construye, por lo que se hizo necesario uniformar los nombres asignados a cada uno de los elementos de la construcción.

Una vez que todos los estudiantes tuvieron lista su construcción, se les solicitó que movieran el punto C y observaran atentamente lo que sucedía con algunos de los elementos. En ese momento inició el proceso inquisitivo: “...*pasemos a la pregunta...dice, qué lugar geométrico describe el punto P cuando se mueve C, entonces algo que ustedes ya experimentaron es que al moverse C a todo lo largo de la mediatriz de AB, y si ustedes notan pues el punto P también va cambiando de posición, también se va moviendo* (Apéndice D, líneas 2416-2418).

El docente les enseñó a utilizar el comando traza, para que pudieran observar cuál es la trayectoria que describe el punto P al desplazar C, “...*pregunta; ¿qué lugar geométrico está describiendo ese punto?... ¿qué creen ustedes y qué sugieren ustedes qué es ese lugar geométrico? ¿Alguien tiene una idea que proponer? Si no tienen una idea, tal vez después de la figura viene la pregunta, y la pregunta es ¿qué entendemos por lugar geométrico? Nos están haciendo una pregunta sobre eso, el lugar geométrico que describe un punto... ¿Qué creen ustedes que sea ese lugar geométrico que acaban de dibujar? ¿alguien tiene una idea, una suposición?*

A: *es una elipse... ¿No?*(Apéndice D, líneas 2421-2429).

Entonces cuestionó al estudiante por qué razón pensaba que se trataba de una elipse, y si era así ¿qué elementos caracterizan al lugar geométrico conocido como elipse? El diálogo que se generó es el siguiente:

P: *En particular ¿tú por qué crees que sea una elipse?*

A: *por el dibujo...*

P: *ahhh ok, por el dibujo que estás viendo...entonces tú te estás guiando en la forma, y supones que es el de un lugar geométrico que tú has escuchado que es elipse... ¿Alguien tiene otra suposición?*

*A23: una parábola...*

*P: acá dicen que es una parábola, ¿tú por qué crees que es una parábola?*

*A23: porque siento que no se va a unir hasta acá...no va a formar una elipse completa(Apéndice D, líneas 2438-2445).*

El profesor cuestionó por qué estaban tratando de identificar el lugar geométrico solamente guiándose por la forma que tiene el trazo o trayectoria marcados por el punto en cuestión, y si conocían otros lugares geométricos, un estudiante pone como ejemplo al círculo.

*P: ¿cómo definirías una circunferencia?*

*A15: es el cuadrado...la sumatoria del cuadrado del...igual al radio al cuadrado.... bueno  $x$  al cuadrado más  $y$  al cuadrado igual al radio al cuadrado(Apéndice D, líneas 2456-2459).*

Esta circunstancia fue aprovechada por el docente para orientar la discusión hacia la dirección que él deseaba, pues les hizo notar a los estudiantes que en la respuesta anterior ya no se estaba pensando sólo en la forma de la figura, sino en una condición, en términos de distancia, que satisficieran los puntos del lugar geométrico. Y que por lo tanto para el caso de cualquier otro lugar geométrico, como la parábola o la elipse, era necesario verificar condiciones similares.

El docente retomó la idea de ecuación de una circunferencia propuesta e invitó a todos los estudiantes a pensar cómo podrían obtener o conocer la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto P. Los estudiantes se percataron que era necesario reelaborar la construcción, considerando ahora un plano cartesiano que sirviera como sistema de referencia que permitiera determinar las coordenadas de algunos puntos clave en esta construcción, como son los puntos C y P.

El profesor sugirió que a uno de los extremos del segmento AB se le asignaran las coordenadas (0,0) y que el segmento AB se colocara sobre alguno de los ejes, para simplificar los cálculos algebraicos. Una vez que los estudiantes terminaron la construcción, el profesor preguntó nuevamente acerca de la traza o trayectoria dejada por el punto P.

*P: el lugar geométrico que se está formando, está siendo generado por el cruce de dos rectas, es algo que no hay que perder de vista, porque yo tengo información al respecto de cómo se genera ese lugar, se genera al cruzarse esas dos rectas, y además tengo información sobre esas rectas(Apéndice D, líneas 2547-2550).*

Les hizo ver que para poder definir la ecuación de dicho lugar, habría que conocer las coordenadas del punto P, y que tales coordenadas estaban determinadas por las dos rectas que se intersecan. A partir de allí algunos estudiantes comenzaron a participar más activamente, proponiendo algunas conjeturas respecto a las condiciones que serían necesarias para conocer la ecuación de una recta en general, y manifestaron necesitar de dos puntos, o bien de la pendiente y un punto por el que pase la recta en cuestión. Otro estudiante llamó la atención en el hecho de que en realidad, conforme C y P se mueven, se están obteniendo varias rectas:

*P: Supongan que ya tienen...por ejemplo supongan que ya conocen la ecuación de esta recta y supongan que ya también conocen la ecuación de esta otra, si ya tienen ambas ecuaciones las podrían resolver de forma simultánea, ¿qué obtendrían?*

*A11: la intersección*

*P: obtendrían la intersección, y la intersección es el punto que a mí me interesa, porque esa intersección es el punto que genera el lugar geométrico*

*A11: pero entonces esa es una familia de rectas ¿no? que se intersecan (Apéndice D, líneas 2568-2574).*

A partir de este momento se desarrolló un proceso de discusión grupal. El docente trata de involucrar a todos los estudiantes para que encuentren las ecuaciones de ambas rectas. En forma colectiva lograron determinar primero la ecuación de la recta perpendicular al punto C, ya que además la recta, bajo el nuevo contexto del plano cartesiano, queda en posición horizontal, paralela al eje x, lo que facilita hallar una expresión adecuada para ella. Para comprender mejor el trabajo que se estaba desarrollando, la figura 14 muestra la misma construcción, pero ubicada en un sistema de coordenadas:

En el caso de la mediatriz del segmento BC, se tornó más difícil, sin embargo los estudiantes se dieron cuenta que podía hacerse de forma indirecta, partiendo de que es más sencillo definir una ecuación para el segmento BC primeramente, y considerando las propiedades de una mediatriz, definir entonces su ecuación, dado que es una recta perpendicular a la primera. Una vez calculada la pendiente de la mediatriz al segmento BC, quedaba ahora determinar las coordenadas de algún punto por el que pasen todas las rectas generadas al moverse dicha mediatriz.

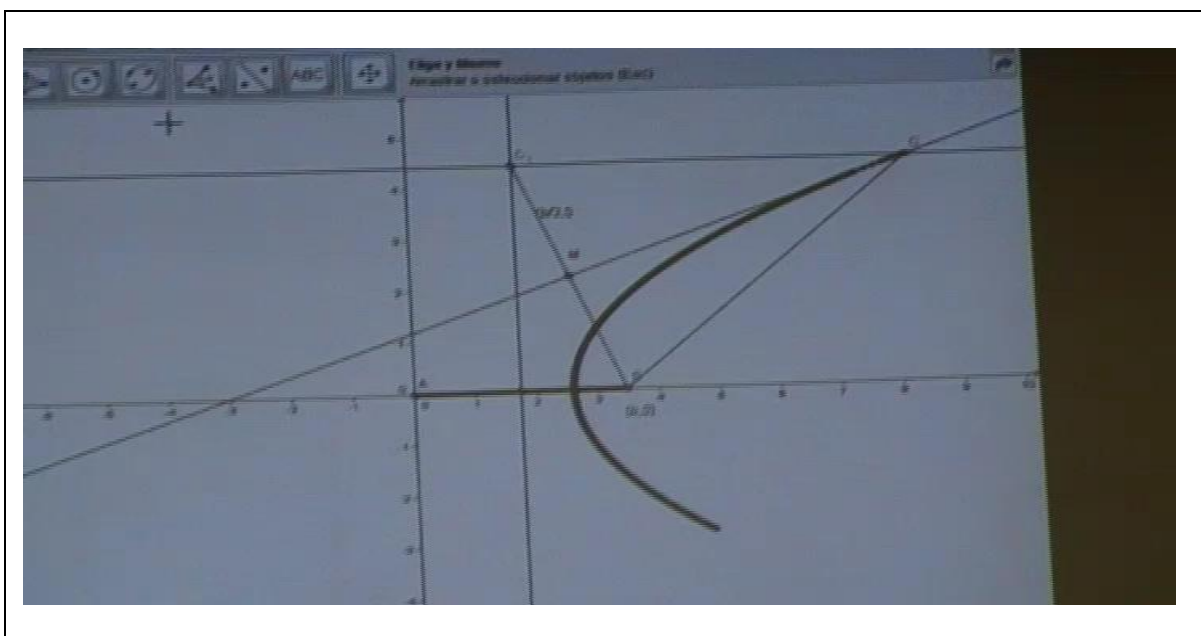


Figura 14. Construcción que genera la parábola.

*P: perfecto, entonces voy de gane porque ya tenemos la pendiente de esta recta, me dijeron con la pendiente de la recta y un punto, puedo hallar la ecuación, la cuestión es bueno,*

*seque pasa por el punto C, que del punto C de hecho lo que ando buscando son las coordenadas, ese no me ayuda, pero también se que pasa por aquí, y este es el punto medio del segmento BC y conocen los extremos de BC, entonces con las coordenadas de los extremos ¿pueden decirme las coordenadas del punto medio? ¿sí? ¿O no se puede?* (Apéndice D, líneas 2673-2677).

En la última parte, se les solicitó determinar la ecuación de esta segunda recta y para ello se recordó la ecuación de una recta, conocidos un punto y su pendiente. Varios estudiantes ayudaron a determinar la ecuación. El profesor preguntó a los estudiantes acerca del tipo de ecuación que debería tener la curva que describe la trayectoria del punto P, y ellos recordaron que, en caso de tratarse de una elipse o de una parábola, la ecuación debería ser de segundo grado.

*P: díctame la forma general de una ecuación cuadrática...*

*A19: ahhhh la del binomio, sería  $ax^2 + by + c = 0$*  (Apéndice D, líneas 2756-2757).

Mediante una serie de preguntas, consigue que los estudiantes recuerden la forma ordinaria de la ecuación de una parábola, donde pueden deducirse con mayor facilidad sus elementos como el foco, el vértice y el lado recto.

*P: ¿recuerdan la propiedad que define a la parábola? .....respecto a ese concepto de distancia... ¿no?...bueno les recuerdo algo, que la parábola es el lugar geométrico que está formado por todos los puntos que están a la misma distancia de un punto fijo que es al que se le llama foco, y de una recta fija a la que se le llama directriz...* (Apéndice D, líneas 2807-2809).

Posteriormente se analizaron las características de la construcción obtenida, intentando identificar las posiciones de cada uno de los elementos, en particular se revisaron las condiciones que debería reunir un punto de la construcción, el cual se conjeturó es el foco de la parábola:

*P: si yo mido la distancia de ese punto al que ahora reconozco como foco, por ejemplo particularmente aquí dónde quedó el cruce, de aquí al foco y de ahí a la directriz la distancia tiene que ser la misma, y la pregunta es ¿y si se cumple?, es más voy a trazar este otro segmento, ahí está, mi pregunta es ¿esta distancia y esta otra son iguales?*

*A: sí*

*P: ¿por qué? ¿Qué tipo de triángulo es éste? Ahí marcamos un triángulo*

*A: equilátero*

*P: eh... me tienen que dar la razón de por qué es equilátero* (Apéndice D, líneas 2810-2817).

En referencia a esta última condición, los estudiantes pudieron deducir, con ayuda del profesor, que el triángulo era isósceles, y ello sirvió para corroborar que el punto mencionado reunía las condiciones necesarias para ser el foco de la parábola. Finalmente se pudo establecer que el lugar geométrico correspondía a una cónica, pero solamente después de un proceso en el que los estudiantes iban paso a paso formulando y probando conjeturas, aunque la participación del docente fue necesaria para corregir errores o redirigir la discusión hacia los puntos nodales que les permitieran avanzar en la solución del problema.



*P: si mido la distancia a este punto que ahora se que es el foco, y mido la distancia a la que ahora se que es la recta mediatriz, siempre son iguales, y este triángulo yo se que es isósceles, a veces a lo mejor suele ser equilátero, entonces no queda duda que este lugar geométrico es una parábola, porque cumple con la condición de que está formado por todos los puntos que están a la misma distancia del foco y de la directriz, y además porque al determinar la ecuación de ese lugar geométrico, resolviendo el sistema de las dos rectas que lo originan, llegué a ésta forma, que se que igual corresponde a la ecuación de una parábola(Apéndice D, líneas 2824-2829).*

#### 4.5. ANÁLISIS DE LA ETAPA DE IMPLEMENTACIÓN

En forma similar a la etapa previa, se elaboró un cuadro en el que se clasifican las categorías mediante las cuales se analiza la etapa de implementación de las actividades de instrucción, y dónde se resumen los resultados obtenidos en forma organizada. Se tiene una columna para cada actividad, recordando que en las primeras dos actividades se desarrolló la primera actividad de instrucción diseñada, y en el caso de la que llamo tercera actividad, se refiere al grupo de estudiantes dónde se implementó la segunda actividad diseñada por el profesor.

En algunos casos se ilustra con un ejemplo específico acontecido durante la sesión de trabajo y que considero muy representativo de las acciones docentes enlistadas, en otros casos se describen acciones más generales. Es importante señalar también que la clasificación de éstas categorías de análisis se logró después de consensuar con las categorías que han sido reportadas por distintos autores en trabajos de corte similar, pero además tomando como base aquellas acciones docentes que tiene más relación con los aspectos que queremos resaltar en nuestro estudio, y que se refieren a acciones docentes directamente relacionadas con el mantenimiento de la demanda cognitiva a lo largo de la sesión.

#### 1.-Recursos didácticos empleados.

SUBCATEGORÍA	ACCIONES DEL DOCENTE	PRIMERA ACTIVIDAD	SEGUNDA ACTIVIDAD	TERCERA ACTIVIDAD
Utiliza imágenes, videos, u otras representaciones.	Utiliza imágenes como recurso didáctico.	Para contextualizar el uso o aplicaciones de los mecanismos tipo Grashof.	Para contextualizar el uso o aplicaciones de los mecanismos tipo Grashof.	Emplea la representación gráfica del problema como elemento de partida.
Utilización del software como herramienta didáctica.	Utiliza correctamente las potencialidades del software	El empleo del cabry geometry en esta actividad permitió sobre todo realizar y comprobar conjeturas, así como analizar casos particulares.	El empleo del cabry geometry en esta actividad permitió sobre todo realizar y comprobar conjeturas, así como analizar casos particulares.	En este caso, el software fue útil para facilitar la representación gráfica del problema, y poder establecer las relaciones necesarias para su resolución algebraica.  En específico, el docente puso cuidado en evitar usar comandos que podrían entorpecer la ruta de solución, lo que hubiera simplificado la solución del problema.

## 2.-Uso de la tecnología.

SUBCATEGORÍA	ACCIONES DEL DOCENTE	PRIMERA ACTIVIDAD	SEGUNDA ACTIVIDAD	TERCERA ACTIVIDAD
Conocimiento de herramientas tecnológicas.	Domina el software empleado	Nivel aceptable de dominio, resuelve las dudas planteadas en las construcciones.	Nivel aceptable de dominio, resuelve las dudas planteadas en las construcciones.	No requiere en este caso resolver dudas referentes a la construcción solicitada.
Importancia asignada a las herramientas digitales dentro del enfoque de resolución de problemas.	Empleo del software para probar conjeturas.	El software se usó para comprobar varias de las condiciones que eran necesarias para el correcto funcionamiento de los mecanismos articulados estudiados.	El software se usó para comprobar varias de las condiciones que eran necesarias para el correcto funcionamiento de los mecanismos articulados estudiados.	Sí, como por ejemplo cuando solicita demostrar que el foco era equidistante a cualquier punto en la parábola y a la recta directriz.
	Empleo del software para obtener diferentes representaciones	Dos estudiantes se percatan de que al intercambiar las barras fija y acopladora de un mecanismo, puede funcionar.		Geogebra permitió usar un sistema de referencia para situar la construcción.

## 3.-Heurísticas empleadas

SUBCATEGORÍA	ACCIONES DEL DOCENTE	PRIMERA ACTIVIDAD	SEGUNDA ACTIVIDAD	TERCERA ACTIVIDAD
Reformulación del problema	Plantear extensiones del problema	Hay un episodio, dónde el profesor anima a unos estudiantes para que realicen otras pruebas: los estudiantes intentan construir cuadriláteros con otras dimensiones, considerando las medidas que deben tener los lados, para que puedan cumplir con el criterio de Grashof.	En este caso se presentó el interés por indagar bajo qué condiciones de paralelismo un mecanismo articulado podía funcionar como mecanismo de Grashof.	Cuando propone reelaborar la construcción, usando ahora un plano cartesiano.
Pruebas de conjeturas	Solicitar una prueba o demostración		Una vez construido el primer cuadrilátero solicitado, algunos estudiantes aseguran que se obtienen diferentes cuadriláteros y otros afirman que se trata del mismo. El profesor les pide que demuestren sus aseveraciones.	Un ejemplo: cuando solicita demostrar que el triángulo formado en la construcción es de tipo isósceles.

#### 4.-Proceso inquisitivo.

SUBCATEGORÍA	ACCIONES DEL DOCENTE	PRIMERA ACTIVIDAD	SEGUNDA ACTIVIDAD	TERCERA ACTIVIDAD
Preguntas-guía	Realiza preguntas guía cuando es necesario	Hay un episodio cuando solicita construir un cuadrilátero que sabe de antemano que no se puede construir, ello permite pasar a otra etapa de la discusión.	Pregunta acerca del principio de la desigualdad del triángulo, para posteriormente inducir un razonamiento similar para el caso de los cuadriláteros.	En un momento clave, pide que identifiquen los elementos que definen al lugar geométrico que se observa en la traza de la construcción.
Preguntas que fomentan la discusión	Promueve la discusión a partir de un cuestionamiento.	En esta actividad, varias preguntas hechas por el docente fomentaron que se presentaran diálogos o discusiones espontáneas en pequeños grupos.	En la construcción de los cuadriláteros, por ejemplo les preguntó por qué creían que, si habían seguido las mismas instrucciones, que se obtenían cuadriláteros distintos.	El proceso inquisitivo en este caso permitió encauzar directamente la ruta de solución.

#### 5.-Retroalimentación, respuesta a dudas.

SUBCATEGORÍA	ACCIONES DEL DOCENTE	PRIMERA ACTIVIDAD	SEGUNDA ACTIVIDAD	TERCERA ACTIVIDAD
Discutir estrategias	Discute estrategias con sus estudiantes	Retroalimenta en forma grupal los resultados obtenidos por diferentes equipos en referencia a los dos últimos casos particulares analizados.	Un ejemplo: en el análisis del tercer caso particular que se refería a la existencia de dos pares de barras iguales, les solicita desglosar el análisis en dos subcasos: cuando las dos barras iguales eran contiguas, y cuando eran opuestas.	Establece que para conocer las coordenadas de un punto cualquiera de la cónica, es necesario previamente resolver el punto como la intersección de dos rectas.
Identificar y resolver dificultades.	Resuelve dudas y preguntas del estudiante	En esta actividad hubo varios casos donde los estudiantes presentaron problemas en sus construcciones, y el profesor asesoró en su solución.	Hubo varias situaciones donde se tuvieron errores en las construcciones, aunque se debieron al mal manejo del software. El profesor corrigió varios de ellos en forma personalizada.	Se presentaron dudas con respecto a la forma ordinaria de la ecuación de la parábola.
Comunicar resultados	Comparte resultados en forma general y/o particular.	Una estudiante se percató de que la construcción de un cuadrilátero solicitado por el profesor no se puede realizar. El docente le solicita que en voz alta les compta a sus compañeros las razones de su hallazgo.	Propicia que un estudiante comparta sus resultados de un cuadrilátero que, aún intercambiando dos de sus lados de la misma medida, seguía funcionando como mecanismo articulado, lo que parecía contradecir hallazgos previos.	A solicitud expresa del docente, un estudiante intenta explicar qué requisitos debe tener un punto para pertenecer a un círculo.

## 6.-Acciones para mantener un alto nivel de demanda cognitiva.

SUBCATEGORÍA	ACCIONES DEL DOCENTE	PRIMERA ACTIVIDAD	SEGUNDA ACTIVIDAD	TERCERA ACTIVIDAD
Conocimiento y empleo de la demanda cognitiva	Uso de las herramientas digitales para sostener y/o incrementar la demanda cognitiva.	Un ejemplo: con ayuda de un video demuestra algunas de las aplicaciones que pueden tener los mecanismos articulados de cuatro barras.	Les explica, usando el comando de animación del cabri, el diferente comportamiento de la barra ejecutora, también llamada balancín, y les pregunta qué aplicaciones pueden atribuírsele.	Demuestra a los estudiantes el empleo de la herramienta denominada traza, para poder visualizar mejor la trayectoria de la curva generada en la construcción, y poder así delimitar el problema a resolver.
	Proceso inquisitivo del docente en relación a la demanda cognitiva.	Una vez que han terminado de analizar los tres casos particulares propuestos en el protocolo de la actividad, les solicita dar respuesta general a la pregunta de qué criterios debe cumplir un cuadrilátero para poder funcionar cómo un mecanismo tipo Grashof.	Un ejemplo: cuando estaban teniendo algunos problemas en sus construcciones, le solicita a una alumna analizar el caso de un cuadrilátero con medidas propuestas por ella misma. La estudiante contesta que entonces empezaba con un cuadrado, porque si cumplía con las medidas necesarias	Utiliza este proceso cuando pregunta qué es un lugar geométrico, qué requisitos se requieren para que una cónica sea un parábola o una elipse, o cómo se puede corroborar que un punto determinado sea el foco de dicha cónica.
	Presiona al estudiante en la búsqueda de relaciones, significados o explicaciones.	El profesor estimula a los estudiantes para que proporcionen ideas acerca de las relaciones que se presentan entre los lados y los ángulos de la figura, incluso traza una diagonal que parte a la construcción en dos triángulos, intentando que los estudiantes propongan una idea de cómo resolverlo.	Comparando los casos estudiados, de mecanismos que funcionaron con los que no funcionaron, pregunta a los estudiantes de qué factores depende la posibilidad de que la barra manivela dé giros completos para que el mecanismo pueda ser tipo Grashof.	Como cuando solicitó que definieran qué condiciones debe cumplir un punto para pertenecer a un círculo.
Acciones para mantener el interés general del estudiante	Utiliza cambios en su voz	Utilizó cambios en su tono y volumen de voz cuando pasaba de una actividad individual a una grupal, o cuando quería compartir algún resultado o dificultad de un estudiante en particular.		En general es de hacer notar que el profesor emplea cambios en el tono de su voz, y llama la atención de los estudiantes cuando nota que la atención comienza a dispersarse.
	Cambio de estrategia o actividad		Llama su atención para poder volver a explicar la construcción, debido a que varios estudiantes estaban utilizando incorrectamente la herramienta compás.	El dió un tiempo específico para cada una de las actividades o momentos durante la sesión, y realizó cambios de estrategia cuando en general los estudiantes estaban utilizando más tiempo del previsto para resolver alguna cuestión.

## CAPÍTULO V

### DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES.

#### 5.1. Respuestas a las preguntas de investigación.

Este trabajo tiene el objetivo de documentar diversos elementos que permitieran profundizar en el conocimiento de los factores que pueden influir en el diseño y puesta en práctica de actividades de instrucción, así como en aquellas características deseables del profesor de matemáticas que apoyen el diseño e implementación de dichas tareas. El proceso de indagación se orientó a partir de tres preguntas (ver sección 1.5).

La primera de las preguntas es, ¿cuáles son algunos de los principios teóricos y prácticos en los que se basa un docente para diseñar o adaptar una actividad tomada de artículos de investigación en educación matemática o problemas de libros de texto, como una tarea de instrucción en la que se promueve el uso de las tecnologías digitales? Para que un docente pueda plantearse esta pregunta, previamente requiere comenzar incorporando a su práctica dos acciones: por un lado comenzar a aprender sobre las ideas y conocimientos nuevos que vienen surgiendo en el campo de la educación matemática, y por otro participar en comunidades profesionales en las cuales pueda compartir experiencias relativas al diseño e implementación de tareas de instrucción.

La primera acción tiene que ver con la necesidad de que el profesor de matemáticas refuerce sus conocimientos, respecto de los contenidos que enseña, así como de la forma que lo hace, es decir, en los conocimientos didácticos de su materia. Debe reconocer que las acciones didácticas que lleva a cabo constituyen uno de los factores principales que influyen en el aprendizaje de sus estudiantes.

La segunda acción es imprescindible para mejorar la práctica docente, en la medida en que logre planificar y diseñar actividades de instrucción que tengan características idóneas para incidir de manera favorable en el aprendizaje. En el análisis de la etapa de planificación y diseño de la actividad de instrucción propuesta por el profesor de este estudio, se identifican dos aspectos importantes. Por un lado el docente tiene claro desde el principio que quiere realizar el diseño de una actividad que se enmarque dentro del enfoque de resolución de problemas, pues él mismo tenía conocimientos previos de esta perspectiva y ya tenía también algunas experiencias utilizando elementos del marco. Algo similar puede decirse del empleo de las herramientas tecnológicas, al manifestar que aún antes de conocer el software de geometría dinámico usado en este trabajo, él reporta haber tenido interés en el uso en general de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas, convencido de los beneficios que puede reportar al aprendizaje de los estudiantes.

Por otro lado, el profesor reconoce que al identificar un contenido que podía tener potencial para desarrollarse como una actividad de aprendizaje en el marco de la resolución de problemas, decidió profundizar su investigación documental y fue como encontró que el

marco conceptual de la demanda cognitiva de las tareas de aprendizaje podía complementar las ideas que tenía en mente. De modo que al final de la revisión documental, identificó tres ideas centrales que conformarían su marco: (i) las actividades con alta demanda cognitiva pueden apoyar el desarrollo del pensamiento matemático y de un aprendizaje con entendimiento, (ii) el empleo del software dinámico puede potenciar las heurísticas y estrategias de resolución de problemas, así como diversificar las rutas de solución, y (iii) se aprende matemáticas mediante la resolución de problemas.

Para llevar a cabo la primera etapa, que consiste en la planificación y diseño de la actividad de instrucción, se conjuntaron las experiencias del docente, así como sus creencias de lo que son las matemáticas y de lo que constituye el aprendizaje, además del trabajo de indagación y búsqueda de referencias para sustentar la actividad propuesta.

Las acciones desarrolladas por el profesor durante las fases de diseño e implementación de la tarea estuvieron influenciadas por su práctica docente de ocho años en el nivel medio superior, y por su formación de posgrado, relacionada directamente con la didáctica de las matemáticas. Así que es necesario considerar éstos antecedentes para entender su interés por la enseñanza de las matemáticas y la disposición para elaborar tareas de instrucción.

Una consideración que resulta relevante para interpretar los resultados de esta investigación es que la formación del profesor de matemáticas influye en la forma en que conceptualiza la disciplina y el aprendizaje, por lo cual las tareas que diseñe y el tipo de acciones didácticas que lleve a cabo durante el proceso de implementación, pueden diferir de las tareas y acciones que llevaría a cabo un profesor sin una formación de posgrado en matemática educativa. La entrevista permitió conocer que el profesor considera que su formación le ha permitido reflexionar sobre el papel del docente de matemáticas en el proceso de instrucción, el cual incluye analizar su propia práctica, concientizarse sobre su responsabilidad en el aprendizaje de los estudiantes, involucrarse activamente en la planificación y diseño de actividades de instrucción, así como incrementar sus conocimientos en los dominios disciplinar, epistemológico y didáctico.

En lo referente al diseño de la actividad de instrucción, destacan dos conclusiones importantes: la primera es que la concepción del aprendizaje sostenida por el profesor determinó la intencionalidad de la actividad de aprendizaje. En particular, el docente incorporó los tres elementos centrales que se expusieron anteriormente para alcanzar los objetivos de aprendizaje. Además incorporó un elemento característico del enfoque de resolución de problemas: el proceso inquisitivo, que permitió articular el desarrollo de la actividad y sostener el nivel de demanda cognitiva de las tareas. Este proceso inquisitivo lo orientó en dos sentidos: por un lado sostener el interés de los estudiantes, y además servir como guías para que ellos pudieran indagar y explorar rutas en la búsqueda de las soluciones al problema planteado como tarea central en cada una de sus actividades diseñadas.

La segunda conclusión tiene que ver con la concepción que posee el profesor acerca del uso de una herramienta tecnológica para favorecer o potenciar los procesos de aprendizaje durante la resolución de problemas. En este caso, el docente utilizó el software como un medio para enriquecer las representaciones de un problema y como una

herramienta para apoyar la justificación de conjeturas. Es decir, que su conocimiento de tales herramientas tecnológicas no se limita a emplearla para facilitar procedimientos rutinarios, sino para implementar estrategias didácticas que no podrían llevarse a cabo únicamente con papel y lápiz.

La fase del análisis correspondiente a la etapa de implementación tuvo como eje el tratar de responder a la segunda pregunta planteada al inicio de este trabajo: ¿qué acciones o estrategias debe poner en juego el docente para mantener un alto nivel de demanda cognitiva durante la implementación de las tareas?

En lo referente a las estrategias didácticas que puso en práctica el docente, se obtuvieron algunos resultados importantes. El primero tiene que ver con la utilización del software como una herramienta cognitiva<sup>13</sup>. El profesor consideró que la herramienta fue útil para plantear y comprobar conjeturas, apoyó el análisis de casos particulares, y potenció otras heurísticas y estrategias de solución de problemas. Aunado a ello, dos estrategias que empleó el docente coadyuvaron al mantenimiento de la demanda cognitiva: la reformulación del problema inicial, que dió pauta para la extensión del problema, y el solicitar la comprobación de una conjetura. Tales heurísticas fueron empleadas cuando el docente percató de una disminución de la demanda cognitiva, o cuando los estudiantes consumieron más tiempo del considerado en una actividad o tarea específica. La tercera estrategia, y que considero que fungió como eje vertebral de la actividad, consistió en el proceso inquisitivo, el cual fue constante a lo largo de las tres sesiones. Hizo dos tipos de cuestionamientos, los que servían para guiar las siguientes acciones a desarrollar por parte de los estudiantes, como también aquellos expresamente hechos para fomentar la discusión, tanto grupal como en pequeños grupos. Con las preguntas también lograba presionar al estudiante en la búsqueda de relaciones, significados o explicaciones.

Otras dos acciones que considero estimularon el mantenimiento de la demanda cognitiva, fueron el permitir que algunos estudiantes expresaran sus resultados u opiniones, y compartirlos con el resto del grupo, porque con ello puede reforzar el interés de otros estudiantes más rezagados, y que por tal situación disminuyen su nivel de demanda.

En lo referente a la tercera pregunta de investigación, se registraron algunas dificultades: Por una parte, las dificultades partieron en la mayoría de los casos de un dominio insuficiente del software por parte de los estudiantes, situación que fue más notoria en el caso del grupo de bachillerato, con todo y que dichos estudiantes habían reportado un conocimiento previo del software en cuestión (cabri geometry).

---

13 El software dinámico puede constituirse como una herramienta cognitiva, porque el uso de este artefacto durante el proceso de instrucción, moldea la acción cognitiva en una forma esencial, a través de las representaciones que se pueden construir con el uso del software es posible externalizar ideas acerca de un campo de conocimiento en matemáticas, incluso es posible operar con los elementos del sistema simbólico, y con base en esas operaciones descubrir propiedades de los objetos en el campo de referencia. Las tecnologías digitales son un tipo particular de herramienta cognitiva porque tienen un impacto directo en el pensamiento y la memoria. El uso de herramientas cognitivas no solo facilita la actividad mental, sino que la transforma cualitativamente.

Es importante señalar esta situación, ya que en su diseño de la actividad, el profesor había considerado que la actividad de aprendizaje era adecuada para estudiantes de bachillerato o licenciatura, siempre que contaran con experiencia previa en el uso de dicha herramienta. El profesor brindó asesoría a algunos de ellos, pero también hubo casos en los que no fue posible que completaran sus construcciones, limitando los restantes aspectos de la actividad, y que tenían que ver con el análisis de casos particulares para determinar los requisitos de los cuadriláteros para cumplir con los criterios de un mecanismo articulado tipo Grashof. Esto provocó ciertos desajustes en los tiempos destinados a la indagación, la reflexión y el trabajo en pequeños grupos, tal como lo había planificado el docente. Por ello considero que en la segunda sesión no logró que varios estudiantes alcanzaran el objetivo propuesto.

Otro resultado que no correspondió a los objetivos planteados desde el inicio, ocurrió también en la segunda sesión, que correspondió a los estudiantes de bachillerato. La actividad, tal como estuvo planeada, debía permitir a los estudiantes llegar a proponer soluciones en el plano de las representaciones algebraicas y trigonométricas, usando para ello al software como herramienta para encontrar relaciones entre los lados y los ángulos de los cuadriláteros construidos, sin embargo eso no ocurrió así a pesar de que la actividad contó con un tiempo total razonable para su culminación (casi 4 horas). Un factor que pudo influir decididamente en el resultado es que los estudiantes estaban cursando el segundo semestre de preparatoria, y sólo tenían como antecedente su curso de aritmética y álgebra, que son los contenidos abordados normalmente en el primer semestre. En este caso las condiciones en las que se implementó la actividad, sugieren que debió haberse implementado con estudiantes de cuarto semestre en adelante, que ya hubieran cursado trigonometría y geometría analítica. Lo anterior implica que un aspecto que no debe pasarse por alto es la pertinencia de la aplicación de una actividad de instrucción, que realmente sea la adecuada para el nivel de conocimientos y se tenga una mayor certeza de los conocimientos previos del grupo en cuestión.

## **5.2. Implicaciones didácticas.**

En forma general, podemos concluir que el presente trabajo puede servir como referente a los profesores de matemáticas de nivel medio superior o superior que no han tenido experiencias en el diseño o utilización de alguna actividad de instrucción en la que se utiliza un software de geometría dinámica. Lo anterior, debido a que enfocamos una parte del estudio en identificar características fundamentales que debe tener un docente: indagar y estudiar los distintos marcos teóricos que le pueden servir, en un primer momento para tener una perspectiva más amplia sobre lo que significa la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en entornos que emplean herramientas digitales; y en un segundo momento, para poder utilizar dichos marcos en el diseño o rediseño de actividades de instrucción que puedan cumplir con un objetivo de aprendizaje acorde a los diferentes enfoques teóricos que actualmente se discuten en el campo de la educación matemática. También se pretende que sean de utilidad los esquemas y concepciones utilizados por el docente para explicar la forma en que se articulan los distintos elementos conceptuales considerados para la definición de los objetivos de aprendizaje de una actividad particular, y en general el diseño de los protocolos empleados por el profesor. El lector puede analizar con más detalle dichos protocolos para poder identificar la forma en que los marcos conceptuales fueron



empleados para definir los objetivos, las rutas hipotéticas de aprendizaje, las actividades en pequeños grupos, el proceso inquisitorio, etc.

### **5.3. Limitaciones**

Este trabajo no pretende sin embargo señalar que la única forma de abordar esta actividad por parte de un docente, debe seguir la misma línea, ya que como lo mencionábamos en el estudio, la forma de trabajo de este profesor en particular ha sido el producto de sus experiencias, y de sus inquietudes personales. Es por ello que también la utilidad de sus resultados está fuertemente acotada por las concepciones propias y los estilos de enseñanza de cada profesor. Planteamos solamente que en el caso específico del diseño de actividades de instrucción con el empleo de un software dinámico de geometría, las acciones que desarrolla el docente son de vital importancia para que se cumplan los objetivos planteados dentro de un enfoque de resolución de problemas y el marco conceptual de la demanda cognitiva, y en este caso las acciones que resultaron ser relevantes fueron el proceso inquisitivo desarrollado a lo largo de toda la actividad (en sus dos vertientes mencionadas párrafos atrás), y la utilización del software como potenciador de estrategias didácticas (reorganizador cognitivo)<sup>14</sup>.

En este sentido, es posible sugerir que si un profesor quiere diseñar e implementar actividades similares a la estudiada en este trabajo, puede tomar como referencia estos antecedentes, sobre todo a la hora de considerar cómo los distintos marcos teóricos se deben conjuntar para poder sustentar la idea que se quiera desarrollar en cada caso, y cómo se deben identificar elementos centrales de tales marcos para conformar el marco conceptual que guíe el trabajo de investigación. Por otro lado, hablando acerca de algunas dificultades que se presentaron en la etapa de implementación, se pretende que los resultados puedan servir a otros profesores a la hora de implementar sus propias actividades, considerando que se debe corroborar que el grupo de estudiantes tenga un perfil más homogéneo en cuanto a sus conocimientos previos, para evitar que la organización general de las actividades pierda su dinámica, al verse interrumpida o distorsionada por tiempos no efectivos donde los estudiantes no se encuentren realizando procesos cognitivos de búsqueda de relaciones, indagación o discusión en pequeños grupos. Es importante también delimitar que este estudio se aplicó a tres grupos de estudiantes con características muy específicas, y durante un intervalo de tiempo que sólo fue de unas cuantas horas, por lo que no es comparable con los resultados obtenidos de estudios que han sido realizados durante periodos de tiempo más prolongados, como puede ser el caso de los realizados a lo largo de todo un ciclo escolar, o de aquellos efectuados en escuelas con distintas estructuras curriculares.

### **5.4. Reflexiones finales.**

Un elemento interesante que puede complementar este trabajo es el implementar en forma paralela una misma tarea de aprendizaje, es decir en un grupo con el docente que la diseñó; y en otro grupo con un docente que tenga antecedentes en la implementación de actividades

---

<sup>14</sup> El software es un potenciador porque con su empleo es posible aplicar más estrategias en una gama más amplia de situaciones de las que serían posibles si solo se trabajase con lápiz y papel.

de este tipo, pero que no hubiera tenido contacto previo con la actividad o con el diseñador, sino que hubiera conocido la actividad sólo unos días antes, con la instrucción de estudiarla y prepararla, intentando seguir el protocolo proporcionado. Aquí la perspectiva sería identificar algunas de las diferencias encontradas en ambos casos, en referencia tanto a las acciones que cada uno desarrolla para poder mantener la demanda cognitiva durante su desarrollo, como el de las diferencias que habría en cuanto a los incidentes o dificultades y la forma de abordarlos en cada caso.

Lo mencionado en el párrafo anterior, abre la posibilidad que pudiera realizarse más trabajo al respecto de este tema de investigación, es decir el estudio de las acciones del docente en todas las etapas de un proceso de adaptación de actividades de instrucción en el aula. Aspectos más puntuales, como por ejemplo cómo influyen la formación de un docente y sus concepciones previas, con la forma en que utiliza al software como herramienta cognitiva, qué acciones didácticas despliega un docente durante la etapa de implementación, cuando solamente adapta una actividad de un libro de texto o de un artículo de investigación, en comparación con una actividad diseñada por él mismo; o cómo lo haría si la actividad propuesta fuera el producto de un trabajo académico conjunto con otros docentes, como de hecho pudiera sugerirse si pensamos en el contexto escolar en el que se desenvuelve un profesor de matemáticas en su quehacer cotidiano.

## REFERENCIAS

- Arbaugh, F., & Brown, C. A. (2005). Analyzing mathematical tasks: a catalyst for change? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 499-536.
- Arcavi, A. (2000). Problem-driven Research in Mathematics Education. *Journal of Mathematical Behavior*, 19, 141-173.
- Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal for Computers for Mathematics Learning*, 5, 25-45.
- Báez Melendres y cols. (2007). "Un Estudio Cualitativo sobre las Prácticas Docentes en las Aulas Matemáticas en el Nivel Medio". Tesis de licenciatura UAY, México.
- Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 469-501). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Barrera, F. (2009, diciembre 9). El Aprovechamiento de los estudiantes y su relación con los conocimientos de los profesores. El Independiente de Hidalgo.
- Barrera, F. (2008). Bases Teóricas y Conceptuales en la Construcción del Conocimiento Matemático y el Empleo de Herramientas Digitales. Primer Reporte Proyecto de Investigación. Registro CONACYT No. 61996.
- Barrera, F., y Reyes, A. (en revisión). Instructional routes and teacher's conceptual network irrationality of  $\sqrt{2}$ .
- Bayazit, I. (2006). Task selection and task implementation: seven constrains affecting the teacher's instruction. En D. Hewitt (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*(vol. 26, No. 1), February.
- Charnay, R. (1994). Aprender por Medio de la Resolución de Problemas. C. Porra e I. Sáiz (Comps.), *Didáctica de la Matemática, Aportes y Reflexiones*. Argentina: Paidós Educador.
- Cohen L., Marion, L. & Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education* (5<sup>th</sup> edition). London: Routledge Falmer.
- Díaz, V. y Poblete, A. (2007). Competencias en Profesores de Matemáticas y Estrategia Didáctica en Contextos de Reforma Educativa. Investigación en Educación Matemática.
- Díaz, V. y Poblete, Á. (2003). Competencias Profesionales del Profesor de Matemáticas. *Revista Números*, 53, 3-13.

- Diezmann, C. M. (2004). Teachers' characteristics: One lesson, two learning environments. In I. Putt (Ed.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Maths Education Research Group of Australasia* (pp. 191-198). MERGA: Sydney.
- Doyle, K. (2007). The Teacher, The Tasks: Their Role in Students' Mathematical Literacy. In J. Watson, & K. Beswick (Eds), *Proceedings 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia - Mathematics: Essential Research, Essential Practice* (pp. 246-254). Hobart, Tasmania.
- Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: Obstacles are opportunities. *ZDM*, 34(5), 221-228.
- García, E. (2006). Una Caracterización de la Cultura Didáctica al Interior del Aula de Cálculo. Factor Reflexivo del Quehacer Docente en los Estilos de Aprendizaje. Tesis. Mérida, Yucatán, México, mayo de 2006. Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán.
- Gilbert, M., & Coomes, J. (2010). What Mathematics do High School Teachers Need to Know? *Mathematics Teacher*, 103(6).
- González, D. (2008). Rasgos de la Práctica Docente Sobresaliente en los Cursos de Matemáticas para Ingenierías. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 14, 49-60.
- Harel, G. (1994). On teacher education programmes in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25(1), 113-119.
- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Huang, R., Cai, J., & Ye, L. (2008). Mathematical tasks implementation in the U.S. and Chinese classrooms. Paper presented at the 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, México.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación [INEE] (2007). *PISA 2006 en México*. México: INEE.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación [INEE] (2010). *México en PISA 2009*. México: INEE.
- Kalman, D. (2005) Virtual Empirical Investigation: Concept Formation and Theory Justification. *The American Mathematical Monthly*, 112(9).
- Laborde, C., & Sträßer, R. (2010). Place and use of new technology in the teaching of mathematics: ICMI activities in the past 25 years. *ZDM*, 42, 121-133.

- Leikin, R. (2004). Towards high quality geometrical tasks: reformulation of a proof problem. En M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 209-216). Bergen, Norway: PME.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lester F.K. (2005). On the Theoretical, Conceptual and Philosophical Foundations for Research in Mathematics Education. *ZDM* 20(6) 457-467.
- Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Beverly Hills, California: SAGE.
- Martínez C. (2006). El Método de Estudio de Caso. Estrategia Metodológica de la Investigación Científica. *Pensamiento & Gestión* No.20. ISSN 1657-6276.
- Martínez, M.(2006). La Investigación Cualitativa: Síntesis Conceptual. *Revista de Investigación en Psicología. IIPSI*, 9(1), 123-146.
- Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis* (2nd edition). Thousand Oaks, California: SAGE.
- Moreno, F.(2007). De la Matemática Formal a la Matemática Escolar. *PNA*, 1(3), 99-111.
- Moreno-Armella, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 81-86). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Moreno-Armella, L., & Santos-Trigo, M. (2008). Democratic access and use of powerful mathematics in an emerging country. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp.319-351). New York: Routledge.
- Pea, R. D. (1985). Beyond amplification: Using the computers to reorganize mental functioning. *Educational Psychologist*, 20(4), 167-182.
- Polya, G. (2005). *Cómo plantear y resolver problemas* (Trad. Julián Zagazagoitia). México: Trillas. (Trabajo original publicado en 1945).
- Rizo Cabrera y Campistrous Pérez (1999). Estrategias de Resolución de Problemas en la Escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemáticas Educativa*, 2 (2-3), 31-45.

- Sacristan, A. I., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., & Meissner, H. (2010). The influence and shaping of digital technologies on the learning –and learning trajectories- of mathematical concepts. En C. Hoyles, & J. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology-rethinking the terrain. The 17th ICMI Study* (pp. 179–226). New York: Springer.
- Santos-Trigo, M. (2007a). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas.
- Santos-Trigo, M. (2007b). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM Mathematics Education*, 39, 523-536.
- Santos-Trigo, M. (2010). A mathematical problem solving approach to identify and explore instructional routes based on the use of computational tools. En J. Yamamoto, J. Kush, R. Lombard, & J. Hertzog (Eds.), *Technology Implementation and Teacher Education: Reflective Models* (pp. 296-313). Hershey, New York: Information Science Reference.
- Schoenfeld, A.H.(2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the AMS*, 47(6).
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problems Solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 268-275.
- Stein, M. K., Grover, B. W. & Henningsen, M. (1996). Building student capacity form mathematical thinking and reasoning: an analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33, 455-488.
- Williams, D. L. (2007). The What, Why and How of Contextual Teaching in the Mathematics Classroom. *Mathematics Teacher*, 100(8).
- Yin, R. K. (2003). *Case Study Research: Design and Methods* (Third Edition). Thousand Oaks, CA: Sage.

## REFERENCIAS ELECTRÓNICAS

- Fernandez, A. (2006): Aprendizaje con Nuevas Tecnologías Paradigma Emergente ¿nuevas modalidades de aprendizaje? *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*. 20, 1-24.
- Mazarío, I. (2002). La Resolución de Problemas: Un reto para la Educación Matemática Contemporánea. Recuperado de:  
  
[www.bibliociencias.cu/gsd/collect/libros/index/assoc/.../doc.pdf](http://www.bibliociencias.cu/gsd/collect/libros/index/assoc/.../doc.pdf)
- OECD (2010). PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do-Students Performance in Reading, Mathematics and Science (Volume I). Recuperado de:

[http://www.oecd-ilibrary.org/education/pisa-2009-results-what-students-know-and-can-do\\_9789264091450-en](http://www.oecd-ilibrary.org/education/pisa-2009-results-what-students-know-and-can-do_9789264091450-en)

Perrenoud, Ph.(2008). Construir las Competencias ¿es darle la espalda a los saberes? Red U. Revista de Docencia Universitaria, número monográfico 11 “Formación centrada en Competencias”. Consultado en : [http://www.redu.m.es/Red\\_U/m2](http://www.redu.m.es/Red_U/m2).

Riverón Portela y cols. (2000). Aprendizaje Basado en Problemas: Una Alternativa Educativa. Revista Digital de Educación y Nuevas Tecnologías. Año III, No.18.

Valle, M. y Curotto,M. (2008). La Resolución de Problemas como Estrategia de Enseñanza y Aprendizaje. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 7(2).

Villarreal, F. (2005). La Resolución de Problemas en Matemática y el Uso de las TIC. *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*. 19, 1-31.

## APÉNDICES

El apéndice A es el protocolo elaborado por el docente dónde desglosa los contenidos abordados en la primer actividad de aprendizaje diseñada, consistente en la construcción de mecanismos articulados tipo Grashof, tal documento le sirvió de guía para la posterior implementación de la actividad.

El apéndice B contiene el formato escrito tal como se los presentó a los estudiantes. Este material les fue proporcionado a los estudiantes al inicio de la sesión correspondiente.

El apéndice C es el protocolo elaborado por el profesor para la segunda actividad de aprendizaje que desarrolló. Es importante aclarar que para esta segunda actividad no se contó con un protocolo escrito para los estudiantes. Las instrucciones fueron hechas de forma oral.

El apéndice D es la transcripción de la entrevista con el docente.

El apéndice E concentra las transcripciones completas de las tres sesiones videograbadas.



## APÉNDICE A. PRIMERA TAREA DE APRENDIZAJE

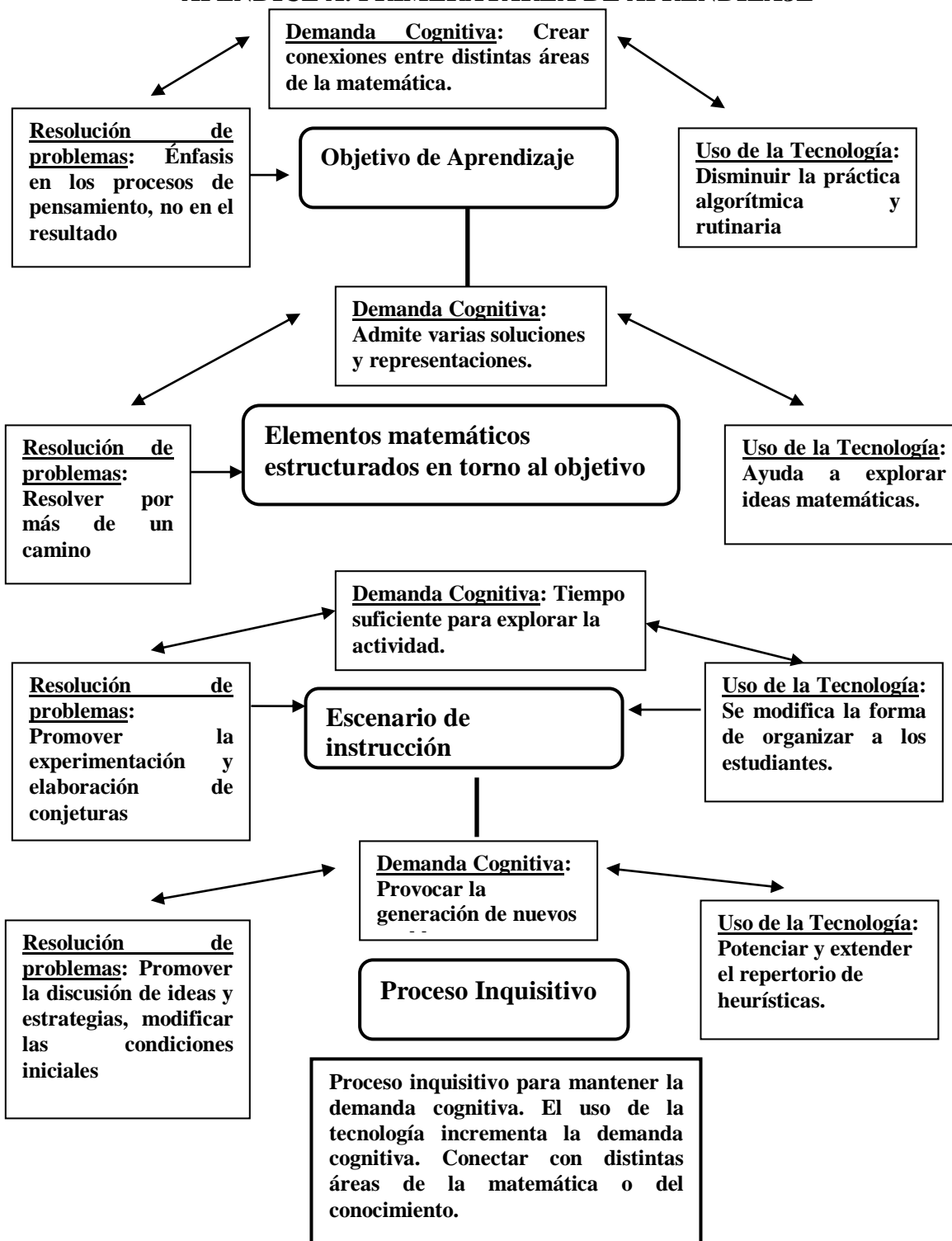


Diagrama 1: Expresa los elementos que integran las tareas de aprendizaje y algunos principios del marco conceptual que se utilizan para conformar cada elemento.

### *Antecedentes de la tarea*

Se optó por diseñar una tarea de aprendizaje en el contexto del mundo real, relacionada con conceptos de geometría y trigonometría, surgida en el área de la mecánica, en particular de la cinemática de los mecanismos. Tras una revisión exhaustiva, se identificó que en el campo de la cinemática de mecanismos, existe un criterio sencillo para verificar que en un mecanismo de cuatro barras articuladas, una de las barras podrá efectuar revoluciones completas con relación a alguna de las otras tres. Este criterio se conoce como *Ley de Grashof*<sup>1</sup> y tiene relación con las propiedades geométricas de los cuadriláteros. La motivación principal para elegir este contexto fue que en la literatura consultada, se enuncia dicho criterio, sin hacer una discusión al respecto de su validez.

