Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Centro de Investigación en Matemáticas

Irracionalidad y Trascendencia de Algunas Constantes de Euler

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Iván Téllez Téllez

bajo la supervisión de

Margarita Tetlalmatzi Montiel y Jaime Cruz Sampedro

Pachuca, Hidalgo. Mayo de 2010.

Resumen

En esta tesis estudiamos algunos aspectos del problema de la irracionalidad de $\zeta(n)$ para $n > 1$, donde $\zeta(s)$ es la función zeta de Riemann. Para n par se demuestra que $\zeta(n)$ es trascendente. Para n impar se demuestra que $\zeta(3)$ es irracional y que $\zeta(n)$ es irracional para una infinidad de valores de n. También introducimos una familia de números relacionados con el número e y demostramos que estos números son todos irracionales.

Abstract

In this thesis we study some problems concerning the irrationality of $\zeta(n)$ for $n > 1$, where $\zeta(s)$ is the Riemann zeta function. If n is even we prove that $\zeta(n)$ is transcendental. If n is odd we prove that $\zeta(3)$ is irrational and that $\zeta(n)$ is irrational for infinitely many values of n. We also introduce a family of numbers closely related to the number e and show that all these are irrational numbers.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia y a todas las personas que me apoyaron en la realización de este trabajo. En especial a mi madre, la señora Gudelia Téllez Barrera, quien es mi ejemplo y mi fuente de inspiración.

Índice general

Introducción

El problema de nuestro interés tiene sus inicios en la antigua Grecia, particularmente en la escuela de Pitágoras (580 - 500 a J. C.), donde surgió la primera noción de irracionalidad. Algunas de las historias que hacen referencia a este descubrimiento coinciden con el siguiente relato.

Los pitagóricos no concebían la existencia de números irracionales, pues creían que todas las cantidades que usaban para medir se podían representar mediante números enteros y sus cocientes. Una razón en favor de este punto de vista es que toda cantidad la podemos aproximar mediante racionales, con tanta precisión como se quiera. Sin embargo, los pitagóricos conocían un resultado geométrico que ahora se denomina Teorema de Pitágoras, el cual los llevo a descubrir que la noción de número que tenían era incompleta: en un triángulo rectángulo cuyos lados miden 1, la hipotenusa tiene por longitud $\sqrt{2}$.

Quizá una cuestión natural considerada por Pitágoras y sus colegas fue tratar de representar a $\sqrt{2}$ como un cociente de enteros, sin embargo todos sus esfuerzos debieron ser en vano. Se dice [19] que fue Hipaso de Metaponto quién descubrió que esto era imposible y como represalia sus colegas lo arrojaron al mar, por destruir su fe en la "conmensurabilidad de todas las cantidades".

Para describir la irracionalidad de $\sqrt{2}$, los griegos empleaban el término *inconmensurable*, así; decir que 1 y $\sqrt{2}$ eran inconmensurables era expresar que no podía existir una medida con la cual se pudiera medir exactamente los dos números. Es decir, si el número 1 era racional entonces $\sqrt{2}$ era irracional respecto a él y viceversa.

El descubrimiento de $\sqrt{2}$ amplió la concepción pitagórica de los números y por tanto del mundo de los griegos. Tal vez fue su desarrollo de la geometría lo que les permitió considerar una clase de números que contiene a los racionales y a $\sqrt{2}$. Estos números son justamente aquellos que se pueden construir con regla y compás. A pesar de este progreso, nuevos problemas desafiaron a los griegos. Algunos de esos problemas, los cuales se debían resolver con el uso exclusivo de regla y compás, se enumeran a continuación:

1. Construir un cubo cuyo volumen sea 2.
2. Trisectar el ángulo de 60 grados.
3. Trazar un heptágono regular.
4. Construir un cuadrado cuya área sea π.

Es interesante notar que los griegos no pudieron resolver ninguno de estos problemas que fueron resueltos casi dos mil años más tarde. En particular, el cuarto problema fue resuelto por F. Lindemann en 1882, cuando demostró que π es trascendente.

En el presente escrito tratamos el problema de irracionalidad y trascendencia de algunas constantes. En particular, mostramos algunos de los avances que se han hecho respecto al problema de la irracionalidad de los números $\zeta(n)$, con $n > 1$, los cuales cobraron relevancia gracias a los trabajos de Leonhard Euler (1707 - 1783).

Como una introducción al problema de nuestro interés, en el primer capítulo, hacemos un breve recuento de teoremas relacionados con las propiedades de los números enteros, tales como la infinitud de los números primos y el Teorema Fundamental de la Aritmética. Estos resultados constituyen nuestra base para establecer la irracionalidad de algunos números algebraicos tales como $\sqrt{2}$. Seguido de esto establecemos la irracionalidad de e y π. Luego, incluimos un apartado en el que exponemos algunas pruebas geométricas de irracionalidad e introducimos una familia de constantes motivados por la expansión usual en serie del número e, de las cuales demostramos su irracionalidad.

En el capítulo dos, usamos una estimación del orden de magnitud del mínimo común múltiplo de los números 1, 2, $\ldots$, n, basados en el Teorema de los Números Primos. Esta estimación, junto con una representación integral adecuada de $\log(2)$, $\zeta(2)$ y $\zeta(3)$ es empleada para demostrar la irracionalidad de estas constantes. Otra aplicación de esta estimación es la demostración de que existen infinitos irracionales en la sucesión $\zeta(2n+1)$ con $n \in \mathbb{N}$. Para terminar ese capítulo hacemos una corta descripción del descubrimiento de la constante γ de Euler.

Finalmente, en el capítulo tres demostramos la trascendencia de e y π. De este hecho deducimos la trascendencia de $\zeta(2n)$, con $n \in \mathbb{N}$, empleando para ello una fórmula que Euler descubrió después de que resolvió el conocido *problema de Basilea*. Para finalizar ese capítulo, usamos el Teorema de Dirichlet sobre la infinitud de números primos en progresiones aritméticas, para demostrar que las constantes que introdujimos al final del primer capítulo son linealmente independientes sobre los racionales.

Capítulo 1

Irracionalidad de algunas constantes clásicas de la matemática

1.1. Introducción

En este capítulo presentamos algunos conceptos básicos que se usan en el estudio de los números enteros tales como el concepto de divisibilidad y el de máximo común divisor.

El estudio de estos conceptos nos permitirá demostrar, entre otros resultados, el Teorema Fundamental de la Aritmética y la existencia de infinitos números primos. Los cuales nos servirán de base para establecer la irracionalidad de algunos números.

1.2. Los números enteros

Los números

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

son llamados enteros y representamos el conjunto de todos ellos mediante el símbolo $\mathbb{Z}$. En adelante usaremos las letras minúsculas a, b, c, ... para denotar casos de estos números.

1.2.1. Divisibilidad

Probablemente una de las primeras habilidades matemáticas desarrolladas por el hombre es la capacidad de contar: relacionar a un grupo de objetos con uno de los números

$$1, 2, 3, \ldots,$$

que son llamados números naturales y que denotamos por el símbolo $\mathbb{N}$.

Las primeras consideraciones de las propiedades básicas de los naturales se atribuyen a los griegos quienes clasificaron a los números naturales en diversos conjuntos. Por ejemplo, fueron los griegos quienes introdujeron los conceptos de número primo, número compuesto y divisibilidad, los cuales estudiamos brevemente a continuación.

Los teoremas de la presente sección siguen de cerca a T. Apostol [4]. Es pertinente mencionar que para leer este capítulo sólo son necesarios conocimientos de álgebra, excepto la parte final donde se usan algunos conceptos de cálculo.

Definición 1.1 (Divisibilidad) *Decimos que un entero d* ***divide*** *a n y escribimos $d|n$ cuando $n = cd$ para algún entero c.*

Si d divide a n también decimos que n es un múltiplo de d, que d es un divisor de n ó que d es un factor de n. Si d no divide a n escribimos $d \nmid n$.

Un entero d que divide a a y b se denomina ***divisor común*** de a y b. En el siguiente teorema demostramos que dado un par de enteros, siempre existe un divisor común que puede ser expresado como combinación lineal de estos enteros.

Teorema 1.1 *Dados dos enteros a y b existe un divisor común d tal que $d = ax+by$, donde $x, y \in \mathbb{Z}$. Más aún si d' es otro divisor de a y b entonces $d'|d$.*

Demostración. Supongamos $a, b \geq 0$ y usemos inducción sobre $n = a+b$. Si $n = 0$ entonces $a = b = 0$ y $d = 0$ con $x = y = 0$. Supongamos que se ha demostrado el teorema para los enteros $0, \ldots, n-1$ y que $a \geq b$ (en todo el argumento podemos cambiar a por b). Si $b = 0$ entonces tomamos $d = a$, $x = 1$ y $y = 0$. Por otro lado, si $b \geq 1$ aplicamos la hipótesis de inducción a b y $a - b$, ya que $(a-b)+b = a = n-b \leq n-1$. Entonces existe $d = (a-b)x + by$ divisor común de b y $a-b$ que también divide a $(a-b)+b = a$. De esto se sigue que d es divisor común de a y b y tenemos $d = ax + (y-x)b$. Finalmente, con esta representación de d vemos que si d' divide a a y b entonces divide a d.

Si $a \leq 0$ ó $b \leq 0$, aplicamos lo ya demostrado a los enteros $|a|$ y $|b|$. □

El siguiente teorema da una caracterización del número d al que hace referencia el teorema anterior.

Teorema 1.2 *Dados dos enteros a y b existe un único entero d que satisface las condiciones*

1. *El número d es no negativo.*
2. *Es divisor común de a y b*
3. *Si $c|a$ y $c|b$ entonces $c|d$.*

Demostración. Por el Teorema 1.1 existe al menos un entero d que satisface los enunciados 2 y 3. Además, si d' satisface estas mismas condiciones entonces $d'|d$ y $d|d'$ y por lo tanto $|d| = |d'|$, es decir $d' = d$ ó $d' = -d$. □

Como resultado de nuestros primeros teoremas tenemos las siguientes dos definiciones que utilizaremos más adelante.

Definición 1.2 *Dados dos enteros a y b, al único entero d que satisface las condiciones del teorema anterior se le denomina* ***máximo común divisor*** *de a y b y se denota usualmente por $d = \operatorname{mcd}(a, b)$.*

Definición 1.3 *Si $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$ decimos que a y b son* ***primos relativos****.*

Para terminar esta sección demostramos un teorema conocido como Lema de Euclides, el cual es bastante útil en el estudio del concepto de divisibilidad.

Teorema 1.3 (Lema de Euclides) *Si $a|bc$ y $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$ entonces $a|c$.*

Demostración. Como $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$, por el Teorema 1.1 podemos escribir $1 = ax + by$. Se sigue que $c = acx + bcy$ y ya que $a|ac$ y $a|bc$ deducimos que $a|c$. □

1.2.2. Los números primos

Definición 1.4 *Decimos que un número entero $p > 1$ es **primo** si sus únicos divisores positivos son 1 y p. Si un entero $n > 1$ no satisface esta condición decimos que es **compuesto**.*

En adelante, hacemos uso de la letra minúscula p para referirnos a un número primo. El siguiente teorema justifica el nombre *compuesto* dado a ciertos enteros.

Teorema 1.4 *Cada entero $n > 1$ es primo o es producto de números primos.*

Demostración. Usamos inducción sobre n. El teorema es cierto si $n = 2$. Supongamos que es cierto para los enteros $2, \ldots, n-1$. Si n no es primo entonces tiene un divisor positivo diferente de 1 y n, es decir, podemos escribir a $n = cd$ con $1 < c, d < n$. Por lo que el teorema es válido para c y d y en consecuencia también para n. $\square$

Notemos que a partir de los números primos podemos construir infinidad de números compuestos. Por ello es natural preguntarse si la cantidad de números primos es infinita. Esta pregunta ya la habían considerado los antiguos griegos. En la Proposición 20 del Libro IX de los *Elementos* de Euclides se demuestra el siguiente

Teorema 1.5 (Euclides) *Existe una cantidad infinita de números primos.*

Demostración. Si la cantidad de primos es finita, sea m el producto de todos ellos y $n = m + 1$. Como n es mayor que cualquier primo entonces por el Teorema 1.4 el número n es compuesto, por lo que admite como divisor a algún primo, que necesariamente es divisor de m y, por lo tanto, también de $n - m = 1$. Como esto no es posible la cantidad de números primos es infinita. $\square$

1.2.3. El Teorema Fundamental de la Aritmética

El Teorema 1.4 permite representar a cada $n > 1$ como producto de factores primos. En el siguiente teorema se demuestra que esta representación es única y por ello es un resultado fundamental en la teoría de números ya que permite concebir a los números primos como las partes más pequeñas que constituyen a cada entero $n > 1$.

Primeramente note que si p es primo y $p|ab$ entonces, por el Lema de Euclides, se tiene que $p|a$ ó $p|b$, en general si $p|a_1 \cdots a_n$ entonces p divide al algún factor a_i.

Teorema 1.6 (Teorema Fundamental de la Aritmética) *Cada entero $n > 1$ puede ser expresado de forma única como producto de primos, excepto por el orden de los factores.*

Demostración Usemos inducción sobre n. El teorema es cierto si $n = 2$. Supongamos que es cierto para los enteros $2, \ldots, n-1$, probaremos que se cumple para n. Si n es primo no hay nada que probar, asumamos entonces que n es compuesto y que admite las factorizaciones

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s. \tag{1.1}$$

Esta ecuación muestra que p_1 divide al producto $q_1 \cdots q_s$ y por lo tanto p_1 divide a algún primo q_i. Reenumerando si es necesario, supongamos que $p_1|q_1$, como ambos son primos entonces son iguales, de modo que podemos cancelar ambos en la ecuación (1.1) y obtener

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s.$$

Como $p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s < n$, la conclusión se sigue por la hipótesis de inducción. $\square$

1.3. Los números irracionales clásicos elementales

Los números ***racionales*** son aquellos que se pueden expresar como cociente a/b donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$. Al conjunto de todos los números racionales lo denotamos con $\mathbb{Q}$. Si un número no pertenece a este conjunto decimos que es ***irracional***.

1.3.1. Irracionales algebraicos

El primer número que se supo no pertenecía al conjunto $\mathbb{Q}$ es $\sqrt{2}$. Su irracionalidad fue descubierta por los pitagóricos hace más de dos mil años.

Teorema 1.7 *El número $\sqrt{2}$ no es racional.*

Demostración. Supongamos que existen enteros tales que $\sqrt{2} = a/b$ con $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$. Se sigue que

$$2b^2 = a^2.$$

Luego a^2 y por lo tanto a es un número par. De modo que $a = 2k$ para algún k. Repitiendo este último argumento se tiene que b es un número par, lo cual es una contradicción ya que por hipótesis $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$. □

La irracionalidad de $\sqrt{2}$ se puede obtener también mediante otros argumentos. Incluimos aquí tres pruebas extra que demuestran este hecho, las tres demostraciones están caracterizadas por el uso de las propiedades básicas de los números enteros. La primera de ellas se debe a R. Gaunt [12] y data de 1956.

Demostración. La ecuación $a^2 = 2b^2$ no puede tener una solución no nula en los enteros ya que el último dígito no cero de un cuadrado, escrito en base 3, debe ser 1. Mientras que el último dígito no cero del doble de un cuadrado, en base 3, es 2. □

La siguiente prueba se debe a E. Gentile [13] y fue publicada en 1991, en esta demostración usaremos la siguiente propiedad del número 3. Si a, $b \in \mathbb{Z}$, entonces $3|(a^2 + b^2)$ si y sólo si $3|a$ y $3|b$. Esta propiedad es clara ya que el residuo que deja dividir un cuadrado por 3 es siempre 0 ó 1.

Demostración. Supongamos que existen enteros a y b, primos relativos, tales que $\sqrt{2} = a/b$. De donde tenemos que $a^2 = 2b^2$ y por tanto $a^2 + b^2 = 3b^2$. De esto último se sigue que $3|(a^2 + b^2)$ y por lo tanto $3|a$ y $3|b$, contradicción. □

La siguiente demostración emplea el Teorema Fundamental de la Aritmética y sigue de cerca a M. Gardner [11].

Demostración. Como hemos supuesto anteriormente, si $\sqrt{2} = a/b$ con $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$ entonces los enteros a y b son mayores que 1 y satisfacen la ecuación $a^2 = 2b^2$. Por el Teorema Fundamental de la Aritmética esto no es posible ya que el lado izquierdo de esta ecuación tiene un número par de factores primos mientras que el lado derecho tiene un número impar de dichos factores. □

En el teorema siguiente generalizamos la demostración del Teorema 1.7 empleando argumentos de Hardy y Wright [15].

Teorema 1.8 *Si $m, n > 1$ entonces el número $\sqrt[m]{n}$ es irracional a menos que $n = a^m$ para cierto $a \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que $\sqrt[m]{n} = a/b$, con $b > 0$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces

$$b^m n = a^m.$$

Se sigue de esta ecuación que $b|a^m$ y por lo tanto $p|a^m$ para todo factor primo de b. Luego $p|a$ y por lo tanto es un factor común de a y b. □

Ahora presentamos una generalización del teorema anterior que permite descubrir una familia más extensa de números irracionales. La brevedad de su demostración es una muestra del potencial que tienen las propiedades de los números enteros que hemos estudiado al principio de este capítulo.

Teorema 1.9 *Si α satisface la ecuación polinomial*

$$x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0,$$

donde los coeficientes $c_i \in \mathbb{Z}$, entonces α es un entero o es irracional.

Demostración. Supongamos que $\alpha = a/b$, con $b > 0$ y $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces al sustituir $\alpha = a/b$ y multiplicar por b^m tenemos que

$$a^m + c_{m-1}a^{m-1}b + \cdots + c_1 ab^{m-1} + c_0 b^m = 0.$$

Luego $b|a^m$ y argumentando como en la demostración del teorema anterior, se tiene que $b = 1$. □

Hasta el momento, las demostraciones de irracionalidad que hemos presentado se basan en algunas propiedades básicas de los números enteros. En adelante se usarán además herramientas de análisis, por ejemplo, las pruebas de irracionalidad que presentaremos en el resto de este capítulo están basadas en el simple hecho de que en el intervalo abierto $(0, 1)$ no hay enteros.

1.3.2. Irracionalidad de e

El siguiente número en nuestro recuento de constantes irracionales es e, la base de los logaritmos naturales. Leonhard Euler expuso las propiedades relacionadas con este número en sus obras, entre las que se encuentra el desarrollo en serie de potencias de la función exponencial, estableciendo que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots .$$

En consecuencia al hacer $x = 1$ se tiene

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots . \tag{1.2}$$

Con la ayuda de esta serie Euler demostró en 1744 la irracionalidad de e.

Teorema 1.10 (Euler) *El número e es irracional.*

Demostración. Si $e = a/b$ entonces al usar la serie (1.2) tenemos que

$$b!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \cdots - \frac{1}{b!}\right) = b! \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{1.3}$$

Observamos que el lado izquierdo de (1.3) es un entero positivo, mientras que el lado derecho satisface

$$\begin{aligned} 0 < b! \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{n!} &= \frac{1}{b+1}\left(1 + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{(b+2)(b+3)} + \cdots\right) \\ &< \frac{1}{b+1}\left(1 + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{b} \leq 1. \end{aligned}$$

Lo cual es imposible. □

1.3.3. Irracionalidad de π

Junto con e, el número π es una de las constantes matemáticas más conocidas e importantes. Desde tiempos remotos Arquímedes de Siracusa (287 - 212 a J. C.) había conjeturado que este número era irracional [2]. Sin embargo, fue hasta 1766 cuando J. H. Lambert (1728 - 1777) demostró este hecho. La breve demostración que presentamos aquí se debe a Ivan Niven [21] y fue publicada en 1947.

En adelante representamos al conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ mediante el símbolo $\mathbb{N}_0$.

Lema 1.1 *Si $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$ y*

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}, \tag{1.4}$$

entonces $f^{(m)}(0)$ y $f^{(m)}(1)$ son números enteros.

Demostración. En vista de que $f(x) = f(1-x)$ basta probar que $f^{(m)}(0)$ es entero. Como

$$f(x) = \frac{1}{n!}\left(a_n x^n + \cdots + a_{2n}x^{2n}\right), \qquad a_i \in \mathbb{Z},$$

se sigue que $f^{(m)}(0) = a_m m!/n!$ para $n \leq m \leq 2n$ y $f^{(m)}(0) = 0$ en otro caso. Por lo tanto $f^{(m)}(0)$ es un entero para todo $m \in \mathbb{N}_0$. □

En las estimaciones del siguiente teorema y en algunas posteriores usaremos el hecho de que para todo par de constantes reales no negativas α y C se tiene

$$\lim_{p \to \infty} \frac{C\alpha^p}{p!} = 0.$$

En efecto, si $k > \alpha$ entonces $\alpha/(k+1) < 1$. Luego, al elegir $p > k$, tenemos que

$$\lim_{p \to \infty} \frac{C\alpha^p}{p!} = \frac{C\alpha^k}{k!} \lim_{p \to \infty} \left(\frac{\alpha}{k+1}\right)\left(\frac{\alpha}{k+2}\right) \cdots \left(\frac{\alpha}{p}\right) \leq \frac{C\alpha^k}{k!} \lim_{p \to \infty} \left(\frac{\alpha}{k+1}\right)^{p-k} = 0.$$

Teorema 1.11 *El número π^2 es irracional.*

Demostración. Supongamos que $\pi^2 = a/b$ y consideramos para $n \in \mathbb{N}$,

$$F(x) = b^n \left(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)\right),$$

donde f es como en (1.4). Por la definición de F y el Lema 1.1 podemos ver fácilmente que $F(0)$ y $F(1)$ son números enteros.

Notemos que al derivar

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[F'(x)\operatorname{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)\right] &= \left[F''(x) + \pi^2 F(x)\right]\operatorname{sen}(\pi x) \\ &= b^n \pi^{2n+2} f(x) \operatorname{sen}(\pi x) \\ &= \pi^2 a^n f(x) \operatorname{sen}(\pi x). \end{aligned}$$

De donde al integrar de 0 a 1 obtenemos

$$0 < F(0) + F(1) = \pi a^n \int_0^1 f(t)\operatorname{sen}(\pi t)\, dt \leq \frac{\pi a^n}{n!}.$$

Luego si n es suficientemente grande $F(0) + F(1)$ es un entero positivo menor que 1, lo cual es imposible. Entonces π^2 es irracional y en consecuencia también π. $\square$

1.3.4. Pruebas geométricas de irracionalidad

La geometría motivó el descubrimiento de los números irracionales, por ello, nos parece interesante considerar en este trabajo algunas demostraciones geométricas de la irracionalidad de ciertos números.

La primera demostración geométrica que nos gustaría presentar es la brillante demostración de T. Apostol [5] de la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Supongamos que $\sqrt{2} = a/b$, con a, $b \in \mathbb{N}$. Si $\operatorname{mcd}(a,b) = 1$, entonces el triángulo ABC de la figura 1 es el triángulo rectángulo isósceles más pequeño cuyos lados son enteros. Pero esto último es imposible ya que podemos construir un triángulo más pequeño con las mismas propiedades como se describe abajo.

Tracemos un arco de círculo con centro en el punto A, este arco pasa por B e interseca a la hipotenusa de ABC en algún punto. Desde este último punto trazamos una perpendicular a AC que llega a la base del triángulo. Notemos que las líneas marcadas en la figura 1 miden lo mismo pues son tangentes a un círculo desde el mismo punto exterior a éste, de donde se deduce que las medidas del triángulo más pequeño son los enteros $2b - a$ para la hipotenusa y $a - b$ para los catetos.

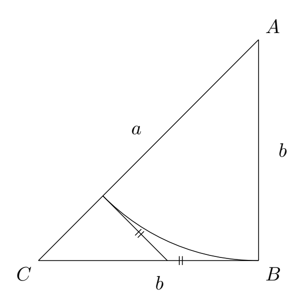

Figura 1

A continuación presentamos una prueba geométrica de la irracionalidad de las soluciones positivas φ_n de

$$x^2 - nx - 1 = 0, \tag{1.5}$$

con $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. En particular, hacemos notar que $\varphi_1 = (1+\sqrt{5})/2$ es la razón áurea.

La idea básica de esta demostración consiste en establecer un “Algoritmo de Euclides” geométrico para los números reales positivos.

Es pertinente mencionar que una demostración geométrica de la irracionalidad de la razón áurea fue propuesta por Hardy y Wright y puede consultarse en [15].

Algoritmo de Euclides geométrico. Sean a y b constantes reales positivas tales que $0 < a < b$, entonces existen únicos números q (cociente) y r_1 (residuo) tales que $b = aq + r_1$. Donde $q \in \mathbb{N}$ y $r_1 \in [0, a)$.

Si $r_1 > 0$ entonces existen únicos $q_1 \in \mathbb{N}$ y $r_2 \in [0, r_1)$ tales que $a = q_1 r_1 + r_2$. Repitiendo este proceso obtenemos una sucesión estrictamente decreciente de constantes no negativas

$$b,\ a,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots, \tag{1.6}$$

que es finita si y sólo si existe un k tal que $r_k = 0$. Notemos ahora que esta sucesión es finita si y sólo si a/b es racional. En efecto, si $r_k = 0$ para algún k entonces despejando recursivamente se verifica que a/b se puede expresar como un cociente de enteros y por lo tanto es racional. Recíprocamente, si a/b es racional con a, $b \in \mathbb{Z}$ y $b > a > 0$, entonces por el algoritmo de Euclides usual, (1.6) es una sucesión decreciente de enteros no negativos y por lo tanto necesariamente existe k tal que $r_k = 0$.

