

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo  
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería  
Área Académica de Matemáticas y Física

---

# **Clasificación de solenoides**

Tesis que para obtener el título de

**Licenciado en Matemáticas Aplicadas**

presenta

**Leasly Alejandra Campa Raymundo**

bajo la dirección de

**Benjamín Alfonso Itzá Ortiz**

---

## Resumen

---

En esta tesis definiremos lo que es un solenoide y demostraremos el teorema que los clasifica por sus clases de homeomorfismos. También se enuncia y demuestra un teorema que caracteriza a los solenoides como la suspensión de ciertos homeomorfismos de conjuntos de Cantor.

### **Abstract**

In this thesis we define solenoids and prove the theorem which classifies them by their homeomorphism classes. We also state and prove a theorem which characterizes solenoids as suspensions of certain homeomorphisms of Cantor sets.

*“A Edith y Emerson que me cuidan desde el cielo.”*

---

## Agradecimientos

---

A Gustavo y Minerva, mis papás; por el apoyo y esfuerzo, por todos los retos, por su amor demostrado de muchas formas. A Gustavo, mi hermano, mi bebé; pues aún en el silencio el está siempre conmigo. Gracias por darme la vida que ahora tengo, porque sin ustedes tres no sería lo que ahora soy, los amo con todo mi corazón.

A Papáfen y Adelita, mis abuelitos; por su infinito amor, porque siempre estoy en sus oraciones y me reciben con mucho amor y mucha comida.

Al doc. Itzá, mi gran asesor; porque pese a todo siempre me recibió con una sonrisa, confió en mi para realizar esta tesis y me apoyo mucho en muchas cosas, me tuvo paciencia, le estaré eternamente agradecida.

A Cery, mi charolastra, mi mejor amiga, mi hermana menor; por confiar siempre en mi y cuando mi mundo se viene abajo siempre está para ayudarme a levantarlo, (eso incluye los regaños).

A Omar, mi músico, chef, piloto mejor amigo; por ser así tal cual es, no hay palabras para describir lo genial que es.

A Josué; por picar de patTicoO, por el apoyo, la inspiración, la motivación, los regaños, las peleas, las risas, los golpes, las borracheras, por ser como es conmigo y por hacer que yo sea mejor persona, por todos los sueños. Por esos momentos.

A Manu, mi amigo inseparable durante toda la carrera; por los consejos y los abrazos cuando fueron necesarios, por ser mi tontote y siempre ser superinteligentísimo. ¡Gracias Manu! me ayudaste a dar pasos firmes.

A Karla, la mejor física que pude conocer; porque un letrero me dio una amiga, compañera, cómplice, consejera, una hermana.

A Fara, mi sisterna; una EMALCA fue suficiente para ser grandes amigas y hermanas, porque con sus locuras hizo que pudiera inspirarme cada día mas.

A Miguel, diseñador filosófico, el mejor; por llenar mis sentidos con sus diseños y de quien aprendí mucho en solo unos meses, porque se acuerda de mi aún estando lejos.

A Fede, el mejor tutor del mundo; por todo el apoyo en los momentos mas difíciles de estos últimos 6 años, por todo el apoyo que de muchas maneras me brindo, ¡¡gracias amigo!! Eres un gran ser humano y una gran inspiración para mi.

A Rubén; por ser simplemente como es; ¡mi ídolo!

A mis profesores por todo lo que me enseñaron, a mis amigos pasados y presentes, a mis compañeros, por estar en mi camino.

“Tu risa siempre será uno de mis motores para seguir”.

---

## Índice general

---

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>IV</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>V</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. El solenoide como intersección de toros . . . . .	3
1.2. Construcción del conjunto de Cantor . . . . .	6
1.3. Propiedades del conjunto de Cantor . . . . .	11
1.4. Los puntos en el conjunto de Cantor . . . . .	16
1.5. El solenoide como suspensión . . . . .	19
1.6. Homeomorfismo de pegado . . . . .	27
<b>2. Clasificación de solenoides</b>	<b>31</b>
2.1. Máquinas ádicas . . . . .	31
2.2. Teorema de clasificación de solenoides . . . . .	33
<b>3. El solenoide como límite inverso</b>	<b>37</b>
3.1. Límites inversos . . . . .	37
3.2. Solenoides y homeomorfismos en el conjunto de Cantor . . . . .	40
<b>Conclusiones</b>	<b>49</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>



---

## Introducción

---

Nuestro interés por los solenoides surge de los sorprendentes resultados que se obtienen del estudio del conjunto de Cantor. Uno de los primeros trabajos que nos llamó la atención sobre el conjunto de Cantor fue el de Macho Standler [16], el cual incluye la demostración de que cualesquiera conjuntos de Cantor son homeomorfos. Por lo tanto, topológicamente, existe un sólo conjunto de Cantor  $C$ , aunque en realidad existan muchas maneras de definirlo. En topología, una forma de analizar a un espacio, es considerando a los homeomorfismos del espacio en si mismo, pues de esta manera se vislumbra la dinámica en el espacio. Un solenoide será definido como cierto espacio topológico derivado de un homeomorfismo de un conjunto de Cantor. Uno esperaría que entonces todos los solenoides sean homeomorfos entre si. Sin embargo, uno de los resultados que probaremos en esta tesis, sorprendentemente dice que existe un número infinito de clases de homeomorfismos de solenoides.

El estudio de los solenoides ha cobrado gran importancia en las ultimas décadas por su aparición en diversas ramas de las matemáticas, tales como sistemas dinámicos [4], álgebra de operadores [6], entre otras.

El concepto de solenoide fue introducido independientemente por L. Vietoris [26] en 1927 y por D. van Dantzig [24] en 1930, quienes lo definieron como intersección aninada de toros, la cual es muy interesante tratar de imaginar.. Sin embargo surge la necesidad de dar una definición más formal aunque menos intuitiva. De este modo H. Freudenthal estudió a los solenoides como límites inversos de circunferencias [9] y A. van Heemert y A.D. Wallace estudiaron a los solenoides como grupos topológicos [25] [27]. En esta tesis mostramos tres formas de construir el solenoide: la construcción geométrica, la construcción en la que utilizamos el concepto de suspensión de un sistema dinámico y la construcción del solenoide mediante límites inversos de una sucesión de toros unidimensionales. Haremos un esfuerzo en probar que esas tres construcciones son equivalentes ya que mientras la primer forma nos crea una idea geométrica será con la segunda que demostraremos el teorema de clasificación de solenoides y la tercera nos ayudará a caracterizar cuando una suspensión es un solenoide.

En la literatura hay varias demostraciones del teorema de clasificación de solenoides, la primera de ellas fue hecha por M. C. McCord en 1965 [18], sin embargo en esta tesis nos basamos en la demostración que dieron Arts y Fokkink en 1991 [1], y que también aparece en la tesis doctoral de Fokkink [7]. Daremos los detalles de dicha demostración, la cual ocupa herramientas tanto de sistemas dinámicos como de topología y análisis. Este teorema establece las condiciones necesarias y suficientes para que dos solenoides sean homeomorfos. Sabiendo que un solenoide es una suspensión de un sistema de Cantor nos preguntamos si cualquier suspensión de un homeomorfismo de un sistema de Cantor es un solenoide. Desde un principio sabíamos que la respuesta es negativa pues teníamos un ejemplo que lo muestra (Ejemplo 3.7). Después de algún tiempo en tratar de hacer la demostración descubrimos que ya estaba en la literatura [11], resultado que también incluimos en esta tesis.

Finalmente resulta indispensable discutir, dado que un solenoide es un grupo topológico, cuál deba ser la clasificación algebraica de los solenoides. Entre las sorpresas que nos dio este trabajo fue el encontrar que la clasificación algebraica de los solenoides es equivalente a la topológica, es decir, *dos solenoides son homeomorfos si y sólo si son isomorfos como grupos topológicos* ([7], capítulo 0, sección 3; p.11). Este último bello resultado no lo incluimos en la tesis.

Dividimos esta tesis en cuatro capítulos. En el primer capítulo definimos que es un solenoide de dos maneras equivalentes, enunciarnos algunas propiedades del conjunto de Cantor que nos parecieron las mas bellas y útiles para los fines del trabajo e introducimos varias nociones necesarias para el resto de la tesis. En el capítulo dos enunciarnos y demostramos el teorema de clasificación de solenoides utilizando el concepto de suspensión de un sistema de Cantor mientras que en el capítulo tres discutimos el teorema que caracteriza a los solenoides como suspensiones de sistemas de Cantor utilizando el concepto de límites inversos que introducimos en ese mismo capítulo. En el cuarto y último capítulo daremos nuestras conclusiones.

# CAPÍTULO *1*

---

## Preliminares

---

En este capítulo vamos a definir el solenoide como la intersección de una sucesión anidada de toros, introduciremos el concepto de suspensión y con ello la construcción del solenoide como suspensión; ejemplificaremos todo lo anterior mostrando la construcción del solenoide diádico. Además vamos a mostrar la construcción del conjunto de Cantor, enunciaremos y demostraremos algunas propiedades.

A pesar de que hay otras definiciones equivalentes de solenoides, vamos a mostrar primero la construcción geométrica ya que para nosotros es la más sencilla y nos facilitará entender los conceptos para las siguientes construcciones menos intuitivas.

## 1.1

### El solenoide como intersección de toros

En esta sección mostraremos la construcción geométrica del solenoide y construiremos el solenoide diádico como un ejemplo siguiendo los pasos de la construcción.

Sea  $P = \{p_1, p_2, \dots\}$  una sucesión de enteros positivos mayores que 1. El *solenoide  $P$ -ádico*  $S_P$  puede ser definido como la intersección de una sucesión de toros sólidos en  $\mathbb{R}^3$ ,  $T_1, T_2, \dots$ ,

tales que el toro  $T_{i+1}$  da  $p_i$  vueltas dentro del toro sólido  $T_i$  de manera lisa y sin pliegues, es decir, las vueltas que realiza el toro sólido  $T_{i+1}$  no deben tener dobleces, picos o torceduras. Se define el solenoide  $P$ -ádico como

$$S_P = \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i,$$

asociado a la sucesión  $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ , donde los  $p_i, i = 1, 2, \dots$  son enteros positivos mayores que 1.

A continuación vamos a construir el solenoide diádico, es decir, el solenoide  $P$ -ádico con  $P = \{2, 2, \dots\}$ , un ejemplo clásico al hablar de solenoides y que nos será de mucha utilidad para entender los teoremas 2.11 y 3.6, así como también algunos conceptos importantes.

**1.1 Ejemplo.** Sea  $P = \{2, 2, 2, \dots\}$ . Imaginemos el toro sólido  $T_1$  en  $\mathbb{R}^3$  (figura 1.1).

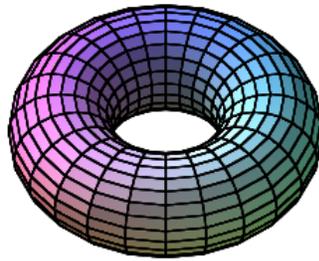


Figura 1.1: Toro  $T_1$

Ahora consideremos un toro sólido  $T_2$  que dé dos vueltas ( $p_1 = 2$ ), de manera lisa y sin pliegues; como en la figura 1.2.



Figura 1.2: Toro  $T_2$

Vamos a introducir el toro  $T_2$  por el interior del toro  $T_1$ , así  $T_2$  estará contenido en  $T_1$ , de esta manera el toro  $T_2$  dará dos vueltas por el interior del toro  $T_1$  como se muestra en la figura 1.3.

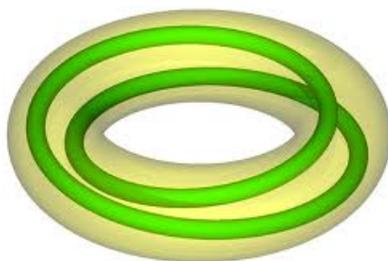


Figura 1.3:  $T_2 \subset T_1$

De la misma manera consideramos el toro  $T_3$  que dé dos vueltas ( $p_2 = 2$ ), dentro de  $T_2$ , por lo que resulta que  $T_3$  da cuatro vueltas por el interior de  $T_1$  (ver figuras 1.4 y 1.5).



Figura 1.4: Toro  $T_3$

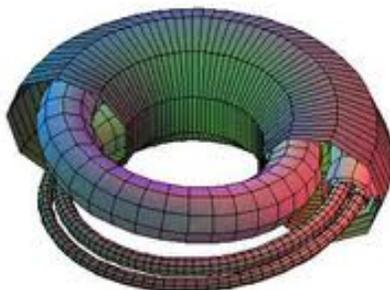


Figura 1.5:  $T_3 \subset T_2 \subset T_1$

Esta construcción la vamos a repetir indefinidamente, de manera general, ya que construimos el toro  $T_i$ , construimos un toro  $T_{i+1}$  que dé dos vueltas ( $p_{i+1} = 2$ ) dentro de  $T_i$ , con esto obtenemos una sucesión de toros anidados que dan dos vueltas cada uno en el interior del anterior.

Un bosquejo de dicho solenoide se muestra en la figura 1.6.

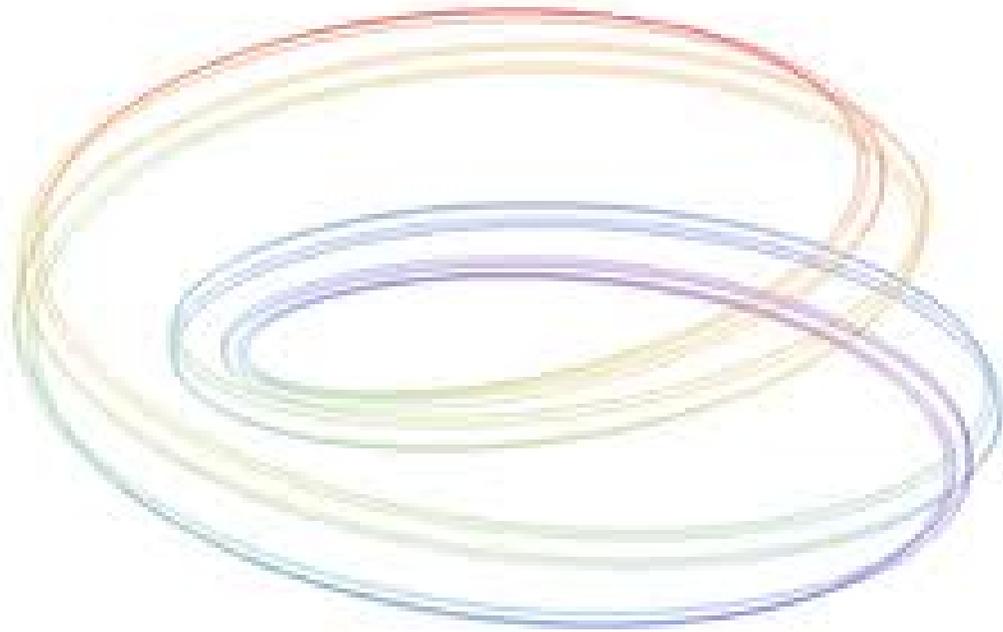


Figura 1.6: Solenoide diádico

## 1.2

### Construcción del conjunto de Cantor

Debido a que la representación del solenoide lo requiere vamos a discutir la construcción del conjunto de Cantor y algunas de sus propiedades, en la sección 1.5 veremos qué tan fuerte es la relación entre el conjunto de Cantor y el solenoide.

El conjunto de Cantor fue construido por primera vez a finales del siglo XIX por George Cantor con el fin de demostrar si existía o no un subconjunto compacto no vacío de  $\mathbb{R}$  que fuera totalmente desconexo y denso en si mismo. En el siglo XX se demostró que todos los conjuntos

con estas características son topológicamente equivalentes (homeomorfos).

Veamos cómo es la construcción del conjunto de Cantor; sean

$$F_0 = \{1\} \quad \text{y} \\ F_j = \{3s - 2 : s \in F_{j-1}\} \cup \{3s : s \in F_{j-1}\}$$

De esta manera vemos que

$$F_1 = \{1, 3\}, F_2 = \{1, 3, 7, 9\}, F_3 = \{1, 3, 7, 9, 19, 21, 25, 27\}, \text{ etcétera,}$$

es claro que cada  $F_n$  tiene  $2^n$  elementos,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Para cada  $n$  definimos los conjuntos  $K_n$  como la unión de  $2^n$  intervalos cerrados de la forma

$$I_{r_j}^n = \left[ \frac{r_j - 1}{3^n}, \frac{r_j}{3^n} \right],$$

donde  $j = 1, 2, \dots, 2^n$  y  $r_j \in F_n$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Esto es

$$K_n = I_{r_1}^n \cup I_{r_2}^n \cup \dots \cup I_{r_{2^n}}^n.$$

Por ejemplo;

$$K_0 = [0, 1] \\ K_1 = \left[ 0, \frac{1}{3} \right] \cup \left[ \frac{2}{3}, 1 \right] \\ K_2 = \left[ 0, \frac{1}{9} \right] \cup \left[ \frac{2}{9}, \frac{1}{3} \right] \cup \left[ \frac{2}{3}, \frac{7}{9} \right] \cup \left[ \frac{8}{9}, 1 \right] \\ \vdots$$

**1.2 Definición.** Definimos el *Conjunto de Cantor*, que denotaremos por  $C$ , como

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n.$$

Notemos que cada  $K_n$  es cerrado pues es la unión de  $2^n$  intervalos cerrados, cada uno de ellos de longitud  $\frac{1}{3^n}$ , además

$$K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$$

Como  $[0, 1]$  es compacto, se sigue que  $C \neq \emptyset$  ([19], p. 173). Observemos que  $K_n$  se obtiene de  $K_{n-1}$  pues al dividir cada uno de los intervalos que forman  $K_{n-1}$  en tres partes iguales obtenemos tres subintervalos y quitamos el tercio abierto central.