### *Referencias sobre el criterio de Grashof*

En la literatura consultada, se menciona que cuando se trata de un eslabonamiento de cuatro barras, existe una prueba muy sencilla para saber si una de las barras puede efectuar revoluciones completas alrededor de alguna de las otras:

La Ley de Grashof, dada por Harding, establece que la suma de barras más corta y más larga de un mecanismo plano de cuatro barras articuladas, no puede superar la suma de las otras dos barras, cuando entre dos miembros se desea una rotación relativa completa. (Shigley, 1970, p.184)

Una manera de determinar si un mecanismo de cuatro barras va a operar como balancín de manivela, doble manivela o doble balancín consiste en emplear la ley de Grashof. Esta ley señala que si la suma de las longitudes del eslabón más largo y del más corto es menor que la suma de las longitudes de los otros dos, se forman:

1. Dos balancines de manivela distintos cuando el eslabón más corto es la manivela y cualquiera de los otros dos eslabones es el fijo.
2. Una doble manivela cuando el eslabón más corto es el fijo.
3. Un doble balancín cuando el eslabón opuesto al más corto es el fijo. (Mabie y Reinholtz, 2004, p.43)

La Ley de Grashof afirma que, para un eslabonamiento plano de cuatro barras, la suma de las longitudes más corta y más larga de los eslabones, no puede ser mayor que la suma de las longitudes de las dos restantes, si se desea que exista una rotación relativa continua entre dos elementos.

Si  $s$  y  $l$  son las longitudes de los eslabones más corto y más largo respectivamente,  $p$  y  $q$  son las longitudes de los otros dos:

$$s + l \leq p + q$$

Si no se satisface esta desigualdad, ningún eslabón efectuará una revolución completa con relación a otro. (Shigley y Uicker, 1999, p.19)

En este sentido, como ya mencionó, la aplicación del criterio es relativamente sencilla y se garantiza contar con un mecanismo de cuatro barras articuladas en el que una de estas, pueda hacer giros completos; sin embargo no se discute la validez de este criterio.

### *Objetivos de Aprendizaje*

- (i) Identificar algunas propiedades geométricas de los triángulos y cuadriláteros.
- (ii) Transitar del pensamiento geométrico al aritmético y algebraico.
- (iii) Utilizar distintos registros de representación.
- (iii) Incorporar algunos recursos de la geometría analítica a la solución de un problema de geometría sintética.

### *Elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo de aprendizaje*

#### Conocimientos matemáticos previos

- (i) La desigualdad del triángulo.
- (ii) Relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos y ley de los cosenos.
- (iii) Operaciones aritméticas básicas.
- (iv) Utilización de lenguaje algebraico.

---

<sup>1</sup>Franz Grashof (1826-1893) Ingeniero mecánico alemán que realizó contribuciones principalmente en las áreas de transferencia de calor, en particular por convección natural; fundamentos de elasticidad y en movilidad de mecanismos de cuatro barras.

## Conocimientos informáticos previos

Utilización de comandos del software de geometría dinámica Cabri Geometry tales como: segmento, compás, medir longitud, medir ángulo, animación, calculadora, mostrar los ejes y lugar geométrico. Se puede incorporar adicionalmente el uso de una hoja de cálculo como Excel para verificar algunos de los resultados que aparezcan en el software dinámico. Se espera que la interacción del estudiante con el software de geometría dinámica, le permita establecer rápidamente conexiones conceptuales entre las condiciones para poder construir un cuadrilátero, la relación con la desigualdad del triángulo y ley de cosenos, así como observar por medio de la animación el comportamiento que tendría un mecanismo en particular, a partir de las longitudes de sus lados.

### *Escenario de la tarea.*

Se requiere de un aula con pizarrón, pantalla de proyección, equipos de cómputo con software dinámico para cada estudiante y para el profesor, además de cañón proyector. Los estudiantes serán organizados de la siguiente forma: al inicio de la actividad trabajarán de forma individual, seguirán las indicaciones dadas por el profesor, realizarán las construcciones que éste les solicite, para lo cual será indispensable que se utilice el recurso del cañón proyector como guía para los estudiantes. Posteriormente cuando se pasa a la etapa de tratar de argumentar los criterios o condiciones solicitadas en la actividad y las posibles conjeturas surgidas con la interacción entre estudiante-software-profesor, los estudiantes trabajarán en parejas, se espera que el intercambio de ideas les permita justificar las conjeturas que posiblemente fueron planteadas en la etapa inicial. Se dispondrá de una sesión de dos horas para el trabajo propuesto.

### *Proceso Inquisitivo*

Durante la ejecución de la tarea de aprendizaje por parte de los estudiantes, el profesor debe tener especial cuidado en hacer preguntas relevantes que motiven a los estudiantes a trabajar en los aspectos propios de la actividad, a tratar de justificar sus observaciones, a comunicar sus ideas y resultados. Parte de este proceso inquisitivo está destinado además, a mantener el nivel de demanda cognitiva de la tarea, las preguntas que el profesor realice no deben ayudar de más al estudiante, pero deben ser enunciadas para que lo guíen en su trabajo y le permita encontrar las conexiones propuestas en la actividad, siempre enmarcados en el objetivo de aprendizaje. A continuación, se describe la guía de aplicación de la tarea de aprendizaje que se diseñó, se especifican las preguntas que en cada etapa de la tarea el profesor debe plantear y las posibles rutas que se espera que el estudiante siga orientado por dichas preguntas.

### *Preámbulo de la actividad*

Dela aritmética se sabe que para todos los números  $a$  y  $b$  se tiene que:

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (\text{Spivak, 1996, pp.13,14})$$

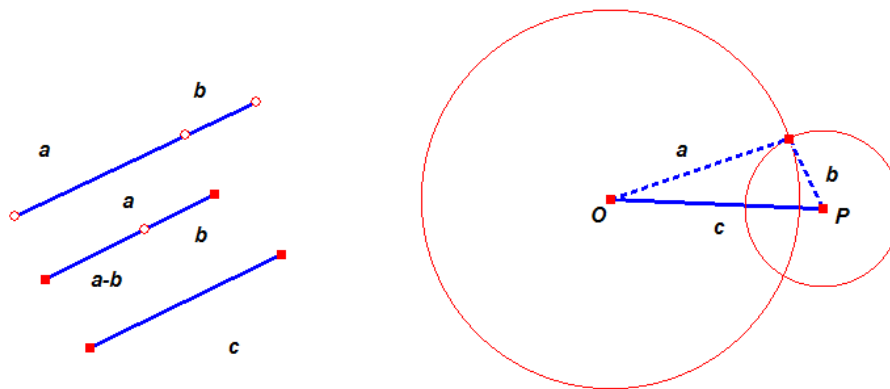
Este resultado tiene relación con lo que en geometría se conoce como la desigualdad del triángulo, la cual menciona que existe un criterio muy útil para saber si con tres segmentos de recta es posible construir un triángulo, se suman las longitudes de dos lados y el resultado se compara con la longitud del otro. En general si los lados de un triángulo tienen longitudes  $a$ ,  $b$  y  $c$  se debe cumplir que:

$$a + b > c$$

Este resultado tiene que ver con que sea posible la intersección de dos círculos de radios  $a$  y  $b$ , si sus centros están separados una distancia  $c$ , si se intersectan en dos puntos, se asegura que se puede construir un triángulo de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$  con área mayor que cero (figura 3.2).

Dos círculos con centros  $O$  y  $P$  con radios  $a$  y  $b$ , se intersectan exactamente en dos puntos, si la distancia  $c$  entre sus centros es menor que la suma de sus radios pero mayor que la diferencia entre ellos. (Hemmerling, 1996, p. 332)

Otra forma de presentar la desigualdad del triángulo es: *la diferencia de dos lados de un triángulo es menor que el tercero.* (Karelin, Rondero, Tarasenko, 2008, p.51). Es algo casi natural preguntarse: ¿Existe un criterio similar para verificar si dados cuatro segmentos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  es posible construir un cuadrilátero?



**Figura 2:** Condición para que dos círculos se intersecten en dos puntos, lo cual permite construir un triángulo de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$  con área distinta de cero. ¿Existe relación con el criterio de la desigualdad del triángulo?

**Ruta hipotética de instrucción**

Se pide a los estudiantes que construyan con ayuda del software dinámico, un cuadrilátero de lados 5, 7, 8 y 13 centímetros de longitud, se espera que sin mayores dificultades, puedan construirlo. Después de que todos terminen, se pueden comparar los cuadriláteros de cada participante y se puede reflexionar en el hecho de que no basta con conocer las longitudes de los lados de un cuadrilátero para que este quede determinado, pues probablemente cada estudiante construyó un cuadrilátero distinto. También se puede solicitar a los participantes, que con el uso de la herramienta de arrastre, muevan alguno de los vértices, para que observen la familia de cuadriláteros que se genera cuando sólo se establecen las longitudes de los lados (a diferencia de los triángulos, que al especificar la longitud de sus tres lados, quedan determinados).

A continuación los estudiantes deben construir un cuadrilátero de lados 2, 3, 4 y 11 centímetros de longitud ¿pudieron hacerlo? Es posible que algún estudiante conozca de antemano un criterio similar a la desigualdad del triángulo, para verificar por medio de las longitudes de los lados de un cuadrilátero, si es posible construirlo o no, en caso de que ninguno lo recuerde, se espera que al intentar construirlo y notar que no es posible, puedan conjeturar la condición para que un cuadrilátero pueda construirse, en función de la longitud de sus lados.

Como sugerencia, se puede pedir a los estudiantes que recuerden el criterio para saber si un triángulo puede ser construido o no (desigualdad del triángulo), se espera concluyan que para saber si es posible construir un cuadrilátero, basta con identificar cual es la longitud del segmento mayor, y verificar que la suma de los otros tres lados sea mayor. En esta etapa, es recomendable hacer a los estudiantes la siguiente observación: Un triángulo construido con regla y compás con ayuda del software, en general no pierde su forma (indeformable) al tratar de mover o arrastrar alguno de los vértices, se puede pensar que el triángulo está formado por tres barras articuladas y unidas en sus extremos; por esta razón, suele ser considerada esta forma geométrica, en el diseño de estructuras estáticas.

Por otro lado, si el cuadrilátero se concibe formado por cuatro barras articuladas en sus extremos, tiene la capacidad de deformar sus ángulos, lo que permite generar una familia de cuadriláteros con las mismas dimensiones en sus lados. Como menciona Hemmerling (1996), a diferencia del triángulo, el cuadrilátero no es una figura rígida. El cuadrilátero puede tomar muchas formas diferentes. Esta propiedad que no es deseable en la construcción de estructuras estáticas, se puede aprovechar en el diseño de mecanismos para la transmisión del movimiento. Concluida la etapa preliminar, se puede enunciar el problema central de la tarea de aprendizaje.

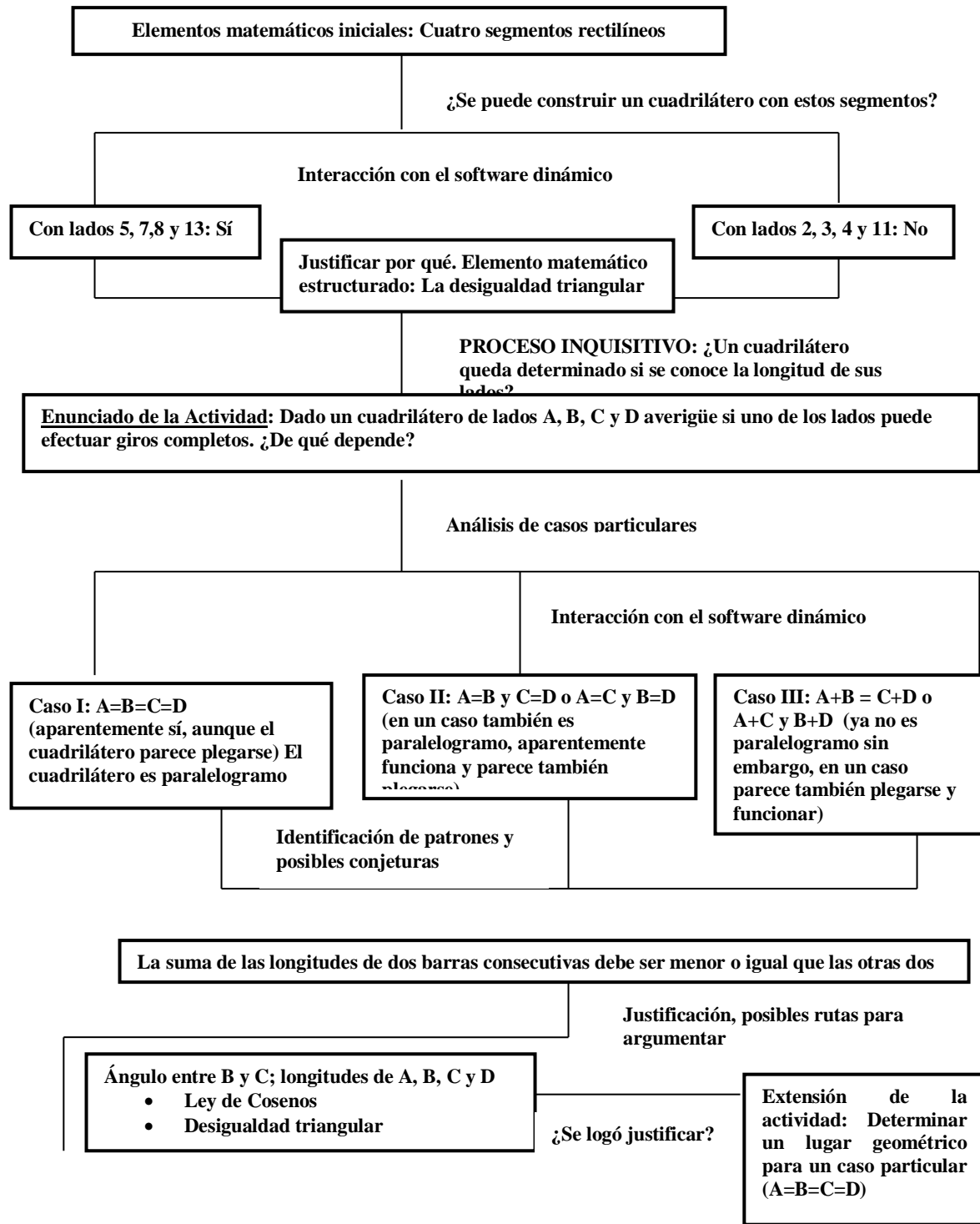
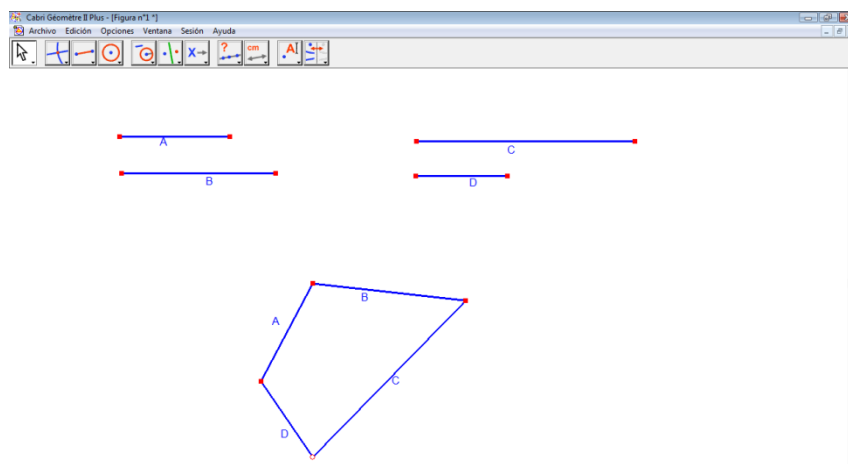


Diagrama 3: Una Ruta hipotética para abordar la tarea de aprendizaje.

### **Enunciado de la actividad:**

En mecánica, un mecanismo de 4 barras no deformables, articuladas en sus extremos, es también conocido como mecanismo de Grashof, si se cumple que al menos una de las barras pueda dar una revolución completa con relación a alguna otra barra.

Dado un cuadrilátero cualquiera de lados  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , averigüe si es un mecanismo de Grashof. ¿Qué criterio puede usar para saber si un mecanismo de 4 barras, es de Grashof?

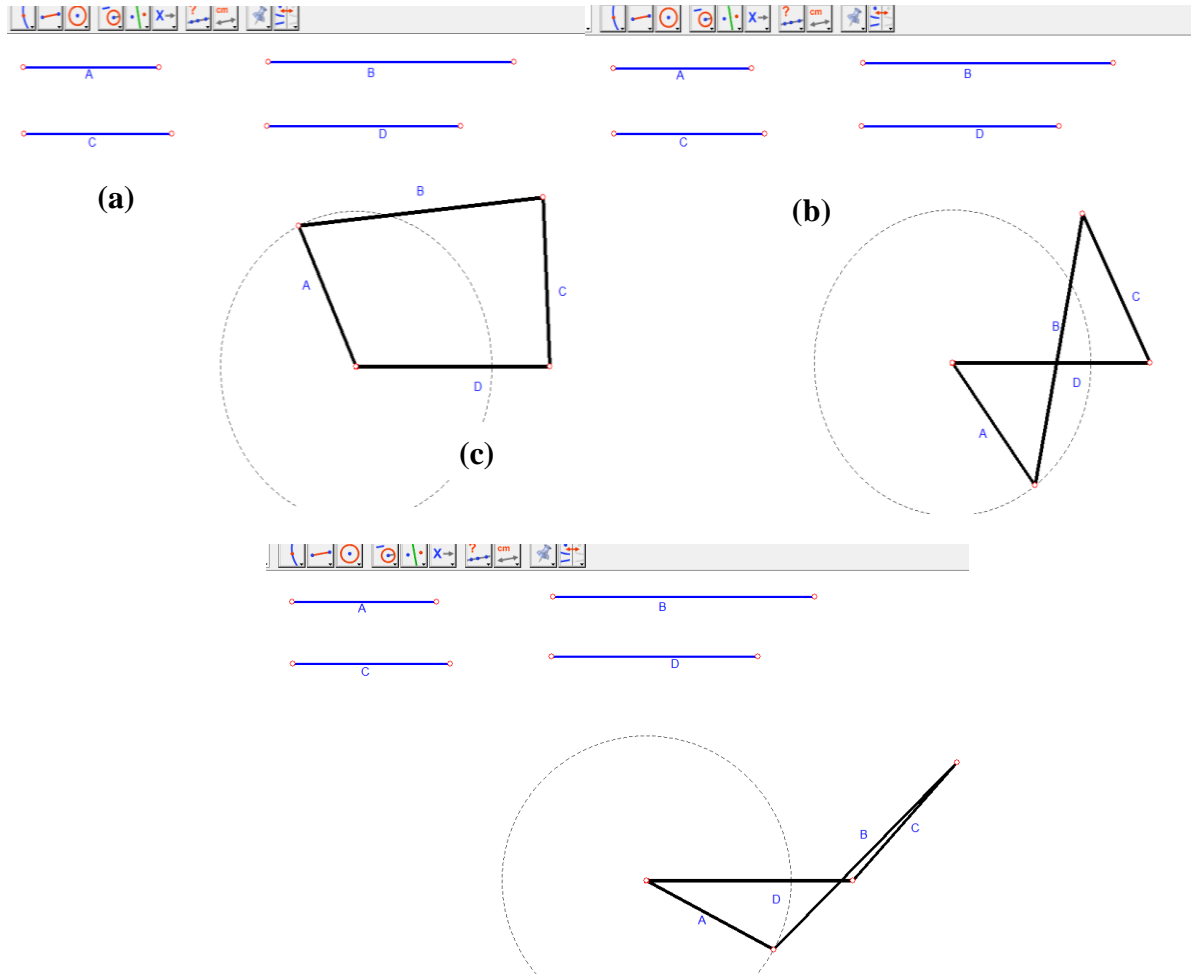


***Figura 3.3: Una posible configuración elaborada en Cabri Geometry que representa los datos de la actividad, ¿alguna de las barras gira una revolución completa?***

Lo primero que debe verificarse es que las longitudes propuestas, satisfagan la condición encontrada previamente, y que permite asegurar que es posible construir un cuadrilátero con las dimensiones propuestas, de no ser esto posible, de antemano tampoco se podrá representar el mecanismo de 4 barras articuladas.

### ***Fase exploratoria:***

Se espera que el estudiante sea capaz de realizar una construcción con el software dinámico, que corresponda a los datos del problema; pudiera requerir la guía de profesor, para poder realizar la construcción. Una vez realizada, se espera que por medio de la herramienta de arrastre o con el uso de la herramienta animación, el estudiante pueda simular el funcionamiento del mecanismo, al hacer que una de las barras (manivela) gire completamente y observar el efecto que tiene en las demás barras. Es importante mencionar, que para que el mecanismo opere correctamente, una de las barras debe permanecer fija como eslabón estacionario (bastidor del mecanismo), debido a que en términos prácticos, el mecanismo está sujeto a la superficie de una máquina. Si fuera necesario, se deben fijar los extremos de la barra que se considere como bastidor. ¿En qué casos si es posible que una de las barras gire una revolución completa? Se espera que mediante la interacción con el software, el estudiante conjeture que existe una relación entre la longitud de los lados del cuadrilátero y el hecho de que una de las barras pueda dar una revolución completa.



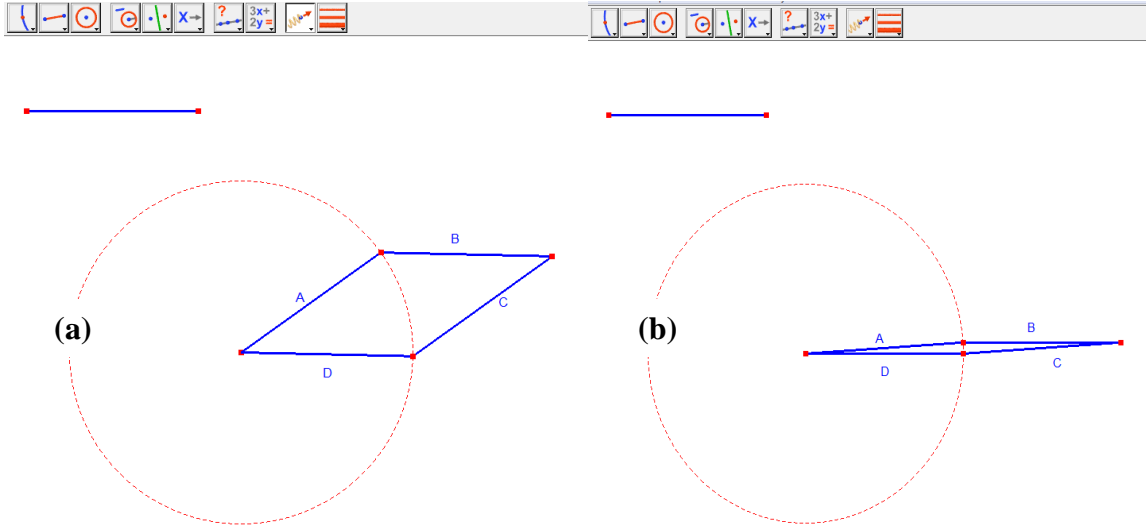
**Figura 3.4:** Representación en Cabri de 4 barras articuladas, que se espera sea un mecanismo de Grashof. Al usar el comando arrastre o animación, se obtienen diferentes configuraciones del mecanismo

En la figura 3.4, se propone la construcción de un mecanismo de 4 barras articuladas, se ha decidido que la barra  $A$  sea la manivela o eslabón impulsor y la barra  $D$  el bastidor o eslabón estacionario, por medio del arrastre o del comando *animación*, se mueve el punto de conexión entre las barras  $A$  y  $B$ ; este gira en una circunferencia con radio  $A$ ; en (a) se muestra la configuración inicial que se obtuvo al construir el cuadrilátero, dados los segmentos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ . En (b) la manivela  $A$  ha girado prácticamente media vuelta en sentido contrario al reloj, y no parece haber problemas; en (c) se observa que para alguna configuración, las barras  $B$  y  $C$  tienden a sobreponerse, si esto sucede, el mecanismo desaparece, lo cual indica que la manivela  $A$  no puede dar un giro completo para estos valores de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ .

¿Se ha encontrado una conjetura al respecto de la relación que guardan los lados del cuadrilátero para que este sea un mecanismo de Grashof? Se puede solicitar a los estudiantes que modifiquen las longitudes de los segmentos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ; para que efectúen otras pruebas sobre el funcionamiento del mecanismo; en algún momento es posible que logren que la manivela  $A$  realice giros completos; es un buen momento para preguntar ¿de qué depende que  $A$  gire completamente? Se espera que los estudiantes puedan notar con la interacción del software, que depende las longitudes de las barras y de que las barras  $B$  y  $C$  no se plieguen, es decir que el ángulo entre estas barras sea distinto de cero.

#### **Análisis de casos particulares**

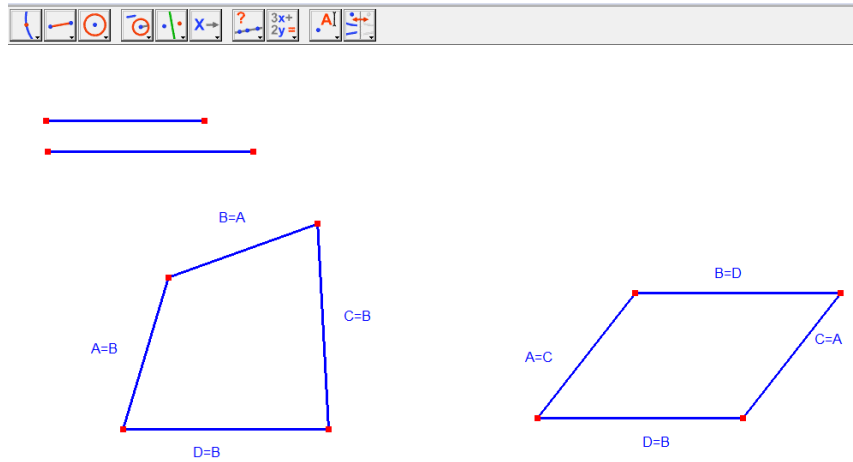
Caso I. ¿Qué pasa si  $A = B = C = D$ ? Si se construye un mecanismo de cuatro barras articuladas, con segmentos de la misma longitud, se asegura que el cuadrilátero se puede construir, además de que para cualquier configuración que se tenga, el cuadrilátero será un paralelogramo. ¿Es un mecanismo de 4 barras de Grashof? Se pide a los estudiantes que dado un segmento de cualquier longitud, construyan el mecanismo de 4 barras y verifiquen si una de las barras puede dar giros completos.



**Figura 3.5: Representación en Cabri de un mecanismo de cuatro barras articuladas, en el cual las cuatro barras son de la misma longitud**

En la figura 3.5 (a) se observa una posible configuración para el mecanismo con cuatro barras de la misma longitud; en 3.5 (b) se puede notar que llega un momento en que las cuatro barras  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  se pliegan. Al parecer si se usa el comando animación, el mecanismo opera correctamente, pero es de llamar la atención la posición en la que las cuatro barras se alinean ¿este diseño funcionará físicamente?

Caso II. ¿Qué pasa si  $A=B$  y  $C=D$  o  $A=C$  y  $B=D$ ? A continuación, se pueden revisar casos en los que las 4 barras no tengan la misma longitud, pero que se tengan dos barras de la misma longitud, y otras dos de diferente longitud a las primeras, pero iguales entre sí.



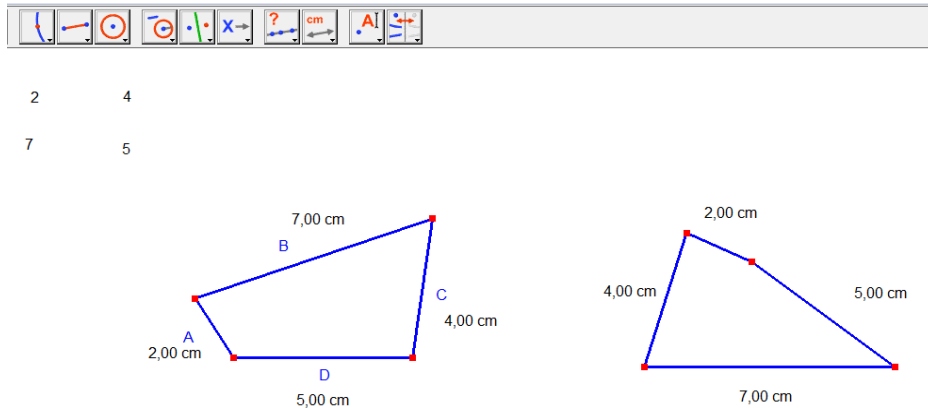
**Figura 3.6: Configuración en Cabri de un mecanismo cuatro barras en el que no todas las barras son de la misma longitud, en este caso son iguales dos a dos.**

Se pide a los estudiantes que propongan dos segmentos de diferente longitud que representarán las longitudes de las 4 barras, en primer lugar se conectan como barras adyacentes los segmentos de menor longitud, y se conectan con los otros



dos; otra posible configuración, es que las barras opuestas sean iguales (el cuadrilátero es paralelogramo de nueva cuenta). Al animar a la barra  $A$  (manivela), se observa que en la primer configuración, al parecer el mecanismo no funciona correctamente, hay posiciones en las que desaparece; en la segunda configuración, al parecer si funciona, pero tiene un comportamiento extraño; en ambos casos, las barras tienden a plegarse, todo parece indicar que existe relación entre el hecho de que la suma de las longitudes de dos barras sea igual que las otras dos y el hecho de que el mecanismo se pliegue.

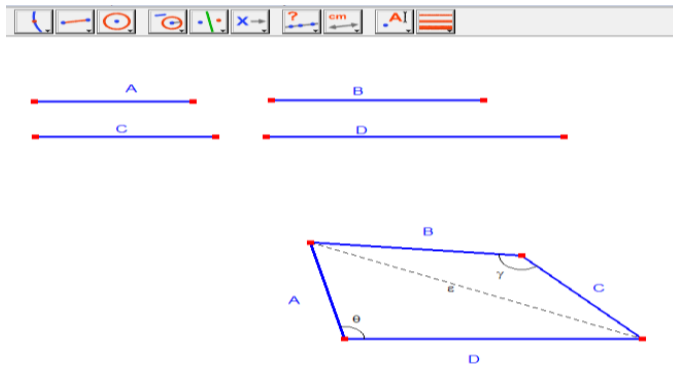
**Caso III.**  $A + B = C + D$ ; o  $A + C = B + D$ . Si se tiene la sospecha de que las barras tienden a plegarse cuando la suma de las longitudes de dos barras son igual a la suma de las otras dos, se pide a los estudiantes que realicen la configuración de un mecanismo, en el cual las cuatro barras sean de diferente longitud, pero que la suma de longitudes de dos, sea igual a la suma de otras dos, por ejemplo, configurar el mecanismo cuatro barras con los datos  $A=2$ ;  $B=7$ ;  $C=4$ ;  $D=5$ . En la figura 3.7 se muestra la configuración propuesta para un mecanismo cuatro barras y otra posible configuración de las mismas 4 barras; en la primer configuración, tal como se sospechó las barras se pliegan, el mecanismo parece ser de Grashof, en la segunda configuración, a pesar de ser las mismas 4 barras conectadas en otro orden, el mecanismo al parecer no puede operar con giros completos de la manivela.



**Figura 3.7:** Dos posibles configuraciones de un mecanismo cuatro barras con medidas 2, 4, 5 y 7. ¿Importa el orden en que se conecten las barras?

**Búsqueda de relaciones entre la longitud de los lados y los ángulos entre barras.**

Toda vez que se han construido con ayuda del software dinámico algunos casos particulares, es posible que se tengan dos conjeturas, una relacionada con el momento en que las barras  $B$  y  $C$  se alinean; dado que es posible que los estudiantes pudieran percatarse de que en caso de que la barra  $A$  no pueda efectuar giros completos, las barras mencionadas se alinearon, el ángulo entre ellas fue de  $180^\circ$ . La otra conjetura puede estar basada en que la suma de las longitudes de dos barras, comparadas con las otras dos, tiene relación con la rotación completa de la manivela; además de que pudo haber conjeturado que si la suma de longitudes de dos de las barras, es igual a las otras dos, el mecanismo tiende a plegarse.



**Figura 3.8:** Se divide el cuadrilátero en 2 triángulos por medio de la diagonal, para buscar relaciones entre sus lados y el ángulo  $\gamma$

Denotemos como  $\theta$  el ángulo formado entre las barras  $A$  y  $D$ ;  $\gamma$  el ángulo formado entre las barras  $B$  y  $C$  y nombremos como  $\varepsilon$ , a la diagonal del cuadrilátero que va de la articulación  $A, B$  a la  $C, D$ , como se muestra en la figura 3.8. Ya que se conjetura que es posible que  $A$  no gire una revolución completa cuando  $\gamma=180^\circ$ , se procede a buscar relaciones entre los datos (longitudes de las barras, para determinar el ángulo  $\gamma$ ):

Se puede escribir la Ley de cosenos para los triángulos  $A, D, \varepsilon$  y para  $B, C, \varepsilon$ , como sigue:

$$\varepsilon^2 = A^2 + D^2 - 2AD\cos\theta \dots(1)$$

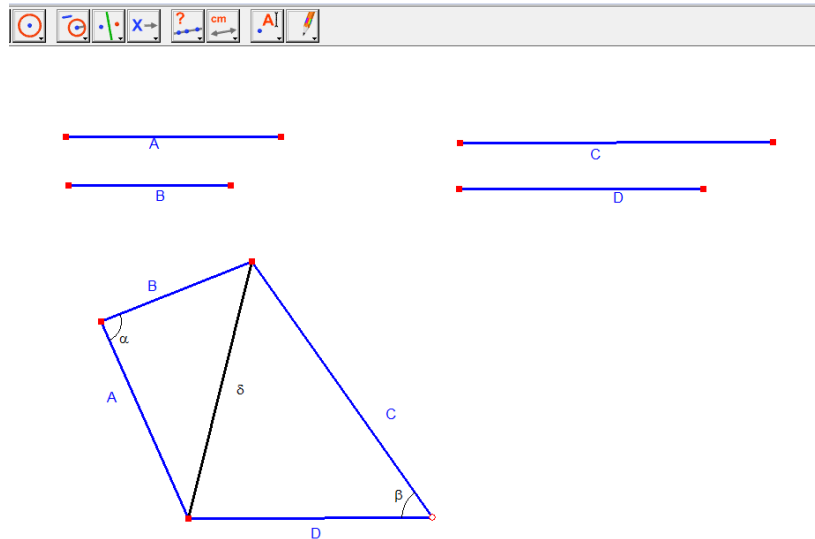
$$\varepsilon^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos\gamma \dots(2)$$

Al igualar (1) y (2) y despejar  $\gamma$  se obtiene:

$$\gamma = \cos^{-1} \left[ \frac{B^2 + C^2 + 2AD\cos\theta - (A^2 + D^2)}{2BC} \right] \dots (3)$$

Con la ecuación (3) se puede encontrar el ángulo entre las barras  $B$  y  $C$ , para cualesquiera valores de  $A, B, C, D$  y  $\theta$ . Algunas preguntas que se pueden plantear a los estudiantes son: ¿qué debe suceder para que  $\gamma = 180^\circ$ ? ¿Cómo se pueden saber los valores mínimo y máximo para  $\gamma$  a partir de la expresión (3)? ¿Se puede asegurar que  $A$  gira una revolución completa si  $0 < \gamma < 180^\circ$ ?

Lo que se espera es que los estudiantes puedan hacer un análisis cualitativo de la expresión (3), teniendo en cuenta las propiedades de la función  $\cos^{-1}$ . Otra posible ruta para tratar de encontrar condiciones que aseguren que la barra  $A$  gira revoluciones completas, consiste en denotar como  $\alpha$  al ángulo formado entre las barras  $A, B$ ;  $\beta$  el ángulo formado entre las barras  $C, D$  y  $\delta$ , ala diagonal del cuadrilátero que va de la articulación  $A, D$  a la  $B, C$ , como se muestra en la figura 3.9:



**Figura 3.9:** Se divide el cuadrilátero por medio de la otra diagonal, para buscar las condiciones que permiten el giro completo de  $A$ .

Se puede escribir la Ley de los cosenos para el triángulo  $C, D, \delta$ , como sigue:

$$C^2 + D^2 - 2CD\cos\beta = \delta^2 \dots\dots\dots(4)$$

Supongamos que la barra  $A$  es capaz de girar una revolución completa, entonces los valores para  $\delta$  mínimo y máximo, se obtienen cuando las barras  $A$  y  $B$  se alinean, es decir cuando  $\alpha=0$  o cuando  $\alpha=180^\circ$ :

$$\delta_{\min} = |A - B| \quad \text{y} \quad \delta_{\max} = A + B \dots\dots\dots(5)$$

De (4) se sigue que, dado que  $-1 \leq \cos\beta \leq 1$  y dado que  $C^2 + D^2$  es por lo regular mayor que  $2CD$ ; similares cuando  $C \approx D$ ; (sólo iguales cuando  $C=D$ ), se puede afirmar que:

$$C^2 + D^2 - 2CD \leq \delta^2 \dots(6)$$

(La igualdad se cumple sólo con  $\cos\beta = 1$ )

De (6) se sigue que:

$$(C - D)^2 \leq \delta^2 \text{ Lo que implica que:}$$

$$|C - D| \leq \delta \dots(7)$$

Por la desigualdad del triángulo se puede afirmar que:

$$C + D \geq \delta \dots(8)$$

De (7) y (8) se puede concluir que:

$$C + D \geq \delta \geq |C - D| \dots(9)$$

Con (5) y (9) se pueden escribir las condiciones para que la barra A realice un giro completo:

$$|A - B| \geq |C - D|$$

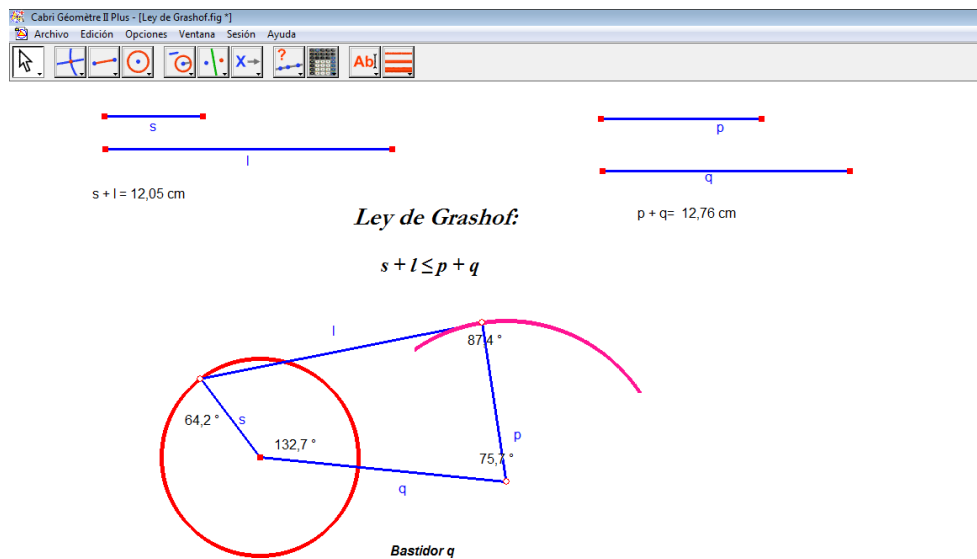
$$A + B \leq C + D$$

Algunas preguntas que se pueden realizar a los estudiantes, después de concluir lo anterior son: ¿si las cuatro barras son de la misma longitud, el mecanismo es de Grashof? ¿Si  $A < B < C < D$ , se puede asegurar que el mecanismo sea de Grashof? ¿Qué pasa si se conectan A, B, C y D en orden no consecutivo?

Para su correcta operación, los mecanismos de 4 barras, deben mantener una barra fija o estacionaria, que haga la función de bastidor o bancada; ¿qué diferencia existe al tomar como bastidor cada una de las 4 barras? Con la interacción con el software dinámico, se espera que los estudiantes puedan descubrir por ellos mismos, un criterio similar al enunciado conocido como la Ley de Grashof para mecanismos de 4 barras articuladas:

Para que una de las barras alcance a dar una revolución completa respecto a las otras, se debe cumplir que la suma de las longitudes de las barras más corta y más larga, debe ser menor o igual que la suma de las longitudes de las otras dos. Si  $s$  y  $l$  son las barras más corta y más larga,  $q$  y  $p$  son las otras dos, se debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$s + l \leq p + q$$



**Figura 3.10:** Se pide a los estudiantes que fijen cada una de las barras del mecanismo, para que experimenten los diferentes efectos que pueden ocurrir con Cabri Geometry

**Importancia de asegurarse que una de las barras gira revoluciones completas**

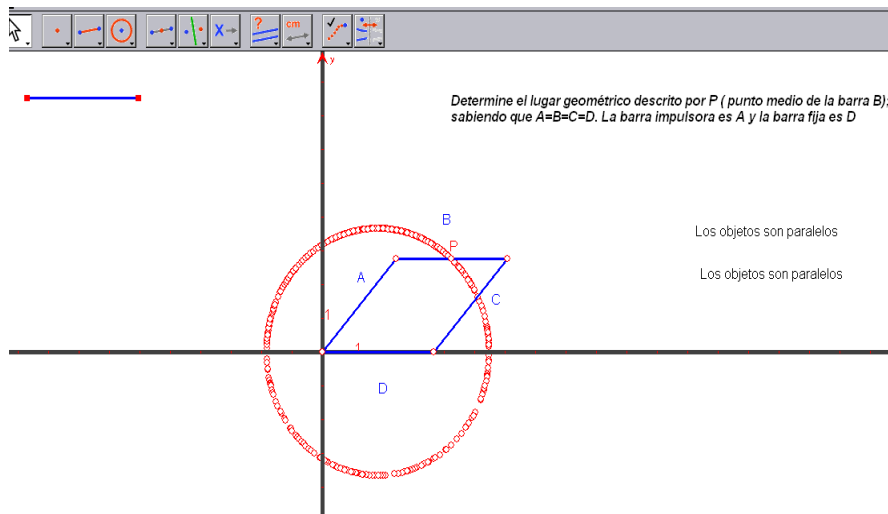
Al respecto de la importancia de asegurarse que en el diseño un mecanismo de 4 barras articuladas, una de las barras pueda funcionar como manivela, Shigley y Uicker (1999), mencionan que una de las consideraciones de mayor importancia cuando se diseña un mecanismo que se impulsará con un motor, es asegurarse que la manivela de entrada puede realizar una revolución completa. Los mecanismos en los que ningún eslabón describe una revolución completa no serían útiles para estas aplicaciones.

**Extensión de la actividad: Determinación del lugar geométrico descrito por un punto.**

Es fácil notar que las barras  $A$  y  $C$  que están articuladas en uno de sus extremos a la barra  $D$  (estacionaria), tratan de efectuar movimientos de rotación pura (figura 8), sin embargo la barra  $B$  tiene una tendencia muy particular: trata de rotar, pues sus extremos están articulados con los extremos libres de  $A$  y  $C$ , y además tiene tendencia a trasladarse. Este tipo de movimiento, se conoce en cinemática, como movimiento plano general. Los puntos intermedios de la barra  $B$ , también llamada barra acopladora, describen por lo general lugares geométricos poco comunes, que suelen representarse con polinomios de hasta sexto grado (Shigley y Uicker, 1999, p.23).

Un caso particular en que las longitudes de las cuatro barras son iguales (figura 5), puede ser útil para que los estudiantes traten de justificar el tipo de lugar geométrico que describe un punto de la barra acopladora  $B$ . Para este caso particular, se solicita a los estudiantes que traten de justificar qué lugar geométrico describe el punto medio  $P$  de la barra acopladora. Con el comando traza o lugar geométrico, los estudiantes pueden conjeturar que el lugar descrito es una circunferencia, pero dado que en general los lugares geométricos descritos por los puntos intermedios de la barra acopladora no son cónicas, se solicita al estudiante que trate de encontrar una justificación formal.

La sugerencia para los estudiantes es que introduzcan un sistema de referencia, lo cual no había sido necesario antes, se espera que los estudiantes propongan por simplicidad, que la barra estacionaria  $D$ , coincida con el eje de las abscisas y que el punto de articulación entre la barra impulsora  $A$  y el bastidor  $D$ , se sitúe en el origen (figura 11). Una forma de tratar de justificar qué lugar geométrico describe el punto medio de la barra  $B$ , es que a partir del sistema de referencia seleccionado, se traten de encontrar las coordenadas que representan la posición de  $P$ , para la configuración elegida. Es fundamental para tratar de expresar las coordenadas de  $P$ , que los estudiantes identifiquen que independientemente del ángulo de entrada entre la barra impulsora  $A$  y el bastidor  $D$ , el cuadrilátero es paralelogramo, se puede solicitar a los estudiantes que traten de explicar este hecho.

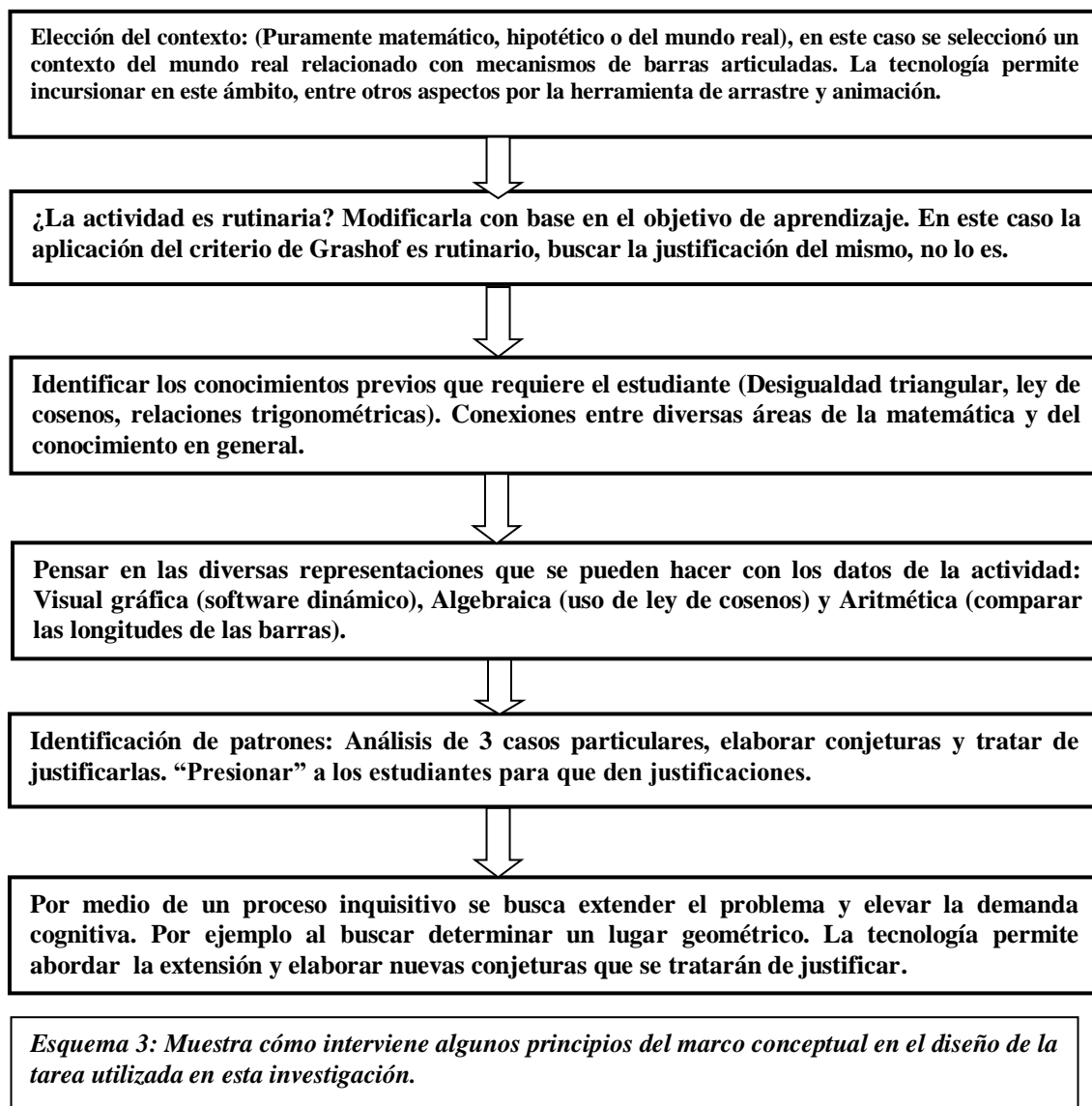


**Figura 3.11: Para el caso particular en que las cuatro barras son de la misma longitud, se busca justificar que el lugar geométrico descrito por el punto medio de la barra  $B$  es una circunferencia.**

Si se designa como  $\theta$  al ángulo agudo entre las barras  $A$  y  $D$  (figura 11), se espera que los estudiantes puedan tratar de escribir las coordenadas del punto  $P$ , a partir del sistema de referencia seleccionado, y logren llegar a  $y = A \sin \theta$ , lo cual confirma que el lugar descrito por el punto  $P$  es una circunferencia con centro en  $\left(\frac{A}{2}, 0\right)$ , forma polar de la ecuación de una circunferencia de radio  $A$ .

## PRINCIPIOS UTILIZADOS PARA EL DISEÑO DE LA TAREA

Determinar Objetivo(s) de Aprendizaje (Enfocados en Resolución de Problemas), evitar prácticas algorítmicas solamente, fomentar el pensar matemáticamente



En primer lugar se buscó una tarea que pudiera partir de algo aparentemente rutinario, en este caso, las condiciones para poder construir un cuadrilátero dadas las longitudes de sus cuatro lados, sin embargo con el enfoque que se le da, al introducir el contexto de los mecanismos articulados de cuatro barras, la tarea se puede considerar como no rutinaria, ya que entre otros aspectos, no se pretende llegar a un resultado por medio de un algoritmo, es decir, le presentará dilemas al resolutor.

Se identificaron los conocimientos previos que son requeridos para abordar la actividad, así como los nuevos conocimientos que se pueden generar y la forma en la que estos se conectan en la red conceptual del estudiante y se espera que con la información que se proporciona para la solución de la tarea, se pueda acceder a distintas representaciones.

Por medio del estudio de casos particulares, se espera que el resolutor identifique patrones presentes en la actividad, que le permitan proponer conjeturas sobre el comportamiento de los mecanismos bajo observación, los estudiantes deben ser presionados por el profesor para que traten de justificar las conjeturas planteadas.

A través del proceso inquisitivo que surja de la interacción profesor-estudiantes- software, se propone la extensión de la actividad, en este caso, tratar de determinar un lugar geométrico en particular, que se espera requiera mayor demanda cognitiva por parte de los estudiantes.

## APÉNDICE B: PROTOCOLO PARA EL ESTUDIANTE

Fecha: \_\_\_\_\_  
Guía de la actividad

Instrucciones: Lee con atención lo que se te solicita, si tienes dudas pregunta al profesor, es importante que trates de responder a todas las preguntas, escribiendo todas las ideas y recursos matemáticos que utilices para dar solución.

### PREÁMBULO

Abre el software de geometría dinámica Cabri Geometry y construye lo siguiente de forma individual:

- a) Un cuadrilátero de lados 5, 7, 8 y 13 centímetros  
¿Tuviste alguna dificultad?  
Compara el cuadrilátero que tú construiste con el de tus compañeros más cercanos  
¿Hay diferencia?  
En caso de existir diferencia ¿a qué lo atribuyes?
- b) Un cuadrilátero de lados 2, 3, 4, y 11 centímetros  
¿Tuviste alguna dificultad?  
Pregunta a tus compañeros más cercanos si ellos pudieron construirlo o no.  
¿Qué diferencia percibes con respecto al cuadrilátero que se te solicitó construir anteriormente?

Responde a las siguientes preguntas:

¿Un cuadrilátero queda bien definido al especificar las longitudes de sus cuatro lados? ¿Por qué?

¿Qué criterio puedes seguir para que dados los lados de un cuadrilátero, puedas decidir si su construcción es posible o no?

Tiempo máximo: 15 minutos

### ACTIVIDAD CENTRAL (lee con atención)

*En mecánica, un mecanismo de 4 barras no deformables, articuladas en sus extremos, es también conocido como mecanismo de Grashof, si se cumple que al menos una de las barras pueda dar una revolución completa con relación a alguna otra barra.*

Dado un cuadrilátero cualquiera de lados  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , averigüe si es un mecanismo de Grashof. ¿Qué criterio puede usar para saber si un mecanismo de 4 barras, es de Grashof?

Sugerencia:

Trata de representar la información con ayuda del software dinámico, si tienes dudas respecto a la actividad pregunta al profesor. Puedes usar el comando animación para confirmar si alguna de las barras da giros completos.

Si todavía no logras construir un cuadrilátero que funcione como un mecanismo de Grashof, observa con atención la animación en video que se proyectará de un mecanismo cuatro barras:

(Observar video)

¿Aún no logras representar un mecanismo de Grashof?

Observa con atención los intentos que realizaste en el software dinámico

¿De qué crees que depende que una de las barras del mecanismo pueda dar una revolución completa?

Tiempo máximo para explorar: 15 minutos

Para tratar de entender qué está pasando, por qué algunos cuadriláteros trabajan como mecanismos de cuatro barras articuladas tipo Grashof y otros no, te invitamos que trabajes los siguientes casos particulares, formando equipo con otro compañero cercano. Si tienes dudas de la forma en que vas a trabajar, pregunta al profesor.

*Análisis de casos particulares*

Caso I. ¿Qué pasa si  $A = B = C = D$ ?

Para este primer caso, con la guía del profesor, construyan un mecanismo de 4 barras articuladas, en el cual, las cuatro barras tengan la misma longitud.