En seguida usamos este algoritmo para demostrar geométricamente que φ_n es irracional.

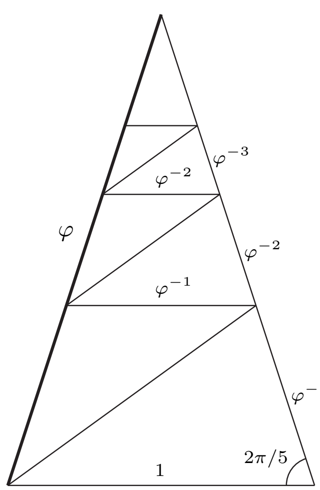

Figura 2

Como $\varphi_n \varphi_{-n} = 1$, es suficiente demostrar que φ_{-n} es irracional. Note ahora que $0 < x = \varphi_{-n} < 1$ y que

$$1 = nx + x^2.$$

Con esta igualdad y suponiendo que $a = x$ y $b = 1$ en el Algoritmo de Euclides geométrico tenemos

$$1 = nx + x^2, \qquad x = nx^2 + x^3, \qquad x^2 = nx^3 + x^4, \qquad \ldots.$$

Es decir, la sucesión (1.6) para $x = \varphi_{-n}$ es

$$\{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots\}.$$

Ya que $0 < x < 1$, esta sucesión es infinita y por lo tanto $x = \varphi_{-n}$ no puede ser un número racional.

Otra prueba geométrica de la irracionalidad de φ, la proporciona la figura 2, en la cual se verifica que

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}, \qquad 1 = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2}, \qquad \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^3}, \qquad \ldots,$$

por tanto, si $\varphi = a/b$, con a, $b \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\frac{1}{\varphi^k} = \frac{m_k}{b}, \qquad m_k \in \mathbb{N},$$

donde $m_1 > m_2 > m_3 > \cdots$, es una sucesión estrictamente decreciente de números naturales.

Finalmente presentamos una demostración geométrica de la irracionalidad de e descubierta recientemente por J. Sondow [25].

Definamos el intervalo $I_1 = [2, 3]$ y supongamos definido el intervalo I_n. Por inducción definimos I_{n+1} como el segundo intervalo cerrado, contando de izquierda a derecha, que se obtiene al dividir I_n en $n + 1$ partes iguales. Notemos ahora que para todo $n \geq 2$ se satisface

$$I_n = \left[2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{2}{n!}\right] = \left[\frac{c_n}{n!}, \frac{c_n + 1}{n!}\right]$$

con $c_n \in \mathbb{N}$, de lo cual deducimos que

$$\frac{c_n}{n!} < e < \frac{c_n + 1}{n!}.$$

Luego, si $e = a/b$ entonces

$$\frac{c_b}{b!} < \frac{a(b-1)!}{b!} < \frac{c_b + 1}{b!}$$

y por lo tanto $c_b < a(b - 1)! < c_b + 1$, lo cual es imposible.

1.4. La irracionalidad de algunos números relacionados con e

Hasta ahora, hemos presentado pruebas de irracionalidad de algunas constantes conocidas. El objetivo de la presente sección es introducir una familia de funciones tales que al evaluarlas en todo racional no nulo las constantes que obtenemos son irracionales.

1.4.1. Irracionalidad de las potencias enteras no nulas de e

Primero demostramos el siguiente teorema.

Teorema 1.12 *Si $m \in \mathbb{N}$ entonces e^m es irracional.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y

$$F(x) = m^{2n}f(x) + m^{2n-1}f'(x) + \cdots + mf^{(2n-1)}(x) + f^{(2n)}(x),$$

donde f es la función (1.4). Como el grado de f es $2n$ tenemos que $f^{(2n+1)}(x) = 0$, de lo cual se sigue que

$$-\frac{d}{dx}(e^{-mx}F(x)) = m^{2n+1}f(x)e^{-mx}.$$

Luego, al integrar de 0 a 1 esta última expresión obtenemos

$$F(0) - e^{-m}F(1) = m^{2n+1}\int_0^1 f(t)e^{-mt}\,dt. \tag{1.7}$$

Si e^m fuera racional entonces escribimos $e^m = a/b$ y al usar la expresión (1.7) tenemos que

$$0 < aF(0) - bF(1) = am^{2n+1}\int_0^1 f(t)e^{-mt}\,dt \leq \frac{am^{2n+1}}{n!} < 1,$$

si n es suficientemente grande. Esto da una contradicción ya que por el Lema 1.1 la cantidad $aF(0) - bF(1)$ es un entero para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Del Teorema 1.12 se tienen los siguientes corolarios. En adelante $\log(x)$ denotará el logaritmo natural de x.

Corolario 1.1 *Si $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ entonces e^r es irracional.*

Corolario 1.2 *Si $r \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ entonces $\log r$ es irracional.*

1.4.2. Una colección de números irracionales relacionados con e

Basados en la expansión usual en serie del número e a continuación consideramos una colección de números que resultan ser todos irracionales.

Si A es un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$ y $\sigma : \mathbb{N}_0 \to A$, definimos

$$e_\sigma := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n!}. \tag{1.8}$$

Teorema 1.13 *Sea σ como en (1.8) tal que $\sigma(n) \neq 0$ para una infinidad de valores de n. Entonces e_σ es irracional.*

Demostración. Supongamos que $e_\sigma = a/b$ y que $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$. Sea s tal que $\sigma(s) \neq 0$ y $s > \text{máx}\{|b|, M\}$, donde $M = \text{máx}\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{k-1}|\}$. Al multiplicar por $s!$ la serie (1.8) se tiene que

$$s!\left(\frac{a}{b} - \sigma(0) - \frac{\sigma(1)}{1!} - \cdots - \frac{\sigma(s)}{s!}\right) = s! \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n!}.$$

Notemos que el lado izquierdo de esta ecuación es una suma de enteros divisibles por s excepto $\sigma(s)$ ya que $s > |\sigma(s)| > 0$, de esto se sigue que dicha suma de enteros no es divisible por s y por tanto es diferente de cero. Por otra parte el lado derecho de esta igualdad satisface:

$$\begin{aligned}
0 < \left| s! \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n!} \right| &\leq \frac{M}{s+1}\left(1 + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)(s+3)} + \cdots\right) \\
&< \frac{M}{s+1}\left(1 + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \cdots\right) \\
&< \frac{M}{s} < 1.
\end{aligned}$$

Esto da una contradicción pues la suma anterior sería un entero cuyo valor absoluto está en el intervalo $(0, 1)$. $\square$

1.4.3. Funciones relacionadas con la función exponencial

Supongamos ahora que $A = \{a_0, \ldots, a_{k-1}\} \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, con $k \in \mathbb{N}$ fijo. Definimos $\sigma(i) = a_i$ para $0 \leq i \leq k-1$ y

$$\sigma(n+k) = \sigma(n), \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.9}$$

Con esta notación definimos la siguiente función en la variable real x

$$S_k(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma(n)x^n}{n!}. \tag{1.10}$$

A continuación establecemos la irracionalidad de $S_k(n)$ cuando $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Primero notemos que si $M = \text{máx}\{|a_0|, \ldots, |a_{k-1}|\}$ entonces la serie (1.10) converge absolutamente para todo x real ya que

$$\left|\frac{\sigma(n)x^n}{n!}\right| \leq \frac{M|x|^n}{n!}.$$

De esto, se sigue que $S_k(x)$ converge uniformemente para todo intervalo $[-a, a]$ según la prueba de comparación de Weierstrass. Por tanto es diferenciable y sus derivadas se obtienen por derivación término a término. Para $i \in \mathbb{N}_0$ tenemos

$$S_k^{(i)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma(n+i)}{n!} x^n.$$

En particular, haciendo $x = 0$ se tiene que

$$S_k^{(i)}(0) = \sigma(i). \tag{1.11}$$

Además por (1.9) se tiene que si $i = k$ entonces

$$S_k^{(k)}(x) = S_k(x). \tag{1.12}$$

Esta última ecuación implica que si $r \in \mathbb{N}_0$ entonces

$$S_k^{(rk)}(x) = S_k(x). \tag{1.13}$$

Teorema 1.14 *Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ entonces $S_k(n)$ es irracional.*

Demostración. Consideremos el polinomio

$$f(t) = \frac{(1-t)^{kp}(1-(1-t)^k)^{p-1}}{(p-1)!},$$

donde p es un número primo. Note que el grado de este polinomio es $m = k(2p-1)$.

Si definimos

$$F(x) = n^m f(x) S_k(nx) - n^{m-1} f'(x) S_k^{(k-1)}(nx) + \cdots + (-1)^m f^{(m)}(x) S_k(nx),$$

entonces derivando $F(x)$ ó integrando por partes $f(t)S_k'(nt)$ y haciendo uso de (1.12), se verifica directamente que

$$n^{m+1} \int_0^1 f(t) S_k'(nt)\, dt = F(1) - F(0). \tag{1.14}$$

En seguida demostraremos que si p se elige suficientemente grande entonces $F(0)$ es un entero no divisible por p y $F(1) = u_p\, S_k(n)$, donde u_p es un entero divisible por p.

Primero note que t es un factor de $1-(1-t)^k$, de donde obtenemos que

$$(p-1)!f(t) = (kt)^{p-1} + a_p t^p + \cdots + a_m t^m, \qquad a_i \in \mathbb{Z}.$$

Entonces $f^{(r)}(0) = a_r r!/(p-1)!$ si $p \le r \le m$, $f^{(p-1)}(0) = k^{p-1}$ y $f^{(r)}(0) = 0$ en otro caso. Por tanto haciendo uso de la ecuación (1.11), tenemos que todos los sumandos de $F(0)$ son enteros. Además, $f^{(r)}(0)$ siempre es divisible por p excepto quizá $f^{(p-1)}(0) = k^{p-1}$. Deducimos que si $p > \max\{|n|, k, M\}$, entonces $F(0)$ es un entero no divisible por p.

Por otro lado, observamos que

$$(p-1)!f(1-t) = b_{kp}t^{kp} + b_{k(p+1)}t^{k(p+1)} + \cdots + b_m t^m, \qquad b_i \in \mathbb{Z},$$

de esta igualdad deducimos que $f^{(r)}(1) = b_r r!/(p-1)!$ cuando $r = k\ell$, $p \le \ell \le 2p-1$ y $f^{(r)}(1) = 0$ en otro caso, por lo que $f^{(r)}(1)$ es un entero divisible por p. De la definición de $F(x)$ y la propiedad (1.13) se sigue que $F(1) = u_p\, S_k(n)$ donde u_p es un entero divisible por p.

De lo anterior, (1.14) se puede escribir como

$$n^{m+1}\int_0^1 f(t)S_k'(nt)\,dt = u_p\, S_k(n) - F(0). \tag{1.15}$$

Si $S_k(n)$ fuese racional digamos $S_k(n) = a/b$, entonces eligiendo $p > \max\{|n|, |b|, k, M\}$ y multiplicando (1.15) por b tenemos que

$$bn^{m+1}\int_0^1 f(t)S_k'(nt)\,dt = au_p - bF(0),$$

donde $au_p - bF(0)$ es un entero no divisible por p, en particular no nulo.

Para obtener una contradicción note que si $t \in [0,1]$ entonces $|S_k(nt)| \le Me^{|n|}$ y $(p-1)!f(t) \le 1$, de lo cual se tiene la siguiente estimación

$$\left| bn^{m+1}\int_0^1 f(t)S_k'(nt)\,dt \right| \le \frac{C\alpha^{p-1}}{(p-1)!},$$

donde $C = Mb\,e^{|n|}|n|^{k+1}$ y $\alpha = |n|^{2k}$ son números que no dependen de p.

Finalmente, como hay una infinidad de primos y $\alpha^p/p! < 1$ para p suficientemente grande, existe $p > \max\{|n|, |b|, k, M\}$ tal que $0 < |au_p - bF(0)| < 1$, lo cual es una contradicción. $\square$

Análogamente al teorema anterior se demuestra el siguiente

Teorema 1.15 *Si $S_k(x)$ es como en (1.10), entonces $S_k(r)$ es irracional para todo racional $r \neq 0$.*

De este resultado, se sigue el siguiente

Corolario 1.3 *Si cada a_i en (1.9) es un racional no nulo, entonces $S_k(r)$ es irracional para todo $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.*

Fórmulas explícitas para $S_k(x)$

Ahora encontraremos una fórmula general que exprese a $S_k(x)$ en términos de funciones exponenciales. Para algunos casos particulares calcularemos $S_k(x)$ explícitamente.

Según (1.12) buscamos soluciones no triviales a la ecuación diferencial

$$y^{(k)} = y, \tag{1.16}$$

con las siguientes condiciones iniciales impuestas por la propiedad (1.11) de la función $S_k(x)$

$$y(0) = a_0, \ldots, y^{(k-1)}(0) = a_{k-1}. \tag{1.17}$$

La ecuación característica de (1.16) es $r^k = 1$ y sus soluciones son las k raíces de la unidad

$$\xi_j = \cos\left(\frac{2\pi j}{k}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{k}\right), \qquad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Para simplificar las ecuaciones definimos los números

$$\alpha_j = \cos\left(\frac{2\pi j}{k}\right), \qquad \omega_j = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{k}\right).$$

Note que estos números satisfacen

$$\alpha_{j+k} = \alpha_j, \qquad \omega_{j+k} = \omega_j,$$

las cuales son igualdades análogas a (1.9). Además si $j \in \mathbb{N}_0$ entonces se satisface

$$\alpha_{jk} = 1 \qquad \text{y} \qquad \omega_{jk} = 0. \tag{1.18}$$

Sea

$$u_j(x) = e^{\alpha_j x}(c_{2j}\cos(\omega_j x) + c_{2j+1}\operatorname{sen}(\omega_j x)),$$

donde c_{2j} y c_{2j+1} son reales arbitrarios. Note que si $m \geq 0$, las derivadas de $u_j(x)$ están dadas por

$$u_j^{(m)}(x) = e^{\alpha_j x}((c_{2j}\alpha_{jm} + c_{2j+1}\omega_{jm})\cos(\omega_j x) + (c_{2j+1}\alpha_{jm} - c_{2j}\omega_{jm})\operatorname{sen}(\omega_j x)). \tag{1.19}$$

Si ponemos $m = k$ en esta ecuación y usamos (1.18) se tiene que $u_j^{(k)}(x) = u_j(x)$, de modo que si $k = 2n+1$ con $n \in \mathbb{N}_0$ entonces la solución general de (1.16) es

$$y(x) = c_1 e^x + \sum_{j=1}^{n} u_j(x). \tag{1.20}$$

Por otra parte, si $k = 2n+2$ con $n \in \mathbb{N}_0$ la solución buscada es

$$y(x) = c_0 e^x + c_1 e^{-x} + \sum_{j=1}^{n} u_j(x). \tag{1.21}$$

Para encontrar $S_k(x)$ determinaremos soluciones de (1.16) que satisfagan las condiciones iniciales (1.17). Si $k = 2n+1$, usando las ecuaciones (1.19) y (1.20) nuestro problema se reduce a dar solución al sistema $A_k X = b$, donde X es el vector de constantes c_i, b es el vector de constantes a_i y

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_0 & \omega_0 & \cdots & \alpha_0 & \omega_0 \\ 1 & \alpha_1 & \omega_1 & \cdots & \alpha_n & \omega_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{k-2} & \omega_{k-2} & \cdots & \alpha_{n(k-2)} & \omega_{n(k-2)} \\ 1 & \alpha_{k-1} & \omega_{k-1} & \cdots & \alpha_{n(k-1)} & \omega_{n(k-1)} \end{bmatrix}.$$

Si $k = 2n + 2$, usando las ecuaciones (1.19) y (1.21) nuestro problema se reduce a dar solución al sistema $A_k X = b$, donde X y b son los mismos vectores de constantes que en el caso anterior y

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha_0 & \omega_0 & \cdots & \alpha_0 & \omega_0 \\ 1 & -1 & \alpha_1 & \omega_1 & \cdots & \alpha_n & \omega_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \alpha_{k-2} & \omega_{k-2} & \cdots & \alpha_{n(k-2)} & \omega_{n(k-2)} \\ 1 & -1 & \alpha_{k-1} & \omega_{k-1} & \cdots & \alpha_{n(k-1)} & \omega_{n(k-1)} \end{bmatrix}.$$

Por el Teorema de Existencia y Unicidad el sistema de ecuaciones $A_k X = b$ tiene solución única para todo vector b. Por lo tanto la matriz A_k es invertible; más aún, se puede demostrar que $A_k^T A_k$ es una matriz diagonal cuya diagonal principal tiene entradas diferentes de cero.

Supongamos dado el vector de constantes $b = (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})$, donde cada a_i es un entero no nulo. Las primeras cuatro funciones $S_k(x)$ están dadas por

1. $S_1(x) = a_0 e^x$.
2. $S_2(x) = a_0 \cosh(x) + a_1 \operatorname{senh}(x)$.
3. $S_3(x) = \frac{1}{3}\left((a_0 + a_1 + a_2)e^x + e^{-x/2}\left((2a_0 - a_1 - a_2)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \sqrt{3}(a_1 - a_2)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\right)$.
4. $S_4(x) = \frac{1}{2}\left((a_0 + a_2)\cosh(x) + (a_1 + a_3)\operatorname{senh}(x) + (a_0 - a_2)\cos(x) + (a_1 - a_3)\operatorname{sen}(x)\right)$.

Casos particulares de la irracionalidad de $S_k(n)$

Dando valores particulares a las constantes a_i en las fórmulas explícitas de $S_k(x)$, se obtienen los siguientes corolarios del Teorema 1.14 que recuperan algunos resultados clásicos de irracionalidad.

Corolario 1.4 *Si $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ entonces e^r es irracional.*

Demostración. Haciendo $k = 1$ y $a_0 = 1$ tenemos que $S_1(r) = e^r$ es irracional para todo $r \neq 0$. □

Corolario 1.5 *El número π es irracional.*

Demostración. Con $k = 4$ y $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = -1$ se tiene que $S_4(r) = \operatorname{sen}(r) + \cos(r)$ es irracional para todo racional $r \neq 0$. Note que si π fuese racional entonces $S_4(\pi) = -1$ sería irracional. □

Capítulo 2

Irracionalidad de algunas constantes de Euler

2.1. Introducción

En este capítulo se establecen algunos resultados concernientes al problema de la irracionalidad de los números

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \cdots, \tag{2.1}$$

cuando $n > 1$. Para este fin necesitaremos de la siguiente estimación que depende del Teorema de los Números Primos.

Teorema 2.1 *Si $d_n = \mathrm{mcm}\,(1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ es el mínimo común múltiplo de $1,\, 2,\, \ldots,\, n$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que*

$$e^{(1-\epsilon)n} \leq d_n \leq e^{(1+\epsilon)n}, \tag{2.2}$$

para todo $n > m$.

La demostración de este teorema y del Teorema de los Números Primos se puede consultar en el apéndice C.

Al principio de este capítulo se expondrá una demostración reciente de la irracionalidad de $\zeta(3)$, conocida como la constante de Apéry. El método con el que se establece este resultado [9, 16] también sirve para demostrar la irracionalidad de $\log(2)$ y $\zeta(2)$. A continuación se describe dicho método.

Si $f(x)$ es una función relacionada con el número α del cual se desea demostrar su irracionalidad y $P_n(x)$ es el $n-$ésimo polinomio de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n(1-x)^n), \qquad n \geq 1, \tag{2.3}$$

sea

$$I_n = \int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx.$$

Como $g(x) = x^n(1-x)^n$ tiene ceros de orden n en $x = 0$ y $x = 1$, al integrar I_n por partes n veces obtenemos

$$I_n = \int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 (x^n(1-x)^n)\frac{d^n}{dx^n} f(x)\, dx. \tag{2.4}$$

Ahora, notemos que por el Lema 1.1 y la definición (2.3) se tiene que

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad a_i \in \mathbb{Z},$$

por lo que, en los tres casos de irracionalidad que trataremos, el lado izquierdo de (2.4) será

$$\int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 x^k f(x)\, dx = A_n + B_n \alpha, \qquad A_n,\, B_n \in \mathbb{Q},$$

donde A_n y B_n tendrán por denominador a d_n^k para algún $k \in \{1, 2, 3\}$.

De este modo, si $\alpha = a/b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$, se tendrá que $|bd_n^k I_n| \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mientras que, estimando superiormente el lado derecho de (2.4) mediante (2.2) y eligiendo n suficientemente grande, se tendrá que $|bd_n^k I_n| \in (0, 1)$.

2.2. Irracionalidad de $\log(2)$

Aunque la irracionalidad de $\log(2)$ se sigue del Corolario 1.2, demostraremos una vez más este hecho ya que sirve como ejemplo para ilustrar el método seguido por Beukers y Huylebrouck [9, 16]. Para este fin usamos la suma

$$\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots. \tag{2.5}$$

Teorema 2.2 *El número* $\log(2)$ *es irracional.*

Demostración. Sea

$$I_n = \int_0^1 \frac{P_n(x)}{1+x}\, dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 \frac{x^k}{1+x}\, dx.$$

Al usar la expansión en serie geométrica de $(x+1)^{-1}$ y la suma (2.5) tenemos que

$$\int_0^1 \frac{x^k}{1+x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} + \cdots \pm 1 \mp \log 2.$$

Si $\log 2$ fuera racional, digamos $\log 2 = a/b$, entonces I_n sería una combinación lineal de racionales cuyos denominadores son $1, 2, \ldots, n, b$. De esto se sigue que $bd_n I_n$ es un entero que satisface

$$0 < |bd_n I_n| = \left| bd_n \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{n!} \left[\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{1+x} \right) \right] dx \right| = \left| bd_n \int_0^1 \left(\frac{x(1-x)}{1+x} \right)^n \frac{dx}{1+x} \right|.$$

Como el máximo de $h(x) = x(1-x)/(1+x)$ en el intervalo $[0, 1]$ es $\alpha = 3 - 2\sqrt{2}$ y se alcanza en $x = \sqrt{2} - 1$, entonces al hacer uso de (2.2) tenemos que

$$0 < |bd_n I_n| \le bd_n \log(2) \alpha^n \le b3^n \log(2)(3 - 2\sqrt{2})^n < b \log(2) \left(\frac{3}{4} \right)^n < 1$$

si n es suficientemente grande. Como $bd_n I_n$ es un entero, esto es imposible y $\log(2)$ es irracional. □

Para demostrar la irracionalidad de $\zeta(2)$ y $\zeta(3)$ necesitaremos de un lema que proporciona una representación integral de estas constantes.

Lema 2.1 *Sean r y s enteros no negativos. Si $r > s$ entonces la integral*

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy}\, dxdy = \frac{A_{r,s}}{B_{r,s}} \tag{2.6}$$

es un racional cuyo denominador es un divisor de d_r^2. Además

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} x^r y^s\, dxdy = \frac{C_{r,s}}{D_{r,s}} \tag{2.7}$$

es un racional cuyo denominador es un divisor de d_r^3. Por otro lado, si $s = r$ entonces se tiene que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^r}{1-xy}\, dxdy = \zeta(2) - 1 - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{r^2}, \tag{2.8}$$

y que

$$\frac{-1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^r\, dxdy = \zeta(3) - 1 - \frac{1}{2^3} - \cdots - \frac{1}{r^3}. \tag{2.9}$$

Nota: En el caso $r = s = 0$, la sumas $1 + 2^{-2} + \cdots + r^{-2}$ y $1 + 2^{-3} + \cdots + r^{-3}$ se interpretan como cero.

Demostración. Primero deduciremos una fórmula integral para $\zeta(2)$ y $\zeta(3)$, para ello sea $r = s = 0$. Si $0 < xy < 1$ entonces $1 + xy + (xy)^2 + \cdots = (1-xy)^{-1}$, de lo cual se sigue que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n\, dx \int_0^1 y^n\, dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \zeta(2).$$

De la misma forma se tiene que

$$K = \frac{-1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\log(xy)}{1-xy}\, dxdy = \frac{-1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n (\log x + \log y)\, dxdy.$$

Luego, por simetría en las variables x y y se sigue que

$$\begin{aligned} K = -\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n\, dx \int_0^1 y^n \log y\, dy &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n\, dx \int_0^1 y^n\, dy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = \zeta(3). \end{aligned}$$

Por otro lado si σ es no negativo, al expandir $(1-xy)^{-1}$ en serie geométrica y realizar las integrales que resultan se tiene que

$$I(\sigma) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy}\, dxdy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+r+\sigma+1)(n+s+\sigma+1)}, \tag{2.10}$$

donde el lado derecho de esta igualdad no es cero ya que es una suma de números positivos.