En general, si ya tenemos el conjunto  $K_n$  obtenemos un nuevo conjunto  $K_{n+1}$  dividiendo cada subintervalo cerrado de  $K_n$  en tres intervalos de igual longitud y quitando el intervalo abierto central de cada uno de ellos (Figura 1.7).

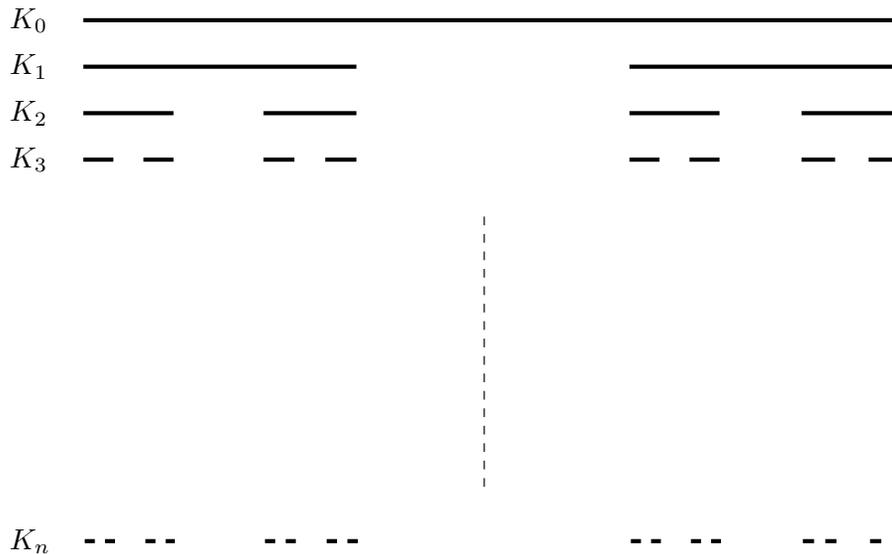


Figura 1.7: Construcción del Conjunto de Cantor

Si bien el conjunto de Cantor es interesante pues provee de un ejemplo de un conjunto aparentemente pequeño pero que tiene la cardinalidad de los números reales (sección 1.3, propiedad 5), es más interesante aún desde el punto de vista topológico, pues aunque haya varias maneras de construir un conjunto de Cantor, todas ellas dan espacios homeomorfos al presentado anteriormente. En la siguiente sección vamos a enunciar y demostrar algunas propiedades del conjunto de Cantor y para la demostración de estas introduciremos algunas definiciones.

**1.3 Definición.** Una topología  $\tau$  en un conjunto  $X$  es una colección de subconjuntos de  $X$  con las siguientes propiedades.

- $\emptyset$  y  $X$  están contenidos en  $\tau$ .
- La unión de los elementos de una colección de conjuntos de  $\tau$  está en  $\tau$ .
- La intersección de los elementos de una colección finita de conjuntos de  $\tau$  está en  $\tau$ .

A la pareja  $(X, \tau)$  que consiste de un conjunto  $X$  y una topología  $\tau$  en  $X$  le llamamos *espacio topológico*.

A los elementos de  $\tau$  se les llama *conjuntos abiertos*, mientras que a los complementos de los conjuntos abiertos se les llama *conjuntos cerrados*.

**1.4 Definición.** Sea  $X$  un conjunto, una *base* para una topología en  $X$  es una colección  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$ , llamados elementos de la base, tales que;

1. Para cada  $x \in X$  existe al menos un elemento  $B$  de la base que contiene a  $x$ .
2. Si  $x$  pertenece a la intersección de dos elementos  $B_1$  y  $B_2$  de la base, entonces existe un elemento  $B_3$  en la base que contiene a  $x$  tal que  $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

Si  $\mathcal{B}$  satisface estas dos condiciones entonces definimos la topología  $\tau$  generada por  $\mathcal{B}$  como sigue: Un subconjunto  $U$  de  $X$  se dice ser abierto en  $X$ , si para cada  $x \in U$  existe un elemento  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B$  y  $B \subset U$ . Note que cada elemento en la base es un elemento de  $\tau$ .

**1.5 Definición.** Una *subbase*  $\mathcal{S}$  de una topología en  $X$  es una colección de subconjuntos de  $X$  cuya unión es igual a  $X$ . La topología generada por la subbase  $\mathcal{S}$  es definida como la colección  $\tau$  de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de  $\mathcal{S}$ .

En realidad las intersecciones finitas de elementos de  $\mathcal{S}$  forman una base, ([19], p.82).

**1.6 Definición.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $S \subset X$ , se define la *topología relativa o inducida* por  $S$ , como

$$\tau_S = \{A_S = A \cap S : A \in \tau\}.$$

Entonces  $(S, \tau_S)$  es un subespacio topológico del espacio topológico  $(X, \tau)$  ([19], capítulo 2, sec.13 p.78).

De esta manera la topología del espacio de Cantor es la topología relativa con respecto a la topología de los reales.

**1.7 Definición.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Se define el producto topológico de  $X$  y  $Y$  como el producto cartesiano  $X \times Y$  donde los abiertos son aquellos de la forma  $U \times V$  con  $U$  es abierto en  $X$  y  $V$  es abierto en  $Y$ .

**1.8 Definición.** Un subconjunto  $D$  de un espacio topológico  $X$  se dice *clopen* en  $X$  si es abierto y cerrado a la vez.

**1.9 Definición.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, y  $A \subset X$ . El *interior* de  $A$ , denotado por  $\text{int}(A)$ , es el abierto más grande contenido en  $A$ . Es decir,  $V = \text{int}(A)$  si y sólo si  $V$  es abierto, está contenido en  $A$  y cualquier otro abierto contenido en  $A$  está contenido también en  $V$ .

**1.10 Definición.** Sea  $X$  un espacio topológico, una *cubierta* de  $A \subset X$ , es una familia de abiertos  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ , tal que  $\bigcup_{i \in I} U_i$ .

**1.11 Definición.** La *cerradura* de un conjunto de  $A$  es la intersección de todas las cubiertas cerradas de  $A$ . Es decir, es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a  $A$ . Denotaremos la cerradura de  $A$  como  $\bar{A}$ .

**1.12 Definición.** Sea  $X$  un espacio topológico, decimos que  $\sigma : X \rightarrow X$  es un *homeomorfismo* si  $\sigma$  es biyectiva, continua y su inversa también es continua.

**1.13 Definición.** Un espacio topológico  $X$  se dice *conexo* si y sólo si  $A, B \in \tau$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cup B = X$  implica que  $A = X$  o bien  $B = X$ .

**1.14 Definición.** Un espacio topológico  $X$  se dice *totalmente desconexo* si ninguno de sus subconjuntos conexos contiene más que un punto.

**1.15 Definición.** Un conjunto  $E$  se dice *conexo* cuando no existen dos conjuntos abiertos  $V_1, V_2$  tales que  $E \subset V_1 \cup V_2$ ,  $E \cap V_1 \neq \emptyset$ ,  $E \cap V_2 \neq \emptyset$ , pero  $E \cap V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

**1.16 Definición.** Sea  $X$  un espacio topológico. Un conjunto  $E \subset X$  se dice *denso en  $X$*  si  $\bar{E} = X$ .

**1.17 Definición.** Un conjunto  $E$  se dice *perfecto* si es cerrado y denso en sí mismo, es decir esta formado por todos sus puntos de acumulación.

**1.18 Definición.** Cada número real lo podemos expresar en distintas bases, en particular si  $x \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , lo podemos expresar en base 3, esto es

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{3^m} = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots,$$

donde  $\alpha_m \in \{0, 1, 2\}$ . Esta expresión se llama *expansión ternaria* de  $x$  en  $[0, 1]$ .

De la misma manera podemos expresar  $x$  en base 2 como

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i},$$

con  $a_i \in \{0, 1\}$ . Dichas expansiones son únicas, excepto para los números reales de la forma  $\frac{1}{2^i}$ , los cuales tienen dos representaciones diferentes. Sin embargo, con estas excepciones en mente, se llega a definir una biyección entre en intervalo  $[0, 1]$  y las expansiones binarias de los números allí contenidos.

**Notación:** Denotamos la *cardinalidad* de un conjunto  $A$  como  $\#A$ .

# 1.3

## Propiedades del conjunto de Cantor

En esta sección vamos a enunciar y demostrar algunas propiedades del conjunto de Cantor, existen más propiedades de las mencionadas aquí pero las que mencionamos a continuación son las que nos parecieron más bellas y con gran utilidad para los fines de esta tesis.

1. Un punto  $x$  está en  $C$  si y sólo si  $x$  tiene una representación ternaria (definición 1.18) tal que ninguno de los números  $a_i, i = 1, 2, \dots$ , es igual a 1. ([14], sec. 6, ejemplo 4).
2. Sea  $\mu$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ , el conjunto de Cantor tiene medida cero,  $\mu(C) = 0$ .

*Demostración.* Cada  $K_n$  es Lebesgue medible pues es la unión de intervalos cerrados en  $\mathbb{R}$  y  $\mu(K_0) = \mu(I) = 1 < \infty$ , además  $\mu(K_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$  entonces

$$\mu(C) = \mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(K_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 0$$

□

3. La suma de las longitudes de todos los intervalos abiertos eliminados en la construcción del conjunto de Cantor es la longitud del intervalo  $[0, 1]$ .

*Demostración.* Vamos a demostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1.$$

Veamos;

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3}(3) = 1. \end{aligned}$$

□

4. El conjunto de Cantor  $C$  tiene cardinalidad mayor o igual a la del intervalo  $[0, 1]$ .

*Demostración.* Bastará construir una función  $f$  uno a uno con dominio en  $[0, 1]$  y cuya imagen contenga al conjunto de Cantor  $C$ . Para cada  $x$  en  $[0, 1]$ , considere la expansión binaria de  $x$  (definición 1.18), esto es,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i}.$$

Sea

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2a_i 3^{-i}.$$

Por la propiedad 1 anterior, el conjunto de Cantor está contenido en la imagen de  $f$ . Además  $f$  es uno a uno por la biyección entre los elementos del intervalo  $[0, 1]$  y la expansión binaria, completando la demostración.  $\square$

5. El conjunto de Cantor tiene la cardinalidad del continuo.

*Demostración.* Por la propiedad anterior  $\#C \geq \#[0, 1]$ . Por construcción  $C \subset [0, 1] \Rightarrow \#C \leq \#[0, 1]$ . Entonces  $\#C = \#[0, 1] = 2^{\aleph_0}$ .  $\square$

6. Sea  $A = \{0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \dots\}$ , es decir,  $A$  consiste de los puntos extremos de los intervalos que fueron removidos en la construcción de  $C$  considerando también 0 y 1. Entonces  $A$  es denso en  $C$ .

*Demostración.* Sea  $x \in C$ . Si  $x \in A$ , entonces tomamos la sucesión  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ , con  $x_n = x$  para toda  $n$  y claramente  $x_n \rightarrow x$ .

Supongamos ahora que  $x \notin A$ . Construiremos una sucesión de elementos de  $A$  que convergen a  $x$ .

En el primer paso en la construcción de  $C$ , omitimos el tercio medio del intervalo  $[0, 1]$

y, para nuestros fines, tomamos el tercio que contenga a  $x$ , digamos  $\left[\frac{r_j^1-1}{3^1}, \frac{r_j^1}{3^1}\right]$ , donde

$j \in \{1, 2\}$  y  $r_j^1 \in F_j$ .

Elegimos el extremo de este intervalo que este más próximo a  $x$ , le llamaremos  $x_1$  y será el primer elemento de la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Notemos que  $|x - x_1| < \frac{1}{2^1}$ .

En el segundo paso omitimos el tercio medio del intervalo  $\left[\frac{r_j^2-1}{3^2}, \frac{r_j^2}{3^2}\right]$ , donde  $j \in \{1, 2, \dots, 2^2\}$

y  $r_j^2 \in F_j$ . Elegimos el extremo de este intervalo que está más próximo a  $x$ , al cual llamaremos  $x_2$ , y será el segundo elemento de la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . De nuevo, notemos que

$|x - x_2| < \frac{1}{2^2}$ . Continuando con este procedimiento obtenemos que  $x \in \left[\frac{r_j^{n-1}-1}{3^{n-1}}, \frac{r_j^{n-1}}{3^{n-1}}\right]$ ,

donde  $j \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$  y  $r_j^{n-1} \in F_j$ . Omitimos el tercio medio de este intervalo y nos

quedamos con el tercio que contenga a  $x$ , digamos  $\left[\frac{r_j^{n-1}}{3^{n-1}}, \frac{r_j^n}{3^n}\right]$  con  $j \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$  y  $r_j^n \in F_j$ . Elegimos el extremo de este intervalo que está más próximo a  $x$  y le llamamos  $x_n$ . Se tiene que  $x_n \in A$  y este será el  $n$ -ésimo elemento de la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , observamos que  $|x - x_n| < \frac{1}{2^n}$ .

Continuando con este proceso indefinidamente, tenemos que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$  y  $|x - x_n| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$  para todo  $n > N$  y concluimos que para todo  $x \in C$  existe  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$  tal que  $x_n \rightarrow x$ , por lo tanto  $A$  es denso en  $C$ .  $\square$

### 7. $C$ es cerrado.

*Demostración.* Sabemos que cada  $K_n$  en la construcción del conjunto de Cantor es la unión de intervalos cerrados, por lo que cada  $K_n$  es cerrado. El conjunto de Cantor está definido como la intersección de los  $K_n$  y la intersección infinita de conjuntos cerrados es cerrado. Por lo tanto  $C$  es cerrado.  $\square$

### 8. $C$ es perfecto.

*Demostración.* Denotaremos por  $C^a$  el conjunto de todos los puntos de acumulación de  $C$ . Primero vamos a demostrar que todos los puntos de  $C$  son puntos de acumulación. Sea  $x \in C$  entonces  $x \in K_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $y(n) \in C$  tal que

$$|x - y| \leq \frac{1}{3^n}$$

y  $y \neq x$  ([10], p. 28, Proposición 5).

Sea  $\varepsilon > 0$  y  $N$  tal que

$$-\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(3)} < N$$

$\Leftrightarrow -\log_3(\varepsilon) < N \Leftrightarrow -\log_3(\varepsilon) < N(\log_3(3)) \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 3^N \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^N < \varepsilon$ , entonces existe

$y(N)$  tal que  $y \neq x$  y  $|x - y| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^N < \varepsilon$ .

$\therefore x \in C^a$ , entonces  $C \subset C^a$ . Por la propiedad anterior tenemos que  $C$  es cerrado, por lo tanto  $C$  es perfecto.  $\square$

### 9. $C$ es compacto.

*Demostración.* Por el teorema de Heine Borel [19], como  $C$  es cerrado y acotado entonces es compacto.  $\square$

### 10. $C$ es totalmente desconexo.

*Demostración.* Tenemos que probar que las componentes conexas del conjunto de Cantor son sus puntos. Supongamos que una componente no es un punto y la llamamos  $A$ ; es decir, vamos a suponer que  $A$  es un conjunto conexo,  $A \subset C$ , y que existen  $x, y \in A$  tales que  $x < y$ . Por el lema 2.12 en [17], p. 33, podemos suponer que existe  $z \in \mathbb{R} - C$  tal que  $x < z < y$ . Dada  $p \in A$ ,  $p \neq z$  pues  $z \notin C$ . De modo que  $p < z$  ó  $p > z$ . Esto muestra que

$$A = ((-\infty, z) \cap A) \cup ((z, \infty) \cap A).$$

Notemos que  $x \in (-\infty, z) \cap A$  y  $y \in (z, \infty) \cap A$ . Entonces  $A$  es unión de dos conjuntos abiertos, ajenos y no vacíos, lo cual es una contradicción.  $\square$

El siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en ([16] p.104), será la pauta para lo asombroso que resultará descubrir que no todos los solenoides son homeomorfos.

**1.19 Teorema.** *Sea  $X$  un espacio métrico perfecto, no vacío, compacto y totalmente desconexo entonces  $X$  es homeomorfo al conjunto de Cantor.*

En la definición 1.2 mostramos cómo es el conjunto de Cantor ternario de forma geométrica y la propiedad 1 del conjunto de Cantor nos da la representación de los elementos en el conjunto de Cantor ternario. De manera similar vamos a definir entonces el siguiente conjunto.