Anoten sus conclusiones y observaciones (discute con tu compañero y lleguen a un acuerdo)

II. ¿Qué pasa si  $A=B$  y  $C=D$  o  $A=C$  y  $B=D$ ? A continuación, revisen en equipo los casos en los que las 4 barras no tengan la misma longitud, pero que se tengan dos barras de la misma longitud, y otras dos de diferente longitud a las primeras, pero iguales entre sí.

Anoten sus conclusiones y observaciones (discute con tu compañero y lleguen a un acuerdo)

Caso III.  $A + B = C + D$ ; o  $A + C = B + D$ . Ahora realicen la configuración de un mecanismo, en el cual las cuatro barras sean de diferente longitud, pero que la suma de longitudes de dos, sea igual a la suma de otras dos, por ejemplo, configurar el mecanismo cuatro barras con los datos  $A=2$ ;  $B=7$ ;  $C=4$ ;  $D=5$ .

Anoten sus conclusiones y observaciones (discute con tu compañero y lleguen a un acuerdo)

Tiempo máximo para analizar los tres casos: 30 minutos

Después de revisar los casos anteriores ¿tienen alguna conclusión respecto a la pregunta inicial? ¿Tienen sospechas respecto a qué se debe cumplir para que una de las barras gire vueltas completas? Discutan entre compañeros de equipo y escriban las conclusiones que tienen o los acuerdos a los que han llegado respecto a la pregunta.

*Búsqueda de relaciones entre la longitud de los lados y los ángulos entre barras.*

Toda vez que se han construido con ayuda del software dinámico algunos casos particulares, es posible que tengan algunas sospechas, una tal vez relacionada con el momento en que las barras  $B$  y  $C$  se alinean; si fueron observadores, la barra  $A$  no pudo efectuar giros completos cuando el ángulo entre  $B$  y  $C$  fue de  $180^\circ$ .

Otra sospecha puede estar basada en que la suma de las longitudes de dos barras, comparadas con las otras dos, tiene relación con la rotación completa de la manivela.

Para tratar de entender el comportamiento de estos mecanismos, trata de establecer relaciones matemáticas que involucren los datos que se sospecha tienen que ver con la rotación en particular de la barra  $A$ .

¿Qué relaciones pueden establecer que involucren los ángulos y las dimensiones de las barras del mecanismo? Discutan en equipo y traten de escribirlas. Si tiene dudas, pregunten al profesor.



### ENCUESTA DE SALIDA

Te agradecemos tu participación y te solicitamos para finalizar que respondas la siguiente encuesta:

Edad: \_\_\_\_\_

Semestre y carrera: \_\_\_\_\_

¿Cuáles han sido los últimos que llevaste de matemáticas?

¿Has tenido dificultades para hacer las actividades? Explica por qué

¿Prefieres esta forma de trabajar que la tradicional? Explica por qué

¿Te ha gustado la experiencia? Explica por qué

¿Te ha gustado trabajar en equipo? Explica por qué

¿Te gustaría continuar trabajando de esta forma? Explica por qué

¿Qué es lo que más te ha gustado de esta experiencia?:

¿Qué es lo que menos te ha gustado de esta experiencia?

Expresa tu valoración general o los comentarios que creas que son de interés:

## APÉNDICE C: LA SEGUNDA TAREA DE APRENDIZAJE

### Actividad de aprendizaje: Identificación de lugares geométricos

#### Objetivo de aprendizaje:

Identificar lugares geométricos generados por configuraciones simples, al mover alguno de los elementos iniciales.  
Identificar variantes e invariantes en una configuración geométrica dinámica.  
Transitar de representaciones geométricas a representaciones algebraicas con ayuda del software de geometría dinámico.  
Dar argumentos algebraicos para justificar conjeturas geométricas elaboradas con ayuda del software dinámico.

#### Conocimientos matemáticos previos:

Definición de cónicas como lugares geométricos, particularmente definición y ecuación de la parábola.

Definición y propiedades de la mediatriz.

Cálculo de distancia entre puntos en un sistema coordenado.

Ecuación de una recta dados dos puntos o un punto y su pendiente.

Resolución de sistemas de ecuaciones.

Conocimientos informáticos previos:

Uso de comandos básicos del software Cabri Geometry II Plus, tales como trazo de segmentos, rectas, arrastre, traza o lugar geométrico y mostrar ejes.

#### Escenario de la Actividad:

Aula con pantalla de proyección y cañón proyector, equipo de cómputo con software dinámico disponible por cada estudiante.

#### Proceso Inquisitivo:

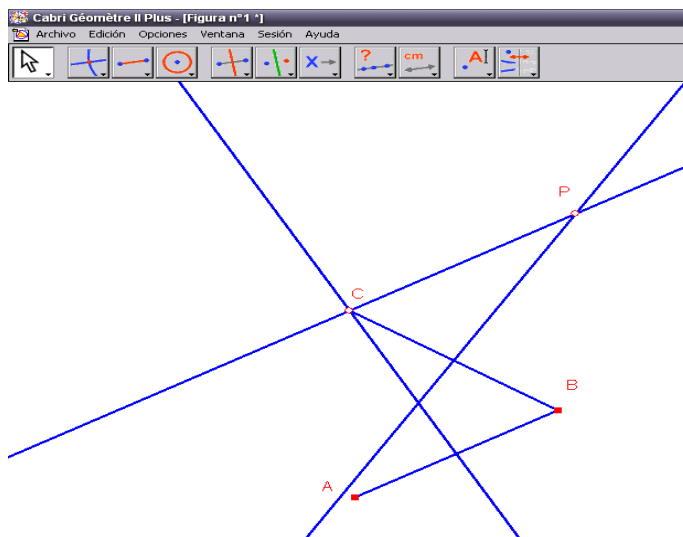
El profesor debe tener especial cuidado en hacer preguntas que guíen a los estudiantes sin darles la ruta de resolución o respuesta de forma explícita: debe motivarles a tratar e justificar sus observaciones en el software para que éstos no consideren que una construcción dinámica y la medición de atributos pueden ser considerados una justificación formal

#### Protocolo de Implementación

Realiza la siguiente construcción con ayuda del software de geometría dinámica Cabri geometry, si tienes duda, pregunta al instructor:

Traza el segmento  $\overline{AB}$  de cualquier longitud, traza la mediatriz de  $\overline{AB}$  y coloca un punto  $C$  sobre ésta que puedas mover libremente sobre la recta. Traza una recta perpendicular a la mediatriz  $\overline{AB}$  por el punto  $C$ . Traza la mediatriz del segmento  $\overline{BC}$ . Llama  $P$  al punto de intersección entre las dos mediatrices.

¿Qué lugar geométrico describe el punto  $P$  al moverse  $C$  sobre la mediatriz de  $\overline{AB}$ ?



Pregunta para los estudiantes:  
¿Qué entiendes por lugar geométrico?

**NOTA PARA EL INSTRUCTOR:**

Permitir que los estudiantes se guíen únicamente con las instrucciones y que traten de forma individual de generar el lugar geométrico en cuestión. Permitir Aproximadamente 10 minutos, si después de este tiempo, no todos lo lograron, retomar la construcción y mostrarla paso a paso con auxilio del cañón proyector y la pantalla de proyección, se recomienda que para trazar el lugar geométrico se utilice el comando traza en lugar del comando lugar geométrico.

**Conjeturas de los estudiantes:**

Ya sea de manera individual o con ayuda del instructor, cuando los estudiantes observen el lugar en cuestión, es muy probable que la mayoría afirme que es una parábola, es necesario que el instructor insista en que por la forma del lugar geométrico generado, no se puede afirmar que este sea una cónica.

**Pregunta para los estudiantes:**

¿Por qué es importante asegurarse de que el lugar geométrico en cuestión es una parábola?

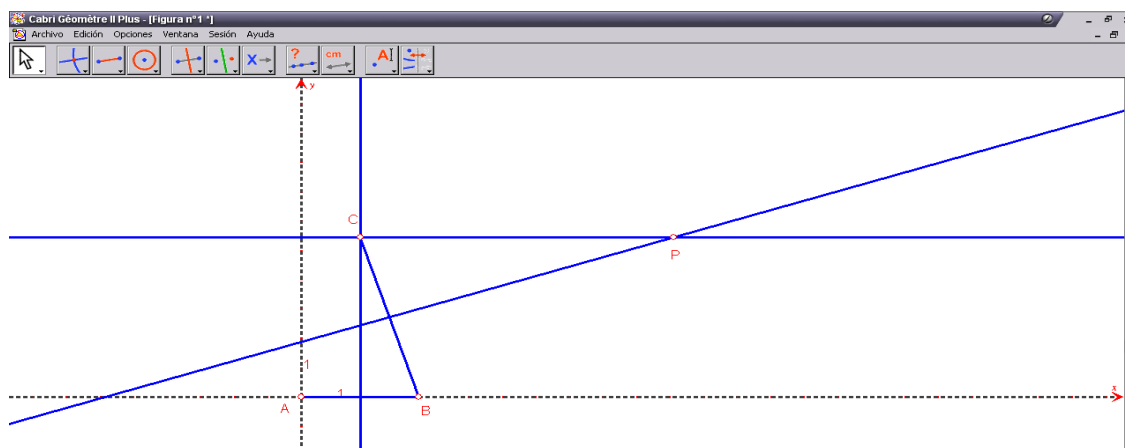
**NOTA PARA EL INSTRUCTOR:**

Se puede solicitar a los estudiantes que realicen una construcción adicional en la que se genere un lugar geométrico que a simple vista pareciera ser una parábola, pero que se pueda corroborar que no lo es, con esto los estudiantes se pueden convencer de la importancia de justificar sus conjeturas.

Una posible ruta para determinar si el lugar geométrico es una parábola

De tus cursos previos, en particular del curso de geometría analítica, recordarás que los lugares geométricos de las cónicas se pueden representar en el plano cartesiano. Utiliza un plano cartesiano como sistema de referencia para representar la información de la actividad.

Sugerencia: Considera el origen del plano cartesiano como el extremo  $A$  del segmento  $\overline{AB}$  y el extremo  $B$  sobre el eje  $x$  ¿se pierde generalidad por hacer esto?



El lugar geométrico que describe el punto  $P$ , es el cruce de dos rectas: la perpendicular a la mediatriz  $\overline{AB}$  por el punto  $C$  y la mediatriz del segmento  $\overline{BC}$  ¿puedes encontrar las ecuaciones de ambas rectas? ¿Qué datos necesitas saber para determinar la ecuación de una recta? ¿Qué obtienes al resolver simultáneamente las ecuaciones de dos rectas?

## APÉNDICE D: ENTREVISTA.

1  
2  
3 E: entrevistador

4 P: profesor

5 E: Bueno, buenos días, pues entonces no sé..... te hago algunas preguntas con respecto a , bueno en este caso son con  
6 respecto a la actividad, la actividad de aprendizaje mmm.., una sería ¿ cómo fue que tu escogiste primero tu tema? ¿ ya  
7 tenías , digamos antecedentes o una idea de los que ibas a hacer?, o hasta que tú por ejemplo leíste acerca de los  
8 diferentes marcos teóricos, y fue como te fuiste dando cuenta de qué es lo que querías hacer, o porque ya previamente  
9 habías hecho algo parecido ¿o cómo, vaya se originaron las ideas para esa actividad?

10 P: primero que nada, esta tarea es el resultado de varios intentos previos, al principio se pensó en otras tareas, lo que si  
11 teníamos claro desde un principio es que la tarea de aprendizaje tenía que estar contextualizada, o no necesariamente, pero  
12 si dentro de un marco que tuviera que ver con la geometría, por el uso del software de geometría dinámico...

13 E: ajá

14 P: durante las lecturas que se hicieron para definir el problema y para establecer el marco conceptual, pues de antemano  
15 sabíamos que tenía que ser una tarea no rutinaria, y que podía ser en cualquiera de los tres contextos que Barrera y Santos  
16 definieron para las tareas de aprendizaje, podían ser hipotéticos, del mundo real o puramente matemáticos, entonces en ese  
17 sentido como ya comentaba, primero se tuvieron algunos otros intentos, de hecho había una tarea previa que no tenía nada  
18 que ver con ésta, y que estaba en el contexto puramente matemático, al final de cuentas, pues en parte por los  
19 antecedentes que yo tenía previos a mi formación y por algo que estuve trabajando con estudiantes de licenciatura, fue que  
20 nos decidimos por esta tarea que tenía que ver con el contexto de los mecanismos, ya que se adaptaba a las condiciones  
21 que nosotros queríamos que era , entre otras cosas, una tarea no rutinaria, trabajarla con el software dinámico, nos pareció  
22 atractivo de la tarea que estaba en el contexto del mundo real, de hecho se trata de modelar de forma cinemática lo que  
23 sería el funcionamiento de un mecanismo, que en la vida real podría operar bajo ciertas condiciones como lo muestra el  
24 software, y que obviamente se nos permitía hacer conexiones en la red conceptual del estudiante entre conocimientos  
25 previos y lo que en el objetivo de aprendizaje se espera que se logre...

26 E: osea que digamos como que yo de repente, no tenía pensado este tema, pero resultó un tema que por un lado buscabas,  
27 viendo estos contenidos por un lado ¿no? Y por otro lado en base a los requisitos que se estaban viendo previos de cómo  
28 debía ser la actividad, de repente como que este tipo de temas encaja ¿no? ¿ eso fue algo así digamos? Se dio como , osea  
29 no lo pensaste y surge este tipo de actividad se apega a lo que tú tienes pensado ¿no? Tenía las características que tu  
30 querías...

31 P: exactamente, fue algo parecido a lo que tú comentas, y la motivación principal fue que, como dije hace algún momento,  
32 fue por formación, yo en algún momento de la licenciatura, discutí algunos de estos temas en algún curso, sin discutir  
33 sobre todo la validez de este criterio en el que estaba la actividad, criterio conocido como ley de Grashof. Posteriormente  
34 hace unos meses por cuestiones de trabajo, tengo que impartir yo temas a estudiantes de licenciatura, vuelvo a retomar  
35 estos criterios, que incluso yo no había estudiado, como ya lo dije, me doy cuenta, cosa que no recordaba, que en la  
36 literatura al respecto, se menciona el principio, se enuncia, se dice que es muy sencillo, y efectivamente verificarlo lo es,  
37 pero no se hace una discusión sobre su validez, fue la motivación principal para incorporarlo igual a esta actividad....

38 E: si, otra pregunta, así puntualmente, ¿cuáles serían tus, digamos la actividad central es que tú tomaste de cada uno de tus  
39 marcos teóricos, o qué ideas son las que digamos, están en el centro de esta actividad?.....que tu tomaste a partir de ese  
40 conocimiento.

41 P: bueno, bien bien , pues de entrada nosotros tenemos tres perspectivas dentro de nuestro marco conceptual, el primero es  
42 la resolución de problemas, en la resolución de problemas, se parte de unas consideraciones teóricas de una actividad  
43 rutinaria, esto es, que sea una actividad matemáticas que se tiene que resolver, no solo por medio de algoritmos, lo menos  
44 importante es llegar a un resultado, sino todo el trabajo que el estudiante realiza al quererlo resolver, y bueno hay  
45 .....dentro de este marco se mencionan principios, se mencionan algunas heurísticas, en ese sentido igual la tarea se  
46 adapta, porque entre otras cosas que se mencionan en solución de problemas, está por ejemplo el poder hacer diferentes  
47 representaciones de los datos, que es una de las cosas que se pretenden hacer igual con el software, eh se espera que se  
48 puedan por ejemplo plantear diferentes expresiones algebraicas que tengan la misma incógnita y entonces en ese momento  
49 igualarlas, que es algo que sucede, o al menos esperamos que suceda dentro de la actividad, se espera igual que cuando el  
50 estudiante la empieza a resolver, llega un momento en el que quiere extenderla, él debe tratar de formalizar lo que está  
51 conjeturando, entonces bueno eso es en torno a la resolución de problemas, que es una de nuestras perspectivas, la otra es  
52 el incremento de la demanda cognitiva de una tarea de aprendizaje, entonces en ese sentido nosotros consideramos que esa  
53 tarea demanda altos niveles de demanda cognitiva en los estudiantes, entre otras cosas por ser una tarea no rutinaria, por  
54 ser una tarea dentro del contexto del mundo real, y que aunque se requieren algunos conocimientos previos básicos, la  
55 actividad se puede extender y demandar cada vez más niveles cognitivos del estudiante, que esperamos, de hecho es una  
56 de las cosas que se espera, que la demanda cognitiva dentro de la actividad vaya creciendo y se mantenga en nivel alto, y  
57 para eso igual nos va a ayuda el uso de la tecnología, que es la tercer perspectiva que nosotros hemos incorporado, de  
58 antemano haber implementado el uso de la tecnología para hacer esta tarea, lo que queremos ver es cómo el uso de un  
59 software dinámico en particular, como cabri, permite que el estudiante pueda elaborar conjeturas, ver algunas  
60 representaciones dinámicas que en lápiz y papel, o con lápiz sería muy difícil, se nos hace fundamental el uso del software  
61 dinámico, ya que algo central en la tarea es observar animaciones, el poder arrastrar, el poder mover objetos, y ver cómo

62 se comportan esas configuraciones bajo ciertas condiciones, básicamente para nosotros eso es lo que consideramos desde  
63 nuestra perspectiva para diseñar ésta tarea, y por eso la consideramos una tarea adecuada.

64 E: ok, entonces y luego en base a esto, ¿fué que a partir de ahí tú entonces diseñaste tus objetivos?, o tuviste que tomar  
65 otros elementos para diseñar los objetivos, ¿cuáles serían entonces los objetivos en términos generales de esta actividad?

66 P: Bueno otra de las cosas que se debe mencionar, es que la tarea está dirigida para básicamente estudiantes de  
67 bachillerato, de cuarto semestre en adelante, aunque se piensa implementar con estudiantes de licenciatura de primer  
68 semestre mmmhhhh... no debería haber mayor problema en ese sentido, tomando en cuenta entonces los antecedentes  
69 que deberían tener los estudiantes, como un curso de álgebra, geometría y trigonometría, y geometría analítica, fue que  
70 nosotros adaptamos y diseñamos objetivos relacionados con lo que se espera que estudiantes de bachillerato, como ya  
71 mencioné de tercero o cuarto semestre en adelante, sea capaz de desarrollar, que entre otras cosas es identificar  
72 propiedades geométricas de ciertas figuras, y poder utilizar por ejemplo un lenguaje algebraico adecuado para poder  
73 representar algunas de las condiciones que está observando, o poder utilizar otros recursos, como por ejemplo puede ser la  
74 ley de cosenos o como pueden ser las funciones trigonométricas, al querer desarrollar esta actividad.

75 E: y bueno... en general qué piensas tú... bueno nos hablaste un poquito de las condiciones particulares tuyas, pero  
76 entonces ¿qué crees que sea la parte importante que un docente deba considerar, en general, para poder diseñar una  
77 actividad de aprendizaje adecuada, o una actividad de aprendizaje que resulte efectiva?, qué ... digamos ... ¿qué es lo que  
78 tendría que tener un docente?

79 P: Bueno, entre otras cosas, y esto es algo en lo cual existe consenso en la literatura, y que además se ha discutido con ...  
80 en este caso con los tutores, que son los que guían este proceso de investigación mío, es que primero que nada el profesor  
81 debe tener conocimientos matemáticos sólidos, y en este sentido pues sí el profesor va a elaborar, o piensa diseñar una  
82 tarea de álgebra o de geometría, tiene que por lo menos tener también conocimientos sólidos sobre el cálculo, en este  
83 sentido para empezar a orientar el trabajo, el trabajo hacia las futuras construcciones conceptuales que debe hacer el  
84 estudiante, ehh... por otro lado a nosotros nos parece fundamental que el profesor sea el que diseñe la tarea, y no  
85 solamente sea un puente entre la tarea diseñada y la implementación con los estudiantes, que es lo que  
86 normalmente sucede, el profesor....

87 E: ve algo, ve una tarea y dice ésta..... está buena ¿no?

88 P: exactamente, bajo nuestra perspectiva el profesor no solamente es ése puente, no solamente toma por ejemplo un libro  
89 de texto y selecciona una tarea que le parece interesante y la implementa. No quiere decir que no pueda hacerlo de esa  
90 forma, podría tomar tareas que aparecen en libros de texto para hacer el cambio suave o adecuaciones, o hacer un  
91 rediseño, y considerar bueno los elementos que nosotros hemos mencionado en este trabajo, y que entre otras cosas lo que  
92 se persigue es que con la implementación de esta tarea, el estudiante pueda tener procesos cognitivos o procesos mentales  
93 que sean equivalentes al trabajo de un matemático profesional, esto es lo que en esta perspectiva nosotros llamamos el  
94 pensar matemáticamente, entonces básicamente: el profesor debe de tener sólidos conocimientos en matemáticas, debe  
95 también tener conocimientos del uso de las nuevas tecnologías para poder incorporarlas, en éste caso que él sepa que le  
96 ofrece un recurso como el software dinámico, y algo que nos parece fundamental, es que cuando él diseña la tarea, la  
97 experimenta consigo mismo, que es lo que ha pasado en nuestro caso, él piensa que la tarea puede ir por cierto camino  
98 cuando la empieza a desarrollar, y el mismo profesor la trata de resolver, se da cuenta de las problemáticas que podrían  
99 presentársele al estudiante, entonces él mismo comienza a corregirlo, lo cual nos parece que es algo pues benéfico en  
100 relación a simplemente tomar una tarea ya diseñada por alguien más, y tal cual que la implementara..

101 E: ok entonces estás comentando algo así como que la misma habilidad para hacer habilidades didácticas, depende  
102 también de la práctica que el profesor vaya teniendo sobre las propias actividades que va haciendo o repensando o  
103 replanteando... ehh...y entonces, ya que nos mencionaste eso, ¿qué dificultades en particular encontraste o tuviste en el  
104 diseño de tu actividad? O que tú viste como un obstáculo cuando la estabas haciendo y que no habías visto que  
105 existiera.... O que encontraste alguna dificultad en general, o algo que no habías contemplado y que te haya aparecido de  
106 repente y tú no la habías tomado en cuenta...

107 P: Bueno, en particular, ya que se hizo una revisión y se había decidido el hacer una tarea de aprendizaje, diseñar una  
108 tarea con este llamado criterio de Grashof o Ley de Grashof, de la cinemática de mecanismos, pues nos dimos a la tarea de  
109 hacer revisión de la literatura al respecto, y de hecho crecía más nuestra motivación en implementar esta tarea, ya que no  
110 encontramos una justificación de esta ley...

111 E: ajá

112 P: sin embargo, la ley es enunciada en varios textos, más o menos de la misma forma, y entonces cuando nosotros  
113 quisimos encontrar ese criterio por medio de algún medio geométrico o trigonométrico al alcance de los estudiantes, nos  
114 dimos cuenta que no era algo factible en ese sentido, tuvimos dificultades nosotros mismos en enunciar o llegar a un  
115 resultado como está en los libros, trabajamos algunas cosas que pensamos que están al alcance de estudiantes de nivel  
116 medio o de primeros semestres de licenciatura, y llegamos a conclusiones que fuesen acertadas, que nos parecieron como  
117 un resultado que se puede aceptar como un criterio que se puede usar para saber en qué condiciones los mecanismos que  
118 se van a trabajar en la actividad, pueden funcionar, pero si fue hasta cierto punto al inicio frustrante tal vez, el no poder  
119 deducir, digamos por cuenta propia, la ley tal como aparece en los libros de texto, lo cual se hizo a un lado, porque no es  
120 el objetivo principal de la actividad deducir esa ley, sino todo lo que el estudiante va a trabajar y puede generar de nuevo  
121 conocimiento, al querer desarrollar esta actividad.

122 (FIN DE PRIMERA PARTE DE LA ENTREVISTA)

123

124  
125  
126  
127  
128  
129  
130  
131  
132  
133  
134  
135  
136  
137  
138  
139  
140  
141  
142  
143  
144  
145  
146  
147  
148  
149  
150  
151  
152  
153  
154  
155  
156  
157  
158  
159  
160  
161  
162  
163  
164  
165  
166  
167  
168  
169  
170  
171  
172  
173  
174  
175  
176  
177  
178  
179  
180  
181  
182  
183  
184  
185

## TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA (parte 2)

E: Bueno... Marcos... ¿cómo fue que digamos encontraste la actividad o buscaste la idea? ¿cómo surgió?

P: Al principio yo tenía un objetivo de aprendizaje ya determinado, que era en pocas palabras, que los estudiantes pudieran transitar de representaciones gráficas a algebraicas, entonces en base a ese objetivo yo busqué actividades en reportes de investigación dónde se hiciera ese tipo de trabajo, en dónde se hiciera ese tránsito, en dónde en un ámbito, en un ambiente de geometría dinámica se generara un lugar geométrico y los estudiantes trataran de justificar qué tipo de lugar geométrico era usando la definición, las propiedades, y también tratando de deducir la ecuación algebraica que la definiera.

E: ok, entonces de esa entonces tuviste que hacer varias lecturas, de artículos, de revistas, todo eso, y entonces por ejemplo en realidad el artículo lo presenta de una forma y tu lo tomas literalmente o solo la idea y empiezas a modificarlo, o simplemente tienes una idea y tratas de ver qué parte de ese artículo te puede servir, o modificar esa idea, o de plano así la tomas nadamás...

P: no, yo no tenía una idea en particular, nadamás de trabajos en los que se usara software dinámico y se tratara de un tipo de lugar geométrico, en particular cónicas, me dí a la tarea de buscar artículos, de leerlos, y, de hecho si tuve que hacer modificaciones, por ejemplo una actividad que a mí me interesó mucho, la construcción daba circunferencias, el lugar geométrico que se generaba era una elipse, bueno en particular yo ya estaba diseñando la actividad para un caso particular en el que se generaría una elipse, intenté resolver la actividad yo mismo, pensando en la ruta hipotética que podrían seguir los estudiantes, y me di cuenta que el trabajo algebraico se empezaba a complicar, sobre todo porque uno de los puntos que formaba parte de una recta, estaba girando en la periferia de la circunferencia, entonces el manejo de sus coordenadas era digamos que algebraicamente ya no tan sencillo, entonces opté por abandonar esa actividad, seguí buscando y encontré otra donde igual se presentaba ahora por medio de solamente rectas, la generación de una parábola, el lugar geométrico que se tenía que justificar era una parábola, entonces dado que era más simple la configuración inicial, me di a la tarea igual de plantear una ruta hipotética, y me di cuenta que era más factible que los estudiantes pudieran seguir esa ruta, y fue como me decidí por esa actividad.

E: ok, entonces digamos que tenías una actividad inicial y la cambias...

P: sí

E: ¿Cuánto tiempo más o menos le invertiste en esa parte?

P: en la revisión, pues fueron revisiones esporádicas, osea no me dio tiempo continuo para revisar, revisé como en tres días algunos trabajos, pero no le dediqué, en cada día le dediqué como una hora u hora y media a revisar algunos trabajos, hasta que...y bueno ese tiempo incluyó la primera actividad que hice y empecé a diseñar, y posteriormente la modificación y la nueva actividad que al final de cuentas utilicé...

E: bueno, cuéntame un poquito volviendo al objetivo que mencionas, es ¿esas actividades que tú consultaste y en su momento seleccionaste como base para tu diseño, tenían un objetivo?

P: no, la actividad solamente presentaba por así decirlo, el potencialidad del software al generar lugares geométricos que el estudiante podía tratar de conjeturar qué tipo de lugar era, y luego hacer un trabajo para justificar, de hecho en la actividad, sin que estuviera explícito, el objetivo era más bien que los estudiantes se dieran cuenta que no por el solo hecho de que un gráfico tenga cierta forma, se pueda asegurar que sea una cónica, en ese trabajo que yo ví, con la misma construcción inicial, se generaba una curva que aparentemente era una parábola, y luego con comandos del software se comprobaba que no, que al pedir la ecuación del lugar, no era una cónica, osea ni siquiera. Y posteriormente haciendo una leve modificación en la configuración inicial, lo que se generaba sí era una parábola, entonces yo opté más bien por irme por el segundo camino, de generar de inicio la parábola, pero fomentarles a los estudiantes, que trataran de justificarlo, y que no solamente se quedaran con la idea de que lo era.

E: Es decir que tú querías ajustar tu objetivo al que tenías de inicio, el que debía cumplir el estudiante...

P: sí así es...exacto

E: ¿también tu planeaste o pensaste en la actividad tuya, la que comenzaste a diseñar, qué ruta hipotética iba a seguir el estudiante para poder resolverlo?

P: sí sí de hecho, como lo comentaba hace rato, parte de planear la ruta hipotética es que uno como profesor, a lápiz y papel primero, y después con el software, haga la construcción e identifique si el estudiante pudiera tener problemas al realizar la construcción, y ya que uno está seguro que el estudiante pudiera sin muchos problemas realizar esa construcción y generar el lugar geométrico, parte de la justificación formal es hacer al menos algunos cálculos a lápiz y papel, las representaciones algebraicas que también resuelvo yo como profesor para ver qué problemas pudieran tener los estudiantes, así es como más o menos era la ruta hipotética, y pues diseño también un protocolo o guía, para que el estudiante a la hora de realizar la actividad se vaya guiando.

E: ¿es un material escrito?

P: Exactamente, yo les entrego esa guía, y lo van siguiendo de acuerdo a cómo yo fui en el diseño y el planteo de la ruta hipotética.

E: y ahora pasando un poquito a lo que sería tu marco teórico, tu marco conceptual, eh...tu mencionas en tu trabajo que aplicas ciertos conceptos teóricos, que bueno son los que han guiado tu trabajo de tesis desde el principio, entonces esos principios teóricos los estás utilizando para diseñar tu actividad, ¿entonces cómo es que los estás aplicando, hasta qué nivel, cómo los utilizas específicamente, qué partes? ¿de qué manera?

186 P: bueno de entrada eso es lo que tengo, es decir, yo aspiro a que cada actividad que se diseñe contenga algunos principios  
187 de ese marco conceptual....de entrada lo que yo trato de plantear desde el principio es que la actividad sea no rutinaria,  
188 eso es algo que empata con el principio de resolución de problemas, y la demanda cognitiva, que a mí me parece un  
189 principio fundamental, bueno pues en nuestra concepción de lo que es una actividad no rutinaria, pues es una actividad  
190 que demande del estudiante, más que el uso de algoritmos y de procesos memorísticos, entonces en ese sentido es la línea  
191 que uno busca, de reportes de investigación que se basen en actividades de aprendizaje, y luego algo fundamental, es que  
192 como otro de los elementos de nuestro marco es el uso de la tecnología, pues se buscan reportes de investigación dónde se  
193 realizan construcciones con software de geometría dinámica, y que de alguna manera permitan al estudiante plantear  
194 conjeturas y querer justificarlas, que ese también es un principio de la resolución de problemas, el marco de la demanda  
195 cognitiva, dentro del mismo proceso de ir diseñando la actividad, pues uno va identificando por ejemplo el tiempo que  
196 sería necesario para que el estudiante pudiera analizar la información, pudiera tratar de resolver cierta parte de la  
197 actividad, en ese sentido pues está un aplicando principios de la demanda cognitiva también, como el de no darle al  
198 estudiante demasiado tiempo, como tampoco darle muy poco, así mismo, como parte de lo que uno va diseñando durante  
199 la actividad, es un proceso inquisitivo, durante el diseño y el tratamiento de rutas hipotéticas, como profesor uno se va  
200 preguntando qué cuestionamientos le puede hacer a los estudiantes, durante la implementación de la actividad, para irles  
201 guiando sin darles demasiada ayuda, pero tampoco dejarlos a la deriva, eso es parte de los principios de la resolución de  
202 problemas, y que también empata con principios de la demanda cognitiva, que habla de diseñar actividades que tengan  
203 que ver con los conocimientos previos que el estudiante posee, entonces de alguna manera así es como uno va  
204 estructurando, o al menos de manera personal trato de estructurar las actividades de manera deliberada utilizando los  
205 principios, sin que sea para mí una regla o una lista de principios a seguir forzosamente, sino que durante el proceso de  
206 diseñar la actividad se da uno cuenta que se van generando por sí mismos la utilización de esos principios ...  
207 E: ajá, ¿también con respecto al uso de la tecnología?  
208 P: claro también con respecto al uso de la tecnología, desde que repito desde que se elige la actividad, el hecho de que uno  
209 haga las construcciones previas para poder identificar incluso dificultades que pudiera tener el estudiante, teniendo  
210 además en cuenta que uno de los principios del uso de la tecnología también, es que el estudiante no considere que una  
211 construcción o que el software pudiera demostrarle como resultado una justificación formal, entonces en ese sentido, ya  
212 hablando muy en particular de la actividad que se diseñó, yo al inicio la diseñé en cabri, pensaba que se resolviera en  
213 cabri, ehh...cabri tiene un comando que se llama ecuación o coordenada de ecuación, entonces si uno lo selecciona ese  
214 comando, y selecciona un lugar geométrico generado, pues da la ecuación y uno puede ver si es una cónica o no, en ese  
215 sentido yo.... durante el diseño de la actividad en un momento planteaba que el estudiante usara ese comando , sin  
216 embargo por necesidades propias de la actividad, de la implementación, se tuvo que usar geogebra en lugar de cabri,  
217 entonces geogebra tiene la característica de que en la ventana algebraica automáticamente conforme uno va haciendo  
218 construcciones, se van generando en la ventana algebraica, digamos que los datos algebraicos de esas construcciones,  
219 entonces yo sabiendo eso les pedí a mis estudiantes, ya hablando propiamente en particular de esa actividad, que  
220 desactivaran la ventana algebraica, para que cuando ellos realizaran la construcción pedida, no observaran que el mismo  
221 software les estaba dando la ecuación del lugar geométrico, porque obviamente ahí iban a ver que era una parábola.  
222 E: entonces, qué otra cuestión....¿cómo tomaste en cuenta ¿cómo consideraste en el diseño de tu actividad esas  
223 (inaudible), de que los estudiantes que pudieras tener tuvieran esos elementos para hacerlo....  
224 P: Bueno, realmente no mucho tiempo, aunque hace rato manifesté que me tardé tres días , a lo sumo cuatro ya tenía lista  
225 la actividad , dedicándole un tiempo diario a leer, a leer los reportes. Para mí en particular considero que es poco tiempo,  
226 aunque sé de antemano que en la labor docente se tiene mucho menos tiempo, a veces se requiere diseñar actividades de  
227 un día para otro, sin que sea algo informal, sin hacer un protocolo por escrito que se les va a entregar a los estudiantes, yo  
228 por eso considero que aún tardándome cuatro días para mi es poco tiempo, y eso que los estudiantes con los que iba a  
229 trabajar eran de una licenciatura en matemáticas, de primer semestre, eso sí lo supe al inicio, en esos cuatro días previos  
230 de los que hablo, y bueno para lo que me ayudó, a lo que yo utilicé como parte del diseño de la actividad, como entrada  
231 era que con estudiantes de una licenciatura en matemáticas, no habría mucho problema en plantear una actividad que está  
232 en un contexto puramente matemático, como lo fue, pues ellos de entrada deben tener cierta predilección por estudiar  
233 matemáticas, entonces eso fue algo que me sirvió para no preocuparme en plantear la actividad tal cual sin un contexto, y  
234 lo otro es que yo sabía que por su formación previa del bachillerato a lo más que íbamos a usar nosotros es nociones  
235 sobre calcular distancias entre puntos, tal vez algún sistema de ecuaciones lineales, ehh...eso sí sabía que se les iba a  
236 complicar un poco el manejo de los elementos algebraicos, porque pues obviamente los puntos y las rectas que se utilizan  
237 en la construcción pues están dados en términos generales, no hay por ejemplo una recta o un punto particular, porque uno  
238 quiere resolver el caso general, entonces en ese sentido yo sabía que les iba a costar un poco porque ellos están  
239 acostumbrados a manejar casos particulares, pero repito, teniendo ese antecedente de estudiantes de licenciatura en  
240 matemáticas, que fue lo único que conocí, consideré que la actividad era adecuada.  
241 E: Otra pregunta, yo quería saber sobre tu concepción, tu propia concepción de las acciones que el docente debe de  
242 hacer, pero ahorita estamos hablando precisamente de la etapa previa, osea antes de que, sino precisamente, que tú  
243 consideras que debe ..... ¿ qué características debe tener un docente en cuanto a conocimientos y en cuánto otras  
244 habilidades que debe poseer para poder decir, bueno yo voy a diseñar una actividad en dónde voy a usar tecnología y voy  
245 a tratar de utilizar un marco teórico y voy a tratar de utilizar teorías que bueno ya son conocidas dentro de lo que es la  
246 educación matemática ¿no? ¿ qué es lo que tú piensas que debe tener un profesor? ¿ qué requisitos debe cubrir? ...y

247 además ¿ cómo puede hacer este tipo de actividades? ¿ cómo puede aprender un docente cuando parte de cero, cuando no  
248 sabe, cuando no lo ha hecho?

249 P: Pues de entrada el interés personal del docente por querer desarrollar actividades que le permitan alcanzar al  
250 estudiante los objetivos de aprendizaje que el pretende, de allí pues obviamente se requiere una sólida formación en  
251 conocimientos matemáticos, eso al menos como una concepción personal, yo pienso o considero que el profesor siempre  
252 debe saber más, de hecho mucho más de lo que enseña, bueno lo que enseña lo debe conocer a otro nivel mucho más alto  
253 de lo que pretende que sus estudiantes aprendan, saber más allá de ese tópico de matemáticas, incluso de su curso, si está  
254 enseñando geometría, debe de saber por supuesto de geometría y de cálculo, ese es el ejemplo que quiero dar a entender.  
255 Por otro lado la formación del profesor debe de ser continua y constante, tratar de diseñar actividades basándose en los  
256 marcos conceptuales que hoy en día se estudian en la educación matemáticas, pues no están al alcance de la mayoría de  
257 los profesores, al menos en mi experiencia personal he constatado que los profesores poco o nada saben sobre el marco de  
258 la resolución de problemas, sobre el marco de las representaciones semióticas, la teoría de situaciones didácticas, el marco  
259 de la demanda cognitiva, por ejemplo, y también tienen nulos conocimientos la mayoría de las veces en el uso de la  
260 tecnología, entonces pues es indispensable que el profesor tuviera una formación integral, tal vez por medio de  
261 diplomados, por medio de cursos, por medio de alguna especialización, de alguna especialidad que pudiera cursar en  
262 matemática educativa, o algún posgrado.

263 E: Entonces ahí sí este más específicamente ..... ahora un profesor que no domina mucho de esto y ve una actividad en un  
264 artículo de una revista, y la aplica ¿qué piensas de eso?

265 P: que puede ser, por decirlo en términos coloquiales, un arma de dos filos, eso es algo que por ejemplo yo por el interés  
266 que tenía antes de la formación que ahora tengo, lo quise hacer, a mí siempre me interesó el uso de la tecnología, siempre  
267 estuve interesado en tratar de presentarles a los estudiantes actividades, sin saber que características debían cubrir, pero a  
268 mí me interesaba que las actividades les motivaran, les despertaran sin saberlo, aspectos del pensamiento matemático,  
269 pero muchas veces esas actividades considero que fracasaron porque de entrada yo mismo no tenía las bases, por ejemplo  
270 para el uso del software, no le daba un uso adecuado, por ejemplo no conocía el manejo de diferentes software, no  
271 conocía principios de la educación matemática, entonces considero que es muy limitante y que puede ser un arma de dos  
272 filos...

273 E: si lo hacemos así...

274 P: si lo hacemos así nadamás, la actividad pudiera fracasar la realización, o no pudiera llegar al objetivo que uno pretende,  
275 obviamente tal vez se vería muy bonita la clase, usando tecnología, los estudiantes sentados en la computadora, pero no se  
276 estaría logrando lo que realmente se pretende.

277 E: y con respecto a eso mismo sin embargo ¿ tu si recomiendas que un profesor que ya tiene tiempo impartiendo  
278 matemáticas en el nivel superior o medio superior, si ya vaya empezando? ¿ cómo puede una persona así , digamos a  
279 empezar a hacer sus primeras como *pininos* digámoslo así, o previamente tiene que tener toda esa formación? Digamos  
280 que ya tiene la necesidad de hacerlo, de empezar...

281 P: yo sugeriría que si el profesor tiene la motivación de hacerlo, que empezara por cuenta propia tratando de documentarse  
282 leyendo todo tipo de artículos, de reportes de investigación que hablen de....

283 E: osea sacar ideas de ahí?

284 P: sí..

285 E: y él puede hacer sus propias aportaciones, aunque tiene que estar consciente que...

286 P: ahora hay otro problema ...

287 E: le faltan muchos elementos teóricos para poder construir una actividad que tenga una intencionalidad, unos  
288 objetivos...y que tome encuentra principios teóricos.

289 P: yo así lo considero, aunque de entrada implica otro problema, por experiencia personal he notado que, y a mí me  
290 pasaba, pues que uno como profesor de matemáticas, poco o nada sabe sobre todo este tipo de eventos que hay, de estos  
291 grupos de investigadores, de las publicaciones especializadas sobre educación matemática, entonces uno como profesor  
292 con esas limitantes lo más que haces es recurrir a libros de texto, y a veces ni siquiera a libros recientes, y pues quieres  
293 diseñar actividades que vienen ahí, y muchas veces son actividades muy limitadas, y por mucha motivación que tenga el  
294 profesor, debería tener conocimientos de tanto material que hay y de todas las investigaciones que se realizan sobre el  
295 diseño de actividades.

296 E: Bueno ahora quisiera pasar a otro punto, cuando tú aplicaste ya la actividad con los estudiantes en el aula ¿qué tan  
297 importante fue para ti, porque tú dices en tus estrategias la tendencia de la demanda cognitiva, que es uno de los principios  
298 que tú haces el de la demanda cognitiva, la cual debe mantenerse alta ¿qué prácticas tuviste que hacer para mantenerla  
299 alta? ¿Prácticas ya planeadas o que tuviste que implementar en el momento de la sesión?

300 P: de entrada, al menos de manera personal mientras hacía los intentos que ya teníamos de diseñar actividades, trabajo de  
301 investigación que hicimos, considero que un elemento básico para mantener la demanda cognitiva es el proceso  
302 inquisitivo, entonces desde que uno plantea ese proceso inquisitivo previo a la implementación, desde ahí se puede ir  
303 ajustando el nivel de la demanda, entonces eso es previo a la implementación, durante el diseño, lo otro es estar muy  
304 atento, ya durante la realización didáctica, para observar en qué momento la demanda puede decaer, eso sí puede suceder,  
305 osea uno hace una pregunta , y tal vez la pregunta no se entiende, en el diseño previo uno cree que esa pregunta va  
306 favorecer que el estudiante siga tal vez rutas de resolución, o plantee conjeturas, y ya sobre la marcha al ver que la  
307 pregunta no tuvo el resultado esperado uno pues improvisa, pero a mí me parece que con base en el bagaje y experiencia  
308 que tiene el profesor, para que pueda modificar las preguntas, y tratar de que la demanda cognitiva no decaiga, en ese



309 sentido pues hay que ser igual muy observador, hay que estar monitoreando al grupo, a los estudiantes, pero no cabe duda  
310 de que es un proceso ya difícil durante la realización, no faltan los estudiantes que sí están interesados, que a uno le  
311 preguntan y lo llaman, y se están yendo con uno constantemente, y sin quererlo empezamos a descuidar a otro grupo que  
312 tal vez no está tan motivado, que tal vez está teniendo problemas para hacer la actividad, y en esos estudiantes en  
313 particular, la demanda si podría estar decayendo.  
314 E: Bueno en general cuando hablas de esa ruta conocida, cuando ya terminaste la sesión en la cual hiciste la realización  
315 didáctica ¿tu consideras que se cumplió el objetivo de aprendizaje? ¿qué realmente lo que tu habías pensado que podía  
316 suceder pasó? ....(inaudible).....¿cómo te das cuenta que cumpliste con el objetivos que te propusiste?  
317 P: En particular en esta actividad, sin tener todavía resultados por escrito, yo considero que se cumplió el objetivo, al final  
318 se alcanzó un consenso muy importante, al final para dar conclusiones de una sesión, yo acostumbro hacer preguntas en  
319 plenaria al grupo, ver su participación, tratar sacar conclusiones, ese día terminamos concluyendo que el lugar geométrico  
320 era lo que se había conjeturado al inicio, tuve la participación muy activa de varios estudiantes, me pareció que el  
321 objetivo se había cumplido, este perdón repito, muy superficialmente lo afirmo, porque no he revisado el material escrito ,  
322 no he revisado archivos electrónicos , no había yo revisado la grabación que se hizo, pero yo de manera muy general, por  
323 todas la interacción que tuve con los estudiantes, es que sí considero que se cumplió el objetivo que había yo planteado..  
324 E: además te interesaba el tránsito de la representación numérica hacia la algebraica...  
325 P: eso es lo que a mí me pareció al final lograron , por eso yo quedé satisfecho con la realización.  
326 E: bueno pues gracias por todo.  
327 P: gracias  
328  
329 FIN DE LA ENTREVISTA (PARTE 2)  
330  
331

## APÉNDICE E

### TRANSCRIPCIÓN DE LA SESIÓN DEL 23 DE MARZO.

Pachuca de Soto, Hgo. a 25 de marzo del 2010

P= PROFESOR

A1= ESTUDIANTE 1

A2= estudiante 2, A3, etc.

P:-Entonces activas tu compás...ese es tu compás... selecciona por ejemplo el número 5, y te apoyas en donde tú quieras y te va a trazar un círculo de radio 5, entonces tú ya puedes apoyarte en el centro y trazar un segmento y tener la seguridad que tienes 5 cm....sale--- entonces ahí...

A1: ¿este?

P : ... abres ese botón y tienes ese segmento... entonces de ahí a cualquier punto de ese círculo tu sabes que ya tienes un segmento de longitud 5 que es lo que querías, y ahora tienes que ir colocando los otros lados de una forma similar, con el compás...

A1: ahh... osea este y luego 7 acá...

P: el orden no es relevante, no hay un orden en especial para...eh... irlo construyendo, yo por ejemplo lo hice en un orden específico, pero no tiene que ser el mismo, entonces lo interesante es que tú al final construyas un cuadrilátero donde los lados midan esos números, lo que se puede hacer con el compás seleccionando esas medidas, ..... a ver ... alguien ya terminó?

A2: (inaudible)

P: yo creo que maximizamos para ver mejor... ya pusiste esos números esos datos, ahora utilizas la opción compás, te los reconoce como longitudes en centímetros, en este caso si tú con el compás seleccionas el número 5 y te apoyas aquí, tendrás un círculo de radio cinco... ¿por qué es bueno hacerlo así? Porque entonces cualquier segmento que vaya del centro a cualquier punto es un segmento de radio 5, que es lo que queremos, yo les decía que lo voy ocultando para que no nos estorbe, lo oculto y entonces... ahora hay que colocar en el orden que tú quieras, los otros tres lados, usando igual el compás de forma que obtengamos igual el cuadrilátero ...

A2 : ( inaudible)

P: Aquí el objetivo de inicio es que todos obtengamos un cuadrilátero donde midamos, e incluso podemos medir con la herramienta del cabri, que tenga cuatro lados con esas dimensiones

A3 y A1 : ( moviendo los comandos para construir su cuadrilátero) ... sonido no audible

P: ¿qué pasó?... Les sugiero a los que no han maximizado la pantalla del cabri, maximícenla, que lo hagan para trabajar con más comodidad....(no audible) .....seleccionas este número y es como si el compás lo hubieras abierto cinco centímetros, te apoyas donde gustes ....exactamente, entonces por ejemplo aquí trazas un radio de este círculo y ya tienes la seguridad que es un segmento que mide 5...exactamente, entonces por ejemplo dices ahora quiero conectar el lado que mide 8 aquí en este extremo, es tú decisión, por ejemplo tomas ... ahora con tu compás, te apoyas aquí exactamente y ya vas a poder ...( no audible)...ahora trazas un segmento que parta de ahí y ya tienes la seguridad que mide 8 ahí te faltarían los otros dos si quieres seguir con ese orden, ya tienes el de cinco, el de 7 y te faltaría el de trece.

A2: una pregunta.... ¿cómo se ... las que voy trazando de radio 7 y luego estos puntos...por ejemplo ya para el..... pues no se va a unir ....

P: a ver ¿cuál fue el primer círculo que trazaste?

A2: el de radio 5

P: me imagino que es éste... y trazaste ese segmento...

A2: sí...ajá

P: y luego---

A2: el de radio 7...

P: ok te apoyaste aquí y ya tienes el lado de radio 7, hasta ahí vas bien, ya tienes dos lados del cuadrilátero...luego tienes que trazar el de 8 y el de 13 ...y me imagino que este es el de...

A2 : el de 8

P:ok, bueno, ahí se me hace que en el de ahí te tenías que esperar, porque si te das cuenta cuando trazas el de ocho y lo pones donde tú quieras, realmente no sabes a dónde tiene que ir para que te cierre con 13 .... Ok como que cuando trazas los primeros dos lados...

A2: el primero no?

