Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Centro de Investigación en Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Sistemas de votación: una aplicación al sistema político mexicano

Tesis que para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

presenta

Ana Cecilia Franco Mejía

bajo la dirección de

Dr. Rubén A. Martínez Avendaño

Pachuca de Soto Hidalgo, Agosto de 2010.

Resumen

En muchas ocasiones para tomar una decisión se considera un conjunto de personas y éstas votan a favor o en contra. Este tipo de situaciones se pueden modelar de manera matemática y utilizando estos modelos se pueden analizar distintas características de los votantes. Además podemos cuantificar el poder asignado a cada uno de los involucrados. Este trabajo tiene la intención de mostrar algunos ejemplos de estas situaciones, explicar los modelos y hacer una adaptación de los mismos para poder aplicarlos al sistema político mexicano.

Abstract

There are situations in wich a group of people have to vote against or in favor of changing the status quo. These situations can be studied using mathematical models, these models allow us to analyze some features of the voters. Also its possible to quantify the power asigned to every person involved in the system. In this thesis we present some examples of these situations, explain these models and apply them to the Mexican political system.

A mi familia...

Agradecimientos

Gracias.

Con una sola palabra, el día de hoy termino lo que hace algunos (sí, sí tal vez muchos) meses comencé.

Desearía que esta única palabra describiera todo lo que quiero decir. Pero sería imposible. Porque no alcanza. Porque mi agradecimiento es algo que no se puede medir, algo que diría tiende a infinito.

Confieso que no es sencillo pues el camino que he recorrido ha estado lleno de personas que han puesto cada una un ladrillo para construir lo que hoy soy. Y también confieso que no es sencillo pues prefiero los números un poco más que a las palabras.

Y si con algún teorema, axioma o alguna rara proposición pudiera expresarme, el resultado sería un infinito amor… infinito. Toño y Cecilia, mis padres, los amo. Gracias primero por su amor, por su respeto, por su apoyo e incluso por los regaños y los desacuerdos. Es por ustedes que estoy aquí, es por ustedes que me he levantado cuando a veces pensé caer. Aquellas veces que sentí que no había descanso o que las cosas no iban como se suponía tenían que ir. Aquellas veces que pensé que un problema podía más que yo. Por sostenerme. Por hablarme. Por escuchar. Por ser mis padres.

A mis catedráticos: Rubén, Federico, Benjamín, Delil, Olivia, maestra Margarita, doctora Tarasenko, doctor Barrera, Roberto, doctor Villarroel, doctor Sampedro, doctor Orlando. Gracias. Por permitirme recorrer junto a ustedes este camino, difícil… muy difícil, pero no imposible. Este camino que sin duda ustedes caminaron antes que yo, y que sin reparos me brindaron sus conocimientos, sus buenos ratos, su tiempo y su guía. Mi cabeza era un espacio libre (bueno, casi siempre), el cual se fue llenando de ideas, de teorías, de resultados y no resultados. Hoy, en este mundo real, no imaginan cuanto agradezco su presencia en mi vida.

A mi hermana, mis amigos y mis primos se que entienden exactamente lo que quiero decir con *gracias*. Ustedes que son como yo, que se sentaron conmigo, que estuvieron en todos los momentos que me hicieron llegar hasta aquí. Gracias por recorrer este camino junto a mí, por hacerme reír, por el tiempo, por cada *porque no eres normal*, por llevarme a festejar cuando reprobé, por recordarme que los necesito y están ahí.

A mis ex-compañeros, a quienes hoy puedo llamar colegas. Gracias por ayudarme a que las clases fueran más fáciles de llevar y a veces hasta divertidas, por hacer alguna broma cuando sentía no poder estudiar más, por las carcajadas, por los enojos, por haber estado siempre unidos, por compartir los ratos de desesperación.

Gracias a ti Rubén por tu tiempo y tu paciencia. Por tu dedicación, tu presencia está en este trabajo, gracias por no estar de acuerdo con lo que decía, por nunca darte por vencido conmigo, por encontrar mis ideas cuando parecían estar escondidas.

Hay una persona especial a quien quiero agradecer, y a la cual nunca tengo tiempo de hacerlo, creo que ninguno de nosotros. Quiero agradecerme a mí misma. Porque si no fuera por mí nada de lo que soy existiría. Yo escogí estar aquí, yo escogí ser quien soy ahora. Gracias a mí misma por respetarme, por ti soy ahora esta Cecilia. Por estudiar tanto y tantas veces, por el esfuerzo. Gracias.

ÍNDICE GENERAL

Resumen III

Notación. IX

Introducción. 1

1. Sistemas de votación sí-no 5
1.1. Preliminares 5
1.2. Teorema de Caracterización de los Sistemas de Peso 12
1.3. Sistemas de pesos vectoriales. 35

2. Poder Político 41
2.1. Índice de poder de Shapley-Shubik. 42
2.1.1. La unión hace la fuerza. 45
2.2. Índice de poder de Banzhaf. 47
2.3. Índice de poder de Johnston. 49
2.4. Índice de poder de Deegan-Packel. 51
2.5. ¿Influyente? ¿Qué tanto? 53

3. Aplicación al sistema político mexicano. 69
3.1. Reformas a la constitución en México 69
3.2. Cálculo de los índices de poder. 73
3.2.1. Índice de Shapley-Shubik. 73
3.2.2. Índice de poder de Banzhaf. 76
3.2.3. Índice de poder de Johnston. 78
3.2.4. Índice de poder de Deegan-Packel. 82
3.3. Legislaturas de los estados. 85

3.4. Reformas a una Ley General en México 87
3.5. Cálculo de los índices de poder. 91
3.5.1. Índice de Shapley-Shubik. 91
3.5.2. Índice de poder de Banzhaf. 94
3.5.3. Índice de poder de Johnston. 98
3.5.4. Índice de poder de Deegan-Packel. 102

Conclusiones **107**

Referencias **109**

Notación

$\mathbf{P}(A)$	Conjunto potencia de A (pag. 6).
$\mathbf{N}$	Conjunto de votantes en un sistema de votación (pag. 6).
$\mathbf{W}$	Coaliciones ganadoras en un sistema de votación(pag. 6).
$G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$	Sistema de votación(pag. 6).
$\emptyset$	Conjunto vacío(pag. 6).
w	Función de peso para un sistema de votación(pag. 6).
q	Número real que representa el umbral en un sistema de votación(pag 6).
$\|A\|$	Cardinalidad del conjunto A (pag. 8).

Introducción.

El objetivo de esta tesis es presentar una aplicación de matemáticas a un tema en donde, para muchos, es sorprendente encontrarlas: la política.

Este trabajo considera como objeto de estudio los sistemas de votación sí-no, que son un área muy específica dentro de la teoría de juegos. Esta es una rama de las matemáticas que cuenta con una historia muy amplia, pues se desarrolla a partir del siglo 13. No hablaremos de la historia de esta rama, unicamente mencionaremos dos sucesos que para nosotros resultan importantes.

El primero de ellos ocurre en 1944 y es la publicación del libro *Theory of Games and Economic Behaviour* publicado por John von Neumann y Oscar Morgenstern, pues con este libro surgen herramientas matemáticas útiles para el estudio del tema que nos interesa.

El otro suceso relevante para nosotros es la publicación del libro de Alan D. Taylor *Matemáticas y Política*. Este es un libro dirigido a estudiantes de ciencias sociales y entre otras cosas trata el tema de sistemas de votación, así como los llamados índices de poder.

Este trabajo se compone de dos partes importantes: en la primera de ellas hablamos sobre situaciones en donde un grupo de personas votan a favor o en contra de cambiar el status quo en una circunstancia determinada. Esto es lo que se conoce como sistemas de votación sí-no. En la segunda parte de la tesis hacemos un intento por cuantificar la importancia de los votantes involucrados en la toma de decisiones en los sistemas antes mencionados. Esto lo haremos utilizando índices de poder.

Esta tesis consta de tres capítulos. En el primero de ellos hablaremos de los sistemas de votación sí-no y de algunas de sus propiedades. La información tratada en este capítulo se obtuvo del libro de Taylor antes mencionado. En este libro los conceptos se tratan de manera poco rigurosa, pues como mencionamos antes es un libro dirigido a estudiantes de ciencias sociales. Nuestra contribución consistió en plantear las definiciónes de manera precisa, así como explicar detalladamente las demostraciones de los lemas y teoremas.

En la sección 1.2 encontramos una manera de caracterizar a los sistemas de votación de peso y demostramos que todos los sistemas de votación son de peso si y sólo si son robustos en comercio. La demostración esta dada de manera muy escueta en el artículo de Taylor y Zwicker *A characterization of weighted voting* [4]. Nuestra contribución en esta sección fue desarrollar esta demostración y explicar todos los detalles.

Una vez que demostramos que no todos los sistemas son de peso encontramos, en la Sección 1.3 una manera de generalizar este concepto. Como consecuencia obtenemos la idea de pesos vectoriales, propiedad con la que cuentan todos los sistemas de votación sí-no. En esa misma sección definimos la dimensión de un sistema. La información para este capítulo fue obtenida del libro de Taylor [1]

En el segundo capítulo buscamos medir la importancia de los votantes involucrados utilizando cuatro índices de poder definidos en el texto de Taylor. En el libro las definiciones son poco rigurosas, nuestra contribución consistió en escribir estas definiciones de manera precisa y explicar detalladamente los cuatro índices mencionados.

En el tercer capítulo aplicamos lo trabajado en los primeros dos capítulos a dos situaciones de importancia en México. Primero trataremos las reformas a la constitución de nuestro país como un sistema de votación, veremos si cumple con las propiedades mencionadas y calcularemos su dimensión, además para los votantes involucrados calcularemos los cuatro índices de poder. Posteriormente haremos lo mismo con la reforma a las leyes generales en México.

Hay varios puntos importantes de aclarar. Uno de ellos es el hecho de que algunas de las definiciones podrían no ser lo que el uso acostumbrado nos indica, pero son comunes en el área que estamos. Por este motivo en este trabajo definimos algunos de estos conceptos como son: robusto en intercambio, robusto en comercio, coalición, entre otros.

También debemos señalar que el trabajo realiado es sólo una primera aproximación, un intento por aplicar modelos conocidos a situaciones políticas de nuestro país. Este modelo es muy simple y parte de una situación ideal, pues consideramos que todos los involucrados están presentes en cada votación y que otorgan su voto considerando sólo su opinión, además suponemos que mientras el sistema no cambia su voto permanece constante. Como sabemos, la situación real es mucho más complicada, no siempre estan presentes todos los votantes, además los involucrados consideran otros intereses (intereses políticos, economía, promesas de campaña, etc.) al momento de votar y pueden cambiar de opinión aun cuando el sistema no haya sufrido ningún cambio.