**1.20 Definición.** Dado el conjunto  $P = \{p_1, p_2, \dots\}$  con  $p_i > 1$ , definimos

$$G_P = \left\{ x \in [0, 1] : \exists \{e_i\} \text{ con } e_i \in \{0, 2, \dots, 2p_i - 2\} \text{ y } x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{(p_i - 1)^i} \right\}.$$

El conjunto  $G_P$  también es la intersección de conjuntos  $L_k$  donde de manera recursiva definimos

$$L_1 = \left[0, \frac{1}{2p_1 - 1}\right] \cup \left[\frac{2}{2p_1 - 1}, \frac{3}{2p_1 - 1}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{2p_1 - 2}{2p_1 - 1}, 1\right],$$

y  $L_{k+1}$  se obtiene de  $L_k$  subdividiendo cada subintervalo de  $L_k$  en  $2^{p_{k+1}} - 1$  partes y quitamos los intervalos abiertos  $\left(\frac{1}{2^{p_i} - 1}, \frac{2}{2^{p_i} - 1}\right), \dots, \left(\frac{2^{p_i} - 3}{2^{p_i} - 1}, \frac{2^{p_i} - 2}{2^{p_i} - 1}\right)$ .

Al conjunto  $G_P$  le llamaremos conjunto de Cantor  $P$ -nario.

**1.21 Ejemplo.** Consideremos la sucesión  $P = \{3, 2, 3, 2, \dots\}$ . La construcción del conjunto de Cantor  $G_P$  de dicha sucesión se muestra en la figura 1.8.

Vamos a definir el siguiente conjunto que utilizaremos en el capítulo 2 para definir el solenoide como suspensión y demostraremos que es homeomorfo al conjunto de Cantor.

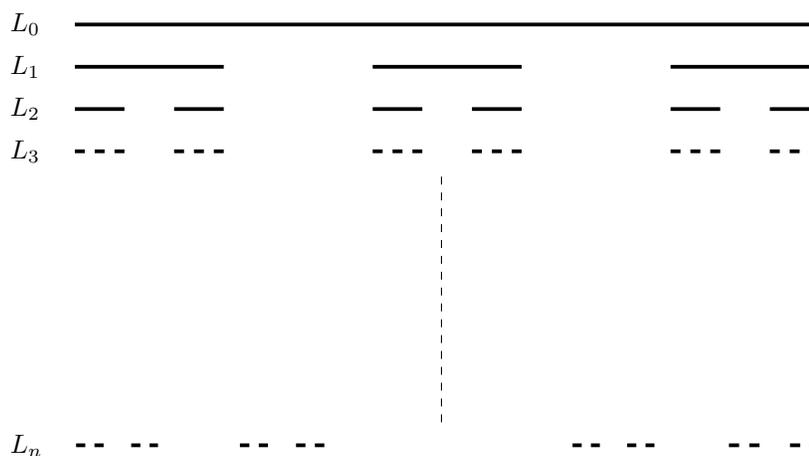


Figura 1.8: Conjunto de Cantor  $G_P$

**1.22 Definición.** Para una sucesión  $P = \{p_1, p_2, \dots\}$  de enteros positivos mayores que uno, definimos el conjunto de Cantor  $C_P$  representado como el producto topológico

$$C_P = \prod_{i=1}^{\infty} \{0, \dots, p_i - 1\}.$$

**1.23 Ejemplo.** Sea  $P = \{3, 2, 3, 2, \dots\}$ , el conjunto de Cantor  $C_P$  asociado a  $P$  es

$$C_P = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\} \times \dots$$

Para poder demostrar que  $C_P$  es homeomorfo conjunto de Cantor  $C$  mostraremos primero el siguiente resultado.

**1.24 Proposición.** *El conjunto de Cantor  $P$ -nario  $G_P$  es homeomorfo al conjunto de Cantor  $C$ .*

*Demostración.* Para demostrar esto  $G_P$  tiene que cumplir las propiedades que establece el Teorema 1.19.

- *No vacío:* Como  $G_P$  es la intersección de una sucesión anidada de compactos entonces es no vacío. ([19], p. 26, Teorema 26.2).

- *Compacto*: Sabemos que es acotado pues es un subconjunto del intervalo  $[0, 1]$  y como en cada paso quitamos intervalos abiertos,  $G_P$  es la intersección infinita de cerrados, por lo tanto es cerrado. Luego por el teorema de Heine Borel  $G_P$  es compacto.
- *Perfecto*: La demostración es similar a la demostración de la propiedad 8, 1.3.
- *Totalmente desconexo*: Tenemos que probar que cada par de puntos de  $G_P$  pertenece a distintas componentes conexas. Para probar esto hay que probar que cada par de puntos pertenece a dos conexos disjuntos en  $G_P$ . Sean  $x$  y  $y$  dos puntos distintos en  $G_P$ , sabemos que cada punto tiene una sucesión de intervalos que lo determina, es decir  $x$  es intersección de intervalos cuyo diámetro tiende a cero. Lo mismo pasa para  $y$ . Si  $d$  es la distancia de  $x$  a  $y$  entonces podemos encontrar intervalos  $J$  y  $Q$  que determinan a  $x$  y  $y$  respectivamente, tales que los diámetros de  $J$  y de  $Q$  sean menores que  $\frac{d}{4}$ , entonces  $x \in J$  y  $y \in Q$  implican que  $J \cap Q = \emptyset$ . Como el diámetro de cada intervalo es menor a  $\frac{d}{4}$ ,  $x$  y  $y$  no se intersectan. Por lo tanto  $G_P$  es totalmente desconexo.

□

**1.25 Teorema.** *El conjunto  $C_P$  es homeomorfo al conjunto de Cantor  $P$ -nario  $G_P$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $x \in G_P$  si y solo si existe una sucesión de enteros  $\{e_m\}$  con  $e_m \in \{0, 2, \dots, 2p_i - 2\}$ . Definimos un mapeo  $h: G_P \rightarrow C_P$  por la fórmula  $h(x) = \{e_m/2\}$ . Este mapeo es una biyección con función inversa definida por  $g(\{e_m\}) = \sum_m \frac{2e_m}{(p_m-1)^m}$ .

□

## 1.4

### Los puntos en el conjunto de Cantor

De acuerdo a la construcción del conjunto de Cantor  $C$  que vimos en la sección anterior (1.2), al menos los puntos de los extremos de cada subconjunto en la construcción están contenidos en  $C$ , sin embargo, por la propiedad 6 de la sección anterior, estos no son los únicos puntos.

Con el fin de visualizar con el conjunto de Cantor, identificaremos cada uno de sus puntos con una sucesión de *ceros* y *unos*, para esto lo primero que vamos a hacer es dividir la construcción del conjunto de Cantor en dos partes; “lado izquierdo” y “lado derecho” como se ve en la figura 1.9, donde la línea verde solo hace notar la división del conjunto en dos partes.

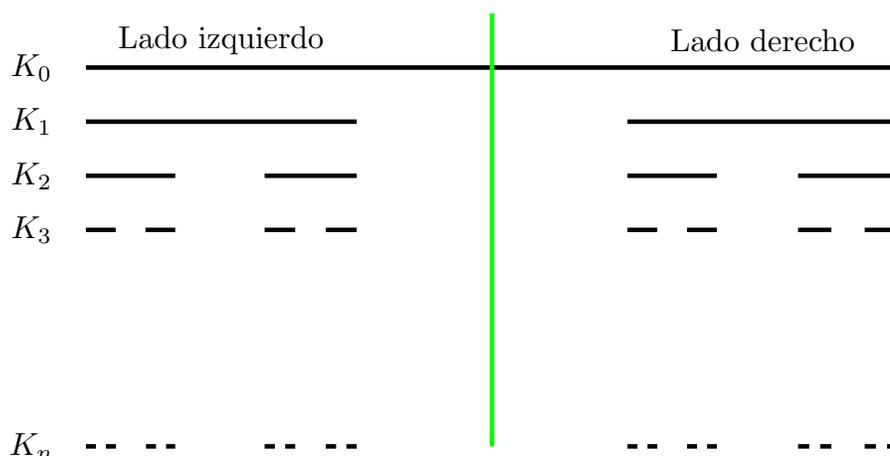


Figura 1.9:

A la parte izquierda del conjunto de Cantor le vamos a asociar el número *cer*o y a la parte derecha el número *uno*. Entonces los puntos que están en el lado izquierdo los expresamos con un *cer*o como primera cifra después de un punto (.0) y a los que están en la parte derecha los expresaremos con un *uno* como primera cifra después de un punto (.1).

Este mismo procedimiento lo repetimos para cada subintervalo de  $K_1$  del conjunto de Cantor, esto es; dividimos en parte izquierda y derecha cada subintervalo asociando de la misma manera que antes; un *cer*o si está del lado izquierdo (.00) y un *uno* si está del lado derecho (.01) (Figura 1.10).

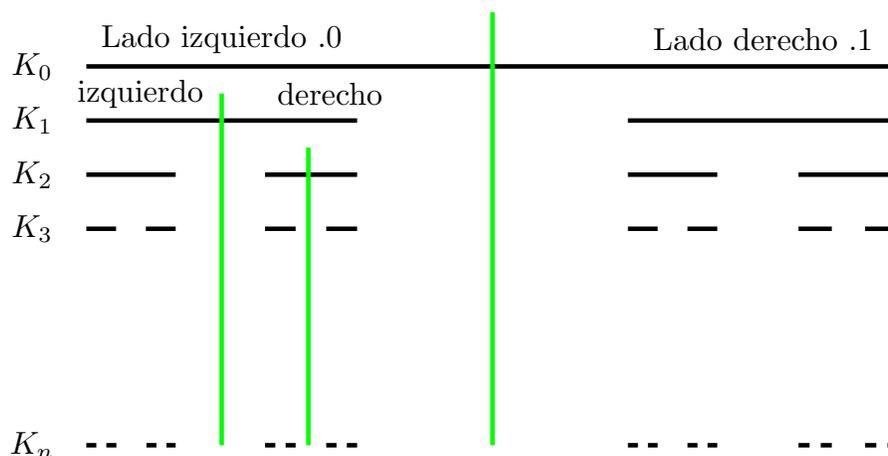


Figura 1.10:

Continuamos este proceso indefinidamente, es decir; cada subdivisión de cada paso en la construcción del conjunto de Cantor la dividimos en parte izquierda y parte derecha agregando un *cero* si el punto está del lado izquierdo y un *uno* si está del lado derecho.

**1.26 Ejemplo.** Consideremos el punto  $x = .0110\dots$ . Esta representación binaria de *ceros* y *unos* nos indica la posición del punto en el conjunto de Cantor. La primera cifra después del punto de  $x$  es *cero* por lo que se encuentra en el lado izquierdo de  $K_1$ , nos fijamos sólo en este lado de  $K_1$  y lo dividimos en parte izquierda y derecha, como la segunda cifra después del punto es *uno* entonces  $x$  está en la parte derecha de  $K_2$ . De la misma manera nos fijamos solamente en esta parte de  $K_2$  y la dividimos en dos partes (izquierda y derecha), como la tercera cifra después del punto es *uno* entonces  $x$  está en la parte derecha de  $K_3$ . Continuamos este proceso indefinidamente considerando todos los *ceros* y *unos* de la representación del punto (figura 1.11).

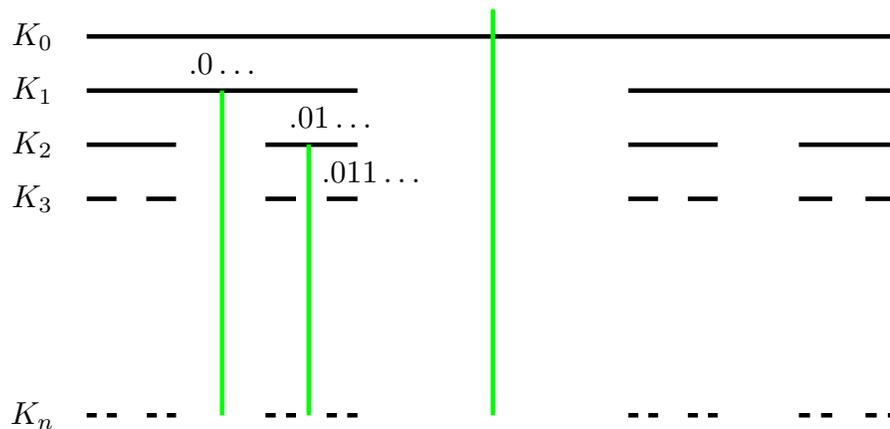


Figura 1.11:

Con esta construcción identificamos a cada punto del conjunto de Cantor con una única sucesión de *ceros* y *unos*. Esta sucesión será muy útil para describir al solenoide como una suspensión del conjunto de Cantor.

# 1.5

## El solenoide como suspensión

En esta sección vamos a definir el solenoide como suspensión, pero primero necesitamos introducir algunos conceptos importantes.

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y sea  $\sim$  una relación de equivalencia en  $X$ . Sea

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}$$

la clase de equivalencia de un elemento de  $x$  en  $X$ , denotaremos por  $[A]$  al conjunto

$$[A] = \{[x] : x \in A\}.$$

Sea  $X/\sim = \{[x] : x \in X\}$ . Definimos la siguiente familia de subconjuntos en el espacio  $X/\sim$ ,

$$\tau/\sim = \{B \subset X/\sim : p^{-1}(B) \in \tau\},$$

donde  $p : X \rightarrow X/\sim$  es el llamado mapeo cociente definido por  $p(x) = [x]$ .

**1.27 Lema.** *Sea  $\tau/\sim$  como arriba, entonces  $\tau/\sim$  define una topología en  $X/\sim$ .*

*Demostración.* Veamos que cumpla las propiedades necesarias.

1.  $\emptyset \in \tau/\sim$ , pues  $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  y  $\emptyset = \emptyset \in \tau$  por ser  $\tau$  una topología. Además como  $p$  es suprayectiva  $X = p^{-1}(X/\sim)$ , es decir,  $X/\sim \in \tau/\sim$ .
2. Sea ahora  $\{B\}_{i \in I} \subset \tau/\sim$ . Entonces

$$p^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} p^{-1}(B_i) \in \tau,$$

pues  $p^{-1}(B_i)$  es un subconjunto abierto de  $X$  por definición.

3. Sean  $B_1$  y  $B_2$  dos conjuntos en  $\tau/\sim$ . Entonces

$$p^{-1}(B_1 \cap B_2) = p^{-1}(B_1) \cap p^{-1}(B_2) \in \tau.$$

□

Dado cualquier espacio topológico  $X$  y un homeomorfismo  $\sigma : X \rightarrow X$ , este introduce una relación de equivalencia en el espacio producto  $X \times I$ , donde  $I = [0, 1]$ , dada por

$$(x, 1) \sim (\sigma(x), 0) \quad \forall x \in X$$

$$\text{y } (x, 0) \sim (\sigma^{-1}(x), 1).$$

**1.28 Lema.** *La relación  $\sim$  que define la suspensión de arriba, es una relación de equivalencia.*

*Demostración.* Para que  $\sim$  sea una relación de equivalencia tiene que cumplir tres propiedades.

1.  $\sim$  es reflexiva. Por definición  $(x, t) \sim (x, t) \forall x \in C$  y  $t \in I$ .
2.  $\sim$  es simétrica. Queremos demostrar que si  $(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2)$  entonces  $(x_2, t_2) \sim (x_1, t_1)$ . Si  $(x_1, t_1) = (x_2, t_2)$  la simetría es obvia. Si  $(x_1, t_1) \neq (x_2, t_2)$  entonces hay dos casos.  
 Caso 1.  $(x_1, t_1) = (x_1, 1)$  y  $(x_2, t_2) = (\sigma(x_1), 0)$ . Entonces  $(x_2, t_2) = (\sigma(x_1), 0) \sim (\sigma^{-1}(\sigma(x_1)), 1) = (x_1, t_1)$ , como se quería.  
 Caso 2.  $(x_1, t_1) = (x_1, 0)$  y  $(x_2, t_2) = (\sigma^{-1}(x_1), 1)$ . Entonces  $(x_2, t_2) = (\sigma^{-1}(x_1), 1) \sim (\sigma(\sigma^{-1}(x_1)), 0) = (x_1, t_1)$ , como se quería.
3.  $\sim$  es transitiva. Sean  $(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2)$  y  $(x_2, t_2) \sim (x_3, t_3)$  con  $t_1 \neq t_2$  y  $t_2 \neq t_3$ . En el caso en el que  $t_1 = 0$  entonces  $t_2 = 1$  y  $t_3 = 0$  pues  $\sigma$  es biyectiva, por lo que  $\sigma(x_2) = x_1$  y  $\sigma(x_2) = x_3$ , entonces  $x_1 = x_3$ , por lo que  $(x_1, t_1) = (x_3, t_3)$ , lo que implica que  $(x_1, t_1) \sim (x_3, t_3)$ . En los otros casos la demostración es análoga.

□

**1.29 Definición.** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $\sigma : X \rightarrow X$  un homeomorfismo. La suspensión  $\Sigma(X, \sigma)$  del homeomorfismo  $\sigma$  es el espacio cociente

$$\Sigma(X, \sigma) = (X \times I) / (x, 1) \sim (\sigma(x), 0)$$

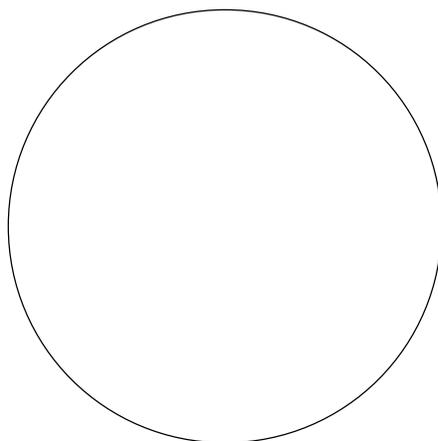
donde  $\sim$  es la relación de equivalencia inducida por  $\sigma$ . Este espacio tiene la topología definida al comienzo de esta sección.