P: no importa, lo que tú decidas, pero si tu trazas los primeros dos lados, ... si te das cuenta cómo que tienes libertad ...dices, quiero empezar con un lado de 13 lo trazo como caiga, luego dices quiero trazar el lado de cinco, entonces lo trazas en un extremo del anterior y también como que no es muy relevante que pensaras en dónde vas ... pero los siguientes dos lados tienen que cerrar de tal forma que te den las longitudes que tú quieres... entonces fíjate que aquí vas

61 bien, y luego cuando trazas el de ocho yo creo que te tenías que esperar, trazar primero el círculo de radio 8 y luego trazar  
62 el círculo de radio 13 y ver en dónde se cruzan, porque en dónde se cruzan es en dónde tú debes trazar, entonces este es el  
63 círculo de radio...  
64 A2: este de aquí de este punto, luego este segmento es el de ocho y luego este de aquí es sale 13....  
65 P: pero como que el de 13 tiene que salir realmente de acá... si te das cuenta... porque los cuatro lados, tienen que estar  
66 conectados digamos en los extremos, entonces ahí esa fue la situación, entonces cuando trazaste aquí y apoyándote aquí  
67 trazaste el de 8 y debiste haber trazado aquí, aquí debiste apoyar tu compás para trazar el de trece y ver en dónde se  
68 cruzan estos dos círculos.... parece que es una mejor idea.  
69 A2: ¿tiene alguna herramienta de regresar... osea?  
70 P: --solo te deshace la última acción con control C, no es como otros softwares que te regresan hasta el inicio, entonces a  
71 veces es bueno no te preocupes, dale archivo nuevo, y volvemos a empezar...  
72 A2: sí  
73 P: y allá... ya terminamos?, ya es el cuadrilátero que estábamos buscando...de hecho una opción es activar este menú  
74 también y ahí dice distancia o longitud (voces inaudibles) .....exacto.... y seleccionamos directamente cada segmento y --  
75 --( no entendible)...nos tiene que dar los 13 centímetros.... Para que corroboremos el tipo de cuadrilátero... ah.. entonces  
76 es algo este....  
77 A2: pones un punto en el plano...  
78 P: Probablemente, cuando quisiste darle algún cruce de dos circunferencias, no le atinaste, entonces... eso es bueno, y  
79 verificar.  
80 Bueno...miren, como ya nos tardamos un poco en esta actividad inicial, es importante, pero ya llevamos más tiempo de  
81 lo planeado... le voy a pedir de favor a todos que dirijan otra vez su atención hacia la pantalla de proyección... y lo voy a  
82 volver a hacer con más calma, me parece que la explicación al inicio fue muy rápida entonces....pero ya estuvieron  
83 trabajando y eso es bueno, ya empezaron a interactuar ahí con el software...miren...de inicio, en el penúltimo botón  
84 tenemos una instrucción que dice número... como ustedes quieren construir un polígono, en este caso un  
85 cuadrilátero...con lados ya definidos, es buena idea que introduzcan las medidas que quieren es ... en este caso son 5,7, 8  
86 y 13... hasta ahí parece que no tuvimos ningún problema, luego como ya tenemos estas medidas definidas, bueno esos  
87 números ahora sería bueno tomarlos con el compás...sacar nuestro compás y abrirlo a cada una de esas medidas, para  
88 asegurarnos de que vamos a tener segmentos de esa longitud, entonces, otra vez, aquí en el quinto botón, si yo lo  
89 despliego, allí dice compás, lo selecciono y ese me va a servir mucho ahora ... por ejemplo, si quiero trazar un segmento  
90 de longitud 5 ... tomo con el compás esa medida, selecciono el número que dice cinco, me apoyo después en algún lado  
91 dónde yo quiera y ese círculo es de radio 5, entonces ahora me voy al tercer botón, y con la herramienta segmento, yo sé  
92 que si me apoyo en el centro de ese círculo y luego trazo hacia cualquier punto de su periferia, es un segmento de radio 5,  
93 que eso es lo que yo quería, y lo que platicábamos con uno de sus compañeros hace rato es... si se dan cuenta cuando van  
94 a trazar los primeros dos lados, como que tienen mucha libertad, porque yo por ejemplo, ahí tracé donde quise, realmente  
95 no tengo alguna restricción, ahora ví que muchos tenían ya círculos, y ya como que ...hasta confuso... yo les preguntaba  
96 ... ¿ y este círculo de que radio es ?... y ya ni se acordaban, entonces el último botón, si lo despliegan, tiene una  
97 instrucción que dice ocultar o mostrar, yo sugiero que vayan ocultando lo que ya no van a usar, seleccionan el círculo y  
98 le dan clic por aquí afuera...para que no les agarre ese círculo... entonces está el primer segmento de radio 5 y ...yo hace  
99 rato dije... a mí en particular me place seguir ahora este orden... el de lado 13 conectarlo aquí con el segmento... para ese  
100 extremo del segmento, entonces...lo pueden hacer en otro orden pero el orden que yo asigné hace rato fue ese, entonces  
101 ahora con el compás selecciono el número 13, obviamente me tengo que apoyar allí, me tengo que apoyar en un extremo  
102 del segmento anterior, para que de ahí salga el otro lado, entonces ahí trazo el círculo de radio 13, entonces de aquí que es  
103 el centro de esa circunferencia, hacia cualquier otro punto de la periferia es un radio de 13 centímetros, por eso lo hice de  
104 esa manera, entonces ahora otra vez selecciono segmento y lo trazo como caiga, no sé si se dan cuenta, pero es lo que yo  
105 decía, aquí no importa mucho hacia donde vayan esos dos lados, lo trazo y ya tengo dos lados construidos, voy a ocultar  
106 de una vez este círculo para que no me haga ruido...ahí está ... dos lados, el de 5 y el de 13, me faltan el de 7 y el de 8, es  
107 necesario que partan de los extremos libres de esos dos segmentos ... verdad? Entonces como que aquí si no tengo que  
108 hacerle a dónde caiga, voy a trazar un círculo con radio 7 aquí, y tengo que trazar un círculo con radio 8 acá, y los  
109 segmentos no salen a dónde yo quiera, tienen que salir a una intersección, si no, no sale el cuadrilátero como yo lo  
110 necesito, entonces eso es lo que hago a continuación, que de 7, tomo la medida de 7 con el compás, me apoyo en el  
111 extremo que está todavía libre del de 5, ahora tomo el de 8 con el compás, me apoyo en el otro extremo ... ah y fíjense  
112 ahí pasó algo curioso, ¿ qué se supone que debería haber pasado? ... pues que se intersecaran, si no cómo cierra el  
113 cuadrilátero...si ustedes se acuerdan estos dos segmentos iniciales como que son libres, yo los puedo como que modificar  
114 de posición ahorita todavía...entonces si me regreso aquí al primer botón, esa flechita siempre me permite arrastrar  
115 objetos, moverlos, entonces pues ahorita por lo que sucedió, creo que me vendría tomar este extremo y moverlo, porque  
116 es lo que estaba yo esperando, que se cruzaran...esas circunferencias, que se intersecaran, entonces pues ya  
117 saben... de aquí para acá va a ser 7 y de aquí para acá va a ser 8 y entonces ya estaría terminado el cuadrilátero en  
118 cuestión, entonces lo termino trazando un segmento que parta de los extremos libres de los lados que ya construí hacia la  
119 intersección de los dos círculos anteriores ... y ahí está ¿ok?... voy a ocultar esos círculos igual ... porque ahí como que  
120 me confunden un poco, me pueden estorbar... y esa es una opción, ese es el cuadrilátero que yo quería construir, de hecho  
121 y fue una muy buena idea...hace rato que fui con uno de sus compañeros le dije ... cabri tiene una herramienta que mide  
122 longitudes de segmentos, y le dije, para corroborar, para que estés seguro que es el cuadrilátero que buscabas, mide los

123 segmentos y resultó que el de 7 medía 6.99 ... algo había pasado, no tiene que suceder eso , entonces miren, yo para  
124 cerciorarme tomo la herramienta que dice distancia o longitud, y selecciono cada uno de los segmentos, ahí está el de 5, el  
125 de 13, el de 8 y el de 7, ahí están, entonces yo creo que  
126 ya...espero que con esta ayuda ya lo puedan terminar, creo que algunos ya lo terminaron...algo importante...los lados no  
127 deben cambiar de dimensiones , no importa el orden en el que tracen sus segmentos, no importa cómo hayan construido su  
128 cuadrilátero, debe tener dimensiones 5, 7, 8 y 13 porque fue la instrucción, de repente como que vi que el cuadrilátero de  
129 alguien si se alargaban más lo lados, y uno no está pensando que puedan deformarse los lados porque ya son dados  
130 ....eh...si ya lo hicieron, espero que ya hayan terminado, ahora mi pregunta es... ¿ todos obtuvimos el mismo  
131 cuadrilátero? Es decir, los que ya lo hicieron... ¿ obtuvieron este? ¿ es el mismo, tiene la misma forma? Es más vean el  
132 del compañero de al lado. ¿ todos obtuvieron el mismo cuadrilátero? Ahí ... aquí hasta le está moviendo... tienen las  
133 mismas dimensiones, pero no tienen la misma figura...y acá hasta lo está deformando, entonces ... a ver... si siguen la  
134 guía de la actividad nos dice... compara tu cuadrilátero con el de tu compañero más cercano... y la pregunta es... ¿ hay  
135 diferencias? En cuanto a dimensiones pues no hay diferencias, son los mismos lados, pero parece que ustedes están  
136 notando ya que sí hay diferencias, a mi me gustaría que contestaran esa pregunta... dice que en caso de que haya  
137 diferencias a qué se le atribuye, osea que razón pueden dar ustedes para que a un grupo de personas se les diga que  
138 construyan un cuadrilátero dándole las dimensiones, dando como dato las dimensiones, y cada uno obtenga cuadriláteros  
139 de distinta forma , no exactamente el mismo, sí con las mismas dimensiones, pero no necesariamente el mismo ... y  
140 tampoco estoy hablando de la posición, a lo mejor alguien lo puede girar un poco el cuadrilátero, pero completo osea no  
141 me refiero que esté en otra posición o algo así , me refiero a que literalmente si ustedes lo ven tiene otra forma , incluso el  
142 mío tiene una forma distinta a los que hicieron ustedes , repito no me refiero a la posición del polígono , me refiero en sí a  
143 la forma que tiene , e incluso yo ví que algunos por este lado , empezaron arrastrando un punto, y el cuadrilátero seguía  
144 teniendo las dimensiones .... Si de hecho yo los invito si ya construyeron el cuadrilátero, por ejemplo, vuelvo a arrastrar  
145 este punto y fíjense que ahora este cuadrilátero es muy distinto al primero que construí, pero sigue teniendo las  
146 dimensiones, o puedo por ejemplo igual manipular este otro lado... yo digo que ahí ya cambió la forma , no solamente  
147 cambió de posición, si yo muevo esto...como que cambia la forma , entonces ¿ a qué le atribuyen ustedes? ¿ o qué  
148 explicación pueden dar en el sentido de dados los cuatro lados de un cuadrilátero , no todos obtengamos el mismo?  
149 ..... No lo piensen mucho, creo que es algo que pueden escribir ahorita rápido ... sobre todo porque perdemos un  
150 poco de tiempo, no se preocupen ahorita nos vamos a apurar ..... eh ... me gustaría que ahora hagan el otro ejercicio, en  
151 el inciso b les pide que construyan un nuevo cuadrilátero, creo que ese lo van a poder hacer más rápido porque ahorita ya  
152 tienen la experiencia del primero. No tienen que borrar eso que ya hicieron, tampoco tienen que cerrar el programa o  
153 trabajar ahí mismo en esa hoja, simplemente si van a hacer una nueva construcción yo les sugiero que aquí se vayan... en  
154 la opción archivo y le den nuevo...y nos abre una hoja en blanco podemos trabajar libremente ahí otra vez, y no ha  
155 borrado, no se ha perdido lo que ya hicimos antes ... en ventana, en la opción ventana, sigue estando la construcción  
156 anterior..... entonces.... por dudas en el software no se preocupen , cuando ustedes tengan una idea y la desean llevar a  
157 cabo, nadamás nos preguntan y nosotros los auxiliamos ..... entonces hagan ese nuevo cuadrilátero, el de lados 2,3 , 4 y  
158 11 .....

159 ..... hace rato te acuerdas que yo tampoco lo logré cerrar al principio, pero moví y sí cerró, lo pude construir,  
160 originalmente el cuadrilátero anterior, cuando yo lo tracé, si algunos estuvieron poniendo atención, no cerraba tampoco ...  
161 entonces a ver.... Si ya tienen un poquito de más soltura con el software, ahora usen esos datos, 2,3,4 y 11 ... y con el  
162 compás empezamos a trazar los segmentos...

163 ( interviene el Dr. Aarón para dar una información sobre rectoría...)  
164 (... RUIDOS gente HABLANDO.....)  
165 P: muy bien... ¿ quién ya tiene el cuadrilátero ...  
166 A: la suma de los otros tres lados....  
167 P: de lados 2,3,4 y 11? ¿ quién ya lo construyó?  
168 A: oye ve.... ¿ el cuál?  
169 P el segundo cuadrilátero...  
170 A: no se puede.... No se puede  
171 A2: no se puede  
172 P: ¿ no se puede?  
173 A2: NO CRUZA...  
174 P: ¿ NO CIERRA?  
175 A2: NO  
176 P: pero hace rato tampoco cerraba el anterior....  
177 A2: pero es que aquí la suma de los otros tres lados no llega a ser la otra...  
178 P : ahh... ya.... entonces  
179 A2: no existe  
180 A3 : aquí están los tres y nunca va a cerrar...  
181 P: Ok a ver....entonces eso parece...  
182 A2: imposible...  
183 P: interesante... queremos construir otro cuadrilátero  
184 A2: obra del diablo?

185 P: ... y definimos las dimensiones...y resulta que cuando lo quisieron construir, ya unos se dieron cuenta, y espero que  
186 estén convencidos de que...  
187 A: ay ya ya ya ya  
188 P: como dicen, no cierra, y no cierra aunque empiecen a cambiar de posición algunos de los lados ... eh... si alguien no  
189 ha...  
190 A3: ( inaudible)  
191 P: si alguien no ha terminado... que se cerciore que efectivamente con esas medidas, 2,3,4 y 11 no se puede , digo no se  
192 cruzan y uno piensa, bueno pero yo puedo manipular la posición de este segmento para ver si se cruzan , como hace rato le  
193 hicimos, y simplemente vemos que no, osea por más que yo quiera no se van a cruzar y entonces definitivamente ese  
194 cuadrilátero no se puede construir...eh... si seguimos la guía, ahora hay dos preguntas que me gustaría que respondan ...  
195 ya tratamos de hacer el inciso b, ya concluimos que no se puede, y ahora hay dos preguntas que me gustaría que de forma  
196 individual cada uno de ustedes conteste con la experiencia que tienen ahorita de haber querido construir el cuadrilátero del  
197 inciso a y el del inciso b  
198 A2: (no audible)  
199 ( estudiantes escribiendo en su guía...)  
200 P: entonces...ya tienen alguna idea...  
201 A2 : serían menores que uno de ellos...  
202 P: contesten las dos preguntas que vienen antes de donde dice actividad central ... dice primer pregunta... ¿ un  
203 cuadrilátero queda bien definido al especificar las longitudes de sus cuatro lados? Y hay que explicar por qué estamos  
204 respondiendo sí o no , y la segunda pregunta dice ¿ qué criterios puedes seguir para que dados los lados de un cuadrilátero  
205 puedas decidir si su construcción es posible o no ? esas dos de forma individual...  
206 A2 : 2 más 3 más 4 es ....  
207 P: por favor ... y ahorita que terminen sí quisiera oír la opinión de algunos de ustedes ... sus respuestas, pero de entrada  
208 individual...lo que ustedes hayan percibido, lo que ustedes hayan notado con las dos construcciones que acaban de  
209 intentar hacer  
210 A2: yo pensé que estaba más grande....  
211 ( no audible )  
212 P: ahh...están haciendo trampa...ahhh... ahorita les voy a explicar... no te preocupes ...vamos con calma, lo bueno es  
213 que ahí está la tecnología y aquí tengo el internet y ahorita reviso, vamos por partes , no hay que saltarse lo que dice  
214 actividad central...vamos a acabar ésta, vamos a concluir unas cosas, y ya luego vemos lo de la actividad y vemos ese  
215 término raro que tu ya buscaste en internet , van a ver que suena raro para nosotros, pero tú ya notaste que es muy  
216 conocido, te salieron muchos resultados en la búsqueda ... ahorita vamos a eso no te preocupes, muy bien ... eh... nos  
217 puedes dar tú lo que hace rato me comentaste, nos puedes decir en voz alta ¿ por qué te diste cuenta que el cuadrilátero  
218 anterior no se iba a poder construir?  
219 A4: bueno, eso era parte de la pregunta ¿no? ¿ qué criterios puedes seguir para que dados los lados de un cuadrilátero  
220 puedas decir ... esto es porque si sumamos las longitudes de tres de los lados, esta suma debe de ser mayor al cuarto lado,  
221 porque si queda igual entonces quedaría sobrepuesto y entonces sería una línea recta ¿no? Entonces la suma de tres debe  
222 ser mayor a la cuarta...  
223 P: entonces tú lo que dices es que si sumamos 2,3 y 4 eso nos da 9 , pero tú dices que eso debiera haber superado 11... ¿ si  
224 están de acuerdo con el compañero ?  
225 A1,A2,A3,A4 : síii  
226 P: de hecho ese es un criterio que se parece a algo que se conoce como la desigualdad del triángulo...  
227 A1,A2,A3,A4: sí  
228 P: si ustedes van a construir un triángulo, si se les dan los lados...no están seguros si lo van a poder hacer o no, las  
229 longitudes de los lados claro...hasta que verifican la desigualdad triangular... bueno...hay un criterio, un criterio similar ,  
230 para poder construir cuadriláteros , si yo doy cuatro lados, eso no me asegura que el cuadrilátero se pueda construir, que es  
231 lo que aquí hemos visto... bueno , antes de pasar a la actividad central déjenme rápidamente platicarles algo... por  
232 ejemplo... ustedes piensen que van a construir un triángulo que sí se puede construir, es decir, tienen tres segmentos y  
233 con esos tres segmentos si es posible construir un triángulo .... entonces, fíjense, voy a definir ahora tres segmentos que yo  
234 espero que cumplan con la desigualdad triangular , y si defino tres segmentos y construyo un triángulo, lo cual voy a hacer  
235 ahora muy rápido, tomo ahora este como base por ejemplo ... ahora les voy a pedir que tengan un poco de imaginación y  
236 que supongan que los lados de este triángulo son barras sólidas, por ejemplo de metal o de madera, y que en los extremos  
237 voy a conectar los otros lados con otras barras de metal y tal vez con un perno. Y entonces como va a haber pernos en los  
238 extremos de estas barras, podrían girar , tendría esa facilidad, entonces déjenme terminar de construir este triángulo ... sí  
239 es posible construirlo porque sus lados cumplen con la desigualdad del triángulo ... no voy a tener mucho problema, y  
240 pues efectivamente ahí el cruce o la intersección de esas dos circunferencias me asegura que este triángulo, pensamos que  
241 sus lados son por ejemplo barras de metal o barras de madera se pueden construir, bueno la cuestión es esta miren  
242 ...déjenme regresarlo...este triángulo que acabo de construir ... eh... no se deforma, no sé si me explico con eso...voy a  
243 tratar de arrastrar alguno de los lados, osea es algo similar a si yo lo tuviera físicamente, y quisiera deformarlo aplicándole  
244 una fuerza, pero pues no osea ... lo que puedo hacer es trasladarlo, girarlo a lo mejor, cambiarlo de posición, pero no se  
245 deforma , es decir, la figura geométrica que conocemos como triángulo, ya que se define y sí se puede construir, es una  
246 figura 0239que no cambia de forma, digamos que si le aplicamos fuerza , es por eso común que en las estructuras estáticas

247 , en los puentes por ejemplo, el arreglo que se hace son barras que forman triángulos, en cambio ustedes ya lo vieron,  
248 déjenme regresar a una de las construcciones anteriores, en cambio éste cuadrilátero que sí se pudo construir porque  
249 cumple el criterio ¿verdad? sumo 5 7 y 8 y eso me da 20, y 20 supera a 13, que es el otro lado , por eso lo pude construir,  
250 sin embargo esta figura es deformable, si estuviera hecha de barras, hecha de metal por ejemplo y aquí tuviera pernos,  
251 pues ustedes pueden girar una de las barras y cambia de forma esa figura, es decir, un cuadrilátero es una figura que puede  
252 cambiar de forma pese a que ya estén dados sus cuatro lados..., bueno... la cuestión es ésta ...que en estática, si ustedes  
253 van a construir una torre, piensan que va a estar rígida, que no quieren que se mueva, y tal vez usan triángulos, pero  
254 cuando lo que quieren ustedes es transmitir movimiento, y es a lo que vamos , a la actividad central, tienen que pensar en  
255 algo que sí pueda cambiar de forma y que pueda transmitir a lo mejor cierto tipo de movimiento ... en particular hay algo  
256 que se llama mecanismos, en mecánica se utilizan unos dispositivos mecánicos muchas veces formados por barras  
257 articuladas, que se llaman mecanismos, hay un caso particular, un mecanismo llamado cuatro barras, entonces ahora sí  
258 vamos a pasar a la actividad central, lean con atención ese enunciado, y ahora sí va a aparecer una palabra que a lo mejor  
259 no conocían que es Grashof, o mecanismo de Grashof....  
260 ( tiempo para leer)....  
261 Entonces si ya leyeron, resulta que un cuadrilátero articulado , como lo habíamos platicado, puede ser usado como un  
262 mecanismo, un mecanismo que si cumple ciertas características, en particular mecánicas, se llama mecanismo de Grashof,  
263 un mecanismo en el cual alguna de las barras pueda dar giros completos... fíjense yo sigo con esta figura y parece que  
264 ustedes igual no la han perdido ...el primer cuadrilátero que hicieron... de dimensiones 5 4 8 y 13, el cuadrilátero  
265 físicamente se puede construir, pero ahora nos preguntamos ¿ será este cuadrilátero un mecanismo de Grashof? Cuando  
266 digo que si será un mecanismo de Grashof, me refiero a que por ejemplo, si yo le doy un giro, supongo que esto está fijo ,  
267 y si yo quiero girar esta barra hago así como una manivela, por ejemplo, cuando ustedes le dan vuelta a lo mejor a la  
268 manivela del parabrisas de la ventanilla, si esto logra dar un giro completo, esta construcción puede considerarse como un  
269 mecanismo de Grashof , entonces fíjense, hay un comando en el cabri que se llama animación , creo que está aquí en el  
270 penúltimo , entonces por ejemplo, si ustedes quieren animar algo, darle movimiento , yo puedo mover este punto, puedo  
271 simular que quiero que esta barra dé giros, entonces si selecciono animación, me apoyo en este punto no lo suelto , oprimo  
272 ahí y es como si yo tuviera un resortito miren, este resortito lo puedo manipular y me va a dar movimiento, entonces para  
273 que se mueva lento, no lo estiro mucho, y miren ahí va, ahí muy bien pues parece que eso es lo que queremos, que .... Ah  
274 caray...no pues está raro verdad?... pero nosotros queremos , que esa barra, la de 5, dé revoluciones completas....chin...  
275 parece que no...no da una revolución completa, parece que no la puede dar, entonces esa es la actividad central y es la  
276 pregunta.... El cuadrilátero sí se pudo construir, pero eso no me asegura que la barra pueda dar giros, aquí la única barra  
277 que puede girar es esta, se dan cuenta... las dos primeras que trazan son las libres...y las que pueden hacer girar.... Acá  
278 estas no porque ahí hay un cruce, esto es las obtuve por las intersección de dos círculos, entonces bueno esta no puede dar  
279 giros, pero voy a tratar de girar la otra, en este caso la grande, en este caso la de 13, igual con el comando animación, me  
280 pongo en ese extremo.... y ahí va... no peor esa... tampoco...esa más rápido tronó el mecanismo, miren hace cosas muy  
281 raras, si quisiéramos un mecanismo de esas dimensiones, parece que no se va a poder hacer...entonces.. les  
282 sugiero...como dice ahí en negritas... sugerencia traten ustedes de simplemente proponer cuatro segmentos , los  
283 segmentos A,B,C y D , que de entrada cumplan con el criterio que ya vimos para construir un cuadrilátero ... propongan 4  
284 segmentos con los que puedan construir un cuadrilátero , pero pueden arrastrar el punto con esta herramienta .... pueden  
285 darle animación, traten de construir un mecanismo que sí sea de Grashof. ... traten de experimentar y como dice ahí,  
286 encontrar un criterio que les permita saber en qué casos un cuadrilátero sí puede ser usado como un mecanismo de 4 barras  
287 articuladas....  
288 ( comentarios inaudibles )  
289 P:¿ese se veía muy bien verdad?  
290 A: pero truena...  
291 P: es lo que nosotros queremos, que sí pueda dar giros completos...esa barra....sí lo logramos ya tenemos... a ver ese es  
292 el ... bien....  
293 A: si lo giras al otro lado...si está bien  
294 P: a ver, ahí hay dos barras que puedes mover, a ver ¿por qué no mueves la otra...? Lo haces así... son dos....  
295 A: (comentarios inaudibles)  
296 P: y esa.... Ahí está...la otra sí da... entonces a ver...parece que... se comporta medio raro, hace algo un poco extraño  
297 este mecanismo, pero tú logras que se mantenga todo el tiempo, es decir tu das el giro y logras que se esté manteniendo,  
298 esa es una muy buena opción ya tú tienes unas dimensiones propuestas para 4 barras que cuando las articulas y haces girar  
299 alguna , si puede dar el giro completo, osea las otras barras se comportan de tal forma que le permiten girar ...  
300 (comentarios inaudibles)  
301 A: una pregunta...  
302 P: sí ¿qué pasó?  
303 A: estoy seleccionando el compás, el número y uno de los puntos que ya tengo, pero no me traza el círculo...  
304 P: a ver a ver ... compás...  
305 A: ya tracé de estos dos...  
306 P: ahhh... sí te lo traza, de hecho ya te lo trazó un montón de veces, ¿ sabes qué es lo que está sucediendo? Que tú estás  
307 proponiendo las longitudes iguales...  
308 A: ajá ....

309 P: entonces...este círculo es de radio...

310 A: ahh... me traza el mismo

311 P: exactamente... te lo trazo varias veces ahí

312 A: entonces si quisiera trazar un cuadrado, cómo le hago? Bueno... de esta forma...

313 P: ahh, ok ... a ver sí sí que te parece si ... dale uno nuevo ...entonces tú en general quieres proponer uno que tenga

314 cuatro lados iguales... a ver traza un segmento... por ejemplo... que va a ser tu... ese segmento.. te parece que esa sea la

315 longitud de las barras? Ahora saca el compás...

316 A: ya está ...

317 P : toma ese segmento... selecciónalo...y traza el círculo... entonces... igual que hace rato...trazas dos lados... los

318 primeros dos como que no hay mucho que pensarle.. con segmentos... osea ese ya es un lado de tu mecanismo... y ese ya

319 es otro lado ....sale? ... entonces que te parece si seleccionas ahora círculo ... eso te lo va a permitir, porque si te apoyas

320 aquí y abres acá ... aquí...aquí dale clic... ese es otro círculo de radio 4, bueno de éste radio y ahora haz lo mismo de aquí

321 para acá ... ya está seleccionado? ... no pero ahora sí ya te cambiaste...el círculo... clic en ese punto...clic en el

322 otro...eso...y... son esta y ésta ¿no?...ahí donde se crucen te va...exactamente...ahí donde se crucen te da ... no sé si es

323 un cuadrado... de hecho no estoy seguro pero sí son los cuatro lados iguales entonces puedes ocultar los tres círculos que

324 trazaste ...muy bien ... y ahora tratas de mover.. a lo mejor... ¿son iguales, verdad? ..y además ahora tú si cambias ese

325 segmento... puedes mover las medidas... las puedes mover a .... con libertad... puedes animar el movimiento... a ver qué

326 pasa ... pues parece que todo va bien... hasta ahí parece que ... muy bien... ya casi da el giro completo.... Ok...parece

327 que sí ¿ verdad?... ahí tienes un mecanismo...

328 A: ( inaudible)

329 P: ah.... Aquí hay un pequeño detalle ... tus puntos todos son intersecciones.. aquí... este sí lo vas a poder mover... los

330 puntos que son intersecciones ...este...no están libres... por qué para poderse mover ahí en todo caso lo puedes trasladar

331 ... éste es el que creo que puedes mover, entonces seleccionas el de animación, le das clic y no sueltas el botón para que

332 arrastres el resorte ...

333 A: ( inaudible)

334 P: ajá, nadamás de que si te das cuenta ahí tu lo que estás haciendo... es toda tu configuración... todo el ... eso es rígido

335 para que me entiendas... eso sí no cambia de forma y lo estás girando simplemente alrededor de un punto ...solamente...

336 Bueno, a ver muchachos creo que este es un buen momento... tal vez se están preguntando ustedes... ¿ qué es eso de los

337 dichosos mecanismos, que aquí nos están diciendo que tratemos de encontrar una forma de cómo se pueden construir... miren esto es una animación hecha en un software de ingeniería , esto ya no es cabri... en la vida real si ustedes agarraran

338 cuatro barras , bueno aquí la cuarta barra sería ésta., pero uno entiende que el mecanismo debe estar fijo en algo...

339 entonces les voy a presentar la animación, hecha en un software de ingeniería, de un mecanismo de 4 barras... se parece

340 mucho a lo que ustedes están haciendo... tal vez digan ¿ dónde está la cuarta barra? la cuarta barra va de aquí a acá, repito

341 se entiende, o si no lo tienen que considerar, que el mecanismo tiene que estar fijo en algo, y por lo tanto una de las barras

342 simplemente la tengo que usar como el ancla , digamos, entonces fíjense ... tal vez esto les ayude a entender mejor que se

343 supone que está pasando, o qué debería estar pasando con ese mecanismo , debe funcionar, y algún uso se le debe poder

344 dar ¿no? ... entonces más o menos esa es la idea, eso es lo que ustedes están tratando de hacer ahorita ... encontrar un

345 cuadrilátero que tenga la capacidad de poder comportarse de esa forma , si se le da movimiento a una de las barras...

346 miren .... Ok..la ...la... digamos que los nombres técnicos no son relevantes o muy relevantes, pero bueno se los voy a

347 mencionar, la barra que da giro completos pues se le llama manivela, uno siempre que piensa en algo que gira.. es ...

348 cómo que se le viene ese nombre a la mente...entonces .. la barra que gira y que impulsa el mecanismo se le llama

349 manivela, en ingeniería ... la barra que es fija... aquí en este caso que aunque no existe ... podemos considerar que es una

350 barra, se le llama bastidor o bancada, porque está fijo en algo ...ehh... la barra que acopla a la manivela con la otra se le

351 llama barra acopladora porque es la que lo está acoplando .... Y la barra como que finalmente hace el trabajo.... ¿ aquí

352 cuál es la barra de salida o la barra que hace ....el trabajo, otra vez para...esta es la manivela, osea esta es la que yo

353 muevo, a lo mejor con un motor, por eso es importante que dé giros, y ésta es la que me está realizando algún trabajo que

354 yo quiero, a ésta barra, cuando se comporta de esta forma, que nadamás se balancea, de hecho se le llama balancín, y ésta

355 barra, que su función es acoplar la manivela con la barra que hace el trabajo, se le llama barra acopladora, entonces, digo

356 para que ustedes sepan que tienen nombres, y que si de repente durante la actividad digo algo, que la manivela o que la

357 barra acopladora, todos entendamos de que estamos hablando, entonces... aquí... yo cuando intento que ésta sea la

358 manivela, resulta que ... se rompería como que la barra acopladora, no sé si lo notan, es cuando desaparece, cuando le

359 trato de dar giros a la manivela , fíjense que lo voy a hacer, y lo voy a hacer sin animación , lo voy a hacer poco a poco,

360 por ejemplo si quiero girar en el sentido del reloj, como que me permite más ... ahí como que va bien, ahí no hay mucho

361 problema miren ... está girando, pero como que acá abajo... algo pasa por ahí miren ... y desaparece...por acá abajo, y de

362 acá igual miren, cuando viene, ahí como que todo está bien, pero de repente algo pasa , y cómo que... dicen los que se

363 dedican a esto que se rompería la barra acopladora, y bueno literalmente pudiera ser que se rompiera o que el mecanismo

364 se trabe y ya no pueda seguir girando , y a nosotros nos importaría que el mecanismo si gire, porque si esta barra, si la

365 manivela está acoplada a un motor, pues el motor va a estar continuamente moviéndola y nosotros queremos que la barra

366 de salida realice cierto trabajo ¿no? Ahí ustedes pueden pensar, de qué nos serviría convertir un movimiento de rotación

367 en un movimiento de vaivén, bueno algún uso se le ha de poder dar , de hecho tiene bastantes usos, pero ahorita lo que nos

368 interesa más que los usos, es cómo le hago para saber cuándo, dadas las dimensiones del mecanismo, si va a ser un

369 mecanismo de Grashof, entonces, en ésta 0369parte muchachos, lo que ya hicieron individual, si se pasan a la segunda

370

371 hoja, y hasta dice al principio que se observe el video, y dice ... dónde dice tiempo máximo 15 minutos , me gustaría que  
372 de manera individual todavía contesten esa parte, dice ... les pregunta si aún no han logrado hacer un mecanismo de  
373 Grashof, creo que algunos sí, creo que algunos otros todavía no lo hicieron , eso ahorita no importa, no se preocupen, lo  
374 importante es que observen con atención lo que hayan hecho, ya sea en el caso en que sí hayan podido hacer un  
375 mecanismo de Grashof o que no, sería importante que escriban ahí, de que en este momento, de qué depende que una de  
376 las barras dé una revolución completa, lo que , hasta ahorita han observado ustedes su idea, de por qué funciona a veces y  
377 por qué no funciona, entonces escriban eso , porque la siguiente parte de la actividad se va a desarrollar en equipos. Esto  
378 es lo último que les voy a pedir que hagan de forma individual, escribir lo que ahorita creen que está pasando, en la  
379 segundo hoja, donde dice algo así como de que creen que dependa que la manivela, en este caso una de las barras, sí  
380 pueda dar giros completos...  
381 A1: ya sé que pasa pasa...  
382 A2: ¿ qué pasó de qué?  
383 A1: este, tiene que tener dos lados iguales...  
384 A2: sí....  
385 A1: menores al mayor...  
386 A2: sí....  
387 A1: dos lados iguales....para que cuando se queden en ....  
388 A2: uno atrás de otro?  
389 A1: este....pues todavía tenían longitud para .... Ajá....  
390 A2: .... Pero te cambia el punto ¿no?  
391 ( diálogo inaudible )  
392 A1: ¿es de la misma longitud? ¿Cómo que no verdad?

393  
394  
395 FIN DE LA PRIMERA PARTE DE LA SESIÓN DEL 23 DE MARZO DE 2010.

#### 396 397 398 TRANSCRIPCIÓN DE LA SESIÓN DEL 23 DE MARZO (2ª. Parte)

399  
400 Pachuca de Soto, Hgo. a 25 de marzo del 2010

401  
402 P: ... eso según yo, pero hay una observación que te tengo que hacer.... Si te das cuenta la longitud de esa barra cambia  
403 A1: ajá  
404 P: y son barras rígidas, no debería estarse deformando esa... exactamente, las otras tres si están bien, pero en la práctica el  
405 mecanismo es rígido, bueno uno piensa que no se va a deformar, y que , en todo caso sería ....  
406 A1: es que no sé como picarle...  
407 P: mínima la deformación, por eso no consideraría yo que las barras son rígidas...  
408 A1: disculpe ¿cómo hago que este punto se quede quieto? Es que le muevo y se mueve todo el sistema ...Necesito que se  
409 quede ahí...  
410 A2: ya fíjalo...  
411 A1: pero si lo pongo como un segmento entre un punto y este punto, esta longitud va cambiando , entonces que...  
412 P: ¿ qué pasó como vas?  
413 A1: ah... es que necesito que este punto de acá se quede con este punto, porque muevo ese  
414 P: ahhh. Eso quiere decir que cuando tu construiste tu cuadrilátero, este segmento no va exactamente de este punto a la  
415 terminación de este otro segmento...que es lo que querías... entonces una buena idea  
416 A1: sí bueno este segmento ....  
417 P: sí... tu quieres construir este cuadrilátero, crees que va a ser mecanismo de Grashof...  
418 A1 : puede ser...  
419 P: si quieres selecciona todo y bórralo y lo hacemos rapidísimo... esto no esto déjalo porque son tus datos ... eso muy  
420 bien y otra vez, con compás trazas... ahí está... traza uno de tus segmentos... ese sabemos que es a dónde caiga... órale...  
421 A1: otro ... sobre el punto..  
422 P: ok, el de 5 y también va a dónde tu quieras, al otro lado... eso... si quieres oculta estos dos para que no nos vayan a  
423 confundir ... ok... sale... trazaste 2,5 y quieres repetir un lado, otro de 5 y otro de 8, entonces otra vez ...  
424 A1: tomas el este....  
425 P: claro, y ahora tomas el de 8  
426 A1: ¿el de 8?  
427 P: el de 8, porque es el que te falta, en otro extremo...entonces tu cuadrilátero va a cerrar así..  
428 A1: ahhh...  
429 P: porque para acá es 5 también, y para acá es 8..  
430 A1: ¿entonces es dónde se unen los círculos verdad?  
431 P: exactamente... ahí y ahí, esa es tu propuesta de mecanismo, si quiere oculta los círculos, para que no nos confundan  
432 ahorita, esa es tu propuesta, tú vas a poder mover alguna de las dos barras primeras que trazaste, esa



433 P: ah ok parece que sí es un mecanismo de Grashof el que trazaste...entonces...

434 A1: sí

435 P: así si lo tratas de..., y ya no pasa ese problema de que se separaran

436 A1: Ok

437 P: oye entonces esa es una buena propuesta...eh...si tú ya tienes alguna idea pues la escribes aquí... yo creo que el

438 mecanismo va a ser de Grashof cuando pasa tal cosa ... osea sí tienes alguna idea...

439 A1: sí, tengo unas...

440 P: ok, les voy a pedir de favor que ya no se tomen mucho tiempo

441 P: ya nadamás trata de generalizar ... una vez que tengas la idea de si lo que tú escribes ahí es correcto ... sí es correcto

442 entonces ya después vas a poder encontrar una regla...

443 A2: está bien...

444 P: lo que sí es que ya varios lograron simular un mecanismo de Grashof con el software...

445 P: aquí la cuestión es que no te quedes con lo que tú pienses, a ver dices ¿ es esto? Ahora lo compruebas, lo compruebas

446 uno dos o tres veces , entonces ya encontraste la fórmula, l la forma de cómo hacerlo

447 A2: sí, ya tengo una idea...

448 P2 : ajá

449 P: muy bien, muchachos les voy a pedir que me pongan un poco de atención, présteme tantito su atención, como de

450 antemano ya los veo muy interesados en discutir algunas cosas con un compañero , lo cuál está muy bien, vamos a pasar a

451 la siguiente parte eh... dice, pero sí me interesaría que sus conclusiones personales, individuales, las pongan de lo que

452 ahorita creen, pero pasemos a la parte de trabajar ya con un compañero , dice que para que tratemos de entender qué está

453 pasando, por qué algunos cuadriláteros trabajan como mecanismos de cuatro barras articuladas tipo Grashof, pero otros

454 no, los estoy invitando a que trabajen tres casos particulares, formando un equipo formado por un compañero cercano, lo

455 van a trabajar en binas, cualquier duda nos preguntan, de hecho el primer caso lo quiero abordar yo , es un caso que varios

456 de manera individual ya habían abordado, el primer caso nos dice ¿ y si suponemos que las 4 barras son iguales? ¿ por

457 qué no? Entonces fíjense síganme por favor aquí, algunos ya lo hicieron en individual, pero de todos modos quiero que lo

458 tomemos como ejemplo , para que los otros dos casos los desarrollen en equipos, en binas , entonces sí mi propuesta es

459 que el mecanismo tenga cuatro barras de la misma longitud, lo que puedo hacer es esto, en vez de dar una medida en

460 particular, yo doy un segmento, que para mírepresente la longitud que voy a utilizar para construir el mecanismo ese que

461 espero sea de Grashof, entonces procedo de la misma forma, tomo el compás y trazo un círculo, y aquí no voy a tener que

462 hacer tantos trazos, porque la longitudes son iguales, yo sé que los primeros dos lados son un tanto libres...

463 A1: son colineales...

464 P: ... y los trazo sobre la misma circunferencia, no tengo que cambiar , entonces eso ya está, ahora los otros dos lados

465 siguen siendo de la misma longitud y tendré que apoyarme de aquí y de aquí para trazar círculos con el mismo radio,

466 entonces lo que puedo hacer es de hecho cambiar la herramienta de compás a círculo simplemente , cambio la herramienta

467 a círculo porque yo ya tengo definido el radio, me apoyo ahí que sería el centro , y abro hacia este punto y ahora ... ya

468 está y ahora voy a unirlo apoyándome en el centro y abriendo para acá , entonces el cruce de estos dos últimos círculos,

469 aquí, me da la construcción ya, cierra el cuadrilátero , y tengo el mecanismo que espero, que sea un mecanismo de

470 Grashof, déjenme ocultar esos círculos porque ... ya tenemos ahí... hace rato alguien me decía es que quiero hacer un

471 cuadrado y yo digo, no estoy seguro si va a ser un cuadrado, lo que sí estoy seguro es que es un cuadrilátero de cuatro

472 lados iguales... de hecho ustedes que dicen ... ¿es cuadrado?...

473 A1, A2: no

474 P: ¿ tiene que ser cuadrado, de hecho?

475 A1,A2: no

476 P: no tiene que ser cuadrado, muy bien, pudiera ser cuadrado, ni si quiera me interesa que lo sea, lo que interesa es que

477 una barra, por ejemplo voy a tomar a esta como manivela, me interesa que pueda dar giros completos, entonces vamos a

478 ver si con el comando animación, bueno va a una velocidad un tanto lento, pero sirve, sirve que vamos viendo el

479 comportamiento, pues hasta ahí todo va bien, la manivela se está moviendo en sentido contrario al reloj, ahí... verdad?

480 Pasó algo curioso, como que las cuatro barras se juntan, pero sigue girando... sigue girando y sigue girando... ¿qué tipo

481 de figura dirían ustedes que es? Osea aquí lo que estamos viendo es una familia de cuadriláteros con lados iguales...

482 ¿cómo clasificarían todos esos cuadriláteros que se van formando, pudiera haber un caso , a lo mejor si le tomamos una

483 foto, si le tomamos una foto cuando este ángulo sea recto, más o menos por ahí , osea si le tomamos ahí la foto diríamos

484 es un cuadrado ahí sí, pero en general se forma toda una familia de cuadriláteros de lados iguales .... Y ¿qué tipo de

485 cuadriláteros son? No sé si tengan alguna idea ...

486 A1: romboides...

487 P: romboides... y qué son los romboides?

488 A2: son paralelogramos...

489 P: ah... paralelogramos

490 . ¿ a qué te refieres con paralelogramos?

491 A3,A2,A1: que tiene dos pares de lados iguales..

492 P: que en todo momento los pares opuestos son paralelos... me dices...Bueno puede ser que sí, tendría que ser algo que

493 tendríamos que verificar...ustedes a lo mejor lo que están observando es que este cuadrilátero se comporta, este

494 mecanismo, que parece que sí es de Grashof, se comporta muy diferente al de la animación del video , o algunos otros,

495 dónde la barra, si se acuerdan, esta es la manivela...esta es la barra acopladora y ésta, se supone que debería nadamás  
496 hacer esto... un vaivén y aquí vemos que también está girando, bueno les platico rápido, las locomotoras antiguas se  
497 basaban más o menos en este principio, una rueda al empezar a girar, tenía que impulsar al otro juego de ruedas, eran  
498 varias, entonces de hecho mecanismos de este tipo se utilizaban para impulsar las ruedas de las locomotoras antiguas,  
499 entonces si tiene sentido y todo nos hace ver que sí es un mecanismo tipo Grashof. Bueno, ahora sí, ya que están  
500 platicando agárrense a una parejita , si alguien no tiene equipo y dice yo sobré, no importa , trabajen tres, y bueno el  
501 primer caso, el caso 1 como les yo dije yo lo iba a abordar y yo hice la construcción , pero sus conclusiones, discutan  
502 ahora en equipo y pongan ahí que concluyen de este caso particular cuando las 4 barras son iguales, por qué creen que sí  
503 es un mecanismo de Grashof , y abordan el caso 2 y el caso 3, cualquier duda aquí estoy yo , aquí están mis compañeros ,  
504 pero ahora sí, hace rato ya estaban muy animados platicando y discutiendo algunas ideas , aborden los dos siguientes  
505 casos y si discutan las ideas que tengan al respecto, lo importante es encontrar, o estamos buscando es un criterio general,  
506 por ejemplo , parece que cuando las barras son iguales, ya tenemos un mecanismo de Grashof, pero las barras no tienen  
507 que ser precisamente iguales. ( hablan 2 estudiantes, pero resulta inaudible).

508 A1: miden... completas éstas... deben de medir cinco ... nueve, exactamente para que no se rompa, osea estamos de  
509 acuerdo, esta la puedes hacer así, de nueve, entonces como esta al a girar va a medir la dimensión de estas tres  
510 juntas.....no se va a romper.

511 A2: no no no, hay un pequeño error tocayito, porque si este mide nueve , créeme que son tus tres de aquí y tus dos de aquí,  
512 no van a llegar acá, a menos que lo hagas de forma pitagórica, ok tenemos estos dos vamos a dibujar este triángulo, es  
513 más este está recto .....¿ te parece bien? mide 4 y 4 , cuánto debe medir la hipotenusa, 4 x 4 son 16 , nueve por  
514 nueve...

515 P: me gustaría que si se reúnan con alguien, cuando menos dos o tres si alguien sobra ...si se quieren cambiar

516 A1,A21: (diálogo inaudible)

517 P: ya lo que resta de la actividad van a estar trabajando ...

518 A1, A2 : 80, 90 y 97, ¿raíz de 97?

519 .A1,A2: no no no no pero por ejemplo si mueves este... este segmento...

520 A1, A2: pero para que esta cosa sea de Grashof...

521 A3: la suma de estos tres debe ser mayor a esta...

522 A2: no no no no pero mira...si éste es el que mueves y lo haces girar...

523 A1: ¿esos tres?

524 A2: osea agarramos tantito ... y acá ya da diez ¿no?

525 A1: nueve ... pero en el momento de que sean coplanares todos, se va a romper ... porque este está acá, mide más que  
526 este, su punto mide más

527 A2: por eso es una torsión, por eso no dan los pinches ángulos...

528 A1: ajá, pero al momento que sean todos colineales, estos tres van a medir este...

529 A2: no tienen por qué serlo ...la de las ruedas de un ferrocarril...ah mira que bonito se me ve

530 A1: no pero chécale , tan solo...

531 A2: es un ejemplo, voy a sacar yo el mismo, nadamás que este sería.... este es un trencito ¿no? Ves cómo están las  
532 llantas ...

533 A1: sí sí sí

534 A2: aquí está, ves que está esto así , ves que está dando vueltas y aún así se va moviendo todo el sistema , aquí lo que es a  
535 la hora, si estos tres lados son mayores que éste, tienes la opción ¿de qué? De que cuando va a hacer esto va a regresar, tal  
536 vez no se quede bien en la recta, pero va a quedar arriba, osea va a quedar como un ángulo de... así maestro...

537 A1: entonces si este mide lo mismo como te digo...

538 A2: no, mayor...

539 A1: se va a mover para acá, se va a estar moviendo así y no se va a romper, este es el que va a estar girando...

540 A2: ¿quieres que ese gire o que gire este? Porque se supone que....

541 A1: este es el que va a girar ¿no?

542 A2: vamos a construirlo ¿no? Mira digamos que es de 3...otro de 3... entonces uno de 4 , éste lo ponemos por acá y éste  
543 de aquí debería de ser de 9 aproximadamente, éste su movimiento va a ser a partir de este , aproximadamente ¿ok?

544 A1: ¿ cuál va a girar?

545 A2 : vamos a hacer que gire éste..., cuando gira para acá, ésta se desplaza hacia allá

546 A1: pero mira...por eso pero al momento que éste sea coplanar con éste...

547 A2: pero te digo que no tienen por qué serlo...

548 A1: pero es que éste va a girar, va a estar ... al momento que este coincida con este, tienes ¿qué? tres y cuatro son siete,  
549 no va a alcanzar a dar una vuelta

550 A2. ¿ y no tenemos estos otros de aquí?

551 A1: por eso pero al momento que este sea coplanar con este tres ¿ este es tres no? Tres y cuatro de este son siete , y éste  
552 son nueve... se va a romper

553 A2: así sí... entonces podemos decir que podemos cambiar esta por cinco.

554 A1 : por eso es que te estoy diciendo aquí esto...

555 A2: pero tú le cambiaste aquí por dos maestro...

556 A1: esto o esto , pero por ejemplo aquí cinco y tres son dos...

557 A2: Sí está bien lo que estás haciendo...

558 A1: cinco cuatro tres con nueve, así si no se va a romper

559 A2: y vas a tener un espacio para...

560 A1 : no, va a ser exacto , si haces la suma...

561 A2: vamos a hacerlo...

562 A1: si o no, lo que te decía...ya está

563 A2: lo veo de otra forma

564 A1: ajá mira, de la forma en que te digo , de esta o que gire esta, de esta , si esta gira, te hablo buey..

565 A2: sí escucho...

566 A1: si esta barra gira, ésta la más pequeña, ésta nadamás va a tener un movimiento de vaivén ¿cierto o no ? y si esta

567 grande gira si se va a romper...

568 A2: ah no, era con este...

569 ( momento inaudible)

570 A1: cuatro, lleva un cinco, lleva un tres ..... ( inaudible) .... Ahora quiero el cuatro y el cinco... el cuatro lo quiero a

571 partir del ... luego el cinco lo quiero tangente a...y el tres lo quiero de aquí a acá , hasta acá ... va aquí ¿no?

572 A2:Tienes lo que es una pequeña incongruencia Lalito...

573 A1: no puede ser ...

574 A2: no, claro hazlo, tenemos una incongruencia...

575 A1: ahhh caray....espérame espérame creo que sí tienes razón...

576 A2: necesitamos que el tercer punto sea tangente a las dos circunferencias dado y cuadrada igual a x cuadrada igual a bla

577 bla bbla ... lo que tiene es que puedo manipular esto ¿no?

578 ( se escuchan otros diálogos)

579 P: la que conecta se le llama barra acopladora...y la otra que hace el trabajo, cuando hace un trabajo de este tipo se le

580 llama balancín

581 A4: ¿ y cuál es la viela?

582 P: viela... manivela... no es exactamente...ese término de los motores ... viela... de hecho la barra acopladora es una

583 viela...tu tienes un mecanismo, tienes una manivela que es la que está girando es... la barra acopladora se le llama viela ,

584 pero en vez de que tengas un movimiento de vaivén a la salida, tienes un movimiento nadamás alternativo, es un

585 pistón...de hecho tenemos un sube y baja, ...(inaudible)... sí la viela es la que acopla, a este le podemos llamar ahorita

586 viela pero digamos que los ingenieros tienen sus términos ... de hecho cuando el mecanismo es cuatro barras, y cuando tu

587 mecanismo de trabajo es un balancín , se llama barra acopladora, pero cuando tu tienes un mecanismo en donde el trabajo

588 de salida es una carrera, un pistón , entonces a esa barra de salida a ellos les gusta llamarla biela. ... de hecho el nombre

589 completo le dicen mecanismo biela, manivela, este pistón, mecanismo pistón es el término, aquí entonces la biela viene

590 siendo la barra acopladora, tú no tienes una salida, tú tienes otra barra...ok tú dices ¿por qué ahí sí y hace rato no ? es una

591 de las cosas que estamos interesados...

592 A4: ¿ cómo se llama la .....

593 P: la biela o manivela con la que hacen el trabajo, esta le llaman barra acopladora...

594 A4: y la otra?

595 P: ¿ésta? Depende de si está oscilando, si tienes un mecanismo que oscila le llaman balancín...eso se le llama, porque lo

596 único que hace es oscilar, hace como una barrida así ... ¿ahí no aguanta verdad?

597 A4: no, ya vimos que....

598 ( diálogos inaudibles)

599 A1: el compás no nos permite....

600 A2: construirlo...

601 A1: ajá, realmente sí se puede

602 A2: ¿ entonces?

603 A1: no pues si tenemos los cuatro lados entonces si ...

604 (diálogos inaudibles)

605 P: un punto debe de ser... alguna barra debe ser candidata a ser manivela... esta gira

606 A2: pero que...

607 A1: borra todas

608 P: que gire en torno a un punto y que arrastre a las demás ... 5, 5, 4, 9... a ver si la volvemos a intentar hacer 5 5 4 y 9

609 ahora ¿cuál es la que usaste con compás? ¿la de 5? ¿ en cuál estamos ahorita?

610 A1 : inaudible

611 P: ahhh... ok tú ahí estás introduciendo dos barras de la misma longitud , es una de las cosas que estoy viendo, que

612 metiste la de 5, este ¿ si tenías dos de cinco verdad?

613 A1: sí

614 P: ok , aquí podría poner la otra de cinco de hecho de una vez , esa sería la propuesta 5 y 5, ya está fíjate que ahorita esta

615 es la candidata a manivela , aquí puede girar ¿ ya ves? No hay problema, esta es otra candidata a manivela, puede girar ,

616 entonces ahí como que vamos bien, ahora necesito terminar la construcción con la de cuatro, que puede ir aquí o acá, tú

617 decide , pero que vaya aquí, y la de nueve que ahí sí no hay de otra , la de nueve tiene que ir acá y yo buscaba este cruce ,

618 de aquí para acá hay 4 y de aquí para acá hay nueve , entonces esa es una propuesta con las dimensiones que tú das cinco

619 cinco cuatro nueve, y ahora esperamos que la animación funcione , porque este punto puede girar en torno a este,  
620 entonces ahora si me debe permitir ver su funcionamiento ....ups  
621 A1: trueno , entonces..... ( inaudible)  
622 P: aquí una sugerencia, para que no estén introduce e introduce números a cada rato, otra sugerencia es esta, tú quieres  
623 construir un mecanismo si te dicen tengo, tienes cuatro barras y dime si con esas cuatro barras voy a poder hacer el  
624 mecanismo de Grashof , vamos a dar los segmentos, sin importarnos tanto ahorita la longitud , yo doy cuatro segmentos,  
625 por darlos ¿no? De hecho ahí son diferentes nadamás por alguna razón , y con esos segmentos construir un mecanismo ,  
626 por ejemplo, esa va a ser mi candidata a manivela , y se me ocurre que el más grande, el que se ve más grande, se me  
627 ocurre que sea el candidato al eslabón fijo, el que no se mueve, el que está fijo a alguna máquina tal vez , entonces ahí  
628 está hice este...ahora tengo que acoplar éste aquí , y éste... exactamente, ahí está ese es el que buscaba...  
629 ¿ cuál es entre comillas la ventaja de hacerlo así? La siguiente, yo por ejemplo animo y espero que el mecanismo funcione  
630 ... ah no funcionó, entonces me vengo acá y digo a ver no sé a lo mejor la manivela la hago más chiquita a ver que pasa ,  
631 animamos a ver ahora qué sucede, vamos a ver....  
632 A1: ( inaudible)  
633 P: ahí está, ese mecanismo sería uno que si nos interesa , se parece incluso mucho al del videíto que les pasé del software ,  
634 entonces ahora uno dice, este mecanismo sí es de Grashof, ¿ por qué se comportará así ? hace rato te interesaban mucho  
635 las dimensiones, pues podemos seguirlas, de hecho aquí directamente no porque , lo vemos acá más directo, osea este  
636 segmento , osea las dimensiones de todos modos se las podemos pedir al software, y tú dices, a ver qué pasa si cambio las  
637 dimensiones, a lo mejor dices la barra acopladora si es grande, el mecanismo no funciona , la barra acopladora es ésta  
638 fíjate, ahí directamente el único que modifíco es la barra acopladora , y dices a ver qué pasa cuando la barra acopladora  
639 cambia dices, pues no pasó nada, bueno es otro mecanismo pero siguió funcionando, entonces ahí como que más  
640 claramente a lo mejor te das algunas ideas porque ahí ya tienes marcadas dimensiones , tú tienes acá ya tus barras, y no  
641 hay que estar introduce e introduce a cada rato números, ahí nadamás este cuando quieras arrastrar con esa instrucción  
642 (inaudible, el estudiante está haciendo su construcción)  
643 A1: ya hallé otra forma de poder hacerlo  
644 A2: ¿ qué haces?  
645 A1 ahí está ... como te decía... es dos tres y dos , entonces tres y dos cinco y dos son siete, entonces ahora  
646 éste.....(inaudible)  
647 A1: ese es el que tiene que ir.... ¿ es éste?  
648 A2: depende ... ¿cuál se va a quedar fija?  
649 A1: ésta...  
650 A2: ah bueno se va a quedar fija ¿ y cuál se va a mover? ¿ cuál es la manivela?  
651 A1: esta...  
652 A2: ok agarra este ... Te falta una... por qué esto no se mueve ¿ por qué? No tengo ni la más remota idea, porque se  
653 supone que es para ....  
654 A1: no ¿sabes qué? Esta se está haciendo más larga ¿ por qué?  
655 A2: también lo podemos hacer con el maple , podemos hacer animaciones..  
656 A1: bueno en sí lo que te digo yo siento que sí es ... cierto  
657 A2. Porque a partir de esta da vueltas.....  
658 (inaudible)  
659 A1: es que mira bueno.... Es importante , tienes estos dos y esto aquí, esto es lo más grande , este y este son nueve, este  
660 tiene que ser exactamente nueve para que pueda girar, sino se va a romper es que en el momento, mira aquí, cuando son  
661 colineales, en ese momento, esos tres juntos deben de medir la longitud del otro, del más largo para que no se reviente  
662 ¿no? Cuando son colineales, en el momento en que son colineales ¿no? Ajá, bueno cuando giran, eso es ajá, bueno en ese  
663 por ejemplo y así va a estar  
664 A2. La suma de estos dos es a la misma de estos dos  
665 A1: ajá: ¿cómo?  
666 A3: este y este si los sumas te dan menos que éste..  
667 A1: por eso sí , sí sí sí porque por ejemplo mira cuando este está exactamente colineal todo, debe de ser de la misma  
668 longitud, osea por ejemplo estos dos y estos dos debe de ser la misma, o como te digo, los tres deben ser la misma  
669 longitud que uno  
670 A3: y aparte el que tiene que girar ese el que tiene menor la longitud  
671 A1: exactamente, el que tiene menor longitud es el que debe de girar , si gira el grande pues va a tronar  
672 A3: y es el que tiene ... otro  
673 A1: ajá ... ahí está  
674 A2. El sistema funciona a partir de qué la base y el ¿cómo se llama? Ésta que tiene la misma longitud , entonces va a ser  
675 diferente, totalmente y ¿qué tal?  
676 A1: si gira... pues lo voy a volver a hacer todo ¿no? De vuelta...  
677 A2. Ahí ...eso  
678 A1: igual...  
679 A2. Este es... por qué se va a mover , entonces lo que va a estar es éste y éste, que es distinto  
680 A1. Ahí, por ejemplo ahí la suma de los dos que están moviéndose ...