CAPÍTULO 1

Sistemas de votación sí-no

En este primer capítulo discutiremos situaciones en las que un grupo de personas vota para decidir si, en una situación determinada, se toma una alternativa para cambiar el status quo. Estas personas votarán a favor o en contra de dicha alternativa.

1.1

Preliminares

Cuando se tiene un conjunto de votantes y se especifican las reglas para que se apruebe un tema en cuestión se dice que tenemos un *sistema de votación sí-no*. Notemos que la manera de denotar estos votantes no es relevante (podemos referirnos a alguno de ellos como el votante i por ejemplo). Como es de esperarse, los votantes encargados de tomar las decisiones pueden unirse a otros, y esto es precisamente lo que se conoce como *coalición*. Si con los votantes que pertenecen a una coalición se puede garantizar el triunfo se dice que es una *coalición ganadora*, de lo contrario se le llama una *coalición perdedora*.

Además, es una *coalición ganadora mínima* si tiene justo lo necesario para garantizar el triunfo, es decir, si al perder a cualquiera de sus votantes se convierte en perdedora. Si un sistema de votación cumple que al agregar votantes a una coalición ganadora esta permanece ganadora se dice que es *monótono*.

Escribamos estos conceptos de manera precisa.

Definición 1.1. Se define un *sistema de votación* G como una pareja $(\mathbf{N}, \mathbf{W})$ donde $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ son los votantes y $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{N})$ es la colección de coaliciones ganadoras. Además $\mathbf{N} \in \mathbf{W}$ mientras que $\emptyset \notin \mathbf{W}$.

Para entender este concepto veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. *UNIÓN ECONÓMICA DEL BENELUX (1990)*

Este es un sistema de votación encuentra compuesto por 3 países: Bélgica, Holanda y Luxemburgo. Se reparten 27 votos de la siguiente manera: 9 votos para Bélgica, 9 votos para Holanda y 9 votos para Luxemburgo; para que se dé una aprobación se deben de obtener 14 votos o más a favor.

En este caso tendríamos que

$$\mathbf{N} = \{ \text{ Bélgica, Holanda, Luxemburgo}\}$$

$$\mathbf{W} = \{\{\text{Bélgica, Holanda}\},\{ \text{ Bélgica, Luxemburgo}\},\{\text{Holanda, Luxemburgo}\}\}$$

Esta no es la única definición que se puede escribir matemáticamente, definamos de la misma manera lo que es una coalición ganadora mínima.

Definición 1.2. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación, sea además $X \in \mathbf{W}$, se dice que X es una *coalición ganadora mínima*, si para todo x elemento de X se tiene que $X \setminus \{x\} \notin \mathbf{W}$.

Uno puede pensar que cada uno de los votantes involucrados en un sistema de votación sí-no influyen de igual manera al momento de tomar esta decisión, sin embargo, no siempre es así. En algunos casos se otorga a cada votante un "peso" y para decidir en qué caso las coaliciones son ganadoras se fija un mínimo que debe alcanzar la coalición juntando los pesos de todos los votantes que la integran. Esto es lo que se expresa en la siguiente definición:

Definición 1.3. Se dice que un sistema de votación $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ es *de peso* si existen una función $w : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$ tales que

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{x \in X} w(x) \geq q.$$

a w se le llama función de peso y al número q se le llama el umbral.

Consideremos el ejemplo dado después de la Definición 1.1, una manera de describir este sistema es como lo hicimos anteriormente, diciendo explícitamente cuáles son las coaliciones ganadoras, otra manera de hacerlo es asignarle a cada uno de los votantes un peso determinado y fijar un número que la suma de los pesos en una coalición deben superar para ser ganadoras.

Es evidente que si definimos la función de peso $w(i) = 9$ para todo $i \in \mathbf{N}$ y el umbral como $q = 14$ este es un sistema de peso.

Los sistemas de votación pueden presentar algunas propiedades, una de ellas es la que se define a continuación.

Definición 1.4. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación, sean $A, B \in \mathbf{W}$, consideremos a, b tales que $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$. Tomemos entonces las coaliciones $A' := (A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ y $B' := (B \setminus \{b\}) \cup \{a\}$. Se dice que G es *robusto en intercambio* si se tiene que $A' \in \mathbf{W}$ ó $B' \in \mathbf{W}$ para todos A y B y para cualquier elección de $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$.

En otras palabras, un sistema de votación tiene esta propiedad si al realizar un intercambio uno a uno de votantes entre dos coaliciones ganadoras, al menos una de las que se obtiene es ganadora.

A continuación mostraremos que existe una relación entre los sistemas de peso y los sistemas robustos en intercambio.

Teorema 1.5. *Todo sistema de votación de peso es robusto en intercambio.*

Demostración.
Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación de peso. Entonces existen $w : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{X} \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{x \in \mathbf{X}} w(x) \geq q.$$

Sean $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{W}$ con $x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}$ y $y \in \mathbf{Y} \setminus \mathbf{X}$. Entonces, como $\mathbf{G}$ es un sistema de peso tenemos que

$$\sum_{p \in \mathbf{X}} w(p) \geq q \qquad \text{y} \qquad \sum_{p \in \mathbf{Y}} w(p) \geq q.$$

Sean $\mathbf{X}' = (\mathbf{X} \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ y $\mathbf{Y}' = (\mathbf{Y} \setminus \{y\}) \cup \{x\}$, y consideremos dos casos:

1. $w(x) \leqslant w(y)$.

$$\sum_{p\in\mathbf{X}'} w(p) = \sum_{p\in\mathbf{X}\setminus x} w(p) + w(y) \geqslant \sum_{p\in\mathbf{X}\setminus x} w(p) + w(x) = \sum_{p\in\mathbf{X}} w(p) \geq q,$$

por lo tanto,

$$\sum_{p\in\mathbf{X}'} w(p) \geq q.$$

Es decir, si $w(x) \leqslant w(y) \Rightarrow \mathbf{X}' \in \mathbf{W}$.

2. $w(x) \geqslant w(y)$.

$$\sum_{p\in\mathbf{Y}'} w(p) = \sum_{p\in\mathbf{Y}\setminus y} w(p) + w(x) \geqslant \sum_{p\in\mathbf{Y}\setminus y} w(p) + w(y) = \sum_{p\in\mathbf{Y}} w(p) \geq q,$$

de aquí que,

$$\sum_{p\in\mathbf{Y}'} w(p) \geq q.$$

Es decir, si $w(x) \geqslant w(y) \Rightarrow \mathbf{Y}' \in \mathbf{W}$.

En cualquiera de los casos al hacer un cambio uno a uno entre dos coaliciones ganadoras al menos una de las que se obtiene resulta ganadora, por lo tanto, el sistema es robusto en intercambio. ■

La pregunta natural que surge ahora es si el inverso de esta implicación también se cumple, es decir, si todo sistema robusto en intercambio es de peso. Para poder responder a esta pregunta es necesario introducir el concepto de robusto en comercio.

Antes nos gustaría encontrar alguna manera de definir un conjunto de movimientos, es decir, posibles cambios, entre los elementos de un grupo de coaliciones. A continuación la definición rigurosa.

Definición 1.6. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación, sean $X_1, \ldots, X_l \subset \mathbf{N}$. Si $A = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_l$ llamaremos un *cambio arbitrario* al conjunto de coaliciones $X'_1, X'_2, \ldots, X'_l$ que cumplen

$$|\{i : x \in X_i\}| = |\{i : x \in X'_i\}| \qquad \text{para todo } x \in A.$$

Notemos que esto implica que $X'_1 \cup X'_2 \cup \ldots \cup X'_l = A$.

Ahora que hemos introducido este concepto podemos definir otra propiedad que tienen algunos sistemas de votación.

Definición 1.7. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación, sean $X_1, X_2, \ldots, X_l \in \mathbf{W}$ y sean $X'_1, X'_2, \ldots, X'_l$ las coaliciones que se obtienen después de realizar cambios arbitrarios entre ellas. Se dice que G es *robusto en comercio* si $X'_i \in \mathbf{W}$ para algún i.

Es decir se dice que un sistema de votación tiene la propiedad de ser *robusto en comercio* si al cambiar votantes arbitrariamente entre coaliciones ganadoras al menos una de las que se obtiene sigue siendo ganadora.

Notemos que este concepto es necesario porque para saber si todos los sistemas robustos en intercambio son de peso no basta con decir que no hemos encontrado $w : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$ adecuados. No podemos garantizar que por no haberlo encontrado no existe.

Para probar entonces que no todos los sistemas son de peso basta mostrar una propiedad que deben de tener todos los sistemas de peso y encontrar un sistema que no la cumpla, entonces sabremos que este sistema no es de peso.

Como se muestra a continuación resulta que todos los sistemas de peso cumplen con la propiedad arriba mencionada.

Teorema 1.8. *Todo sistema de votación de peso es robusto en comercio.*

Demostración. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de peso, entonces existen $w : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{X} \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{x \in \mathbf{X}} w(x) \geq q.$$

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ coaliciones ganadoras y sean $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_k$, coaliciones que resulten al hacer intercambios arbitrarios entre los conjuntos X_i.

Para cada $p \in \mathbf{N}$ definimos $A_p := \{i : p \in X_i\}$ y $B_p := \{i : p \in \hat{X}_i\}$. Claramente se tiene que $|A_p| = |B_p|$.

Sea

$$\bar{w} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in X_i} w(x)}{k}.$$

Es decir, $\bar{w}$ es el promedio de los pesos de las coaliciones ganadoras $X_1, \ldots, X_k$

pero como $|A_p| = |B_p|$ para todo $p \in \mathbf{N}$ se tiene que

$$\bar{w} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in \hat{X}_i} w(x)}{k}.$$

Sabemos que

$$\sum_{n \in X_i} w(n) \geq q \qquad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots, k,$$

de aquí que

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{n \in \hat{X}_i} w(n) \geq kq.$$

Por lo tanto, para algún j se tiene que

$$\sum_{n \in \hat{X}_j} w(n) \geq q,$$

pues si se tuviera $\sum_{n \in \hat{X}_j} w(n) < q$ para todo j, se tendría que $\bar{w} < q$ y esto contradice la hipótesis.

Es decir al menos una de las coaliciones que resultaron de los intercambios arbitrarios es ganadora. Por lo tanto este sistema es robusto en comercio. ■

Ahora, utilizando esta propiedad veamos un ejemplo de un sistema de votación que es robusto en intercambio pero no es de peso.