El concepto de suspensión puede ser un poco complicado, así que mostraremos algunos ejemplos para tener una idea más clara sobre suspensiones.

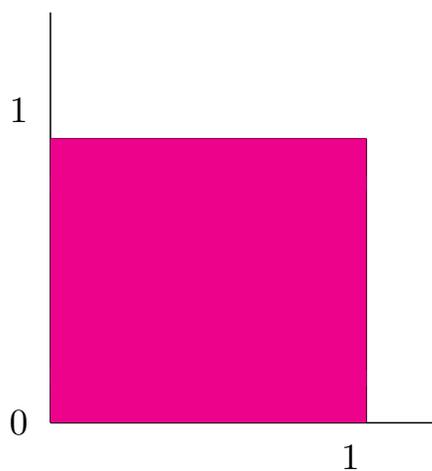
**1.30 Ejemplo.** El más sencillo ejemplo de suspensión es

$$S^1 = \Sigma(\cdot, \text{Id}),$$

esto es, comenzamos con el espacio  $X = \{x\}$  que consiste de un solo punto y la función identidad  $\sigma$  en  $X$ . Entonces  $X \times I$  es una copia del intervalo  $I$  y lo que hacemos es identificar  $(x, 1)$  con  $(x, 0)$  formando una circunferencia, es decir, la suspensión del espacio que contiene un punto no es otra cosa que la circunferencia.

Figura 1.12:  $S^1$ 

**1.31 Ejemplo.** Otro ejemplo de suspensión y que nos será de utilidad mas adelante es el cilindro. Consideremos  $X = [0, 1]$  y  $\sigma : X \rightarrow X$  la identidad, entonces el cilindro es la suspensión  $\Sigma(X, \sigma)$ , (figuras 1.13 y 1.14). Notemos que es necesario pegar los puntos de la forma  $(z_1, 0)$  con los puntos de la forma  $(z_2, 1)$ ,  $0 \leq z_i \leq 1, i = 1, 2$ ; con la condición de que  $z_1 = z_2$ .

Figura 1.13:  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$

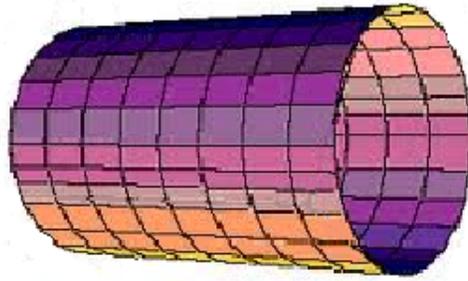


Figura 1.14:  $\Sigma(X, \sigma)$

Así como establecimos una relación de equivalencia con la función  $\sigma$  apropiada para formar  $X \times I$  pegando  $X \times \{0\}$  con  $X \times \{1\}$  y obtener la circunferencia y el cilindro respectivamente, debemos definir adecuadamente un homeomorfismo en el espacio de Cantor para obtener un solenoide.

Lo que haremos a continuación será construir un conjunto de Cantor a partir de un solenoide diádico. Esto nos permite ver que el espacio con el que vamos a trabajar para construir solenoides tiene que ser un conjunto de Cantor. Recordemos que en la sección 1.1 construimos el solenoide diádico (Ejemplo 1.1) como una intersección de toros sólidos, consideremos dicha sucesión

$$T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \dots$$

Si cortamos estos toros con un plano  $L$  de manera transversal lo que nos queda son círculos unos dentro de otros como en la figura 1.15.

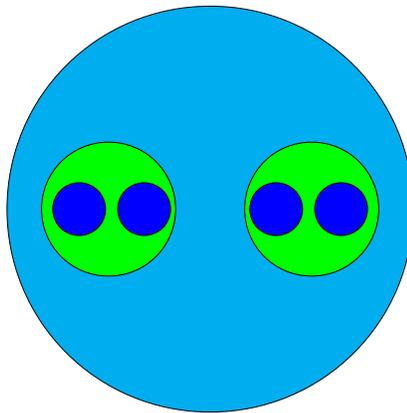


Figura 1.15: Primer corte con el plano  $L$

Los círculos que obtuvimos con este corte representan la construcción del solenoide, el primer círculo (círculo azul) representa el corte del plano  $L$  con  $T_1$ , los dos siguientes círculos (círculos verdes) el corte del plano  $L$  con  $T_2$ , obtenemos dos círculos pues el toro  $T_2$  da dos

vueltas por el interior del toro  $T_1$ , los siguientes cuatro círculos (círculos azul fuerte) corresponden al corte del plano  $L$  con  $T_3$ , obtenemos cuatro círculos pues el toro  $T_3$  da dos vueltas por el interior de  $T_2$  y a la vez cuatro vueltas por el interior de  $T_1$  y así sucesivamente.

Podemos suponer que el diámetro del toro  $T_1$  es 1, y podemos hacer la construcción de tal manera que el diámetro del toro  $T_2$  sea  $\frac{1}{3}$ , el de  $T_3$   $\frac{1}{9}$  y así el grosor del toro  $T_n$  es  $\frac{1}{3^{n-1}}$ .

A estos círculos los podemos reacomodar de la siguiente manera; los círculos que representan el corte del plano  $L$  con  $T_2$  los movemos de tal modo que queden pegados con el círculo que representa el corte del plano  $L$  con  $T_1$ , los círculos que representan el corte del plano  $L$  con  $T_3$  los movemos para que queden pegados con los que representan el corte del plano  $L$  con  $T_2$ . Seguimos con este proceso hasta obtener el reacomodo que queremos (figura 1.16).

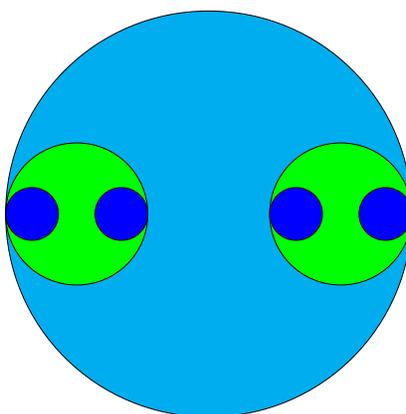


Figura 1.16: Reacomodo

Notemos que la representación de la figura 1.16 es la misma que la de la figura 1.15 pues solo movimos los círculos para que quedaran tangentes unos con otros y esto se puede obtener en la construcción de toros anidados acomodando dichos toros de manera adecuada.

Lo siguiente que vamos a hacer es cortar la representación de la figura 1.16 con una línea  $l$  de manera horizontal y que corte por la mitad a todos los círculos como se muestra en la figura 1.17.

Notemos ahora que al intersectar la línea  $l$  de la figura 1.17 con el primer círculo (azul) obtenemos el conjunto  $K_0$  de la figura 1.10, al intersectar  $l$  con los siguientes dos círculos (verde) obtenemos el conjunto  $K_1$ , al hacer lo mismo con los siguientes círculos (azul fuerte) obtenemos el conjunto  $K_2$  y así sucesivamente.

Con esto hemos asociado cada  $K_n$  de la construcción del conjunto de Cantor con la intersección de la línea  $l$  con el corte del toro  $T_n$  con el plano  $L$ . Por lo que la relación que existe entre el conjunto de Cantor y el solenoide es que al cortar el solenoide con un plano de manera transversal tenemos determinado un conjunto de Cantor.

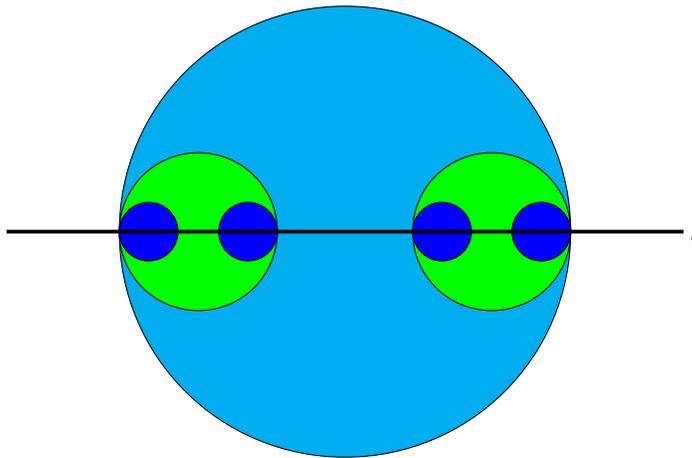


Figura 1.17: Corte con la recta  $l$

En la construcción del solenoide usando toros anidados lo primero que tomamos en cuenta es el toro  $T_1$ . Por conveniencia en vez del toro  $T_1$  se ocupa el cilindro como en ejemplo 1.31.

Para obtener el toro  $T_2$  dentro del toro  $T_1$  tenemos que realizar el pegado de la siguiente manera: consideremos el conjunto  $K_1$  que es el primer paso en la construcción del conjunto de Cantor, entonces el espacio que vamos a pegar es  $K_1 \times I$ , de tal manera que los puntos morado y verde como lo indican las flechas en la figura 1.18 queden pegados. Ahora consideramos  $K_1$  pues es el segundo paso en la construcción del conjunto de Cantor que es el conjunto con el que estamos trabajando.

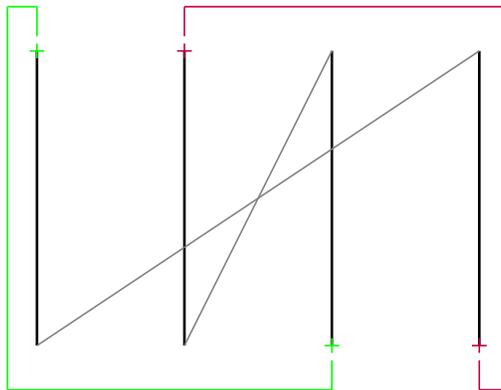


Figura 1.18: Tomando  $K_1$  para la suspensión

Notemos que lo que hacemos es tomar un punto del lado izquierdo (por ejemplo el morado) nos desplazamos hacia el lado derecho y luego unimos con la parte inferior (como se muestra en

la figura 1.18). El siguiente toro que vamos a construir es el toro  $T_3$  que da cuatro vueltas; por lo que consideramos  $K_2 \times I$  y pegamos de acuerdo al mismo procedimiento; tomamos un punto del lado izquierdo (por ejemplo el amarillo) nos desplazamos hacia el lado derecho y lo unimos con la parte inferior (figura 1.19).

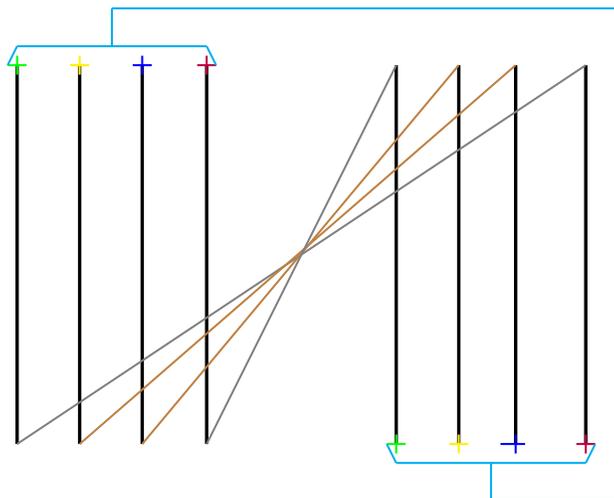


Figura 1.19: Tomando  $K_2$  para la suspensión

Ahora consideramos el espacio  $K_3 \times I$  y pegamos los puntos de  $K_3 \times \{1\}$  con los de  $K_3 \times \{0\}$  siguiendo la misma idea de antes; tomamos un punto del lado izquierdo (por ejemplo el verde), nos desplazamos hacia el lado derecho y luego lo unimos con la parte inferior (figura 1.20).

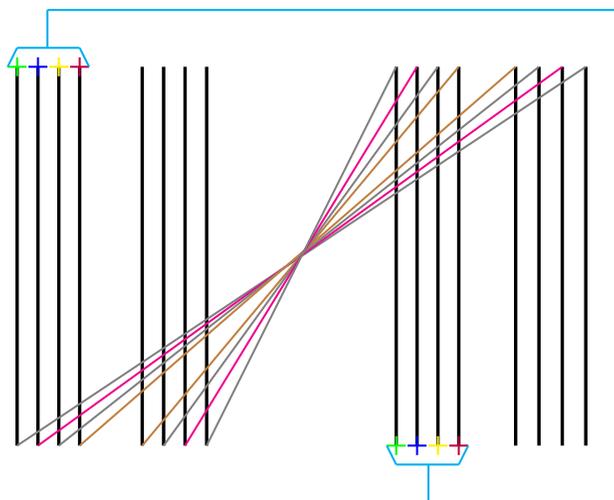


Figura 1.20: Tomando  $K_3$  para la suspensión

Realizamos nuevamente el mismo procedimiento pero ahora con  $K_4 \times I$  (Figura 1.21).

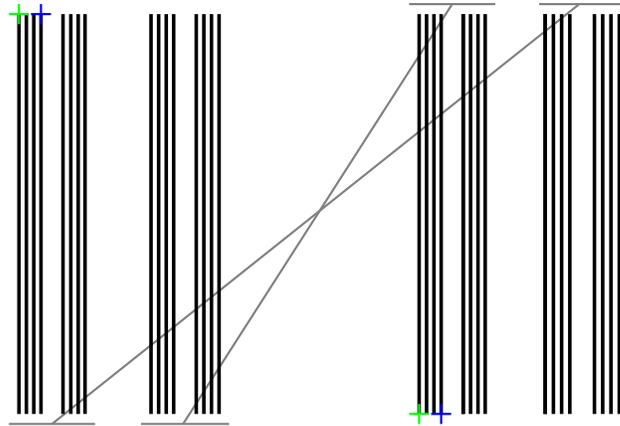


Figura 1.21: Tomando  $K_4$  para la suspensión

Los puntos de la forma  $0.1a_2a_3, \dots$  se pegarán los puntos  $\sigma(0.1a_2a_3, \dots) = 0,0b_2b_3, \dots$ , el punto  $0 = 0.000\dots$  se pegará con el punto  $\sigma(0) = 0.1111\dots$ . Dado que el solenoide es la intersección infinita de toros sólidos anidados, lo que tenemos que hacer para obtener el solenoide es identificar los puntos de  $C \times \{1\}$  con los de  $C \times \{0\}$  dividiendo  $C \times I$  en dos partes y tomamos un punto del lado izquierdo, lo desplazamos hacia la derecha y unimos con la parte derecha de  $C \times \{0\}$ .

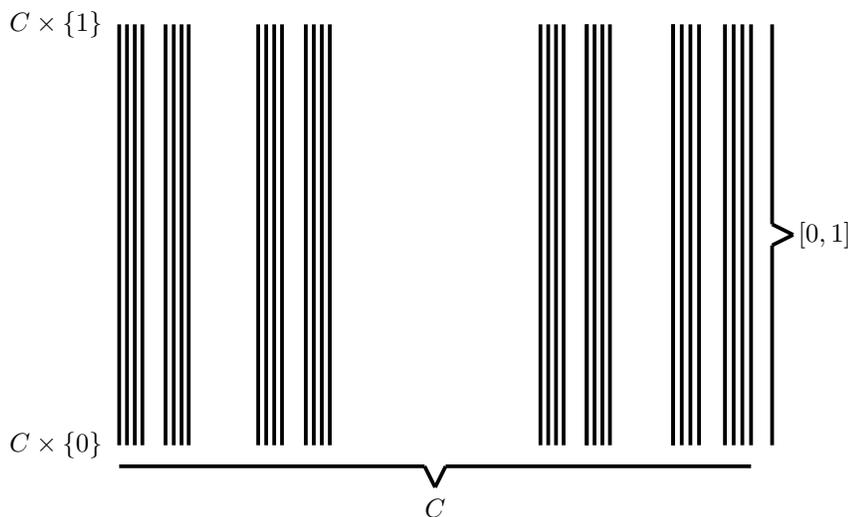


Figura 1.22:  $C \times [0, 1]$

Lo que nos falta ahora es definir una relación de equivalencia a través de un homeomorfismo

$\sigma : C \rightarrow C$ , el cual describiremos en la siguiente sección.

## 1.6

### Homeomorfismo de pegado

Con lo que ya hicimos nos damos cuenta que necesitamos construir un homeomorfismo  $\sigma : C \rightarrow C$  de modo que la suspensión no va a ser otra cosa que el solenoide.

La idea es pegar cada punto de la forma  $(x, 1)$  con uno de la forma  $(\sigma(x), 0)$  tal y como lo indica la relación de equivalencia que definimos anteriormente. Para esto utilizaremos la expresión que asignamos a cada punto del conjunto de Cantor en la sección 1.4.