Si $r > s$ entonces la suma en (2.10) es telescópica ya que podemos reescribir cada término como resta de dos fracciones como sigue

$$I(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{n+s+\sigma+1} - \frac{1}{n+r+\sigma+1}\right) = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+\sigma+1} + \cdots + \frac{1}{r+\sigma}\right). \quad (2.11)$$

Si ponemos $\sigma = 0$ en (2.10), usando (2.11) tenemos que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy}\, dxdy = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+1} + \cdots + \frac{1}{r}\right) = \frac{A_{r,s}}{B_{r,s}},$$

donde $B_{r,s} = (r-s)m$, con $m = \mathrm{mcm}\,(s+1,\ s+2,\ \ldots,\ r)$. Esto implica que $B_{r,s}|d_r^2$ ya que $(r-s)|d_r$ y $m|d_r$, de lo cual se tiene (2.6).

Si derivamos (2.10) con respecto a σ, empleando la fórmula de Leibnitz para derivadas bajo el signo de la integral, al poner $\sigma = 0$ y usar (2.11) tenemos que

$$-\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^s\, dxdy = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{(s+1)^2} + \cdots + \frac{1}{r^2}\right) = \frac{C_{r,s}}{D_{r,s}},$$

de lo cual se obtiene (2.7) análogamente a como se obtuvo (2.6).

Si $s = r$, al usar (2.10) se tiene que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{r+\sigma}}{1-xy}\, dxdy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+r+\sigma+1)^2}.$$

Haciendo $\sigma = 0$ se sigue (2.8). Derivando con respecto a σ y poniendo $\sigma = 0$ tenemos

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log(xy)}{1-xy} x^r y^r\, dxdy = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+r+1)^3},$$

lo cual prueba (2.9). □

2.3. Irracionalidad de $\zeta(2)$

Una de las aportaciones matemáticas de Euler con la cual obtuvo reconocimiento en la comunidad matemática de su época (ver el apéndice B), es el hecho de haber demostrado que

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (2.12)$$

Empleando esta fórmula, la irracionalidad de $\zeta(2)$ es inmediata ya que π^2 es irracional. A continuación estableceremos la irracionalidad de $\zeta(2)$ por un camino diferente.

Teorema 2.3 *La constante $\zeta(2)$ es irracional.*

Demostración. Consideramos

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x)(1-y)^n}{1-xy}\, dxdy.$$

Por el Lema 2.1 la integral $I_n = (A_n + B_n\zeta(2))d_n^{-2}$ para ciertos enteros A_n y B_n. Luego, si $\zeta(2) = a/b$ entonces $bd_n^2 I_n$ es un entero cuyo valor absoluto satisface

$$\begin{aligned}
|bd_n^2 I_n| &= \left| bd_n^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x)(1-y)^n}{1-xy}\, dxdy \right| \\
&= \left| bd_n^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n(1-y)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{1}{1-xy}\right) dxdy \right| \\
&= bd_n^2 \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy}\right)^n \frac{dxdy}{1-xy}. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Como el máximo de la función

$$u(x,y) = \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy}$$

en $[0,1]^2$ es igual a $1/\varphi^5$ y se alcanza en $x = y = 1/\varphi$, donde $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ es la razón áurea. Entonces al insertar esta estimación en (2.13) y usar la desigualdad (2.2) se sigue que

$$0 < |bd_n^2 I_n| \le b\zeta(2)\frac{3^{2(n+1)}}{\varphi^{5n}} = 9b\zeta(2)\left(\frac{9}{\varphi^5}\right)^n < 1,$$

si n es suficientemente grande. Como $bd_n^2 I_n$ es un entero, esto es imposible y $\zeta(2)$ es irracional. $\square$

2.4. Irracionalidad de $\zeta(3)$

Euler también trato de evaluar la serie (2.1) cuando $n = 3$. Sin embargo, no pudo encontrar una fórmula semejante a (2.12) para $\zeta(3)$.

En 1978 Roger Apéry sorprendió a la comunidad matemática al demostrar que $\zeta(3)$ es irracional sin evaluar la serie que define a esta constante. Para conmemorar este resultado a $\zeta(3)$ se le suele llamar la constante de Apéry.

Teorema 2.4 *La constante $\zeta(3)$ es irracional.*

Demostración. Consideremos la integral

$$I_n = -\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} P_n(x)P_n(y)\, dxdy. \qquad (2.14)$$

Por el Lema 2.1 la integral I_n es igual a $(A_n + B_n\zeta(3))d_n^{-3}$ para algunos enteros A_n y B_n. Luego, notando que

$$\frac{-\log xy}{1-xy} = \int_0^1 \frac{dz}{1-(1-xy)z}.$$

La integral en (2.14) se puede reescribir como

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}\, dxdydz.$$

Por lo que al integrar parcialmente con respecto a x la integral anterior se convierte en

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(xyz)^n(1-x)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\, dxdydz.$$

Ahora, al sustituir $w = (1-z)/(1-(1-xy)z)$ en esta última integral

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)^n(1-w)^n P_n(y)}{1-(1-xy)w}\, dxdydw,$$

e integrando con respecto a y tenemos que

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w}\right)^n \frac{dxdydw}{1-(1-xy)w}. \tag{2.15}$$

Como el máximo de

$$u(x,y,w) = \frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w},$$

en $[0,1]^3$ es igual a $(\sqrt{2}-1)^4$ y se alcanza en $x = y = \sqrt{2}-1$ y $w = 1/\sqrt{2}$. Si $\zeta(3) = a/b$ entonces $|bd_n^3 I_n|$ es un entero positivo ya que la integral en (2.15) es positiva. Además, por la desigualdad (2.2) este entero satisface

$$0 < |bd_n^3 I_n| \leq 2b\zeta(3)d_n^3(\sqrt{2}-1)^{4n} \leq 2b\zeta(3)27^n(\sqrt{2}-1)^{4n} < b\left(\frac{4}{5}\right)^n < 1,$$

si n es suficientemente grande. Como $bd_n^3 I_n$ es un entero, esto no es posible y $\zeta(3)$ es irracional. $\square$

2.5. Irracionalidad de una infinidad de valores de $\zeta(2n+1)$

Aparte de la irracionalidad de $\zeta(3)$, no se sabe si $\zeta(2n+1)$ es irracional para algún $n \geq 2$. Sin embargo, en el año 2000 Ball y Rivoal demostraron que $\zeta(2n+1)$ es irracional para una cantidad infinita de valores de n [8]. El objetivo de esta sección es presentar en detalle este resultado.

La demostración que presentamos hace uso del siguiente teorema en el que se emplea la notación de Landau $f(x) = o(g(x))$. Esta igualdad significa que f y g son funciones reales que satisfacen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Teorema 2.5 (Criterio de Nesterenko) *Supongamos que $a \geq 2$ es un entero y $\theta_1, \ldots, \theta_a$ son números reales tales que para cada ℓ con $1 \leq \ell \leq a$ existen sucesiones de enteros $p_{\ell,n}$ que satisfacen:*

1. *Existen constantes α_1, α_2 con $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1$ tales que $\alpha_1^{n+o(n)} \leq |\sum_{\ell=1}^a p_{\ell,n}\theta_\ell| \leq \alpha_2^{n+o(n)}$.*

2. *Existe una constante $\beta > 1$ tal que para todo $n \geq 0$ se tiene que $|p_{\ell,n}| < \beta^{n+o(n)}$.*

Bajo estas condiciones, si $\delta(a)$ es la dimensión del espacio vectorial generado por el conjunto $\{\theta_1, \ldots, \theta_a\}$ sobre los racionales, entonces se tiene que

$$\delta(a) \geq \frac{\log(\beta/\alpha_1)}{\log(\alpha_2\beta/\alpha_1)}.$$

Note que si $\delta(a) \geq 2$ entonces el conjunto $\{\theta_1, \ldots, \theta_a\}$ contiene al menos un irracional. Por lo que para demostrar que la sucesión $\zeta(2n+1)$ contiene una infinidad de irracionales, basta demostrar que si $a > 3$ es un entero impar y $\delta(a)$ es la dimensión del espacio generado por $\{\zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(a)\}$ sobre los racionales, entonces $\delta(a)$ tiende a infinito cuando a tiende a infinito.

Primeramente recordemos dos propiedades básicas de la función polilogaritmo. Esta función se define para $n \in \mathbb{N}$ como

$$\mathrm{Li}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)^n}, \qquad |z| < 1. \tag{2.16}$$

Si $n = 1$, al usar la definición (2.16) y la serie de Taylor de $\log(1-z)$ alrededor de $z = 0$, se tiene que

$$\mathrm{Li}_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1} = -\frac{\log(1-z)}{z},$$

de esta ecuación se sigue que

$$\lim_{z \to 1} (z-1)\,\mathrm{Li}_1(z) = 0. \tag{2.17}$$

Por otro lado, notemos que si $n \geq 2$ entonces $\mathrm{Li}_n(z)$ converge para $|z| \leq 1$, en particular si sustituimos $z = 1$ en (2.16) se tiene que

$$\mathrm{Li}_n(z) = \zeta(n), \qquad n \geq 2. \tag{2.18}$$

Recordemos además que para $\alpha \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{N}$, el símbolo de Pochammer se define como el producto

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1), \tag{2.19}$$

el cual satisface la siguiente relación

$$(\alpha)_k = (-1)^k(-\alpha-k+1)_k, \tag{2.20}$$

que se verifica directamente cambiando α por $-\alpha-k+1$ en (2.19).

Usando el símbolo de Pochammer definimos

$$R_n(z) = n!^{a-2r} \frac{(z-rn+1)_{rn}(z+n+2)_{rn}}{(z+1)_{n+1}^a}, \tag{2.21}$$

donde a, n y r son enteros positivos que satisfacen $2r < a$. La función $R_n(z)$ permite definir a la vez

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_n(k)}{z^k}. \tag{2.22}$$

En seguida demostramos un primer resultado auxiliar concerniente a la función $R_n(z)$.

Lema 2.2 *La función $R_n(z)$ definida en (2.21) admite la representación en fracciones parciales*

$$R_n(z) = \sum_{\ell=1}^{a} \sum_{j=0}^{n} \frac{c_{\ell,j,n}}{(z+j+1)^\ell}, \tag{2.23}$$

donde

$$c_{\ell,j,n} = \frac{1}{(a-\ell)!} \frac{d^{a-\ell}}{dz^{a-\ell}} \left((z+j+1)^a R_n(z)\right)\Big|_{z=-j-1}.$$

Demostración. Como $R_n(z) = P_1(z)/P_2(z)$ es un cociente de polinomios $P_1(z)$ y $P_2(z)$ cuyos grados son $2rn$ y $a(n+1)$ respectivamente, entonces $R_n(z)$ admite la expansión en fracciones (2.23) ya que $2rn - a(n+1) < 0$.

Cada coeficiente $c_{\ell,j,n}$ se puede obtener notando que

$$(z+j+1)^a R_n(z) = \sum_{\ell=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{\ell,j,n}(z+j+1)^{a-\ell}.$$

Luego, al derivar hasta el orden $a-\ell$ y evaluar en $z=-j-1$

$$(a-\ell)!c_{\ell,j,n} = \frac{d^{a-\ell}}{dz^{a-\ell}}((z+j+1)^a R_n(z))\Big|_{z=-j-1}.$$

□

Con los coeficientes $c_{\ell,j,n}$ que aparecen en el lema anterior definimos

$$P_{0,n}(z) = -\sum_{\ell=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{\ell,j,n}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{z^{j-k}}{(k+1)^{\ell}} \tag{2.24}$$

y

$$P_{\ell,n}(z) = \sum_{j=0}^{n} c_{\ell,j,n} z^j, \qquad \ell \geq 1. \tag{2.25}$$

Haciendo uso de estos polinomios, demostraremos en seguida que $S_n(1)$ se puede expresar como combinación lineal de las constantes $\zeta(n)$.

Lema 2.3 *Sean a y n enteros positivos, entonces*

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{\ell=2}^{a} P_{\ell,n}(1)\zeta(\ell). \tag{2.26}$$

Además si $(n+1)a+\ell$ es impar se tiene que $P_{\ell,n}(1) = 0$, en particular si n es par y $a > 3$ es impar entonces $P_{\ell,n}(1) = 0$ para todo ℓ par en $\{2,3,\dots,a\}$ y por lo tanto bajo estas hipótesis

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{\ell=1}^{(a-1)/2} P_{2\ell+1,n}(1)\zeta(2\ell+1). \tag{2.27}$$

Demostración. Sustituyendo el desarrollo (2.23) en la definición (2.22) las siguientes igualdades se siguen

$$\begin{aligned} S_n(z) &= \sum_{\ell=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{\ell,j,n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{-k}}{(k+j+1)^{\ell}} \\ &= \sum_{\ell=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{\ell,j,n} z^j \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^k}\frac{1}{(k+1)^{\ell}} - \sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{z^k}\frac{1}{(k+1)^{\ell}}\right] \\ &= \sum_{\ell=1}^{a}\mathrm{Li}_n(1/z)\sum_{j=0}^{n} c_{\ell,j,n} z^j - \sum_{\ell=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{\ell,j,n}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{z^{j-k}}{(k+1)^{\ell}}. \end{aligned}$$

Es decir

$$S_n(z) = P_{0,n}(z) + \sum_{\ell=1}^{a} P_{\ell,n}(z)\,\mathrm{Li}(1/z).$$

Como

$$P_{1,n}(1) = \sum_{j=0}^{n} \frac{d^{a-1}}{dz^{a-1}} \left(\frac{R_n(z)(z+j+1)^a}{(a-1)!} \right) \Big|_{z=-j-1} = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Res}\, R_n(z) \Big|_{z=-j} = 0,$$

el polinomio $P_{1,n}(z)$ es divisible por $z-1$, por lo que al usar (2.17) deducimos que

$$\lim_{z\to 1} P_{1,n}(z)\,\mathrm{Li}_1(1/z) = 0.$$

Entonces usando el límite (2.18) la igualdad (2.26) queda demostrada. Para probar la ecuación (2.27) notemos que

$$c_{\ell,j,n} = (-1)^{a-\ell} \frac{d^{a-\ell}}{dx^{a-\ell}} (\Phi_{n,j}(x)) \Big|_{x=j},$$

donde

$$\Phi_{n,j}(x) = R_n(-x-1)(j-x)^a = n!^{a-2r} \frac{(-x-rn)_{rn}(-x+n+1)_{rn}}{(-x)_{n+1}^a} (j-x)^a.$$

Aplicando la identidad (2.20) a cada factor de este producto tenemos que

$$\Phi_{n,n-j}(n-x) = (-1)^{an} n!^{a-2r} \frac{(n+1-x)_{rn}(-x-rn)_{rn}}{(-x)_{n+1}^a} (j-x)^a = (-1)^{an} \Phi_{n,j}(x),$$

se sigue que si $k \geq 0$ entonces

$$\Phi_{n,n-j}^{(k)}(n-x) = (-1)^{an+k} \Phi_{n,j}^{(k)}(x).$$

En particular, si $k = a-\ell$ y $x = j$ se tiene que

$$c_{\ell,n-j,n} = (-1)^{an}(-1)^{a+\ell} c_{\ell,j,n},$$

esta última ecuación indica que todos los coeficientes $c_{\ell,i,n}$ con $i = 0, \ldots, n$ son cero si $a(n+1)+\ell$ es impar y esto se cumple si suponemos que ℓ es par, a impar y n par. □

En el siguiente lema, el polinomio

$$Q_{r,a}(s) = s^{a+1}(rs-r-1) + (r+1)s - r, \tag{2.28}$$

servirá para estimar el crecimiento de $|S_n(1)|^{1/n}$ cuando n tiende a infinito.

Primero notemos que $Q_{r,a}(0) = -r < 0$, $Q_{r,a}(1) = 0$ y $Q_{r,a}(s) < 0$ si $s \in [0, r/(r+1)]$. Además calculando la primera y segunda derivada tenemos que $Q'_{r,a}(0) = r+1 > 0$, $Q'_{r,a}(1) = 2r-a < 0$ y $Q''_{r,a}(s) < 0$ para $s \in [0,1]$. Se sigue de esto que $Q_{r,a}(s)$ tiene una única raíz en el intervalo $(r/(r+1), 1)$, a esta única raíz la denotamos por s_0.

Lema 2.4 *Se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} |S_n(1)|^{1/n} = \varphi_{r,a}. \tag{2.29}$$

Donde

$$\varphi_{r,a} = ((r+1)s_0 - r)^r (r+1-rs_0)^{r+1} (1-s_0)^{a-2r}.$$

Además se satisfacen las siguientes desigualdades

1. *Para todo $r>0$ se cumple* $0<\varphi_{r,a}\le 2^{r+1}r^{2r-a}$.
2. *Si* $a>4e^4$ *y* $r\in(e^4,a/4)$ *entonces* $e^a\varphi_{r,a}<1$.

Demostración. Consideremos

$$\widetilde{R}_n(k)=n!^{a-2r}\frac{(k-rn+1)_{rn}(k+n+2)_{rn}}{(k+2)_n^a}=(k+1)^aR_n(k). \tag{2.30}$$

Note que si k,c y d son enteros positivos entonces $(k+c+1)_d=(k+c+d)!/(k+c)!$, por lo que al sustituir esta relación en cada factor de (2.30) tenemos que

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_n(k)&=n!^{a-2r}\frac{k!(k+n(r+1)+1)!(k+1)!^a}{(k-rn)!(k+n+1)!(k+n+1)!^a}\\&<n!^{a-2r}\frac{(k+n(r+2))^{2rn}}{k^{an}}\\&=\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{a-2r}\left(\frac{k}{n}\right)^{-n(a-2r)}\left(1+(r+2)\frac{n}{k}\right)^{2rn}\\&<\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{a-2r}\left(\frac{k}{n}\right)^{-n(a-2r)}e^{2rn^2(r+2)/k}. \end{aligned}\tag{2.31}$$

En la deducción de estas desigualdades hemos usado la desigualdad $1+x<e^x$, que es válida para $x\neq 0$. Mientras que si usamos la desigualdad $1-x>e^{-x/2}$, la cual es válida para $x\in(0,1/2)$, se tiene si $k>2rn$ entonces

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_n(k)&>n!^{a-2r}\frac{(k-rn)^{2rn}}{(k+2n)^{an}}\\&=\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{a-2r}\left(\frac{k}{n}\right)^{-n(a-2r)}\left(1-r\frac{n}{k}\right)^{2rn}\left(1+2\frac{n}{k}\right)^{-an}\\&>\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{a-2r}\left(\frac{k}{n}\right)^{-n(a-2r)}e^{-n^2(r^2+2a)/k}. \end{aligned}\tag{2.32}$$

Estos cálculos muestran que si n es fijo entonces al hacer uso de las desigualdades (2.31) y (2.32), se puede elegir $c=c(a,r)>0$ fijo tal que

$$M_n=\max_{k\ge 0}\widetilde{R}_n(k)=\max_{rn\le k\le cn}\widetilde{R}_n(k). \tag{2.33}$$

Por otro lado sabemos por (2.22) y (2.30) que

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}R_n(k)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{-a}\widetilde{R}_n(k)z^{-k},$$

de lo cual, haciendo uso de las desigualdades $\sum_{k\ge rn}(k+1)^{-a}<1$ y $\widetilde{R}_n(k)\ge 0$, deducimos que

$$\frac{M_n}{(cn)^a}\le S_n(1)\le M_n.$$

Por lo que para demostrar (2.29) basta probar que $M_n^{1/n}$ tiende a $\varphi_{r,a}$ cuando n tiende a infinito, para este propósito reescribimos

$$\widetilde{R}_n(k)=n!^{a-2r}\frac{(k+n(r+1))!\,k!^{a+1}}{(k-rn)!\,(k+n)!^{a+1}}\left(\frac{k+1}{k+n+1}\right)^a\frac{k+n(r+1)+1}{k+n+1}.$$

Recordemos que la fórmula de Stirling establece que $n! \sim e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$, donde $f(x) \sim g(x)$ significa que $f(x)/g(x)$ tiende a 1 cuando x tiende a infinito.

Usando la fórmula de Stirling en cada factorial de la expresión anterior tenemos que

$$\widetilde{R}_n(k) \sim n^{n(a-2r)} \frac{(k+n(r+1))^{k+n(r+1)}\, k^{k(a+1)}}{(k-rn)^{k-rn}\,(k+n)^{(a+1)(k+n)}}\rho_n(k),$$

donde

$$\rho_n(k) = \left(\frac{k+1}{k+n+1}\right)^a \left(\frac{k+n(r+1)+1}{k+n+1}\right)\left(\frac{n^{a-2r}(k+n(r+1))k^{a+1}2\pi^{a-2r}}{(k-rn)(k+n)^{a+1}}\right)^{1/2},$$

como se ha considerado $rn \leq k \leq cn$, se tiene que $\rho_n(k)^{1/n} \to 1$ cuando $n \to \infty$.

Por otro lado note que si

$$\sigma_n(k) = n^{n(a-2r)} \frac{(k+n(r+1))^{k+n(r+1)}\, k^{k(a+1)}}{(k-rn)^{k-rn}\,(k+n)^{(a+1)(k+n)}} \qquad \text{y} \qquad F(x) = \frac{x^{x(a+1)}(x+r+1)^{x+r+1}}{(x+1)^{(a+1)(x+1)}(x-r)^{(x-r)}},$$

entonces

$$|\sigma_n(k)|^{1/n} = F(k/n).$$

Por lo tanto basta saber el comportamiento de $F(x)$ cuando $x \geq r$, ya que

$$\lim_{n\to\infty}|M_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\max_{k\in[rn,cn]}|\sigma_n(k)|^{1/n} = \max_{x\in[r,c]}F(x) = \max_{x\geq r}F(x). \tag{2.34}$$

Llamemos x_0 al máximo de $F(x)$ en esta última ecuación. Este máximo debe satisfacer $F'(x_0)=0$, así que para encontrarlo escribimos $F(x) = e^{\log F(x)}$. Al derivar e igualar a cero tenemos que

$$\log\left(\frac{x_0^{a+1}(x_0+r+1)}{(x_0+1)(x_0-r)}\right) = 0.$$

Es decir $F'(x_0)=0$, si el argumento del logaritmo anterior es 1, que es equivalente a la ecuación

$$x_0^{a+1}(x_0+r+1) - (x_0-r)(x_0+1)^{a+1} = 0. \tag{2.35}$$

Al hacer la sustitución $x_0 = s_0/(1-s_0)$, tenemos que s_0 es la raíz buscada de $Q_{r,a}(s)$ ya que si $x_0 \geq r$, entonces $s_0 \in (r/(r+1),1)$. Para calcular el máximo simplemente sustituimos $x_0 = s_0/(1-s_0)$ en $F(x)$. Al hacer uso de (2.35) obtenemos

$$\begin{aligned} F(x_0) &= \frac{(x_0+r+1)^{r+1}(x_0-r)^r}{(x_0+1)^{a+1}}\left(\frac{x_0^{a+1}(x_0+r+1)}{(x_0+1)^{a+1}(x_0-r)}\right)^{x_0} \\ &= \frac{(x_0+r+1)^{r+1}(x_0-r)^r}{(x_0+1)^{a+1}} \\ &= \frac{(1-s_0)^{a+1}}{(1-s_0)^{2r+1}}(s_0+(r+1)(1-s_0))^{r+1}(s_0-r(1-s_0))^r \\ &= \varphi_{r,a}. \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos, según (2.34). Para probar la primera desigualdad del lema usamos la desigualdad de Bernoulli

$$(1+x)^a > 1+ax, \qquad x>0 \qquad \text{y} \qquad a>1.$$

Si hacemos $a = (r+1)/r$ y $x = 1$ tenemos que

$$2^{(r+1)/r}k > 2k + \frac{k}{r} = k + \frac{k(r+1)}{r} > k + n(r+1), \qquad k > rn,$$

luego, usando (2.30) y las desigualdades $k/n \geq r \geq 1$ y $(y+1)/(x+1) \leq y/x$, con $0 < x < y$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}_n(k) &\leq n!^{a-2r}\frac{2^{rn}(k+n(r+1)+1)^{rn}}{(k+1)^a n} < n^{n(a-2r)}\frac{k^{rn}}{(k+1)^{n(a-r)}}\left(\frac{k+n(r+1)+1}{k+1}\right)^{rn} \\
&< \frac{n^{n(a-2r)}k^{rn}}{k^{n(a-r)}}\left(\frac{k+n(r+1)}{k}\right)^{rn} < \left(\frac{n}{k}\right)^{n(a-2r)}\left(\frac{2^{1+1/r}k}{k}\right)^{rn} \\
&\leq \left(\frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}}\right)^{n}.
\end{aligned}$$

Tomando raíces n-ésimas y haciendo tender n a infinito la primera desigualdad es cierta. Para demostrar la segunda desigualdad notamos que si $r < a/4$ entonces $a - 2r > a/2$, por lo tanto

$$e^a\varphi_{r,a} < e^a\frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}} < \frac{e^{2a}}{r^{a/2}} = \left(\frac{e^4}{r}\right)^{a/2} < 1,$$

si $r > e^4$. □

Ahora estimaremos superiormente el crecimiento de $P_{\ell,n}(1)^{1/n}$ cuando n tiende a infinito.