Ejemplo. *SISTEMA DE ENMIENDA DE LA CONSTITUCIÓN CANADIENSE*

Este sistema se compone de la siguiente manera, $|N| = 10$ y los 10 votantes son las 10 provincias canadienses: Isla del Príncipe Eduardo (PEI), Terranova (N), Nuevo Brunswick (NB), Nueva Escocia (NS), Manitoba (M), Saskatchewan (S), Alberta (A), Columbia Británica (BC), Quebec (Q) y Ontario(O).

Para describir las coaliciones ganadoras se considera el porcentaje de población $p(x)$ que tiene cada una de manera que $\mathbf{W} = \{X : |X| \geq 7 \text{ y } \sum_{x \in X} p(x) \geq 50\}$

Los porcentajes de población con que cuenta cada provincia son los siguientes: p(O)=38.7, p(Q)=23.2, p(BC)=13.2, p(A)=10.9, p(M)=3.6, p(S)=3.1, p(NS)=2.8,

p(NB)=2.2, p(N)=1.5, p(PEI)=0.4. Estos datos se obtuvieron en julio de 2009 [6].

Anteriormente nos preguntamos si todos los sistemas robustos en intercambio son de peso, para poder responder veamos que este sistema es robusto en intercambio y a pesar de eso no es de peso.

Lema 1.9. *El sistema de enmienda de la Constitución Canadiense es robusto en intercambio.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathbf{W}$, entonces $|A| \geq 7$ y $|B| \geq 7$. Sean $a \in \mathbf{N}$ y $b \in \mathbf{N}$ tales que $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$.

Consideremos las coaliciones $A' := (A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ y $B' := (B \setminus \{b\}) \cup \{a\}$. Es claro que $|A'| = |A|$ y $|B'| = |B|$, es decir, $|A'| \geq 7$ y $|B'| \geq 7$.

Además sabemos que $\sum_{n \in A} p(n) \geq 50$ y de la misma manera $\sum_{n \in B} p(n) \geq 50$ pues $A, B \in \mathbf{W}$. Veamos diferentes casos:

1. $p(a) \leq p(b)$.

$$\sum_{n \in A'} p(n) = \sum_{n \in A \setminus a} p(n) + p(b) \geq \sum_{n \in A \setminus a} p(n) + p(a) = \sum_{n \in A} p(n) \geq 50.$$

   Es decir, $\sum_{n \in A'} p(n) \geq 50$, por lo tanto $A' \in \mathbf{W}$.

2. $p(a) \geq p(b)$.

$$\sum_{n \in B'} p(n) = \sum_{n \in B \setminus b} p(n) + p(a) \geq \sum_{n \in B \setminus b} p(n) + p(b) = \sum_{n \in B} p(n) \geq 50.$$

   Es decir $\sum_{n \in B'} p(n) \geq 50$ por lo tanto $B' \in \mathbf{W}$. ■

Ahora vamos a ver que este sistema no es de peso. Por el teorema 1.8 basta demostrar que este sistema no es robusto en comercio.

Lema 1.10. *El sistema de enmienda de la Constitución Canadiense no es robusto en comercio.*

Demostración. Consideremos las coaliciones $A = \{O, N, BC, S, PEI, A, NS\}$ y $B = \{N, Q, NB, M, S, A, BC\}$. Sean $C = \{NS, PEI\}$ $D = \{Q\}$ tenemos entonces que $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$.

Consideremos $A' = (A \setminus C) \cup D$ y $B' = (B \setminus D) \cup C$.

Es decir $A' = \{O, N, BC, S, A, Q\}$ y $B' = \{N, NB, M, S, A, BC, PEI, NS\}$. Tenemos entonces que $|A'| = 6$ por lo tanto $A' \notin \mathbf{W}$, por otro lado $|B'| = 8$, sin embargo $\sum_{n \in B'} p(n) < 50$, por lo tanto $B' \notin \mathbf{W}$.

Por lo tanto este sistema no es robusto en comercio. ■

Ahora podemos confirmar que no todos los sistemas que son robustos en intercambio son de peso.

1.2

Teorema de Caracterización de los Sistemas de Peso

Anteriormente probamos que todos los sistemas de votación de peso son robustos en intercambio, pero que no todos los sistemas de votación robustos en intercambio son de peso. Para probar esto utilizamos otra propiedad que es la de robusto en comercio y demostramos que todos los sistemas de votación de peso son robustos en comercio. Posteriormente encontramos un ejemplo de un sistema de votación que es robusto en intercambio pero no es robusto en comercio, y por lo tanto no es de peso.

Ahora resulta natural preguntarnos si todos los sistemas robustos en comercio son de peso y es precisamente eso lo que trataremos en la siguiente sección.

Para poder demostrar si esto es cierto o no primero hay que introducir algunos conceptos.

Definición 1.11. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación y sea $|\mathbf{N}| = n$. Si $A \subset \mathbf{N}$ y $f : A \to \mathbb{R}$, decimos que f es *robusta en comercio para* A si y sólo si para todo $k \leq 2^{2^{|\mathbf{N}-A|-1}}$ y para todas parejas de sucesiones de coaliciones $(X_1 \cup Y_1, X_2 \cup Y_2, \ldots, X_k \cup Y_k)$ y $(\hat{X}_1 \cup \hat{Y}_1, \hat{X}_2 \cup \hat{Y}_2, \ldots, \hat{X}_k \cup \hat{Y}_k)$ que satisfacen:

1. $X_i \cap Y_i = \emptyset$ y $\hat{X}_i \cap \hat{Y}_i = \emptyset$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.
2. $Y_i \subset A$ y $\hat{Y}_i \subset A$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.
3. $\sum_{i=1}^{k} \big(\sum_{p \in Y_i} f(p) \big) \leq \sum_{i=1}^{k} \big(\sum_{p \in \hat{Y}_i} f(p) \big)$.

4. $|\{i : p \in X_i\}| = |\{i : p \in \hat{X}_i\}| \qquad$ para todo $p \in N$.

no se puede tener $X_i \cup Y_i$ ganadora para todo i y al mismo tiempo $\hat{X}_i \cup \hat{Y}_i$ perdedora para todo i.

Lo que dice esta definición es que a cada una de las sucesiones de coaliciones las separamos en dos partes. La primera condición nos indica que estas partes son disjuntas. Y además, como podemos observar en la segunda condición, las segundas partes son subconjuntos del conjunto A.

Como podemos apreciar en la tercera condición la definición garantiza que el promedio de la suma de los valores que asigna f a los elementos que se encuentran en cada Y_i es menor o igual que el promedio de la suma de los valores que asigna la función a los elementos que se encuentran en $\hat{Y}_i$

Lo que nos indica la última de las condiciones es que aún después de hacer algunos movimientos, el número de veces que aparece alguno de los elementos en los $X_i^{\prime}s$ permanece constante para las $\hat{X}_i{}^{\prime}s$.

Es decir, una función f es robusta en comercio para $A \subset \mathbf{N}$ si al tomar una sucesión de coaliciones ganadoras y dividir cada coalición en dos partes disjuntas (una de las cuales contiene sólo elementos de A) y realizar una serie de intercambios entre las primeras partes de las coaliciones, de modo que los pesos asignados para las segundas partes (aquellas que contienen solo elementos de A) sean en promedio mayores a como estaban en un principio, al menos una de las coaliciones resultantes sigue siendo ganadora.

Para poder dar un ejemplo de una función robusta en comercio para algún conjunto primero veamos la siguiente definición:

Definición 1.12. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación, sean k un número fijo y $X_1, X_2, \ldots, X_k \in \mathbf{W}$ además sean $X_1', X_2', \ldots, X_k'$ las coaliciones que se obtienen después de hacer cambios arbitrarios entre ellas. Se dice que G es *k-robusto en comercio* si $X_i' \in \mathbf{W}$ para algún i.

Este concepto es como un punto medio entre robusto en intercambio y robusto en comercio. Pues aquí se pide que si se hacen cambios arbitrarios entre k coaliciones ganadoras, al menos una de las que resulta continúa siendo ganadora.

Es importante observar que si un sistema de votación $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ es k-robusto en comercio, también es k'-robusto en comercio, para todo $k' \leq k$.

Recordemos el concepto de función. Para esto consideremos dos conjuntos X y Y, una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y) donde $x \in X$, $y \in Y$ y ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento. Además al conjunto X de donde se toman los primeros elementos se le llama el dominio de f.

En la definición usual de función se pide que $X \neq \emptyset$, pero en este caso permitiremos $X = \emptyset$. En este caso a la función f se le llama función vacía. Vale la pena aclarar que cuando se tomen elementos que pertenezcan al dominio $X = \emptyset$ y se sumen sus valores, se considerará que $\sum\limits_{p \in X} f(p) = 0$.

Ahora que hemos definido una función vacía, veamos un ejemplo de nuestra definición anterior.

Lema 1.13. *Si $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ es 2^{2^n-1}-robusto en comercio, entonces la función vacía es robusta en comercio para $A = \emptyset$.*

Demostración. Consideremos las coaliciones

$$(X_1 \cup Y_1, X_2 \cup Y_2, \ldots, X_k \cup Y_k) \qquad \text{y} \qquad (\hat{X}_1 \cup \hat{Y}_1, \hat{X}_2 \cup \hat{Y}_2, \ldots, \hat{X}_k \cup \hat{Y}_k)$$

en donde $k \leq 2^{2^n-1}$.Observemos que k se tiene que tomar de esta manera para que se cumpla la definición de una función robusta en comercio para el vacío. Estas coaliciones cumplen:

1. $X_i \cap Y_i = \emptyset \qquad \text{y} \qquad \hat{X}_i \cap \hat{Y}_i = \emptyset$
2. $Y_i \subset A = \emptyset \qquad \text{y} \qquad \hat{Y}_i \subset A = \emptyset$
3. $\sum\limits_{i=1}^{k} [\sum\limits_{p \in Y_i} f(p)] \leq \sum\limits_{i=1}^{k} [\sum\limits_{p \in \hat{Y}_i} f(p)]$

   Notemos que esta última condición en realidad no dice nada, pues por la segunda condición sabemos que $Y_i = \emptyset$ para todo i. De la misma manera $\hat{Y}_i = \emptyset$ para todo i.
4. $|\{i : p \in X_i\}| = |\{i : p \in \hat{X}_i\}| \qquad$ para todo $p \in N$

Lo que nos interesa ver, es que si $X_i \cup Y_i$ es ganadora para todo i, se tiene que $\hat{X}_i \cup \hat{Y}_i$ no puede ser perdedora para todo i.

Observemos que si $X_i \cup Y_i$ es ganadora para todo i, realmente lo que estamos diciendo es que X_i es ganadora para todo i.