Definimos nuestro homeomorfismo  $\sigma$  de la siguiente manera

$$\sigma(x) = x + .1 \text{ con } x \in C,$$

donde la forma en la que sumaremos  $x + .1$  es de izquierda a derecha y de la misma forma en la que sumamos en binario, esto es;  $1 + 1 = 0$  y llevamos 1,  $1 + 0 = 1$ ,  $0 + 1 = 1$  y  $0 + 0 = 0$ .

Verifiquemos que con el homeomorfismo  $\sigma$  obtenemos el pegado que realizamos en la sección anterior. Consideremos el punto  $(x, 1)$  con  $x = .000\dots$ , que corresponde al punto morado del lado superior izquierdo de la figura 1.18 aplicando  $\sigma$  a  $x$  tenemos  $\sigma(x) = .1000\dots$ , entonces  $(\sigma(x), 0)$  corresponde, efectivamente, al punto morado de la parte inferior derecha de la figura. De la misma manera, consideramos el punto  $(x, 1)$  con  $x = .00111\dots$ , que corresponde al punto amarillo del lado superior izquierdo de la figura 1.19, aplicando  $\sigma$  a  $x$  obtenemos  $\sigma(.00111\dots) = .10111\dots$ , entonces  $(\sigma(x), 0)$  corresponde al punto amarillo del lado inferior derecho de la misma figura. Haciendo lo mismo con alguno de los puntos de las figuras 1.20 y 1.21 notamos que la función  $\sigma$  que definimos si realiza el pegado como el que queremos.

Un punto de la forma  $y = 0.1a_2a_3\dots \in C$  al aplicarle  $\sigma$  lo manda a un punto de la forma  $0.0b_2b_3\dots$ , así pegaremos los puntos de la forma  $(y, 0)$  se pegaran con los puntos de la forma  $(\sigma(y), 1)$ .

De manera general, sea  $x = .0a_2a_3a_4\dots \in C$ . Como la primera cifra de  $x$  es cero, el punto  $(x, 1)$  es como los puntos del lado superior izquierdo de  $C \times I$ . Aplicando  $\sigma$  a  $x$  obtenemos  $\sigma(x) = .1a_2a_3a_4\dots$ , como la primera cifra de  $\sigma(x)$  es 1 entonces el punto  $(\sigma(x), 0)$  está del lado inferior derecho de  $C \times I$ .

Notemos que como las primeras cifras de  $x$  y  $\sigma(x)$  coinciden, salvo la primera, entonces deducimos que  $(\sigma(x), 0)$  se obtiene trasladando  $(x, 1)$  a la derecha y luego uniendo con la parte inferior, que es justamente lo que hicimos en la sección 1.5.

Falta verificar que  $\sigma$  es un homeomorfismo.

*Inyectividad:* Notemos que lo que hace el mapeo  $\sigma$  a un punto  $x$  es cambiar los primeros unos por ceros antes del primer cero que forma parte de la sucesión de ceros y unos y cambiar dicho cero por un uno, dicho numero esta en  $C$ , así si tomamos  $x, y \in C$  diferentes y aplicamos  $\sigma$  a estos dos numeros obtenemos numeros diferentes, así el mapeo  $\sigma$  es inyectivo.

*Suprayectividad:* Sea  $y \in C$ . Si  $y$  es de la forma  $.1b_2b_3\dots$  entonces  $\sigma(.0b_2b_3\dots) = .1b_2b_3\dots$ . Ahora bien, si  $y$  es de la forma  $.0b_2b_3\dots$  entonces  $\sigma(.1a_2a_3\dots) = .0b_2b_3\dots$ . Por lo que  $\sigma$  es suprayectiva.

*Continuidad:* Para verificar que sea continua es necesario dar algunas definiciones y algunos resultados.

**1.32 Definición.** Sea

$$U_k[i] = \{.x_1x_2\dots \in C : x_k = i\},$$

estos elementos son conocidos como *cilindros*.

**1.33 Proposición.**  $\{U_k[i] : k \in \mathbb{N}, i = 0, 1\}$  es subbase topológica para  $C$ .

*Demostración.* Para demostrar que  $\{U_k[i] : k \in \mathbb{N}, i = 0, 1\}$  es subbase topológica para  $C$  tenemos que ver que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (U_k[0] \cup U_k[1])$$

Primero veamos que

$$\bigcup_k U_k[i] = \{.x_1x_2\dots \in C : x_1 = 0 \text{ ó } 1, x_2 = 0 \text{ ó } 1, \dots\}.$$

Veamos;

$$U_1[1] \cup U_1[0] = \{.1x_2x_3\dots \in C \text{ ó } .0x_2x_3\dots \in C\}.$$

$$U_2[1] \cup U_2[0] = \{.x_11x_3\dots \in C \text{ ó } .x_10x_3\dots \in C\}.$$

$$U_1[1] \cup U_2[0] = \{.11x_3\dots \in C \text{ ó } .10x_3\dots \in C \text{ ó } .00x_3\dots \in C \}.$$

$$U_1[1] \cup U_3[0] = \{.111x_4\dots \text{ ó } .110x_4\dots \text{ ó } .101x_4\dots \text{ ó } .000x_4\dots \text{ ó } .001x_4\dots \text{ ó } .010x_4\dots \text{ ó } .100x_4\dots\}.$$

Notamos entonces que la unión de los  $U_k[i]$  es efectivamente como dijimos antes.

Ahora

$\bigcup_k U_k[i] \subset C$ : Sea  $x \in U_k[i]$ , entonces entonces  $x \in U_k[i]$  para alguna  $k$  y cada elemento de  $U_k[i]$  pertenece a  $C$  por lo tanto  $x \in C$ .

$C \subset \bigcup_k U_k[i]$ : Sea  $x \in C$ , los elementos en  $C$  son de la forma  $.x_1x_2\dots$  donde cada  $x_i$  es 0 ó 1 entonces dicho elemento esta en  $\bigcup_k U_k[i]$ .

$$\therefore \bigcup_k U_k[i] = C.$$

□

Como  $\{U_k[i] : k \in \mathbb{N}, i = 0, 1\}$  es subbase para  $C$  entonces la topología generada por dicha subbase es la colección de todas las uniones de intersecciones finitas de los elementos de  $\{U_k[i] : k \in \mathbb{N}, i = 0, 1\}$  y estos son los abiertos en la base topológica de  $C$ .

**1.34 Proposición.** Si  $\sigma^{-1} \left( \bigcap_{k=1}^N U_k[i] \right)$  es abierto entonces  $\sigma$  es continua.

*Demostración.* Veamos como es  $\sigma^{-1}$  cuando la aplicamos a alguna intersección de los elementos de la base.

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(U_1[1] \cap U_2[0]) &= U_1[0] \cap U_2[0] \\ \sigma^{-1}(U_1[0] \cap U_2[1]) &= U_1[1] \cap U_2[0] \\ \sigma^{-1}(U_1[1] \cap U_2[1]) &= U_1[0] \cap U_2[1] \\ \sigma^{-1}(U_1[0] \cap U_2[0]) &= U_1[1] \cap U_2[1] \\ \sigma^{-1}(U_1[0] \cap U_3[0]) &= (U_1[1] \cap U_2[0] \cap U_3[0]) \cup (U_1[1] \cap U_2[1] \cap U_3[1]) \\ \sigma^{-1}(U_1[0] \cap U_3[1]) &= (U_1[1] \cap U_2[1] \cap U_3[0]) \cup (U_1[1] \cap U_2[0] \cap U_3[1]) \\ \sigma^{-1}(U_1[1] \cap U_3[0]) &= (U_1[0] \cap U_2[0] \cap U_3[0]) \cup (U_1[0] \cap U_2[1] \cap U_3[0]) \\ \sigma^{-1}(U_1[1] \cap U_3[1]) &= (U_1[0] \cap U_2[0] \cap U_3[1]) \cup (U_1[0] \cap U_2[1] \cap U_3[1]) \\ \sigma^{-1}(U_1[1] \cap U_2[1] \cap U_3[1]) &= U_1[0] \cap U_2[1] \cap U_3[1] \\ \sigma^{-1}(U_1[1] \cap U_3[1] \cap U_4[1]) &= (U_1[0] \cap U_2[1] \cap U_3[0] \cap U_4[1]) \cup (U_1[0] \cap U_2[1] \cap U_3[1] \cap U_4[1]) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\sigma^{-1} \left( \bigcap_{j=1}^N U_k[i] \right) = \{ \text{todas las uniones de las posibles intersecciones finitas de los } U_k[i] \text{ que son las primeras } N \text{ entradas de algún } x \in C \text{ antes de aplicarle } \sigma \}.$

Notemos que  $\sigma^{-1} \left( \bigcap_{j=1}^N U_k[i] \right)$  son las uniones de intersecciones finitas de abiertos, por lo tanto el mapeo  $\sigma$  es continuo. □

Como queremos ver que  $\sigma$  es un homeomorfismo, falta ver que  $\sigma^{-1}$  es continua. Esto se demuestra similarmente a como demostramos que  $\sigma$  es continua. Hay que demostrar entonces que si  $\sigma \left( \bigcap_{j=1}^N U_k[i] \right)$  es abierto entonces  $\sigma^{-1}$  es continua, veamos.

$$\begin{aligned}
\sigma(U_1[1] \cap U_2[0]) &= U_1[0] \cap U_2[1] \\
\sigma(U_1[0] \cap U_2[1]) &= U_1[1] \cap U_2[0] \\
\sigma(U_1[1] \cap U_2[1]) &= U_1[0] \cap U_2[0] \\
\sigma(U_1[0] \cap U_2[0]) &= U_1[1] \cap U_2[1] \\
\sigma(U_1[0] \cap U_3[0]) &= (U_1[1] \cap U_2[0] \cap U_3[0]) \cup (U_1[1] \cap U_2[1] \cap U_3[0]) \\
\sigma(U_1[0] \cap U_3[1]) &= (U_1[1] \cap U_2[1] \cap U_3[1]) \cup (U_1[1] \cap U_2[0] \cap U_3[1]) \\
\sigma(U_1[1] \cap U_3[0]) &= (U_1[0] \cap U_2[1] \cap U_3[0]) \cup (U_1[0] \cap U_2[0] \cap U_3[1]) \\
\sigma(U_1[1] \cap U_3[1]) &= (U_1[0] \cap U_2[1] \cap U_3[1]) \cup (U_1[0] \cap U_2[0] \cap U_3[0]) \\
\sigma(U_1[1] \cap U_2[1] \cap U_3[1]) &= U_1[0] \cap U_2[0] \cap U_3[0] \\
\sigma(U_1[1] \cap U_3[1] \cap U_4[1]) &= (U_1[0] \cap U_2[1] \cap U_3[1] \cap U_4[1]) \cup (U_1[0] \cap U_2[0] \cap U_3[0] \cap U_4[0])
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\sigma \left( \bigcap_{j=1}^N U_k[i] \right) = \{ \text{todas las uniones de las posibles intersecciones finitas de los } U_k[i] \text{ que son las primeras } N \text{ entradas de algún } x \in C \text{ - despues de aplicarle } \sigma \}$ .

Con lo que demostramos que  $\sigma$  es continua.

Con todo lo anterior obtenemos un espacio homeomorfo al que construimos geométricamente en la subsección 1.1.

La construcción anterior del mapeo  $\sigma$  la podemos generalizar para cualquier sucesión  $P$ . Sea  $S_P$  un solenoide  $P$ -ádico, si se considera que las fronteras de los toros anidados  $T_1 \supset T_2 \supset \dots$  que definen a  $S_P$  están contenidas en  $[0, 1] \times [0, 1]$  entonces  $C_P = S_P \cap ([0, 1] \times \{0\})$  y si  $\sigma$  es el mapeo adecuado entonces  $S_P \cong \Sigma(C_P, \sigma)$ . La construcción de este mapeo la haremos en el siguiente capítulo.

---

## Clasificación de solenoides

---

En el capítulo anterior definimos una función  $\sigma$  para construir el solenoide diádico, en este capítulo vamos a generalizar esa idea, además enunciaremos y probaremos el teorema de clasificación de solenoides.

### 2.1

#### Máquinas ádicas

En esta sección definiremos el mapeo odómetro  $\sigma$  y con ello vamos a definir las máquinas ádicas con las que vamos a construir el solenoide  $S_P$ .

El solenoide puede ser visto entonces como la suspensión  $\Sigma(C, \sigma)$  (ver definición 1.29), la cual es obtenida del producto  $C \times I$  identificando cada  $(x, 1)$  con  $(\sigma(x), 0)$ ,  $x \in C$ . Ahora vamos a definir para una sucesión de enteros  $P = \{p_1, p_2, \dots\}$  mayores que 1, el solenoide  $S_P$  como la suspensión  $\Sigma(C_P, \sigma)$ , donde  $C_P$  es el representado como el producto topológico

$$C_P = \prod_{i=1}^{\infty} \{0, 1, 2, \dots, p_i - 1\}$$

visto en la sección 1.3 del capítulo 1.

El mapeo  $\sigma : C_P \rightarrow C_P$  tiene la forma;

$$\sigma(x_1, x_2, \dots) = (x_1 + 1, x_2, x_3) \text{ si } x_1 < p_1 - 1$$

$$\sigma(p_1 - 1, \dots, p_{k-1} - 1, x_k, \dots) = (0, 0, \dots, x_k + 1, \dots) \text{ si } x_k < p_k - 1$$

$$\sigma(p_1 - 1, p_2 - 1, \dots) = (0, 0, \dots).$$

Entonces

$$S_P = \Sigma(C_P, \sigma).$$

**2.1 Definición.** Al mapeo  $\sigma$  se le conoce como *mapeo odómetro*.

**2.2 Definición.** A la pareja  $(C_P, \sigma)$  le llamamos *máquinas ádicas*. (Definición 1.22).

Por lo que el homeomorfismo de pegado visto en la sección 1.6 es la máquina ádica

$$(C, \sigma) \text{ con } \sigma(x) = x + .1, x \in C.$$

En general, si  $X$  es un espacio topológico métrico y compacto y  $\sigma : X \rightarrow X$  es un homeomorfismo se dice que la pareja  $(X, \sigma)$  es un sistema dinámico. Por tanto una máquina ádica es un sistema dinámico.

**2.3 Teorema.** *Las máquinas ádicas son mínimas. Esto es, las órbitas de las máquinas ádicas son densas.*

*Demostración.* Sea  $x = 0.x_1x_2\dots \in C_P$  donde  $x_i = 0, 1, 2, \dots, p_i - 1$ . Consideremos  $\bigcap_{j=1}^N U_{k_j}[i]$ , donde  $U_{k_j}[i]$  son cilindros (ver definición 1.32), un elemento de la base topológica de  $C_P$ , vamos a demostrar que para algún  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\sigma^n(x) \in \bigcap_{j=1}^N U_{k_j}[i].$$

Notemos que por como está definida  $\sigma$  es necesario aplicar a lo mas  $P_j^N - 1$  veces  $\sigma$  a  $x$ , donde  $N$  es el número de elementos de la base y  $P_j = \max\{p_i - 1 : p_i \in P\}$ , pues al aplicar  $P_j^N$  veces  $\sigma$  a algún  $x$  las  $k_j$ -ésimas entradas de  $\sigma^{n(x)}(x)$  y  $x$  son las mismas y al aplicarlo a lo mas  $P_j^N - 1$  veces logramos que las  $N$  entradas que nos interesan se encuentren en cada uno de los  $N$ -cilindros.  $\square$

## 2.2

### Teorema de clasificación de solenoides

En esta sección enunciaremos formalmente el teorema de clasificación de solenoides, no sin antes dar algunos conceptos necesarios.

**2.4 Definición.** Si  $U \subset C_P$  es clopen, la máquina ádica  $\sigma$  induce un homeomorfismo  $\sigma_U$  de  $U$  en si mismo. Para cada  $x \in U$ , sea  $n(x)$  el entero más pequeño mayor o igual a 1 tal que  $\sigma^{n(x)}(x) \in U$ . Entonces se define  $\sigma_U(x) = \sigma^{n(x)}(x)$ . Al mapeo  $\sigma_U$ , se le conoce como *mapeo del primer retorno*.

**2.5 Definición.** Diremos que dos sucesiones de números enteros positivos  $P$  y  $Q$  son *equivalentes* y escribimos  $P \sim Q$  si un número finito de números puede ser removido de cada sucesión de modo que cada número restante ocurre la misma cantidad de veces, pudiendo la cantidad ser infinita.

Equivalentemente,  $P$  y  $Q$  son equivalentes si se pueden añadir cantidades finitas de números a ambas sucesiones de modo que la cantidad de números resultante en cada sucesión es la misma en ambas, pudiendo ser dicha cantidad infinita.

**2.6 Ejemplo.** Sean  $P = \{2, 2, \dots\}$ ,  $Q = \{3, 2, 2, \dots\}$  y  $R = \{3, 3, \dots\}$ . Entonces  $P$  es equivalente a  $Q$ , pero  $P$  no es equivalente con  $R$  y  $Q$  tampoco lo es con  $R$ .

**2.7 Ejemplo.** Sean  $P = \{2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, \dots\}$  y  $Q = \{2, 3, 2, 3, \dots\}$ .  $P \sim Q$  pues de cada sucesión puedo borrar un número finito de números (cero), para que en las sucesiones restantes obtenga la misma cantidad de números de cada número (infinito).