Lema 2.5 *Si $a \in \mathbb{N}_0$ y $\ell \in \{0,\ldots,a\}$ entonces*

$$\limsup_{n\to\infty}|P_{\ell,n}(1)|^{1/n} \leq 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}$$

Demostración. Sea $\ell \in \{0,\ldots,a\}$, usando la fórmula integral de Cauchy

$$\begin{aligned}
c_{\ell,j,n} &= \frac{d^{a-\ell}}{dz^{a-\ell}}\left(R_n(z)(z+j+1)^a\right)\Big|_{z=-j-1} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{R_n(z)(z+j+1)^a}{(z+j+1)^{a-\ell+1}}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_n(z)(z+j+1)^{\ell-1}\,dz. \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

Donde γ es el círculo de radio $1/2$ y centro en $z = -j-1$. Ahora si $z \in \gamma$ y k es un entero entonces $|z-k+1| \leq j+k+1$. Multiplicando desde $k = 1$ hasta $k = rn$ obtenemos

$$|(z-rn+1)_{rn}| \leq (j+2)_{rn}.$$

De forma similar $|z+n+k+1| \leq n-j+k+1$, por lo que al multiplicar desde $k = 1$ hasta $k = rn$ estas desigualdades tenemos

$$|(z+n+2)_{rn}| \leq (n-j+2)_{rn}.$$

Finalmente como $|z+j+k| \geq |k-1| - 1/2$ para todo k entero se sigue que

$$|(z+1)_{n+1}| \geq \frac{1}{8}(j-1)!(n-j+1)!.$$

Usando estas estimaciones en la integral (2.36) y haciendo uso de (2.21) de $R_n(z)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}|c_{\ell,j,n}| &\le \frac{(rn+j+1)!\,((r+1)n-j+1)!\,8^a n!^{a-2r}}{(j+1)!\,(n-j+1)!\,((j-1)!\,(n-j-1)!)^a}\\ &\le \frac{(rn+j+1)!}{(j+1)!(j!(n-j)!)^r}\,\frac{((r+1)n-j+1)!}{(n-j+1)!(j!(n-j)!)^r}\binom{n}{j}^{a-2r}(8j(n-j))^a.\end{aligned}$$

Para acotar superiormente esta expresión hacemos uso de la desigualdad

$$\binom{n}{n_1,\dots,n_k}\le k^n,$$

que se deduce, haciendo $x_1=\cdots=x_k=1$, de la igualdad

$$(x_1+\cdots+x_k)^n=\sum_{n_1+\cdots+n_k=n}\binom{n}{n_1,\dots,n_k}x_1^{n_1}\cdots x_k^{n_k}.$$

Así, usando el hecho de que $n\ge j$, se tiene que

$$\begin{aligned}|c_{\ell,j,n}| &\le (2r+1)^{rn+j+1}(2r+1)^{(r+1)n-j+1}2^{n(a-2r)}(8n^2)^a\\ &= (2r+1)^{n(2r+1)+2}2^{n(a-2r)}(8n^2)^a.\end{aligned}$$

De donde al usar la definición (2.25), se sigue que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}|P_{\ell,n}(1)|^{1/n} &\le \limsup_{n\to\infty}\left((n+1)(2r+1)^{n(2r+1)+2}2^{n(a-2r)}(8n^2)^a\right)^{1/n}\\ &= 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}.\end{aligned}$$

En el caso en que $\ell=0$, el resultado es el mismo puesto que usando la definición (2.24)

$$|P_{0,n}(1)|=\left|\sum_{\ell=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}c_{\ell,j,n}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{(k+1)^\ell}\right|\le\left|n\sum_{\ell=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}c_{\ell,j,n}\right|,$$

entonces podemos hacer la estimación anterior otra vez. □

En seguida demostraremos que si $d_n=\mathrm{mcm}(1,2,\dots,n)$ entonces el producto $d_n^{a-\ell}c_{\ell,j,n}$ es entero. Esto será de utilidad para poder aplicar el Teorema de Nesterenko.

Lema 2.6 *Sea d_n el mínimo común múltiplo de $\{1,2,\dots,n\}$, si $\ell\in\{0,1,\dots,a\}$ entonces al multiplicar al polinomio $P_{\ell,n}(z)$ por $d_n^{a-\ell}$, el polinomio resultante tiene coeficientes enteros.*

Demostración. Por la definición de $P_{\ell,n}$ basta demostrar que $d_n^{a-\ell}c_{\ell,j,n}$ son enteros. Como

$$c_{\ell,j,n}=\frac{1}{(a-\ell)!}\frac{d^{a-\ell}}{dt^{a-\ell}}\left(R_n(t)(t+j+1)^a\right)\Big|_{t=-j-1},$$

reescribimos

$$R_n(t)(t+j+1)^a=\left(\prod_{\ell=1}^{r}F_\ell(t)G_\ell(t)\right)H(t)^{a-2r}.$$

Donde

$$F_\ell(t)=\frac{(t-\ell+1)_n(t+j+1)}{(t+1)_{n+1}},\qquad G_\ell(t)\frac{(t+n\ell+2)_n(t+j+1)}{(t+1)_{n+1}}$$

y

$$H(t) = \frac{n!(t+j+1)}{(t+1)_{n+1}}.$$

Primero ponemos $F_\ell(t)$ en fracciones parciales

$$F_\ell(t) = \frac{A_{\ell,0}}{t+1} + \cdots + 1 + \cdots + \frac{A_{\ell,n}}{t+n+1}, \tag{2.37}$$

en esta suma la constante 1 está en el lugar j-ésimo, para determinar los coeficientes $A_{\ell,m}$ multiplicamos el desarrollo anterior por $(t+1)_{n+1}$ y al evaluar en $t = -m-1$

$$(-m-n\ell)_n(j-m) = A_{\ell,m} \prod_{\substack{h=0 \\ h\neq m}}^{n} (h-m).$$

Entonces

$$A_{\ell,m} = (-1)^{n-m}(j-m)\binom{m+n\ell}{n}\binom{n}{m}$$

es un entero divisible por $(j-m)$.

Para evitar redundancia de términos, denotemos por $D_k f$ a la derivada de orden k de la función f, entonces usando el desarrollo (2.37)

$$D_k F_\ell(t)\Big|_{t=-j-1} = \epsilon_k + \sum_{\substack{m=0 \\ m\neq j}}^{n} (-1)^k \frac{A_{\ell,m}}{(m-j)^{k+1}},$$

donde $\epsilon_k = 1$ si $k=0$ y $\epsilon_k = 0$ si $k>0$.

Note que como $A_{\ell,m}$ es un entero divisible por $j-m$ se sigue que al evaluar $t=-j-1$ entonces $d_n^k D_k F_\ell(t)$ es un entero, de forma análoga $d_n^k D_k G_\ell(t)$ y $d_n^k D_k H(t)$ son también enteros al evaluar en $t=-j-1$.

Por lo tanto al usar la fórmula de Leibnitz para derivadas de productos de funciones tenemos que

$$D_{a-\ell}(R_n(t)(t+j+1)^a) = \sum_{k_1+\cdots+k_a=a-\ell} \binom{a-\ell}{k_1,\ldots,k_a}(D_{k_1}f_1)\cdots(D_{k_a}f_a),$$

donde f_k es alguna de las funciones F_ℓ, G_ℓ ó H. Al evaluar en $t=-j-1$ y multiplicar por $d_n^{a-\ell}$, cada uno de los términos es un entero y el resultado se tiene. □

Nuestro siguiente paso es usar los lemas anteriores para estimar el crecimiento de $\delta(a)$, la dimensión del espacio vectorial generado por el conjunto $\{\zeta(3),\zeta(5),\ldots,\zeta(a)\}$ sobre los racionales. Para ello si $n\geq 0$ y $\ell \in \{1,\ldots,(a-1)/2\}$ definimos las cantidades

$$\lambda_n = d_{2n}^a S_{2n}(1), \qquad p_{0,n} = d_{2n}^a P_{0,2n}(1), \qquad \text{y} \qquad p_{\ell,n} = d_{2n}^a P_{2\ell+1,2n}(1). \tag{2.38}$$

Lema 2.7 *Si a es un entero impar que satisface $a > 4e^4$ y r es un entero en el intervalo $(e^4, a/4)$ entonces*

$$\delta(a) \geq \frac{(a-2r)\log 2 + (2r+1)\log(2r+1) - \log\varphi_{r,a}}{a + (a-2r)\log 2 + (2r+1)\log(2r+1)}.$$

Donde $\varphi_{r,a} = ((r+1)s_0 - r)^r((1-s_0)r+1)^{r+1}(1-s_0)^{a-2r}$ *y* s_0 *es la raíz del polinomio* $Q_{r,a}(s)$ *que aparece en* (2.28)*. En particular de esta última desigualdad se sigue que*

$$\delta(a) \geq \frac{\log r + (\frac{a-r}{a+1}) \log 2}{1 + \log 2 + (\frac{2r+1}{a+1}) \log(r+1)}.$$

Demostración. Por el Lema 2.3 se tiene que

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{\ell=1}^{(a-1)/2} P_{2\ell+1,n}(1)\zeta(2\ell+1),$$

al sustituir esta relación en (2.38) se obtiene

$$\lambda_n = p_{0,n} + \sum_{\ell=1}^{(a-1)/2} p_{\ell,n}\zeta(2\ell+1).$$

En seguida probaremos que las hipótesis del Teorema de Nesterenko se cumplen. Por el Lema 2.6 los números $p_{\ell,n}$ son enteros y usando el Lema 2.4 tenemos que

$$S_{2n}(1) = (\varphi_{r,a})^{2n(1+o(1))}.$$

Al multiplicar esta estimación por d_{2n}^a, tomando logaritmos y al usar el Teorema 2.1 para estimar a d_{2n}^a resulta que

$$\log \lambda_n = 2n \log \rho + o(n), \qquad \rho = e^a \varphi_{r,a}.$$

De la misma forma al usar el Lema 2.5

$$\begin{aligned} p_{\ell,n} &\leq d_{2n}^a (2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1})^{2n(1+o(1))} \\ &= e^{a(2n+o(n))}(2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1})^{2n(1+o(1))}, \end{aligned}$$

lo cual podemos reescribir como

$$\log |p_{\ell,n}| \leq 2n \log \tau + o(n), \qquad \tau = e^a 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}.$$

Ahora, si $r > e^4$ por el Lema 2.4 tenemos que $\rho < 1$ si $a > ae^4$ y como $\tau > 1$ entonces al aplicar el Teorema de Nesterenko con $\alpha_1 = \alpha_2 = \rho^2$ y $\beta = \tau^2$ tenemos que

$$\delta(a) \geq \frac{\log \tau - \log \rho}{\log \tau}.$$

Finalmente, utilizamos la primera desigualdad del Lema 2.4 para deducir que

$$\log \varphi_{r,a} \leq \log(2^{r+1}/r^{a-2r}).$$

De donde al sustituir en la desigualdad anterior

$$\begin{aligned} \delta(a) &\geq \frac{(a-3r-1)\log 2 + (2r+1)\log(2r+1) + (a-2r)\log r}{a + (a-2r)\log 2 + (2r+1)\log(2r+1)} \\ &\geq \frac{(a-3r-1)\log 2 + (2r+1)\log 2r + (a-2r)\log r}{a+1+(a-2r)\log 2 + (2r+1)\log(2r+2)} \\ &= \frac{(\frac{a-r}{a+1})\log 2 + \log r}{1 + \log 2 + (\frac{2r+1}{a+1})\log(r+1)}, \end{aligned} \tag{2.39}$$

que es lo que queríamos probar. □

Por último para demostrar que la cantidad de irracionales en la sucesión $\zeta(2n+1)$ es infinita basta demostrar que $\delta(a)$ tiende a infinito cuando a tiende a infinito, esto es una deducción sencilla de nuestro último lema.

Teorema 2.6 *Existe una constante a_0 tal que si $a \geq a_0$ entonces*

$$\delta(a) \geq \frac{\log a}{8}.$$

Demostración. Sea $r = [\sqrt{a}\,]$, entonces según el lema anterior eligiendo $r > e^4$, tenemos que $a > e^8$ y en consecuencia sustituyendo en (2.39)

$$\begin{aligned}
\delta(a) &\geq \frac{\log [\sqrt{a}\,] + \left(\frac{a-[\sqrt{a}\,]}{a+1}\right)\log 2}{1 + \log 2 + \left(\frac{2[\sqrt{a}\,]+1}{a+1}\right)\log([\sqrt{a}\,]+1)} \\
&\geq \frac{(1/2)(1+o(1))\log a}{1+\log 2} \\
&> (1/8)\log a
\end{aligned}$$

si a es suficientemente grande. □

2.6. La constante γ de Euler

Nicole Oresme (1323 - 1382) dio la primera demostración de la divergencia de la serie armónica, hecho que se deduce de la siguiente desigualdad

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots < 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots.$$

Note que la serie armónica también se obtiene al evaluar (2.1) en $n = 1$. Quizá esta es una razón por la que Euler la consideró un objeto de estudio. En particular, halló mediante el uso de la función logaritmo una constante que de algún modo se podría considerar como un sustituto de $\zeta(1)$.

Si $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ entonces analizando la gráfica de la función $f(x) = 1/x$, es sencillo deducir que $1/n < H_n - \log n < 1$. De esto se sigue que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} (H_n - \log n) \leq 1.$$

Euler dio una exposición de este hecho en un manuscrito de 1735 titulado *De progressionibus harmonicus observationes*, en donde relacionó al límite anterior con las constantes $\zeta(n)$ como sigue.

Usando el hecho de que

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \qquad -1 < x \leq 1,$$

deducimos, haciendo $x = 1/r$, que

$$\log\left(1 + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} - \frac{1}{2r^2} + \frac{1}{3r^3} - \frac{1}{4r^4} + \cdots.$$

Reescribiendo esta última identidad tenemos

$$\frac{1}{r} = \log\left(1+\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{3r^3} + \frac{1}{4r^4} - \cdots$$

y sumando sobre r desde 1 hasta n

$$H_n = \log(n+1) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^2} - \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^3} + \frac{1}{4}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^4} - \cdots .$$

Como cada suma es convergente cuando $n \to \infty$, Euler estimó la suma total y escribió

$$H_n = \log(n+1) + 0.577218,$$

donde 0.577218 es un valor aproximado para $\lim_{n\to\infty}(H_n - \log n)$, a esta constante Euler la denotó por C y más tarde Lorenzo Mascheroni (1750 - 1800) usó la letra griega γ para denotarla.

Decidir si γ es irracional es considerado un problema difícil. Al respecto el célebre matemático G. H. Hardy algún día ofreció su puesto en Oxford a quién demostrara que γ es irracional. Hasta hoy no se conoce solución alguna.

Para terminar este capítulo, presentamos una fórmula similar a las usadas anteriormente para demostrar la irracionalidad de $\zeta(2)$ y $\zeta(3)$. Esta fórmula podría servir [26] para decidir si γ es irracional.

Teorema 2.7 *La constante γ de Euler satisface*

$$\gamma = \int_0^1\int_0^1 \frac{x-1}{(1-xy)\log xy}\,dxdy.$$

Demostración. Si el producto xy satisface $0 < xy < 1$ entonces para todo $j \in \mathbb{N}_0$ se cumple que

$$\int_j^\infty (xy)^t\,dt = -\frac{(xy)^j}{\log xy}. \tag{2.40}$$

Ahora, al expandir $(1-xy)^{-1}$ en serie geométrica tenemos

$$I = \int_0^1\int_0^1 \frac{x-1}{(1-xy)\log xy}\,dxdy = \sum_{j=0}^{\infty}\int_0^1\int_0^1 (1-x)\left(-\frac{(xy)^j}{\log xy}\right)\,dxdy.$$

Por lo que al usar la identidad (2.40) la siguientes igualdades se siguen

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{j=0}^{\infty}\int_0^1\int_0^1 (1-x)\int_j^\infty (xy)^t\,dtdxdy \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\int_j^\infty\int_0^1\int_0^1 (x^t - x^{t+1})y^t\,dxdydt \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{j+1} - \log\frac{j+2}{j+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(H_n - \log(n+1)\right) \\
&= \gamma
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 3

Trascendencia de algunas constantes de Euler

3.1. Introducción

Decimos que un número x es ***algebraico*** si satisface una ecuación de la forma

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad a_n \neq 0, \tag{3.1}$$

donde $a_i \in \mathbb{Q}$. Si un número no satisface ninguna ecuación de este tipo decimos que tal número es ***trascendente***.

En este capítulo presentamos demostraciones clásicas de la trascendencia de e, π y $\zeta(2n)$, con $n \in \mathbb{N}$. Para esto último hacemos uso de una fórmula de Euler y de la trascendencia de π. En la sección final demostramos que para todo $k \in \mathbb{N}$, las constantes $S_k(1)$, $S_k(2)$, $\ldots$, introducidas en la última sección del Capítulo 1, son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

3.2. Trascendencia de e

La primera demostración de la trascendencia de e fue dada en 1873 por C. Hermite (1822 - 1901). En seguida demostraremos este hecho siguiendo a Baker [7]. Primeramente demostramos un lema que servirá también en otro resultado.

Lema 3.1 *Si k, n y p son enteros positivos y definimos*

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(1-x^k)^p(2^k - x^k)^p \cdots (n^k - x^k)^p, \tag{3.2}$$

entonces este polinomio tiene grado $\ell = nkp + p - 1$ y satisface

1. *Si $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces $f^{(m)}(j)$ es un entero divisible por p para $m = 0, 1, \ldots$*
2. *Las derivadas de f en cero son las siguientes cantidades*

$$f^{(m)}(0) = \begin{cases} (n!)^{kp}, & \text{si } m = p-1; \\ a_r \dfrac{m!}{(p-1)!}, & \text{si } m = p-1+rk,\ 1 \leq r \leq np; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde los números a_r son enteros.

3. *Si p es un número primo mayor que n entonces $f^{(p-1)}(0)$ no es divisible por p, además si $m \neq p-1$ entonces $f^{(m)}(0)$ siempre es divisible por p.*

4. *Si p es un número primo en la progresión aritmética $1+k, 1+2k, 1+3k, \ldots$ y $f^{(m)}(0) \neq 0$ entonces k divide a m.*

Demostración. Observamos que si j es un entero y $g\,(j-x) = x^n/(p-1)!$ con $p-1 < n$ entonces las derivadas de g están dadas por

$$g^{(m)}(j-x) = \frac{(-1)^m n!\, x^{n-m}}{(p-1)!(n-m)!},$$

en particular si $x=0$

$$g^{(m)}(j) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n n!}{(p-1)!}, & \text{si } m = n; \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

de este hecho deducimos que $g^{(m)}(j)$ es un entero divisible por p (ya que $p-1 < n$) para todo $m \geq 0$, por lo tanto para demostrar el enunciado 1 basta demostrar que si $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces

$$f(j-x) = \frac{1}{(p-1)!}(a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_\ell x^\ell). \tag{3.3}$$

Note que si $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces

$$i^k - (j-x)^k = \begin{cases} i^k - j^k + x(kj^{k-1} + \cdots \pm x^{k-1}), & \text{si } i \neq j; \\ x(kj^{k-1} + \cdots \pm x^{k-1}), & \text{si } i = j, \end{cases}$$

luego x^p es factor de $(j^k - (j-x)^k)^p$, se sigue que

$$f(j-x) = \frac{(j-x)^{p-1}}{(p-1)!}\prod_{i=1}^{n}(i^k - (j-x)^k)^p = \frac{x^p}{(p-1)!}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{\ell-p}x^{\ell-p}),$$

esta expresión demuestra (3.3) y por lo tanto el enunciado 1. Para demostrar el segundo enunciado recurrimos al mismo argumento, ya que

$$(j^k - x^k)^p = (j^{kp} + a_{j,1}x^k + \cdots + a_{j,p}x^{kp}),$$

se sigue que

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\prod_{j=1}^{n}(j^k - x^k)^p = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}((n!)^{kp} + a_1 x^k + \cdots + a_{np}x^{knp}),$$

por lo tanto

$$f^{(m)}(0) = \begin{cases} (n!)^{kp}, & \text{si } m = p-1; \\ a_r \dfrac{m!}{(p-1)!}, & \text{si } m = p-1+rk,\ 1 \leq r \leq np; \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{3.4}$$

de esta expresión tenemos que $f^{(m)}(0)$ es divisible por p para todo $m \geq 0$ excepto quizá $f^{(p-1)}(0)$, si suponemos $p > n$ entonces p no divide a este número ya que no divide a ninguno de sus factores, esto demuestra los enunciados 2 y 3.

Si p es un número primo en la progresión aritmética $1+k$, $1+2k$, $1+3k, \ldots$ entonces $m = p-1$ es divisible por k y por lo tanto también $m = p-1+rk$ con $1 \leq r \leq np$, como estos son los únicos casos donde $f^{(m)}(0)$ no se anula según (3.4) esto demuestra el último enunciado. $\square$

Teorema 3.1 *El número e de Euler es trascendente.*

Demostración. Supongamos que e es algebraico y satisface la ecuación

$$a_n e^n + a_{n-1}e^{n-1} + \cdots + a_1 e + a_0 = 0. \tag{3.5}$$

Consideramos

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{((n+1)p-1)}(x),$$

donde el polinomio

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(1-x)\cdots(n-x),$$

se obtiene haciendo $k=1$ en (3.2), como el grado de f es $(n+1)p-1$ entonces $f^{((n+1)p)}(x) = 0$ por lo que se sigue fácilmente que

$$-\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = f(x)e^{-x},$$

de donde al integrar de 0 a k obtenemos

$$F(0)e^k - F(k) = e^k \int_0^k f(t)e^{-t}\, dt.$$

Ahora si multiplicamos por a_k y sumamos sobre k desde cero hasta n nos da

$$F(0)\sum_{k=0}^{n} a_k e^k - \sum_{k=0}^{n} a_k F(k) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}\, dt,$$

por lo que al usar (3.5) la primera suma es cero y podemos reescribir esta última expresión como

$$a_0F(0) + \sum_{k=1}^{n} a_k F(k) = -\sum_{k=1}^{n} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}\, dt. \tag{3.6}$$

Al usar el Lema 3.1 vemos que $F(k)$ es un entero y además, si $p > n$, el único sumando que no es divisible por p en $F(0)$, es $f^{(p-1)}(0) = n!^p$, luego si $p > \text{máx}\{|a_0|, n\}$ se sigue que $a_0F(0)$ no es divisible por p, esto a la vez hace ver que el lado izquierdo de (3.6) es un entero no divisible por p en particular es un entero no nulo.

Por otro lado si $t \in [0, n]$ entonces $|k - t| \leq 2n$, por lo tanto

$$|f(t)| \leq \frac{2^{np} n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!},$$

luego al insertar esta estimación en el lado derecho de (3.6)

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}\, dt\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| e^n \int_0^n |f(t)e^{-t}|\, dt \leq \frac{\beta c^{p-1}}{(p-1)!},$$

donde $c = 2^n n^{n+1}$ y $\beta = (2e)^n n^{n+1} \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ son constantes fijas que no dependen de p, finalmente como hay una cantidad infinita de primos existe $p > \text{máx}\{n, |a_0|\}$ tal que $\beta c^{p-1}/(p-1)! < 1$ esto da una contradicción y por lo tanto el resultado se tiene. $\square$

3.3. Trascendencia de π

La trascendencia de π fue dada por vez primera por F. Lindemann (1852 - 1939) en 1882 y responde negativamente a una de las preguntas clásicas de la matemática antigua. Los griegos se preguntaban si se podía construir con regla y compás un cuadrado cuya área fuese la del círculo de radio 1. Para tal efecto se requería construir un segmento de longitud π, pero esto último es imposible debido al Teorema de Lindemann y al siguiente teorema que se puede consultar en [18].

Teorema 3.2 *Un número algebraico α es construible con regla y compás si y sólo si, la cerradura normal de α tiene grado 2^n sobre los racionales, para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Es importante resaltar que la demostración de la trascendencia de π que sigue es parecida a la demostración de la trascendencia de e. Lo cual se debe al uso de la identidad

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \tag{3.7}$$

que fue descubierta por Euler y relaciona a cinco de los números más notables de toda la matemática.

Teorema 3.3 *El número π es trascendente.*

Demostración. Si x satisface la ecuación

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

entonces $y = ix$ satisface

$$(a_0 - a_2 y^2 + \cdots) - i(a_1 y - a_3 y^3 + \cdots) = 0$$

de lo cual se sigue que

$$(a_0 - a_2 y^2 + \cdots)^2 + (a_1 y - a_3 y^3 + \cdots)^2 = 0$$

y por lo tanto π es algebraico si y sólo si $i\pi$ lo es, supongamos que $i\pi$ es algebraico y que es raíz de la ecuación

$$a x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_0 = 0, \qquad a,\, a_0 \neq 0,$$

donde los $a_i \in \mathbb{Z}$.