Este sistema es 2^{2^n-1}-robusto en comercio. Por lo tanto se tiene que $\hat{X}_i$ es ganadora para algún i. Es decir, $\widehat{X_i \cup \hat{Y}_i}$ es ganadora para algún i como se quería ■

Lema 1.14. *Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación, si f es una función robusta en comercio para $A = \mathbf{N}$, entonces G es un sistema de votación de peso.*

Demostración. Sea f una función robusta en comercio para A, es decir, para todo $k \leq 2^{2^{|N-N|-1}} = 1$ si $X \cup Y$ y $\hat{X} \cup \hat{Y}$ son coaliciones que cumplen:

1. $X \cap Y = \emptyset$ y $\hat{X} \cap \hat{Y} = \emptyset$.
2. $Y \subseteq \mathbf{N}$ y $\hat{Y} \subseteq \mathbf{N}$.
3. $\sum_{n \in Y} f(n) \leq \sum_{n \in \hat{Y}} f(n)$.
4. $X = \hat{X}$.

entonces si $X \cup Y$ es ganadora, también $\hat{X} \cup \hat{Y}$ lo es.

Hay que probar que este sistema es de peso, es decir que existen $w : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$ tales que

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{n \in X} w(n) \geq q.$$

Sea $w(x) := f(x)$ y $q := \text{mín}\{\sum_{p \in Z} w(p) : Z \in \mathbf{W}\}$

Primero demostremos que con esta w y con esta q se cumple que si $X \in \mathbf{W}$ entonces $\sum_{n \in X} w(n) \geq q$.

Esto es bastante fácil de ver, pues $q := \text{mín}\{\sum_{p \in Z} w(p) : Z \in \mathbf{W}\}$, por lo tanto sabemos que $q \leq \sum_{p \in Z} w(p)$ para toda $Z \in \mathbf{W}$, en particular para $Z = X$, es decir se tiene que $\sum_{n \in X} w(n) \geq q$.

Ahora veamos que se cumple la otra implicación, es decir, que si $\sum_{n \in X} w(n) \geq q$ entonces $X \in \mathbf{W}$.

Supongamos que no es así, es decir, existe $\hat{Y} \notin \mathbf{W}$ tal que $\displaystyle\sum_{n \in \hat{Y}} w(n) \geq q$. Entonces, existe $Y \in \mathbf{W}$ tal que $\displaystyle\sum_{n \in Y} w(n) \leq \sum_{n \in \hat{Y}} w(n)$. Definamos entonces $X = \emptyset$ y $\hat{X} = \emptyset$.

Por lo tanto tenemos $X \cup Y$ y $\hat{X} \cup \hat{Y}$ que cumplen las cuatro condiciones arriba mencionadas. Además, $X \cup Y$ es ganadora, por lo tanto se tiene que $\hat{X} \cup \hat{Y}$ también es ganadora, contradiciendo que $\hat{Y} \notin \mathbf{W}$

Por lo tanto este es un sistema de peso. ∎

Estos dos lemas nos servirán para responder la pregunta que nos interesa, para esto, utilizaremos un argumento de inducción. La base de nuestra demostración será el siguiente teorema

Teorema 1.15. *Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación, $A \subseteq \mathbf{N}$ y f una función robusta en comercio para A. Supongamos que $a_0 \in \mathbf{N} \setminus A$. Entonces, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g := f \cup \{(a_0, c)\}$ es robusta en comercio para $B := A \cup \{a_0\}$*

Tomemos un minuto para reflexionar sobre la importancia de este teorema.

Como mencionamos al inicio de esta sección lo que nos interesa demostrar es que todos los sistemas robustos en comercio son de peso. Si estamos en el caso en el que f es una función robusta en comercio para $A = \mathbf{N}$ el resultado está dado por el Lema 1.14. La pregunta es ¿qué hacer cuando una función no es robusta en comercio para $\mathbf{N}$?

En este caso pudiéramos pensar en un conjunto $N_1 \subset \mathbf{N}$ tal que f sea robusta en intercambio para N_1.

Lo que nos indica este teorema es que podremos tomar un elemento $x \in \mathbf{N} \setminus N_1$ y asignarle un valor adecuado y con lo que lograremos que $f \cup \{(x, y)\}$ sea robusta en comercio para $N_1 \cup \{x\}$. Después de esto podremos considerar un nuevo conjunto N_1 y repetir el procedimiento.

Como resultado, al final tendremos una función F robusta en comercio para $\mathbf{N}$, y por el Lema 1.14 quedará demostrado que el sistema es de peso.

Podría pensarse que en esta idea pudiera presentarse el siguiente problema: ¿Qué pasa si no hay ningún subconjunto de $\mathbf{N}$ tal que exista f robusta en comercio para él? Recordemos que el Lema 1.13 nos indica que, en realidad, esto no es ningún problema pues podemos comenzar con $N_1 = \emptyset$.

Como podemos darnos cuenta en las líneas anteriores, la clave de esta sección es justamente el Teorema 1.15, por lo que la demostración se hará de manera muy detallada. Comenzaremos con algunas definiciones. La demostración está basada en algunos lemas que también se enuncian a continuación.

Comenzaremos dando un nombre a aquellos valores que asigna la función para algunos elementos de A que no permiten que f sea robusta en comercio para A. Podría ser que la función les esté asignando valores muy altos o muy bajos, y es justamente eso lo que nos gustaría corregir. Es decir, nos gustaría encontrar un valor con el que podamos garantizar que tenemos una función robusta en comercio para el conjunto A.

Definición 1.16. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación y sean $A \subset \mathbf{N}$, $a_0 \in \mathbf{N} \setminus A$, $c \in \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función robusta en comercio para A. Sean $B = A \cup \{a_0\}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ definida como $g = f \cup \{(a_0, c)\}$. Decimos que c es una *falla* si para algún $k \leq 2^{2^{|\mathbf{N}-B|}-1}$ fijo se tienen sucesiones de coaliciones

$$(X_1 \cup Y_1 \ldots, X_k \cup Y_k) \text{ y } (\hat{X}_1 \cup \hat{Y}_1, \ldots, \hat{X}_k \cup \hat{Y}_k),$$

que cumplan las condiciones:

1. $X_i \cap Y_i = \emptyset$ y $\hat{X}_i \cap \hat{Y}_i = \emptyset$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.
2. $Y_i \subset B$ y $\hat{Y}_i \subset B$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.
3. $\sum_{i=1}^{k} [\sum_{p \in Y_i} g(p)] \leq \sum_{i=1}^{k} [\sum_{p \in \hat{Y}_i} g(p)]$.
4. $|\{i : p \in X_i\}| = |\{i : p \in \hat{X}_i\}|$ para todo $p \in N$.

Se tiene además que $X_i \cup Y_i$ es ganadora para todo i pero $\hat{X}_i \cup \hat{Y}_i$ es perdedora para todo i.

Definición 1.17. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación y sean $A \subset \mathbf{N}$, $a_0 \in \mathbf{N} \setminus A$, $c \in \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función robusta en comercio para A, $B = A \cup \{a_0\}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ definida como $g = f \cup \{(a_0, c)\}$. Decimos que c es una *falla menor* si, para algún $k \leq 2^{2^{|\mathbf{N}-B|}-1}$ fijo existen sucesiones de coaliciones

$$(X_1 \cup Y_1 \ldots, X_k \cup Y_k) \text{ y } (\hat{X}_1 \cup \hat{Y}_1, \ldots, \hat{X}_k \cup \hat{Y}_k)$$

que cumplan las cuatro condiciones mencionadas en la definición anterior, tales que $X_i \cup Y_i$ es ganadora para todo i pero $\hat{X}_i \cup \hat{Y}_i$ es perdedora para todo i y además

$$|\{i : a_0 \in Y_i\}| > |\{i : a_0 \in \hat{Y}_i\}|.$$

Análogamente si la desigualdad que se tiene es

$$|\{i : a_0 \in Y_i\}| < |\{i : a_0 \in \hat{Y}_i\}|,$$

decimos que se trata de una *falla mayor*.

Lema 1.18. *Toda falla es falla menor o falla mayor.*

Demostración.
Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación y sean $A \subset \mathbf{N}$, $a_0 \in \mathbf{N} \setminus A$, $c \in \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función robusta en comercio para A, $B = A \cup \{a_0\}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ definida como $g = f \cup \{(a_0, c)\}$.

Supongamos que c es una falla, entonces, para algún $k \leq 2^{2^{|\mathbf{N}-B|}-1}$ fijo existen sucesiones de coaliciones

$$(X_1 \cup Y_1, \ldots, X_k \cup Y_k) \qquad \text{y} \qquad (\hat{X}_1 \cup \hat{Y}_1, \ldots, \hat{X}_k \cup \hat{Y}_k)$$

que cumplen las siguientes condiciones:

1. $X_i \cap Y_i = \emptyset$ y $\hat{X}_i \cap \hat{Y}_i = \emptyset \qquad$ para todo i.
2. $Y_i \subset B$ y $\hat{Y}_i \subset B$.
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}[\sum_{p \in Y_i} g(p)] \leq \sum_{i=1}^{k}[\sum_{p \in \hat{Y}_i} g(p)]$.
4. $|\{i : p \in X_i\}| = |\{i : p \in \hat{X}_i\}| \qquad$ para todo $p \in N$.

Además para todo i se tiene que $X_i \cup Y_i$ es ganadora y $\hat{X}_i \cup \hat{Y}_i$ es perdedora.

Supongamos que c no es falla mayor ni falla menor, por lo tanto, se cumple que

$$|\{i : a_0 \in Y_i\}| = |\{i : a_0 \in \hat{Y}_i\}|.$$

Para todo i tal que $a_0 \in Y_i$ definamos

$$\overline{Y_i} = Y_i \backslash \{a_0\} \text{ y } \overline{X_i} = X_i \cup \{a_0\},$$

si $a_0 \notin Y_i$ tomaremos

$$\overline{Y_i} = Y_i \text{ y } \overline{X_i} = X_i.$$

Análogamente, para todo j tal que $a_0 \in \hat{Y}_j$ definamos

$$\tilde{Y}_j = \hat{Y}_j \backslash \{a_0\} \text{ y } \tilde{X}_j = \hat{X}_j \cup \{a_0\},$$

si $a_0 \notin \hat{Y}_j$ tomaremos:

$$\tilde{Y}_j = \hat{Y}_j \text{ y } \tilde{X}_i = \hat{X}_j.$$

Como resultado tenemos nuevas sucesiones de coaliciones:

$$(\overline{X_1} \cup \overline{Y_1}, \ldots, \overline{X_k} \cup \overline{Y_k}) \qquad \text{y} \qquad (\tilde{X}_1 \cup \tilde{Y}_1 \ldots, \tilde{X}_k \cup \tilde{Y}_k),$$

y estas sucesiones cumplen:

1. $\overline{X_i} \cap \overline{Y_i} = \emptyset$ y $\tilde{X}_i \cap \tilde{Y}_i = \emptyset$ para todo i.
2. $\overline{Y_i} \subset A$ y $\tilde{Y}_i \subset A$ para todo i.
3. $\sum_{i=1}^{k}[\sum_{p \in \overline{Y_i}} f(p)] \leq \sum_{i=1}^{k}[\sum_{p \in \tilde{Y}_i} f(p)]$.