**2.8 Definición.** Sean  $P = \{p_1, p_2, \dots\}$  y  $Q = \{q_1, q_2, \dots\}$  sucesiones de enteros mayores que 1. Las máquinas ádicas  $(C_P, \sigma)$  y  $(C_Q, \sigma)$  son *primer retorno equivalentes* si existen subconjuntos  $U$  y  $V$  clopen de  $C_P$  y  $C_Q$  respectivamente, tales que  $(U, \sigma_U)$  y  $(V, \sigma_V)$  son conjugados, es decir; existe un homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  tal que  $h \circ \sigma_U = \sigma_V \circ h$ .

**2.9 Lema.** Sean  $U$  y  $V$  subconjuntos clopen de  $C_P$  y  $C_Q$  respectivamente,  $\sigma_U$  y  $\sigma_V$  sus respectivos mapeos de primer retorno. Entonces

$$\Sigma(C_P, \sigma) \cong \Sigma(U, \sigma_U) \text{ y } \Sigma(C_Q, \sigma) \cong \Sigma(V, \sigma_V).$$

Donde  $\cong$  denota que son homeomorfos.

*Demostración.* Sea  $(x, t) \in \Sigma(U, \sigma_U)$ , definimos  $h : \Sigma(U, \sigma_U) \rightarrow \Sigma(C_P, \sigma)$  como  $h(x, t) = (x, n(x)t)$  si  $n(x)t \in [0, 1]$  y  $h(x, t) = (\sigma^k(x), n(x)t - k)$  si  $n(x)t > 1$  y  $k$  es el entero positivo tal que  $n(x)t - k \in [0, 1]$ , entonces  $\Sigma(C_P, \sigma) \cong \Sigma(U, \sigma_U)$ . Análogamente  $\Sigma(C_Q, \sigma) \cong \Sigma(V, \sigma_V)$ .  $\square$

**2.10 Lema.** Si  $\varphi : X \rightarrow X$  y  $\psi : Y \rightarrow Y$  son conjugados entonces

$$\Sigma(X, \varphi) \cong \Sigma(Y, \psi).$$

*Demostración.* Como  $\varphi$  y  $\psi$  son conjugados existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  tal que  $h \circ \varphi = \psi \circ h$ .

Sea  $H : \Sigma(X, \varphi) \rightarrow \Sigma(Y, \psi)$ , definida por

$$H(x, t) = (h(x), t).$$

$H$  es invertible pues

$$L(y, s) = (h^{-1}(y), s),$$

es la inversa de  $H$ . La continuidad se sigue al verificar que  $H(x, 1) = H(\sigma(x), 0)$  y  $L(x, 1) = L(\sigma(x), 0)$ .  $\square$

Ya que sabemos lo anterior podemos enunciar y demostrar el teorema de clasificación de solenoides.

**2.11 Teorema.** Sea  $P = \{p_1, p_2, \dots\}$  y  $Q = \{q_1, q_2, \dots\}$  sucesiones de enteros positivos tales que  $p_i > 1$  y  $q_i > 1$ . Los siguientes son equivalentes:

- a) Los espacios  $S_P$  y  $S_Q$  son homeomorfos.
- b) Las máquinas ádicas  $(C_P, \sigma)$  y  $(C_Q, \sigma)$  son primer retorno equivalentes.
- c)  $P \sim Q$ .

*Demostración.* **a)  $\Rightarrow$  b).** Si  $S_P$  y  $S_Q$  son homeomorfos, entonces las suspensiones  $\Sigma(C_P, \sigma)$  y  $\Sigma(C_Q, \sigma)$  de las máquinas ádicas  $(C_P, \sigma)$  y  $(C_Q, \sigma)$  son homeomorfas. Ya que las máquinas ádicas son mínimas, por el teorema 2.3, podemos entonces usar la proposición 8 en [15] para concluir que existe un homeomorfismo de  $\Sigma(C_P, \sigma)$  a  $\Sigma(C_Q, \sigma)$  que mapea órbitas en órbitas. El teorema de Parry y Sullivan [20] nos proporciona la existencia de un sistema dinámico de Cantor  $(W, S)$  y dos funciones continuas de  $f_1$  y  $f_2$  con dominio en  $W$  y codominio en los enteros positivos tales que  $(C_P, \sigma)$  y  $(C_Q, \sigma)$  son conjugados, respectivamente, a los sistemas dinámicos  $(W_{f_1}, S_{f_1})$  y  $(W_{f_2}, S_{f_2})$  descritos a continuación:

Para  $i = 1, 2$  y  $j \in \mathbb{Z}$ , sea  $C_{i,j} = \{w \in W : f_i(w) = j\}$  donde la unión se toma sobre todas las  $j$  en la imagen de  $f_i$ , y como  $W$  es compacto y  $f_i$  es continuo, la imagen de  $f_i$  es finita. Sea

$W_{f_i} = \bigcup_{0 \leq k < j} (C_{i,j} \times \{k\})$ . Se define el homeomorfismo  $S_{f_i}: W_{f_i} \rightarrow W_{f_i}$  por la fórmula

$$S_{f_i}(x, k) = \begin{cases} (x, k+1) & \text{si } k+1 < f(x) \\ (S(x), 0) & \text{si } k = f(x) - 1. \end{cases}$$

Los sistemas dinámicos construidos arriba se denominan *suspensiones discretas* del sistema  $(W, S)$ . Ver sección 1.4 en [2].

Supongamos que  $h_P$  y  $h_Q$  son los mapeos que implementan las conjugaciones entre  $(C_P, \sigma)$  con  $(W_{f_1}, S_{f_1})$  y  $(C_Q, \sigma)$  con  $(W_{f_2}, S_{f_2})$ , respectivamente. Definamos los conjuntos clopen

$$U = h_P^{-1}(W \times \{0\}) \subset C_P$$

y

$$V = h_Q^{-1}(W \times \{0\}) \subset C_Q.$$

Para probar que  $(C_P, \sigma)$  y  $(C_Q, \sigma)$  son primer retorno equivalentes y completar la demostración, vamos a probar que  $(U, \sigma_U)$  y  $(V, \sigma_V)$  son conjugados, lo cual se sigue al verificar que la restricción de  $h_P$  seguida de  $h_Q^{-1}$  es el mapeo que implementa la conjugación deseada.

**c)  $\Rightarrow$  b).** Sabemos que  $P \sim Q$  entonces podemos asumir que los números borrados son  $p_1, \dots, p_s$  y  $q_1, \dots, q_t$  respectivamente, dado que un cambio en el orden de alguna subsucesión finita de números no cambia el tipo de isomorfismo de la máquina ádica.

Sea  $P' = \{p_{s+1}, p_{s+2}, \dots\}$  y  $Q' = \{q_{t+1}, q_{t+2}, \dots\}$  las sucesiones derivadas. Sean

$$U = \{0\} \times \{0\} \times \dots \times \prod_{i=s+1}^{\infty} \{0, 1, \dots, p_i - 1\}$$

y

$$V = \{0\} \times \{0\} \times \dots \times \prod_{i=t+1}^{\infty} \{0, 1, \dots, q_i - 1\}$$

subconjuntos clopen de  $C_{P'}$  y  $C_{Q'}$  respectivamente, podemos afirmar que  $(C_{P'}, \sigma)$  y  $(C_{Q'}, \sigma)$  son conjugados, primero definimos el mapeo conjugación en una órbita solamente; sea  $e = (0, 0, \dots)$  entonces  $h(\sigma^n(x)(e)) = \sigma^{n(x)}(e)$ , siguiendo la misma idea que en la primera parte de la demostración del teorema obtenemos que  $h$  es el homeomorfismo que buscamos.

**b)  $\Rightarrow$  c).** Sean  $U$  y  $V$  subconjuntos clopen de  $C_P$  y  $C_Q$  respectivamente y sea  $h: U \rightarrow V$  un homeomorfismo que implica la conjugación de  $\sigma_U$  con  $\sigma_V$ . Sea  $y = h(x)$ , podemos asumir que

$$U = \{x_1\} \times \dots \times \{x_k\} \times \prod_{i=k+1}^{\infty} \{0, 1, \dots, p_i - 1\}$$

Por compacidad existe un número  $l$  y puntos  $y^1, \dots, y^N$  tales que  $V$  es la unión disjunta de los conjuntos

$$\{y_1^j\} \times \dots \times \{y_l^j\} \times \prod_{i=l+1}^{\infty} \{0, 1, \dots, q_i - 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

notemos que estos  $N$  conjuntos son permutados por  $\sigma_V$ . Sea  $m > l + 1$ . Por continuidad de  $h$  existe un  $n$  tal que

$$h \left( \{x_1\} \times \dots \times \{x_k\} \times \prod_{i=k+1}^{\infty} \{0, \dots, p_i - 1\} \right) \subset \{y_1\} \times \dots \times \{y_m\} \times \prod_{i=m+1}^{\infty} \{0, 1, \dots, q_i - 1\}.$$

Por inspección de la máquina ádica y de la conjugación observamos que para algún  $M$  tenemos

$$p_{k+1}p_{k+2} \cdot \dots \cdot p_n = MNq_{l+1} \cdot \dots \cdot q_m,$$

esto es, un elemento de  $U$  regresa a  $\{x_1\} \times \dots \times \{x_n\} \times \prod_{i=n+1}^{\infty} \{0, 1, \dots, p_i - 1\}$  cada  $p_{k+1}p_{k+2} \cdot$

$\dots \cdot p_n$  veces, sin embargo un elemento de  $V$  regresa a  $\{y_1\} \times \dots \times \{y_m\} \times \prod_{i=l+1}^{\infty} \{0, 1, \dots, q_i - 1\}$

una vez cada  $N \cdot q_{l+1} \cdot \dots \cdot q_m$ . Esto muestra que la cola  $(q_{l+1}, q_{l+2}, \dots)$  de  $Q$  puede ser mapeada inyectivamente en la sucesión  $P$ . Invertiendo los roles de  $P$  y  $Q$  encontramos que alguna cola de  $P$  puede ser mapeada inyectivamente en  $Q$ . Se sigue que  $P \sim Q$ .  $\square$

**2.12 Ejemplo.** Sea  $P$ ,  $Q$  y  $R$  como en el ejemplo 2.6. Por el teorema 2.11 se tiene que el espacio  $S_P$  es homeomorfo al espacio  $S_Q$ , pero el espacio  $S_P$  no es homeomorfo al espacio  $S_R$  y el espacio  $S_Q$  tampoco es homeomorfo a  $S_R$ .

Con estos ejemplos nos damos cuenta de que en realidad localmente todos los solenoides se parecen, sin embargo resulta que hay muchos ¡distintos! (no homeomorfos) entre si y esto desde luego es contraintuitivo pues podría pensarse que todos los solenoides son homeomorfos por ser contruidos a partir de un conjunto de Cantor y es que todos los conjuntos de Cantor son homeomorfos entre si.

# CAPÍTULO 3

---

## El solenoide como límite inverso

---

En este capítulo vamos a introducir el concepto de solenoide como límite inverso y enunciaremos el teorema que caracteriza a los solenoides como suspensiones de homeomorfismos del conjuntos de Cantor.

Podríamos preguntarnos porque es necesario introducir esta herramienta pues ya en el capítulo anterior clasificamos los solenoides y con eso ya tenemos todo lo que necesitamos saber. Sin embargo cuando nos preguntamos si cualquier homeomorfismo de un conjunto de Cantor induce un solenoide nos dimos cuenta que era necesario introducir una nueva herramienta, razón por la cual los límites inversos son de gran ayuda.

### 3.1

#### Límites inversos

En esta sección introduciremos el concepto de límite inverso y estableceremos algunas propiedades elementales que nos serán de gran utilidad. Los límites inversos pueden ser definidos para objetos como conjuntos, anillos, módulos, gráficos y en general para categorías abstractas, nosotros nos enfocamos a los límites inversos de los espacios topológicos.

Sea  $N$  un conjunto parcialmente ordenado, es decir,  $N$  es un conjunto con una relación binaria  $\leq$  que satisface las siguientes condiciones;

- $i \leq i$ , para  $i \in N$ .
- $i \leq j$  y  $j \leq k$  implica que  $i \leq k$ , para  $i, j, k \in N$ .
- Si  $i, j \in N$  entonces existe algún  $k \in N$  tal que  $i, j \leq k$ .

Un *sistema inverso* de espacios topológicos sobre  $N$  consiste de una colección  $\{X_i : i \in N\}$  de espacios topológicos indexados por  $N$ , donde  $N$  es un conjunto parcialmente ordenado y una colección de homeomorfismos;

$$\varphi_{ij} : X_i \rightarrow X_j$$

los cuales están definidos cuando  $i \geq j$ , de tal manera que los diagramas de la forma

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\varphi_{ik}} & X_k \\ \varphi_{ij} \downarrow & \nearrow \varphi_{jk} & \\ & X_j & \end{array}$$

conmutan cuando  $i, j, k \in N$  y  $i \geq j \geq k$ . Además asumimos que  $\varphi_{ii}$  es el mapeo identidad  $id_{X_i}$  en  $X_i$ . Denotaremos dicho sistema por  $\{X_i, \varphi_{ij}, N\}$  o por  $\{X_i, \varphi_{ij}\}$  si el conjunto  $N$  está claramente entendido. Si  $X$  es un espacio topológico fijo, denotemos por  $\{X, id\}$  al sistema inverso  $\{X_i, \varphi_{ij}, N\}$  donde  $X_i = X$  para todo  $i \in N$  y  $\varphi_{ij}$  es el mapeo identidad  $id : X \rightarrow X$ . Decimos que  $\{X, id\}$  es el sistema inverso constante en  $X$ .

Sea  $Y$  un espacio topológico, sea  $\{X_i, \varphi_{ij}, N\}$  un sistema inverso de espacios sobre un conjunto parcialmente ordenado y sea  $\psi_i : Y \rightarrow X_i$  un mapeo para cada  $i \in N$ . La colección de mapeos  $\{\psi_i\}_{i \in N}$  es llamado *compatible* si

$$\varphi_{ij}\psi_i = \psi_j, \text{ donde } j \leq i.$$

Decimos que un espacio topológico  $X$  junto con una colección de mapeos compatibles continuos

$$\varphi_i : X \rightarrow X_i \quad (i \in N)$$

es un *límite inverso* de un sistema inverso  $\{X_i, \varphi_{ij}, N\}$  si la siguiente propiedad universal se satisface: si  $Y$  es un espacio topológico y  $\psi_i : Y \rightarrow X_i$  ( $i \in N$ ) es un conjunto de mapeos compatibles continuos, entonces existe un único mapeo continuo  $\psi : Y \rightarrow X$  tal que  $\varphi_i\psi = \psi_i$  para todo  $i \in N$ .

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\psi} & X \\ \psi_i \downarrow & \nearrow \varphi_i & \\ & X_i & \end{array}$$

Decimos que  $\psi$  es inducido o determinado por el homeomorfismo compatible  $\psi_i$ .

Los mapeos  $\varphi_i : X \rightarrow X_i$  son llamados proyecciones. Las proyecciones no son necesariamente suprayectivas. Denotamos el límite inverso por  $\lim_{\leftarrow} X_i$  o por  $\lim_{\leftarrow} (X_i, \varphi_{ij})$ .

Si  $\{X_i, N\}$  es una colección de espacios topológicos con  $N$  el conjunto de índices, su producto cartesiano o producto directo es el espacio topológico  $\prod_{i \in N} X_i$  dotado con la topología producto (ver [23]).

Un ejemplo de límite inverso se muestra a continuación.

**3.1 Ejemplo.** Consideremos  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , una familia de espacios topológicos. Definimos  $\pi_{mn} : X_m \rightarrow X_n$  para  $n \leq m$  como

$$\pi_{mn}(x) = x + (m - n)$$

lo que demostraremos a continuación es que

$$\lim_{\leftarrow} (X_n, \pi_{mn}) = \emptyset.$$

*Demostración:*

Sea  $L := \lim_{\leftarrow} X_n$  supongamos que  $L \neq \emptyset$ , entonces  $x \in L$ ,  $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ . Supongamos que

$$\pi_{21}(x_2) = x_1$$

$$\pi_{21}(x_2) = x_2 + (2 - 1) = x_2 + 1 \Rightarrow x_2 = x_1 + (-1).$$

$$\pi_{m1}(x_m) = x_1, \text{ pero } \pi_{m1}(x_m) = x_m + (m - 1) \Rightarrow x_m = x_1 + (1 - m).$$

Si  $x_1 = k$  entonces  $x_k = x_1 + (1 - k) = 1$ .

Con  $k + 1$ ,  $x_{k+1} = x_1 + (1 - (k + 1)) = 0$ , lo que resulta una contradicción pues  $0 \notin \mathbb{N}$

$$\therefore \lim_{\leftarrow} (X_n, \pi_{mn}) = \emptyset.$$

**3.2 Proposición.** Sea  $\{X_i, \varphi_{ij}, N\}$  un sistema inverso de espacios topológicos sobre un conjunto parcialmente ordenado  $N$ . Entonces se cumple que;

- Existe un límite inverso del sistema inverso  $\{X_i, \varphi_{ij}, N\}$ .
- Este límite es único en el siguiente sentido. Si  $(X, \varphi_i)$  y  $(Y, \psi_i)$  son dos límites de un sistema inverso  $\{X_i, \varphi_{ij}, N\}$ , entonces existe un único homeomorfismo  $\varphi : X \rightarrow Y$  tal que  $\psi_i \varphi = \varphi_i$  para cada  $i \in N$ .