Si $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d$ son todas las raíces de la ecuación anterior, tenemos que $\theta_j = i\pi$ para algún j, luego por la fórmula (3.7) de Euler se tiene que

$$(e^{\theta_1} + 1) \cdots (e^{\theta_d} + 1) = 0,$$

de lo cual, al efectuar el producto, obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{2^d} e^{\Theta_k} = 0,$$

en donde cada Θ_k es de la forma

$$\Theta_k = \epsilon_1 \theta_1 + \epsilon_2 \theta_2 + \cdots + \epsilon_d \theta_d, \qquad \epsilon_j = 0, 1, \qquad j = 1, \ldots, d.$$

Note que algunos, pero no todos los números Θ_k son cero, de lo contrario se tendría $2^d = 0$. Luego si los $\Theta_k \neq 0$ se representan por $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ entonces

$$m + e^{\alpha_1} + \cdots + e^{\alpha_n} = 0, \qquad m = 2^d - n. \tag{3.8}$$

Consideremos el polinomio

$$f(z) = \frac{a^{np}}{(p-1)!} z^{p-1}(z-\alpha_1)^p \cdots (z-\alpha_n)^p, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{3.9}$$

y sea

$$F(z) = f(z) + f'(z) + \cdots + f^{((n+1)p-1)}(z).$$

Como $f^{((n+1)p)}(z) = 0$, se verifica que

$$-\frac{d}{dz}(e^{-z}F(z)) = f(z)e^{-z}$$

de donde, al integrar sobre el segmento que une a 0 con z, se deduce que

$$F(0)e^z - F(z) = e^z \int_0^z e^{-t} f(t)\, dt,$$

por lo que, al evaluar en $z = \alpha_k$ y sumar sobre k, encontramos que

$$F(0)\sum_{k=1}^n e^{\alpha_k} - \sum_{k=1}^n F(\alpha_k) = \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k} \int_0^{\alpha_k} e^{-t} f(t)\, dt,$$

de donde al usar (3.8) resulta

$$mF(0) + \sum_{k=1}^n F(\alpha_k) = -\sum_{k=1}^n e^{\alpha_k} \int_0^{\alpha_k} e^{-t} f(t)\, dt. \tag{3.10}$$

Para obtener nuestro resultado, probaremos que en la ecuación (3.10) el lado izquierdo es un entero no nulo mientras que el valor absoluto del lado derecho es menor que 1 eligiendo p suficientemente grande, lo que evidentemente nos lleva a una contradicción.

Para probar la primera parte recordemos que por el Teorema Fundamental sobre Funciones Simétricas [27], si $g(x_1, \ldots, x_n)$ es un polinomio simétrico con coeficientes enteros, entonces existe un polinomio simétrico $G(s_1, \ldots, s_n)$ con coeficientes enteros tal que $g(x_1, \ldots, x_n) = G(s_1, \ldots, s_n)$, donde $s_1 = x_1 + \cdots + x_n$, $s_2 = x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n$, $\ldots$, $s_n = x_1 \cdots x_n$. Además recordemos que si $\alpha_1 \ldots, \alpha_n$ son las raíces del polinomio $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, se tienen las siguientes igualdades

$$-a_0\sum_i \alpha_i = a_1, \qquad a_0\sum_{i,j} \alpha_i\alpha_j = a_2, \qquad \cdots, \qquad (-1)^n a_0\alpha_1\cdots\alpha_n = a_n,$$

que son denominadas relaciones de Viète.

Ahora observamos que $f(z) = a^{np}x^{p-1}g(z)/(p-1)!$ en donde $g(z) = (z-\alpha_1)^p \cdots (z-\alpha_n)^p$ es un polinomio simétrico en $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, luego, por la observación del párrafo anterior, $g(z)$ es simétrico en los valores $s_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $s_2 = \alpha_1\alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n$, $\ldots$, $s_n = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ y en consecuencia $a^{np}g(z)$ es simétrico en los 2^d números $a\Theta_k$, por lo que al aplicar las relaciones de Viète a las variables s_i se tiene que $f(z)$ es un polinomio con coeficientes enteros.

De estas observaciones se sigue que, por analogía a la demostración del Lema 3.1, las derivadas de $f(z)$ en $0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son enteros divisibles por p excepto quizá $f^{(p-1)}(0) = (-a)^{np}(\alpha_1\cdots\alpha_n)^p$, de esto se sigue que $F(0)$ y $\sum_{k=1}^{n} F(\alpha_k)$ son números enteros y si $p > \max\{|a|, m, |a^n \alpha_1 \cdots \alpha_n|\}$ entonces $F(0)$ es el único término que no es divisible por p, luego el lado izquierdo de (3.10) es un entero no nulo, esto prueba la primera parte.

Para probar la segunda parte, denotamos por $\alpha = \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|\}$ entonces si t está en el segmento que une a 0 con α_i se tiene la siguiente estimación

$$|f(t)| \leq \frac{a^{np}}{(p-1)!}|t|^{p-1}\prod_{i=1}^{n}(|t| + |\alpha_i|)^p \leq \frac{a^{np}}{(p-1)!}\alpha^{p-1}(2\alpha)^{np}.$$

Por lo tanto,

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha_k}\int_0^{\alpha_k} e^{-t}f(t)\,dt\Big| \leq \frac{a^{np}}{(p-1)!}ne^{\alpha}\alpha^p(2\alpha)^{np} = C\frac{\beta^{p-1}}{(p-1)!},$$

donde $C = \alpha n(2a\alpha)^n e^{\alpha}$ y $\beta = \alpha(2a\alpha)^n$ no dependen de p. Como el lado derecho de esta desigualdad es menor que 1, si p es suficientemente grande y tal que $p > \max\{|a|, m, |a^n\alpha_1 \cdots \alpha_n|\}$, esto nos da una contradicción. Concluimos que $i\pi$ es trascendente y en consecuencia también π. $\square$

3.4. Trascendencia de $\zeta(2n)$

En 1750 Euler descubrió una fórmula que determina el valor de $\zeta(2n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En esta sección demostraremos esta fórmula usando conceptos básicos de ecuaciones diferenciales como se sugiere en [24].

Teorema 3.4 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se satisface*

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}B_{2n}\pi^{2n}}{2 \cdot (2n)!}, \tag{3.11}$$

donde los números B_n son llamados números de Bernoulli y aparecen como coeficientes en la serie de Taylor

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}, \qquad |t| < 2\pi, \tag{3.12}$$

donde cada coeficiente B_n existe y se puede calcular mediante

$$B_n = \lim_{t \to 0}\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{t}{e^t - 1}\right).$$

Demostración. Para demostrar (3.11) deduciremos algunas propiedades de los números y polinomios de Bernoulli, primero notamos que

$$\frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2}\frac{e^t + 1}{e^t - 1},$$

es una función par, por lo que en la serie de potencias (3.12) los coeficientes de índice impar satisfacen $B_1 = -1/2$ y

$$B_{2n+1} = 0, \qquad n \geq 1, \tag{3.13}$$

además usando la serie de la función exponencial

$$1 = \frac{t}{e^t - 1}\frac{e^t - 1}{t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{B_k t^n}{(n+1)!},$$

de modo que $B_0 = 1$ y

$$\binom{n+1}{0}B_0 + \binom{n+1}{1}B_1 + \cdots + \binom{n+1}{n}B_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.14}$$

con esta fórmula cada coeficiente B_n se puede calcular de forma inductiva.

Por otro lado, los polinomios de Bernoulli $B_n(x)$ se definen como los coeficientes de la serie

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}\frac{t^n}{n!},$$

es decir

$$B_n(x) = \binom{n}{0}B_0x^n + \binom{n}{1}B_1x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}B_n. \tag{3.15}$$

Evaluando (3.15) en $x = 1$ y usando (3.14) con n en vez de $n+1$ tenemos que

$$B_n(1) = \binom{n}{0}B_0 + \binom{n}{1}B_1 + \cdots + \binom{n}{n}B_n = B_n(0) = B_n, \qquad n \geq 2. \tag{3.16}$$

Al derivar (3.15) se verifica que $B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x)$ por lo cual al integrar de 0 a x esta ecuación se tiene que

$$B_{n+1}(x) = B_{n+1} + (n+1)\int_0^x B_n(t)dt,$$

en particular si $x = 1$ entonces

$$\int_0^1 B_n(x)dx = 0, \qquad n \geq 1. \tag{3.17}$$

Notemos que como consecuencia de (3.16) la extensión periódica del polinomio $B_{2n}(x)$ en el intervalo $[0, 1]$ es par y continua por lo que su serie de Fourier converge puntualmente a $B_{2n}(x)$ en dicho intervalo [24], además

$$B_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2n,k}\cos k\pi x, \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{3.18}$$

de donde al multiplicar por $\cos k\pi x$ e integrar de 0 a 1 los coeficientes son

$$a_{2n,k} = 2\int_0^1 B_{2n}(x)\cos k\pi x\, dx.$$

Observamos que el coeficiente $a_{2n,0} = 0$ según (3.17) y si $k \geq 1$ integramos dos veces por partes para obtener

$$a_{2n,k} = 2\frac{2n}{(k\pi)^2}\left[((-1)^k - 1)B_{2n-1} - (2n-1)\frac{a_{2n-2,k}}{2}\right] = -\frac{2n(2n-1)}{(k\pi)^2}a_{2n-2,k}\,,$$

en donde la segunda igualdad se debe a (3.13), con esta relación de recurrencia obtenemos que si $k \in \mathbb{N}$ entonces $a_{2n,2k-1} = 0$ y

$$a_{2n,2k} = (-1)^{n+1}\frac{2\cdot(2n)!}{(2k\pi)^{2n}},$$

por lo que al sustituir en (3.18) obtenemos

$$B_{2n}(x) = (-1)^{n+1}\frac{2\cdot(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\pi x}{k^{2n}}, \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

finalmente evaluando en $x = 0$ el resultado se tiene. □

La trascendencia de las constantes $\zeta(2n)$ es ahora una consecuencia de la trascendencia de π y de la fórmula de Euler.

Corolario 3.1 *Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\zeta(2n)$ es trascendente.*

Demostración. Como los múltiplos racionales y las potencias enteras positivas de números trascendentes son también trascendentes, es suficiente observar que gracias a la fórmula (3.16) todos los números de Bernoulli son racionales por lo que al hacer uso de la ecuación (3.11) podemos escribir $\zeta(2n) = r_{2n}\pi^{2n}$ donde r_{2n} es racional para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\zeta(2n)$ es trascendente para todo $n \in \mathbb{N}$. □

3.5. Independencia lineal en $\mathbb{Q}$ de algunas constantes relacionadas con e

Anteriormente se demostró que no existen enteros $b_0, \ldots, b_n$, con $b_0 \neq 0$, tales que

$$b_0 + b_1 e + \cdots + b_n e^n = 0,$$

usando el hecho de que existe una infinidad de números primos.

En este apartado demostraremos que para cada $k \in \mathbb{N}$, no existen enteros $b_0, \ldots, b_n$, con $b_0 \neq 0$, tales que

$$b_0 + b_1 S_k(1) + \cdots + b_n S_k(n) = 0,$$

usando el hecho de que $1 + nk$ es primo para infinitos valores de n, lo cual es una consecuencia del Teorema de Dirichlet sobre la infinitud de primos en progresiones aritméticas (ver el apéndice A).

Este hecho no proporciona información directa acerca de la trascendencia de los números $S_k(n)$ sin embargo deja ver que con las funciones $S_k(x)$ estamos generalizando otra propiedad de la función exponencial. Para demostrar este resultado necesitamos de un lema.

Lema 3.2 *Si k es un entero positivo fijo y f es un polinomio cuyo grado es $\ell = kr$ para algún $r \in \mathbb{N}$ entonces*

$$-\int_0^j f(t) S_k'(j-t)\,dt = G(j) - G(0),$$

donde j es un entero positivo y la función G es

$$G(t) = \sum_{m=0}^{\ell} f^{(m)}(t) S_k^{(\ell-m)}(j-t),$$

en esta suma recordando que S_k sólo tiene k derivadas distintas, las derivadas $f^{(m)}(t)$ que acompañan a $S_k(j-t)$ son las de orden $m = 0, k, \ldots, kr$.

Demostración. Usando la propiedad (1.12), tenemos que

$$\int S_k^{(i)}(j-t)\,dt = -S_k^{(i-1)}(j-t) + C, \qquad i = 0, \ldots, k-1,$$

entonces al integrar por partes

$$-\int_0^j f(t)S_k'(j-t)\,dt = \sum_{m=0}^{k-1} f^{(m)}(t)S_k^{(k-m)}(j-t)|_0^j - \int_0^j f^{(k)}(t)S_k'(j-t)\,dt.$$

Al iterar r veces esta última relación resulta que

$$-\int_0^j f(t)S_k'(j-t)\,dt = \sum_{m=0}^{rk-1} f^{(m)}(t)S_k^{(rk-m)}(j-t)|_0^j - \int_0^j f^{(rk)}(t)S_k'(j-t)\,dt,$$

como $f^{(rk)}(t)$ es constante la última integral es $-f^{(rk)}(t)S_k(j-t)$, obteniendo el resultado □

Teorema 3.5 *Para todo $k, n \in \mathbb{N}$ no existe una combinación de enteros $b_0, b_1, \dots, b_n$ con $b_0 \neq 0$ tal que*

$$b_0 + b_1 S_k(1) + \cdots + b_n S_k(n) = 0. \tag{3.19}$$

Demostración. Si p es un número primo en la progresión aritmética $1+k$, $1+2k$, $1+3k, \dots$ sabemos por el Teorema de Dirichlet que hay una infinidad de primos en esta sucesión ya que 1 y k son primos relativos para todo $k > 0$. De modo que $p-1+rk$ es divisible por k para todo r, en particular si $\ell = p-1+knp$, que es el grado del polinomio

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(1-x^k)^p(2^k-x^k)^p \cdots (n^k-x^k)^p.$$

Definimos

$$\alpha_j = -\int_0^j f(t)S_k'(j-t)\,dt, \qquad j = 1, \dots n,$$

por el Lema 3.2 $\alpha_j = G(j) - G(0)$ donde

$$G(t) = \sum_{m=0}^{\ell} f^{(m)}(t)S_k^{(\ell-m)}(j-t).$$

haciendo uso de la ecuación (1.11) se sigue que

$$G(j) = f(j)S_k(0) + \cdots + f^{(\ell)}(j)S_k(0)$$

es un entero divisible por p ya que por el Lema 3.1 $f^{(m)}(j)$ es un entero divisible por p. Por otro lado en la suma

$$G(0) = \sum_{m=0}^{\ell} f^{(m)}(0)S_k^{(\ell-m)}(j)$$

las únicas derivadas $f^{(m)}(0)$ que no se anulan son las de orden $m = p-1+rk$ con $0 \leq r \leq np$, en este caso m es divisible por k y por lo tanto también $\ell - m$, entonces $S_k^{(\ell-m)}(j) = S_k(j)$ y reescribimos $G(0) = \alpha S_k(j)$, donde

$$\alpha = f(0) + f'(0) + \cdots + f^{(\ell)}(0).$$

Si elegimos $p > n$ entonces $f^{(p-1)}(0)$ es el único entero que no es divisible por p en la suma anterior por lo que α no es divisible por p y en particular no es cero. Ahora es claro que $\alpha_j = G(j) - \alpha S_k(j)$ de donde

$$S_k(j) = \frac{G(j) - \alpha_j}{\alpha}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Haciendo uso de esta ecuación, si (3.19) se satisface para ciertos enteros $b_0, b_1, \ldots, b_n$ con $b_0 \neq 0$ tenemos que

$$b_0\alpha + \sum_{j=1}^{n} b_j G(j) = \sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_j, \tag{3.20}$$

demostraremos que si p es suficientemente grande entonces el lado izquierdo de (3.20) es un entero no nulo mientras que el lado derecho tiene valor absoluto menor que 1, como esto da una contradicción, concluiremos que no existe una combinación de enteros $b_0, b_1, \ldots, b_n$ con $b_0 \neq 0$ tal que (3.19) se cumpla.

Sabemos por el Lema 3.1 que $G(j)$ es divisible por p y si $p > \text{máx}\{|b_0|, n\}$, entonces $b_0\alpha$ no es divisible por p ya que tanto α como b_0 no son divisibles por p, de esto se sigue que $b_0\alpha + b_1 G(1) + \cdots + b_n G(n)$ no es divisible por p en particular es diferente de cero, por otro lado note que si $t \in [0, n]$ entonces $j^k - t^k \leq j^k + x^k \leq 2n^k$, por lo tanto

$$|f(t)| \leq \frac{2^{np} n^{(kn+1)p-1}}{(p-1)!},$$

bajo esta misma hipótesis

$$|S'(j-t)| \leq M \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2n)^m}{m!} = Me^{2n},$$

donde $M = \text{máx}\{|a_0|, \ldots, |a_{k-1}|\}$, con estas estimaciones

$$|\sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |b_j| \int_0^n |f(t) S_k'(j-t)\, dt| \leq \frac{\beta c^{p-1}}{(p-1)!},$$

donde $c = 2^n n^{kn+1}$ y $\beta = M 2^n e^{2n} n^{kn+1} \sum_{j=1}^{n} |b_j|$ son constantes fijas que no dependen de p, finalmente como hay una cantidad infinita de primos en las progresión $1 + k, 1 + 2k, \ldots,$ existe $p > \text{máx}\{n, |b_0|\}$ tal que $\beta c^{p-1}/(p-1)! < 1$ esto da una contradicción y por lo tanto el resultado se tiene. $\square$

Terminamos este capítulo con la siguiente

Conjetura 3.1 *Todos los números e_σ que aparecen en el Teorema 1.13 y los números $S_k(n)$ del Teorema 1.14 son trascendentes.*

Conclusiones

Decidir si un número real es irracional o no, es un problema que surgió en la época de Pitágoras. Los pitagóricos, al establecer la irracionalidad de $\sqrt{2}$, cambiaron la concepción que tenían de los números y al mismo tiempo cambiaron la forma de estudiar a los números reales para siempre.

Con el paso del tiempo la irracionalidad de otros números, como la razón áurea φ, e y π, ha sido demostrada empleando diferentes herramientas. Cabe destacar las demostraciones geométricas de irracionalidad de $\sqrt{2}$, φ y e que se han estudiado en la presente tesis, ya que constituyen un enlace entre dos ramas importantes de la matemática.

En particular, el estudio de la irracionalidad del número e ha servido en este trabajo para demostrar la irracionalidad de otros números, que denotamos por e_σ. Además estudiamos una familia de funciones que comparten con la exponencial la propiedad de que, al ser evaluadas en todo racional no nulo obtenemos constantes irracionales, que denotamos por $S_k(r)$.

Por otra parte, hemos presentado algunos de los avances respecto al problema de la irracionalidad de los números $\zeta(n)$, con $n > 1$, los cuales nos permiten apreciar que la solución de este problema es aún incompleta y, al requerir el uso de herramientas como el Teorema de los Números Primos, exhiben dificultad e ingenio y a la vez nos permiten apreciar la dificultad del problema de decidir la irracionalidad de las constantes $\zeta(2n+1)$ para $n \geq 2$.

Otro problema interesante que se ha estudiado de forma muy breve es la trascendencia de las constantes e, π y $\zeta(2n)$ para $n \in \mathbb{N}$. La trascendencia de $\zeta(2n)$ se deduce de una fórmula clásica de Euler que hace depender a estas constantes de π^{2n}, lo cual sugiere que podría haber una fórmula que relacione a $\zeta(2n+1)$ con π^{2n+1}, sin embargo esto es algo que el mismo Euler no pudo demostrar y que hasta hoy se desconoce.

Como un sustituto débil de la trascendencia de las constantes $S_k(n)$, $n \in \mathbb{N}$, que hemos sugerido en el capítulo 1, hemos demostrado que estas constantes son linealmente independientes sobre los racionales. Esta demostración exhibe una muestra más del uso conjunto de herramientas de análisis y aritmética en la solución de problemas, ya que para obtener este resultado se ha usado el Teorema de Dirichlet sobre la infinitud de primos en progresiones aritméticas.

Apéndice A

La distribución de los números primos

A.1. Introducción

En este capítulo estudiamos algunos resultados elementales relacionados con la distribución de los números primos, entre los que se encuentran algunas contribuciones de Euler al estudio de la función zeta, que, como hemos visto en capítulos anteriores, tienen consecuencias en el estudio de la irracionalidad de algunos números $\zeta(n)$, con $n > 1$.

Es pertinente mencionar, que en las demostraciones de los resultados de este apéndice seguimos de cerca a A. E. Ingham [17].

A.2. La suma de los recíprocos de los primos

Al tratar de elaborar una lista de números primos

$$2,\, 3,\, 5,\, 7,\, 11,\, 13,\, 17,\, 19,\, 23,\, 29,\, \ldots,$$

podemos advertir que, aunque nuevos primos se agregan a la lista con menor frecuencia, la lista parece no tener fin. Esta observación nos permiten intuir que si

$$\pi(x) = \text{la cantidad de primos tales que } \; 2 \leq p \leq x, \tag{A.1}$$

entonces $\pi(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a infinito y por otra parte, que el cociente $\pi(x)/x$ tiende a cero cuando x tiende a infinito.

Como se puede leer en el Teorema 1.5, el primero de estos hechos lo demostró Euclides usando el concepto de divisibilidad. En seguida presentamos otra demostración de este teorema, descubierta por Euler en 1737, haciendo uso de la divergencia de la serie armónica.

Demostración Si existe una cantidad finita de números primos: p_1, p_2, …, p_n, entonces, al hacer uso de la serie geométrica de $(1 - 1/p_i)^{-1}$ y el Teorema Fundamental de la Aritmética, se tiene que para todo m

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \cdots \right) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}.$$

Lo cual es imposible ya que mientras el producto de esta desigualdad siempre es finito, al hacer tender m a infinito, se tiene que la serie armónica converge. $\square$

La demostración que hemos presentado, además le permitió a Euler establecer la divergencia de la suma de los recíprocos de los primos. Lo cual se demuestra a continuación.

Teorema A.1 *Si la serie y el producto,*

$$\sum_p \frac{1}{p} \qquad y \qquad \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1},$$

se toman sobre todos los primos entonces ambos divergen.

Demostración. Para $x > 2$ sean

$$S(x) = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \qquad \text{y} \qquad P(x) = \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Recordemos que, si $0 < u < 1$, la serie geométrica de $(1-u)^{-1}$ nos permite establecer que

$$\frac{1}{1-u} > \frac{1-u^{m+1}}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^m, \qquad m > 0.$$

Por lo que, al hacer $u = 1/p$, se tiene que

$$P(x) > \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^m}\right) = 1 + \sum_{n \in A} \frac{1}{n},$$

donde A es cierto conjunto de enteros y cada $n \in A$ es de la forma

$$n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdots, \qquad 0 \leq \alpha_i \leq m. \tag{A.2}$$

Si elegimos m tal que $2^{m+1} > x$, entonces, según el Teorema Fundamental de la Aritmética, la ecuación (A.2) nos da la factorización de todos los enteros n que satisfacen $2 \leq n \leq [x]$. De lo cual tenemos que $\{2, \ldots, [x]\} \subset A$, por lo tanto

$$P(x) > \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n} > \int_1^{[x]+1} \frac{du}{u} > \log x. \tag{A.3}$$

Por otro lado, haciendo uso de la serie

$$-\log(1-u) = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \cdots, \qquad -1 \leq u < 1,$$

deducimos que

$$-\log(1-u) - u < \frac{u^2}{2}\left(1 + u + u^2 + \cdots\right) = \frac{u^2}{2(1-u)}.$$

Por lo que, al hacer $u = 1/p$ en esta última desigualdad y sumar sobre $p \leq x$, se tiene que

$$\log P(x) - S(x) < \sum_{p \leq x} \frac{1}{2p(p-1)} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n(n-1)} = \frac{1}{2}.$$

Esto junto con la ecuación (A.3) nos da

$$S(x) > \log\log x - \frac{1}{2}. \tag{A.4}$$

Nuestro resultado se sigue al hacer tender x a infinito en (A.3) y (A.4). □

La Criba de Eratostenes fue un método usado por los antiguos griegos para construir tablas de números primos. La idea de esta criba consiste en eliminar enteros que poseen más de dos divisores positivos. Emplearemos la Criba de Eratostenes para demostrar nuestro siguiente teorema sobre la función $\pi(x)$.

Teorema A.2 *Si* $\pi(x)$ *es como en* (A.1) *entonces*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0.$$

Demostración. Para $x > 0$ y $h \in \mathbb{N}$, denotamos por $N_r(x,h)$ a la cantidad de enteros positivos, $n \leq x$, divisibles por h, pero que no son divisibles por ninguno de los r primeros primos $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Conviniendo en que $N_0(x,h)$ es la cantidad de enteros, $n \leq x$, que son divisibles por h.

Si h es tal que $p_r \nmid h$, entonces el número $N_{r-1}(x,h)$ se puede expresar como suma de números que son divisibles o no por p_r como sigue. Si n es divisible por p_r entonces es divisible por $p_r h$ ya que n es divisible por p_r y h si y sólo si es divisible por el producto $p_r h$. De esto se sigue que

$$N_{r-1}(x,h) = N_r(x,h) + N_{r-1}(x, p_r h).$$

Mediante inducción, esta última relación nos permite representar a N_r en términos de N_0 de la siguiente forma: si h no es divisible por $p_1, \ldots, p_r$, entonces

$$N_r(x,h) = N_0(x,h) - \sum_i N_0(x, p_i h) + \sum_{i,j} N_0(x, p_i p_j h) - \cdots + (-1)^r N_0(x, p_1 \cdots p_r h), \tag{A.5}$$

donde en cada suma se toman desde uno hasta r primos a la vez y hay un total de 2^r términos.