   Esta desigualdad se cumple porque $|\{i : a_0 \in Y_i\}| = |\{i : a_0 \in \hat{Y}_i\}|$, es decir, se está restando la misma cantidad de ambos lados de la desigualdad marcada en la condición 3 en la lista anterior.
4. $|\{i : p \in \overline{X_i}\}| = |\{i : p \in \tilde{X}_i\}|$ para todo $p \in N$.

Además $\bar{X}_i \cup \bar{Y}_i$ es ganadora para todo i pero $\tilde{X}_i \cup \tilde{Y}_i$ es perdedora para todo i, es decir, f no es robusta en comercio para A, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, no se puede tener que

$$|\{i : a_0 \in Y_i\}| = |\{i : a_0 \in \hat{Y}_i\}|.$$

Con esto concluimos que toda falla es falla menor o falla mayor. ∎

Lema 1.19. *Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación y sean $A \subset \mathbf{N}$, $a_0 \in \mathbf{N} \setminus A$, $c \in \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función robusta en comercio para A, $B = A \cup \{a_0\}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ definida como $g = f \cup \{(a_0, c)\}$.*

Se tiene que c es una falla menor si y sólo si, existen sucesiones de coaliciones que muestran que c es falla menor y cumplen $|\{i : a_0 \in \hat{Y}_i\}| = 0$.

Demostración.
Sea c una falla menor, entonces para $k \leq 2^{2^{|\mathbf{N}-B|}-1}$ fijo, existen sucesiones de coaliciones:

$$(X_1 \cup Y_1, \ldots, X_k \cup Y_k) \qquad \text{y} \qquad (\hat{X}_1 \cup \hat{Y}_1, \ldots, \hat{X}_k \cup \hat{Y}_k),$$

que muestran que g no es robusta en comercio para B y además

$$|\{i : a_0 \in Y_i\}| > |\{i : a_0 \in \hat{Y}_i\}|.$$

Es decir, cumplen las cuatro condiciones mencionadas en la Definición 1.16 y además $X_i \cup Y_i$ es ganadora para todo i, mientras que $\hat{X}_i \cup \hat{Y}_i$ es perdedora para todo i.

Sean $m := |\{i : a_0 \in Y_i\}|$ y $r := |\{i : a_0 \in \hat{Y}_i\}|$, se tiene entonces que $m > r$.

Consideremos las $\hat{Y}_i$ tales que $a_0 \in \hat{Y}_i$, y definamos

$$\tilde{Y}_i := \hat{Y}_i \setminus \{a_0\} \qquad \text{y} \qquad \tilde{X}_i := \hat{X}_i \cup \{a_0\},$$

para aquellas coaliciones en las que $a_0 \notin \hat{Y}_i$ definamos

$$\tilde{Y}_i := \hat{Y}_i \qquad \text{y} \qquad \tilde{X}_i = \hat{X}_i.$$

De manera análoga, solamente para r de los conjuntos Y_i tales que $a_0 \in Y_i$ definimos

$$\overline{Y_i} := Y_i \setminus \{a_0\} \qquad \text{y} \qquad \overline{X_i} := X_i \cup \{a_0\},$$

para las demás coaliciones definimos

$$\overline{Y_i} := Y_i \qquad \text{y} \qquad \overline{X_i} = X_i.$$

Con esto obtenemos las sucesiones de coaliciones:

$$(\bar{X}_1 \cup \bar{Y}_1, \ldots, \bar{X}_k \cup \bar{Y}_k) \qquad \text{y} \qquad (\tilde{X}_1 \cup \tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{X}_k \cup \tilde{Y}_k).$$

Para verificar que estas coaliciones sirven para mostrar que c es falla menor veamos que cumplen las cuatro condiciones que tanto hemos mencionado.

1. $\overline{X_i} \cap \overline{Y_i} = \emptyset \qquad$ y $\qquad \tilde{X}_i \cap \tilde{Y}_i = \emptyset \qquad\qquad$ para todo i

   Anteriormente teníamos que $X_i \cap Y_i = \emptyset$ y lo que estamos haciendo es cambiar un elemento de Y_i al X_i correspondiente para algún i. Lo mismo se hace para los conjuntos $\hat{X}_i$ y $\hat{Y}_i$. Entonces podemos concluir que esta condición se cumple.

2. $\overline{Y_i} \subset B$ y $\tilde{Y}_i \subset B \qquad$ para todo i

   Lo que estamos haciendo es quitar un elemento de los conjuntos Y_i o de $\hat{Y}_i$, y estos ya estaban contenidos en B, por lo tanto esta condición también se cumple.

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} [\sum_{p \in \overline{Y_i}} g(p)] \leq \sum_{i=1}^{k} [\sum_{p \in \hat{Y}_i} g(p)]$

Como c es una falla sabemos que $\sum_{i=1}^{k}[\sum_{p\in Y_i} g(p)] \leq \sum_{i=1}^{k}[\sum_{p\in \hat{Y}_i} g(p)]$ y al hacer los cambios descritos lo único que se hace es restar la misma cantidad (rc) de cada lado de la desigualdad, por lo tanto esto se cumple.

4. $|\{i : p \in \overline{X_i}\}| = |\{i : p \in \tilde{X}_i\}|$ para todo $p \in N$
   Las sucesiones de coaliciones originales cumplen $|\{i : p \in X_i\}| = |\{i : p \in \hat{X}_i\}|$ y estamos agregando un elemento al mismo número de $X_i's$ que de $\hat{X}_i{}'s$, por lo tanto, esta condición se cumple.

Observemos que, como las sucesiones de coaliciones siguen siendo las mismas, se tiene que $\overline{X_i} \cup \overline{Y_i}$ es ganadora para toda i y que $\tilde{X}_i \cup \tilde{Y}_i$ es perdedora para toda i. Además los cambios que se hicieron garantizan que $|\{i : a_0 \in \tilde{Y}_i\}| = 0$ como se quería. ■

Lema 1.20. *Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación y sean $A \subset \mathbf{N}$, $a_0 \in \mathbf{N} \setminus A$, $c \in \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función robusta en comercio para A, $B = A \cup \{a_0\}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ definida como $g = f \cup \{(a_0, c)\}$.*

Se tiene que c es falla mayor si y sólo si existen sucesiones que muestran que c es falla mayor tales que $|\{i : a_0 \in Y_i\}| = 0$.

Demostración.
La demostración de este lema sigue la misma idea que el lema anterior. Sea c una falla mayor, entonces para $k \leq 2^{2^{|\mathbf{N}-B|}-1}$ fijo existen sucesiones de coaliciones:

$$(X_1 \cup Y_1, \ldots, X_k \cup Y_k) \qquad \text{y} \qquad (\hat{X}_1 \cup \hat{Y}_1, \ldots, \hat{X}_k \cup \hat{Y}_k),$$

que cumplen las cuatro condiciones señaladas en la Definición 1.16 y que para todo i se tiene que $X_i \cup Y_i$ es ganadora y $\hat{X}_i \cup \hat{Y}_i$ es perdedora. Además se cumple que

$$|\{i : a_0 \in Y_i\}| < |\{i : a_0 \in \hat{Y}_i\}|.$$

Sean $m := |\{i : a_0 \in Y_i\}|$ y $r := |\{i : a_0 \in \hat{Y}_i\}|$, se tiene entonces que $m < r$.

Al igual que antes realizaremos algunos cambios. En esta ocasión quitaremos a_0 de cada Y_i al que pertenece y lo pasaremos a el correspondiente X_i, es decir, definimos las siguientes coaliciones:

$$\overline{Y_i} := Y_i \setminus \{a_0\} \qquad \text{y} \qquad \overline{X_i} := X_i \cup \{a_0\},$$

igual que antes, aquellos Y_i que no contienen a a_0 permanecerán iguales, es decir

$$\overline{Y_i} := Y_i \qquad \text{y} \qquad \overline{X_i} = X_i.$$

Hacemos cambios de manera análoga para m de los $\hat{Y_i}$ con lo que obtenemos las siguientes coaliciones

$$\tilde{Y_i} := \hat{Y_i} \setminus \{a_0\} \qquad \text{y} \qquad \tilde{X_i} := \hat{X_i} \cup \{a_0\},$$

para el resto definimos

$$\tilde{Y_i} := \hat{Y_i} \qquad \text{y} \qquad \tilde{X_i} = \hat{X_i}.$$

Siguiendo las explicaciones dadas en la demostración del lema anterior, podemos notar que las nuevas sucesiones de coaliciones :

$$(\overline{X_1} \cup \overline{Y_1}, \ldots, \overline{X_k} \cup \overline{Y_k}) \qquad \text{y} \qquad (\tilde{X_1} \cup \tilde{Y_1}, \ldots, \tilde{X_k} \cup \tilde{Y_k}).$$

cumplen las cuatro condiciones dadas en la Denifinición 1.16, y como siguen siendo las mismas coaliciones, se sigue cumpliendo que $\overline{X_i} \cup \overline{Y_i}$ es ganadora para todo i y que $\tilde{X_i} \cup \tilde{Y_i}$ es perdedora para todo i.