*Demostración.* a) Definimos  $X$  como el subespacio del producto  $\prod_{i \in N} X_i$  de subespacios topológicos que consisten de estas tuplas  $(x_i)$  que satisfacen la condición  $\varphi_{ij}(x_j) = x_i$  si  $i \geq j$ .

Sea  $\varphi_i : X \rightarrow X_i$ , denotamos la restricción de la proyección canónica  $\prod_{i \in N} X_i \rightarrow X_i$ . Se verifica fácilmente que cada  $\varphi_i$  es continuo y que  $(X_i, \varphi_i)$  es un límite inverso.

b) Supongamos  $(X, \varphi_i)$  y  $(Y, \psi_i)$  son dos límites de un sistema inverso  $\{X_i, \varphi_{ij}, N\}$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \varphi_i \downarrow & \swarrow \psi & \searrow \psi_i \\ X_i & & \end{array}$$

Dado que los mapeos  $\psi_i : Y \rightarrow X_i$  son compatibles, la propiedad universal de límite inverso  $(X, \varphi_i)$  muestra que existe un único mapeo continuo  $\psi : Y \rightarrow X$  tal que  $\varphi_i \psi = \psi_i$  para todo  $i \in N$ . Similarmente, dado que los mapeos  $\varphi_i : X \rightarrow X_i$  son compatibles y  $(Y, \psi_i)$  es un límite inverso, existe un único mapeo continuo  $\varphi : X \rightarrow Y$  tal que  $\psi_i \varphi = \varphi_i$  para todo  $i \in N$ . Luego observamos que

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\psi\varphi} & \\ X & \xrightarrow{id_X} & X \\ \varphi_i \downarrow & \searrow \varphi_i & \\ X_i & & \end{array}$$

conmuta para cada  $i \in N$ . Por definición, existe un único mapeo que satisface esta propiedad, tenemos entonces que  $\psi\varphi = id_X$ . Similarmente  $\varphi\psi = id_Y$ . Entonces  $\varphi$  es un homeomorfismo.  $\square$

El límite inverso como el subespacio del espacio producto  $\prod_{i \in N} X_i$  admite la siguiente descripción;

$$\lim_{\leftarrow} (X_i, f_{ij}) = \left\{ x_i \in \prod_{i \in N} X_i : x_i = f_{ij}(x_j) \quad \forall i \leq j \right\}.$$

## 3.2

### Solenoides y homeomorfismos en el conjunto de Cantor

Con lo que vimos en el capítulo anterior se podría concluir que si los solenoides son suspensiones de homeomorfismos de Cantor entonces todas las suspensiones de homeomorfismos de Cantor son solenoides, sin embargo esto no es cierto y el teorema 3.6 explica porqué sucede esto. En lo que resta del capítulo veremos que las definiciones de solenoides son equivalentes y veremos como, sin pérdida de generalidad, la sucesión  $P$  es una sucesión formada por números primos.



Notemos que

$$\begin{array}{ll}
 f_6(z_6) = z_6^2 = z_5 & \text{y} & g_6(z_6) = z_6^4 = z_5 \\
 f_5(z_5) = z_5^2 = z_6^4 = z_4 & & g_5(z_5) = z_5^4 = z_6^{16} = z_4 \\
 f_4(z_4) = z_4^2 = z_6^8 = z_3 & & g_4(z_4) = z_4^4 = z_6^{64} = z_3 \\
 f_3(z_3) = z_3^2 = z_6^{16} = z_2 & & g_3(z_3) = z_3^4 = z_6^{256} = z_2 \\
 f_2(z_2) = z_2^2 = z_6^{32} = z_1 & & g_2(z_2) = z_2^4 = z_5^{1024} = z_1 \\
 f_1(z_1) = z_1^2 = z_6^{64} & & g_1(z_1) = z_1^4 = z_5^{4096}
 \end{array}$$

De esta manera,  $f_5(z_5) = g_6(z_6)$ ,  $f_3(z_3) = g_5(z_5)$  y  $f_1(z_1) = g_4(z_4)$ .

Si seguimos la sucesión indefinidamente notamos que  $g_i(z_i) = f_{i-3} \circ f_{i-2}(z_{i-2})$ . por la propiedad universal existe un mapeo que logra que  $T_P$  y  $T_Q$  sean homeomorfos.

Lo que esta pasando es que si a la sucesión de toros unidimensionales del límite inverso  $T_Q$  le agregamos toros unidimensionales entre cada dos toros (figura 3.1) y consideramos el mapeo  $f_i(z_i) = z_i^2$  obtenemos el mismo límite inverso.

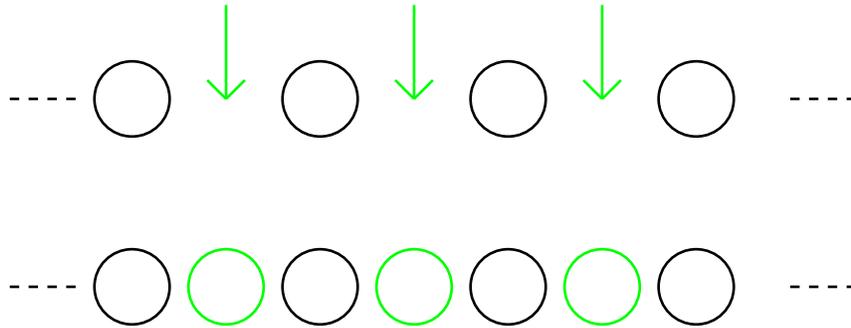


Figura 3.1: Agregando un toro unidimensional

Tenemos que darnos cuenta que el límite inverso  $T_P$  y  $T_Q$  es el mismo pues solo aumentamos un toro unidimensional entre cada dos. Ahora por la propiedad universal sabemos que si  $T_P$  y  $T_Q$  son el mismo límite inverso de un sistema inverso entonces existe  $\sigma$  homeomorfismo tal que  $T_P \cong T_Q$ .

Lo mismo pasa si ahora consideramos la sucesiones  $R = \{2, 2, 2, \dots\}$  y la  $S = \{8, 8, \dots\}$  y los correspondientes límites inversos  $T_R$  y  $T_S$ , notemos que  $8 = 2^3$ , entonces a la sucesión de toros unidimensionales del límite inverso  $T_S$  le agregamos dos toros unidimensionales (figura 3.2), entre cada dos y consideramos los mapeos  $g_i(z_i) = ((h_i(z_i))^2)^2 = ((z_i^2)^2)^2$  y así obtenemos el mismo límite inverso.

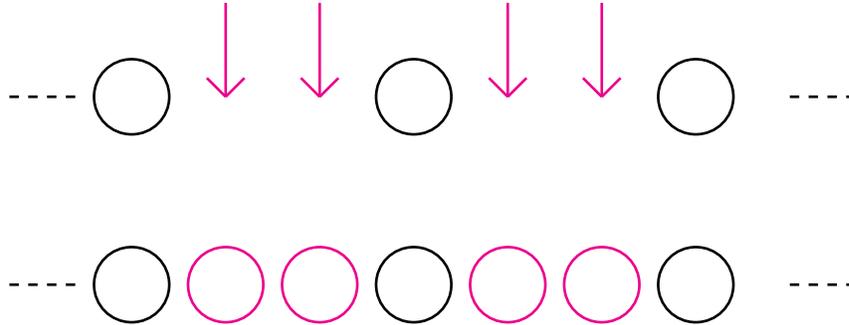


Figura 3.2: Agregando dos toros unidimensionales

De manera general, podemos considerar la sucesión  $P = \{p_1, p_2, \dots\}$  donde cada  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , es un entero mayor igual que 1, cada  $p_i$  lo podemos escribir como producto de potencia de primos, así  $p_i = q_{i_1}^{\alpha_{i_1}} q_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \dots q_{i_{m_i}}^{\alpha_{i_{m_i}}}$ , entonces podemos reescribir  $P$  como

$$P = \left\{ q_{1_1}^{\alpha_{1_1}} q_{1_2}^{\alpha_{1_2}} \dots q_{1_{m_1}}^{\alpha_{1_{m_1}}}, q_{2_1}^{\alpha_{2_1}} q_{2_2}^{\alpha_{2_2}} \dots q_{2_{m_2}}^{\alpha_{2_{m_2}}}, \dots \right\}.$$

Con esto podemos considerar la sucesión

$$Q = \left\{ \underbrace{q_{1_1}, \dots, q_{1_1}}_{\alpha_{1_1} \text{ veces}}, \underbrace{q_{1_2}, \dots, q_{1_2}}_{\alpha_{1_2} \text{ veces}}, \dots, \underbrace{q_{1_{m_1}}, \dots, q_{1_{m_1}}}_{\alpha_{1_{m_1}} \text{ veces}}, q_{2_1}, \dots, q_{2_1}, q_{2_2}, \dots, q_{2_2}, \dots, q_{2_{m_2}}, \dots \right\},$$

la cual resulta ser homeomorfa a la sucesión  $P$ , lo que hace que  $T_P \cong T_Q$ .

Solo tenemos que imaginarnos que introducimos  $\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_{m_i}} - 1$  toros unidimensionales entre cualesquiera dos en el diagrama que se asocia a la sucesión  $P$ .

**3.5 Lema.** *Sea  $T_P$  un límite inverso como definido arriba, con  $P$  una sucesión de primos. Entonces existe un homeomorfismo  $g$  en  $C$  tal que  $S_P$  es homeomorfo a  $\Sigma(C, g)$  y para algún  $\varepsilon > 0$  existen subintervalos  $I_\varepsilon$  clopen de  $C$  y un entero positivo  $n_\varepsilon$  tal que los conjuntos  $g(I_\varepsilon), g^2(I_\varepsilon), \dots, g^{n_\varepsilon}(I_\varepsilon)$  son disjuntos a pares y subconjuntos clopen de  $C$  con diámetros menores que  $\varepsilon$ , la unión de los cuales es igual a  $C$ .*

*Demostración.* Consideremos el siguiente diagrama;

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{T}^1 & \xleftarrow{f_1} & \mathbb{T}^1 & \xleftarrow{f_2} & \mathbb{T}^1 & \xleftarrow{\dots} & S_P \\ \uparrow q_1 & & \uparrow q_2 & & \uparrow q_3 & & \uparrow \\ I_1 & \xleftarrow{R_{12}} & I_2 & \xleftarrow{R_{23}} & I_3 & \xleftarrow{\dots} & C \times I \end{array}$$

donde  $I_1 = I = [0, 1]$ ,  $I_{n+1} = I_n \times \{1, \dots, p_n\}$ ,  $R_{n,n+1}$  son proyecciones de  $I_{n+1}$  sobre  $I_n$ ,  $f_n$  son definidas por  $f_n(z) = z^{p_n}$ ,  $q_1(t) = e^{2\pi it}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , y el mapeo continuo  $q_n$ ,  $n > 1$ , son determinadas por la condición de que el diagrama anterior conmute.

Lo que tenemos que ver primero es porque podemos utilizar este diagrama. Primero veremos que  $C \times I = \varprojlim (I_n, R_{n,n+1})$ . Para este propósito si  $z \in \varprojlim (I_n, R_{n,n+1})$ , tenemos que demostrar que existe  $x \in C$  y  $t \in I$  tales que

$$z = (x, t) \in C \times I.$$

Como  $z \in \varprojlim (I_n, R_{n,n+1})$  entonces  $z = (z_n) = (x, t)$ , donde  $x = (z_1, z_2, \dots) \in I_n$  y  $t \in I$ , por lo tanto

$$z_1 = x_1 \in I_1 = I.$$

Luego,  $z_2 \in I_2 = I_1 \times \{1, \dots, p_1\}$ , entonces  $z_2 = (x_1, m_1)$ , donde  $m_1 \in \{1, \dots, p_1\}$ . Aplicamos  $R_{n,n+1}$  a  $z_2$  obtenemos

$$R_{1,2}(z_2) = R_{1,2}(x_1, m_1) = x_1 = z_1.$$

Luego  $z_2 = (z_1, m_1)$ .

Con la misma idea  $z_3 = (x_2, m_2)$ , donde  $m_2 \in \{1, \dots, p_1\} \times \{1, \dots, p_2\}$ , aplicando  $R_{n,n+1}$  a  $z_3$  obtenemos

$$R_{2,3}(z_3) = R_{2,3}(x_2, m_2) = z_2 = (x_1, m_1).$$

Continuando con este procedimiento obtenemos que

$$z = \{z_1, z_2, \dots\} = \{x_1, (x_1, m_1), (x_2, m_2), \dots\} = \{x_1, x_1, m_1, x_2, m_2, \dots\},$$

por lo que  $z \in I_n \times \{1, \dots, p_n\}$ .

Sea  $(x, t) \in C \times I$ , tenemos que encontrar  $z \in \varprojlim (I_n, R_{n,n+1})$  que corresponda a  $(x, t)$ .

Consideremos  $x = (m_1, m_2, \dots)$  donde  $m_i \in \prod_{n=1}^i \{1, \dots, p_n\}$ .

Sean

$$z_1 = t$$

$$z_2 = (m_1, z_1) = (m_1, t)$$

$$z_3 = (m_2, z_2) = (m_2, (m_1, t)) = (m_2, m_1, t)$$

$$z_4 = (m_3, z_3) = (m_3, (m_2, m_1, t)) = (m_3, m_2, m_1, t)$$

.

.

.

$$z_n = (m_{n-1}, z_{n-1}) = (m_{n-1}, \dots, m_2, m_1, t) \text{ y } z = \{z_n\} \Rightarrow C \times I = \varprojlim (I_n, R_{n,n+1})$$

Todas las funciones  $q_n$  son suprayectivas. Como  $q_1$  es sobre induce una función continua  $q$  de  $C \times I$  sobre  $S_p$ , la cual conmuta en el diagrama. Definimos una función  $g$  de  $C$  en  $C$  estableciendo  $y = g(x)$  si y solo si  $q(y, 1) = q(x, 0)$ . Por el diagrama concluimos que  $g$  es el homeomorfismo

que busquemos.

Sea  $R_n$  la proyección de  $C \times I$  sobre  $I_n$  y sea  $\varepsilon$  un real positivo. Entonces existe un entero positivo  $j$  tal que el diámetro de una imagen inversa  $R_{j+1}^{-1}(0, i_1, \dots, i_j)$  es menor que  $\varepsilon$ , donde  $(0, i_1, \dots, i_j) \in I_{j+1}$ . El conjunto  $I_\varepsilon$  tal que  $I_\varepsilon \times \{0\}$  es igual a la imagen inversa y  $n_\varepsilon = p_1 \cdot \dots \cdot p_j$  satisface las condiciones del lema.  $\square$

El lema anterior nos muestra que, como era de esperarse, el límite inverso  $T_P$  no es otra cosa que el solenoide  $P$ -ádico  $S_P$ . El siguiente teorema nos muestra la caracterización de los solenoides.

**3.6 Teorema.** *Sea  $\sigma_1$  un homeomorfismo de un espacio de Cantor  $C$  en si mismo. La suspensión  $\Sigma(C, \sigma_1)$  del homeomorfismo  $\sigma_1$  es un solenoide  $P$ -ádico si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un subconjunto clopen  $D_\varepsilon$  de  $C$  y un entero positivo  $n_\varepsilon$  tal que  $\{\sigma^j(D_\varepsilon) : j = 1, \dots, n_\varepsilon\}$  es una cubierta de  $C$  que consiste de subconjuntos disjuntos a pares de  $C$  de diámetros menores que  $\varepsilon$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\Sigma(C, \sigma_1)$  es un solenoide  $P$ -ádico. Por el lema anterior,  $\Sigma(C, \sigma_1)$  es homeomorfo a  $\Sigma(C, \sigma_2)$  bajo un homeomorfismo  $F$ , donde  $\sigma_2 : C \rightarrow C$  es un homeomorfismo tal que para cada  $\varepsilon > 0$  existe un subintervalo  $I_\varepsilon$  clopen de  $C$  y un entero positivo  $n'_\varepsilon$  tal que  $\{\sigma_2^j(I_\varepsilon) : j = 1, \dots, n'_\varepsilon\}$  son subconjuntos disjuntos a pares que cubren a  $C$  y cuyos diámetros son menores que  $\varepsilon$  que forman una cubierta de  $C$ .

Podemos asumir que  $F \cdot q_{\sigma_1}(C \times \{0, 1\})$  no tiene puntos en común con  $q_{\sigma_2}(C \times \{0, 1\})$ , donde  $q_{\sigma_1}$  y  $q_{\sigma_2}$  son los mapeos cocientes de  $C \times I$  sobre  $\Sigma(C, \sigma_1)$  y  $\Sigma(C, \sigma_2)$  respectivamente.