681 A2: ¿ la cinco también?

682 A1: ajá bueno por ejemplo ahí, el cinco moviéndose, éste por ejemplo ahí no queda coplanar, pero porque una longitud es

683 mayor que las otras dos completas , bueno es que si sumas dos...

684 A2: lo que puede .. imagínate que es una ....

685 P: fíjense que algunos como que de repente si se fueron un tanto por la libre, otros como que si se ve que estuvieron

686 analizando esos dos casos particulares , miren el caso dos nos dice ¿ y qué pasa si tengo solamente des barras distintas,

687 decía  $A=C$  ,  $B=D$  , o  $A=B$  y  $C=D$ , entonces por ejemplo las longitudes que ví son distintas, y hay cuatro formas de acoplar

688 las 4 barras o de hacer dos mecanismos distintos, éste sería una, donde las barras iguales son las que se conectan y aparte

689 se ve que sí funciona aunque hace cosas medias raras , y la otra forma es que las barras opuestas sean las iguales, como

690 aquí ésta con ésta y esta con esta, como que ahí funciona más bonito el mecanismo , bueno se parece de hecho mucho en

691 alguna parte a lo que hicimos en el caso uno, cuando las cuatro barras eran iguales , en el sentido de que en esta parte

692 parece que es un paralelogramo igual , toda esta parte la configuración se comporta como un paralelogramo , ahí ya se

693 cruzan las barras y pasa algo medio raro, es decir, no da vuelta completa la otra barra, sino que regresa, y acá , pues como

694 que la que mueve arrastra completamente a la otra fija y hace ... y además como que se teletransporta el mecanismo ¿ya

695 vieron? Y cómo que aquí nos hace trampa, este me gusta menos que el otro, pero en apariencia son mecanismos de

696 Grashof , en apariencia una de las barras si puede girar, ahorita van a ver lo que les digo, cómo se teletransporta, pero ¿ya

697 vieron que además se juntan ahí... ¿ya vieron? Eso como que no lo haría en la realidad, está raro , cómo que veo más que

698 podría comportarse así y además creo que aquí no es muy difícil justificar que en toda esta parte, la configuración es un

699 paralelogramo también ese es un caso... me gustaría que, si no lo han hecho , un poco de más orden en cuanto a lo que

700 planeamos para hoy aborden el tercer caso, ahí de plano ya las 4 barras son distintas y les dan una medidas en especial, en

701 el caso tres, que están en la tercera hoja dice que a ver, piensa que en una barra, la barra A, de hecho están ya dadas las

702 barras , que la barra A mide 2, la B mide 7 , la C 4 y la D 5, y hay dos formas también de configurar ese mecanismo, nos

703 dice que exploremos el caso en el que la suma de A y B es igual a C y D, o la suma de A y C es igual a la de B y D ,

704 entonces traten de explorar ese caso si no lo han hecho y a ver qué cosas concluyen, yo ya he escuchado y algunos ya

705 tienen cómo que muchas ideas sobre de qué es lo que debe pasar para que sí de giros completos la manivela , entonces

706 veancon calma ese caso, constrúyanlo y discútanlo en equipo qué es lo que pasa y lo pueden hacer de dos formas, de

707 hecho me gustaría que lo hicieran en las dos formas y vean si de ambas formas funciona o no funciona , entonces váyanlo

708 trabajando por favor cómo estén en equipo.

709 A2: la relación es que b-c es igual a D-A

710 P: con esas medidas en particular, para que de ahí sí, de alguna manera todos obtengamos algo similar...el caso 3 , A vale

711 2, B vale 7 , C vale 4 y D vale cinco, nos dice

712 A1. Entonces el que es uno compañero, ¿cuál es menos 1?

713 A2: Es posible tener un mecanismo de Grashof con cuatro lados iguales... así es compañero ..conclusiones...

714 A1. ¿cuáles son las conclusiones?

715 A2: es posible crear un mecanismo de Grashof

716 A1: es que yo no me convenzo carnal

717 A2: ¿no?

718 A1: yo más bien pienso que puede ser que no

719 A2. A ver dale, dale, dale

720 A1: es que porque está mal inflado, sí por ejemplo, bueno no mal inflado sino que si esto está pasando a afectar acá ...

721 pasando una sobre la otra...cuando esta cosa gira , llega acá a su máximo, entonces esta va para abajo y este tendría que

722 bajar, pero el programa no te lo deja ejecutar , realmente en la realidad debería de ocurrir que esta pase por atrás y

723 entonces ¿sigue, no?

724 A2: ¿y entonces? Mira porque aquí hay que continuar este punto que es este

725 A1\_ ajá

726 A2. Entonces este punto debía seguir así , o también por acá

727 A1: ajá

728 A2. si?, realmente, osea que sí existe , pero el programa no. Digamos que no te "sprinch"

729 ... ¿ qué pasó buey? pues que me hiciste ¿ por qué me andas metiendo mano en mis cosas?

730 A1. Eso es posible ¿no? O no sé, no nos dejó comprobar

731 A2: es posible crear un mecanismo de Grashof con 4 barras iguales ¿qué más?

732 A3: pues eso en el caso de que todas sean iguales ¿no?

733 A2: ¿ y en caso de que sean desiguales también es posible, no?... a ver qué pasa si  $A=B$  , entonces se hace ... ahhh...

734 Cuando eso pasa, pasa esto mira fiuu.. uhhhh tutututu ... Mira flaco aquí también es raro, no hace esto realmente, velo

735 , lo que haría es que esta seguiría acá fiuuu

736 A1: no, sí haría eso buey

737 A2: no te imaginas...

738 A1: oye ese .... No está creciendo?

739 A2. Mira, aquí tendría una aceleración muy fuerte, lo podríamos utilizar como una catapulta

740 A1: de hecho...pues yo digo que si hace eso..

741 A2. No hace eso no no puede hacer eso

742 A1: a ver vamos a ver

743 A2. Mira, solo que tuviera ahí un clavito en el punto rojo, entonces no dejara que la barra baje para, entonces ya se regresa  
744 para arriba, ahora y si no roza, entonces este pasaría por acá y seguiría..  
745 A3. Lo que hace la del pon pin  
746 A2. No, la del pon pin , desaparece en un punto  
747 A1. ¿ desaparece en un punto oye? ¿ sí desaparece?'  
748 A2. No en ningún punto  
749 A1. Este sí, bueno ahí está ¿no? 7 5 3 3  
750 A2. Ahh pero es que cuando quedan iguales miden 8 y 8  
751 A3: es que ve buey, cuando este punto  
752 A2: llega a estar en una línea, todo queda como una línea  
753 A3. Por eso te digo  
754 A2: pues sí eso es posible ..eso es posible, está girando y pues llega acá  
755 A1: y ahí se quedan,  
756 A2. No, entonces este debería seguirse para acá, nadamás que retacha bien, y realmente no hace eso, el software  
757 demuestra eso pero no lo hace, no lo hace  
758 A3. Por eso te digo que da la vuelta  
759 A1: ajá  
760 A2. Esto hace fiuuu y da la vuelta, nunca hace eso, sólo que tuviera un clavito aquí  
761 A1. Se supone que esto es físico...  
762 A2. Bueno si pudiera hacerlo, pero ve realmente esto también lo puede hacer, mira si aquí no volteara...  
763 A1. En ese si no podría ser...  
764 A2. Si en este punto no golpeará , en el punto rojo  
765 A1. Ajá  
766 A2. Si no golpea entonces esta cosa puede pasar ¿lo ves? Esta pasa así  
767 A1: Sí sí sí ya te entendí  
768 A2: Y sí puede, como si este punto estuviera pegado en la pared, que no pero que no rozara  
769 A1. Que están libres  
770 A2: esos puntos están así y este punto está aquí  
771 A1: Ajá  
772 A2: Y lo que hace es explotar, volar aquí en el aire, este punto daría toda la vuelta así  
773 A1: Sí  
774 A2: Entonces el software es chismoso, entonces hay que anotar.  
775 A1: ¿te comento o no te agradó?  
776 A2: Pues eso es lo que debería hacer la tuya pon pin. Toda la vuelta...  
777 A1: se debe de poder con el software  
778 A2: porque esto es , eso si estaría bien cañón buey, imagínate te vas y pues sí...y si te fijas es el tiempo que lleva la  
779 aceleración buey? la velocidad, lo que se tarda en llegar, toda la vuelta , ese es más rápido, porque si te fijas de la distancia  
780 que hay de aquí de este punto a este punto es menor que la que hay de este punto en dar toda la vuelta, es decir de esta  
781 forma tiene que regresarnos rápido.  
782 A1: sabes qué mira  
783 A2: porque la velocidad a la que esta regresa es como si es...  
784 A1: es que no manches...  
785  
786 FIN DE LA GRABACIÓN ( SEGUNDA PARTE) , MARZO 23 DE 2010.  
787  
788  
789  
790 Pachuca de Soto, Hgo. a 25 de ABRIL del 2010  
791  
792 A: profesor auxiliar 1  
793 S: profesor auxiliar 3  
794 P: profesor  
795 AA,  
796 AB,  
797 AC,  
798 AD, estudiantes  
799 P2:profesor auxiliar 2  
800  
801 A: Buenas tardes jóvenes, nosotros somos profesores de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, entonces el día  
802 de hoy pedimos al Dr. Santillán la oportunidad de trabajar con ustedes una actividad con cabri, que según él nos comentó  
803 ustedes ya han manejado. Entonces vamos a filmar un poco del trabajo que se va a estar haciendo, pero vamos a prestar  
804 atención a lo que ustedes están haciendo en las máquinas, no nos va... en el trabajo que vamos a 0788realizar no se va a

805 poner ni su nombre, ni van a aparecer estas imágenes con sus rostros, nada de eso, solamente nos interesa lo que ustedes  
806 van a comentar en el desarrollo de la sesión y lo que van realizando en la computadora, entonces es de lo que vamos a  
807 tomar algunas imágenes, y bueno entonces el profesor Marcos es el que se encargará de dirigir la actividad, les pedimos su  
808 apoyo por favor, les vamos a pasar unas hojas ...

809 P: Bueno pues muy buenas tardes otra vez, gracias por participar en esta actividad, vamos a hacer algunas cosas muy  
810 sencillas, nos vamos a apoyar en ese material que se les está entregando, y vamos a usar el software de geometría  
811 dinámica cabri, que como ya dijo el Dr. Aarón Reyes, nos parece que tienen alguna experiencia ya utilizándolo, cualquier  
812 problema o cualquier duda que tengan en el uso del software, de todas formas no se preocupen, cualquier duda me  
813 preguntan a mí o le preguntan a cualquiera de mis compañeros que...

814 A: ¿puedo pasar profesor?

815 P: adelante... igual buenas tardes a todos los que van llegando, toman asiento por favor, prenden el equipo y revisan el  
816 cabri, les van a pasar un material impreso con el que vamos a trabajar.

817 S: ahí hay una lista, se van anotando...

818 S: ¿dónde va la lista? Por allá, pues órale váyanse anotando...

819 (inaudible, estudiantes preparándose para la sesión)

820 P: muy bien muchachos, pues vamos a empezar a trabajar, son cosas muy muy sencillas, vuelvo a insistir y lo dice igual el  
821 material me llaman, me consultan, consultan igual a cualquiera de mis compañeros, si quieren.... Si quieren hacer algo  
822 con el software pero no saben cómo hacerlo, no se preocupen igual nos dicen y les podemos auxiliar, entonces vamos a  
823 comenzar, como ahí dice que vamos a abrir el software como aquí, espero que ya todos lo tengan abierto, y vamos a  
824 iniciar con una construcción muy sencilla, vamos a construir un cuadrilátero, como ahí dice, de lados 5 7 8 y 13  
825 centímetros, vamos a iniciar con esa parte, yo voy a empezar igual a hacer la construcción aquí en el equipo, cualquier  
826 guía que tengan si quieren ir observando, dudas sobre abrir algún comando, utilizar alguna instrucción del software, nos  
827 dicen ..

828 S: .. porque entonces yo, no ellos, yo los voy a echar a ustedes... ¿ok?

829 P: Miren, como los lados del cuadrilátero que vamos a construir ya están dados, ya son unas medidas determinadas que  
830 ahí nos dicen, lo ideal sería primero introducir esos valores, antes de querer dibujar ya segmentos y tratarlos de arrastrar,  
831 vamos a construirlos con las medidas que ya están, si ustedes se acuerdan por aquí en este botoncito, en el penúltimo  
832 botón, hay una instrucción que dice número, entonces podemos seleccionar esa instrucción, y nos permite introducir  
833 valores numéricos que después podemos tomar como medidas, entonces mi sugerencia es que empecemos haciendo esa  
834 parte, que tomemos los números que ahí nos dice y los introduzcamos en donde nos dan un click en alguna parte de la  
835 pantalla, se abre una cajita donde pueden ingresar el dato, entonces ahí vamos a ingresar por ejemplo el cinco, damos click  
836 en algún otro lado y podemos ingresar alguna otra medida, por ejemplo la de 7, hacemos un click en otro lado la de 8 y en  
837 un último dato sería el de 13, entonces ya está, ya introducimos esos números, me gustaría que ustedes igual lo hagan, y  
838 después que sería lo ideal, si quieren construir un cuadrilátero con esas medidas, pues de entrada tienen que decidir cuál es  
839 el primer lado que quieren construir, eh, por mí no hay ningún problema, pueden decidir el que gusten, a mí por ejemplo  
840 se me ocurre iniciar con el de siete, entonces como ya tengo la medida, ahora una instrucción que me puede servir es  
841 utilizar el comando compás, porque si se acuerdan cuando ustedes utilizan o cuando ustedes seleccionan la herramienta  
842 compás, pueden tomar directamente uno de esos números y trazar un círculo que tenga ese radio, entonces, fíjense yo voy  
843 a seleccionar ahora compás, que si se acuerdan está en el quinto botón, ahí dice compás, entonces selecciono compás y yo  
844 en particular quiero construir el primer lado que sea el de siete, entonces selecciono ese número, que equivale a que yo  
845 hubiera abierto el compás a una medida de 7 centímetros, y pues después yo decido en donde coloco mi compás para  
846 trazar un círculo, entonces ...eh... fíjense que ahora que he trazado ese círculo ¿por qué me sirve trazar un círculo con  
847 radio de siete centímetros? ¿alguien tiene alguna idea de por qué lo estoy haciendo así? ¿qué tendría que hacer ahora?  
848 Quiero empezar a construir un lado que mida 7, ahora ¿qué me sugieren que haga? A ver...

849 AA: (inaudible).

850 P: perdón, es que no escuché y alguien dijo algo...

851 AA: ¿trazar el radio?

852 P: alguien dijo radio ¿cuánto mide el radio? Es que es lo que yo quiero, un segmento que mida 7 entonces, por si no se  
853 acuerdan muy bien, en este botón, el tercer botón lo abren y ahí hay una instrucción que dice segmento, y es lo que yo  
854 quiero trazar un segmento que sea radio, entonces lo selecciono, me voy a apoyar en el centro de ese círculo, le doy click  
855 allí, y luego doy click pues ¿en dónde tendría que dar click para que el radio mida 7?

856 A: ¿sobre el círculo?

857 P: sobre el círculo simplemente, no importa donde, ...entonces a mí en particular se me ocurre dar click ahí y ya está, ese  
858 segmento mide 7 centímetros... yo ya construí el primer lado de mi cuadrilátero, lo que voy a hacer ahora, simplemente  
859 para que no se vayan llenando de muchos trazos y no me confunda, voy a ocultar ese círculo, porque ya lo utilicé para lo  
860 que yo lo quería, para trazar el segmento, entonces por si no se acuerdan, en el último botón viene una instrucción que  
861 dice ocultar o mostrar, voy a ocultar el círculo ¿cómo lo hago? Selecciono el círculo y doy click aquí afuera y ya está,  
862 entonces yo decidí que el primer segmento fuera el de 7, ahora tengo que decidir qué otro lado quiero construir, por  
863 ejemplo si ahora quiero construir el de 5, ¿en dónde puede ir el lado de cinco si es que ahora es el que quiero construir?  
864 ¿en dónde debería ir el siguiente lado?

865 A: en uno de los extremos...

866 P: en uno de los extremos , estoy de acuerdo contigo, entonces el otro lado ¿ tiene que ir aquí? ¿ o tiene que ir acá?  
867 Entonces yo voy a empezar a construir el cuadrilátero, y me gustaría que ustedes a la par lo vayan construyendo,  
868 no tiene que ser en el mismo orden que yo, como les dije al principio, yo quise que el primer lado fuera el de 7, y a lo  
869 mejor quiero que el siguiente lado sea el de 5, pero ustedes deciden el orden, entonces empiecen a construir el  
870 cuadrilátero, si tienen dudas me comentan, yo voy a continuar aquí la construcción por si alguien quiere ir observando,  
871 entonces ahora yo en particular voy a volver a tomar con el compás una medida , ahora la de cinco y voy a decidir que  
872 quiero que dado el de cinco voy a querer en este extremo, entonces ahí trazo otro círculo y ya sé, lo mismo que hace rato  
873 me comentaban , cómo este es el centro den un círculo y su radio es cinco, puedo trazar un segmento que sea el radio y ya  
874 tengo el otro lado del cuadrilátero, entonces voy a continuar de esa forma, y como me dijeron hace rato pues a dónde yo  
875 quiera, osea ahí ya tengo dos lados , voy a ocultar ese círculo porque ahí también nadamás me podría confundir con todos  
876 los trazos que estoy haciendo, entonces selecciono ocultar, ya llevo dos lados, el de siete y el de cinco, a mí me falta el de  
877 ocho y el de trece, entonces puedo , otra vez yo decido qué lado puedo hacer a continuación y dónde lo voy a colocar,  
878 ustedes igual vayan haciéndolo , repito no tienen que repetir, seguir el mismo orden que yo, seguir el mismo orden,  
879 ustedes deciden cómo empezar a hacerlo  
880 (inaudible, los estudiantes haciendo sus trazos)  
881 P: yo ya terminé, no sé si alguien más ya terminó , la idea es que fuéramos terminando más o menos al mismo tiempo ...  
882 ya..... ya terminaste?  
883 AA: no  
884 P: ¿tienes algún problema? ¿ quieres qué....  
885 AA: sí  
886 P: ¿ qué pasó? Ahh....ya cómo que entonces tú tienes dos...cómo tú ya tienes una medidas determinadas, te conviene  
887 utilizar este comando que dice número , y entonces tú introduces los valores que tienes, que son 5 7 8 y 13 , esas son,  
888 bueno ahorita son simplemente números, pero si ahora tú seleccionas el compás y con el compás tomas ese valor, es  
889 cómo si el compás lo hubieras abierto a 5 centímetros o al valor que tú elijas, entonces por ejemplo si ahora tú tomas tú  
890 compás y seleccionas este número, imagínate ya tienes el compás con la regla abierta a cinco y ahora trazas un círculo  
891 dónde tu quieras, a mí se me ocurre que de pronto sea ahí , y decíamos hace rato que eso nos conviene, porque si yo trazo  
892 un radio de ese círculo como esto que acabo de hacer, voy a ocultar el círculo, lo que me interesa es el puro segmento, ese  
893 segmento mide cinco, porque tomé ese valor con el compás, incluso con esta herramienta , tú puedes medir la distancia  
894 que hay de aquí a acá, aquí voy a lograr ahorita que construyas una figura de cuatro lados, y que cuando midas los lados  
895 uno mida cinco, entonces ya tendrías el primero...  
896 AA: ok  
897 P: otro lado que mida 7, otro ocho y otro 13. Entonces ¿crees que lo puedas intentar?  
898 AA: sí  
899 P: adelante, por favor  
900 P: ¿algún problema ¿ qué pasó?  
901 AB: sí  
902 P: ah...muy bien ... mira ...ah..no tienes este... déjame proporcionarte primero esto, lo necesitas, estamos en esta primer  
903 parte , estas son las instrucciones generales que ya las dí, abres , mira lo que ya hiciste, y empiezas construyendo algo muy  
904 sencillo, un cuadrilátero que tenga un lado que mida cinco, otro siete, otro ocho y otro trececentímetros, entonces tú sabes  
905 que un cuadrilátero en general es una figura que tiene cuatro lados , está hecho con cuatro segmentos, lo que me  
906 comentaban al inicio algunos de tus compañeros, es de que lo puedo hacer a partir de círculos, si yo trazo círculos con un  
907 radio del valor que ahí dice, entonces te voy a dar una muestra, si tu abres este botón, aquí dice número, por qué, es que ya  
908 tenemos medidas específicas, si fuera a ser de cualquier medida, pues tu lo hicieras como caiga, pero como ya tienes una  
909 medida cinco, podemos introducir ese valor de 5, 7 u 8 ... exactamente, ahí está, esos son números, pero si ahora tú abres,  
910 digo seleccionas el compás que tiene el software y con el compás seleccionas uno de esos números es como si el compás  
911 lo hubieras abierto a esa medida , entonces aquí en este botón está el comando de compás, si seleccionas por ejemplo el de  
912 5, es como si el compás ya lo hubieras abierto cinco centímetros, entonces tu te apoyas en algún lado, trazas ese círculo , y  
913 ese círculo es un círculo de radio 5 , me decía uno de tus compañeros que si yo trazo uno de sus radios, no importa hacia  
914 dónde, ve ese es un segmento que mide 5 centímetros, y ya puede ser uno de los lados del cuadrilátero que quiero  
915 construir, con esta herramienta voy a ir apuntando poco a poco lo que haga para que no se llene ahí de trazos y luego ni  
916 sepa lo que pasó , e incluso después para corroborar que lo que hiciste está bien, tomando comando de distancia, y medir  
917 la distancia de aquí a acá , obvio que debe de ser cinco, entonces tu objetivo ahorita es construir una figura de cuatro  
918 lados, no tiene que ser esa, una figura de cuatro lados con un lado que mida 5, 7, 8 y el otro 13, ¿lo puedes intentar  
919 ahora tú lo que sigue?  
920 AB: sí  
921 P:Muy bien.  
922 S: a ver bien, de una vez una cosa ¿vienen el martes o el jueves de la próxima semana de 1 a 3?  
923 A: el martes  
924 S: a ver la mayoría dice martes, el martes de una vez...  
925 A: martes  
926 S: ¿cuántos son los del jueves?... los demás son mayoría, martes de una a tres  
927 P: ¿dónde?



928 S: aquí mismo  
929 P: ¿alguien ya terminó?  
930 AC: yo...  
931 P: A ver cómo vas, que fue lo que pasó  
932 AC: es que no me sale el dibujo este...  
933 P: ahh ya, a ver ¿cuál empezaste trazando tú? Empezaste trazando éste, y ya nadamás ... y luego trazaste el de ocho, me  
934 imagino que tiene que ser en ese orden, y luego trazaste el de cinco, y de aquí para acá no hay este... ¿cuánto debería ser?  
935 AC: Siete  
936 P: ¿siete verdad? ese no lo hay ... pasó algo raro.. a ver eso es interesante ¿alguien ya pudo ya terminó y midió los lados?  
937 A: ya  
938 P: a ver ustedes sí, a ver ok, y le midieron verdad? yo creo que igual ustedes saben utilizar la herramienta para medir, y ya  
939 midieron como yo lo hice y algunos ya tienen ese cuadrilátero .... Bueno miren pasó algo interesante que quiero que  
940 comentemos todos , una de sus compañeras me lo acaba de decir, entonces les voy a pedir que pongan atención ahorita en  
941 esto y luego los que vayan terminando continúan... una de sus compañeras me dice que como se dio la indicación,  
942 introdujo los datos 5 7 8 y 13 empezaste...¿ qué lado empezaste construyendo?  
943 AC: el de trece  
944 P: el de trece, entonces ella empezó construyendo el de trece, voy a tratar de reproducir aquí la construcción que ella iba  
945 haciendo para que vean que fue lo que surgió, la duda que ella tiene ahora , entonces empezó con el lado de 13, no sé si  
946 iba exactamente así , pero quedábamos que la posición a la que fuera no nos importaba mucho ahorita , luego en ese  
947 extremo de arriba dibujaste el de 7 si mal no recuerdo , entonces después dibujó el de siete acá...  
948 AC: el de ocho  
949 P: el de ocho, ok entonces cancelamos y dibujamos el de ocho , acá dibujó el de ocho, no le atiné, eso es importante, si se  
950 dan cuenta no le atiné bien al extremo , le tengo que atinar para que sea el segmento que quiero dibujar, después dibujó el  
951 lado de ocho, como yo le estoy haciendo, y después dibujó el lado de 5 acá ¿verdad? entonces después ella hizo esto,  
952 dibujó el lado de 5 , bueno el círculo de radio 5 y trazó también un segmento, así le hizo su compañera , más o menos y su  
953 sorpresa fue que cuando quiso cerrar, eso no medía lo que tendría que medir, que es el lado que nos falta, el de 7, entonces  
954 cuando queremos cerrar ese cuadrilátero y utilizamos la herramienta que aquí está que es la de distancia o longitud , este  
955 segmento tendría que medir 13, ahí está, éste tendría que medir 8, este tendría que medir 5 y éste pues no... miren no mide  
956 7, entonces a ver mi pregunta es ¿qué pasó? Los que sí lo pudieron hacer ¿ cómo resolvieron ese problema?  
957 AD: este....  
958 P: a ver te escucho, es que movemos el punto del círculo a trece, lo recorremos ...  
959 P: ahhh... entonces ustedes lo que hicieron fue, saben que aquí en el software dinámico pueden mover alguno de los  
960 puntos, por ejemplo éste , lo movieron hasta que les diera algo más o menos así , algo más o menos así, esa es una opción  
961 si se dan cuenta , pero ¿ se acuerdan que desde un principio nosotros pusimos este dato? Si pusimos ese dato es porque yo  
962 creo que lo tenemos que utilizar , y si se dan cuenta no lo han utilizado, además el ... arrastrar para atinarle, miren yo por  
963 ejemplo le trato de acomodar para que me de siete ... ahhh... me está costando, a lo mejor alguien no tuvo tanto problema  
964 , a mí si me está costando trabajo, ahí está, parece que ya está , bueno fíjense que cabri, cuando ustedes miden longitudes,  
965 les da los dos primeros decimales, pero si no se saben esta instrucción, se lea voy a dar, a lo mejor el número tiene más  
966 decimales, y si fuera 7 centímetros exactamente, todos los decimales deberían ser cero , entonces fíjense que una forma  
967 que cabri me muestre más decimales es que yo seleccione ese número, y que ahora con el signo de +, con la tecla de más  
968 en mi computadora, le vaya yo dando, fíjense con el signo de más, y fíjense que acaba de pasar ...  
969 A: no es siete exacto...  
970 P: no es siete exacto, yo quiero que sea siete exacto, fíjense que si selecciono otro de los datos, por ejemplo éste que sí  
971 tracé colmo radio de un círculo , lo voy a seleccionar y le voy a dar con el más y muestra puros ceros porque ese es trece  
972 exactamente , porque fue el dato que yo introduje, entonces tal parece que eso de arrastrar no es muy seguro , de hecho  
973 quienes ya terminaron, quienes ya terminaron de construir , me gustaría que verifiquen que los cuatro lados midan  
974 exactamente lo que dijimos, a lo mejor uno dice 13.00 pero si le piden que les muestre más decimales se van a dar cuenta  
975 que no es trece exacto, entonces los que ya terminaron , traten de verificar que realmente sean las medidas que se les  
976 solicitaron , y otra cosa ¿ qué pasó? ¿ cómo tendríamos que utilizar entonces el dato de 7 con el compás? Fíjense, voy a  
977 iniciar una vez la construcción nuevamente, paso por paso, tratar de reproducir lo que algunos de ustedes estuvieron  
978 haciendo , y vamos a ver que es lo que deberíamos haber hecho , había como tres o cuatro personas que ya habían  
979 terminado, ¿ya verificaron que sus datos si sean, y si son valores cerrados?  
980 A: sí  
981 P: Bien...¿quién más ya había terminado?  
982 A: yo  
983 P: ¿ y son valores cerrados? Ahhh... bueno ¿ a tí si te dio cerrado?  
984 A: sí  
985 P: ¿ arrastraste hasta que el cuarto lado te diera?  
986 A: sí  
987 P: pero tuviste muy buen pulso entonces ¿verdad? porque no le pides que te muestre más decimales..  
988 A: ajá

**989** P: y te muestra puros ceros ... pero en general eso como que cuesta trabajo y además nos seguimos preguntando cómo  
**990** deberíamos usar ese dato ... el detalle si se dan cuenta está en el cuarto lado que quieren hacer , hacen el primer lado y no  
**991** hay problema, hacen el segundo no hay problema, cuando hacen el tercero siguen respetando las medidas, pero cuando  
**992** quieren cerrar la figura, ahí es donde a lo mejor no cierra en lo que queríamos , y entonces tenemos que arrastrar y tratar  
**993** de ajustar , pero lo ideal sería que la figura, usando el compás , cerrara solita, y que cerrara usando los radios que yo estoy  
**994** introduciendo, entonces a ver lo voy a hacer yo poco a poco , y les voy a pedir de favor que ustedes vayan observando y  
**995** después lo traten de reproducir, entonces una vez más, estoy siendo un tanto reiterativo, pero lo voy a volver a hacer desde  
**996** el principio, entonces vuelvo a introducir los datos, ahí están , voy a iniciar con la construcción del primer lado, para lo  
**997** cual creo que ya no tenemos mayores problemas , por ejemplo ahora voy a decidir que sea al cinco, entonces hasta aquí  
**998** como que todo parece que va aparentemente bien , construyo el de cinco, lo ocultamos y ahora voy a construir el de 13  
**999** aquí, este ... otra vez tomo el compás, selecciono 13 me apoyo acá y trazo un segmento, y tengo la seguridad de que ese  
**1000** segmento va a medir 13 exactamente , ni siquiera me puse a pensar hacia dónde iban a ir los lados, la orientación , yo tracé  
**1001** a dónde quise, ahora me faltan dos lados, éste es el de cinco , este es el de trece, me falta el de siete, me falta el de ocho,  
**1002** no tengo muchas opciones, puede ser que el de 7 parta de aquí, y si de aquí parte el de siete, de aquí debería partir el de 8 ,  
**1003** o puedo decidir que el de 8 parta de aquí , y entonces el de 7 tiene que salir de acá, y los dos lados , yo debo trazar los dos  
**1004** lados hacia a algún punto donde se cumplan las medidas que yo quiero , fíjense que por ejemplo, voy a decidir que voy a  
**1005** poner aquí el 8, entonces tomo con el compás la medida de ocho, me apoyo aquí y entonces fíjense lo que va a pasar, que  
**1006** tal que yo lo trazo para acá, pues va a estar medio raro ¿no? Porque el otro lado tendría que cerrar así y va a ser además un  
**1007** cuadrilátero raro y yo no sé si de aquí hasta acá la medida vaya a ser la de 7, que es la que yo quiero, o a lo mejor el lado  
**1008** .... Salud...podría salir para acá, éste sería un segmento de 8, pero mi pregunta es si de aquí para acá va a haber 7,  
**1009** entonces aquí ¿qué se les ocurre hacer para que el lado de aquí, el lado que parta de aquí tiene que medir 7? ¿cómo le  
**1010** hago?  
**1011** A: pone el compás desde aquí y pone, en el punto donde se intersecan las dos  
**1012** P: ahh... parece que eso podría funcionar  
**1013** A: sí, sí funciona  
**1014** P: ahh bueno entonces voy a hacer lo que tú sugieres...este ya me daría el radio de ocho, me falta el radio de 7, entonces  
**1015** voy a tomar 7 y me apoyo acá porque es lo que quiero que mida el otro lado , y se intersecan, se intersecan en .... De  
**1016** hecho ahí se intersecaron en dos puntos, voy a tomar éste, a ver de aquí para acá ¿cuánto hay? Voy a tomar 8 ¿verdad?, y  
**1017** de aquí para acá ¿y funciona? Vamos a ver si funciona , entonces trazo la intersección a una de las intersecciones de las  
**1018** dos circunferencias , déjame ocultar ahora las dos circunferencias, y voy a corroborar midiendo que el cuadrilátero tenga  
**1019** las medidas solicitadas, éste tiene que ser el de cinco, éste el de trece, éste de ocho y éste el de siete, parece que funcionó,  
**1020** ahora puedo incluir o incluso pedirle que me muestre más decimales , con el signo de +, seleccionando la cifra y con el  
**1021** signo de + , y me muestra puros ceros , entonces no tuve que confiar tampoco en el pulso , y utilicé todos los datos,  
**1022** entonces parece que esa fue una muy buena idea, antes de trazar el tercer lado a dónde caiga, apoyarnos también en el otro  
**1023** extremo libre y fijarnos en dónde se cruzan esos dos círculos, ahora sí, espero que con esto ya todos puedan construir un  
**1024** cuadrilátero que tengas esas medidas en sus lados , si alguien tiene de todas formas problemas, nos avisa , pero en general  
**1025** me gustaría ver que ya terminaron ¿ya? Muy bien , muy bien allí ya terminaron también , acá todavía no... si hay  
**1026** problemas nos preguntan, ahí ahhh aquí como que algo falló, entonces ahí se me hace que le arrastramos hasta que le  
**1027** atinara ¿ cómo vamos? Aquí vamos a la mitad .... A ver ¿ aquí cómo vamos? ¿éste es de cinco, verdad, y éste es de trece?  
**1028** Porque lo intuía a simple vista, entonces ahora necesitas, por ejemplo que este sea de 7 y este sea de ocho  
**1029** A: ¿entonces este es de ocho?  
**1030** P: ese es de ocho y este es de siete, oye pero es que allá se cruzaron y aquí parece que no se cruzan ... apenas como que sí  
**1031** se juntan lo cual está raro ... a ver, si tú te acuerdas este punto lo puedes mover porque está sobre un círculo nadamás  
**1032** ¿dónde se mueve? Para mover seleccionas eso, ahh ya a ver éste es el círculo de 5, éste es el círculo de trece , éste es el de  
**1033** 8 ¿te falta trazar yo creo que el de 7, no? El de siete tendría que partir de aquí , eso entonces fíjate, de aquí para acá  
**1034** ¿cuánto hay? Hay ocho ¿verdad? porque Así lo trazaste, y de aquí para acá hay siete, entonces creo que es ese cruce  
**1035** ¿verdad? , muy bien, les sugiero muchachos , es una sugerencia nadamás, que cada que dibujen un círculo lo oculten,  
**1036** porque el círculo lo trazan para tener una medida exacta, después como que tenemos tres o cuatro círculos, y eso nos  
**1037** confunde más , bueno parece que ya la mayoría está terminando , vamos a ver si estoy en lo correcto, vamos a ver ¿cómo  
**1038** estamos acá? ¿ya terminaron? , allá hasta le mueven a las instrucciones, muy bien hay que personalizar el trabajo ¿verdad?  
**1039** tú ya le pusiste otro color y otro tipo de línea, ¿aquí como vamos? Ehh... ¿en qué has tenido problemas?  
**1040** AE: (inaudible)  
**1041** P: ¿quieres trazar el segmento, y no has podido trazarlo de las medidas que quieres? A ver ¿de qué medidas quieres tu  
**1042** segmento?  
**1043** AE: inaudible  
**1044** P: muy bien ¿este círculo cómo lo trazaste? Platícame que hiciste  
**1045** AE: Le pude en compás  
**1046** P: le pusiste en compás, muy bien  
**1047** AE: después le puse el cinco  
**1048** P: ahh muy bien, entonces pusiste un círculo con radio que mide 5... a ver traza el radio, dibuja uno de los radios, es con  
**1049** esa instrucción, la de segmento ... esa... de ese punto ... ahhh ... nadamás ahí, creo que ya tienes dos puntos encimados,  
**1050** creo que hay que tener cuidado, como que le diste click sin querer y ya hay dos puntos muy cerca, ya no sabemos cual es

1051 el centro del círculo , entonces yo creo que lo mejor es deshacer esa última acción , si le das *control c* , ¿ te das cuenta que  
1052 ahí hay dos puntos? Hasta te pregunta cuál de los dos ¿ya viste? Entonces creo que sería buena idea borrar, borra los dos  
1053 puntos, cómo no sabemos cuál es el centro del círculo mejor borramos los dos, más vale que lo hagamos , este ahh... mira  
1054 ya parece que ese sí es el centro, ese sí ... con cuidado, le vas a dar click pero justo , sí seleccionas el click y dale aquí en  
1055 el centro , y ahora da click en algún punto del círculo , donde tú quieras pero sobre él, eso ¿cuánto debe medir este  
1056 segmento?  
1057 AE: ¿cinco?  
1058 P: cinco, ¿tienes alguna duda? Si tienes duda de las medidas, con la instrucción lo puedes medir, si está segura pues  
1059 entonces ya tienes ese segmento, ya trazaste el primer lado del cuadrilátero y tú necesitas los otros tres, ¿crees que lo  
1060 puedas hacer? De una forma parecida?  
1061 AE: sí  
1062 P: ¿tomando con el compás esas medidas?  
1063 AE: sí  
1064 P: ok bueno, como la mayoría ya terminó ahora quisiera que hagamos lo que ahí dice, vamos a tratar de seguir la guía de  
1065 la actividad , primer pregunta ¿ tuvieron alguna dificultad? Si tuvieron alguna dificultad para hacerlo, me gustaría... ahí  
1066 tienen estas hojas individualmente, y ahí escriban si tuvieron dificultades o no, y luego que hagamos lo que dice, compare  
1067 el cuadrilátero que tú construiste , con el de tus compañeros más cercanos, y la pregunta es si existen diferencias...  
1068 A: sí existen diferencias  
1069 P: entonces vamos a terminar ese inciso *a* en ese caso ustedes contesten por favor con algún lápiz o lapicero esa parte,  
1070 básicamente son tres cosas, primero ¿tuvieron dificultades para hacer ese cuadrilátero? Luego ¿comparamos el  
1071 cuadrilátero con el de nuestros compañeros cercanos? Y ahí escribimos si son distintos , y si sí son distintos, tratamos de  
1072 dar una explicación de por qué lo son, entonces por favor eso es individual, excepto claro comparar con sus compañeros  
1073 ( los estudiantes están haciendo lo solicitado, inaudible)  
1074 P: sí de hecho vamos poco a poquito, al inciso *b* todavía no se pasen .. eh... den la oportunidad de que vayamos todos al  
1075 mismo ritmo, ahorita nadamás terminen lo que dice el inciso *a* respecto al cuadrilátero que han construido , todavía no se  
1076 pasen al inciso *b*, no se preocupen , vamos paso a paso  
1077 ( los estudiantes están haciendo lo solicitado, inaudible).  
1078 P: ¿cómo van en sus respuestas muchachos? ¿ya alguien terminó de responder?  
1079 A: ya  
1080 P: un minutito más para que empiecen bien, si no han terminado de contestar  
1081 ( los estudiantes están haciendo lo solicitado, inaudible)  
1082 P: bueno, a ver quisiera preguntarles particularmente de la segunda pregunta , cuando voltearon ustedes construyeron un  
1083 cuadrilátero, a todos se les dió la misma indicación por cierto, no sé si lo notaron, pero no les pedí construir algo distinto a  
1084 cada quien, a todos les pedí construir un cuadrilátero con ciertas medidas y luego los compararon, ¿hay sus diferencias o  
1085 todos construyeron lo mismo?  
1086 A: síii  
1087 P: había diferencias... ¿qué tipo de diferencias había?  
1088 A: en la forma  
1089 P: ahhh la forma, osea de plano se veía distinto...  
1090 A: síii  
1091 P: ¿a qué se refieren ustedes con la forma? ¿cuándo dicen forma se refieren a que a lo mejor alguien obtuvo esto pero  
1092 estaba así como que hacia arriba?  
1093 A: no  
1094 P: ¿ a qué se debe entonces?  
1095 A: usted hizo... ( inaudible)  
1096 P: no se preocupen no es un virus, ya está  
1097 A: jajaja ( inaudible)  
1098 P: a ver escuchen...ahhh ya te entendí, decidieron diferentes órdenes en los lados  
1099 A: sí  
1100 P: muy bien, ésa es una, entonces se ve distintos, pero a ver ...  
1101 AF: los ángulos...  
1102 P: los ángulos son distintos, de los cuadriláteros ... acá dicen que hubo quienes siguieron el mismo orden que yo , y si  
1103 siguieron el orden ¿ si obtuvieron el mismo cuadrilátero que yo?  
1104 A: síii... más bonito  
1105 P: más bonito, dicen ... sí ese se parece bastante, este no a ver , lo que dijo su compañero de los ángulos me llamó la  
1106 atención , tú dices que las diferencias son los ángulos, ¿les parece? Sobre todo para los que siguieron el mismo orden que  
1107 yo , vamos a medir los ángulos para compararlos, en general todos podríamos medir los ángulos del cuadrilátero ,  
1108 sabemos que tiene 4 ángulos, si no se acuerdan aquí en el antepenúltimo botón dice medida de ángulo, si seleccionan esa  
1109 opción , si quieren medir por ejemplo éste ángulo hacen click aquí , aquí y aquí, el vértice tiene que ser siempre el  
1110 segundo click, y les mide ese ángulo , yo voy a medir entonces los ángulos del cuadrilátero que construí y vamos a ver si  
1111 son las mismas medidas, por ejemplo para el cuadrilátero que yo construí, entre l lado de 5 y el lado de 8, el ángulo es  
1112 74,2 grados, vamos a ver si obtuvimos el mismo ángulo los demás...

1113 Al menos los que siguieron este orden...ahí tengo el segundo ángulo, voy a medir los cuatro ángulos ya de una vez ...  
1114 miren el software me muestra estas medidas, 74,2 , 98.4, 34 y 153.3, está .... ¿ quiénes siguieron ese mismo orden y que  
1115 dicen que si obtuvieron el mismo cuadrilátero que yo? ... ¿ en verdad tiene las mismas medidas?  
1116 A: no  
1117 P: ahh, entonces varía, a ti ese ángulo que a mí me da 98.4 te da 96.5 ... a ver a ti ese ángulo que a mí me dio de 74.2 a ti  
1118 te da de 89.5 ... oigan entonces en general no obtuvimos el mismo cuadrilátero ...  
1119 A: no  
1120 P: lo cual es un tanto extraño para mí porque les dí la misma indicación a todos , tal vez cambiaron el orden y eso pudo  
1121 influir, pero incluso los que no lo cambiaron los que siguieron el mismo orden , obtuvieron algo distinto.... Ahorita  
1122 platicamos de eso entonces, me gustaría que pasen ahora sí al inciso b, la actividad es prácticamente la misma , se les  
1123 solicita construir un cuadrilátero con otras medidas , pasen ahora sí al inciso b y construyan el 1118cuadrilátero de lados 2  
1124 ,3 ,4 y 11 por favor ...  
1125 A: no se puede  
1126 P: ¿no se puede?  
1127 A: que se esperen  
1128 P: a ver vamos a tratar de intentarlo todos  
1129 ( diálogos inaudibles)  
1130 P: ahh... bueno te dejo que lo pienses bien ... sí, vamos a dar la oportunidad de que todos lo intenten , algunos lo  
1131 hicieron... ¿ qué pasó?  
1132 A: yo digo que no se puede porque 2,3, y 4 en su suma tan solo, ay se me fue , son siete, no , son nueve y tenemos 11  
1133 centímetros, entonces por eso no se puede ..  
1134 P: oh...entonces...  
1135 A: tiene que ser más  
1136 P: bueno entonces mi pregunta es ¿primero lo intentaste o te diste cuenta de eso...  
1137 A: al sumarlo  
1138 P: tú primero te diste cuenta... pero ahora ya lo intentaste construir..  
1139 A: sí, aquí está  
1140 P: y no pudiste, oh ya muy bien ... lo intentamos todos... lo intentamos todos..  
1141 AG: es que...  
1142 P: ¿mande?  
1143 AG: ¿ abrimos un archivo nuevo?  
1144 P: sí sí sí, cada construcción que hagan , que no se llene ahí de muchos trazos, abran un archivo nuevo y además saben  
1145 que lo que ya hicieron no se pierde, ahí sigue guardado, pero cada vez que hagan una construcción les sugiero que hagan  
1146 una hoja nueva ..  
1147 ( diálogos inaudibles)  
1148 P: pero tal vez se logre, y que tal que cambio el orden ¿por qué cuál quisiste hacer primero?  
1149 A: pero no se puede.  
1150 AH: pero no se puede, siempre va a quedar...va a tener que dar aunque sea 11 para que se pueda.  
1151 P: bueno entonces , al igual que en el anterior no me tengo que preocupar mucho en el orden en que empiezo a construir,  
1152 entonces voy a iniciar la construcción ...  
1153 A: se supone que estos.... (inaudible).... No, no sale, no se puede  
1154 ( diálogos inaudibles)  
1155 P: bueno yo igual lo intenté construir, yo construí el lado de 11, en uno de sus extremos construí el lado de 4, y cuando  
1156 quise construir el lado de 3 y el de 2, éste es un círculo de radio 3 y éste es un círculo de radio 2 , eh, nosotros hace rato lo  
1157 logramos cuando se cruzaron esos dos círculos, ahorita se ve que no se cruzan, pero incluso puedo tomar este punto y  
1158 mover a ver si se... no pero pues ..  
1159 A: no se puede...  
1160 P: parece que no se van a cruzar... ¿alguien si lo pudo construir?  
1161 A: no  
1162 P: ¿todos lo intentaron ya?  
1163 A: ya  
1164 P: ¿quién me dice la razón por la que no se puede construir? A ver  
1165 AI: la suma de los tres lados menores tiene que ser mayor al del más grande ¿no?  
1166 P: la suma de los tres lados menores tiene que ser mayor al del más grande, nos dicen acá... o ¿ alguien encuentra otra  
1167 razón?  
1168 AJ: no, nadamás que no deben ser a fuerza los menores, ose que con cualquiera de los otros tres  
1169 P: sí sí te escucho  
1170 AJ: osea que cualquiera deben de , es que como ya...  
1171 P: entonces no importa que agarre yo los tres menores, simplemente agarro tres y los sumo .....no tienen que ser los tres  
1172 menores es lo que entendí  
1173 AJ: pero deben de sumar menos que el cuarto lado

1174 P: ok , bueno, oigan ¿esto les recuerda algo que a lo mejor ya sabían? Hace rato escuché que a tí en particular te recordó,  
1175 no pero sirve para otro tipo de ..  
1176 A: los triángulos  
1177 P: ¿ tú ya conocías algo sobre los triángulos? ¿ qué es lo que sabías?  
1178 A: pues es que es igual con el compás , la suma de los dos lados menores tiene que ser más grande a la mayor, y pero  
1179 pues ...  
1180 P: ¿ si se acuerdan los demás que hay algo parecido para los triángulos? ¿no? A ver ¿puedes otra vez repetirnos en voz  
1181 alta ? vamos a escuchar lo que dice su compañero , tú te acordaste de algo sobre los triángulos que ya sabías ¿ qué era?  
1182 A: que la suma de los dos lados menores tiene que ser más grande a la del lado mayor  
1183 P: si eso no es así, ¿ qué pasa cuando lo quieres construir?  
1184 A: no se intersecta  
1185 P no se intersecta, ok entonces eso que dices para triángulos se parece mucho a esto, no sé si alguien ya recordó eso de los  
1186 triángulos  
1187 A: sí  
1188 P: sí, de hecho le llaman de alguna forma ¿ se acuerda alguien de cómo se la llama? Bueno lo importante es que hay una  
1189 regla que dice eso para construir triángulos ... parece que cuando uno quiere construir cuadriláteros pasa algo similar,  
1190 entonces ya visto esto , por favor igual en el inciso b contesten las preguntas , cuando intentaron construir este  
1191 cuadrilátero, pregunta si tuvieron dificultad  
1192 A: sí  
1193 P: ya vimos que los compañeros tampoco pudieron , y contesten la última pregunta que dice ¿qué diferencia percibes  
1194 respecto al cuadrilátero que si se pudo construir? , el primerito que hicieron todos, entonces contesten esa parte por favor  
1195 ( estudiantes contestando cuestionario)  
1196 P: ¿ya respondieron muchachos? Yo creo que ya, entonces les voy a pedir en particular, alguien algún voluntario , qué va  
1197 a hacer, nadamás me va a dar unos datos, a ver ¿Quién dijo yo? ¿ quién participa? Alguien alguien, va a ser una pregunta  
1198 muy simple, me van a dar, les voy a pedir tres números ... ¿ tú eres Miguel?  
1199 Miguel: ja,  
1200 P: o mejor tu compañera, por postularte participa... ¿ cómo te llamas tú?  
1201 V: Viviana.  
1202 P: Viviana, un favor, dime tres números que yo pueda tomar como lados para construir un triángulo y que sí se pueda  
1203 construir, no muy grandes porque aquí tu sabes que ... tú dime las medidas de los lados de un triángulo y lo voy a tratar de  
1204 construir..  
1205 V: tres tres tres  
1206 P: tres tres tres es...  
1207 V: ¿ qué, si se puede?  
1208 P: de hecho deja que yo introduzca el dato, ese triángulo seguro se puede...  
1209 A: sí  
1210 P: ¿ cumple con lo que nuestro compañero nos dijo hace rato?  
1211 A: sí  
1212 P: ¿ cómo dijo él? Que comparáramos la suma de dos y que tenía que superar al del tercero, tres más tres supera a tres, y  
1213 el triángulo que voy a construir en general, pues va a ser un triángulo que ustedes reconocen , tiene que ser un triángulo  
1214 con tres lados iguales, ahí está tengo un lado que mide tres, e incluso ya nadamás con la herramienta de círculo puedo  
1215 terminar de construirlo ... ok.... ¿qué tipo de triángulo es este? ¿ se acuerdan cómo se clasifica?  
1216 A: Equilátero  
1217 P: es un triángulo equilátero...bueno a ver alguien más... bueno tú igual... ahora dime las dimensiones de un cuadrilátero,  
1218 pero que sus lados sean iguales, entonces con que me des un valor , quieres que igual sea de tres o le cambiamos  
1219 V: no, de 5  
1220 P: de cinco, entonces voy a hacer un cuadrilátero, para empezar ¿se va a poder construir? Los cuatro lados van a medir  
1221 cinco y lo que me dijeron es que comparte la suma de tres lados con el otro, entonces 5 y 5 y 5 , ahí no importas el orden  
1222 porque son todos iguales y eso es quince, y el lado que sobra es de 5, ¿ lo puedo construir?... bueno lo voy a construir, un  
1223 cuadrilátero cuyos lados midan 5 ¿ qué tipo de cuadrilátero va a ser entonces ?  
1224 A: un cuadrado  
1225 P: dicen que va a ser un cuadrado, entonces vamos a construirlo, están todos de acuerdo en que ahora el cuadrilátero que  
1226 voy a construir es un cuadrado?  
1227 A: Sí  
1228 P: ¿qué?  
1229 A: sí  
1230 P: de hecho todavía este me servía, nadamás que ahora este es de cuatro lados, tengo que construir 4 . Bueno ya construí  
1231 un cuadrilátero miren, sus lados miden cinco, lo tomé con el compás, podemos incluso recurrir a la herramienta de medida  
1232 para verificar que los lados miden 5, mi pregunta es triángulo equilátero sus lados miden 3 , cuadrado sus lados miden 5 ,  
1233 ¿están de acuerdo que esto es un cuadrado?  
1234 A: no  
1235 P: ¿ no que iba a ser un cuadrado?