Como $N_0(x,h)$ es la cantidad de enteros, $n \leq x$, divisibles por h se tiene que $N_0(x,h) = [x/h]$, donde $[x]$ es la parte entera de x. Por lo que, haciendo $h = 1$, un caso particular de (A.5) es

$$N_r(x,1) = [x] - \sum_i \left[\frac{x}{p_i}\right] + \sum_{i,j} \left[\frac{x}{p_i p_j}\right] - \cdots + (-1)^r \left[\frac{x}{p_1 \cdots p_r}\right]. \tag{A.6}$$

Ahora, sea $\xi(x) = c \log x$, con $0 < c < 1/\log 2$, si definimos r mediante $p_r \leq \xi(x) < p_{r+1}$ entonces

$$\pi(x) < r + N_r(x,1),$$

ya que si $2 \leq p \leq x$ entonces p es alguno de los primos $p_1, \ldots, p_r$ ó es un entero no divisible por ninguno de ellos.

Note que para todo y se satisface $0 \leq y - [y] \leq 1$, de modo que si quitamos los corchetes en (A.6) el error total es menor o igual a 2^r, de lo cual deducimos que

$$\pi(x) < r + 2^r + x\left(1 - \sum_i \frac{1}{p_i} + \sum_{i,j} \frac{1}{p_i p_j} - \cdots + (-1)^r \frac{1}{p_1 \cdots p_r}\right).$$

Luego, como $r < 2^r < 2^{\xi(x)}$, se tiene que

$$\pi(x) < 2^{\xi(x)+1} + x \prod_{p \leq \xi(x)} \left(1 - p^{-1}\right) = 2x^{c\log 2 - 1} + \prod_{p \leq \xi(x)} (1 - p^{-1}).$$

Usando el Teorema A.1 esta última expresión tiende a cero cuando $x \to \infty$, ya que $c\log 2 - 1 < 0$ y $\xi(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$. $\square$

Al referirse a la frecuencia con la cual los primos aparecen en los números naturales, Euler comentó que los primos eran *"infinitamente pequeños"* [17] comparados con los naturales. Aunque este comentario es falso en el sentido riguroso actual, si pensamos que el *tamaño* del conjunto de los primos en los naturales, está dado por el límite del cociente $\pi(x)/x$ cuando x tiende a infinito, entonces el teorema anterior brinda cierto sentido a las palabras de Euler.

A.3. El producto de Euler

La demostración de la infinitud de los primos hecha por Euler, no fue nueva para su tiempo. Sin embargo aportó una nueva idea: usar herramientas analíticas para deducir hechos aritméticos. Esta idea, que constituye hoy el principio de la Teoría Analítica de Números, Euler la usó una vez más para establecer una identidad que es de importancia fundamental en el estudio de la distribución de los números primos.

En aquel entonces Euler demostró que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

y además, descubrió una fórmula que determinaba exactamente el valor de la suma anterior cuando el exponente 2 se cambia por $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Tal vez motivado por estos descubrimientos, Euler estudió la suma

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots, \qquad s > 1,$$

y descubrió una identidad que demostramos a continuación.

Teorema A.3 *Para todo $s > 1$ se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{A.7}$$

Demostración. Note que si $s > 1$ entonces la función $f(n) = n^{-s}$ satisface $f(nm) = f(n)f(m)$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Además, por el criterio de la integral, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge absolutamente ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{(1 - s^{-1})}, \qquad s > 1.$$

Luego, para $x > 2$, consideramos

$$P(x) = \prod_{p \leq x} (1 - f(p))^{-1}.$$

Por la propiedad multiplicativa de $f(n)$ y el Teorema Fundamental de la Aritmética, tenemos que al hacer uso de la serie geométrica de $(1 - f(p))^{-1}$, este producto satisface

$$P(x) = \sum f(n'),$$

donde la suma es sobre todos los $n' \in \mathbb{N}$ cuyos factores primos no son mayores que x.

Ahora, si S es la suma a la izquierda de (A.7), entonces tenemos que

$$S - P(x) = \sum f(n''),$$

donde cada n'' es un entero positivo que tiene al menos un factor primo mayor que x, se sigue de esto que

$$|S - P(x)| = \left|\sum f(n'')\right| \leq \sum |f(n'')| \leq \sum_{n>x} |f(n)|.$$

Cuando x tiende a infinito la suma del extremo derecho tiende a cero ya que $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$ es convergente, por lo que $P(x) \to S$ cuando $x \to \infty$, esto demuestra (A.7). $\square$

Notemos que la demostración de la infinitud de los números primos de Euler, se deduce del teorema anterior como sigue. Si la cantidad de primos fuese finita, entonces el producto en (A.7) tiene un número finito de factores, por lo que al hacer tender $s \to 1^+$ tenemos que la serie armónica converge, lo cual es imposible.

Euler también descubrió que el número $1 + 4n$ es primo para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$, demostrando que la suma

$$\sum_{p=4n+1} \frac{1}{p} = \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{29} + \cdots$$

diverge, además conjeturó que la suma de los recíprocos de los primos de la forma $1+100n$ también diverge y en consecuencia que hay una cantidad infinita de primos en esta sucesión. En 1837 Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) demostró una generalización de la conjetura de Euler, misma que había sido formulada por Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833) en 1798.

Teorema A.4 (Dirichlet) *Si a y k son enteros positivos y primos relativos, entonces la progresión aritmética a, $a+k$, $a+2k$, $a+3k, \ldots$ contiene una infinidad de primos.*

En la demostración de este teorema Dirichlet introdujo las series L de Dirichlet que se definen mediante

$$\mathrm{L}(s, \chi) = \frac{\chi(1)}{1^s} + \frac{\chi(2)}{2^s} + \frac{\chi(3)}{3^s} + \cdots, \qquad s > 1.$$

En esta suma $\chi(n)$ es una función aritmética, que es totalmente multiplicativa. Debido a esto, la series L de Dirichlet satisfacen la siguiente identidad

$$\mathrm{L}(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}, \qquad s > 1.$$

En particular, note que si $\chi(n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene la identidad (A.7) de Euler. Así, el teorema de Dirichlet que acabamos de mencionar, fue una primera muestra de la aplicación que tuvieron las contribuciones de Euler al estudio subsecuente de la distribución de los números primos.

Al referirse al papel fundamental que la identidad (A.7) tiene en el estudio de la distribución de los números primos, Ingham [17] dice: *"La contribución de Euler al tema es de importancia fundamental; porque su identidad, que puede ser considerada como el equivalente analítico del Teorema Fundamental de la Aritmética, constituye la base de prácticamente todo el trabajo subsecuente."*

A.4. La conjetura de Gauss y Legendre

El problema de encontrar una expresión que aproximara a $\pi(x)$ tomó una forma precisa cuando, alrededor de 1808, Legendre publicó la conjetura de que para valores grandes de x

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x + A(x)},$$

donde $A(x)$ es aproximadamente $1.08366\ldots$ a medida que x crece. Otra publicación conocida respecto a este tema, es una carta que Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) escribió a su amigo, el astrónomo Encke.

En esta carta Gauss cita que sus investigaciones sobre los números primos comenzaron entre 1792 y 1793, cuando tenía catorce años de edad [14]. El trabajo de Gauss, consistía en una búsqueda exhaustiva de la cantidad de primos en intervalos de longitud 1000. Su sospecha fue que la densidad con la cual los primos ocurren en la vecindad de n era $1/\log n$, así que el número de primos en el intervalo $[a, b)$ debía ser aproximadamente

$$\int_a^b \frac{dx}{\log x},$$

lo cual condujo a Gauss a conjeturar que

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dx}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right), \qquad (x \to \infty).$$

A.5. Las funciones ϑ y ψ de Tchevyshev

El primer intento por demostrar la conjetura de Gauss y Legendre lo realizó Pafnuti L. Tchevyshev (1821 - 1894) en dos memorias escritas en 1851 y 1852, donde introdujo las funciones

$$\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p \qquad \text{y} \qquad \psi(x) = \sum_{p^m \le x} \log p, \qquad x > 0. \tag{A.8}$$

Note que la primera suma se realiza sobre los primos $p \le x$, mientras que en la segunda suma p^m indica una potencia positiva de un primo. Por ejemplo, al evaluar en $x = 9.86$, obtenemos que

$$\vartheta(9.86) = \log 2 + \log 3 + \log 5 + \log 7,$$

y por otro lado

$$\psi(9.86) = 3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 5 + \log 7.$$

De la definición de ψ, si agrupamos sobre la potencia m, se tiene que

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) + \cdots, \tag{A.9}$$

en esta suma hay una cantidad finita de términos no cero ya que, si $y < 2$ entonces $\vartheta(y) = 0$.

Por otro lado, al agrupar respecto a p, notamos que si $m \leq \log x / \log p$ entonces $p^m \leq x$, por lo que hay $[\log x/\log p]$ términos en la suma que tienen por factor común a $\log p$, es decir

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p. \tag{A.10}$$

Con el uso de las funciones $\vartheta(x)$ y $\psi(x)$ Tchevyshev estudió el comportamiento de $\pi(x)$ cuando x tiende a infinito, demostrando el siguiente

Teorema A.5 *Si uno de los tres cocientes*

$$q_1(x) = \frac{\pi(x)\log x}{x}, \qquad q_2(x) = \frac{\vartheta(x)}{x}, \qquad q_3(x) = \frac{\psi(x)}{x} \tag{A.11}$$

tiende a algún límite cuando x tiende a infinito, entonces los otros dos también y todos los límites son iguales.

Demostración. Para $i = 1, 2, 3$ sean

$$\lambda_i = \liminf_{x\to\infty} q_i(x) \qquad \text{y} \qquad \Lambda_i = \limsup_{x\to\infty} q_i(x).$$

Es suficiente demostrar que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ y que $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3$, usando las ecuaciones (A.9) y (A.10)

$$\vartheta(x) \leq \psi(x) \leq \sum_{p\leq x} \frac{\log x}{\log p} \log p = \pi(x)\log x,$$

luego, al dividir por x, tenemos que

$$\Lambda_2 \leq \Lambda_3 \leq \Lambda_1. \tag{A.12}$$

Por otro lado, si $0 < \alpha < 1$ y $x > 1$, se tiene que

$$\vartheta(x) \geq \sum_{x^\alpha < p \leq x} \log p \geq \log x^\alpha \sum_{x^\alpha < p \leq x} 1 = \log x^\alpha [\pi(x) - \pi(x^\alpha)],$$

de donde, al usar $\pi(x^\alpha) < x^\alpha$, obtenemos que

$$\frac{\vartheta(x)}{x} > \alpha\left[\frac{\pi(x)\log x}{x} - \frac{\log x}{x^{1-\alpha}}\right].$$

Luego $\Lambda_2 \geq \alpha\Lambda_1$, por lo que $\Lambda_2 \geq \Lambda_1$ ya que α puede tomarse arbitrariamente cerca de 1. Esto junto con (A.12) nos da $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3$, como cada argumento es válido si ponemos λ en lugar de Λ, el resultado se tiene. $\square$

Tchevyshev además demostró que el orden de $\pi(x)$ es $x(\log x)^{-1}$ cuando x es grande. Presentaremos la demostración de este hecho haciendo uso de un resultado de Legendre, el cual establece que si p es un número primo y para $n \in \mathbb{N}$ fijo, se tiene que $n! = p^c a$, entonces

$$c = \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{n}{p^k}\right], \tag{A.13}$$

donde $m = [\log n/\log p]$.

En efecto, para cada $k = 1, 2, \ldots$, la sucesión p^k, $2p^k$, $3p^k$, $\ldots$ contiene exactamente $[n/p^k]$ números que son menores que n. Por lo que p^k divide a $[n/p^k]$ de los n factores de $n!$, luego, sumando sobre k, el primo p divide a $n!$ exactamente $c = [n/p] + [n/p^2] + \cdots$ veces. Notemos que en esta suma se tiene que $p^k \leq n$ mientras que $k \leq \log n/\log p$. Por ello $m = [\log n/\log p]$ en (A.13).

Teorema A.6 *Existen constantes positivas a y A tales que*

$$a\frac{x}{\log x} < \pi(x) < A\frac{x}{\log x}, \tag{A.14}$$

para x suficientemente grande.

Demostración. Sea Λ el $\limsup$ común y λ el $\liminf$ común de los tres cocientes (A.11) cuando $x \to \infty$. A lo largo de la prueba debemos considerar también que

$$N = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n!} = \binom{2n}{n}.$$

Este entero satisface

$$N < 2^{2n} < (2n+1)N, \tag{A.15}$$

ya que es el término más grande de los $2n+1$ que tiene la expansión del binomio $(1+1)^{2n}$. Notemos además que, como cada primo p tal que $n \leq p \leq 2n$, aparece en el numerador pero no puede dividir a ningún factor en el denominador, el producto de estos primos divide a N. De esta observación, junto con la primera desigualdad de (A.15), se sigue que

$$\prod_{n\leq p\leq 2n} p \leq N < 2^{2n}.$$

Al tomar logaritmos en esta última desigualdad obtenemos

$$\vartheta(2n) - \vartheta(n) \leq \log N < 2n\log 2,$$

por lo que si $n = 2^{r-1}$, entonces al sumar sobre r desde 1 hasta m obtenemos que

$$\vartheta(2^m) = \sum_{r=1}^{m} \vartheta(2^r) - \vartheta(2^{r-1}) \leq \sum_{r=1}^{m} 2^r \log 2 < 2^{m+1}\log 2.$$

Luego, si $x > 1$ y m es tal que $2^{m-1} < x < 2^m$, se tiene que

$$\vartheta(x) < \vartheta(2^m) < 2^{m+1}\log 2 < 4x\log 2,$$

por lo que $\Lambda \leq 4\log 2$.

Para encontrar una desigualdad en el sentido inverso, sea $M_p = [\log 2n/\log p]$. Como $N = (2n)!/(n!)^2$, al hacer uso de (A.13), se tiene que

$$N = \prod_{p\leq 2n} p^{\nu_p}, \qquad \nu_p = \sum_{r=1}^{M_p}\left(\left[\frac{2n}{p^r}\right] - 2\left[\frac{n}{p^r}\right]\right).$$

Por otro lado, usando la ecuación (A.10), se tiene que

$$e^{\psi(2n)} = \prod_{p\leq 2n} e^{\left[\frac{\log 2n}{\log p}\right]\log p} = \prod_{p\leq 2n} p^{M_p}.$$

Ahora, observemos que $[2y] - 2[y]$ sólo toma los valores 0 ó 1, por lo que $\nu_p \leq M_p$. De esto, junto con las ecuaciones anteriores, se tiene que $N \mid e^{\psi(2n)}$, por lo que al usar la segunda desigualdad en (A.15) se sigue que

$$\frac{2^{2n}}{2n+1} < N \leq e^{\psi(2n)}.$$

Al tomar logaritmos en estas últimas desigualdades se tiene que

$$2n \log 2 - \log(2n+1) < \log N \leq \psi(2n),$$

de lo cual, si $x > 2$ y $n = [x/2]$, tenemos que

$$(x-2)\log 2 - \log(x+1) < \psi(2n) \leq \psi(x),$$

esto implica que $\lambda \geq \log 2$. Las desigualdades $\log 2 \leq \lambda \leq \Lambda \leq 4 \log 2$ implican la desigualdad (A.14) gracias al Teorema A.5. $\square$

Con modificaciones del teorema anterior, Tchevyshev pudo demostrar que

$$h \leq \lambda \leq \Lambda \leq H,$$

donde

$$h = \log \frac{2^{1/2} 3^{1/3} 5^{1/5}}{30^{1/30}} = 0.921\ldots \qquad \text{y} \qquad H = \frac{6}{5} h = 1.105\ldots$$

La intención de mejorar las estimaciones de λ y Λ, fue obtener una demostración del *postulado de Bertrand*, el cual establece que si $n > 6$, entonces siempre existe un primo p tal que $n/2 < p \leq n-2$.

Además de estos teoremas Tchevyshev demostró, como se verá en el siguiente apéndice, que si el cociente $\psi(x)/x$ tiende a un límite cuando x tiende a infinito, el límite debe ser 1 y aunque no pudo demostrar la existencia de este límite, sus descubrimientos constituyen un avance importante en el estudio del comportamiento de la función $\pi(x)$.

Apéndice B

La función zeta de Riemann

B.1. Introducción

En este capítulo se describen brevemente algunos descubrimientos de Euler en la evaluación de la función zeta en los enteros $n > 1$, mismos que inspiraron el estudio posterior de la función zeta como una función de variable compleja. Respecto a esto último, incluimos aquí, algunas consecuencias importantes en el estudio del comportamiento de la función $\pi(x)$ mencionada en el apéndice A.

Resaltamos que una descripción más detallada de los descubrimientos de Euler sobre la función zeta puede consultarse en [6]. Cabe mencionar que, como hemos hecho en el apéndice A, las demostraciones de los teoremas de este capítulo siguen de cerca a A. E. Ingham [17].

B.2. El problema de Basilea

La historia de las series $\zeta(n)$ parece haber empezado con los trabajos de Nicole Oresme, quien demostró que la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots,$$

diverge.

La historia continuó en 1650, cuando Pietro Mengoli (1625 - 1686) planteó en su libro *Novae Quadraturae Arithmeticae*, el problema de evaluar la suma

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots. \tag{B.1}$$

Este problema fue abordado, sin obtener solución alguna, por John Wallis (1616 - 1703), Gottfried von Leibnitz (1646 - 1716) y Jacob Bernoulli (1654 - 1705). Este último, en su *Tratado de Series Infinitas* publicado en 1689 en Basilea, escribió: *"si alguien encuentra y nos comunica eso que hasta ahora ha eludido nuestros esfuerzos, grande será nuestra gratitud."*

Desde aquel momento la evaluación de (B.1) fue denominado el *problema de Basilea*. La primera solución que la comunidad matemática conoció se debe a Euler, quien la obtuvo gracias a una brillante idea.

El primer logro de Euler se dio en 1731, cuando obtuvo una fórmula que le permitió calcular con precisión los primeros dígitos de (B.1), evaluando la integral

$$J_2 = -\int_0^{1/2} \frac{\log(1-x)}{x}\,dx,$$

de dos formas distintas. Primero, expandiendo $-\log(1-x)$ en serie de potencias e integrando término a término, uno obtiene que

$$J_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}.$$

En seguida, haciendo la sustitución $x = 1-t$ y expandiendo $(1-t)^{-1}$ en serie geométrica, tenemos que

$$J_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{1/2}^{1} t^n \log t\,dt = -(\log 2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2},$$

lo cual conduce a la fórmula

$$\zeta(2) = (\log 2)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}. \tag{B.2}$$

Finalmente, en 1734, Euler encontró la solución al problema de Basilea. Las palabras que usó para describir su descubrimiento son parecidas a las siguientes: *"Mucho trabajo se ha hecho en torno a las series $\zeta(n)$ que parece difícil que algo nuevo acerca de ellas pueda ser descubierto... Yo también, después de repetidos esfuerzos no pude obtener más que cantidades aproximadas para estas sumas... Pero ahora, inesperadamente, he encontrado una fórmula elegante para $\zeta(2)$ que depende de la cuadratura del círculo."* [1]

La idea de Euler fue extender un resultado de Newton, el cual establece que si $p(x)$ es un polinomio de grado n cuyas raíces son $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y satisface $p(0) = 1$, entonces se puede escribir como

$$p(x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right).$$

Aunque no exactamente, los siguientes argumentos muestran el camino que Euler siguió. Primero, consideramos a la serie

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots \tag{B.3}$$

como un polinomio cuyas raíces son $n\pi$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y, por la fórmula de Newton, escribimos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots, \tag{B.4}$$

al desarrollar este producto e igualar con (B.3) se tiene que

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots = 1 - \frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)x^2 + \cdots.$$

Por lo que, al igualar los coeficientes de x^2, podemos concluir que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

[1] Traducción libre de inglés a español por el autor, tomado de [3] y traducido por A. Weil al inglés en [29] de los escritos originales de Euler.

Como puede notarse, en la prueba que hemos dado, no hay justificación formal del producto infinito involucrado. Esto fue un problema que Euler resolvió años más tarde, cuando dio el siguiente argumento directo para deducir (B.4). Primero escribimos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{ix}{n})^n - (1-\frac{ix}{n})^n}{2ix},$$

y factorizamos los polinomios

$$q_n(x) = \frac{(1+\frac{ix}{n})^n - (1-\frac{ix}{n})^n}{2ix},$$

de la siguiente forma

$$q_n(x) = \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{n}}{1-\cos\frac{2k\pi}{n}}\right), \qquad n = 2m+1.$$

Notemos además que, por la regla de L'hôpital, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{n}}{1-\cos\frac{2k\pi}{n}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x\cos k\pi x}{\operatorname{sen} k\pi x}\right)^2 = \frac{1}{(k\pi)^2}.$$

Lo que sugiere que (B.4) se sigue cuando $n\to\infty$. Euler no comentó nada en el paso al límite [28], sin embargo un argumento riguroso añadiría sólo la observación de que, por el límite anterior, $q_n(x)$ converge uniformemente a (B.4) ya que para todo x en el intervalo $[-a,a]$ se tiene que

$$\frac{x^2}{n^2}\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{n}}{1-\cos\frac{2k\pi}{n}} \leq \left(\frac{a}{k\pi}\right)^2.$$

Las investigaciones de Euler respecto a las constantes $\zeta(n)$, con $n>1$, no terminaron aquí, ya que, empleando la misma idea que le permitió calcular el valor exacto de $\zeta(2)$, Euler pudo calcular $\zeta(n)$ para $n = 2, 4, \ldots, 12$. En 1750, el logro de Euler fue aún mayor al obtener una fórmula explícita que determina el valor de $\zeta(2n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$, la cual dedujo como sigue.

Primero, al derivar el logaritmo del producto (B.4) y sustituir $x=\pi s$, tenemos que

$$\pi\cot\pi s - \frac{1}{s} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+s} - \frac{1}{n-s}\right),$$

además, notemos que la función $\cot\pi s$ satisface

$$\pi\cot\pi s - \frac{1}{s} = i\pi\left(\frac{e^{2i\pi s}+1}{e^{2i\pi s}-1}\right) - \frac{1}{s} = \frac{1}{s}\left(\frac{2i\pi s}{e^{2i\pi s}-1} - 1 + \frac{2i\pi s}{2}\right).$$

Como la serie de potencias de esta última expresión es

$$\frac{1}{s}\left(\frac{2i\pi s}{e^{2i\pi s}-1} - 1 + \frac{2i\pi s}{2}\right) = 2i\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}(2i\pi s)^{2n-1},$$

donde los coeficientes B_{2n} son los números de Bernoulli, Euler encontró que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+s} - \frac{1}{n-s}\right) = 2i\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}(2i\pi s)^{2n-1}.$$

De donde, al calcular las derivadas de orden n en $s = 0$, Euler concluyó que

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} B_{2n} \pi^{2n}}{2 \cdot (2n)!}.$$

Euler también estuvo interesado en las series $\zeta(2n+1)$, con $n \geq 1$, sin embargo no tuvo el mismo éxito que antes, ni siquiera pudo encontrar el valor exacto de la suma

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots .$$

A continuación, deduciremos una fórmula similar a (B.2) que relaciona a $\zeta(3)$ con $\zeta(2)$. Para este fin usaremos la integral

$$\int_0^1 \frac{(-\log(1-x))^n}{x}\, dx = n!\zeta(n+1), \tag{B.5}$$

que puede deducirse mediante integración por partes para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, al sustituir $n = 2$, se tiene que

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\log(1-x))^2}{x}\, dx = \zeta(3). \tag{B.6}$$

Primero, notemos que si $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$, entonces

$$\frac{d}{dx}((\log(1-x))^2) = \frac{-2\log(1-x)}{(1-x)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n,$$

de esto se sigue que

$$(\log(1-x))^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n+1} x^{n+1}. \tag{B.7}$$

Una primera consecuencia de esta fórmula es que, al hacer uso de (B.6), se tiene que

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(n+1)^2}. \tag{B.8}$$

Ahora, sea

$$J_3 = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{(\log(1-x))^2}{x}\, dx,$$

al sustituir la serie (B.7) en esta integral, tenemos que

$$J_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{2^{n+1}(n+1)^2}.$$

Por otro lado, al hacer la sustitución $x = 1 - t$ y expandiendo $(1-t)^{-1}$ en serie geométrica, tenemos que

$$J_3 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{1/2}^1 t^n (\log t)^2\, dt,$$

al calcular cada integral por partes, tenemos que

$$\int_{1/2}^1 t^n (\log t)^2\, dt = t^{n+1} \left(\frac{(\log t)^2}{n+1} - \frac{2\log t}{(n+1)^2} + \frac{2}{(n+1)^3} \right) \Bigg|_{1/2}^1,$$

por lo que

$$J_3 = \zeta(3) - \frac{(\log 2)^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n} - \log 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^3}.$$

Note que la primera suma de esta ecuación es $\log 2$ mientras que la segunda está relacionada con $\zeta(2)$ mediante la fórmula (B.2). Al sustituir los valores de estas sumas en la expresión anterior, tenemos que

$$J_3 = \zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(2)\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^3}.$$

De donde, al igualar las expresiones que hemos encontrado para J_3, se sigue que

$$\zeta(3) = \frac{1}{2}\zeta(2)\log 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{2^{n+1}(n+1)^2},$$

y finalmente, al simplificar, tenemos que

$$\zeta(3) = \frac{1}{2}\zeta(2)\log 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{2^n n^2}. \tag{B.9}$$

La misma idea sirve para deducir fórmulas similares a (B.8) y (B.9) para otros valores de $\zeta(n)$ usando las integrales

$$J_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{1/2}\frac{(\log(1-x))^n}{x}\,dx,$$

que provienen de la integral (B.5). En esta, si hacemos la sustitución de x por e^{-x} produce

$$\int_0^{\infty}\frac{x^n}{e^x - 1}\,dx = \Gamma(n+1)\zeta(n+1), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{B.10}$$

donde

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt. \tag{B.11}$$

En la siguiente sección veremos que se puede cambiar n por la variable compleja s y así tratar a las constantes $\zeta(n)$ como casos particulares de una función de variable compleja. Además, demostraremos con la ayuda de (B.10) que la función $\zeta(s)$ satisface

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos(s\pi/2)\Gamma(s)\zeta(s). \tag{B.12}$$

Esta identidad fue descubierta hacia 1749 por Euler, verificando que se satisface exactamente para todo valor entero de s y con un alto grado de precisión para algunos valores racionales de s [6, 28].