Además por los cambios que se hicieron al definir $\overline{Y_i}$ se tiene que $|i : a_0 \in \overline{Y_i}| = 0$ como se quería. ■

Lema 1.21. *Si $c \in \mathbb{R}$ es una falla menor y $c' \leq c$ entonces c' también es una falla menor.*

Demostración. Como $c \in \mathbb{R}$ es una falla menor, para $k \leq 2^{2^{|\mathbb{N}-B|-1}}$existen sucesiones de coaliciones $(X_1 \cup Y_1, \ldots, X_k \cup Y_k)$ y $(\hat{X}_1 \cup \hat{Y}_1, \ldots, \hat{X}_k \cup \hat{Y}_k)$ que cumplen:

1. $X_i \cap Y_i = \emptyset$ y $\hat{X}_i \cap \hat{Y}_i = \emptyset$.
2. $Y_i \subset B$ y $\hat{Y}_i \subset B$, donde $B = A \cup \{a_0\}$.
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in Y_i} g(p) \Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in \hat{Y}_i} g(p) \Big)$, donde $g = f \cup \{(a_0, c)\}$.
4. $|\{i : p \in X_i\}| = |\{i : p \in \hat{X}_i\}|$ para todo $p \in \mathbf{N}$.

además $X_i \cup Y_i$ es ganadora para toda i y $\hat{X}_i \cup \hat{Y}_i$ es perdedora para toda i y si $m = |\{i : a_0 \in Y_i\}|$ y $r = |\{i : A_0 \in \hat{Y}_i\}|$ se tiene que $m > r$. Para verificar que c' es falla menor consideremos las mismas sucesiones. Claramente se siguen cumpliendo las condiciones (1),(2) y (4) pues el valor de c no interviene en ninguna de ellas.

Ahora veamos si se cumple también (3). Notemos que

$$\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{n\in Y_i} g(n)\Big) = \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{n\in Y_i\setminus\{a_0\}} f(n)\Big) + mc.$$

De la misma manera se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{n\in \hat{Y}_i} g(n)\Big) = \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{n\in \hat{Y}_i\setminus\{a_0\}} f(n)\Big) + rc.$$

Por la condición 3 tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{n\in Y_i\setminus a_0} f(n)\Big) + mc \leq \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{n\in \hat{Y}_i\setminus a_0} f(n)\Big) + rc,$$

es decir, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{n\in Y_i\setminus a_0} f(n)\Big) + (m-r)c \leq \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{n\in \hat{Y}_i\setminus a_0} f(n)\Big).$$

Sabemos que $c' \leq c$, con esto se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{n\in Y_i\setminus a_0} f(n)\Big) + (m-r)c' \leq \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{n\in Y_i\setminus a_0} f(n)\Big) + (m-r)c.$$

Por consecuencia tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{n\in Y_i\setminus a_0} f(n)\Big) + (m-n)c' \leq \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{n\in \hat{Y}_i\setminus a_0} f(n)\Big),$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{p\in Y_i} g'(p)\Big) \leq \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{p\in \hat{Y}_i} g'(p)\Big), \qquad \text{donde } g' = f\cup\{(a_0,c')\}.$$

Dado que son las mismas sucesiones, se tiene que $X_i \cup Y_i$ es ganadora para toda i pero $\hat{X}_i \cup \hat{Y}_i$ es perdedora para toda i, además $|\{i : a_0 \in Y_i\}| > |\{i : a_0 \in \hat{Y}_i\}|$. Es decir c' es falla menor. ■

Lema 1.22. *Si $c \in \mathbb{R}$ es una falla mayor y $c'' \geq c$ entonces c'' también es una falla mayor.*

Demostración.

Como $c \in \mathbb{R}$ es una falla mayor, para $k \leq 2^{2^{|\mathbb{N}-B|-1}}$ existen sucesiones de coaliciones $(X_1 \cup Y_1, \ldots, X_k \cup Y_k)$ y $(\hat{X}_1 \cup \hat{Y}_1, \ldots, \hat{X}_k \cup \hat{Y}_k)$ que cumplen las cuatro condiciones mencionadas en la demostración anterior y $X_i \cup Y_i$ es ganadora para todo i mientras que $\hat{X}_i \cup \hat{Y}_i$ es perdedora para todo i.

Además $m < r$, donde $m = |\{i : a_0 \in Y_i\}|$ y $r = |\{i : A_0 \in \hat{Y}_i\}|$. Al igual que antes consideremos las mismas sucesiones.

Que las condiciones (1),(2) y (4) se siguen cumpliendo es claro, pues el valor de c no se usa en ninguna de ellas. Veamos entonces que la tercera condición también se cumple.

Notemos que

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n \in Y_i} g(n) \Big) = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n \in Y_i \backslash a_0} f(n) \Big) + mc,$$

de la misma manera

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n \in \hat{Y}_i} g(n) \Big) = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n \in \hat{Y}_i \backslash a_0} f(n) \Big) + rc.$$

Al igual que en el lema anterior

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n \in Y_i \backslash a_0} f(n) \Big) + mc \leq \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n \in \hat{Y}_i \backslash a_0} f(n) \Big) + rc.$$

Por lo tanto, como $m < r$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n \in Y_i \backslash a_0} f(n) \Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n \in \hat{Y}_i \backslash a_0} f(n) \Big) + (r-m)c.$$

Por hipótesis sabemos que $c'' > c$, de ahí que

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n \in Y_i \backslash a_0} f(n) \Big) + (r-m)c \leq \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n \in Y_i \backslash a_0} f(n) \Big) + (r-m)c''.$$

Como antes, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n \in Y_i \backslash a_0} f(n) \Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n \in \hat{Y}_i \backslash a_0} f(n) \Big) + (r-m)c'',$$

dicho de otra forma,

$$\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{p\in Y_i} g''(p)\Big) \leq \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{p\in \hat{Y}_i} g''(p)\Big) \qquad \text{donde } g''=f\cup\{(a_0,c'')\}.$$

Se tiene además que para todo i $X_i \cup Y_i$ es ganadora y $\hat{X}_i \cup \hat{Y}_i$ es perdedora. Además se cumple que: $|\{i : a_0 \in Y_i\}| < |\{i : a_0 \in \hat{Y}_i\}|$. En conclusión c'' es falla mayor. ■

Lema 1.23. *Ninguna falla puede ser mayor y menor al mismo tiempo.*

Demostración. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación y sean $A \subset \mathbf{N}$, $a_0 \in \mathbf{N} \setminus A$, $c \in \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función robusta en comercio para A, $B = A \cup \{a_0\}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ definida como $g = f \cup \{(a_0, c)\}$.

Sea c una falla, supongamos que ésta es menor y mayor al mismo tiempo.

Como c es falla mayor, para $k \leq 2^{2^{|\mathbf{N}-B|}-1}$ fijo existen sucesiones de coaliciones:

$$(X_1 \cup Y_1, \ldots, X_k \cup Y_k) \qquad \text{y} \qquad (\hat{X}_1 \cup \hat{Y}_1, \ldots, \hat{X}_k \cup \hat{Y}_k)$$

que cumplen las cuatro condiciones dadas en la Definición 1.16 en las que $X_i \cup Y_i$ es ganadora para todo i y $\hat{X}_i \cup \hat{Y}_i$ es perdedora para toda i. Por el Lema 1.19 podemos garantizar que estas sucesiones también cumplen $|\{i : a_0 \in Y_i\}| = 0$.

Como c es también falla menor, para $l \leq 2^{2^{|\mathbf{N}-B|}-1}$ fijo existen sucesiones de coaliciones:

$$(U_1 \cup W_1, \ldots, U_l \cup W_l) \qquad \text{y} \qquad (\hat{U}_1 \cup \hat{W}_1, \ldots, \hat{U}_l \cup \hat{W}_l)$$

que cumplen las cuatro condiciones antes mencionadas en las que $U_i \cup W_i$ es ganadora y $\hat{U}_i \cup \hat{W}_i$ es perdedora, esto para todo i. Además estas sucesiones de coaliciones cumplen $|\{i : a_0 \in \hat{W}_i\}| = 0$ (por el Lema 1.20).

Definamos ahora $m := |\{i : a_0 \in \hat{Y}_i\}|$ y $r := |\{i : a_0 \in W_i\}|$. Notemos que $m \leq 2^{2^{|\mathbf{N}-B|}-1}$ y $r \leq 2^{2^{|\mathbf{N}-B|}-1}$.

Tomemos cada $X_i \cup Y_i$ y repitámosla r veces. Análogamente, tomemos cada $U_i \cup W_i$ y repitámosla m veces. Juntando todas las coaliciones en una misma sucesión obtenemos $(S_1 \cup T_1, \ldots, S_p \cup T_p)$, donde $p = rk + ml$.

Hagamos lo mismo para cada $\hat{X}_i \cup \hat{Y}_i$ y $\hat{U}_i \cup \hat{W}_i$ obteniendo $(\hat{S}_1 \cup \hat{T}_1, \ldots, \hat{S}_p \cup \hat{T}_p)$. Igual que antes, $p = rk + lm$.

Como resultado tenemos las siguientes sucesiones de coaliciones:

$$(S_1 \cup T_1, \ldots, S_p \cup T_p) \qquad \text{y} \qquad (\hat{S}_1 \cup \hat{T}_1, \ldots, \hat{S}_p \cup \hat{T}_p).$$

En donde $p \leq 2(2^{2^{|N-B|}-1})^2$.

Haciendo algunas operaciones es fácil demostrar que $2(2^{2^{|N-B|}-1})^2 = 2^{2^{|N-A|}-1}$.

Es decir, para $p \leq 2^{2^{|N-A|}-1}$ fijo tenemos sucesiones de coaliciones

$$(S_1 \cup T_1, \ldots, S_p \cup T_p) \qquad \text{y} \qquad (\hat{S}_1 \cup \hat{T}_1, \ldots, \hat{S}_p \cup \hat{T}_p).$$

que cumplen las cuatro condiciones mencionadas en la Definición 1.16 y en las que se cumple la igualdad:

$$|\{i : a_0 \in T_i\}| = |i : a_0 \in \hat{T}_i| = mr.$$

Lo que haremos a continuación será cambiar a_0 de cada T_i al que pertenece al S_i correspondiente. Es decir, para T_i tal que $a_0 \in T_i$ definamos $\overline{T_i} = T_i \setminus \{a_0\}$ y para este mismo i definamos $\overline{S_i} = S_i \cup \{a_0\}$. Para T_i tal que $a_0 \notin T_i$ definimos $\overline{T_i} = T_i$ y $\overline{S_i} = S_i$.

Se hace lo mismo con $\hat{T}_i \cup \hat{S}_i$ obteniendo ahora $\tilde{T}_i \cup \tilde{S}_i$. En conclusión, ahora tenemos sucesiones de coaliciones:

$$(\overline{S_1} \cup \overline{T_1}, \ldots, \overline{S_p} \cup \overline{T_p}) \qquad \text{y} \qquad (\tilde{S}_1 \cup \tilde{T}_1, \ldots, \tilde{S}_p \cup \tilde{T}_p).$$

Ahora verificaremos que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\bar{S}_i \cap \bar{T}_i = \emptyset$ y $\tilde{S}_i \cap \tilde{T}_i = \emptyset$ para todo i.
2. $\bar{T}_i \subset A$ y $\tilde{T}_i \subset A$ para todo i.
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n \in \bar{T}_i} f(n) \Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n \in \tilde{T}_i} f(n) \Big).$
4. $|\{i : p \in \bar{S}_i\}| = |\{i : p \in \tilde{S}_i\}|$ para todo $p \in N$.