1236 A: es un cuadrilátero  
1237 P: es un cuadrilátero, y sus lados son iguales miden 5 ¿por qué no es cuadrado? A ver tú  
1238 A: los ángulos internos deben medir 90 grados cada uno  
1239 P: para que sea cuadrado, sus ángulos también tienen que cumplir con algo, ser de 90 como dicen.... Pues eso a  
1240 simplemente vista parece que no, entonces, si sus ángulos no son de 90 yo creo que entonces no es un cuadrado , pero  
1241 pudo haber sido un cuadrado , a lo mejor si en vez de verse así, se viera tal vez así , si sería un cuadrado  
1242 A: sí ajá  
1243 P: ¿vieron lo que hice? Moví uno de los vértices y ese cuadrilátero se modificó, tal vez ahora ya es cuadrado , y si no es  
1244 cuadrado, de todas formas no es el mismo cuadrilátero que hace rato , voy a tratar de modificar el triángulo equilátero, a lo  
1245 mejor lo hago un triángulo distinto, no pues aquí nadamás lo traslado, aquí giro pero ¿estará cambiando de forma?  
1246 A: no  
1247 P: y éste es el cruce de los círculos, entonces ni lo puedo mover , entonces ¿puede cambiar la forma del triángulo?  
1248 A: no  
1249 P: ¿ puede cambiar la forma del cuadrilátero?  
1250 A: sí  
1251 P: Entonces es algo curioso, al principio el primer cuadrilátero que hicimos , aunque nos dieron las mismas medidas a  
1252 todos, obtuvimos cuadriláteros diferentes , me gustaría entonces muchachos que respondan las otras dos preguntas...dice  
1253 después del inciso b, dice la primer pregunta ¿ un cuadrilátero queda bien definido al especificar las longitudes de sus  
1254 cuatro lados?  
1255 A: no  
1256 P: que quede bien definido significa que a todos, es una forma de entenderlo, que a todos les quedaría el mismo  
1257 cuadrilátero al dibujarlo, entonces respondan esa pregunta y la otra, la otra es ¿ qué criterios puedes seguir para que dados  
1258 los lados de un cuadrilátero , puedas decidir si su construcción es posible o no? Eso todavía en individual respóndanlo por  
1259 favor  
1260  
1261 FIN GRABACIÓN PRIMERA SESIÓN DE ABRIL  
1262  
1263  
1264 TRANSCRIPCIÓN DE LA SESIÓN DEL 13 DE ABRIL.  
1265 (parte 2, VIDEO 0334)  
1266  
1267 P: muy bien, a ver muchachos, si a todos les digo construyan un triángulo equilátero cuyo lado mida 5, o mida 3 o mida 8,  
1268 la medida que sea ¿todos obtienen el mismo triángulo?  
1269 A: sí  
1270 P: ahí no hay diferencias...  
1271 A: no  
1272 P: si les digo construyan un cuadrilátero como en la primer pregunta, o como en la primer actividad, construyan un  
1273 cuadrilátero de lados 5,7 8 y 13, en caso de que sí se pueda construir, parece que no van a obtener el mismo... bueno  
1274 déjenme platicarles rápidamente de algo que tiene que ver además con algún tipo de construcción, el triángulo como ya se  
1275 dieron cuenta, sea de las medidas que sea , cuando el triángulo se puede construir, ya que está hecho, como que si lo  
1276 quieren deformar, no se puede deformar , sus ángulos permanecen del mismo valor, se podría decir como que el triángulo  
1277 es una figura como que rígida, es indeformable, pero cuando construyen un cuadrilátero como éste, aunque todos  
1278 construyamos un cuadrilátero con las mismas medidas, el cuadrilátero se puede deformar, como aquí hace cuando toman  
1279 uno de los vértices y lo arrastran, y el cuadrilátero sigue teniendo las mismas medidas, pero empieza a tener diferentes  
1280 ángulos, al menos eso es lo que hemos visto , bueno si ustedes se han dado cuenta por ejemplo en las construcciones de  
1281 torres o en las construcciones de puentes, que es algo que debe estar rígido porque estaría medio peligroso si se mueve ,  
1282 que tal que el aire empieza a moverlo y se empiezan a deformar las partes de la que está hecho, bueno eso podría  
1283 ocasionar problemas tal vez, en las estructuras de ese tipo, generalmente los arreglos que se hacen , si lo han visto son  
1284 triángulos, ponen barras de metal que lo que van formando son triángulos , eso para que le dé más rigidez. Un cuadrilátero  
1285 como ya vimos, se podría deformar, entonces un cuadrilátero no sería tal vez tan recomendable para querer hacer una  
1286 estructura que queramos que no se mueva, sino todo lo contrario, si queremos tener movimiento, si queremos transmitir  
1287 movimiento, probablemente una figura con cuatro lados nos pueda servir , que es por ejemplo lo que he visto que algunos  
1288 están haciendo, algunos ya los noté que hacían un cuadrilátero y le empezaban a intentar a mover algunos de los  
1289 segmentos, los empezaban a arrastrar y a mover, algunos ya ví que utilizan el comando de animación y lo ponen a que se  
1290 mueva solo ¿verdad? por allá ví, cosa que con un triángulo no tiene mucho chiste porque el triángulo nomás empieza a dar  
1291 vueltas sobre uno de sus vértices, entonces fíjense que en particular, la actividad a la que ya vamos a pasar ahora , que es  
1292 la actividad central de todo esto, tiene que ver con algo que se llaman mecanismos, mecanismos hechos con cuatro  
1293 barras, entonces ahora les voy a pedir para que ya pasemos a la actividad central, que lean el enunciado, eso que dice  
1294 actividad central en cursivas, léanlo, trátenlo de entender, lean toda esa parte, todavía no se brinquen a la segunda página,  
1295 nadamás lean toda esa parte que dice actividad central , vamos a ver qué entienden al respecto, y es con lo que ahora  
1296 vamos a trabajar..  
1297 ( silencio, estudiantes leyendo su material)}}

**1298** P: vamos a quedarnos entonces con esta primera parte y ahí en negritas nos dan una sugerencia, dicen que tratemos de  
**1299** construir un mecanismo con esas condiciones, ahí dice, a ver si entendimos algo similar la mayoría, ahí dice que cuando  
**1300** una figura hecha con cuatro barras, ahí podemos pensar que en vez de ser segmentos, son a lo mejor ya barras de metal,  
**1301** y dice que están articulados en sus extremos, entonces pudieran pensar ustedes que aquí esta es una barra de metal, tal vez  
**1302** o de madera, y en la unión de esas dos barras, en lo que sería el vértice de la figura, ahí va tal vez un perno, algo que le  
**1303** permite el movimiento a esas dos barras, que están articuladas, dicen que este tipo de construcciones se llaman  
**1304** mecanismos tipo Grashof, bueno el término así se conoce, si una de las barras puede dar giros completos. La sugerencia  
**1305** que nos dan es que tratemos de representar un mecanismo de ese tipo, en otras palabras que construyan un cuadrilátero  
**1306** como los que han construido, o al menos como el primero, pero en particular que ese mecanismo, cuando traten de hacer  
**1307** girar las barras, efectivamente las barras daban giros completos, miren yo voy a regresar en particular, si ponen un poco de  
**1308** atención acá, me voy a regresar a lo que fue la primer construcción, el cuadrilátero que sí se pudo construir, y entonces yo  
**1309** trato de verificar si alguna de las barras, por ejemplo trato de girar esta y fíjense que ahí pasa algo extraño, las otras dos  
**1310** desaparecen, si le sigo dando vueltas...ahí como que vuelven a aparecer, pero en general no me gusta que desaparezcan,  
**1311** ahí a lo mejor si fuera un mecanismo, no estaría funcionando bien, dice que si queremos podemos utilizar el comando  
**1312** animación, que para los que no lo conocen, en el penúltimo botón dice animación, si ustedes quieren mover algo, por  
**1313** ejemplo un punto, si yo quiero mover este punto, doy click ahí sin soltar, y es como si tuviera un resortito que va a  
**1314** impulsar a ese punto, entonces lo jalo tantito si quiero que se mueva lento, o lo jalo mucho si quiero que se mueva rápido,  
**1315** yo quiero que se mueva no muy rápido para ir viendo que pasa, mira ahí parece que todo va funcionando bien, pero no  
**1316** miren... de repente desaparecen, entonces eso es lo que no nos convence, que si va a ser un mecanismo, una barra va a  
**1317** girar y va a empezar a mover a las otras, pues las otras barras deben verse en todo tiempo, en todo momento, así es que mi  
**1318** sugerencia es ahora la siguiente, yo voy ahora a tratar de construir un cuadrilátero que sea un mecanismo de tipo Grashof,  
**1319** fíjense lo que yo voy a hacer, ahora las medidas no importan, pues el chiste es que sea un cuadrilátero que alguna de las  
**1320** barras gire, entonces yo en particular voy a proponer cuatro segmentos, hagan de cuenta que están en una materia,  
**1321** asignatura como de taller y les dan cuatro barras de metal, que ya tienen orificios en los  
**1322** y entonces lo que queremos hacer es unirlos y formar ese cuadrilátero, y luego tratamos de utilizar ese cuadrilátero como  
**1323** mecanismo, entonces yo en particular lo voy a intentar hacer, no es otra cosa más que intentar volver a construir un  
**1324** cuadrilátero, pero ahora las medidas nadie me las está dando, de hecho yo las propuse, entonces ¿qué es lo que estoy  
**1325** haciendo? Algo similar a lo anterior, pero en vez de introducir números, yo introduje directamente segmentos que pienso  
**1326** que son las barras con las que quiero hacer el mecanismo, entonces la primer barra tomé con el compás esa medida y esa  
**1327** es la primer barra, y voy a tomar las demás, ahora voy a tomar esta otra barra, y quiero que vaya articulada en este  
**1328** extremo, por ejemplo así, y me faltan la segunda y la tercera, que, como hace rato ya concluimos, tengo que trazar  
**1329** circunferencias que se intersecten.... A ver, ahora entonces viene la prueba, la prueba de ver si este mecanismo funciona,  
**1330** voy a tratar de darle giros a esta barra, ya estoy suponiendo que es una barra, voy a tratar de girarlas giros completos, y  
**1331** vamos a ver si las otras barras no desaparecen, eso es lo que queremos lograr y si eso sucede ya llamaríamos a esto un  
**1332** mecanismo tipo Grashof, entonces otra vez con la animación tomo este punto y lo hago girar, y uy no cumplió la prueba,  
**1333** pero eso es lo que queremos, queremos construir una estructura, un cuadrilátero, una figura de cuatro barras articuladas  
**1334** dónde una de esas barras pueda dar giros completos y las otras barras sigan ahí existiendo, ahí hay un punto en el que  
**1335** desaparecen, a ver entonces inténtelo ustedes, propongan cuatro barras, les digo usen un poco la imaginación, supongan  
**1336** que ahí estamos, en vez del laboratorio de cómputo, en dónde les doy barras de diferentes medidas y les pido que  
**1337** construyan ese mecanismo..... ¿cómo van? Fíjense que yo por ejemplo ya hice un nuevo intento y yo ya lo logré,  
**1338** incluso está ahí en la proyección animada el funcionamiento de ese mecanismo, si una de las barras puede  
**1339** dar giros completos, entonces ya tengo el mecanismo que andaba buscando, como una de las barras da  
**1340** giros completos, a eso le llamo mecanismo tipo Grashof, y es lo que queríamos construir ok, se mueve  
**1341** distinto a lo que yo hice, pero ese era el objetivo ¿verdad? que una de las barras, ahí tú animaste una,  
**1342** arrastra a las demás, pero no importa, todo el tiempo está funcionando, eso es lo que queríamos lograr..  
**1343** A: ahhh sí me salió  
**1344** P: ¿a ver por acá también alguien ya lo logró?  
**1345** A2: sí también  
**1346** P: ¿aquí?  
**1347** A3: (inaudible)  
**1348** P: sí, tiene unos comportamientos  
**1349** P2: ¿pero nunca desaparece, verdad?  
**1350** A4: no  
**1351** P: si se dan cuenta, algo importante es que son barras de metal, son rígidas, no se pueden estirar y contraer a lo mejor  
**1352** P2: a ver animalo...  
**1353** P: en otras palabras, todo el cuadrilátero tiene las mismas medidas, lo único que van cambiando son las posiciones, si de  
**1354** repente ven que uno de sus lados crece o se hace más pequeño, algo a lo mejor no estuvo bien, por eso hasta dice que son  
**1355** barras que no se deforman..  
**1356** A5: ay ¿y luego?  
**1357** P: a ver otra vez, este  
**1358** A5: ¿este?

1359 P: ah... para que tú puedas mover un punto, tiene que ser un punto que esté sobre una circunferencia, haz de cuenta que si  
1360 fue la primer barra que dibujaste, vas a tener que poder mover ese punto, a ver inténtalo...  
1361 A5: ayy ... no me acuerdo..  
1362 P: si se puede, te lo va a permitir, dejas oprimido el botón ahí, y como que jalas el resortito...  
1363 A5: ¿así?  
1364 P: no te permite, entonces a lo mejor ese es el que puedes mover, ahora sí lo sueltas, a ver qué te parece si los mueves a  
1365 algunos de los lados, como que moverlo abajo no le gustó, entonces nos fijamos, y sí, tú le diste movimiento a alguna de  
1366 las barras, la barra que se está moviendo es ésta, y mueva a otras dos, porque si te das cuenta una se queda quietecita, pero  
1367 no importa, eso es lo que queríamos ver , que una de las barras gira, y que las otras permanecen bien que no  
1368 desaparecen.... Muy bien... a ver algunos ya lo...  
1369 A6: jeje  
1370 P: que crees, que está muy bien el trabajo, salvo una cosa, mira, vamos a medir los lados, por ejemplo ahorita este mide  
1371 cinco, cuatro, nueve y dos, se supone que esas medidas son éstas, tú de acá las tomaste,  
1372 A6: otra vez...  
1373 P: a ver muévele otra vez como le habías movido hace rato ... muévelo por favor...  
1374 A6: ( inaudible)  
1375 P: a lo mejor no es el que movías , o si era ese? ¿ estás segura?... ahí está , ya viste esta? Fíjate cómo es que va cambiando  
1376 9,8 como que eso no debe pasar porque cuando tú haces una figura con barras, un cuadrilátero con barras, las barras miden  
1377 el mismo siempre, porque sólo como que fueran de goma una para que se hiciera más grande o más pequeña, no sé si me  
1378 estoy dando a entender, entonces, algo no ha de haber estado muy bien, porque una de las características del cuadrilátero  
1379 es que las barras no cambien de forma, se me hace, bueno pienso que a lo mejor tú , éste cuadrilátero tomaste tres  
1380 medidas, pero la cuarta no, y ¿te acuerdas que siempre el cuadrilátero, los primeros dos lados los trazamos a dónde  
1381 queramos, pero los últimos dos lados me tengo que esperar a ver dónde se cruzan los dos círculos, a lo mejor ahí fue  
1382 dónde tú no te esperaste al cruce .... A ver qué te parece si lo volvemos a intentar ¿cuál trazamos primero, ésta?  
1383 A6: sí... hay tanto círculo  
1384 P: vamos a ocultar éste, entonces ahí está... luego cuál quieres que tracemos..  
1385 A6: el segundo...  
1386 P: muy bien, en dónde queremos que vaya, este arriba o abajo...  
1387 A6: abajo...  
1388 P: bien...y el segundo yo igual lo trazo como yo quiera, pero entonces ahora el tercero y el cuarto yo me tengo que esperar  
1389 , el tercero en dónde quieres que vaya...aquí arriba o abajo?  
1390 A6: arriba  
1391 P: trazamos el tercero, pero no lo trazo todavía , me tengo que esperar al cruce con el cuarto, entonces el cuarto, aunque no  
1392 quiera yo, tiene que ir acá abajo, y entonces, éste es el cruce que me sirve  
1393 A6. Bueno esto ya es ...  
1394 P: ese es el cruce que me interesa  
1395 A6: la vez pasada....  
1396 P: y ahora aunque tú lo muevas las medidas no deben cambiar...  
1397 A6: ahí está  
1398 P: las voy a volver a seleccionar , y esas medidas no deben cambiar, porque esas medidas son éstas y éstas van a  
1399 permanecer igual, a ver animalo ... creo que ese no lo vas a poder animar, porque ese es el cruce de dos círculos, vas a  
1400 poder animar éste... ¿ ya ves? Fíjate en las medidas, las medidas no cambian ... eso es bueno ,las medidas son tus barras  
1401 que te dieron para trabajar, pero ¿ qué pasa? Desaparecen, ya viste?  
1402 A6: sí  
1403 P: y eso no está bien porque el mecanismo debe estar todo el tiempo funcionando, si las barras desaparecen quiere decir  
1404 que algo no anda bien, que simplemente ese mecanismo no es un mecanismo de Grashof, mira por ejemplo acá, si te fijas ,  
1405 aunque no le estén midiendo, se ve que una de las barras no se hace más grande ni más pequeña, están todas del mismo  
1406 tamaño, son éstas sus medidas, y ahí no nos desaparecen..  
1407 A6: ( inaudible)  
1408 P: esa es una de las cosas que queremos, que las barras no desaparezcan, ese podríamos llamarlo como mecanismo de  
1409 Grashof , porque está hecho de cuatro barras articuladas que no se deforman y una de ellas puede dar giros, éste es un  
1410 cuadrilátero , podrías pensar que es un mecanismo, pero no es de Grashof, porque una de las barras no puede dar giros  
1411 completos... desaparecen la otras, entonces hay que hacer a lo mejor un nuevo intento...hasta que te quede algo como  
1412 eso...dónde si puedas...  
1413 A7: ya me salió....  
1414 P: ¿ya salió allá? Ahh muy bien si sí, y está funcionando....¿ y no se deforman las barras verdad?  
1415 A7:no  
1416 P: Eso es importante.....muy bien (dirigiéndose al lugar de la estudiante) entonces eso es un mecanismo de Grashof.  
1417 P2: ¿tú pusiste las barras iguales, verdad?  
1418 A: sí ..... no es cierto, dijeron que las hiciéramos del tamaño que quisiéramos...  
1419 P2: de cinco centímetros...( dirigiéndose a otro estudiante) ... la de allá ya quedó también ¿verdad? ¿ no desaparecen las  
1420 barras?



1421 ( varias voces , no audible)  
1422 A30: (terminando su construcción) ahí está....  
1423 P2: y no desaparecen las barras...muy bien..... ahí está ya  
1424 P ( junto al estudiante A39) : .... Entonces de aquí para acá hay tres, y de aquí para acá hay cinco, entonces ese  
1425 cuadrilátero sí cierra...va a cerrar.... Ahí está.... Como tu mismo dijiste...verificaste y el cuadrilátero sí se podía  
1426 construir, con seis, cuatro, cinco y tres, el cuadrilátero sí existe, es éste el cuadrilátero, ahora si te fijas, esta barra la  
1427 puedes mover ¿ya viste? La puedes animar, y tú esperas que todo el tiempo existan las cuatro barras , pero ¿ya viste?  
1428 Como si se rompiera el mecanismo, ¿no?¿ ya viste ahí? como que ahí cuando va, ahí en esa parte mira, como si esas dos  
1429 barras ya no podían soportar y se rompen, entonces esas medidas que tú diste de seis, cuatro, cinco y tres no son  
1430 candidatas como para tener un mecanismo del que queremos, un mecanismo de Grashof.  
1431 A30: entonces...  
1432 P: tú lo que tienes que hacer es otro de intento de un cuadrilátero que de entrada sí se pueda construir, pero luego debes de  
1433 verificar que una de las barras sí pueda dar giros y que las otras no se rompan ¿ no?, ahí parece que la unión de dos barras  
1434 truena, acuérdense de los que les digo, es como echar un poquito de imaginación y pensar que a lo mejor son barras de  
1435 metal unidas por un perno, entonces hay una parte dónde ya no soportarían y se rompería el perno, en el que yo puse hace  
1436 rato animado en el pizarrón, ese se veía que no había problema, podía girar continuamente.  
1437 P( dirigiéndose al grupo en general) : a ver, a ver muchachos, algunos ya hicieron intentos muy bien, otros veo que están  
1438 todavía en esa parte, para que se den una mejor idea de que se trata, o qué tiene que ser o para qué sirve un mecanismo, les  
1439 voy a presentar....  
1440 P2: ¿ nunca te desaparecen las barras verdad?  
1441 A: no  
1442 P2: está bien  
1443 P: Les voy a mostrar un video, es una animación de un mecanismo de éste tipo, no está hecho en cabri, está hecho en otro  
1444 programa, pero así en la vida real se vería un mecanismo de este tipo, entonces vean por favor este video, dura muy  
1445 poquito, y a lo mejor esto les da una idea más clara...(mostrando una animación en la pantalla)...miren ese es un  
1446 mecanismo de cuatro barras, y es un mecanismo tipo Grashof, porque si se fijan una de las barras gira completamente y no  
1447 le afecta a las otras, ahí está miren girando.... Tal vez ustedes digan ¿cuáles cuatro barras? Y o nadamás veo tres ¿verdad?  
1448 ...  
1449 A(varios): risas  
1450 P: pero hagan de cuenta que la cuarta barra es donde va de aquí... ay perdón....ah no se acabó simplemente, podrían  
1451 pensar que la cuarta barra es ésta...si ustedes ya se dieron cuenta, cuando lo ponen a girar una barra no se mueve, de  
1452 hecho, una barra se queda quieta, entonces bien pudiéramos pensar que esta es la barra que está quieta, y estas son las  
1453 otras tres que si se mueven, entonces miren....véanlo, y de hecho me gustaría que alguien me dijera si incluso se le ocurre  
1454 a alguien un uso, ¿ para qué utilizaría un mecanismo que hiciera eso?  
1455 A: para un robot  
1456 P: perdón ¿ podrías repetirlo?  
1457 A: para un robot  
1458 P: para un robot...pudiera ser  
1459 A2:para una bicicleta...  
1460 P: dicen que una bicicleta tendría un movimiento de ese tipo...  
1461 A3: ¿ para la máquina de las tortillas?  
1462 A(varios): risas  
1463 P: a lo mejor para una máquina ¿verdad?  
1464 P: bueno les voy a a decir muchachos, les voy a explicar por qué es tan importante que una de las barras pueda girar,  
1465 generalmente una de las máquinas de las que ustedes dicen ¿ qué las mueve? ¿ qué le conectan a la máquina para que  
1466 esta empiece a girar?  
1467 A(varios): un motor  
1468 P: un motor ¿verdad? y un motor ¿qué tipo de movimiento tiene? ¿ qué es lo que hace?  
1469 Un motor simplemente empieza a dar vueltas, entonces, si yo conectara esta barra a un motor, el motor va a empezar a  
1470 girar, eso es lo que hace un motor, y entonces las otras barras tienen que estar ahí moviéndose para realizar algún tipo de  
1471 trabajo, dicen ustedes, tal vez eso lo puedo utilizar para un robot, tal vez para alguna máquina como la de las tortillas, yo  
1472 les voy a poner otro ejemplo mucho más simple, a ver qué les parece...si se dan cuenta una barra gira, la hace girar un  
1473 motor, y ésta otra barra lo único que hace es esto miren, si se fijan con cuidado, nadamás hace esto... bueno ahí va, le voy  
1474 a poner un poco de movimiento otra vez, esto a lo mejor pudiera ser un limpiaparabrisas, el limpiaparabrisas lo único que  
1475 hace es esto, mientras que seguramente por ahí está conectada a un motor otra barra que.... Una barra gira y es lo que le  
1476 proporciona movimiento a lo demás, entonces se le pueden dar bastantes usos a este tipo de mecanismos, el uso que a  
1477 ustedes se les ocurra ¿qué es lo importante?, que ustedes van a pensar que tienen un motor que va a impulsar a una barra,  
1478 va a hacer girar, dicen tengo un motor, que gira una barra, y esa barra mueva a otras dos, y la barra de salida , la barra que  
1479 hace el trabajo, hace como que esto ( mueve las manos en señal de vaivén), hace lo que ustedes quieran, eso ya es de cada  
1480 quién, pero por eso es importante cerciorarse de que alguna barra gira, porque algunos mecanismos pasé con ustedes, y no  
1481 sé si estarán de acuerdo conmigo, cuando trataban de girar una barra, como que de repente se rompe, están unidas dos, es

1482 cómo si se rompieran, como si pudieran estar unidas y se separan, y es cuando desaparecen , y eso es lo que no queremos  
1483 que suceda, queremos que pase como en ese video...  
1484 PAUSA  
1485 P: Entonces, algunos ya lograron construir mecanismos tipo Grashof, otros no, los que ya lo lograron, e incluso los que no  
1486 lo han logrado, quiero que ahora sí ...en la segunda hojita muchachos....este, esto todavía no....pásense a la segunda por  
1487 favor, de hecho ahí dice que observaran el video, el video ya lo vimos, dice “si todavía no logras construir un cuadrilátero  
1488 que funcione como mecanismo de Grashof”, observamos el video, ya lo observamos, y nos preguntan si todavía no lo  
1489 hemos podido hacer , si ya lo hicimos pues ahí ponemos que ya lo logramos, si no lo hicimos pues igualmente  
1490 contestamos que no, y dice ¿ de qué crees que depende que una de las barras pueda dar vueltas? Si ya se dieron cuenta,  
1491 hay veces que las barras si pueden dar vueltas como en este video, y en las otras tienen problemas, hay veces, ya lo vimos,  
1492 que el cuadrilátero que quisimos tomar como mecanismo de Grashof, no funcionaba, entonces, todavía eso lo van a hacer  
1493 en individual, porque ya la siguiente parte es en equipo, entonces todavía contéstenlo cada uno de ustedes, de qué creen  
1494 que depende que una de las barras pueda girar, o no pueda girar , contéstenlo por favor y ahorita van a empezar a trabajar  
1495 ya en parejas....  
1496 A(varios):(contestando su cuestionario)..  
1497 P( acercándose a una estudiante que lo requiere A29): si te das cuenta, ahí te está pasando algo bien curioso, se deforma  
1498 una de las barras y eso no debiera pasar ¿ya viste?... esta por ahí mide 2, once, doce y eso no puede pasar, porque sería  
1499 como si la barra fuera de goma y empieza a alargarse o a acortarse, entonces tiene razón, por ahí algo movimos, ese  
1500 ....pudieras pensar que es un mecanismo de Grashof, porque ves que una barra gira, pero en realidad ni siquiera es un  
1501 mecanismo, porque los mecanismos están hechos de barras rígidas, a lo mejor de metal, y así no pueden trabajar en la vida  
1502 real. Algo le moviste, no sé que habrá sido...  
1503 A29: yo tampoco...  
1504 P: bueno pero ahorita si van a trabajar en equipo, para poder ver en qué casos si van a poder trabajar y en qué casos no.  
1505 P(atendiendo a otra alumna).: a ver ¿qué has tratado de hacer?  
1506 A: (inaudible)  
1507 P: y cuál es la que se puede mover, a ver mueve alguna....y vamos a ver cómo funciona.... se desaparece...osea ¿ya le  
1508 intentaste de todo y nada....?  
1509 A: ya.....  
1510 P: ah bueno, ahí....no porque ese es el cruce de dos círculos, osea ahí no puedes mover, pero donde si puedes mover,  
1511 siempre con tu.....(inaudible)..... y de repente se puede dar la posición, que ya no pueden estar unidos... dices  
1512 que ya le intentaste y no....  
1513 A: es que se desaparece  
1514 P: a ver.... Por ejemplo ahí mueve.....ahí ahí déjalo, mueve una de las que sí se puede .....desaparece mmmmm.... a ver  
1515 mueve otra, las de acá no, porque aquí es dónde tu cambias.....mueve otra a ver qué pasa, así así .....uy se desaparece,  
1516 no se deja...es que si en una forma no funciona, en la otra tampoco ¿verdad? .... Bueno, modifica alguna otra barra, pues  
1517 en algún momento... a ver así .....  
1518 A: (intenta modificando la longitud de algunas de sus barras)  
1519 P: bueno a ver... mira, lo único que se me ocurre es ¿por qué no tratas de hacer algo como el del video?, al menos ese  
1520 funcionaba, por ejemplo, esta barra, como que es la que se mueve, es la que tú estás girando, que es acá esta ¿ por qué no  
1521 la modificas tantito ésta?  
1522 A: esta...  
1523 P: ándale, vamos a tratar de que se parezca, luego esa es ésta, luego ésta es la fija ¿verdad?, es la que no se mueve, o es  
1524 ésta de aquí, a ver tú muévele tantito para que .... no , alguna de.... se trata de animarlo .....ahhh mira sí ésta es la  
1525 fija.....está bien mira ya se pudo ¿ya viste? Ehhh..  
1526 A: (inaudible)  
1527 P: buena pregunta, entonces ok ya pudiste, y tuviste muchas dificultades, pero ahora ya ahí está...perfecto, si tú agarras  
1528 pedazos de metal de estas medidas, vas a poder construir un mecanismo más o menos como ese, ahora sí te pido de favor  
1529 que pases a la segunda hoja, y todo esto que hiciste y los problemas que tuviste, ahí lo escribas ¿no tienes ninguna idea de  
1530 a qué se deberá? , hiciste muchos intentos y no se podía, y ahorita hiciste... bueno... modificamos algo y sí, ¿ de qué crees  
1531 ahora que dependa? ¿ tú que crees, qué diferencia ves que tenga éste con respecto a todos los anteriores que le movías y le  
1532 movías y no...  
1533 A49: noo  
1534 P: a ver ponte a pensar simplemente ¿ tú qué era lo que modificabas?  
1535 A49: (inaudible)  
1536 P: ¿pero específicamente qué modificabas?  
1537 A49: el tamaño  
1538 P: ahhhh....entonces ¿de qué crees qué dependa de que a veces sí funcione y a veces no?  
1539 A49: el tamaño  
1540 P: pues a lo mejor de eso, pues a lo mejor pon lo que ahí vimos, entonces...¿ ya ves cómo algunas ideas si tienes?  
1541 Entonces pásate a esa parte, de todos modos ahorita vas a trabajar con alguien más para ver todas esas ideas.....esa  
1542 parte, ya lo lograste y ahora te van a preguntar ¿de qué crees que depende?

1543 P( refiriéndose a todos en general): a mí me parece que la mayoría pudo construir un mecanismo tipo Grashof, tal vez lo  
1544 que no tienen mucha idea es por qué a veces funciona y a veces no, o tal vez ya tienen alguna idea. Lo interesante aquí es  
1545 una cosa, y si les pido que tengan mucho cuidado en esto, cada vez que quisieron hacer un mecanismo y que funcionara,  
1546 se tenían que fijar en las medidas de los segmentos, que no cambiaran las longitudes de las barras, les digo que pongan  
1547 un poco de imaginación, y piensen que eso que están representando en cabri es algo parecido a este video, esas son barras,  
1548 les repito a lo mejor de madera, a lo mejor de metal, y las barras no cambian de dimensiones, a menos que fueran barras  
1549 de hule, pero de eso no están hechos los mecanismos, pero entonces aquellos que pensaban que un mecanismo si les  
1550 estaba funcionando, pero una de las barras se estiraba o se acortaba, algo estaba mal, eso no es un mecanismo de ningún  
1551 tipo, porque así no se comportan las barras de metal, quienes ya lo lograron que bueno, algunos se dieron cuenta que  
1552 cuando modificaban algunos elementos, podían tener un mecanismo tipo grashof, esto es lo que les suplico que contesten  
1553 de manera individual, lo que ahora sigue ya es en equipo, de hecho han estado platicando mucho con la persona de al lado,  
1554 quienes no tengan un compañero al lado, veamos ustedes tres no se preocupen , ahí dicen que se reúnan en equipos de dos  
1555 personas, como ustedes tres sobran , me agradecería que se juntaran las tres, lo importante es que a partir de ahora  
1556 adelante todo lo trabajen en equipo, de por sí han estado comentando, pero ahora entre dos o tres personas van a tratar de  
1557 darle solución a lo que sigue, van a tratar de dar razones de por qué a veces funciona y a veces no,. Entonces si seguimos  
1558 la actividad muchachos, ahora dice, para tratar de entender qué está pasando, por qué algunos cuadriláteros trabajan como  
1559 mecanismos tipo grashof, y otros no, van a trabajar algunos casos muy especiales, formando equipo con otro compañero,  
1560 les repito, quienes están a solas, pueden formar un equipo de tres personas, se pueden cambiar de lugar, no hay ningún  
1561 problema, si tienen dudas, les preguntan a cualquiera de mis compañeros. Dice que vamos a analizar casos particulares  
1562 muchachos, el primer caso que dice ahí , yo en particular lo voy a hacer aquí en el cabri, nadamás quiero que ustedes me  
1563 sigan , vean lo que voy a hacer para tratar de entender, dice que analicemos un primer caso, dice caso1, yo lo hago ustedes  
1564 me siguen , porque los casos 2 y 3 los analizan ustedes en equipo. Ya nadamás. Caso1, ¿qué pasa si las cuatro barras son  
1565 iguales? ¿ qué pasa si es un cuadrilátero con cuatro barras del mismo tamaño? De hecho a algunos ya se les había ocurrido  
1566 hace rato y lo hicieron.....vamos a hacerlo todos o bueno vamos a prestar atención todos, entonces imagínense que les  
1567 dan cuatro barras del mismo tamaño, y tratan de hacer un mecanismo de grashof, entonces ahora no es necesario que me  
1568 den cuatro barras, ese segmento va a ser la medida de las cuatro barras, entonces vean que lo voy a empezar a construir,  
1569 voy a tratar de representar un mecanismo de los que llamamos tipo grashof , vamos a ver si funciona, ya sabemos, aquí  
1570 tengo que seguir las reglas, pero sobre todo lo que ya hemos visto anteriormente, si las cuatro barras son del mismo  
1571 tamaño, el cuadrilátero existe, lo primero es que el cuadrilátero se pueda hacer, ya luego vemos si es de grashof, entonces  
1572 las primeras dos barras no me preocupó mucho su posición, pero las dos que siguen sí, fíjense que aquí puedo tomar la  
1573 misma herramienta de círculo, porque yo ya sé que las otras dos barras tienen el mismo radio, entonces me apoyo aquí y  
1574 abro para acá, me apoyo aquí y abro hacia acá, y entonces este cruce me dice en dónde debo articular las otras dos barras,  
1575 ese es un cuadrilátero de cuatro lados iguales, no necesariamente cuadrado, ya vimos, bueno si no es cuadrado ¿ cómo le  
1576 llamarían a un cuadrilátero que siempre tiene sus cuatro lados iguales? A veces puede que sea cuadrado, pero ya vimos  
1577 que en general no ¿alguien tiene una idea de cómo se le puede llamar? ¿se le podría clasificar de otra forma?  
1578 A( no identificado): ¿ romboide?  
1579 P: ¿alguien dijo romboide?  
1580 A: ajá  
1581 P: no se preocupen ¿ y tú que entiendes por romboide? ¿ tú te acuerdas de qué es o nadamás lo dijiste porque te acuerdas  
1582 del nombre?  
1583 A: tiene cuatro lados pero no son de noventa ¿no?  
1584 P: exactamente, tiene cuatro lados iguales, pero sus ángulos no son de noventa. Tú crees que a eso se le llama romboide  
1585 ¿alguien se acuerda? Véanlo con cuidado, incluso lo puedo poner en diferente posición ¿sospechan de alguna cosa en  
1586 particular? Aunque no sea un cuadrado ¿sospechan que se comporta de cierta forma? ¿ a ver, qué creen que está  
1587 pasando?, ya sabemos que los ángulos cambian , no son siempre de noventa, por eso no se le puede llamar cuadrado, pero  
1588 ¿cumplirán con otra cosa los lados? ¿ alguien sospecha algo o eso de plano no tenemos idea? ..... Bueno lo  
1589 voy a animar, le voy a dar movimiento a este punto y observemos si trabaja como un mecanismo de Grashof, entonces  
1590 esta barra conectada a un motor, que tiene una barra que empieza a girar, y hace que las otras también se muevan, una  
1591 permanece fija si se dan cuenta, sí es un mecanismo de Grashof, entonces caso1, si las cuatro barras son iguales sí  
1592 funciona como mecanismo de Grashof, pero en general uno no siempre va a tener cuatro barras iguales, o uno necesita que  
1593 el mecanismo haga algo distinto, porque si aquí se fijan, éste como que no se mueve igual que en el video, en el video  
1594 como que a simple vista las barras eran de distinto tamaño, aquí que las barras son iguales, como que se mueven de una  
1595 forma muy particular, de hecho ¿qué me pueden decir de ese mecanismo? Algo que les llame la atención, un  
1596 comportamiento que vean... a ver muchachos,  
1597 A( no identificada):  
1598 P: ahhh...una observación es que esta parece igual que está dando igual vueltas completas, y en el video no ¿verdad?, o  
1599 en otros mecanismos ,a la barra que decíamos que podría ser un limpiaparabrisas, el limpiaparabrisas no da vueltas  
1600 completas, hace esto, entonces caso muy particular, cuando las barras son iguales, parece ser un mecanismo de Grashof,  
1601 pero la otra barra da vueltas completas, entonces no necesariamente tienen las cuatro barras que medir lo mismo.  
1602 P: Entonces, ahí había otros dos casos, dice caso 2, qué pasa si la barra, pongámosle algún nombre miren que esta sea la  
1603 barra A, ¿qué pasa si la barra A es igual a la barra B, y la barra C igual a la barra D, osea ya no tienen que ser las cuatro  
1604 iguales, pero hay dos parejas de barras iguales...pero en general entre ellas son diferentes. Ahora traten de representar un

1605 mecanismo, en que dos barras sean iguales, otras dos también, pero que entre ellas sean distintas, la barra A, la barra B, la  
1606 barra C y la barra D pues pueden ser cualquiera, entonces ¿qué pasaría si  $A=C$  y  $B=D$ ? ¿cuántas medidas diferentes van a  
1607 tener entonces?  
1608 A (varios) : dos  
1609 P: nadamás dos, ora sí que la medida A como es igual a la medida D, pues se consideran como un segmento, y cómo la  
1610 medida C es igual a la medida D, eso lo representan con otro segmento, entonces no tienen que dar cuatro medidas,  
1611 solamente dos. Damos dos medidas distintas, y representamos los cuatro lados del cuadrilátero con esas medidas, y vemos  
1612 si funciona. (el docente deja un espacio de tiempo para que los estudiantes hagan sus trazos).  
1613 P: ahora su objetivo muchachos, es construir un cuadrilátero dónde dos lados sean iguales, y los otros dos también sean  
1614 iguales, pero distintos entre sí, y verificamos si eso nos da un mecanismo tipo Grashof. ( en esta parte se oyen algunos  
1615 murmullos, el profesor se encuentra asesorando a un estudiante en su construcción).  
1616 A48: ¿ osea que ese sí sería o no?  
1617 P2: parece que sí ¿ no se ve que desaparezan nunca las barras? Es que como se ve de lado....a ver céntraló más, no sí  
1618 desaparecen ¿no? Hay momentos en dónde desaparece mira...  
1619 A48: sí.....no, no desaparecen.  
1620 P2: no desaparecen ¿verdad? ahora trata de pensar se acuerdan ... el que estaba ahí que tenía los cuatro lados iguales, la  
1621 otra barra también se ve como que desaparece, ahora ....en esta figura, cuando se mueve pareciera que este punto, y este  
1622 otro punto ambos...  
1623 A48: ¿ son círculos no?  
1624 P2: ¿ ambos círculos? En esta caso ambos qué...  
1625 A48: sí es un círculo...  
1626 P2: uno...  
1627 A48: me faltó otro.... Un círculo se mueve  
1628 P2: parece que sí, los dos juntos correrían una trayectoria  
1629 (P2 se acerca a otra estudiante)  
1630 A: el mío solo se hace así, como un parabrisas...  
1631 P2: ahí está ¿verdad?  
1632 A: Sí  
1633 P2. Dos parejas de lados iguales.... ¿cuál parece ser el movimiento de los puntos?  
1634 A: un parabrisas  
1635 P2: ¿círculos igual?  
1636 A: sí  
1637 P2 ¿ y allá?  
1638 P( refiriéndose a todo el grupo): muchachos.... Muchachos bueno eh... Tenemos la sesión de la siguiente semana, les  
1639 voy a pedir un favor nadamás, ese material nos lo van a tener que regresar y van a tener que volver a trabajar con él para  
1640 la próxima sesión, un favor pónganle su nombre, si quieren nadamás el puro nombre con lápiz, de hecho el nombre como  
1641 les dijimos al principio, ni sus nombre ni sus identidades se van a dar a conocer para el trabajo que estamos realizando...  
1642 S: nadamás un comentario perdón, si van a poner el apellido porque yo también voy a checar unas cosas de ahí  
1643 P: ok, entonces a petición del doctor...  
1644 S: nombre y apellido  
1645 P: nombre y apellido, y nos lo van a regresar por favor, y el próximo martes se los vamos a volver a entregar y vamos a  
1646 continuar con la actividad, entonces eh...vayan cerrando igual su equipo por favor, pónganle nombre y apellido a las  
1647 hojas, nos las regresan, apagan su equipo de cómputo y lo dejan todo listo, como cada que tienen clase aquí en el  
1648 laboratorio, y les agradecemos mucho su participación el día de hoy, los vamos a seguir requiriendo para una sesión más.  
1649  
1650  
1651 FINAL DEL VIDEO ( 2 PARTES) CORRESPONDIENTE A LA PRIMERA SESIÓN CON EL GRUPO.  
1652  
1653  
1654 TRANSCRIPCIÓN DE LA SESIÓN DEL 20 DE ABRIL.  
1655  
1656  
1657 Pachuca de Soto, Hgo. a 25 de ABRIL del 2010  
1658  
1659 A: profesor auxiliar 1  
1660 S: profesor auxiliar 3  
1661 P: profesor  
1662 AA,  
1663 AB,  
1664 AC,  
1665 AD, estudiantes  
1666 P2:profesor auxiliar 2

1667  
1668 P: a ver alguien quiere comentar, alguien quiere recordarnos a todos ¿ cuáles fueron algunas de las cosas que  
1669 descubrimos? A ver ¿quién dijo yo?  
1670 A: que la suma de los tres lados...  
1671 P: a ver ¿cómo era eso?  
1672 A: que la suma de los tres lados menores, que tuvieran mayor longitud, tienen que ser mayores al cuarto lado...  
1673 P: ahh.. ok  
1674 A: si no, no se puede construir..  
1675 P: esa es una condición para poderlo construir, si no se acuerdan, la semana pasada intentaron construir un cuadrilátero  
1676 dándoles las dimensiones y no pudieron, y se debía a que no cumplieron con cierta condición.... Luego los cuadriláteros  
1677 que sí pudieron construir, era porque cumplían con la condición que tenía que ver con sumar los lados, con sumar tres de  
1678 los lados y compararlos con otro.... Eh posteriormente a eso, nos dimos cuenta de una cosa .... Si yo les doy las  
1679 dimensiones de un cuadrilátero, si yo les digo por ejemplo éstos son los lados de un cuadrilátero, déjenme llamarles con  
1680 letras así...si les doy cuatro segmentos por ejemplo A,B,C y D, vamos a suponer que sí se puede construir el cuadrilátero,  
1681 osea sí cumple la condición que ya dijo su compañero..... eh.... al construirlo ¿todos obtienen el mismo cuadrilátero?  
1682 A (varios): no  
1683 P: Incluso si acomodo en el mismo orden todos, obtienen cuadriláteros distintos ¿qué propiedad o que dijimos de los  
1684 cuadriláteros a ese respecto? Que aunque todos queramos construirlo igual, con las mismas medidas y en el mismo orden,  
1685 no obtuviéramos lo mismo....  
1686 A: los ángulos van a ....  
1687 P: podrían variar los ángulos, y aunque tuviéramos cuadriláteros con los mismos lados tendrían distinta forma.... Muy  
1688 bien .... Acá si se acuerdan..... espero que los demás también... y bueno después de todo esto que estuvimos discutiendo  
1689 la semana pasada, pasamos a otra parte, y a iniciar ya una actividad central , que es lo que se está trabajando, que es algo  
1690 que se llaman ...  
1691 AB: mecanismos...  
1692 P: exactamente, que son mecanismos tipo Grashof, término medio extraño, pero lo mencionamos la semana pasada  
1693 ¿alguien me puede ayudar a recordar que es esto de los mecanismos tipo Grashof? ¿ o los mecanimos de grashof?... a ver  
1694 quién más quiere participar...por favor...  
1695 AC: este.... Que uno tiene que dar la vuelta de 360 grados, sin mover a los demás, osea que no tengan diferentes medidas?  
1696 Y nadamás movemos ese....  
1697 P: ok...bueno de entrada dijimos que hay unas construcciones mecánicas que se llaman mecanismos, y pueden tener  
1698 diferentes utilidades, en particular si ustedes tienen cuatro barras como éstas, tal vez de metal decíamos mucho la semana  
1699 pasada, si las unen en sus extremos con pernos, con algo que les permita el movimiento entre ellas, si una de las barras  
1700 como decía su compañera, puede dar giros completos, ella mencionó si una barra puede dar giros de 360 grados, y las  
1701 otras barras no se estiran o se acortan porque se supone que son rígidas, ese es un mecanismo tipo Grashof. En eso nos  
1702 quedamos la sesión pasada, entonces, estábamos analizando casos muy particulares, queremos entender cuándo sí pueden  
1703 ser un mecanismo tipo Grashof, y cuándo no, resulta que de todos los intentos que se estuvieron haciendo, algunos  
1704 mecanismos sí funcionaban así y otros no, por principio de cuentas tenemos que satisfacer la condición de que dados  
1705 cuatro segmentos se puede hacer un cuadrilátero con esos segmentos, pero después tenemos que satisfacer otra condición  
1706 que todavía no conocemos, que una de las barras o uno de los lados, pueda hacer esos giros que nuestra compañera  
1707 comentó, entonces vamos todos a recordar, ahora sí les voy a pedir que me vayan siguiendo en la construcción,  
1708 analizamos un primer caso , decíamos ¿ y si las cuatro barras son iguales? Es decir aquí me dieron cuatro barras que en  
1709 general podrían ser diferentes, pero pensemos en un caso particular, pongámosle aquí caso I y decíamos, si las cuatro  
1710 barras son iguales, queremos observar si ese mecanismo podría trabajar como mecanismo tipo Grashof, entonces eso lo  
1711 hicimos la clase pasada, los invito a que repitamos la construcción, vamos a proponer nosotros, si me van siguiendo, un  
1712 segmento de cualquier longitud, y esa es la única medida, la medida de las cuatro barras como dice la condición,  
1713  $A=B=C=D$  y construyo un cuadrilátero, construimos entonces ...eh.... ayudados por el compás, eso es bien importante,  
1714 son cosas que igual ya discutimos la semana pasada, auxiliados con el compás de entrada para tomar la medida, construyo  
1715 las primeras dos que son libres, esto es, que puedo ponerlas en cualquier posición, pero luego, cuando quiero construir las  
1716 otras dos, ya no es tan libre, tengo que tener mucho cuidado en este caso puedo tomar la herramienta círculo  
1717 directamente, porque ese caso ya es conocido, es el mismo, y tengo que trazar dos círculos, acuérdense, que son los que  
1718 me van a representar las otras dos barras, en la intersección de ellos.  
1719 P: vamos a ver si todos me fueron siguiendo, construimos este cuadrilátero , un cuadrilátero de cuatro lados iguales, y  
1720 ahora con el comando animación, verificamos si alguna de las barras puede dar giros completos.....y ahí  
1721 está....entonces este mecanismo, al menos en el trabajo en la construcción con el software, y cuando utilizo el comando  
1722 animación, al parecer sí funciona, es un mecanismo hecho con cuatro barras, y una de las barras puede dar giros  
1723 completos, podemos entonces decir que es un mecanismo tipo Grashof, Eso es algo que ya comentamos igual la semana  
1724 pasada, y ahora sí me gustaría que trabajen por equipo, como ya hemos comentado, creo que ahora son más, entonces si  
1725 se pueden juntar en parejas otra vez, o incluso en tercías, y sobre todo las personas que no estuvieron la clase pasada, y  
1726 que además no tienen ese material, por lo tanto si se juntan con otras personas que sí hallan estado, y vamos a pasar,  
1727 vamos a continuar ahora sí tomando o retomando esta guía que viene , el caso 2 es el que estamos viendo, vamos a  
1728 retomar el caso 2, ese apenas lo estábamos abordando, el caso 2 es pensar que tenemos dos barras de diferente longitud

1729 solamente, algo por ejemplo así miren....digamos que vamos de menos a más, primero pensamos que las cuatro barras  
1730 eran iguales, ahora vamos a pensar que si tenemos barras de diferente longitud, pero que tengo dos que miden A y dos que  
1731 miden B, y vamos a construir un mecanismo de cuatro barras así miren...yo ya tengo aquí hechas rápidamente unas  
1732 construcciones, pero me gustaría que ustedes las hagan, aquí por ejemplo éstas dosbarras miden lo mismo, miden éstas A  
1733 y éstas B, entonces este es un cuadrilátero o un mecanismo de cuatro barras que ya construí, y quisiera ver si puede  
1734 funcionar como mecanismo tipo Grashof, éste es otro, está hecho con las mismas barras pero ¿cuál es la diferencia?  
1735 A: están en diferente orden  
1736 P: digamos que están conectadas en diferente orden, en vez de empezar con A y con estas dos que miden menos, aquí  
1737 comienzan con las dos A y luego con las dos B, aquí le puedo dar giros a ésta a ver que pasa, acá le puedo dar giros,  
1738 aunque es más grande, pero se pueden articular de otra forma ¿no?, por ejemplo miren ésta, articulo la barra A con la barra  
1739 B, es decir, en lugar de articular con las dos barras iguales, articulo una y una, A con B, luego B con A, y A con B, y  
1740 articulo este mecanismo, entonces esta actividad, este caso particular, a ustedes se les está pidiendo que analicen cuando  
1741 tienen mecanismos de este tipo, con sólo dos medidas distintas,  $A=B$  y  $C=D$  y vamos a ver qué pasa, cómo funciona ese  
1742 mecanismo, como pudiera ser otro caso ¿no?  $A=C$  y  $B=D$ , entonces qué les parece si entonces ustedes proponen dos  
1743 medidas distintas, y construyen mecanismos de cuatro barras y los tratan de hacer funcionar, a ver qué sucede. Nadamás  
1744 que repito, esto me gustaría que lo trabajen y lo comenten entre dos o entre tres personas, ¿qué es lo que estamos  
1745 buscando? Estamos tratando de encontrar un criterio o una condición en la cual yo sepa en qué casos un mecanismo si  
1746 pueda funcionar como de Gashof, y en qué casos no. Si el mecanismo me desaparece cuando lo animo, como que algo no  
1747 debe estar bien. Si el mecanismo funciona aparentemente bien, si algunas de las barras gira y no le pasan efectos raros a  
1748 las otras tres, puedo pensar que es un mecanismo tipo Grashof. Entoncestrabajen eso por favor.  
1749 A: (inaudible)  
1750 P: voy ..... ¿qué pasa? .... Ah es que este no está operando, es nomás como monitor, el monitor está mostrando lo  
1751 mismo.... Es que inicialmente ésta es la que tenía conectada al cañón, pero como la conecté a mi laptop, pues ahora este  
1752 ....(inaudible)  
1753 A: ( inaudible.... estudiantes trabajando)  
1754 P (observando la construcción de un estudiante): ...es que ése como que va bien y de repente se regresa, como que no  
1755 tiene mucho sentido, y aquí fíjate que en este, cuando trabaja de este lado, la barra que pusiste como que en rosa parece  
1756 que es la fija, porque ahí la barra, la fija luego luego se ve que es la roja, ésa debe estar quieta....  
1757 A: ajá pero aquí no ...  
1758 P: exacto, ahí parece ser la fija esa, pero de repente se arrastra con todas las demás, y una de las cosas que comentábamos  
1759 es que como es un mecanismo que va montado probablemente en una máquina, o dónde tenga que ir montado, una barra  
1760 tiene que estar fija probablemente.....mmmm tengo mis dudas, fíjate que como que a mí me da la impresión de que sí  
1761 cambian de medida tus barras ¿eh? ....entonces.... ups.... lo importante es por ejemplo pedirle nadamás las medidas  
1762 ¿no? .....y ahora sí animarlo.....¿cuál es la que animas, ésta?  
1763 A: no  
1764 P: ¿ésta?, ¿ya viste que esta cambia? Entonces ahí cuando construiste ese cuadrilátero, bueno cuando construiste ese  
1765 mecanismo, fíjate que eso que pasa no podría pasar en la vida real, que esa barra empezara a hacerse más grande y más  
1766 pequeña. De hecho no son las dimensiones que te pedí .....esa barra va cambiando de dimensiones.  
1767 P ( acercándose a otro estudiante) : ¿ tú como vas, a ver? Fíjate, ahí ya te están..... si te fijas con cuidado, tú tienes una  
1768 barra más pequeña y otra barra más grande, fíjate ésta es la pequeña y la que está enfrente siempre es la que está del  
1769 mismo tamaño ¿no?  
1770 A: ajá  
1771 P: y las que las conectan son las otras dos más grandes, tú podrías decir que has hecho esto, están conectadas las distintas,  
1772 ahora sí que la conexión entre barras siempre es con dos barras distintas, digamos A con B, nunca hay conectadas dos  
1773 barras del mismo tamaño, eso ya lo hiciste y lo echaste a andar y parece que funciona...  
1774 A: ajá  
1775 P: a ver ahora por qué no tratas de construir éste que en esencia está hecho con las mismas dimensiones, nadamás que aquí  
1776 las que están conectadas son las del mismo tamaño, A con A y B con B...  
1777 A: ajá  
1778 P: entonces haces otro a ver si funciona, a ver qué pasa  
1779 A: sí  
1780 P( acercándose a otro estudiante): está raro ¿verdad? Porque no hay una de 384..  
1781 A: ¿ cómo de 384?  
1782 P: se me hace que ese está cambiando entonces de dimensiones, a ver el otro ¿ el otro si está bien?  
1783 A: sí éste sí está bien  
1784 P: ah....ok mira fíjate aquí está conectando, justo las barras que mira conectas son las de 3.61 con la de 3.90, osea tú estás  
1785 haciendo como que el primero ¿no? Acá A con B, estás conectando se puede decir que A con B...  
1786 A: no, el de aquí era A,B,A,B.  
1787 P: ajá,  
1788 A: éste es el de A,A,B,B  
1789 P: ajá, entonces hay que hacer el otro para ver como funciona, ahí si pasaba algo raro porque hay diferentes .....  
1790 P (acercándose a otro estudiante): ¿ cómo vamos? ¿ sí lo hiciste?