B.3. La función zeta y los números primos

Mientras Euler realizó descubrimientos concernientes a los números primos estudiando a la serie que define a $\zeta(s)$ en $s \in \mathbb{N}$. Dirichlet y Tchevyshev realizaron notables avances tratando a $\zeta(s)$ como una función en la variable real $s > 1$. Nuevas investigaciones en el estudio de los números primos surgieron después de que Bernhard Riemann (1826-1866) trató a la serie que define a $\zeta(s)$ como una función en la variable compleja $s = \sigma + it$.

Por ello, el estudio de la función $\zeta(s)$ es parte importante de la historia del Teorema de los Números Primos, que según Goldstein: *"…provee un hermoso ejemplo de la forma en la cual las ideas se desarrollan y relacionan, nutriéndose unas a otras para construir una teoría coherente que explique completamente los fenómenos observados [14]."*

B.3.1. La ecuación funcional

Riemann introdujo la notación $\zeta(s)$ a la literatura matemática en su memoria de 1860 *Sobre el número de primos menores que una cantidad dada.* En este escrito Riemann ideó una forma de extender analíticamente la función zeta a $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ y dio dos demostraciones de la ecuación funcional (B.12), descubierta anteriormente por Euler.

Teorema B.1 *Si $s=\sigma+it$, entonces la función $\zeta(s)$ definida por la suma* (A.7) *cuando $\sigma>1$, se puede extender analíticamente a $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Teniendo como única singularidad un polo simple en $s=1$, con residuo 1. Además $\zeta(s)$ satisface la ecuación funcional* (B.12).

Demostración. Al sustituir t por nx en la ecuación (B.11), tenemos que si σ y n son positivos, entonces la función Gama de Euler satisface

$$\Gamma(s)=n^s\int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}\,dx,$$

luego, al sumar sobre n y utilizando la serie geométrica de $(1-e^{-x})^{-1}$, se sigue por el Teorema de la Convergencia Monótona que

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(s)n^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}\,dx=\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx,\qquad \sigma>1. \tag{B.13}$$

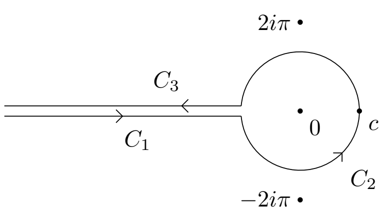

Figura 1

Ahora, consideremos la integral

$$I(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,dz,$$

donde $C=C_1+C_2+C_3$ es como en la figura 1, en la que hemos supuesto que $c<\pi$. En esta integral $z^s=e^{s\log z}$ para todo s y $\log z$ es real en el eje positivo real, de tal forma que en el corte que hemos realizado en el plano complejo, si

$$z=re^{i\theta},\qquad r>0,\qquad -\pi\le\theta\le\pi,$$

entonces tenemos que

$$|z^s|=e^{\sigma\log r-t\theta}=r^\sigma e^{-t\theta}.$$

Luego, si $|s|<\Delta$ y r es suficientemente grande, entonces la estimación

$$\left|\frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\right|=\frac{r^{\sigma-1}e^{\pm t\pi}}{e^r-1}<\frac{r^{\Delta-1}e^{\Delta\pi}}{e^r-1}<e^{-r/2},$$

es válida en C_1 y C_3, por tanto $I(s)$ es uniformemente convergente en cualquier círculo donde $|s|<\Delta$. En consecuencia $I(s)$ es una función entera.

Ahora, sustituimos $re^{-i\pi}$, ce^{θ}, y $re^{i\pi}$ en vez de z en las curvas C_1, C_2 y C_3 respectivamente. Si escribimos $g(z)=(e^{-z}-1)^{-1}$, entonces obtenemos que

$$2i\pi I(s)=(e^{i\pi s}-e^{i\pi s})\int_c^\infty r^{s-1}g(-r)\,dr+ic^s\int_{-\pi}^{\pi}e^{is\theta}g(ce^{i\theta})\,d\theta,$$

lo cual podemos reescribir como

$$\pi I(s) = \operatorname{sen} \pi s \int_c^\infty r^{s-1} g(-r)\, dr + \frac{c^s}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{is\theta} g(ce^{i\theta})\, d\theta = I_1(s,c) + I_2(s,c).$$

Ya que $zg(z)$ es holomorfa en $|z| < 2\pi$, tenemos que $|zg(z)| \leq A_1$ para $|z| < \pi$, de lo cual deducimos que si $c \leq \pi$ entonces $|e^{is\theta} g(ce^{i\theta})| \leq A_1 e^{-t\theta}/c$. Por lo tanto

$$|I_2(s,c)| \leq A_1 \frac{c^{\sigma-1}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-t\theta}\, d\theta \leq A_1 \pi c^{\sigma-1} e^{|t|\pi}. \tag{B.14}$$

Ahora supongamos $\sigma > 1$, por (B.14) la integral $I_2(s,c) \to 0$ cuando $c \to 0$. Por otro lado, al usar la ecuación (B.13) se tiene que

$$\pi I(s) = \lim_{c \to 0} I_1(s,c) = \operatorname{sen} s\pi \int_0^\infty r^{s-1} g(-r)\, dr = \operatorname{sen} \pi s\, \Gamma(s) \zeta(s),$$

de lo cual junto con la ecuación funcional de $\Gamma(s)$ deducimos que

$$\zeta(s) = \frac{\pi I(s)}{\operatorname{sen} \pi s \Gamma(s)} = \Gamma(1-s) I(s). \tag{B.15}$$

Como $I(s)$ es una función entera, la ecuación (B.15) define a $\zeta(s)$ como una función meromorfa cuyos polos son los polos de $\Gamma(1-s)$ donde $I(s)$ no se anula. Notemos que si s es un entero, entonces el integrando en $I(s)$ es una función univaluada de z y su residuo en $z = 0$ es $I(s)$, por lo que $I(1) = -1$ y $I(2) = I(3) = \cdots = 0$, se sigue que los puntos $2, 3, \ldots$ no son polos de $\zeta(s)$ y como

$$(s-1)\zeta(s) = -\Gamma(2-s) I(s),$$

deducimos que $s = 1$ es un polo simple con residuo 1 ya que $-\Gamma(1) I(1) = 1$, esto prueba la primera parte del teorema.

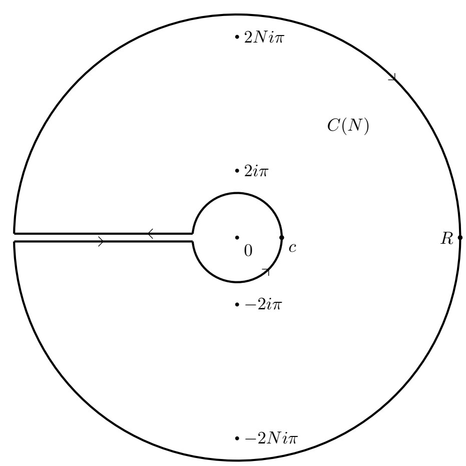

Figura 2

Para probar la segunda parte, sea $\sigma < 0$ y consideramos

$$I_N(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(N)} \frac{z^{s-1}}{e^{-z} - 1}\, dz,$$

donde $C(N)$ es el contorno cerrado mostrado en la figura 2. En esta figura hemos elegido N como un entero positivo para que el círculo exterior no pase por ninguno de los puntos $2n\pi i$, de esta forma podemos acotar a la función $(e^{-z} - 1)^{-1}$ en el círculo de radio $R = (2N+1)\pi$ mediante una constante, digamos A_2.

Si escribimos $z = Re^{i\theta}$, con $-\pi \leq \theta \leq \pi$, entonces

$$\left| \frac{z^{s-1}}{e^{-z} - 1} \right| = e^{\sigma - 1} e^{-t\theta} \left| \frac{1}{e^{-z} - 1} \right| < A_2 R^{\sigma-1} e^{|t|\pi},$$

luego, en el círculo de radio R el modulo de $I_N(s)$ es menor que $A_2 R^{\sigma} e^{|t|\pi}$ y por lo tanto tiende a cero cuando N tiende a infinito ya que $\sigma < 0$. Se sigue que $I_N(s) \to I(s)$ cuando $N \to \infty$.

Finalmente, por el teorema del residuo de Cauchy, tenemos que

$$I_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \left((2n\pi i)^{s-1} + (-2n\pi i)^{s-1}\right) = \left(e^{\frac{\pi}{2}(s-1)i} + e^{\frac{-\pi}{2}(s-1)i}\right) \sum_{n=1}^{N} (2n\pi)^{s-1}$$
$$= 2(2\pi)^{s-1} \operatorname{sen}(\pi s/2) \sum_{n=1}^{N} n^{s-1}.$$

Como hemos considerado $\Re(1-s) = 1-\sigma > 1$, al hacer tender N a infinito, se sigue que $I(s) = 2(2\pi)^{s-1} \operatorname{sen}(\pi s/2)\zeta(1-s)$. Esto combinado con (B.15) nos da

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi)^s \operatorname{sen}(\pi s/2)\zeta(1-s)}{\operatorname{sen}\pi s\,\Gamma(s)} = \frac{(2\pi)^s \zeta(1-s)}{2\cos(\pi s/2)\,\Gamma(s)},$$

que es equivalente a (B.12). □

El trabajo de Riemann también estuvo relacionado con la localización de los ceros, $\rho = \sigma + it$, de $\zeta(s)$ en la región $0 \le \sigma \le 1$. Respecto a esto, él demostró que si $\psi(x)$ es la función de Tchevyshev definida en (A.8) entonces

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}).$$

De esta identidad, conocida como fórmula explícita de Riemann, se puede deducir que si $E(x) = \sum_{\rho} x^{\rho}/\rho$, entonces el Teorema de los Números Primos es equivalente a demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{E(x)}{x} = 0.$$

Riemann no pudo demostrar este aserto, pero en su memoria formuló una serie de conjeturas concernientes a la distribución de los ceros no triviales de la función zeta, de las cuales la ecuación anterior se sigue fácilmente [14]. Una de las más famosas es la llamada *hipótesis de Riemann*, la cual establece que la parte real de todos los ceros no triviales de la función zeta es $1/2$.

Algunos de los problemas planteados por Riemann fueron resueltos más tarde por Jacques Hadamard (1865-1963) y Hans von Mangoldt (1854-1925). En 1896 Hadamard y Charles-Jean de La Vallée Poussin (1866-1962) casi simultáneamente, demostraron el Teorema de los Números Primos. Esencialmente las dos pruebas están basadas en el hecho de que $\zeta(1+it) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y no en la hipótesis de Riemann.

B.3.2. Fórmulas para $\log\zeta(s)$ y $\zeta'(s)/\zeta(s)$

Antes de presentar la demostración del Teorema de los Números Primos estableceremos fórmulas que relacionen a las funciones $\psi(x)$ y $\pi(x)$ con la función $\zeta(s)$, esto se deducirá de ciertas fórmulas de $\log\zeta(s)$ y su derivada, es decir, de $\zeta'(s)/\zeta(s)$. En el resto del capítulo consideramos s como una variable real.

Notemos que, al tomar logaritmos en (A.7) y usando la serie de $-\log(1-p^{-s})$, se tiene que

$$\log\zeta(s) = -\sum_{p} \log(1-p^{-s}) = \sum_{p,m} \frac{1}{mp^{ms}},$$

de donde, al derivar y usar la serie de $(1-p^{-s})^{-1}$, obtenemos

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p} \frac{p^{-s}\log p}{1-p^{-s}} = \sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{ms}}.$$

En las sumas anteriores p se toma sobre todos los primos y m sobre todos los enteros positivos. Observamos que si $\Lambda(n)$ es la función de von Mangoldt entonces la primera de estas identidades se puede escribir como

$$\log\zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s \log n}, \tag{B.16}$$

ya que $\Lambda(n)$ es igual a $\log p$ si $n = p^m$ y 0 en otro caso, por lo que la segunda identidad puede ser reescrita igualmente como

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}. \tag{B.17}$$

La validez de las operaciones que hemos realizado basados en el producto de Euler se debe a que consideramos $s > 1$, de donde las series involucradas en (B.16) y (B.17) son uniformemente convergentes usando el criterio de comparación de Weierstrass para $s \geq 1+\delta$ con $\delta > 0$ fijo.

Con la definición de $\psi(x)$ y $\Lambda(n)$ tenemos que

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p = \sum_{n \leq x} \Lambda(n). \tag{B.18}$$

Además, si definimos

$$\Pi(x) = \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m}, \qquad x > 0$$

entonces esta función satisface

$$\Pi(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\log n} = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \cdots . \tag{B.19}$$

Estas ecuaciones nos permiten observar que, las funciones $\Pi(x)$ y $\psi(x)$ son las sumas de los primeros $[x]$ coeficientes de las series de Dirichlet (B.16) y (B.17). Esto nos da una relación entre la función zeta y las funciones $\pi(x)$ y $\psi(x)$, la cual estableceremos explícitamente con ayuda del siguiente teorema.

Teorema B.2 *Sea λ_1, λ_2, … una sucesión real creciente y no acotada. Definimos*

$$C(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} c_n,$$

donde $c_n \in \mathbb{C}$ y la suma es sobre los índices n que satisfacen $\lambda_n \leq x$. Si $X \geq \lambda_1$ y $\phi(x)$ es una función que tiene derivada continua, entonces

$$\sum_{\lambda_n \leq X} c_n \phi(\lambda_n) = -\int_{\lambda_1}^{X} C(x)\phi'(x)\,dx + C(X)\phi(X). \tag{B.20}$$

Si además $C(X)\phi(X) \to 0$ cuando $X \to \infty$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi(\lambda_n) = -\int_{\lambda_1}^{\infty} C(x)\phi'(x)\,dx,$$

en caso de que ambos lados de esta ecuación converjan.

Demostración. Si denotamos por S al lado izquierdo de (B.20), entonces, usando el hecho de que $\phi'(x)$ es continua, la siguiente cadena de igualdades se sigue

$$\begin{aligned} C(X)\phi(X) - S &= \sum_{\lambda_n \le X} c_n\left(\phi(X) - \phi(\lambda_n)\right) = \sum_{\lambda_n \le X} \int_{\lambda_n}^{X} c_n \phi'(x)\,dx \\ &= \int_{\lambda_1}^{X} \sum_{\lambda_n \le x} c_n \phi'(x)\,dx = \int_{\lambda_1}^{X} C(x)\phi'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Esto demuestra la ecuación (B.20); la otra igualdad se obtiene haciendo X tender a infinito ya que $C(X)\phi(X)$ tiende a cero. □

Sea $\lambda_n = n$, $c_n = \Lambda(n)/\log n$ y $\phi(x) = x^{-s}$, según las estimaciones que hemos hecho en el Teorema A.6 y la ecuación (B.19), tenemos que

$$C(x)\phi(x) = \sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{x^s \log n} = \frac{\Pi(x)}{x^s} = O(x^{1-s}\log x) = o(1),$$

por lo que, al usar (B.16) y el teorema anterior, se sigue que

$$\log\zeta(s) = s\int_{1}^{\infty} \frac{\Pi(x)}{x^{s+1}}\,dx. \tag{B.21}$$

Ahora, elegimos $\lambda_n = n$, $c_n = \Lambda(n)$ y $\phi(x) = x^{-s}$, con las mismas estimaciones y (B.18), tenemos que

$$C(x)\phi(x) = \sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{x^s} = \frac{\psi(x)}{x^s} = O(x^{1-s}\log x) = o(1),$$

de donde, al usar (B.17) y el teorema anterior, se sigue que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s\int_{1}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx. \tag{B.22}$$

Las identidades (B.21) y (B.22) juegan un papel importante en el estudio de la función $\pi(x)$. Para muestra, probaremos en seguida el resultado de Tchevyshev citado en el capítulo anterior, que si $\pi(x)\log x/x$ tiende a un límite cuando x tiende a infinito entonces este límite tiene que ser 1. Esto se sigue como resultado del siguiente teorema.

Teorema B.3 *Si Λ es el* $\limsup$ *común y λ el* $\liminf$ *común de los tres cocientes* (A.11) *cuando $x \to \infty$, entonces $\lambda \le 1 \le \Lambda$.*

Demostración. Escribimos $f(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$ y sean

$$\lambda' = \liminf_{s \to 1^+} (s-1)f(s) \qquad \text{y} \qquad \Lambda' = \limsup_{s \to 1^+} (s-1)f(s).$$

Por el Teorema A.5 sabemos que λ y Λ son

$$\lambda = \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \qquad \text{y} \qquad \Lambda = \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x},$$

además por el Teorema A.6 estos números son finitos, por lo que si elegimos $b > \Lambda$, entonces $\psi(x)/x < b$ para todos los $x > x_0 = x_0(b)$, ya que x_0 depende de la elección de b. Con esta estimación deducimos de la ecuación (B.22) que

$$\begin{aligned} f(s) = \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx &< s\int_1^{x_0} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx \, + \, s\int_{x_0}^\infty \frac{b}{x^s}\,dx \\ &= s\int_1^{x_0} \frac{\psi(x)-bx}{x^{s+1}}\,dx \, + \, s\int_1^\infty \frac{b}{x^s}\,dx \\ &\le s\int_1^{x_0} \frac{|\psi(x)-bx|}{x^{s+1}}\,dx \, + \, s\int_1^\infty \frac{b}{x^s}\,dx \\ &= sK(b) + \frac{sb}{s-1}. \end{aligned}$$

Así que

$$(s-1)f(s) \le K(b)s(s-1) + sb,$$

donde $K(b)$ es una constante que depende de x_0, pero como esta constante a su vez depende de b entonces K depende en última instancia de b y no de las variables x y s. Haciendo $s \to 1^+$ tenemos que $\Lambda' \le b$ y esto siendo válido para todo $b > \Lambda$ implica que $\Lambda' \le \Lambda$, de la misma forma podemos probar que $\lambda \le \lambda'$, por lo tanto

$$\lambda \le \lambda' \le \Lambda' \le \Lambda. \tag{B.23}$$

Ahora, como x^{-s} es una función decreciente de x para $s > 1$ fijo, tenemos que

$$\int_1^\infty x^{-s}\,dx < \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} < 1 + \int_1^\infty x^{-s}\,dx,$$

es decir

$$\frac{1}{1-s} < \zeta(s) < \frac{s}{1-s}.$$

Luego, $(s-1)\zeta(s) \to 1$ cuando $s \to 1^+$. Por otro lado como $\log x/x^s$ es una función decreciente de x para $x \ge e$, tenemos que, al usar la sustitución $x^{s-1} = e^y$, cuando $s \to 1^+$

$$\begin{aligned} -\zeta'(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\log n}{n^s} &= \int_1^\infty \frac{\log x}{x^s}\,dx + O(1) \\ &= \frac{1}{(1-s)^2}\int_0^\infty ye^{-y}\,dy + O(1) \\ &= \frac{1}{(1-s)^2} + O(1). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(s-1)f(s) = \frac{-(s-1)^2\zeta'(s)}{(s-1)\zeta(s)} \to 1, \qquad \text{cuando} \qquad s \to 1^+,$$

como consecuencia tenemos que $\lambda' = \Lambda' = 1$, esto combinado con (B.23) nos da $\lambda \le 1 \le \Lambda$, el resultado deseado. $\square$

Apéndice C

El Teorema de los Números Primos

C.1. Introducción

El objetivo del presente capítulo es exponer la demostración del Teorema de los Números Primos, para ello estudiaremos propiedades de la función zeta como una función de variable compleja. En este capítulo $s = \sigma + it$.

C.2. La función zeta

Consideremos a la suma

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{C.1}$$

como una función en la variable compleja $s = \sigma + it$. Cada término en esta serie es $n^{-s} = e^{-s \log n}$ por lo que $|n^{-s}| = n^{-\sigma}$. Luego, por el teorema de comparación de Weierstrass la serie (C.1) es uniformemente convergente para $\sigma > 1 + \delta$, donde δ es cualquier cantidad positiva.

Por la observación anterior $\zeta(s)$ es una función analítica en el semiplano $\sigma > 1$, gracias a esto sus derivadas pueden ser calculadas derivando término a término y las fórmulas (A.7), (B.16), (B.17), (B.21) y (B.22) siguen siendo válidas en el semiplano $\sigma > 1$.

C.2.1. Continuación analítica

Como estamos interesados en el comportamiento de $\zeta(s)$ cerca de la línea vertical $\sigma = 1$, es necesario estudiar su extensión analítica al dominio $\sigma > 0$.

Teorema C.1 *La función $\zeta(s)$, definida por* (C.1) *se puede extender analíticamente al semiplano $\sigma > 0$, teniendo como única singularidad en este dominio un polo simple con residuo 1 en $s = 1$.*

Demostración. Por el Teorema B.2 con $\lambda_n = n$, $c_n = 1$ y $\phi(x) = x^{-s}$, tenemos que

$$\sum_{n \le X} \frac{1}{n^s} = s \int_1^X \frac{[x]}{x^{s+1}}\, dx + \frac{[X]}{X^s}, \qquad \sigma > 1.$$

Si sustituimos $[x] = x - (x)$, donde (x) es la parte decimal de x, entonces, al realizar la integral, se tiene que esta igualdad se puede reescribir como

$$\sum_{n\leq X}\frac{1}{n^s}=\frac{s}{(1-s)X^{s-1}}+\frac{s}{s-1}-s\int_1^X\frac{(x)\,dx}{x^{s+1}}+\frac{1}{X^{s-1}}-\frac{(X)}{X^s}. \tag{C.2}$$

Como $|1/x^{s-1}|=1/X^{\sigma-1}$ y $|(X)/X^s|<1/X^{\sigma}$, deducimos que haciendo tender X a infinito

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-s\int_1^\infty\frac{(x)\,dx}{x^{s+1}}. \tag{C.3}$$

Hemos obtenido esta ecuación bajo la hipótesis $\sigma>1$, pero como $|(x)/x^{s+1}|<1/x^{\sigma+1}$, la integral en (C.3) es uniformemente convergente para $\sigma>\delta$, donde δ es cualquier cantidad positiva fija. Por lo tanto representa una función analítica, digamos $I(s)$, en el semiplano $\sigma>0$. Esto nos permite escribir a (C.3) como

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-sI(s)=\frac{\phi(s)}{s-1}.$$

Donde $\phi(s)=s(1+(s-1)I(s))$, es analítica en el semiplano $\sigma>0$, se sigue que la función $\zeta(s)$ definida por (C.3) es analítica en el semiplano $\sigma>0$ excepto en $s=1$ donde tiene un polo simple con residuo 1, ya que $\phi(1)=1$. □

C.2.2. El orden de la función zeta

Ahora estudiemos el comportamiento de $|\zeta(s)|$ en el dominio $\sigma>0$, estamos interesados en puntos $s=\sigma+it$ con $|t|$ grande y podemos asumir por ahora que $t>0$ ya que $\zeta(s)$ y $\zeta(\overline{s})$ son conjugados como se puede observar en (C.3).

En lo que sigue denotaremos con la letra A a cierta constante positiva, si escribimos $A(\alpha)$ es que la constante A depende sólo del parámetro α. Además, hacemos uso de la extensión de la notación $O(f)$ para funciones que tienen parámetros. Por ejemplo, decimos que $f(\sigma,t)=O(t^\sigma)$ uniformemente en un determinado intervalo de σ, cuando $t\to\infty$, si $|f(\sigma,t)|<kt^\sigma$ para todo $t>t_0$ y todo σ en el intervalo, donde k y t_0 son independientes de t y σ.