Que (1) y (2) se cumplen es fácil de observar, ahora veamos que se cumple (3).

Notemos que

$$\sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{x\in T_i} g(x)\Big) = r\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{x\in Y_i} g(x)\Big) + m\sum_{i=1}^{l}\Big(\sum_{x\in W_i} g(x)\Big),$$

análogamente

$$\sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{x\in \hat{T}_i} g(x)\Big) = r\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{x\in \hat{Y}_i} g(x)\Big) + m\sum_{i=1}^{l}\Big(\sum_{x\in \hat{W}_i} g(x)\Big).$$

Recordemos que las sucesiones de coaliciones cumplen

$$\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{x\in Y_i} g(x)\Big) \leq \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{x\in \hat{Y}_i} g(x)\Big) \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{l}\Big(\sum_{x\in W_i} g(x)\Big) \leq \sum_{i=1}^{l}\Big(\sum_{x\in \hat{W}_i} g(x)\Big),$$

por lo tanto tenemos que

$$r\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{x\in Y_i} g(x)\Big) + m\sum_{i=1}^{l}\Big(\sum_{x\in W_i} g(x)\Big) \leq r\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{x\in \hat{Y}_i} g(x)\Big) + m\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{x\in \hat{W}_i} g(x)\Big).$$

Lo que es lo mismo

$$\sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{x\in T_i} g(x)\Big) \leq \sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{x\in \hat{T}_i} g(x)\Big).$$

Tambíen es fácil ver que

$$\sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{x\in \overline{T_i}} g(x)\Big) = \sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{x\in T_i} g(x)\Big) - mrc,$$

igualmente veamos que

$$\sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{x\in \tilde{T}_i} g(x)\Big) = \sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{x\in \hat{T}_i} g(x)\Big) - mrc.$$

De esto se obtiene que

$$\sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{x\in \overline{T_i}} g(x)\Big) \leq \sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{x\in \tilde{T}_i} g(x)\Big).$$

Los cambios que hicimos antes garantizan que a_0 no se encuentra en ninguno de los $\overline{T_i}'s$ ni en los $\tilde{T}_i's$. Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{x\in\overline{T_i}} g(x)\Big)=\sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{x\in\overline{T_i}} f(x)\Big) \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{x\in\tilde{T}_i} g(x)\Big)=\sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{x\in\tilde{T}_i} f(x)\Big).$$

Así concluimos que la condición 3 se sumple. Ahora veamos que la condición número 4 también se cumple.

Notemos que para todo x en $\mathbf{N}$ se tiene que:

$$|\{i : x \in S_i\}| = r|\{i : x \in X_i\}| + m|\{i : x \in U_i\}|,$$

análogamente se tiene la siguiente igualdad:

$$|\{i : x \in \hat{S}_i\}| = r|\{i : x \in \hat{X}_i\}| + m|\{i : x \in \hat{U}_i\}|.$$

Además, las sucesiones de coaliciones cumplen:

$$|\{i : x \in X_i\}| = |\{i : x \in \hat{X}_i\}|, \qquad \text{y} \qquad |\{i : x \in U_i\}| = |\{i : x \in \hat{U}_i\}|.$$

Por lo tanto es cierto que para todo elemento de $\mathbf{N}$ se tiene la igualdad:

$$|\{i : x \in S_i\}| = |\{i : x \in \hat{S}_i\}|.$$

Y como hemos mencionado antes, estamos agregando el elemento a_0 a rm de las $S_i's$ obteniendo las $\overline{S_i}'s$, igualmente, estamos agregando el mismo elemento, el mismo número de veces a las $\hat{S}_i{}'s$ con lo que obtenemos las $\tilde{S}_i{}'s$. En conclusión la cuarta condición se cumple.

Por hipótesis sabemos que c es una falla, por lo tanto $X_i \cup Y_i$ es ganadora para toda i pero $\hat{X}_i \cup \hat{Y}_i$ es perdedora para toda i. De la misma manera $U_i \cup W_i$ es ganadora para toda i pero $\hat{U}_i \cup \hat{W}_i$ es perdedora para toda i.

Como las $\overline{S_i} \cup \overline{T_i}'s$ y las $\tilde{S}_i \cup \tilde{T}_i{}'s$ son repeticiones de las coaliciones mencionadas en el párrafo anterior se tiene que $\overline{S_i} \cup \overline{T_i}$ es ganadora para toda i pero que $\tilde{S}_i \cup \tilde{T}_i$ es perdedora para toda i.

Es decir, se siguen cumpliendo las cuatro condiciones de la definición 1.11 y además $\bar{S}_i \cup \bar{T}_i$ es ganadora para todo i y $\tilde{S}_i \cup \tilde{T}_i$ es perdedora para todo i, por lo tanto f no es robusta en comercio para A lo cual contradice la hipótesis. En conclusión la falla no puede ser mayor y menor al mismo tiempo. ∎

Lema 1.24. *Sea* $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ *un sistema de votación y sean* $A \subset \mathbf{N}$, $a_0 \in \mathbf{N} \setminus A$, $c \in \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ *una función robusta en comercio para* A, $B = A \cup \{a_0\}$ *y* $g : B \to \mathbb{R}$ *definida como* $g = f \cup \{(a_0, c)\}$.

Si $c = 2(2^{2^{|N|}}) \sum_{p \in A} |f(p)|$ *y* $c' > c$, *entonces* c' *no es falla menor. Si* $c'' < -c$ *entonces* c'' *no es una falla mayor.*

Demostración.
Supongamos que $c' > 2(2^{2^{|N|}}) \sum_{p \in A} |f(p)|$ y además c' es una falla menor. Es decir, para $k \leq 2^{2^{|\mathbf{N}-B|-1}}$existen sucesiones de coaliciones:

$$(X_1 \cup Y_1, \ldots, X_k \cup Y_k) \qquad \text{y} \qquad (\hat{X}_1 \cup \hat{Y}_1, \ldots, \hat{X}_k \cup \hat{Y}_k)$$

que cumplen las siguientes condiciones:

1. $X_i \cap Y_i = \emptyset$ y $\hat{X}_i \cap \hat{Y}_i = \emptyset$.
2. $Y_i \subset B$ y $\hat{Y}_i \subset B$.
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in Y_i} g(p) \Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in \hat{Y}_i} g(p) \Big)$.
4. $|\{i : p \in X_i\}| = |\{i : p \in \hat{X}_i\}|$ para todo $p \in \mathbf{N}$.

Estas sucesiones cumplen que $X_i \cup Y_i$ es ganadora para todo i, pero $\hat{X}_i \cup \hat{Y}_i$ es perdedora para todo i.

Además, por el Lema 1.19 éstas se pueden escoger de modo que $|\{i : a_0 \in \hat{Y}_i\}| = 0$. Definimos $m = |\{i : a_0 \in Y_i\}|$.

Observemos que

$$c' - \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in Y_i} g(p) \Big) = c' - \Big(\sum_{i=1}^{k} \big(\sum_{p \in Y_i \setminus \{a_0\}} f(p) \big) + mc' \Big) = (1-m)c' - \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in Y_i \setminus \{a_0\}} f(p) \Big),$$

además sabemos que $1 - m \leq 0$. Por lo tanto,

$$c' - \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in Y_i} g(p) \Big) \leq - \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in Y_i \setminus \{a_0\}} f(p) \Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in Y_i \setminus \{a_0\}} |f(p)| \Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in A} |f(p)| \Big).$$

Esta última desigualdad se cumple porque $Y_i \setminus \{a_0\} \subseteq A$.

Claramente $\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in A} |f(p)| \Big) = k \sum_{p \in A} |f(p)|$ y como $k \leq 2^{2^{|N|}}$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in A} |f(p)| \Big) = k \sum_{p \in A} |f(p)| \leq 2^{2^{|N|}} \sum_{p \in A} |f(p)|.$$

Es decir,

$$c' - \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in Y_i} g(p) \Big) \leq 2^{2^{\mathbf{N}}} \sum_{p \in A} |f(p)|.$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in Y_i} g(p) \Big) \geq c' - 2^{2^{|N|}} \sum_{p \in A} |f(p)| > c - 2^{2^{|N|}} \sum_{p \in A} |f(p)|.$$

Sustituyendo el valor de c se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in Y_i} g(p) \Big) > 2(2^{2^{|N|}}) \sum_{p \in A} |f(p)| - 2^{2^{|N|}} \sum_{p \in A} |f(p)| = 2^{2^{|N|}} \sum_{p \in A} |f(p)|.$$

Es fácil ver que $2^{2^{|\mathbf{N}|}} \geq 2^{2^{|\mathbf{N}-B|-1}} \geq k$. De aquí que

$$2^{2^{|N|}} \sum_{p \in A} |f(p)| \geq k \sum_{p \in A} |f(p)| = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in A} |f(p)| \Big) \geq \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in A} f(p) \Big).$$

Como sabemos que para todo i se tiene que $\hat{Y}_i \subset A$ entonces

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in A} f(p) \Big) \geq \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in \hat{Y}_i} f(p) \Big).$$

Al principio de la demostración mencionamos que $|\{i : a_0 \in \hat{Y}_i\}| = 0$, por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in \hat{Y}_i} f(p) \Big) = \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{p \in \hat{Y}_i} g(p) \Big).$$

En conclusión,

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n \in Y_i} g(n) \Big) > \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{n \in \hat{Y}_i} g(n) \Big),$$

contradiciendo la condición número 3. Por lo tanto c' no es falla menor.

La prueba para c'' es análoga. ■

Lema 1.25. *Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación y sea f una función robusta en comercio para A, donde $A \subset \mathbf{N}$. Sean $D = \{d \in \mathbb{R} |\ d$ es una falla menor$\}$ y $E = \{e \in \mathbb{R} |\ e$ es una falla mayor$\}$, entonces D está acotado superiormente y E está acotado inferiormente.*

Demostración. Por el lema anterior sabemos que para todo $d \in D$ se tiene que

$$d \leq 2(2^{2^{\mathbf{N}}}) \sum_{p \in A} |f(p)|.$$

Por lo tanto, D está acotado por arriba, pues $2(2^{2^{\mathbf{N}}}) \sum_{p \in A} |f(p)|$ es una cota superior para este conjunto.