1791 A: (inaudible, estudiantes trabajando)

1792 P: una de las barras debe de estar fija, como que anclada, hay una barra que está sujeta, y las otras tres son las que se

1793 mueven, ésta y arrastras las otras, pero fíjate que si te das cuenta, ahí parece que esta es la fija, no se mueve, pero ahí

1794 se arrastra, entonces, por supuesto que esto no es un mecanismo, porque todas las barras se mueven

1795 P: voy a mostrarte éstos, para que veas la diferencia, voy a echarlos a andar ¿ te das cuenta cómo siempre hay una barra

1796 fija? Esa es la barra que está quieta, digamos que no se mueve, y eso es importante, que haya una barra fija, entonces no sé

1797 si será bueno que con tu construcción.... O a lo mejor la que tienes que girar es otra , porque cuando tú construyes, hay

1798 dos barras a las que les puedes dar movimiento, yo digo que le estás dando movimiento a una que no debes, porque

1799 arrastra todo, por ahí busca y hay otra que puedes mover...

1800 A: ajá

1801 P: y tal vez moviendo esa haya una que sí permanezca fija..... a ver muchachos.... Ahora sí ¿verdad? Ese parece

1802 funcionar bastante bien, sin mayores problemas, y ahí ya estás conectando, fíjate que ahí hay algo ..... pero las barras

1803 iguales son las que están opuestas ¿no?

1804 A: sí

1805 P: ésta es la corta y la que está enfrente también, y ésta es la larga y la otra también es la larga , entonces..... voy a detener

1806 esto, aquí en la proyección, y voy a detener en una posición dónde se vea más o menos así, ¿parece que entonces es éste

1807 verdad? Éste y su opuesta son iguales, ésta y su opuesta son iguales, y parece funcionar sin muchos problemas. ¿ ahora

1808 por qué no intentas el otro, dónde las opuestas no son iguales, sino las que están consecutivas, las que están conectadas

1809 luego luego son las iguales?

1810 P ( acercándose a un estudiante): ahhh.... Ya a ver .... Ah caray...

1811 A: no no no

1812 P: bueno es que ese es un punto

1813 A: no pero sí se deshizo.... Ahí ¿desaparece o no?

1814 P: sí sí sí, además ahí pasa algo curioso, ahí se mueven todas las barras, y no sé si se acuerden pero realmente debería

1815 haber una fija, pero muy bien, muy bien, muy buena observación....

1816 P ( dirigiéndose al grupo): chicos les voy a robar tantito de su atención, están bien adentrados en el trabajo, pero hay unas

1817 cosas, básicamente hay una condición que les quiero recordar, la semana pasada incluso vimos la proyección de un video

1818 de un mecanismo real, digamos, y una de las cosas que comentamos es que un mecanismo debe tener una barra fija, una

1819 barra no debe moverse, porque el mecanismo debe estar sujeto a algo, a lo mejor a la estructura de una máquina, entonces

1820 no puede estar.... Lo que veo es que en algunas construcciones que han hecho, echan a andar el mecanismo, y se arrastran

1821 todas las barras, todas las barras se mueven , no hay una barra que esté fija, para que sea un mecanismo, una condición es

1822 que una barra permanezca fija, que una barra no se mueva, entonces quiero recordarles una cosa, cuando construyen

1823 muchachos, déjenme ver si nos damos a entender, miren, cuando ustedes construyen el mecanismo, el cuadrilátero, hay

1824 dos barras a las que les pueden dar movimiento, a otras dos no, hay dos que no se pueden mover, porque cuando las

1825 construyen es la intersección de dos circunferencias, entonces esas como que están ahí rígidas y no se pueden mover, pero

1826 hay otras dos que pueden girar, las dos barras que pueden girar, son las dos barras al inicio, por ejemplo la primer barra,

1827 ésta barra A la tracé con éste círculo, entonces esta barra puede girar alrededor de este círculo, ésta es la otra que puede

1828 girar aquí alrededor, fue la segunda que tracé, entonces tienen siempre dos opciones para mover miren, pueden mover

1829 esta alrededor del círculo, y ya se dieron cuenta que las otras no, bueno hay una que no se mueve, ésta permanece quieta,

1830 entonces eso es lo que yo necesito, una barra que esté quieta, en cambio fíjense que es lo que pasa cuándo la que quiero

1831 mover es esta otra...ahh bueno pues ahí está, lo puedo hacer de las dos formas, puedo mover ésta o ésta, el chiste es que

1832 una barra permanezca quieta, acá en la otra construcción puedo mover entonces igual ésta, porque fue la primera que

1833 construí, ésta barra, éste punto pueden girar alrededor de la circunferencia que usé para construir, y también puedo girar

1834 ésta, porque éstafue la segunda y también hay otra circunferencia que construí, entonces ese punto puede girar alrededor...

1835 entonces miren ahí está, ésta se mueve , puede girar sin mayor problema, y ahí ésta barra grande permanece quieta,

1836 entonces eso sí me ayuda, la otra que puedo mover es ésta, ahí está miren, y la que permanece quieta ahora es la barra A,

1837 entonces ustedes sus construcciones trátenlas de hacer de tal forma que pase un efecto parecido, si cuando hacen su

1838 cuadrilátero, empiezan a girar una de las barras, y todas las barras se mueven, todas se arrastran, probablemente algo no

1839 está muy bien construido, recuerden para que sea un mecanismo, condición importante, necesitamos una barra quieta, una

1840 barra fija, en esencia una barra es la que les da movimiento a las demás, y esa barra está fija en algún soporte, y las otras

1841 tres se mueven, las otras deben permanecer quietas.... Ya que tengo su atención muchachos, fíjense, ya que tengo su

1842 atención déjenme mostrarles cómo se comportan los dos mecanismos que yo construí, fíjense que los puedo animar al

1843 mismo tiempo, fíjense que si no conocían el comando de animación múltiple, ya ví que algunos sí, pero cuando hacen dos

1844 construcciones en la misma hoja, pueden animar ambas. Utilicen el comando de animación múltiple, en vez de

1845 simplemente animación, seleccionan este botón y pueden echar a andar estos dos mecanismos, fíjense que el de la derecha

1846 de ustedes, que están viendo de frente, parece funcionar sin muchos problemas, la barra A da giros completos, la barra B

1847 es la que permanece como soporte, está quieta, y las otras barras que de todos modos son de la misma longitud, la barra A

1848 y la barra B empiezan a moverse y parece que no tienen problemas; el del lado izquierdo es el que parece muy raro en su

1849 comportamiento, como que hace cosas que no podría hacer un mecanismo en la realidad, y alguien ya me lo comentaba,

1850 como que viene así, viene girando en un sentido, y de repente se desaparece y ya aparece acá miren, eso está raro, eso no

1851 lo haría algo hecho en la vida real, digamos con barras de metal, eso de allá pues vemos que sí lo puede hacer un

1852 mecanismo, pero esto de la izquierda como que no, entonces fíjense lo que está pasando, y si ya lo hicieron, ¿qué

1853 conclusión podrían obtener ustedes? Son las mismas barras, que quede claro vean, me dieron cuatro barras, nadamás que  
1854 dos medían A y dos medían B, osea en sí son dos medidas distintas nadamás, e hice dos mecanismos y uno parece  
1855 funcionar y el otro parece no funcionar ¿ qué concluyen o qué diferencia ven entre los dos mecanismos si están hechos  
1856 con las mismas barras? .... Y le voy a detener en una parte en la que... aquí por ejemplo, déjenme detenerlo ¿pues cuál es  
1857 la diferencia entre los mecanismos, repito? Parece que uno sí funciona y otro no, a ver ¿ alguien concluye o alguien tiene  
1858 una idea sobre qué pasa acá o cuál es la diferencia entre este y ese?  
1859 A: bueno yo creo que el lado A no está paralelo, bueno eh ....  
1860 P: en cuál de los dos, en el de la derecha o izquierda?..... izquierdo ahh ya, fíjate que yo utilicé hasta ahorita un término  
1861 que incluso nadie había usado en la sesión anterior, tú ya estás hablando de paralelismo...me dices que el lado A no es  
1862 paralelo ¿ con quién?  
1863 A: con B...  
1864 P: con el que tiene opuesto que es B, ¿ y qué piensas de éste A con este B? ok entonces tu piensas que aquí no hay  
1865 paralelismo ¿ entienden ustedes a qué se refiere su compañera con que sean paralelas las barras? ¿ y qué piensas de la otra  
1866 construcción? ¿ tú piensas que A es paralelo con A y B es paralelo con B?  
1867 A: inaudible  
1868 P: ok eso lo piensa uno a simple vista, igual y sí igual y no, pero de entrada lo que ya marcó la compañera es muy  
1869 importante, aquí las barras que son iguales están opuestas, y parece ser que son paralelas, A con A y b con B, acá en  
1870 cambio las barras contiguas son las iguales, y su opuesta que es distinta no es paralela, no sé si conocen un comando, que  
1871 es una instrucción también del cabri, está, bueno está casi al final, hay un botón con signo de interrogación, está esa  
1872 opción, cuando uno tiene dudas, fíjense lo vamos a abrir, y ahí vienen unas preguntas, una de las preguntas es 'paralela?',  
1873 es decir, si tenemos la sospecha de que dos objetos son paralelos, le podemos preguntar al software, entonces voy a usar  
1874 esa instrucción miren, le voy a preguntar si esta barra A es paralela a ésta barra A, uno da click, se abre una ventana de  
1875 diálogo, uno da click por acá afuera y me dice que los objetos efectivamente son paralelos, ahora vamos a ver , comparar  
1876 B con B, serán paralelos B con B, pues dide.... Al menos en esa posición sí, pero que tal que cuando empieza a girar una  
1877 de las barras, en éste caso la A, cambia, incluso no voy a usar la animación, lo voy a hacer poco a poco miren, voy a  
1878 mover, voy a empezar a hacer que gire esta barra, y si esto no cambia, si la respuesta del software no cambia, significa que  
1879 es porque siguen siendo paralelos, en el momento en que dejaran de serlo, allí lo marcaría el software, entonces fíjense  
1880 que aquí en todo este trayecto dice que son paralelos, yo veo que por cierto ahí pasa algo muy raro, ¿ qué observan que  
1881 sucede en esa parte?  
1882 A: se sobreponen  
1883 P: creí escuchar una palabra muy interesante, ¿dijeron que se sobrepone? ¿alguien lo comentó? ¿ sí verdad? En este  
1884 posición parece que las cuatro barras se sobreponen, vamos a ver qué pasa si le sigo moviendo, a veces el comando  
1885 animación no me deja ver cosas como estas, porque yo lo dejo a que solito se mueva, entonces fíjense que ahí ya...  
1886 A: pero fíjese que ahí ya....  
1887 P: ahhh... ahí ya dice que no son paralelos, y es que se cruzan de hecho ahí las barras...  
1888 A: ajá  
1889 P: pero de hecho ahí, y lo marca claramente, dejan de ser paralelos. Como que en esta parte hacia abajo, ahí nos lo va  
1890 diciendo, no son paralelos, y ¿ya vieron que acá hay otra posición en la que vuelven a sobreponerse, como dice la  
1891 compañera? Y cuando se supera esa posición, entonces fíjense, al menos el software indica que las barras opuestas son  
1892 paralelas ahora sí que en dos posiciones, desde cuando se sobreponen de este lado, hasta cuando se sobreponen del otro .  
1893 ¿qué pasa en este otro mecanismo, en algún momento las barras son paralelas? Bien, le voy a preguntar igual al software  
1894 si ésta barra A es paralela con B .... No lo son..... y si ésta B es paralela con ésta.....tampoco lo son, y yo empiezo a hacer  
1895 girar la barra A , pues prácticamente ahí en ningún momento son paralelos, y además ese mecanismo es el que hace una  
1896 cosa muy rara, como que desaparece y aparece en otro lado, bueno miren aquí pasa algo muy interesante, el software  
1897 indica muchachos, el software nos está diciendo que cuando las barras opuestas son iguales, los lados opuestos son  
1898 paralelos, me gustaría que traten de dar una razón de eso, porque que el software lo diga y que alguien de ustedes lo haya  
1899 supuesto , no quiere decir que sea una razón, o sobretodo habría que conocer cuál es la razón o cuál es la justificación de  
1900 que los lados son paralelos, entonces trabajen , como les dije, trabajen en parejas o en tercias y traten de justificar, traten  
1901 de dar alguna razón, algún argumento del por qué éstos lados siempre son paralelos , al menos en la posición que vimos  
1902 ¿no? De cuando se alinean de un lado hasta cuando se alinean en el otro. ¿ por qué son paralelos? ¿alguien lo podría  
1903 explicar? ¿alguien podría dar la razón? ¿convencemos a todos de que efectivamente estos lados son paralelos?  
1904 A: son lados opuestos..  
1905 P: ¿son opuestos? Pero éstos igual son lados opuestos ,  
1906 A: porque nunca se juntan...  
1907 P: éstos igual no se juntan ¿eh?  
1908 A: ahhh.... bueno,  
1909 P: ahhh.... Ya ya ya, tú me estás dando algo como la definición , dices es que si yo...  
1910 A: alargaba la....  
1911 P: me imagino....si trazara como que rectas...  
1912 A: segmentos, nunca se van juntar ...



1913 P: me imagino que están pensando.... Lo que imagino es que estás pensando ya en rectas, que fuera así como una recta,  
1914 ésta en vez del segmento A que fuera una recta y ésta otra recta, ok, esto es lo que me estás diciendo, que esta recta no se  
1915 cruza, y que por eso son paralelos...

1916 A: ajá

1917 P: ¿pero no me estás dando más bien la definición de lo que tú entiendes por rectas paralelas? Yo lo que quiero que me  
1918 expliquen es ¿ por qué esa construcción.....? y otra cosa, no sé si ya lo notaron ¿ a poco las medidas que yo puse son las  
1919 mismas que ustedes?

1920 A: no, no ¿ por los ángulos?

1921 P: eso es importante, miren yo no sé ni cuanto mide el segmento A para mí, fíjense para mi caso el segmento A mide 3.16  
1922 y el segmento B mide 5.16 y los objetos son paralelos, es decir cada quien hizo una construcción diferente, lo único que  
1923 hicimos, en lo que nos pusimos de acuerdo todos fue en que fueran lados iguales..

1924 A: ajá

1925 P: A con A y B con B, y sin embargo a todos nos dice el software que son paralelos, es lo que quiero que traten de  
1926 explicar.... ¿tú tienes una idea?

1927 A: sí... es que en el mío nunca dejan de ser paralelos...

1928 P: ahhh muy bien... tú tienes un mecanismo muy particular ¿verdad? Fíjense que allá su compañera hace una buena  
1929 observación...yo el mecanismo que fabriqué con esas características funciona y los lados son siempre paralelos...nadamás  
1930 que cuál es la diferencia entre el mecanismo que tú hiciste y el que está aquí...

1931 A: las medidas

1932 P: las medidas.....¿y cuál es la barra que tú haces girar allá? ¿cuál es la barra que está fija y la que da movimiento?

1933 A: la más chiquita...

1934 P: ¿ya escucharon? Es que su compañera, la que tiene como barra fija es la más pequeña, y a la que le da movimiento es la  
1935 más grande, creo que eso lo puedo yo hacer igual aquí, y van a notar algo muy interesante, entonces fíjense ¿se acuerdan  
1936 lo que les dije? Yo puedo usar como barra que impulsa ¿ se acuerdan que decíamos que la idea de que una barra gire es  
1937 que está conectada a un motor? Yo puedo conectar al motor esta barra y pasa lo que ya vimos, pero puedo conectar al  
1938 motor también ésta otra barra... vamos a ver....¿ qué pasaría si yo conecto esa barra a un motor?..... ahí si dejan de ser  
1939 paralelos ¿verdad? Pero eso es lo que su compañera hizo distinto a nosotros , ella lo que hizo fue que la barra que está  
1940 fija, es la más pequeña, y la barra que impulsa o da movimiento, es la más grande, y en ese mecanismo que ella construyó,  
1941 vaya todo se arrastra y nunca se cruzan las barras, no sé si alguien obtuvo algo parecido....¿ o en los mecanismos de los  
1942 demás si se llegan a cruzar las barras?

1943 A: no

1944 P: pero es buena la observación que hace allá su compañera, de que no dejan de ser paralelas, en otras palabras tus barras  
1945 se alinean, se sobreponen las cuatro como en nuestro caso?

1946 A: sí

1947 P: pero sigue moviéndose y no se cruzan, acá se ... las barras este ¿cómo se llaman? Se sobreponen pero se  
1948 cruzan.....después de sobreponerse, se cruzan y dejan de ser paralelas en esa parte, tú mecanismo no hace eso, el tuyo  
1949 sigue la .... El movimiento.... En el tuyo siempre marca que son paralelos tus objetos.... Bueno vamos por la primer  
1950 parte... ya sea que no se cruzan o que se cruzan, indica que son paralelos, y todos hicimos mecanismos de diferentes  
1951 medidas, repito lo que quiero es que traten de explicar ¿por qué siempre son paralelos? Ya se que una razón de que se  
1952 digan paralelos es que cuando prolongo las rectas no se cruzan, es lo que por acá decían , pero ¿qué razón pueden dar?  
1953 ¿cómo podrían convencer a alguien de que esas rectas no se cruzan? Porque pues yo ahí las tracé con el software, pero yo  
1954 no veo dónde empiezan ni dónde terminan. ¿ cómo podrían convencerme de que esas rectas, o esos lados son paralelos?

1955 A: se oyen murmullos de varios estudiantes....

1956 P: exactamente,, o como dicen de este lado ¿ qué argumentos pueden darme de por qué en este mecanismo los lados son  
1957 paralelos?

1958 A: porque van hacia..... porque se mueven a la misma...dirección... o se mueven igual, cuando se mueve éste lado, el  
1959 paralelo se va moviendo junto ...

1960 P: ahh....ok

1961 A: y cuando cambian de dirección es cuando ya no se puede...

1962 P: ya ya tú medices, si éste lo muevo..... no sé si estés pensando en esto, osea si este gira cierta cantidad de grados, el otro  
1963 gira lo mismo , y bueno ésta siempre permanece paralela a esta...osea ésta nadamás hace esto, ésta no gira así...

1964 A: pero cuando se sobrepone, cuando pasan, cuando van hacia abajo, ya no son paralelos porque cambian .... El  
1965 movimiento que dan...

1966 P: ok.... Me parece una muy buena observación, fíjense lo que dice su compañera...dice que si giran ésta barra cierto  
1967 ángulo.... Acá en esta barra se mueve este otro ángulo, y por eso son paralelas, esa es una observación interesante ¿ por  
1968 qué son paralelas? ¿por qué aunque muevas una , l otra se mueve igual? ¿en ésta otra pasará lo mismo? Fíjense en el que  
1969 no son paralelos, si yo giro cierto ángulo ésta barra ¿la otra girará lo mismo?

1970 A: no

1971 P: pues parece que no... entonces otra vez ¿ por qué éste ángulo entonces es el mismo que éste? ¿ por qué al girar cierta  
1972 medida de ángulo una de las barras, la que está opuesta gira la misma medida? ¿ quién puede explicar esto?

1973 A: inaudible...

1974 P: ¿perdón?..... a ver alguna idea muchachos

**1975** A: ángulos opuestos...  
**1976** P: ángulos opuestos ¿cuáles?  
**1977** A: murmullos....  
**1978** P: a ver ¿ustedes creen que éste ángulo? ¿ cómo creen que sea éste ángulo con respecto a éste?  
**1979** A (varios) : iguales  
**1980** P: ¿ y éste con respecto a éste?  
**1981** A: iguales....  
**1982** P: a ver mídanlos, vamos a medirlos con la herramienta de medida de ángulo ..... mido los ángulos opuestos y nuestra  
**1983** sospecha es que son iguales... ahí está miren, efectivamente los ángulos opuestos también son iguales... e incluso si  
**1984** ustedes giran la barra A .... Aunque cambien los ángulos, los opuestos siempre siguen siendo iguales...  
**1985** A: sí...  
**1986** P: eso refuerza más lo que queremos de que son paralelas .... Vuelvo a preguntar ¿alguien puede dar una razón de por  
**1987** qué los ángulos opuestos son iguales? ¿ por qué siempre éste ángulo es igual a éste, y éste a éste? ..... acá parece no  
**1988** suceder eso, éste ángulo y éste son diferentes al igual que este y este.  
**1989** A: murmullos...  
**1990** P: a ver  
**1991** A: porque al ser líneas paralelas, siempre van a tener la misma distancia entre ellas...y cómo A es igual a A, pues siempre  
**1992** hay la misma distancia , entonces eso demuestra que son paralelas, por lo mismo pues los ángulos son iguales ....  
**1993** P: ok ¿ qué tipo de figura es ésta? Es un cuadrilátero porque está hecho de cuatro lados, pero en particular cuando se dan  
**1994** cuenta que sus lados opuestos son iguales, y que sus ángulos opuestos también son iguales, ¿cuál es? Como decía su  
**1995** compañera, no sé si recuerdan , si lo pueden reclasificar o renombrar de otra manera más especial, porque no es como el  
**1996** cuadrilátero de allá...  
**1997** A: murmullos...  
**1998** P: a ver ¿ cómo decías?  
**1999** A: es como cuando tienes dos paralelas y no se cortan , pero es que ....  
**2000** P: no importa, a ver tienes dos paralelas y hablas de una secante  
**2001** A: es que no me acuerdo...  
**2002** P: estaba recordando algo que tiene que ver con tener dos rectas y que haya una tercer recta que las corte...  
**2003** A: sí porque son ángulos externos, y ángulos alternos y sí...  
**2004** P: aquí tú estarías pensando que por ejemplo éstas dos son las paralelas y que ésta es la secante que los corta...  
**2005** A: y éstas son otras secantes...  
**2006** P: ok eso es algo que estás recordando y tiene que ver ¿verdad? Cuando tienen ..... lo voy a hacer de este lado.... Lo que  
**2007** tú estás comentando es algo que tiene que ver con una construcción geométrica más o menos así...  
**2008** A: ajá  
**2009** P: si suponemos que estas dos rectas son paralelas, y hay una recta que se llama secante que las corta, parece que tú hablas  
**2010** de éste ángulo y éste, tú sabes que esos ángulos ¿cómo son? Alternos, internos se les llama es correcto ¿ y cómo son?  
**2011** A (varios): iguales  
**2012** P: entonces aquí imaginamos que éstas son las dos paralelas, y que esta es la secante, entonces éste ángulo y éste...  
**2013** A: no  
**2014** P: ¿ o cuáles son los que tendrían que ser iguales? ¿ o no es así la idea que tienen? ¿ o consideras que éstas son las dos  
**2015** paralelas?  
**2016** A : murmullos...  
**2017** P: de cualquier forma lo que estamos observando y sosteniendo es que ésta y ésta son paralelas de todas formas, y ésta y  
**2018** ésta , es decir yo puedo tomar estas como las paralelas y ésta que sea una secante , o puedo tomar estas dos como paralelas  
**2019** y esta que sea una secante ....  
**2020** A: no sé... es que  
**2021** P: entonces si ésta y ésta son paralelas, y ésta y ésta  
**2022** A: éste y éste...  
**2023** P: son iguales...  
**2024** A: sí sí sí  
**2025** P: y éste y éste son iguales, y qué más saben...  
**2026** A: también...  
**2027** P: el de adentro...éste.... ahhh ok éste tiene que ser ....  
**2028** A: en los exteriores...  
**2029** P: en los exteriores también , es decir los opuestos son...  
**2030** A: ese con éste de acá...  
**2031** P: y con éste...y el de acá, y como son paralelas éste y éste son iguales, todos son iguales...ok es una buena forma de  
**2032** verlo, entonces ya más o menos estuvimos trabajando en tratar de entender por qué esos ángulos siempre son iguales,  
**2033** entonces no sé que conclusiones tengan, de hecho me gustaría que ahí las escriban , pero analizando los dos casos, cuando  
**2034** el mecanismo está así, las dos barras conectadas A con A y B con B, o el otro caso , las barras que son iguales opuestas  
**2035** entre sí, aquí parece funcionar el mecanismo, aquí parece no funcionar, allí en la actividad dónde estamos, en el caso 2,  
**2036** dice anote sus conclusiones y observaciones sobre esto y discuta, pero básicamente algo muy importante, discutan con la

2037 persona que tienen cercana, discutan con algunos compañeros ¿ qué conclusiones podrían obtener? Uno parece ser  
2038 mecanismo de Grashof, el otro no parece serlo, sin embargo los dos mecanismos están hechos con las mismas cuatro  
2039 barras, entonces todo eso escríbanlo, además de todas estas observaciones que parecen interesantes, parece ser que el que  
2040 funciona es el que cumple con lo de acá, de que los lados opuestos son paralelos, entonces en un tiempo de unos cinco  
2041 minutos que platicuen y que empiecen a escribir todo eso en esa parte en el caso 2...

2042 A: estudiantes escribiendo y murmurando...

2043 P( acercándose a unos estudiantes): aquí tiene que ir la opuesta, para que sean paralelos...hago esto y ahora aquí .... Esto  
2044 es lo que la mayoría de tus compañeros hicieron, también yo lo hice y en esencia el mecanismo es parecido, tú la que giras  
2045 es la mayor, yo igual puedo girar la mayor, ahí ya está, pero ahí ya sé que es el mismo que nosotros fabricamos, y el que  
2046 tú fabricaste con medidas 10, 10, 5,5 no hace eso, gira y arrastra la otra , son paralelos todo el tiempo y ahí cuando se  
2047 alinean ..... siguen trabajando igual, siguen siendo paralelos por acá abajo .... Pues tal vez estas medidas son unas  
2048 medidas muy particulares en las que el mecanismo no hace este tipo de cosas raras, sino que de cruzarse y regresarse ¿  
2049 verdad? Aunque bueno de aquí para acá al menos hace eso, aquí van girando las dos , pero esa nadamás gira como que la  
2050 mitad, ciento ochenta y ahí se regresa, mientras que la otra sigue los 360 grados, en cambio el que tu obtuviste estuvo muy  
2051 interesante por esto ¿cuál es la otra que puedes mover? .....ahhh.... Fíjate que aquí ya pasó algo curioso eh ...

2052 A: aquí nadamás se puede mover....

2053 P: fíjate que aquí sí mira esta cambia de dimensiones.... Eso, por eso , por eso se comporta distinto el tuyo, porque esta  
2054 barra realmente no es una barra fija, no es una barra rígida...

2055 A: pero si la giramos por completo...

2056 P: pero fíjate ahí estás .... Aquí ya le desacomodé... ya viste que sí cambia.... Ya cambia... sí pero ve esta .... Con  
2057 cuidado.... ¿ya viste cómo si cambia? , y entonces parece que puedes ¿por qué no lo hacemos desde un principio? Tú  
2058 quieres hacer tu mecanismo de cinco y diez quieres las medidas ¿no? Vamos a hacerlo poco a poco , quieres que la fija  
2059 sea la de cinco, entonces ésta va a ser la fija, y queremos mover la grande, la de diez, entonces tomo esta de diez , y ésta  
2060 va a ser la que voy a mover, a ver me equivoqué no le atiné al extremo, y.... esas son las primeras dos, las primeras dos  
2061 siempre son fácil, las hago como quiero, ahora voy por las otras dos, la de diez tiene que partir de aquí porque tiene que  
2062 ser opuesta a ésta, la otra de diez aquí está, y la otra de cinco no puedo trazar antes la barra que sigue, la opuesta a la de  
2063 cinco tiene que partir de acá, entonces tomo con cinco el compás y entonces ahí .... Ajá ando fallándole a la ..... y no te  
2064 creas a lo mejor algo así te pasó y por eso una de las barras sí se deforma....éste mecanismo es el que tú quieres hacer,  
2065 incluso podemos medirlo mira diez, ésta es la de diez, cinco supuesto es la de cinco, nosotros ya estamos bien  
2066 convencidos de que son paralelos los opuestos, pero bueno vamos de todos modos a preguntarle al software ahí está, y  
2067 ahora viene lo bueno, vamos a moverle siempre son de diez y de cinco mira no cambian, pero cuando se alinean se supone  
2068 que deberían seguir moviéndose igual , ya se cruzaron ¿ya viste? Y en la parte de abajo no son paralelos pues te das  
2069 cuenta que....

2070 A: no, es que ya sé lo que hice, porque yo primero puse dos, pero lo que pasa es que aquí yo tomé los dos lados,  
2071 exactamente, osea no tenía otro lado más que noventa ...

2072 P: sí, tú desde que construiste tenías un ángulo de noventa...yo no sé si eso te pudiera afectar mucho, yo lo puedo  
2073 acomodar a noventa ahí está, pero en la parte de abajo si se cruzan las barras y dejan de ser paralelas...

2074 A: bueno... pero ya no me da....

2075 P: ¿cómo le hiciste para sacar el ángulo de noventa?

2076 A: es que primero hice esta raya...

2077 P: ajá la de cinco sí.... Ese no hay problema, a ver vamos a tratar de reproducir la construcción como la hiciste, empezaste  
2078 trazando el de cinco, ahí no hay tanto pierde.... Así, pero la que sigue dices que tú te aseguraste de que fuera un ángulo  
2079 recto..

2080 A: ajá

2081 P: ¿cómo le hiciste, te acuerdas?.... a ver

2082 A: sí

2083 P: ahhh la de diez.... Hiciste eso ajá .... Medida de ángulo, mídelo .... Casi.....tú lo acomodaste a que fuera de noventa...

2084 A: Aquí son noventa...

2085 P: sí con un poquito de buen pulso...

2086 A: con esto si giraba bien, pero todos los demás no

2087 P: vamos a intentarlo ¿no?

2088 A: es que primero hice dos rayas así

2089 P: hójole es que es lo mejor que podemos ¿eh?, pero tú sospechas que fue porque era de noventa exactamente..... pero ¿ tú  
2090 crees que eso cambie el comportamiento? Porque este puede estar acá o puede estar dónde sea, es lo que hemos estado  
2091 comentando,

2092 A: pero ese es... (inaudible)

2093 P: a ver, vamos a pensar que es lo más cercano que hiciste ahorita a noventa ¿ y luego que hiciste? ¿ cómo los uniste? A  
2094 ver eso sería importante a ver cómo los uniste...¿te acuerdas?

2095 A: (inaudible)

2096 P: porque tal vez ahí esté la clave

2097 A: ( la estudiante está completando su cuadrilátero)

2098 P: en otras palabras, tu tenías un rectángulo ....al principio, porque si los ángulos eran de noventa era un rectángulo, un  
2099 cuadrilátero..... bueno lo interesante, porque tu construcción todavía está hecha, esto fue lo que tu hiciste,  
2100 A: ya ni me acuerdo como lo hice...  
2101 P: lo único que yo hice hace rato fue mover otra barra, en vez de mover la grande, lo que hice fue empezar a girar la  
2102 pequeña, y cuando moví la pequeña ahí nos dimos cuenta que una de las barras si se estiraba, lo cual no debería suceder  
2103 realmente...  
2104 A: es que yo tengo aquí .... Me acuerdo que cuando se movía ¿ésta era la fija, no?  
2105 P: ajá, ésta era la fija, hace rato tú usabas como fija la de cinco...  
2106 A: y movía esa...  
2107 P: y podías mover la de diez, y ahí es cuando pasa esto...  
2108 A: ajá  
2109 P: es que fíjate, al parecer sí cambia, poquito pero sí cambia de medidas.  
2110 A: no, pero ese no cambiaba, porque tenía diez completamente ésta y ésta, osea estaba completo en diez, y usted lo vió...  
2111 P: sí , a lo mejor cambiaban los demás decimales, porque acuérdate que cuando mides te muestra los primeros dos, puede  
2112 ser mira éste comando te permite ir revisando paso a paso lo que hiciste , trazaste un punto, un punto sobre un círculo,  
2113 nadamás que lo que no entiendo es a ver .... Es que en este de edición te muestra los pasos que tu hiciste primero, pusiste  
2114 tu punto, punto sobre un círculo , luego el segmento, pero lo que no entiendo es por qué no la estamos viendo , porque te  
2115 debería, deberías ir viendo paso a paso, deberías ir viendo...  
2116 A: ¿ no es aquí?  
2117 P: parece que no.... Estuviste trabajando otras cosas ¿verdad? Por eso no... está hasta acá arriba.... Ahhh ya es por este ,  
2118 es que como tu hiciste varias construcciones en diferentes lugares , ahorita nos está mostrando lo primero que hiciste, y lo  
2119 primero tal vez está por un lugar por el que ni estamos viendo, por eso no nos está funcionando...por eso cuando le  
2120 estamos dando, esto está en un lugar que no estamos viendo..... creo que hay que seguirle.... Ahí está mira ya empezó a  
2121 aparecer lo que hiciste aquí... hiciste eso.... Hiciste eso, osea ahí debe aparecer lo del principio los ángulos de  
2122 noventa...después tu ajustaste aquí .... Pero bueno la clave es que este se deforma, sí se deforma, aunque sea un poquito  
2123 pero se deforma, sería bueno que te acordaras, pero seguro algo pasó ¿eh?, porque este... no se tenía que deformar...  
2124 P( dirigiéndose a todo el grupo): ok a ver creo que ya fue tiempo suficiente muchachos, vamos a ver el último caso, fíjense  
2125 en el caso 1, pensamos cuatro barras iguales,  $A=B=C=D$ , el caso 2 que es éste, pensamos en tomar dos medias nadamás,  
2126 en vez de cuatro medidas distintas, en el caso C ya nos habla de cuatro medidas diferentes, el caso 3 que está ya en la  
2127 tercer hoja, si pasan todos dice, que exploremos un caso en el que  $A+B$  sea igual a  $C+D$ , es decir ahora ya no tienen que  
2128 ser iguales las barras, lo que tienen que se iguales son las sumas de las longitudes, de hecho ahí nos da un caso muy  
2129 particular que me gustaría que construyan, un caso muy particular en el que la barra A mide 2, la B mide 7, la C mide 4 y  
2130 la D mide 5. Por favor construyan ese caso, el caso en el que la barra A mide 2, B mide 7, C mide 4 y D mide 5, ahí si  
2131 háganlo por favor con la instrucción de número, entonces primero busquen números y luego utilicen el compás, porque ya  
2132 les están dando medidas determinadas ..... ahí están las medidas en sus hojas de actividades.... Son 2,7,4 y 5 es decir  
2133 queremos construir un cuadrilátero, con sus cuatro lados diferentes, de diferente longitud, pero si se está cumpliendo una  
2134 condición adicional, nosotros estamos revisando un caso en el que aunque los cuatro lados son diferentes, dos lados suman  
2135 lo mismo que los otros dos, en este caso dos y siete suman nueve, al igual que cuatro y cinco, entonces construyan ese  
2136 mecanismo a ver si funciona, a ver si es un mecanismo tipo grashof...  
2137 A: sí funciona.... ( estudiantes trabajando en la construcción)  
2138 P ( acercándose a una estudiante): creo que pusiste dos de nueve una de seis, doce y seis dieciocho, y nueve y nueve  
2139 dieciocho, supongo que lo hiciste por eso, buscaste .... Parece no funcionarte...pusiste la de nueve con la de doce, ok te  
2140 hago una sugerencia y construyes con las mismas medidas otro...ahora haz este otro con las mismas medidas, ponemos la  
2141 de seis con la de 12 y la de nueve con la de nueve ¿sí me explico por qué? Que las que estén unidas sean las de seis y la de  
2142 doce, que sean las primeras dos, y las otras dos cierras el cuadrilátero con nueve y nueve, ¿ si me expliqué?  
2143 A: sí  
2144 P: a ver hazlo  
2145 P (en general hacia todo el grupo): ok a ver, si siguieron el orden en general que es A, B, C y D , entonces habrán  
2146 obtenido algo así, yo aparte hice otra construcción, son las mismas barras, pero ahora conecté un diferente orden, quiero  
2147 averiguar que pasa, aquí por ejemplo la de dos con la de cuatro, y la de siete con la de cinco, que fíjense ¿cuál es la  
2148 diferencia? Aquí las barras que están conectadas suman nueve ( dos con siete) y aquí también suman nueve las que están  
2149 conectadas, acá ya no , acá estas dos que están conectadas suman seis y éstas dos suman, entonces voy a ver qué pasa ¿no?  
2150 A lo mejor ninguno funciona, o uno de los dos sí , voy entonces a animar, ustedes igual les sugiero que lo hagan y me  
2151 dicen si el mecanismo opera o no opera, entonces el original, el 2-7-4-5 parece trabajar sin mucho problema, por la parte  
2152 de abajo, las barras también se cruzan ¿ustedes creen que en algún momento las barras sean paralelas?  
2153 A (varios): no  
2154 P: ahora ¿ cómo ven el de la derecha? Pues parece también trabajar, se mueve distinto pues las barras están acomodadas  
2155 en otra posición, pero fíjense que parecen funcionar ambos, parecen funcionar ambos, por cierto lo que dijeron hace rato,  
2156 ¿las barras se sobreponen? Fíjense ¿las barras se están sobreponiendo? En ambos casos, por alguna razón , las barras  
2157 quedan ahí juntas, llega un punto en que las cuatro barras se juntan siempre, quien sabe por qué, pero parece que sí  
2158 funciona en este caso, aunque a mí me estaban dando.... ¿ya lo hiciste? ¿ y qué pasó con la otra forma de acomodarlas?  
2159 A: salió así... así me salió

2160 P: ¿ y así parece si funcionar?

2161 A: sí

2162 P: a ver miren , acá hay una propuesta que una de sus compañeras me dio, ella no siguió directamente las medidas de 2-7-4-5 porque ese nadamás era un ejemplo, era una sugerencia, ella decía, si yo necesito que dos barras sumen lo mismo que otras dos, propuso lo siguiente, propuso un mecanismo que tuviera barras 9-9 para que de dieciocho, otra barra 12 y otra

2163 4-5 porque ese nadamás era un ejemplo, era una sugerencia, ella decía, si yo necesito que dos barras sumen lo mismo que otras dos, propuso lo siguiente, propuso un mecanismo que tuviera barras 9-9 para que de dieciocho, otra barra 12 y otra

2164 seis, les voy a pedir a ustedes de favor que también lo construyan , nadamás que ella lo hizo en dos formas distintas

2165 acomodó las barras, primero acomodaste la de doce si no mal recuerdo acomodaste la de doce con la de nueve, ella en un

2166 sentido hizo así, la de doce con la de nueve y le quedó otra de nueve, no me acuerdo si la pusiste así...

2167 A: abajo era seis y arriba era nueve..

2168 P: ahhh ok, así doce, seis, nueve y...

2169 A: y esa nueve

2170 P: ok construyan éste, a ver por favor todos construyan ese mecanismo, 12-6-9-9 y me dicen si funciona con 12-6-9-9 , se

2171 sigue cumpliendo la condición de que la suma de dos barras, en este caso 12 y 6 dieciocho, sea igual a la suma de otras

2172 dos barras, que es nueve y nueve dieciocho, sin embargo hay dos formas de hacerlo, bueno hay más, pero ¿de qué otra

2173 forma conectaste las barras?

2174 A: mmmm

2175 P: a ver me dices y hago aquí también la representación del otro mecanismo

2176 A: eran doce

2177 P: doce era la primera...

2178 A: con nueve abajo

2179 P: nueve abajo...

2180 A: y seis

2181 P: a ver hagan esos dos por favor, con 9-9-12-6 y de todas las formas en que se pueden acomodar las barras, exploren

2182 éstas dos 12-9-9-6 y 12-6-9-9 y ver , comparen los dos mecanismos y ver si funcionan

2183 A: (los estudiantes construyendo sus mecanismos)

2184 P ( acercándose a otra estudiante): trata de hacer una construcción de cero, a mí me gustaría que partas de cero, porque yo

2185 quiero ver sobre todo cómo unes los últimos dos lados, aquí lo interesante es esto, es la uno ¿no?¿ o cuál es?

2186 A: la uno

2187 P: ya volviste a moverle y a acomodarle y ahora sí, incluso pidiéndole que muestre muchos decimales sigue siendo el

2188 mismo, ahí están las barras las de cinco y cinco opuestas no cambian, y las de diez y diez no cambian, ahí están ve, es más

2189 le vamos a dar guardar así, sin embargo si movemos ésta , empieza a hacerse más corta y eso no nos gusta, ok lo bueno es

2190 que lo guardamos, aquí nomás le damos control z, y si no quiere de todas formas lo ....- ese también ya está guardado,

2191 nadamás déjame ver dónde los está guardando, ahhh ok los guarda en mis documentos, entonces lo que podemos hacer es

2192 volverlo a abrir desde mis documentos , y está como lo dejaste la última vez...ahí está ¿ya? Sin cambios, trata de hacerlo

2193 otra vez desde el principio, porque sí es importante ver cómo lo construyes, por qué cuando giras ésta , no se deforman las

2194 barras, pero cuando giras la otra hay una que sí se deforma, eso es lo que quiero ver cómo lo haces, este..... ¿ qué pasó

2195 muchachos, ya terminaron? ¿éste funcionó, el de doce y seis conectadas y nueve y nueve conectadas, funcionó? ¿ y

2196 cuándo conectan la de doce con la de nueve y la de seis con la de nueve funciona?

2197 A: no

2198 P: no, parece algo bien curioso, éste parece que funciona y éste no, y sin embargo está cumpliendo la condición de dos

2199 barras sumadas, por ejemplo este doce y seis dieciocho, es lo mismo que las otras dos, parece que tiene que ver igual la

2200 posición en cómo las acomoden , al menos eso parece suceder, entonces de este caso 3, en el que la suma de dos barras es

2201 igual a la de otras dos, parece que sí se obtienen mecanismos tipo grashof, parece, aunque dependiendo el orden en que las

2202 acomodan, a lo mejor hay unos casos en los que no, escriban igual ahí esa última parte, dónde dice anota tus conclusiones

2203 y observaciones e igual que concluyen de cuando la suma de dos barras es igual a la suma de otras dos barras.

2204 A: ( jóvenes trabajando y escribiendo en sus cuestionarios escritos)

2205 P (acercándose a otra estudiante): parece que el de abajo no, y el de arriba sin embargo sí funcionó....que bueno de

2206 antemano no sé si ustedes ya lo verificaron...

2207 A: ya

2208 P: y bueno es ahí donde uno se hace la pregunta a saber ¿ son las mismas barras? ¿cumplen una condición? Osea nosotros

2209 le pusimos esa condición, de que dos barras sumaran los mismo que las otras dos, doce más seis dieciocho, nueve más

2210 nueve dieciocho, dices pero entonces ¿por qué en un caso funciona y en otro caso no?

2211 A: porque deben estar unidas, las que suman las otras...

2212 P: ahhh ok, tú crees que las que suman lo mismo son las que tienen que estar unidas, si no unes esas, parece que no sale ,

2213 ok puede ser, si ustedes están convencidas de eso, con los intentos que hicieron, pues es lo que pueden colocar como

2214 conclusiones ...

2215 P : a ver chicos, de hecho estamos ya casi por terminar, y falta como que la parte más importante, fíjense aquí hay un

2216 mecanismo que yo construí mientras ustedes trabajaban, bueno entonces ahí en vez de A,B,C y D les llamé S,L,P y Q , a

2217 los lados, pero fíjense lo que quiero que observen es lo siguiente ,voy a animarlo para ver si funciona, lo que voy a hacer

2218 girar va a ser es la barra S, ahí está miren, ese mecanismo parece funcionar sin mayores problemas, si han sido un poco

2219 observadores, los últimos mecanismos que han hecho, sí han funcionado, por alguna razón , esos casos que estuvieron

2220 analizando, por alguna razón funcionaba, pero todos esos casos tuvieron algo en común, que éste si no tiene, es algo que

2221

2222 se ve, ahora sí que es visual, uno observa cómo funcionaron los otros mecanismos, uno observa éste y hay algo distinto,  
2223 no sé si alguien lo observa...  
2224 A: una barra...  
2225 P: ahhh ok esa barra hace esto....la barra P nadamás podríamos decir que oscila, hace como que esto, es decir ...ahhhh...  
2226 exacto ¿ qué dijeron?  
2227 A: no se sobreponen  
2228 P: no se sobreponen las barras, en todos los casos anteriores, quién sabe por qué las barras llegaba un momento en que se  
2229 juntaban , y ahí era entonces cuando el mecanismo hacía como que cosas raras, ésta construcción sin embargo se parece  
2230 mucho al video que vimos la semana pasada , de ese mecanismo real, así trabajan , entonces de entrada déjenme decirles  
2231 de que eso de que todas las barras se junten, no es común, de hecho no sería bueno , algo más común o algo mejor para  
2232 que el mecanismo trabaje bien, es que pase esto, ahora otra cosa, déjenme decirles que este mecanismo no tiene esas  
2233 restricciones o esas condiciones que pusimos, obviamente las cuatro barras no son iguales ¿ ya vieron? A simple vista se  
2234 nota, las barras no son iguales, y las barras opuestas, si es que sospechan que son paralelas, le podemos preguntar al  
2235 cabri, pero créanme, las barras opuestas no son paralelas ni de chiste, ¿ ésta es paralela con Q? no lo es, ¿ Q es paralela con  
2236 L? tampoco, y sin embargo el mecanismo está trabajando , otra cosa que tal vez estén sospechando, porque fue el último  
2237 caso que se discutió, es que la suma de dos barras sea igual a la de otras dos, les voy a mostrar cuanto miden estas barras,  
2238 fíjense la S mide 3.08, la Q 7.74, la P 5.03, es decir son medidas cualesquiera, son medidas cualesquiera, sumen ahora  
2239 3.08 con 7.74 y no les da lo mismo que esto con ésto, o sumen ésta con ésta y mucho menos les da, en otras palabras este  
2240 mecanismo sus cuatro barras son diferentes, las barras opuestas no son paralelas no hay barras que sumen lo mismo que  
2241 otras dos barras, y sin embargo el mecanismo trabaja, y de hecho trabaja muy bien , porque no se están plegando sus  
2242 cuatro barras, entonces de hecho la última etapa es que ustedes, y van a tener algunos minutos, como diez nadamás, que  
2243 sobre todo en grupos, dos o tres personas, discutan todo lo que se ha estado viendo, todo lo que crean , y traten de escribir  
2244 cuál es la regla a seguir para que dados cuatro segmentos o cuatro longitudes, el mecanismo vaya a funcionar, qué es lo  
2245 que .... A ver si logran concluir algo, al final de cuentas, estas cuatro dimensiones hacen que el mecanismo  
2246 funcione...pero no siempre, de hecho le voy a mover a alguna de las barras, por ejemplo a la barra S déjenme moverla , la  
2247 hice crecer, no sé si ya vieron..  
2248 A:ajá  
2249 P: y déjenme ver si el mecanismo sigue funcionando tan bien como funcionaba hace rato, vean ya no funciona, así de  
2250 simple vean, le moví a una de las barras y ya no funciona...miren se rompe, cuando va a pasar por la parte de abajo hay  
2251 algo que hace que ya no pueda operar, entonces esa es la última parte, ojalá de todo lo que se hizo encuentren, puedan  
2252 escribir en sus hojas algunas conclusiones: ¿ qué debe pasar para que dadas cuatro barras, el mecanismo que yo construya  
2253 , sí funciones como un mecanismo de Grashof? Como el que mostré al principio, déjenme regresar la barra como estaba  
2254 más o menos como por acá, y déjenme ver si sigue funcionando , ahí está miren ya sigue funcionando, con ese simple  
2255 cambio que volví a hacer ya funciona bien el mecanismo, entonces tienen poquito tiempo, tienen como diez minutos,  
2256 discutan entre ustedes...  
2257 A: ( los estudiantes discuten entre sí y escriben en su cuestionario)  
2258 PY ( profesora Y, se acerca a una estudiante).  
2259 A: es que en la que dibujó, el lado chiquito que está dando toda la vuelta, más el lado que está dando la forma de  
2260 parabrisas, su suma da lo que está el área fija...  
2261 PY: ¿ el área?  
2262 A: ¿mande?  
2263 PY: ¿ el área?  
2264 A: no eh...la suma da la medida de la barra fija...  
2265 PY: a ver construye una .... Ajá...para que lo verifiques...  
2266 A: ¿el que sea?  
2267 PY: puedes sospechar y puedes pensar que eso ocurre, pero no basta con que nadamás te quedes con esa idea,  
2268 A: es que ya se salió...  
2269 PY: a ver y ya te dio? ¿ y ya lo verificaste también?  
2270 A: sumé 2.34 más el 5.03 y me dio la medida  
2271 PY: a ver construye otra, si realmente estás segura, entonces escríbelo ahí en tus hojas  
2272 P ( dirigiéndose a todo el grupo): todas las ideas que tengan, si tienen alguna idea o una sospecha, por favor escríbanla, si  
2273 tienen una hipótesis o alguna sospecha de última hora pues trátenla de verificar haciendo la construcción, pero escriban ya  
2274 algo que hayan concluido de todo este trabajo, porque prácticamente ya vamos a terminar, de hecho ya estamos por parar  
2275 ..... muy bien muchachos pues por cuestiones de tiempo y por respetar el horario de su clase, les voy a pedir que esto sí  
2276 sea de forma individual, espero que ya hayan tenido de tiempo de escribir algo y concluir, algunos sí porque incluso me  
2277 comentaron, pero en general incluso quiero que todos pasen a la última hoja y llenen la encuesta..... les agradecemos  
2278 mucho su participación nuevamente y lo último que les pedimos es que por favor llenen esa última parte, la hoja cuatro  
2279 nadamás es una encuesta, llevan unos datos de ustedes, pero son datos , la edad, bueno dónde dice semestre y carrera, pues  
2280 ustedes no llevan algún ... ¿ no es un bachillerato con carrera técnica, verdad? Entonces nadamás pongan que son de  
2281 segundo semestre, su edad, el semestre que llevan y de ahí en adelante son preguntas abiertas que les pedimos por favor  
2282 que nos contesten por favor de manera individual..  
2283 A: trigonometría, geometría ¿ cursos igual?