Teorema C.2 *Si $\sigma\geq1$ y $t\geq2$ tenemos que*

$$|\zeta(s)|<A_1\log t, \tag{C.4}$$
$$|\zeta'(s)|<A_2(\log t)^2, \tag{C.5}$$

además si $0<\delta<1$ entonces para $\sigma\geq\delta$ y $t\geq1$ tenemos

$$|\zeta(s)|<A_3(\delta)t^{1-\delta}. \tag{C.6}$$

Demostración. Por (C.2) y (C.3) obtenemos, suponiendo que $\sigma>0$, $X\geq1$ y $t\geq1$, la siguiente ecuación

$$\zeta(s)-\sum_{n\leq X}\frac{1}{n^s}=\frac{(X)}{X^s}+\frac{1}{(s-1)X^{s-1}}-s\int_X^\infty\frac{(x)\,dx}{x^{s+1}}. \tag{C.7}$$

Haciendo uso de las estimaciones $t\leq|s-1|$ y $|s|<\sigma+t$ se siguen las desigualdades

$$\begin{aligned}|\zeta(s)|&\leq\sum_{n\leq X}\frac{1}{n^\sigma}+\frac{1}{X^\sigma}+\frac{1}{tX^{\sigma-1}}+|s|\int_X^\infty\frac{dx}{x^{\sigma+1}}\\&\leq\sum_{n\leq X}\frac{1}{n^\sigma}+\frac{1}{X^\sigma}+\frac{1}{tX^{\sigma-1}}+\left(1+\frac{t}{\sigma}\right)\frac{1}{X^\sigma}.\end{aligned}$$

Luego, si $\sigma \geq 1$, entonces

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n \leq X} \frac{1}{n} + \frac{1}{X} + \frac{1}{t} + \frac{(1+t)}{X} \leq \log X + 4 + \frac{t}{X},$$

tomando $X = t$ obtenemos (C.4). Para obtener (C.5) derivamos (C.7)

$$\zeta'(s) + \sum_{n \leq X} \frac{\log n}{n^s} = \int_X^\infty \frac{(x)[s \log x - 1]}{x^{s+1}}\, dx - X^{1-s}\left(\frac{1}{(1-s)^2} + \frac{\log X}{s-1} + \frac{(X)\log X}{X}\right).$$

Ahora suponemos $\sigma \geq 1$ y, razonando como antes,

$$\begin{aligned} |\zeta'(s)| &< \log X \sum_{n \leq X} \frac{1}{n} + \frac{1}{X} + (\log X + 1)\frac{2}{X} + \frac{2t}{X} \\ &< \log X(\log X + 2) + 2 + \frac{2t}{X}. \end{aligned}$$

Si $X = t$ la desigualdad (C.5) es cierta.

Por último si $\sigma \geq \delta$, con $0 < \delta < 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &< \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^\delta} + \frac{1}{tX^{\delta-1}} + \left(2 + \frac{t}{\delta}\right)\frac{1}{X^\delta} \\ &< \int_0^{[X]} \frac{dx}{x^\delta} + \frac{1}{tX^{\delta-1}} + \frac{3t}{\delta X^\delta} \\ &< \frac{X^{1-\delta}}{1-\delta} + X^{1-\delta} + \frac{3t}{\delta X^\delta}, \end{aligned}$$

tomando $X = t$ como antes tenemos que

$$|\zeta(s)| < t^{1-\delta}\left(\frac{1}{1-\delta} + 1 + \frac{3}{\delta}\right),$$

lo cual implica (C.6). □

C.2.3. Los ceros de la función zeta

Los ceros de la función zeta juegan un papel importante en el estudio sobre la distribución de los números primos ya que son singularidades de las funciones $\log \zeta(s)$ y $\zeta'(s)/\zeta(s)$. Para los propósitos del presente escrito nos bastará saber que en la línea recta $\sigma = 1$ la función zeta no se anula.

En primer lugar podemos observar fácilmente que $\zeta(s)$ no tiene ceros en el semiplano $\sigma > 1$ gracias al producto (A.7) de Euler, ya que es absolutamente convergente y ningún factor es cero. Sin embargo, el producto de Euler no nos da información directa de los puntos que no pertenecen a este dominio; aún así, haciendo uso de las estimaciones precedentes podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema C.3 *La función $\zeta(s)$ no tiene ceros en la línea $\sigma = 1$, además si $\sigma \geq 1$*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = O((\log t)^A), \tag{C.8}$$

uniformemente cuando $t \to \infty$.

Demostración. Observamos que si $\theta \in \mathbb{R}$ entonces

$$0 \leq 2(1+\cos\theta)^2 = 3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta. \tag{C.9}$$

Note que $n^{-s} = n^{-\sigma}(\cos(t\log n) + i\,\mathrm{sen}(t\log n))$, si consideramos $\sigma > 1$ podemos usar la ecuación (B.16) para obtener

$$\log|\zeta(\sigma+it)| = \Re\sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-\sigma-it} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-\sigma}\cos(t\log n),$$

donde $c_n = 1/m > 0$ si $n = p^m$ para algún primo y 0 en otro caso, esto junto con (C.9) nos da

$$\log|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)| = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-\sigma}\left[3+\cos(t\log n)+\cos(2t\log n)\right] \geq 0,$$

de este modo

$$[(\sigma-1)\zeta(\sigma)]^3\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 |\zeta(\sigma+2it)| \geq \frac{1}{\sigma-1}, \tag{C.10}$$

esta desigualdad muestra que el punto $s = 1+it$ con $|t| > 0$ no puede ser un cero de $\zeta(s)$ si lo fuera entonces ya que $\zeta(s)$ es analítica en los puntos $1+it$, $1+2it$ y tiene un polo simple con residuo 1 en $s=1$, el lado izquierdo de (C.10) tendería al límite finito $|\zeta'(1+it)|^4|\zeta(1+2it)|$ mientras que el lado derecho tendería a infinito cuando $\sigma \to 1^+$, esto prueba la primera parte del teorema.

Para probar la segunda parte si suponemos $\sigma \geq 2$ entonces

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = \prod_p |(1-p^{-s})| \leq \prod_p (1+p^{\sigma}) < \zeta(\sigma) \leq \zeta(2),$$

ahora sea $1 \leq \sigma \leq 2$ y $t \geq 2$ entonces por (C.10) y (C.4)

$$\begin{aligned}(\sigma-1)^3 &\leq [(\sigma-1)\zeta(\sigma)]^3|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \\ &\leq A_1^3|\zeta(\sigma+it)|^4 A_2\log 2t,\end{aligned}$$

ya que $\log 2t \leq \log t^2 = 2\log t$, por lo que

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq \frac{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}{A_3(\log t)^{\frac{1}{4}}}, \qquad (1 \leq \sigma \leq 2, t \geq 2). \tag{C.11}$$

Sea $1 < \eta < 2$ si $1 \leq \sigma \leq \eta$, $t \geq 2$ por (C.5)

$$|\zeta(\sigma+it) - \zeta(\eta+it)| = \left|\int_{\sigma}^{\eta}\zeta'(u+it)\,du\right| \leq A_4(\eta-1)(\log t)^2,$$

entonces usando (C.11)

$$\begin{aligned}|\zeta(\sigma+it)| &\geq |\zeta(\eta+it)| - A_4(\eta-1)(\log t)^2 \\ &\geq \frac{(\eta-1)^{\frac{3}{4}}}{A_3(\log t)^{\frac{1}{4}}} - A_4(\eta-1)(\log t)^2,\end{aligned}$$

esta última desigualdad se cumple también para $\eta \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 2$, en virtud de (C.11), entonces es verdad para $1 \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 2$.

Si $\eta(t) = 1 + (2A_3A_4)^{-4}(\log t)^{-9}$ entonces $\eta(t) \to 1$ cuando $t \to \infty$, por lo que existe t_0 tal que para todo $t > t_0$ se cumple $1 \leq \eta(t) \leq 2$, además η satisface

$$\frac{(\eta - 1)^{\frac{3}{4}}}{A_3(\log t)^{\frac{1}{4}}} = 2A_4(\eta - 1)(\log t)^2,$$

es decir, si $t > t_0$ y $1 \leq \sigma \leq 2$ entonces

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq A_4(\eta - 1)(\log t)^2 = A_5(\log t)^{-7},$$

esto prueba (C.8) con $A = 7$. □

C.3. Fórmula fundamental

Los resultados precedentes nos han permitido estimar el comportamiento de $\zeta(s)$ cerca de la línea $\sigma = 1$ y encontrar una fórmula de $\zeta'(s)/\zeta(s)$ en términos de $\psi(x)$. Nuestro trabajo por ahora es encontrar una fórmula en el sentido inverso, para ello debemos introducir la función auxiliar $\psi_1(x)$ que se define para $x > 1$ como

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(u)\, du.$$

Si suponemos $\lambda_n = n$, $\phi(x) = x$ y $c_n = \Lambda(n)$ como en el Teorema B.2 entonces $\psi_1(x)$ satisface

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} (x - n)\Lambda(n), \tag{C.12}$$

en seguida buscamos una fórmula de $\psi_1(x)$ en términos de $\zeta'(s)/\zeta(s)$ con ayuda de (C.12). Como primer paso demostraremos un teorema auxiliar.

Teorema C.4 *Si y, k y c son constantes positivas con k entero entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{y^s\, ds}{s(s+1)\cdots(s+k)} = \begin{cases} 0, & y \leq 1; \\ \dfrac{1}{k!}\left(1 - \dfrac{1}{y}\right)^k, & y \geq 1, \end{cases}$$

donde (c) representa la línea $\sigma = c$ recorrida de abajo hacia arriba.

Demostración. Si $f(s) = y^s[s(s+1)\cdots(s+k)]^{-1}$, entonces la integral sobre (c) es absolutamente convergente ya que $|f(s)| < y^c|t|^{-k-1}$ en la línea de integración y $k > 0$.

Si $y \geq 1$ sea $R > \text{máx}\{c, 2k\}$ el radio del círculo C cuyo centro está en $s = 0$ y denotamos por J_T a la integral sobre el segmento que une a los puntos $c - iT$ con $c + iT$ y por J_{C_1} a la integral sobre el arco C_1 (véase figura 3) entonces aplicando el teorema de los residuos de Cauchy

$$J_T = 2\pi i S + J_{C_1},$$

donde S es la suma de los residuos de $f(s)$ en los polos $s = 0, -1, \ldots, -k$.

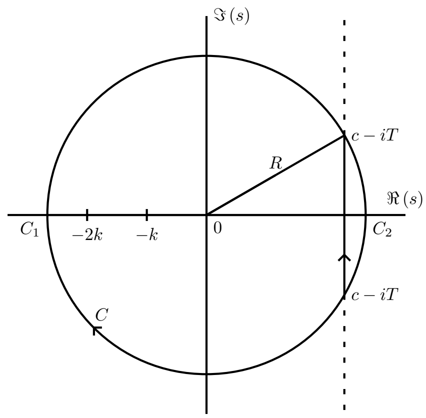

Figura 3

En el arco C_1 se tiene $\sigma \leq c$ por tanto $|y^s| = y^\sigma \leq y^c$ y como $y \geq 1$ también se cumple que

$$|s+n| \geq R-k > \frac{R}{2}, \qquad n = 0, \ldots, k,$$

entonces

$$|J_{C_1}| < \frac{1}{2\pi}\frac{y^c 2^{k+1}}{R^{k+1}} 2\pi R < \frac{y^c 2^{k+1}}{T^k},$$

por lo tanto $J_T \to S$ cuando $T \to \infty$ es decir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} f(s)\, ds = S$$

y como el residuo de $f(s)$ en $s = -r$ es $(-y)^{-r}/r!(k-r)!$, con $r = 0, \ldots, k$, entonces tenemos que

$$S = \sum_{r=0}^{k} \frac{(-y)^{-r}}{r!(k-r)!} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{y}\right)^k.$$

$\square$

Como consecuencia de este resultado tenemos que si $x > 0$ y $y = x/n$ por la ecuación (C.12)

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n \leq x}\left(1 - \frac{n}{x}\right)\Lambda(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{(x/n)^s}{s(s+1)}\, ds,$$

donde según el Teorema C.4 un número finito de integrales es no cero ya que $y = x/n < 1$ si $n > x$, note además que en cada integral de esta fórmula $c > 0$, pero si $c > 1$ el orden de la suma y la integral se puede intercambiar en virtud de que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(c)}\left|\frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)}\right| ds &< x^c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{c^2+t^2} = \frac{x^c}{c^2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^c} \\ &< \frac{x^c}{c^2\pi}\int_1^{\infty}\frac{\log u}{u^c}\, du = \frac{x^c}{\pi c^2(1-c)^2}.\end{aligned}$$

Entonces si $c > 1$, gracias a la ecuación (B.17) concluimos que

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{x^s}{s(s+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{x^s}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) ds. \tag{C.13}$$

C.4. Fórmula asintótica

Nuestro siguiente paso es obtener una relación asintótica a partir de la fórmula (C.13).

Teorema C.5 *La función $\psi_1(x)$ satisface*

$$\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2$$

cuando $x \to \infty$.

Demostración. Supongamos $x > 1$ en todos los argumentos y reescribimos (C.13) como

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \int_{(c)} g(s)x^{s-1}\,ds, \tag{C.14}$$

donde

$$g(s) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{s(s+1)}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Por los Teoremas C.1, C.2 y C.3, $g(s)$ es analítica en $\sigma \geq 1$ excepto en $s = 1$ donde tiene un polo simple con residuo $1/2$ lo cual se puede ver de la ecuación (C.3), por otro lado los Teoremas C.2 y C.3 nos permiten estimar $|g(s)|$, para ello suponemos $\sigma \geq 1$ y $|t|$ suficientemente grande digamos $|t| > t_0$, así

$$|g(s)| < A_1|t|^{-2}A_2(\log|t|)^2 A_3(\log|t|)^7.$$

Recordemos que si A y α son positivos entonces $(\log t)^A/t^\alpha$ es una función decreciente de t para $t > e^{A/\alpha}$, es decir podemos elegir t_0 tal que la estimación anterior sea menor que $|t|^{-c}$ para cualquier número c con $0 < c < 2$, en nuestros cálculos es conveniente $c = 3/2$, de este modo

$$|g(s)| < |t|^{-3/2}, \qquad (\sigma \geq 1, |t| > t_0). \tag{C.15}$$

Sea $\epsilon > 0$ y $U > T = 4/\epsilon^2 > t_0$, consideremos el conjunto cerrado Ω de la figura 4, donde α satisface $0 < \alpha < 1$ y se ha elegido de tal manera que en el rectángulo $[\alpha, 1] \times [-T, T]$ la función $\zeta(s)$ no tenga ceros, esto es posible ya que $\zeta(s)$ es analítica en $\Omega \setminus \{1\}$ y no tiene ceros en la línea $\sigma = 1$, por lo que existe un conjunto abierto que contiene a todos los puntos $s = 1 + it$ donde la función zeta no se anula, por supuesto la elección de α depende de la elección de T y esta a su vez depende de ϵ, por lo que α depende sólo de ϵ.

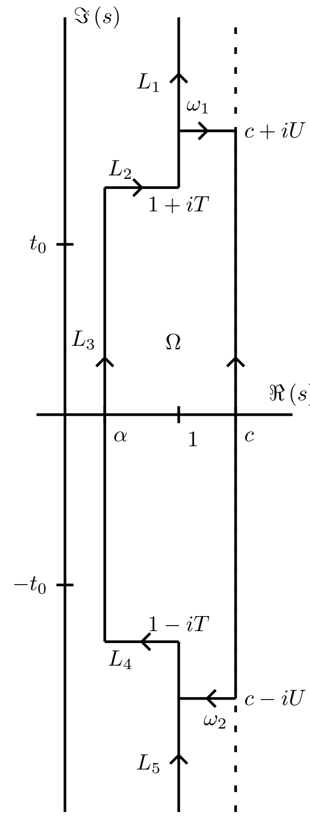

Figura 4

Lo anterior asegura que la única singularidad de $g(s)x^{s-1}$ en Ω sea $s = 1$, por lo que al aplicar el teorema del residuo de Cauchy obtenemos

$$\int_{\partial\Omega} g(s)x^{s-1}\,ds = \frac{1}{2}, \tag{C.16}$$

como la función $g(s)x^{s-1}$ toma valores conjugados para valores conjugados de s la norma de las integrales de esta función en los segmentos ω_1 y ω_2 es la misma y al usar (C.15) satisface

$$\left|\int_{\omega_1} g(s)x^{s-1}\,ds\right| < x^{c-1}\int_1^c |g(\sigma + iU)|\,d\sigma < \frac{(c-1)x^{c-1}}{U^{3/2}},$$

por lo tanto tiende a 0 cuando $U \to \infty$, de modo que podemos reescribir a (C.16) usando (C.14) de la siguiente forma

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \int_{(c)} g(s)x^{s-1} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{5} J_k,$$

donde J_i es la integral de $g(s)x^{s-1}$ en el segmento L_i.

Si demostramos que $|J_i|$ tiende a 0 cuando $x \to \infty$ habremos terminado, según las observaciones previas $|J_1| = |J_5|$ y $|J_2| = |J_4|$ por lo que basta estimar $|J_1|$, $|J_2|$ y $|J_3|$. En primera instancia

$$|J_1| = \left| \int_T^\infty g(1+it)x^{it}\, dt \right| \leq \int_T^\infty |g(1+it)|\, dt < \int_T^\infty |t|^{-3/2}\, dt = \epsilon,$$

ahora si M es el máximo de $|g(s)|$ en los segmentos finitos L_2, L_3 y L_4 entonces

$$|J_2| = \left| \int_\alpha^1 g(\sigma+iT)x^{\sigma it-1}\, d\sigma \right| \leq M \int_\alpha^1 x^{\sigma-1}\, d\sigma < \frac{M}{\log x},$$

de forma similar

$$|J_3| = 2\left| \int_0^T g(\alpha+it)x^{\alpha+it-1}\, dt \right| < 2MTx^{\alpha-1},$$

por lo tanto si $x > x_0 = \exp\{4TM/\epsilon(1-\alpha)\}$ entonces

$$\left| \frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \right| \leq 2\epsilon + \frac{2M}{\log x} + \frac{2MT}{x^{1-\alpha}} < 3\epsilon,$$

es decir $\psi_1(x)/x^2 \to 1/2$ cuando $x \to \infty$. □

Con esta relación asintótica ya estamos en posición de inferir algo acerca del comportamiento de $\psi(x)/x$ cuando $x \to \infty$, para ello debemos demostrar un resultado auxiliar.

Teorema C.6 *Sea $c_1, c_2, \ldots$ una sucesión de números positivos,*

$$C(x) = \sum_{n \leq x} c_n \qquad y \qquad C_1(x) = \int_1^x C(u)\, du.$$

Si c y C son constantes positivas tales que $C_1(x) \sim Cx^c$, cuando $x \to \infty$ entonces $C(x) \sim Ccx^{c-1}$ cuando $x \to \infty$.

Demostración. Sea $0 < \alpha < 1 < \beta$. Como $c_n \geq 0$, $C(u)$ es una función creciente por lo que si $x > 0$

$$C(x) \leq \frac{1}{\beta x - x} \int_x^{\beta x} C(u)\, du = \frac{C_1(\beta x) - C_1(x)}{(\beta - 1)x},$$

al dividir por x^{c-1} se tiene

$$\frac{C(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{1}{\beta - 1} \left(\frac{C_1(\beta x)}{(\beta x)^c}\beta^c - \frac{C_1(x)}{x^c} \right).$$

Si mantenemos β fijo y $x \to \infty$, entonces ya que $C_1(y)/y^c \to C$ cuando $y \to \infty$

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{C(x)}{x^{c-1}} \leq C\frac{\beta^c - 1}{\beta - 1},$$

de esta misma forma considerando el intervalo $(\alpha x, x)$ podemos probar que

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{C(x)}{x^{c-1}} \geq C\frac{1 - \alpha^c}{1 - \alpha}.$$

Podemos elegir α y β arbitrariamente cerca de 1, por lo que las expresiones a la derecha de estas dos últimas desigualdades se pueden hacer tan cerca como se quiera de Cc (la derivada de Cx^c en $x=1$), por lo que

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{C(x)}{x^{c-1}} = \limsup_{x\to\infty} \frac{C(x)}{x^{c-1}} = Cc,$$

que es equivalente a $C(x) \sim Ccx^{c-1}$ cuando $x \to \infty$. $\square$

Para demostrar el teorema de este capítulo, sólo tenemos que poner en orden los resultados de los teoremas anteriores.

Teorema C.7 (Teorema de los Números Primos) *Si $\pi(x)$ es la cantidad de primos menores o iguales a x entonces*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \tag{C.17}$$

cuando $x \to \infty$.

Demostración. Por el Teorema C.5, $\psi_1(x) \sim x^2/2$. Ya que $\Lambda(n) \geq 0$, se sigue del Teorema C.6 que $\psi(x) \sim x$, lo cual según el Teorema A.5 es equivalente a $\pi(x) \sim x/\log x$. $\square$

C.5. Dos consecuencias aritméticas

Gracias al Teorema de los Números Primos podemos inferir algo acerca del comportamiento asintótico de p_n cuando n tiende a infinito.

Teorema C.8 *Si p_n es el n-ésimo número primo entonces*

$$p_n \sim n \log n,$$

cuando n tiende a infinito.

Demostración. Debemos probar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{p_n} = 1. \tag{C.18}$$

Usando la ecuación (C.17) con $x = p_n$, se tiene que $\pi(p_n) = n$ y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \log p_n}{p_n} = 1$ de donde se sigue que $\log n + \log\log p_n - \log p_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log p_n} = 1$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \log p_n}{p_n} \frac{\log n}{\log p_n} = 1,$$

lo cual demuestra (C.18). $\square$

Además podemos hacer la siguiente estimación que se usa para demostrar la irracionalidad de $\zeta(3)$.

Teorema C.9 *Si d_n es el mínimo común múltiplo de $1, 2, \ldots, n$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$e^{(1-\epsilon)n} \leq d_n \leq e^{(1+\epsilon)n}, \tag{C.19}$$

para todo $n > N$.

Demostración. Primero notamos que debido a la ecuación (A.10) se satisface $\log d_n = \psi(n)$, donde ψ es la función de Tchevyshev definida en (A.8), después usando los Teoremas A.5 y C.7

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log d_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\log n}{n} = 1.$$

Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 - \epsilon \leq \frac{\log d_n}{n} \leq 1 + \epsilon,$$

para todo $n \geq N$, el resultado se sigue por la monotonía de la función exponencial. □

Bibliografía

[1] ACEVES, P., *et al, Valores irracionales de la función zeta de Riemann en los impares*, Morfismos **Vol. 10** (2006), 15-43.

[2] AIGNER, M., ZIEGLER G., *Proofs from the Book*, Springer-Verlag, (2000).

[3] ANZALDO, A., *et. al.*, *El Legado Matemático de Leonhard Euler*, UAM, (2007).

[4] APOSTOL, T., *Introduction to Analytic Number Theory*, UTM Springer-Verlag, (1995).

[5] APOSTOL, T., *Irrationality of the square root of two-A geometric proof*, American Mathematical Monthy , **Vol. 107** (2000), 841-842.

[6] AYOUB, R., *Euler and the zeta function*, American Mathematical Monthly, **Vol. 82** (1974), 1067-1086.

[7] BAKER, A., *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, (1975).

[8] BALL, K., RIVOAL, T., *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la function zêta aux eniers impairs*, Invent. Math. **Vol. 146** (2001), 193-207.

[9] BEUKERS, F., *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Society **Vol. 11** (1979), 268-272.

[10] DUNHAM, W., *Euler, the Master of us All*, MAA The Dolciani Mathematical Expositions, (1999).

[11] GARDNER, M., *The square root of two*, Math Horizons, (1997), 5-8.

[12] GAUNT, R., *The irrationality of* $\sqrt{2}$, American Mathematical Monthly, **Vol. 63** (1956), 247.

[13] GENTILE, E., *Another proof of the irrationality of* $\sqrt{2}$, The College Mathematics Journal, **Vol. 22** (1991), 143.

[14] GOLDSTEIN, L., *A history of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **Vol. 80** (1973), 599-614.

[15] HARDY, G. H Y WRIGHT, E. M., *An Introducction to the Theory of Numbers*, Oxford Science Publications, (1998).

[16] HUYLEBROUCK, D., *Similarities in irrationality proofs for* π, $\ln 2$, $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Amer. Math. Monthly **Vol. 108:3** (2001), 222-231.

[17] INGHAM, A. E., *The Distribution of Prime Numbers*, Cambridge University Press, (1990).

[18] Jacobson, N., *Basic Algebra I*, Dover Publications, (2009).

[19] Mankiewicz, R., *Historia de las Matemáticas*, Paidós, (2000).

[20] Maor, E., e : *The Story of a Number*, Princeton University Press, (1994).

[21] Niven, I., *A simple proof that* π *is irrational*, Bull. Amer. Math. Society **Vol. 53** (1947), 509.

[22] Niven, I., *Irrational Numbers*, MAA The Carus Mathematical Monographs, (1956).

[23] Ribenboim, P., *My Numbers, my Friends* , Springer-Verlag, (2000).

[24] Simmons, G. F., *Differential Equations with Applications and Historical Notes,*. McGraw Hill, (1991).

[25] Sondow, J., *A geometric proof that e is irrational and a new measure of its irrationality*, American Mathematical Monthly **Vol. 113** (2006), 637-641.

[26] Sondow, J., *Criteria for irrationality of Euler's constant*, Procedures of the American Mathematical Society **Vol. 131** (2003), no. 11, 3335-3344.

[27] Uspensky, J. V., *Teoría de Ecuaciones*, Limusa, (2000).

[28] Varadarajan, V. S., *Euler and his work on infinite series*, AMS, **Vol. 44:4** (2007), 515-539.

[29] Weil, A., *Number Theory: An Approach through History from Hammurapi to Legendre*, AMS, (2006).

[30] Zudilin, W., *One of the numbers* $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ $\zeta(11)$ *is irrational*, Russian Mathematical Surveys **Vol. 56:4** (2001), 774-776.