Para algún punto  $c \in C$  existe  $\delta > 0$  tal que para cada vecindad  $U_c$  de  $c$ , el diámetro es menor que  $\delta$ ,  $b_c = q_{\sigma_2}^{-1}(F \cdot q_{\sigma_1}(U_c \times \{0\}))$  es el único punto en común del conjunto  $q_{\sigma_2}^{-1}(F \cdot q_{\sigma_1}(U_c \times \{0\}))$  y de alguna línea de  $C \times I$ . Supongamos que existe un punto  $c$  de  $C$  tal que para cualquier vecindad  $U_c$  de  $c$  el conjunto  $q_{\sigma_2}^{-1}(F \cdot q_{\sigma_1}(U_c \times \{0\}))$  tiene al menos dos puntos en común con algunas líneas de  $C \times I$ .

Consideremos los pares de puntos de  $q_{\sigma_2}^{-1}(F \cdot q_{\sigma_1}(U_c \times \{0\}))$  que están sobre esas mismas líneas. Entonces existe una sucesión de estas parejas que convergen a  $b_c$ , así los puntos extremos de estas parejas convergen a  $b_c$ , pero la longitud de cada imagen inversa de  $F$  de estos segmentos son mayores o iguales a 1, lo que es una contradicción. Entonces, para cada punto  $c$  de  $C$  existe una vecindad  $U_c$  tal que  $q_{\sigma_2}^{-1}(F \cdot q_{\sigma_1}(U_c \times \{0\}))$  tiene a lo más un punto en común con cada línea de  $C \times I$ . Podemos elegir una familia finita  $\{U_1, \dots, U_k\}$  de estas vecindades que consisten de subconjuntos clopen de  $C$  disjuntos a pares, los cuales cubren a  $C$ . La proyección sobre  $C$  de cada  $q_{\sigma_2}^{-1}(F \cdot q_{\sigma_1}(U_i \times \{0\}))$ ,  $i = 1, \dots, k$ , es un subconjunto clopen de  $C$ .

Veamos,  $q_{\sigma_2}^{-1}(F \cdot q_{\sigma_1}(U_i \times \{0\}))$  es un conjunto cerrado pues es la imagen inversa de un conjunto cerrado. Veamos que sea abierto, tomemos  $n$  tal que  $q_{\sigma_2}^{-1}(F \cdot q_{\sigma_1}(U_i \times [0, \frac{1}{n}] \cup \sigma_1(U_i) \times (1 - \frac{1}{n}, 1]))$  está contenido en  $C \times (0, 1)$ . La proyección de este conjunto sobre  $C$  es un subconjunto

abierto de  $C$  igual que la proyección de la que procede. Entonces existe una familia de subconjuntos clopen  $D_1, \dots, D_m$  disjuntos a pares tales que para cada dos líneas de  $D_i \times I$  se tiene la misma cantidad de puntos en común con  $q_{\sigma_2}^{-1} \cdot F \cdot q_{\sigma_1}(C \times \{0, 1\})$ . Podemos asumir que  $F$  es un homeomorfismo tal que la proyección de  $q_{\sigma_2}^{-1} \cdot F \cdot q_{\sigma_1}(C \times \{0, 1\}) \cap D_i \times I$  sobre  $I$  es un conjunto finito de cardinalidad igual a la única parte común de  $q_{\sigma_2}^{-1} \cdot F \cdot q_{\sigma_1}(C \times \{0, 1\})$  y de alguna línea de  $D_i \times I$ . Entonces la proyección del conjunto  $q_{\sigma_2}^{-1} \cdot F \cdot q_{\sigma_1}(C \times \{0, 1\})$  sobre  $I$  es un conjunto finito que nombraremos  $A$ .

Sea  $\varepsilon_1$  un real positivo menor que la distancia de dos puntos diferentes de  $A \cup \{0, 1\}$ , tal que algún subconjunto de  $C$  con diámetro menor que  $\varepsilon_1$  esta contenido en el mismo  $D_i$ . Fijamos un  $\varepsilon > 0$ , ya que  $q_{\sigma_2}^{-1} \cdot F \cdot q_{\sigma_1}$  sobre  $C \times \{0\}$  es un homeomorfismo sobre la imagen, existe  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$  tal que el diámetro de las imagen invers de algún subconjunto cuyo diámetro de la imagen inversa sea menor que  $\varepsilon_2$  es menor que  $\varepsilon$ . Como asumimos que existe un subintervalo  $I_\varepsilon$  de  $C$  tal que los subconjuntos  $\sigma_2^j(I_\varepsilon)$ ,  $j = 1, \dots, n\varepsilon'$ , son disjuntos a pares sus diámetros menores que  $\varepsilon_2$  y la unión de estos es igual a  $C$ , de esta manera cada subconjunto esta contenido en algún  $D_i$ . Tomemos  $j$  tal que la intersección de  $\sigma_2^j(I_\varepsilon) \times I$  y  $q_{\sigma_2}^{-1} \cdot F \cdot q_{\sigma_1}(C \times \{0, 1\})$  es no vacía. Sea  $D'_\varepsilon$  un subconjunto de tal intersección que consiste de puntos con la misma segunda coordenada. El subconjunto  $D_\varepsilon$  de  $C$  tal que  $D_\varepsilon \times \{0\} = C \times \{0\} \cap q_{\sigma_1}^{-1} \cdot F^{-1} \cdot q_{\sigma_2}(D'_\varepsilon)$  es el subconjunto clopen de  $C$  que queríamos.

$\Leftrightarrow$ ) Supongamos ahora que existe un homeomorfismo  $\sigma_1 : C \rightarrow C$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$  existe un subconjunto clopen  $D_\varepsilon$  de  $C$  y un entero positivo  $n_\varepsilon$  tal que  $\{\sigma_1^j(D_\varepsilon) : j = 1, \dots, n_\varepsilon\}$  son subconjuntos disjuntos a pares de diámetros menores que  $\varepsilon$ , la unión de los cuales es igual a  $C$ .

Sea  $\mathbb{T}^1$  el toro unidimensional en el plano complejo y sea  $I_1$  el intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Denotaremos por  $q_1$  al mapeo  $q_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{T}^1$  definido por  $q_1(t) = e^{2\pi it}$ .

Ahora, tomemos  $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ , elejimos un subconjunto  $D_2$  clopen de  $C$  tal que los conjuntos  $\sigma_1^j(D_2)$ ,  $j = 1, \dots, n_2$  son subconjuntos clopen disjuntos a pares de  $C$  que cubren a  $C$  y cuyos diámetros son menores que  $\varepsilon_2$ . Sea  $I_2 = I_1 \times \{1, \dots, n_2\}$ , sea  $R_{12}$  la proyección de  $I_2$  sobre  $I_1$  y sea  $g_{12}$  el mapeo de  $\mathbb{T}_2^1 = \mathbb{T}^1$  sobre  $\mathbb{T}_1^1 = \mathbb{T}^1$  tal que  $g_{12}(e^{2\pi it}) = e^{2n_2\pi it}$ . Sea  $q_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{T}_2^1$  el único mapeo tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} I_1 & \xleftarrow{R_{12}} & I_2 \\ \downarrow q_1 & & \downarrow q_2 \\ \mathbb{T}_1^1 & \xleftarrow{g_{12}} & \mathbb{T}_2^1 \end{array}$$

conmuta, es decir  $q_2(t, j) = e^{2\pi i \frac{j-1+t}{n_2}}$ .

Tomemos  $\varepsilon_3 < \frac{1}{3}$  tal que cada subconjunto de  $C$  con diámetro menor que  $\varepsilon_3$  este contenido en algún conjunto  $D_2$ . Entonces existe un subconjunto clopen  $D_3$  de  $C$  y un entero positivo  $n_3$  tal que  $\sigma_1(D_3)$ ,  $j = 1, \dots, n_3$  forma una cubierta de  $C$  que consiste de subconjuntos disjuntos

a pares de  $C$  con diámetros menores que  $\varepsilon_3$ . Notemos que  $n_3 = k_3 \cdot n_2$ , donde  $k_3$  es un entero positivo. Definimos  $R_{23} : I_3 = I_2 \times \{1, \dots, k_3\} \rightarrow I_2$  como una proyección en el producto cartesiano y  $g_{23}$  de  $\mathbb{T}_3^1 = \mathbb{T}^1$  sobre  $\mathbb{T}_2^1$  por  $g_{23}(e^{2\pi i t}) = e^{2k_3 \pi i t}$ . Hacemos  $q_3 : I_3 \rightarrow \mathbb{T}_3^1$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} I_1 & \xleftarrow{R_{12}} & I_2 & \xleftarrow{R_{23}} & I_3 \\ \downarrow q_1 & & \downarrow q_2 & & \downarrow q_3 \\ \mathbb{T}_1^1 & \xleftarrow{g_{12}} & \mathbb{T}_2^1 & \xleftarrow{g_{23}} & \mathbb{T}_3^1 \end{array}$$

conmuta, es decir,  $q_3(t, k, j) = e^{2\pi i \frac{k-1+n_2(j-1)+t}{n_2 \cdot k_3}}$ .

Procediendo por inducción, obtenemos dos sistemas inversos y los límites inversos de estos sistemas son  $C \times I$  y el solenoide  $P$ -ádico  $S_P$  respectivamente. Identificamos los puntos en  $\text{lím}\{I_j, R_{nk}\}$  con los puntos del producto  $C \times I$ , donde  $C$  es el conjunto de Cantor en donde definimos el homeomorfismo  $\sigma_1$ . Así, inducimos el mapeo  $q : C \times I \rightarrow S_P$  tal que  $q(x, 0) = q(\sigma_1(x), 1)$ ,  $x \in C$ .

Por lo tanto,  $S_P$  y  $\Sigma(C, \sigma_1)$  son homeomorfos.  $\square$

Un ejemplo de una pareja que no cumple con las condiciones del teorema es el siguiente:

**3.7 Ejemplo.** Consideremos el espacio  $\Sigma(C, \sigma)$  con  $\sigma$  la identidad, esto es  $\sigma(x) = x$ . Sea  $D_\varepsilon$  un subconjunto clopen de  $C$ .

Aplicando  $\sigma$ ,

$$\sigma(D_\varepsilon) = D_\varepsilon, \text{ entonces } \sigma^2(D_\varepsilon) = D_\varepsilon;$$

de esta manera  $\sigma^{n\varepsilon}(D_\varepsilon) = D_\varepsilon$ . Por lo que con  $\sigma$  como la identidad no podemos cubrir todo  $C$ .

$\therefore \Sigma(C, \sigma)$  no es un solenoide.

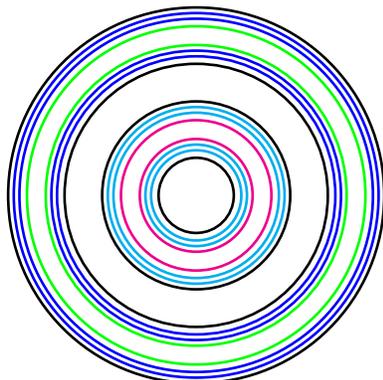


Figura 3.3: Espacio  $\Sigma(C, \sigma)$  con  $\sigma$  la identidad

Notemos que el solenoide diádico si cumple con las condiciones del teorema ya que con la función establecida en la sección 1.6 logramos cubrir el conjunto de Cantor pues vimos que dicha función es biyectiva.

---

## Conclusiones

---

Los solenoides son interesantes por que pueden considerarse como espacios que localmente son el producto cartesiano del intervalo  $[0, 1]$  con un conjunto de Cantor. Sin embargo, su clasificación como espacio topológico, es no trivial y requiere de herramientas de diversas ramas de matemáticas, tales como sistemas dinámicos, topología y análisis.

Presentamos algunas formas equivalentes de ver el solenoide desde distintos puntos de vista: geoméricamente, topológicamente y algebraicamente. Demostramos el teorema de clasificación de solenoides (teorema 2.11) y entendimos la pequeña gran diferencia que existe entre cualesquiera dos solenoides.

El ejemplo que consideramos útil para este trabajo de tesis es el *solenoide diádico*, es el ejemplo de solenoide mas conocido y en principio el más fácil en construcción ya que como vimos en la sección 1.5 al cortar un solenoide con un plano obtenemos el conjunto de Cantor como se conoce popularmente en su representación ternaria.

El solenoide diádico fue muy útil para comprender como podemos ver los solenoides como suspensiones de un conjunto de Cantor, proponiendo una función de pegado adecuada. Además esta función de pegado, que resulta ser una máfica diádica, puede verificarse que cumple con las condiciones del teorema 3.6. El ejemplo 3.7 nos muestra que existen homeomorfismos de conjuntos de Cantor cuyas suspensiones no son solenoides.



---

## Bibliografía

---

- [1] Aarts, J.M. and Fokkink, R.J. THE CLASSIFICATION OF SOLENOIDS. Proceedings of the American Mathematical Society, **111**(1991), 1161-1163.
- [2] Boyle, M. y Handelmann, D. ORBIT EQUIVALENCE, FLOW EQUIVALENCE AND ORDERED COHOMOLOGY. Israel Journal of Mathematics, **1996**, 169–210.
- [3] Carreño Montoya, M. E. EL CONJUNTO DE CANTOR Y ALGUNAS DE SUS PROPIEDADES. Tesis de licenciatura, Universidad de Sonora, mayo 2003.
- [4] Clark, A. SOLENOIDALIZATION AND DENJOIDS. Houston Journal of Mathematics. University of Houston, **26**(2000), 661-692.
- [5] Cruz López, M. INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIO FOLIADOS. Facultad de Matemáticas; Universidad de Guanajuato, abril 2007.
- [6] Deaconu, V. GENERALIZED SOLENOIDS AND  $C^*$ -ALGEBRAS. Pacific J Math., **190**(1999) No.2, 247-260.
- [7] Fokkink, R.J. THE STRUCTURE OF TRAJECTORIES (PROEFSCHRIFT). Tesis de doctorado. Amsterdam, 1972.
- [8] Fort, M. K., Jr. IMAGES OF PLANE CONTINUA. Amer. J. Math., **81**(1959), 541-546.
- [9] Freudenthal, Hans. ENTWICKLUNGEN VON RÄAUMEN UND IHREN GRUPPEN. Comp. Math., **4** (1937), 145-234.
- [10] Galavíz Casas, J. EL CONJUNTO DE CANTOR. Miscelanea Matemática **24**(1996), 23-37.
- [11] Gutek, A. SOLENOIDS AND HOMEOMORPHISMS ON THE CANTOR SET. Comment. Math. Prace Mat. **21**(1980), 299-302.
- [12] Hagopian, C. L. A CHARACTERIZATION OF SOLENOIDS. Pacific Journal of Math., **68**(1977), 425-435.

- [13] Hocking, J. G. and Young, G. S. TOPOLOGY. Dover Publication Inc. New York **98-99**(1988).
- [14] Kolmogorov, A.N and Fomin, S.V. INTRODUCTORY REAL ANALYSIS. Dover Publications, Inc. New York.
- [15] Lightwood, S. J. y Ormes, N. S. BOUNDED ORBIT INJECTIONS AND SUSPENSION EQUIVALENCE FOR MINIMAL  $\mathbb{Z}^2$  ACTIONS. Ergodic Theory and Dynamical Systems, **278** (2007) 153-182.
- [16] Macho Standler, M. CURIOSIDADES SOBRE EL CONJUNTO DE CANTOR. Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, disponible en <http://www.ehu.es/mtwmastm/Datos.html#Divulgation>.
- [17] Mateos Cortes, J. PROPIEDADES DEL CONJUNTO DE CANTOR. Universidad Nacional Autónoma de México, disponible en <http://www.dynamics.unam.edu/NotasVarias/Cantor.pdf>.
- [18] McCord, M.C. INVERSE LIMIT SEQUENCES WITH COVERING MAPS. Trans, A.M. S **114**(1965), 197-209.
- [19] Munkres, J. R. TOPOLOGY. Second Edition, Massachusetts Institute of Technology. Prentice Hall, Upper Sanddle River, NJ 07458.
- [20] Parry, B. y Sullivan, D. A TOPOLOGICAL INVARIANT OF FLOWS ON 1-DIMENSIONAL SPACES. Topology **14**(1975), 297-299.
- [21] Packer, J.A.  $K$ -THEORETIC INVARIANTS FOR  $C^*$ -ALGEBRAS ASSOCIATED TO TRANSFORMATION AND INDUCED FLOWS. Journal of functional Analysis **67**, 25-59(1986).
- [22] Pérez Guerrero, J. EL SOLENOIDE DIÁDICO. Tesis de licenciatura. Facultad de Ciencias UNAM, Agosto 2009.
- [23] Ribes, L. and Zalesskii, P. PROFINITE GROUPS. Springer Verlag **483**(2010).
- [24] Van Dantzig, David. UBER TOPOLOGISCHHOMOGENE KONTINUA. Fund. Math. **15**(1930), 102-125.
- [25] Van Heemert, A. TOPOLOGISCHE GRUPPEN AND UNZERLEGBARE KONTINUA. Composito Math. **5** (1938), 319–326
- [26] Vietoris, L. ÜBER DEN HÖHEREN ZUSUMMENHANG KOMPAKTER RAUME UND EINE LASSE VON ZUSAMMENHANGTREUEN ABBILDUNGEN. Math. Ann., **97**(1927), 454-472.
- [27] Wallace, A. D. THE STRUCTURE OF TOPOLOGICAL SEMI-GROUPS. Bull. Amer. Math. Soc., **61**(1955), 95-112.