2284 P: sí por ejemplo qué cursos has llevado, por ejemplo ahorita si eres de segundo llevas un curso, ¿te sabes el nombre?  
 2285 A: geometría  
 2286 P: ok ahorita estás llevando geometría ¿y cuál llevaste el semestre pasado? ....ah entonces esos serían, los últimos cursos  
 2287 que has llevado..... si por favor ahí ya cada quien pone su respuesta, nadamás que ahora sí que se diferencie que son las  
 2288 respuestas de dos personas distintas.  
 2289 PY: mmmm.... ¿qué pasó ahí?  
 2290 A: es que se me desaparece...  
 2291 PY: entonces fíjate que ahí lo interesante es eso, que tú digas a ver yo creo que es esto, y no te quedes con la idea de que a  
 2292 lo mejor un caso particular puede ser que suceda, pero ya en los casos generales.... Has escuchado alguna vez algún  
 2293 teorema ¿no? Dice este teorema no solamente se construye con un caso particular, osea debieron haber sido muchos casos  
 2294 en los que se cumple eso y entonces sí se puede hacer un teorema, entonces sí se puede concluir que son casos  
 2295 generales....  
 2296 A: a menos que haya puesto mal mis medidas...  
 2297 PY: a ver verifica entonces si están bien tus medidas .....  
 2298 A: según yo digo que sean éste y éste, y el otro que sea de aproximado..... vas a ver que va a girar ..... ahhh... no es  
 2299 así..... a ver ¿quedará así?  
 2300 PY: escriban sus conclusiones y van apagando el equipo...  
 2301 A: si ahí si..  
 2302 P( acercándose): sí nadamás que te voy a hacer una observación que de hecho les hice, está totalmente de acuerdo lo que  
 2303 tu haces, pero en general cuando tú tienes un cuadrilátero, tienes cuatro lados no importa que no sean iguales, cuando tú  
 2304 quieres construirlo, una de las cosas que nos dimos cuenta la vez pasada es que los primeros lados , osea trazas el primero  
 2305 éste ya es un lado del cuadrilátero, luego cuando trazas el segundo tú te puedes apoyar aquí o en otro punto, ahí tu todavía  
 2306 eres libre, y lo trazas a dónde quieras, por ejemplo tú tratas de que sean rectos, pero en general tú trazas a dónde quieras, y  
 2307 luego cuando vas a trazar los otros dos, tú trazas, fíjate te falta poner éste, tú sabes que puede ir aquí o aquí, tú decides  
 2308 dónde, pues quiero que éste vaya aquí , y tú lo trazas tratando de que sea derecho, pero lo que nosotros decíamos es no  
 2309 sabemos en dónde tiene que cerrar el otro, lo que sabemos es que el otro, el último, tiene que partir de aquí, a fuerzas,  
 2310 entonces por eso tomamos como compás esta medida y nos apoyamos aquí, y entonces dónde unimos y es un cruce de  
 2311 dos circunferencias, y bueno que se crucen en esa circunferencias, me asegura que ésta mida exactamente esto y ésta  
 2312 también , y la última mide exactamente esto, siempre, y que aunque yo empiece a mover.... Es que ahí no le atiné, no le  
 2313 atiné bien al extremo, cuál es, es ésta y ésta, entonces haciéndolo así uno tiene la confianza en que no se deforma, no  
 2314 importa si el mecanismo funcione o no, eso es lo de menos, uno tiene la confianza de que mira, los lados...  
 2315 PY: ya vayan apagando las computadoras por favor...  
 2316 P: este, conforme ya vayan terminado de contestar, le entregan los cuestionarios a algunos de mis compañeros, apaguen  
 2317 sus computadoras, ya estamos sobre el tiempo para que se puedan retirar, a menos que el doctor les quiera dar alguna otra  
 2318 indicación y ya ya este para que se puedan retirar.  
 2319 P ( de nuevo con la alumna). Entonces fíjate aquí no importa si yo giro esto, las dimensiones siguen siendo las mismas,  
 2320 cuando tú lo haces de esa otra forma como tú lo hiciste, una tú ahí tienes ese riesgo, de que ahí puede crecer o disminuir,  
 2321 entonces si es cierto de que en la forma como lo haces tú, pues funciona, pero realmente, no sé si me explico, pero  
 2322 físicamente ese mecanismo no trabajaría así por cómo lo construiste tú. Osea al final tú tendrías que haber medido, para  
 2323 obtener las últimas dos barras tienes que fijarte en ese cruce , y aquí fíjate nuevo y siguen siendo las mismas medidas,  
 2324 nuevo siguen siendo las mismas, ¿cuál es tu última, ésta? Aquí nuevo y dices son las mismas está todo bien, pero aquí  
 2325 nuevo y dices no pues esta ya se hizo más pequeña y no debería, esa es la cuestión.  
 2326  
 2327 ( transcripción de las grabaciones correspondientes a los días 20 y 27 de abril de 2010)  
 2328

2329

2330

#### TRANSCRIPCIÓN DE LA SESIÓN DEL 2 DE SEPTIEMBRE DE 2010

2331

2332

2333

2334

2335

2336

2337

2338

2339

2340

2341

2342

P: Bueno, antes que nada les voy a pedir primero que en la vista, - me dijeron que eran 16 bueno aquí están- en el comando desactiven la cuadrícula, porque veo que algunos la tienen, desactiven también la ventana algebraica y los ejes cartesianos, eso ahorita no los vamos a utilizar... ya saben cómo es eso.... Así nos quedamos simplemente con un plano  
 A(no identificado): (ininteligible)  
 P: .... geogebra por favor, y hay que desactivar... si tienen cuadrícula desactívenla, también desactiven la ventana y los ejes cartesianos, vamos a trabajar así ahorita.... así como está... entonces ya todos desactivaron... queremos ver así la pantalla en blanco totalmente para poder trabajar  
 A(noidentificado): (ininteligible)  
 A23: ¿click derecho?....seleccionas tus estas.....  
 P: ¿ya chicos?  
 A23: click derecho....dale el segundo

2343 P: ahora sí les voy a pedir de manera individual, cada uno trate de reproducir, ahí les habla de una construcción, ahí dice  
2344 que es con cabri, pero bueno no importa ahí lo van a hacer con geogebra que es con el que tienen más experiencia,  
2345 entonces vamos haciendo esa construcción, lo que está en negrita en el enunciado. Si tienen alguna duda pues la  
2346 ampliamos no se preocupen, pero me gustaría que individualmente cada quien trate de hacer la construcción.  
2347 P: ...este hay que cerrar eso ¿no?...nadamás nos distraen, ni ventana algebraica ni plano cartesiano, nadamás vemos la  
2348 pantalla en blanco y ahí trabajamos, entonces el software les va guiando, ustedes ya conocen los comandos, cerramos la  
2349 ventana algebraica ahorita para que no nos ... simplemente.... un click ahí y ya...¿ si ya vió?  
2350 A2: si ya...  
2351 P: por fa ...eso es, la pura ventana algebraica ...vamos a ver cómo vamos.... hay que guiarse en el enunciado y aparte  
2352 hay una ayuda, aunque esa construcción está hecha en cabri, pero les puede ayudar mejor en la construcción que deben  
2353 realizar.  
2354 A: ( inaudible)  
2355 P: si así, si no nos empieza a mostrar todos los objetos, y eso nadamás sería una distracción en lugar de una  
2356 A23,A24: yo digo que ... ( discutiendo acerca de los comandos)  
2357 P: En este caso geogebra ya saben que pone automáticamente etiquetas, entonces el software y la actividad de ahí les  
2358 habla de unas etiquetas para ciertos objetos, como los extremos de los segmentos por ejemplo. Si gustan modifíquenle, si  
2359 no, no hay ningún problema en que se le cambie de nombre...  
2360 A10: disculpe... ¿cómo...?  
2361 P: a ver cuál es la duda  
2362 A10: ¿ cómo le pongo el nombre .....?  
2363 P: ahhhh.....hasta dónde yo me acuerdo, le puedes dar aquí click, le das nombrar y ya... si no tienen mucho  
2364 inconveniente pues por favor asignen las etiquetas como dice la actividad, si de repente geogebra empieza a poner  
2365 etiquetas de diferentes nombres, pues renómbrenlas, si por ejemplo a un punto que le queremos poner C le pone D  
2366 geogebra, ustedes lo renombran como C para que todos estemos hablando de lo mismo.  
2367 A11: creo que me equivoqué de punto de intersección ...  
2368 P: parece que.... Esa es la construcción que nosotros ...entonces vamos a esperar tantito, un poco de paciencia para que  
2369 los demás igual se emparejen...algunos todavía no terminan  
2370 A23:(inaudible)  
2371 P: porque tienes que seleccionar el apuntador, ahorita ya estás seleccionando...  
2372 A: ¿ y cómo le .....?  
2373 P: a ver, ¿ esta recta qué características tiene? .....esa recta, por ahí si le leemos, colocaste un punto que es C...y lo  
2374 puedes mover, ese ya está, dice....ahhh...tienes que trazar una perpendicular a la mediatriz AB , ¿cuál es la mediatriz de  
2375 AB? Entonces seleccionas el punto por el que quieres que pase y seleccionas la recta, la mediatriz, eso (está con la  
2376 alumna A24) es lo que queríamos ¿verdad?  
2377 A24: ¿ sería así?  
2378 P: exactamente, dice la intersección entre esta perpendicular, y esta ,me imagino que es la mediatriz de BC, entonces ese  
2379 punto, ahí por ejemplo le puso D geogebra, vamos a renombrarlo como P para que no haya problema .  
2380 *Se dirige a otro lado del salón*  
2381 P: A ver ya casi terminamos chicos.... Espero que no haya mucho problema.  
2382 *Dirigiéndose al estudiante A10P:* sugerencia podrías renombrarlos, para que cuando hablemos de un segmento en  
2383 particular, o de una mediatriz a un segmento, estemos todos hablando de lo mismo, por ejemplo tu segmento inicial,  
2384 supón tú que este, si por ejemplo podemos renombrar ese punto como B simplemente.... Luego colocaste un punto sobre,  
2385 ahh... bueno a este segmento le trazaste la mediatriz que me imagino que es esta, ese es el punto C, ok esa es la  
2386 perpendicular de C, luego dice que traza también la mediatriz de BC, que es ésta...  
2387 A10: ésta es ésta ¿no?  
2388 P: ...y esa es la mediatriz de BC me imagino...  
2389 A10: ajá sí  
2390 P: y dice que esperas ver un cruce entre la mediatriz...  
2391 A10: esta y esta...  
2392 P: no , entre las dos mediatrices no, si te fijas bien...  
2393 A11: es que está mal  
2394 P: dice traza una recta perpendicular ....dice el punto P es la intersección, ahhh es que no es entre las dos  
2395 mediatrices...es la intersección entre la mediatriz y la perpendicular...  
2396 A11: la perpendicular  
2397 P: exactamente, sí  
2398 A11: por eso no me daba  
2399 A10: ¿ esta perpendicular?  
2400 P: exactamente  
2401 *En general dirigiéndose a todo el grupo*  
2402 P: a ver chicos, les voy a pedir que pongan un poco de atención, algunos ya terminaron, y sobre todo porque me acabo de  
2403 dar cuenta que una palabra les puede ahí a lo mejor confundir, bueno de entrada la construcción es algo simple, nos pide  
2404 que pensemos en un segmento cualquiera...ahorita le voy poniendo nombre a todo esto...les pedí igual de favor que le



2405 coloquen etiquetas y que si el geogebra les pone una etiqueta diferente a la que dice la actividad, se lo cambiemos, ahí está  
2406 un segmento cualquiera de dimensión AB, y primero nos pide que tracemos la mediatriz, ustedes lo hicieron directamente  
2407 porque acá hay una construcción que se los permite , la mediatriz de este segmento, luego nos pide colocar un punto  
2408 sobre esa recta la mediatriz, a ese punto nos pidieron que lo nombremos como el punto C , hasta ahí ¿todo va bien?, luego  
2409 nos piden trazar una perpendicular a la mediatriz por el punto C, entonces igual eso es mucho problema porque aquí  
2410 directamente selecciono perpendicular a esta recta por este punto, hasta ahí vamos y lo otro que nos piden es trazar la  
2411 mediatriz del segmento BC, algunos lo trazaron el segmento de hecho por la construcción, la imagen que ahí viene,  
2412 incluso no es necesario trazarlo, pero bueno para seguir la construcción como se muestra en la figura, puedo trazar el  
2413 segmento y pedir la mediatriz, aunque no es necesario, repito, trazarla.... y ahí está... entonces el punto P , nadamás  
2414 aclaro , tiene que ser el cruce entre la mediatriz y la perpendicular, ese es el punto entonces que nos interesa, que es la  
2415 intersección de dos rectas, entonces ahí está...vamos a renombrarlo como P para seguir todos con la misma notación  
2416 ....ok esa es la construcción, ahora la pregunta ....pasemos a la pregunta ...dice qué lugar geométrico describe el punto P  
2417 cuando se mueve C, entonces algo que ustedes ya experimentaron es que al moverse C a todo lo largo de la mediatriz de  
2418 AB, y si ustedes notan pues el punto P también va cambiando de posición, también se va moviendo.... Sí de hecho se ve  
2419 que sigue una trayectoria, incluso pudiéramos...eh...activar la traza , les voy a pedir de favor que activen el rastro que  
2420 deja un punto al moverse, y activen eso para el punto P y que ahora muevan el punto C ...ahí está, me lo pinta el  
2421 lugar...entonces ese punto está generando lo que ahí vemos...pregunta; ¿ qué lugar geométrico está describiendo ese  
2422 punto? ....el punto P, de hecho les pido que utilicen el comando trazo, marcar trazo , ya sé que conocen un comando que  
2423 se llama lugar geométrico, tal vez, pero ese ahorita no lo utilicen, la pregunta es simplemente ahorita pensar en ese lugar,  
2424 entonces no es necesario más que con la ayuda de la traza ver, y qué creen ustedes y qué sugieren ustedes qué es ese lugar  
2425 geométrico ¿ alguien tiene una idea que proponer? Si no tienen una idea, tal vez después de la figura viene la pregunta, y  
2426 la pregunta es ¿qué entendemos por lugar geométrico? Nos están haciendo una pregunta sobre eso, el lugar geométrico  
2427 que describe un punto ..... ¿qué creen ustedes que sea ese lugar geométrico que acaban de dibujar ... alguien tiene una  
2428 idea, una suposición...  
2429 A: este es una elipse...¿no?  
2430 P: dicen que una elipse piensan, bueno ya ahí dieron el nombre de un lugar geométrico y en general ¿qué entienden  
2431 ustedes por un lugar geométrico?  
2432 A: el rastro.... la trayectoria....  
2433 P: a ver, ¿lo puedes decir un poco más fuerte para que escuchemos todos por favor?  
2434 A: pues sí, la trayectoria que sigue el punto P...  
2435 P:bueno, aquí en particular nos dice su compañera que es la trayectoria que está siguiendo o describiendo el punto P,  
2436 cuando por allá nuestro compañero hace una suposición, y dice, pienso que es una elipse, ya le está asignando un nombre  
2437 a ese lugar geométrico....a ver en particular, ustedes recuerdan que propiedades tiene el lugar geométrico llamado elipse?  
2438 Porque cuando uno dice pues creo que es una elipse, debe tener alguna idea de por qué cree que así sea, en particular ¿ tú  
2439 por qué crees que sea una elipse? *-acercándose a un estudiante-*  
2440 A: por el dibujo...  
2441 P: ahhh ok, por el dibujo que estás viendo...entonces tú estás guiando en la forma, y supones que es el de un lugar  
2442 geométrico que tú has escuchado que es elipse..... ¿alguien tiene otra suposición?  
2443 A23: una parábola...  
2444 P: acá dicen que es una parábola, ¿ tú por qué crees que es una parábola?  
2445 A23: porque siento que no se va a unir hasta acá...osea no va a formar una elipse completa...  
2446 P: osea igual tú te estás guiando en la forma... tú recuerdas que la elipse tiene cierta forma y que la parábola tiene una  
2447 forma distinta...  
2448 A23: ajá  
2449 P: dices que aunque yo mueva el punto, que aunque yo pudiera moverlo de arriba hacia abajo no va a cerrar.  
2450 A23: no, siento que no  
2451 P: crees que no va a cerrar y que por eso supones que es una parábola...muchachos, ustedes ya me dieron una idea sobre  
2452 lo que recuerdan que es un lugar geométrico, cuando decimos qué es un lugar geométrico me dicen que si es una parábola  
2453 o una elipse, la diferencia la enfocan ustedes esencialmente entonces en la forma, dicen si tiene esta forma es una elipse,  
2454 si tiene esta otra es una parábola.... ¿conocen otros lugares geométricos y me podrían decir su nombre?  
2455 A15: circunferencia  
2456 P: circunferencia es un lugar geométrico, por ejemplo en el caso de una circunferencia ¿ cómo definirías la forma de una  
2457 circunferencia?  
2458 A15: es el cuadrado...la sumatoria del cuadrado del...igual al radio al cuadrado.... bueno x al cuadrado más ye al  
2459 cuadrado igual al radio al cuadrado ...  
2460 P: si se dan cuenta, él no está hablando de una forma, osea él dijo una circunferencia es redonda o algo así, él está  
2461 pensando en otra cosa, está pensando en las propiedades que deben tener los puntos que forman ese lugar geométrico,  
2462 entonces en general, para hablar de un lugar geométrico, para definir un lugar geométrico, si yo sospecho que es una  
2463 elipse.....si yo sospecho que es una elipse, entonces todos los puntos que formen este lugar deben cumplir con ciertas  
2464 condiciones, para yo asegurarme que es una elipse .... Si creo, si sospecho que no es una elipse, sino una parábola, lo que  
2465 debo verificar es que este lugar satisfaga las condiciones que debe tener una parábola .... Entonces en eso consiste  
2466 básicamente la actividad del día de hoy, en que tratemos de determinar y de justificar si ese lugar geométrico es.... al

2467 menos tenemos dos sospechas, puede ser una elipse o una parábola, nadie ha dicho otra cosa, entonces podríamos tratar de  
2468 trabajar sobre eso..... antes de pasar a lo que sigue ahí hay otra pregunta, parte de la construcción se hizo con  
2469 ayuda de una recta mediatriz, entonces quisiera que alguien me ayude a recordar qué sabe o qué conoce acerca de la  
2470 mediatriz de un segmento, qué características tiene ..  
2471 A(varios): que pasa por el punto medio y que es perpendicular...  
2472 P: ahhh eso está bien que lo recuerden porque de entrada le trazamos una mediatriz al segmento AB y por allí colocamos  
2473 un punto ahí en la mediatriz, y luego trazamos la mediatriz de otro segmento, entonces ustedes recuerdan que por  
2474 definición de hecho, pues igual este debe ser el punto medio de AB , entonces este debe ser el punto medio de BC, es  
2475 bueno que lo recuerden, y más porque me dijeron que tiene que ser perpendicular al segmento, muy bien , eso nos va a  
2476 ayudar bastante ..... entonces vamos pasar a lo que sigue, pasamos a la siguiente hoja ...  
2477 P: Ahí hay una pregunta más que quisiera hacerles antes de que continuemos con la actividad ¿ por qué no nos quedamos  
2478 satisfechos con lo que aquí comenta la compañera? Yo veo que ese lugar es una parábola, yo veo que no va a cerrar, o por  
2479 qué no nos quedamos con la propuesta del compañero que dice yo recuerdo que las elipses tienen esa forma ¿ por qué  
2480 creen que es importante asegurarse que un lugar geométrico es lo que nosotros realmente creemos?  
2481 A: ¿ podría ser porque sus ecuaciones son diferentes?  
2482 P: bueno, en eso tiene razón, si los lugares geométricos son diferentes, al menos si hablamos ya de una ecuación, la  
2483 ecuación de una parábola, tú ya usaste ese término, la ecuación de una parábola debería ser distinta a la de una elipse, eso  
2484 por un lado, por otro lado ustedes se están enfocando mucho a la forma que tienen los lugares, y por otro lado también  
2485 cumplen ciertas propiedades o tienen ciertas propiedades , esto es, deben tener diferentes propiedades si son diferentes  
2486 lugares geométricos. Ahora, supongamos que estamos seguros que esta figura no cierra , osea podemos ampliar el zoom  
2487 y vemos que realmente por mucho que movamos el punto C, a lo largo de la mediatriz, la curva que está ahí dibujada no  
2488 va a cerrar, eso nos dice o nos determina que entonces es una parábola ? .... ¿ el hecho de tener una curva que no cierre es  
2489 una parábola? ¿ustedes que creen?  
2490 A(varios): sí  
2491 P: ustedes dicen que sí, osea que en general si ven una forma que tiene una forma como de “u” ustedes le asignan ya  
2492 directamente que eso es una parábola ...  
2493 A(varios): no  
2494 P: ¿ o será que hay otros lugares geométricos que sin ser una parábola tengan esa característica?  
2495 A: (silencio)  
2496 P: es posible ¿verdad? entonces es bien importante tratar de no guiarse sólo en la forma que estamos viendo, porque bien  
2497 esa pudiera parecer el lugar que conocemos como parábola o como elipse, pero pudiera no cumplir con las propiedades de  
2498 ese lugar, entonces una posible ruta, lo que dice ahí para determinar qué lugar geométrico es el que ahí aparece, es lo que  
2499 más o menos ya ustedes comentaban, buscar la ecuación, nadamás que para buscar la ecuación de un lugar geométrico,  
2500 tienen que pensar en introducir algo nuevo, que es un sistema de referencia, así como está en plano, sin ningún sistema de  
2501 referencia, pues ahorita como que no sería tan fácil buscar una ecuación, pero si nosotros introducimos un sistema de  
2502 referencia, ¿cuál es el que más utilizan ustedes? ... cómo sistema de referencia, para decir, de aquí a aquí es tanta la  
2503 distancia....por ejemplo  
2504 A(varios): un plano  
2505 P: un plano cartesiano, cuando me refiero a sistema de referencia digo a partir de aquí voy a hacer mediciones, entonces o  
2506 voy a determinar posiciones de objetos, el plano cartesiano es el que más utilizamos, entonces pues vamos a apoyarnos de  
2507 eso, vamos a trasladar toda la información que tenemos de esta actividad, a un plano cartesiano, el plano nos va a ayudar a  
2508 tratar de determinar la ecuación de este lugar geométrico, entonces les voy a pedir de favor que abran una nueva ventana,  
2509 o una nueva construcción en general , y ahora sí vamos a trabajar con el plano cartesiano, salvo una cosa, cierren otra vez  
2510 la ventana algebraica por favor, esa ahorita realmente no nos ayuda para lo que queremos, entonces ahí tenemos el plano  
2511 cartesiano, y de hecho ahí tenemos una imagen de apoyo y nos da una sugerencia, entonces si van leyendo, bueno de  
2512 entrada nos dice lo que ya les comenté, de sus cursos previos de bachillerato, tal vez en geometría analítica, ustedes  
2513 recordarán que cuando se quiere determinar la ecuación de un lugar geométrico, se utiliza un sistema de referencia como  
2514 el plano cartesiano, nosotros ya lo tenemos , ahora nos sugiere que vayamos introduciéndole información allí mismo, por  
2515 ejemplo, que el punto A del segmento AB lo hagamos coincidir con el origen, y en general que ese segmento esté sobre el  
2516 eje x, entonces podemos poner por aquí el punto A, y el punto B ahí sobre el eje x, y trazamos el segmento.  
2517 P: Volvemos a repetir la construcción, pero ahora utilizando ese sistema de referencia, entonces por favor vuelven a  
2518 iniciar la construcción.  
2519 A(no identificado): ¿es la de la anterior, verdad?  
2520 P: sí la misma que en la anterior, pero ahora construyéndola tomando como referencia el plano cartesiano, y si me  
2521 permiten, si alguien no tiene otra sugerencia, siguiendo las sugerencias que ahí nos indica, entonces ya tengo el punto A y  
2522 ahora voy a colocar el punto B sobre el eje x, en general en dónde yo quiera pero en el eje x, voy a trazar el segmento  
2523 AB, de ahí partió la construcción hace rato....  
2524 P: Bueno, sugerencia, yo al menos lo voy a hacer, para no confundir o para tener bien definido el segmento sobre el eje x,  
2525 ya le aumenté el grosor o le puedo cambiar de color, algunas de las funciones que tiene el software y que ustedes le saben  
2526 allí mover ....  
2527 ( PAUSA: los estudiantes están haciendo sus trazos)

2528 P: entonces, si ustedes repiten la construcción con las mismas indicaciones, y bueno otra vez pueden generar la curva,  
2529 hacer la imagen que deja el punto P al mover C por medio del comando *activa trazo*..... y vamos a ver en qué nos podría  
2530 ayudar a lo que queremos que es determinar qué lugar geométrico es ese que deja ese rastro.....por medio del uso del  
2531 sistema de referencia. Les quiero hacer una pregunta a todo esto ¿ se pierde generalidad ?.... no sé si me explico, ésta  
2532 construcción ya no tiene las características de la construcción anterior? Porque la anterior ya de hecho aquí la tengo  
2533 todavía...sí miren, en la construcción anterior, pues el segmento no tenía que estar por ejemplo sobre el eje x, es decir  
2534 incluso está como que en otra posición, cuando yo introduzco el sistema de referencia ¿ ya es un caso particular? ¿ o sigue  
2535 siendo este caso?  
2536 A23: sigue siendo el mismo  
2537 P: ¿por qué crees que sigue siendo el mismo? ¿ o qué razón puedes dar de que a pesar de que ahora ya lo , por así decirlo,  
2538 lo forcé a que todos los elementos están relacionados con el sistema referencial, siga siendo un caso general?  
2539 A23: porque realizamos los mismos trazos, lo único que cambió fue el movimiento de la figura.....  
2540 P: exactamente, bueno esa es una forma.... miren, visto desde otra forma yo pude haber tomado un sistema de referencia,  
2541 pude haber tomado el plano cartesiano y colocarlo aquí y acomodarlo como yo quisiera, puede haber acomodado el origen  
2542 aquí y nadamás haber alineado el eje x con el segmento AB, entonces sigue siendo el mismo caso, sigue siendo un caso  
2543 general, a eso se refería mi pregunta, al hacer esto, al introducir el sistema de referencia, no estoy perdiendo generalidad,  
2544 sigue siendo el caso que desde un principio me estoy ocupando de él..... bueno ahí ya nos está diciendo en particular algo,  
2545 más debajo de la ayuda visual que ahí tienen para hacer esta construcción, nos dice que el lugar geométrico que describe  
2546 el punto P es el cruce de dos rectas, eso nos queda clarísimo, es el cruce de la perpendicular a la mediatriz AB, y es el  
2547 cruce de esa recta con la mediatriz del segmento BC , entonces yo ya tengo bien claro algo, el lugar geométrico que se está  
2548 formando, está siendo generado por el cruce de dos rectas, es algo que no hay que perder de vista, porque yo tengo  
2549 información al respecto de cómo se genera ese lugar, se genera al cruzarse esas dos rectas, y además tengo información  
2550 sobre esas rectas.....me hablaban sobre determinar la ecuación de ese lugar y con eso saber si realmente es una  
2551 parábola o una elipse o a lo mejor no es ninguna de esas dos cosas. Antes que otra cosa, ese lugar está generado por  
2552 rectas, la pregunta principal es ¿ qué datos necesitan ustedes tener o conocer para determinar la ecuación de una recta?  
2553 Ahora sí que antes de querer determinar la ecuación de ese lugar, de esa curva, pensemos cómo determinaríamos la ecuación  
2554 de esta recta por ejemplo, o de esta recta ¿qué datos requieren para poder establecer la ecuación de una recta?  
2555 A23: dos puntos...  
2556 P: ok, si ustedes saben dos puntos por los cuales pasa una recta, la recta está ya perfectamente determinada, ustedes se  
2557 acordarán, si definimos dos puntos, por esos dos puntos solamente va a pasar una recta, entonces esos dos puntos me  
2558 deben dar toda la información para obtener la ecuación, porque ya está bien definida.....otra, si no tengo dos puntos pero a  
2559 lo mejor tengo otros datos ¿ qué datos pedirían ustedes o necesitarían para determinar la ecuación de una recta? Aparte de  
2560 dos puntos, ¿ qué otra información les puede servir?  
2561 A23: un punto y la pendiente  
2562 P: la pendiente ¿ todos entendemos a que nos referimos? Tiene que ver directamente con la inclinación de la recta y si sé  
2563 la inclinación que tiene una recta y sé que pasa por un punto, igual no me puedo confundir con otra recta distinta, o sea  
2564 solamente va a haber una recta que tenga esa característica, una pendiente determinada y pasar por un punto, entonces con  
2565 esa idea, si tengo dos puntos puedo determinar la ecuación de una recta, o si tengo un punto y la pendiente de la recta,  
2566 puedo determinarlo..... y otra pregunta, la última, de hecho ahí en la hojita ¿ qué obtiene al resolver simultáneamente las  
2567 ecuaciones de dos rectas? O sea me dice, mira esta es la ecuación de una recta y esta la de otra recta, resuelve  
2568 simultáneamente las dos ecuaciones.....¿ qué es lo que se obtiene al resolver? Suponga que ya tienen ...por ejemplo  
2569 supongan que ya conocen la ecuación de esta recta y supongan que ya también conocen la ecuación de esta otra , si ya  
2570 tienen ambas ecuaciones las podrían resolver de forma simultánea, ¿qué obtendrían?  
2571 A11: la intersección  
2572 P: obtendrían la intersección, y la intersección es el punto que a mí me interesa, porque esa intersección es el punto que  
2573 genera el lugar geométrico...  
2574 A11: pero entonces esa es una familia de rectas ¿no? que se intersecan...  
2575 P: bueno, obviamente esta construcción es dinámica, porque el punto C se puede mover libremente, entonces sí tienes  
2576 razón ahí se forma una familia de rectas, ésta no es una recta única...  
2577 A11: no  
2578 P: al mover C, al cambiar C de posición, esa recta igual va siendo una recta distinta...  
2579 A11: igual que la recta ...  
2580 P: si nuevo C cambia la mediatriz, claro en eso estoy totalmente de acuerdo, si no fuera toda una familia de rectas que van  
2581 cambiando de posición, no estarían generando... ajá... entonces es una familia de rectas, pero tienen características ya  
2582 muy determinadas....vamos a tratar entonces de encontrar la ecuación de esas dos rectas, o cómo dices tú más bien una  
2583 familia de rectas que tienen algo en particular, vamos con ésta recta, ésta es una de las que me interesa, es una recta  
2584 fíjense, si el segmento AB coincide con el eje x, cuando trazo su mediatriz que tiene que ser perpendicular ¿ cómo es la  
2585 mediatriz respecto al eje de las Y?  
2586 A(varios): paralelo  
2587 P: ¿paralelo verdad? eso no nos queda ninguna duda, entonces esta recta es paralela al eje y, ¿qué otra cosa sé? Bueno  
2588 esta distancia va a ir cambiando, porque yo puedo mover el punto C a lo largo de esa recta , ¿cómo es esta? Quedamos que

2589 era perpendicular a la mediatriz, si la mediatriz es paralela al eje y, ¿la perpendicular tiene que ser cómo con respecto al eje x?

2590 A(varios): paralela

2591 P: paralela, entonces yo quiero encontrar la ecuación de una recta que es paralela al eje de las x, entonces déjenme escribir aquí algo, vamos a poner primero ecuación de la perpendicular por C, y yo sé que esa es paralela al eje de las x, ¿si se acuerdan cómo determinar o cómo escribir la ecuación de una recta cuando tiene esa característica? ¿de entrada cuánto vale su pendiente? Porque hace rato hablaron de pendientes ¿cuánto vale la pendiente del eje x?

2592 A(varios): cero

2593 P: entonces de una recta paralela al eje x también es cero, la pendiente es cero ¿qué otro dato me quedaría por saber simplemente para escribir ya la ecuación?

2594 A: mmmmm...

2595 P: hace rato decían un punto, si tengo la pendiente y sé que es cero, ahora necesitaría yo conocer un punto.... Esa recta siempre pasa por un punto que va a estar sobre el eje y, entonces la coordenada en x de un punto sobre el eje y ¿cuánto vale?

2596 A11: cero

2597 P: cero, entonces ya sé que la coordenada en x es cero, solo que el único dato que realmente tengo sobre esta recta es la coordenada en y de este punto, y es un punto que en general se está moviendo sobre el eje de las y, entonces no sé si les parezca, le voy a decir, le voy a llamar a ese punto así (0,t), t no es un valor fijo, t es un parámetro que está cambiando ¿les parece? Entonces siempre este cruce de la perpendicular con el eje y va a ser el punto (0,t), t va cambiando que quede claro, entonces la pendiente vale cero, ¿si se acuerdan de la forma de la ecuación de una recta?

2600 A11: ajá

2601 P: a ver dictémela...

2602 A(varios): "y igual a mx + b"

2603 P: ok, sé que la pendiente es cero, entonces sé que en la ecuación no va a ir b y b....

2604 A11: es "t"

2605 P:... es t, exactamente, entonces esa ecuación fue bien fácil (y=t), la ecuación de esta recta es y=t, ahora la que me hace falta es la ecuación de ésta, que es una mediatriz, entonces ahí si tengo un poco más de problemas, porque de entrada, bueno, sé que pasa por el punto ...

2606 A11: por el origen

2607 A( no identificado): cero, cero

2608 P: ¿siempre pasa por el punto ...?

2609 A(varios): ahhh....no

2610 P: no, entonces no, ¿qué información es la que tengo realmente? De la mediatriz no sé mucho,

2611 A( no identificada): que siempre se interseca con la recta...

2612 P: se interseca con la recta...sí...ya tengo la ecuación de esa ¿qué les parece si a este punto le ponemos coordenadas, y esto es algo ya fijo, porque el punto B no está cambiando, le podemos poner coordenadas (b,0) si ustedes quieren, este....lo voy a escribir aquí para que no se nos olvide.... Dónde está la herramienta de texto...ahorita que la encuentre...texto aquí está.... Entonces a ese punto quedamos de ponerle coordenadas (b,0) y esto ya está fijo, entonces fíjense que por ejemplo de este segmento, del segmento BC conozco las coordenadas de este extremo, que es (b,0), mi pregunta es si podría yo expresar las coordenadas de este otro punto.

2613 A(varios): sí

2614 P: si esto vale b, ¿cuánto vale esto? Porque me dijeron que la mediatriz pasa por el punto medio ...

2615 A(varios): ¿b medios?

2616 P: entonces este punto como nomás se está moviendo así, debe tener coordenada en x b/2, y su coordenada en y cuánto es? T, entonces le ponemos igual coordenadas a ese punto, el punto C tiene coordenadas (b/2,t) ...

2617 P: entonces ¿si está claro para todos? Este punto es fijo y tiene coordenadas (b,0), y b es un valor determinado, este punto de acá su coordenada en x no va a cambiar, siempre va a ser la mitad de la longitud del segmento AB y lo que va cambiando es su coordenada en y, pero es la misma que lo que ya habíamos determinado, va a ser t siempre y t va cambiando, me dijeron que si tenía dos puntos, puedo encontrar la ecuación de una recta, con dos puntos puedo encontrar también la pendiente de una recta? O eso no lo puedo hacer con dos puntos?

2618 A(varios): sí

2619 P: sí verdad, de hecho con dos puntos determino la pendiente, tengo que poder, entonces ¿podría yo determinar la pendiente de esta recta? ¿La del segmento BC?

2620 A(varios): sí

2621 P: ¿me podría decir alguien, ya con los datos que identificamos ¿cuál sería la pendiente de BC? BC es la recta que pasa por aquí, sería la ecuación de este segmento visto como recta igual...¿si se acuerdan muchachos? Si no se acuerdan de algo me dicen...

2622 A23: es "t-0" sobre t menos....

2623 P: ok, es "t-0" ....

2624 A23: sobre t medios menos b... sí

2625 P: ¿están de acuerdo todos muchachos? La resta de las coordenadas en y, sobre la resta de las coordenadas en x. "t menos cero, sobre b/2 - b".... esto se puede escribir mejor porque ¿cuánto es t menos cero y cuánto es b/2 menos b?

2626

2627

2628

2629

2630

2631

2632

2633

2634

2635

2636

2637

2638

2639

2640

2641

2642

2643

2644

2645

2646

2647

2648

2649

2650

**2651** A19: menos  $b/2$   
**2652** P: mande?  
**2653** P: “t y menos  $b/2$ ” ¿y eso lo dejo así o lo puedo escribir de una forma más?  
**2654** A19: más.....de otra forma  
**2655** P:¿ cómo quedaría?  
**2656** A(varios): menos dos t sobre b  
**2657** P: muy bien, están todos de acuerdo conmigo que la pendiente, aunque va cambiando el valor de t, la pendiente de esta  
**2658** recta siempre se encuentra así... la pendiente va a ser menos dos t sobre b .....¿ sí? .....a ver chéqueme ahí los  
**2659** cálculos.....usé las coordenadas de este punto y de este ¿ si seguros? .....bueno.....yo quiero en sí la ecuación de  
**2660** esta recta, porque la que allá con el cruce genera al punto P..... ¿ cómo es esta recta respecto a esta?  
**2661** A23: perpendicular  
**2662** P: ¿ y qué saben de las rectas que son perpendiculares respecto con sus pendientes?  
**2663** A(varios):..... ( murmullos)... que son recíprocos de signos opuestos  
**2664** P: entonces.... Si ya tengo la pendiente de BC , ya puedo tener, déjenme ponerle así, ya tengo la pendiente de la mediatriz,  
**2665** entonces ¿si alcanzan a ver más o menos lo que estoy escribiendo?  
**2666** A: sí  
**2667** P: ¿me pueden dictar ahora la pendiente de la mediatriz? de la mediatriz ABC que es la recta que me interesa ya tienen la  
**2668** pendiente BC y quiero la pendiente de una recta perpendicular, dictémmela, miren aquí ya tienen ustedes algo, me dijeron  
**2669** que tenía que ser como la pendiente de una recta, recíproca...  
**2670** A( no identificada): y de signo contrario  
**2671** P: entonces el recíproco y de signo contrario de este número ¿cuál es?  
**2672** A(varios): b sobre.....  
**2673** P: perfecto, entonces voy de gane porque ya tenemos la pendiente de esta recta, me dijeron con la pendiente de la recta y  
**2674** un punto, puedo hallar la ecuación, la cuestión es bueno, sé que pasa por el punto C , que del punto C de hecho lo que  
**2675** ando buscando son las coordenadas, ese no me ayuda, pero también sé que pasa por aquí, ¿ y este qué quedamos que es,  
**2676** este es el punto medio del segmento BC y qué creen, conocen los extremos de BC, entonces con las coordenadas de los  
**2677** extremos pueden decirme las coordenadas del punto medio ¿sí? O no se puede....  
**2678** A: (varios) sí  
**2679** P: entonces déjenme marcar, ahora ese punto medio va a ser muy importante, déjenme marcarlo, y le voy a poner un  
**2680** nombre, ahora mismo le voy a poner el punto M por ejemplo, y quisiera que alguien me haga favor de dictar las  
**2681** coordenadas del punto medio M, o que me diga al menos cómo encuentro las coordenadas del punto M.....  
**2682** P: sé que el punto M es el punto medio del segmento BC, y tengo las coordenadas de B y de C  
**2683** A: (murmillos)  
**2684** P: a ver chicos, tú tienes en general un segmento que has colocado en un plano de referencia como es el plano cartesiano,  
**2685** saben las coordenadas de un extremo, saben las coordenadas del otro, pero tú quieres las coordenadas del punto medio...  
**2686** A: sería la suma de las coordenadas de x entre dos, y la suma de las coordenadas de y...  
**2687** P: ¿si verdad? ... perfecto entonces ustedes pueden sumar la coordenada en x de B con la coordenada en x de C, y sacar el  
**2688** promedio, esa es la coordenada en x del punto medio, y pueden también hacer lo mismo para las de y, y ya darne las  
**2689** coordenadas del punto medio M, entonces eso es lo que quiero, que me dicten ahora por favor...  
**2690** A11: son .... ¿ las coordenadas?  
**2691** P: sí , del punto M  
**2692** A11: creo que x es 2 sobre 3b?  
**2693** P: dos.... ¿así?.... o el b acá..... bueno lo escribo  
**2694** A11: mmmjj..... a ver ...espere  
**2695** A: tres cuartos de b ¿no?  
**2696** P: se supone que ese resultado es la suma de b más  $b/2$  sobre dos  
**2697** A19: ajá, sí son tres medios entre dos son tres cuartos.  
**2698** P: es  $2/2 + 1/2$ , que es  $3/2$ ..... exactamente ... $3/4$  ¿ verdad? y la b ya pasó abajo, por alguna razón la b pasó abajo...  
**2699** entonces son  $3/4$  de b .....esa es la coordenada en x, y la de y estaba más fácil ¿no?.....¿cuánto?  $t/2$  verdad..... t  
**2700** más cero, entre dos  
**2701** P: muy bien chicos, tienen la pendiente de la recta, y ya tienen un punto por donde pasa, escriban ahora la ecuación, la  
**2702** ecuación de la recta que, no le pusimos algún nombre en particular, sabemos que es la mediatriz BC ..... ¿ si saben ,  
**2703** bueno me dijeron que saben que si tienen la pendiente y un punto, pueden hallar la ecuación o escribirla? ¿ pero si se  
**2704** acuerdan cómo? Tiene algo que ver muy directamente con esto, osea ahí igual ya una forma de escribir, dice si tengo un  
**2705** punto y la pendiente, aquí sustituyo ¿ se acuerdan?  
**2706** A11: una pregunta  
**2707** P: tus datos son las coordenadas de un punto y la pendiente, entonces eso es lo que tienes que sustituir, a ver  
**2708** A11: es que ya no me acuerdo bien..... a igual a.....  
**2709** P: igual a cuánto  
**2710** A11:  $y-y_1 = m ( x- x_1)$

2711 P: si esto lo paso para acá, pues es la pendiente, entonces tiene que estar bien ¿verdad? entonces si sustituyen en esto  
2712 encuentran la ecuación de la recta que estoy pidiendo, obviamente  $x_1$  y  $y_1$  son las coordenadas del punto que se conocen,  
2713 y  $m$  es la pendiente, entonces como conocen todo, me dictan por favor cómo les queda al sustituir...  
2714 A(varios): ( murmullos)  
2715 A19: sería t igual a ....  
2716 P:¿ me vas a dictar?  
2717 A19: t igual a y menos t/2 Perdón  
2718 P. sí si no importa, la sustitución no es válida  
2719 A19: es igual a m  
2720 P: m pero ya tenemos el valor ... es igual a  $b/2t$ ...  
2721 A19: por x menos  $3b/4$ ...  
2722 P: ¿  $3b/4$ ? entonces esta es la ecuación de la otra recta, y la intersección de esta recta con esta otra recta, dan origen al  
2723 punto P , que es el punto que estamos interesados en conocer cuál lugar geométrico describe...entonces lo que dijimos, el  
2724 sistema de ecuaciones para determinar P es éste, y igual a t , y y menos t/2 igual a todo lo demás .... Resuévanlo... ¿  
2725 creen poder resolverlo? ¿ sería muy difícil?..... pues no creo que sea tan difícil porque pues y vale t, entonces pues ya  
2726 nadamás sustituyen donde hay t's y a ver que queda.....a ver trabajen, trabajen en la solución de ese sistema  
2727 A: (murmillos.....estudiantes trabajando)  
2728 A17: ¿ ye cuadrada dices? ¿ por qué? Pero a la hora de sustituir tienes....  
2729 P: cuando sustituyo a ver de hecho ya hice ese paso, sustituí uno en dos, ésta es la ecuación uno y esta es la dos, la pura  
2730 sustitución qué da ..... así.... No sé si estén de acuerdo, ahora puedo seguir haciendo cuentas y si sé cuanto es ye menos  
2731  $y/2$  , ye sobre dos, del otro lado creo que ahorita no conviene hacer mucho a este respecto..... y fíjense que del lado  
2732 derecho de la ecuación ahí dado que todo está dividido por dos, podemos multiplicar todo por ye ya quitamos esto y  
2733 también esto, y ya si multiplico todo por 2 ¿ cómo queda ahora? Queda ye es igual a..... pero perdón queda ye  
2734 al cuadrado ..... ¿ les recuerda esto algo que ya conocían antes? ¿ esa ecuación?  
2735 A( no identificado): sí  
2736 P: ye al cuadrado igual a un número, que b es un número que por supuesto vamos a conocer en algún momento, por x  
2737 menos tres cuartos de b , que es otro número, en general esta ecuación, ahora si me lo permiten, no sé si estén de acuerdo  
2738 en que ye al cuadrado puedo escribirlo así, sigue siendo ye al cuadrado .... Es decir que en general esta ecuación tiene una  
2739 forma más o menos de este tipo “ye menos algo elevado al cuadrado, es igual a otro número que me place ahorita  
2740 llamarlo así, a ver si se acuerdan por qué, multiplicado por equis por otro número”..... esa ecuación , el  
2741 modelo de esa ecuación ¿ les recuerda algo? Tengo ye cuadrada igual ab por equis menos  $\frac{3}{4}$  de b al cuadrado, que en  
2742 general lo puedo escribir igual así...  
2743 A: (inaudible)  
2744 P: ¿mande? Hace rato cuando ustedes me hablaban de las ecuaciones de los lugares geométricos, por ejemplo una recta es  
2745 un lugar geométrico, y ustedes cuando recordaron esto, lo que me están diciendo es que los lugares geométricos que son  
2746 rectas, en general tienen este tipo de ecuación, los lugares geométricos que son parábolas, ¿qué tipo de ecuación deben  
2747 tener? O los que son elipses....  
2748 P: a ver, si recuerdan algo... los escucho, si, si una recta puede verse como la ecuación ye igual a  $mx + b$ , una parábola ¿  
2749 de qué forma esperan ver su ecuación?  
2750 A: (inaudible)  
2751 P: a ver fuerte, por favor , si alguien tiene una idea ....a ver escuchemos  
2752 A19: pues nosotros esperaríamos encontrar que la ecuación de una parábola es cuadrática...  
2753 P: bueno, eso es un buen comienzo, y esta es cuadrática, la que nos dio , ahora, todas las ecuaciones..... bueno en general  
2754 si me dices una cuadrática ¿ qué forma tienen las cuadráticas?  
2755 A19: parabólicas  
2756 P: díctame la forma general de una ecuación cuadrática...  
2757 A19: ahhhh la del binomio, sería  $ax^2 + by + c = 0$   
2758 P. ésta es una ecuación cuadrática, y me dicen que saben que esto es la representación de una parábola, o es la ecuación de  
2759 una parábola ¿ de qué tipo de parábola? Me refiero a la orientación, que respecto al eje x abre para arriba o para abajo...  
2760 A(varios): para arriba  
2761 P. y si la parábola en vez de , perdón, abriera con respecto al eje y, para arriba o para abajo ¿ y si abre a la derecha o a la  
2762 izquierda? ¿seguiría siendo igual?  
2763 A(varios): no  
2764 P: ¿ qué cambios ?  
2765 A(varios): ahora ye es cuadrada  
2766 P: ye es cuadrada, y x también es cuadrada? No ¿verdad?  
2767 A(varios): no  
2768 P: entonces se dan cuenta que justo obtuve algo que tiene que ver con la ecuación de una cuadrática?  
2769 A(varios): sí  
2770 P: nadamás que ahora la que está al cuadrado es ye, porque si realmente eso es una parábola, no está abriendo para arriba  
2771 o para abajo, está abriendo hacia la derecha.....eh..... yo esperaba, pero parece ser que no se acuerdan mucho, esperaba  
2772 que de algún curso de geometría analítica que hubieran llevado tal vez en bachillerato, recordaran que cuando estudian

2773 por ahí las cónicas, y estudian la parábola, les dan este formato, bueno si no se acuerdan déjenme comentarles algo, si una  
2774 ecuación, bueno si una parábola tiene una ecuación de este estilo, ya sea acomodada en este estilo, es muy fácil ver cierta  
2775 información ¿qué elementos tiene una parábola, se acuerdan? Generalmente un problema en geometría analítica del  
2776 bachillerato es, mira aquí está la ecuación de un lugar geométrico y encuentra sus elementos, encuentras elementos  
2777 importantes de la parábola ¿alguien recuerda algún elemento o nombre de los elementos..... por ejemplo, una  
2778 circunferencia ¿ qué elemento importante tienes?  
2779 A(no identificado): el radio  
2780 P: el radio  $\zeta$  y otro elemento importante?  
2781 A(no identificado): El centro  
2782 P: el centro , entonces tú sabes dónde está el centro y cuál es la longitud del radio y defines la parábola, perdón, la  
2783 circunferencia..... En una parábola ¿qué elementos conoces o debes...?  
2784 A23:  $\zeta$  el foco?  
2785 P: foco exactamente,  $\zeta$  y qué otro?  
2786 A(varios): tiene lado recto  
2787 P: tiene algo que se llama lado recto.... lado recto , foco y vértices es lo que generalmente les piden , y también la  
2788 ecuación de la directriz  $\zeta$  ya se acordaron? Bueno, directamente cuando ustedes tienen la ecuación en este formato, éste  
2789 formato les da información sobre el vértice, el vértice tiene coordenadas (h,k) y el lado recto que es una distancia que es  
2790 este dato, lado recto es  $4p$ , luego también sabemos algo que tiene que ver con una distancia, si conozco el vértice y  
2791 conozco el lado recto, puedo ubicar el foco, a partir de medir cierta distancia, hay algo que le llaman distancia focal  $\zeta$  se  
2792 acuerdan cuál es esa? Bueno la distancia focal es la cuarta parte del lado recto, y la distancia focal se refiere a la distancia  
2793 que hay del vértice al foco, entonces “p” es la distancia focal, entonces fíjense que con esos elementos  $\zeta$  dónde estaría el  
2794 vértice de la parábola que ahí construimos? El vértice de esta parábola estaría en  $(3/4b,0)$  ¿dónde ubican ustedes el punto  
2795  $(3/4b, 0)$  a partir de que todo esto es  $b$ ?..... entonces más o menos tiene sentido pensar que este es el vértice de la  
2796 parábola, luego, si la distancia focal es la cuarta parte de esto, la cuarta parte de  $b$ , si me muevo  $1/4$  de  $b$  después del  
2797 vértice, debería llegar al foco, entonces sí estoy aquí en  $3/4$  de  $b$  y me muevo pues llego  $b$ , pues llego a  $b$ , entonces el  
2798 candidato a ser foco es el punto B, y el candidato a vértice es este punto por el que pasa el lugar geométrico, y la directriz  
2799 tendría que ser de P hacia la izquierda, es decir que esta recta tendría que ser la directriz de la parábola, sin embargo aquí  
2800 una cosa que estamos haciendo es yéndonos por el lado de la ecuación, por decir yo sé que un lugar geométrico como la  
2801 parábola tiene una ecuación así, o sé que un lugar geométrico como la recta tiene una ecuación así, pero yo les decía desde  
2802 hace rato, que los lugares geométricos también se estudian a partir de sus propiedades..... por ejemplo.... ¿cuál es la  
2803 propiedad más importante de una circunferencia? Sus elementos me dijeron son el radio y el centro ...¿cuál es una de sus  
2804 propiedades más característica, la que prácticamente la define?  
2805 A(varios): el radio  
2806 P:  $\zeta$  y qué podemos decir del radio? Cualquier punto de ese lugar geométrico guarda la misma distancia hacia el centro....  
2807 y ese es el radio.  $\zeta$  recuerdan la propiedad que define a la parábola? ....respecto a ese concepto de distancias..... ¿no?  
2808 ....bueno les recuerdo algo, que la parábola es el lugar geométrico que está formado por todos los puntos que están a la  
2809 misma distancia de un punto fijo que es al que se le llama foco , y de una recta fija a la que se le llama directriz, en otras  
2810 palabras, todos los puntos que dejan esta huella, si yo mido la distancia de ese punto al que ahora reconozco como foco,  
2811 por ejemplo particularmente aquí dónde quedó el cruce, de aquí al foco y de ahí a la directriz la distancia tiene que ser la  
2812 misma , y la pregunta es ¿y si se cumple?, es más voy a trazar este otro segmento, ahí está, mi pregunta es  $\zeta$  esta distancia  
2813 y esta otra son iguales?  
2814 A(no identificado): sí  
2815 P:  $\zeta$  por qué?  $\zeta$  qué tipo de triángulo es éste? Ahí marcamos un triángulo  
2816 A(no identificado): equilátero  
2817 P: eh..... me tienen que dar la razón de por qué es equilátero  
2818 A(varios): (murmullos)  
2819 P: fíjense que ese triángulo, ese vértice está sobre una recta que sé que es la mediatriz de este segmento,  
2820 A11: la otra también es una mediatriz..  
2821 P: sí, la otra también es una mediatriz, también estoy de acuerdo. Particularmente si yo tomo la distancia de aquí al  
2822 extremo de ese segmento, y de aquí al otro extremo, tiene que ser la misma distancia ¿verdad? por propiedades de la  
2823 mediatriz, entonces no importa dónde ande el punto P, voy a mover el punto C a otro lugar, no importa dónde ande este  
2824 punto, que es el que genera el lugar geométrico, si mido la distancia a este punto que ahora sé que es el foco, y mido la  
2825 distancia a la que ahora sé que es la recta mediatriz, siempre son iguales, y este triángulo yo sé que es isósceles, a veces a  
2826 lo mejor suele ser equilátero, entonces no queda duda que este lugar geométrico es una parábola, porque cumple con la  
2827 condición de que está formado por todos los puntos que están a la misma distancia del foco y de la directriz, y además  
2828 porque al determinar la ecuación de ese lugar geométrico, resolviendo el sistema de las dos rectas que lo originan, llegué a  
2829 ésta forma, que sé que igual corresponde a la ecuación de una parábola, ok pues con esto concluiría la actividad, ese era el  
2830 objetivo principal, determinar qué clase de lugar geométrico era ésa, ahora ya sabemos que es una cónica, estamos seguros  
2831 que es una parábola, no porque parezca, no por la forma, sino por las propiedades y por haber determinado la ecuación, y  
2832 si se acuerdan, ya para terminar, la actividad empezó en general así, osea allí no había un sistema de referencia, no había  
2833 un plano cartesiano, entonces ahora ustedes tienen, es importante que recuerden eso, los lugares geométricos ya están  
2834 dados por definición, no por ecuaciones, el lugar geométrico, aquí ésta parábola, si cae un plano cartesiano, sigue

2835 satisfaciendo la condición de que de éste punto, el cruce de aquí a acá y de acá a acá, la distancia es la misma, por eso es  
2836 parábola, sin embargo, cuando ustedes introducen ese sistema cartesiano, les ayuda a determinar algunas otras cosas,  
2837 como ecuaciones de manera más fácil..... bueno eso sería todo de nuestra parte, les agradecemos mucho su atención, y  
2838 espero que les haya agradado resolver esta actividad....gracias.  
2839 A: gracias  
2840 (el profesor se acerca a un estudiante que solicita consultarle)  
2841 P:...yo no creo que tuviera que ir creciendo esa distancia....  
2842 A10: bueno porque al final obtuve esta distancia en términos de ...de...mire esta es la misma figura, este es B , mire  
2843 obtuve la distancia....  
2844  
2845 FIN DE LA GRABACIÓN  
2846  
2847