Por otra parte, también por el Lema 1.24 sabemos que, para todo $e \in E$ se tiene que

$$e > -2(2^{2^{\mathbf{N}}}) \sum_{p \in A} |f(p)|.$$

Es decir, $-2(2^{2^{\mathbf{N}}}) \sum_{p \in A} |f(p)|$ es una cota inferior para el conjunto E. ■

Lema 1.26. *Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación y sean $A \subset \mathbf{N}$, $a_0 \in \mathbf{N} \setminus A$, $c \in \mathbb{R}$, $c' \in \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función robusta en comercio para A. Sean $B = A \cup \{a_0\}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ definida como $g = f \cup \{(a_0, c)\}$. Si c es el supremo de las fallas menores, entonces es falla menor. Si c es el ínfimo de las fallas mayores, entonces es falla mayor.*

Demostración.
Por el Lema 1.24 el supremo del conjunto $D = \{d \in \mathbb{R} |$ d es una falla menor$\}$ existe, sea $c := \sup D$. Podemos encontrar una sucesión creciente de fallas menores que converge a c. Sea $\{c_1, c_2, c_3, \ldots\}$ esta sucesión.

Podemos suponer que esta sucesión tiene una cantidad infinita de elementos distintos, pues si fuera una cantidad finita el problema está resuelto.

Sea j fijo, para cada c_j existe $k_j \leq 2^{2^{|\mathbf{N}-B|-1}}$ fijo tal que existen sucesiones de coaliciones:

$$(X_{1j} \cup Y_{1j}, \ldots, X_{kj} \cup Y_{k_j j}) \text{ y } (\hat{X_{1j}} \cup \hat{Y_{1j}}, \ldots, \hat{X_{kj}} \cup \hat{Y_{k_j j}})$$

que cumplen:

1. $X_{ij} \cap Y_{ij} = \emptyset$ y $\hat{X_{ij}} \cap \hat{Y_{ij}} = \emptyset$ para todo i.
2. $Y_{ij} \subset B$ y $\hat{Y_{ij}} \subset B$ para todo i.
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k_j} \Big(\sum_{n \in Y_{ij}} g_j(n) \Big) \leq \sum_{i=1}^{k_j} \Big(\sum_{n \in \hat{Y_{ij}}} g_j(n) \Big)$ donde $g_j = f \cup \{(a_0, c_j)\}$.
4. $|\{i : p \in X_{ij}\}| = |\{i : p \in \hat{X_{ij}}\}|$ para todo $p \in \mathbf{N}$.

Estas sucesiones son tales que $X_{ij} \cup Y_{ij}$ es ganadora para todo i y $\hat{X_{ij}} \cup \hat{Y_{ij}}$ es perdedora para todo i.

Como c_j es falla menor también es cierto que $|\{i : a_0 \in Y_{ij}\}| > |\{i : a_0 \in \hat{Y_{ij}}\}|$ para todo j.

Observemos que hay al menos una pareja de sucesiones de coaliciones que sirven para mostrar que c_j es una falla menor para una cantidad infinita de j. A continuación veremos porqué esto es cierto.

Supongamos que no es así, es decir, que cada pareja de sucesiones únicamente sirve para mostrar que una cantidad finita de c_j es falla menor. Dado que se tiene una cantidad infinita de fallas menores, esto implica que se tiene una cantidad infinita de sucesiones de coaliciones distintas.

Sin embargo, tener un número infinito de sucesiones de coaliciones distintas implica que se tiene una cantidad infinita de votantes, siendo que $|\mathbf{N}|$ es finito.

Sean $(S_1 \cup T_1, \ldots, S_k \cup T_k)$ y $(\hat{S}_1 \cup \hat{T}_1, \ldots, \hat{S}_k \cup \hat{T}_k)$ las sucesiones de coaliciones que sirven para probar que una cantidad infinita de c_j son fallas menores (notemos que aquí el k ya no depende de j pues son las mismas sucesiones para una cantidad infinita de c_j). Además, sea $\{\overline{c_j}\}$ una subsucesión formada por dichas fallas menores.

Es decir, para $k \leq 2^{2^{|\mathbf{N}-B|}-1}$ fijo existen sucesiones de coaliciones:

$$(S_1 \cup T_1, \ldots, S_k \cup T_k) \qquad \text{y} \qquad (\hat{S}_1 \cup \hat{T}_1, \ldots, \hat{S}_k \cup \hat{T}_k)$$

que cumplen:

1. $S_i \cap T_i = \emptyset$ y $\hat{S}_i \cap \hat{T}_i = \emptyset$ para todo i

2. $T_i \subset B$ y $\hat{T}_i \subset B$ para todo i

3. $\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{n\in T_i} g(n)\Big) \le \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{n\in \hat{T}_i} g(n)\Big)$

4. $|\{i : p \in S_i\}| = |\{i : p \in \hat{S}_i\}|$ para todo $p \in \mathbf{N}$

Además para todo i se tiene que $S_i \cup T_i$ es ganadora, pero $\hat{S}_i \cup \hat{T}_i$ es perdedora para todo i.

Que las condiciones $(1), (2)$ y (4) se cumplen es claro, pues el valor que asigna la función no aparece en ninguna de ellas.

Nos interesa ver que la condición tres de la lista anterior también se cumple. Veamos que es así, sabemos que para todo j se cumple que

$$\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{p\in T_i} g_j(p)\Big) \le \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{p\in \hat{T}_i} g_j(p)\Big) \qquad \text{donde } g_j = f \cup \{(a_0, \overline{c_j})\}$$

$\{\overline{c_j}\}$ es una subsucesión de $\{c_j\}$, y c_j converge a c. Tomemos los límites en la desigualdad anterior con lo que obtenemos

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{p\in T_i} g_j(p)\Big) \le \lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{p\in \hat{T}_i} g_j(p)\Big).$$

Es fácil notar que

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{p\in T_i} g_j(p)\Big) = \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{p\in T_i} g(p)\Big),$$

análogamente se tiene que

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{p\in \hat{T}_i} g_j(p)\Big) = \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{p\in \hat{T}_i} g(p)\Big),$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{p\in T_i} g(p)\Big) \le \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{p\in \hat{T}_i} g(p)\Big).$$

En conclusión se cumple la condición (3) tal como queríamos. Con esto queda demostrado que $c = \sup D$ es una falla menor.

La demostración para c' es análoga. ■

Con estos lemas al fin es posible demostrar el Teorema 1.15. Aquí está otra vez el enunciado.

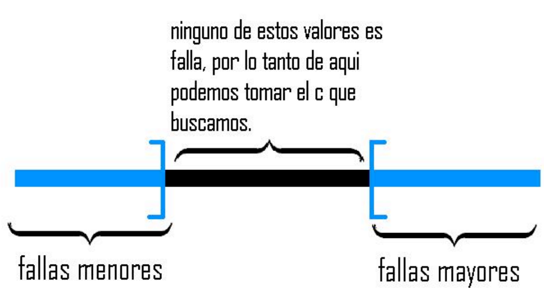
Teorema 1.15. *Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación, $A \subseteq \mathbf{N}$ y f una función robusta en comercio para A. Supongamos que $a_0 \in \mathbf{N} \setminus A$. Entonces, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g := f \cup \{(a_0, c)\}$ es robusta en comercio para $B := A \cup \{a_0\}$*

Demostración.
Por el Lema 1.21 tenemos que el conjunto de las fallas menores es un intervalo. Además, por el Lema 1.26 este intervalo es cerrado por arriba. De la misma manera, por el Lema 1.22 el conjunto de las fallas mayores es un intervalo. Por el Lema 1.26 éste es cerrado por abajo.

Además, por el Lema 1.23 sabemos que ninguna falla es mayor y menor al mismo tiempo, por lo tanto, se tiene que entre el supremo de las fallas menores y el ínfimo de las fallas mayores existe un intervalo no vacío de valores que no son fallas.

Entonces, de este intervalo podemos tomar $c \in \mathbb{R}$ tal que $g := f \cup \{(a_0, c)\}$ es robusta en comercio para B.

La siguiente figura nos ayudará a comprender lo escrito en las líneas anteriores.



En conclusión, hemos demostrado que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g := f \cup \{(a_0, c)\}$ es robusta en comercio para $B := A \cup \{a_0\}$, como se quería. ■

1.3

Sistemas de pesos vectoriales.

El teorema anterior nos da una manera práctica para saber cuando un sistema es de peso.

Uno de los ejemplos que vimos en la sección anterior fue el sistema para una enmienda en la constitución canadiense, y demostramos que este sistema no es de peso. Sin embargo, observando con un poco de atención este sistema uno puede notar que este sistema se puede construir a partir de dos sistemas de votación que sí son de peso. Veamos como hacerlo.

Afirmación. *El sistema de enmienda de la constitución canadiense puede ser construido como la intersección de dos sistemas de votación de peso.*

Demostración. Consideremos los siguientes sistemas de votación:

1. $G_1 = (\mathbf{N}, \mathbf{W_1})$ donde $\mathbf{N}$ son las diez provincias y $\mathbf{W_1} = \{X \subseteq \mathbf{N} : |X| \geqslant 7\}$
2. $G_2 = (\mathbf{N}, \mathbf{W_2})$ donde $\mathbf{N}$ son las provincias y $\mathbf{W_2} = \{X \subseteq \mathbf{N} : \sum_{r \in X} p(r) \geqslant 50\}$ donde $p(r)$ es el porcentaje de población que tiene cada provincia.

Es fácil verificar que cada uno de estos es un sistema de peso. Veamos primero para G_1. Sea $q_1 := 7$, además consideremos la función $w_1 : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ definida como $w_1(v) = 1$ para todo $v \in \mathbf{N}$. Claramente se tiene que $X \in \mathbf{W_1} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} w_1(v) \geq q_1$.

Análogamente, para G_2 consideremos $q_2 = 50$ y sea $w_2 : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ definida como $w_2(v) = p(v)$ donde, como hemos mencionado antes, $p(v)$ es el porcentaje de población con el que cuenta la provincia v. Es fácil ver que $X \in \mathbf{W_2} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} w_2(v) \geq q_2$.

Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ el sistema de enmienda de la constitución canadiense. Sabemos que $\mathbf{N}$ son las diez provincias y que $\mathbf{W}$ son las coaliciones que contienen 7 provincias o más y que reunen al menos al 50 % de la población.

Es decir se tiene que $\mathbf{W} = \mathbf{W_1} \cap \mathbf{W_2}$. Claramente el conjunto de votantes es el mismo en los tres sistemas. ∎

Parece entonces natural preguntarnos si lo que hemos logrado con este sistema se puede lograr con cualquier sistema de votación. Es decir, la pregunta que surge ahora es: ¿será cierto que todo sistema de votación se puede construir mediante sistemas de votación de peso? La respuesta es afirmativa y es justamente el contenido del siguiente lema.

Lema 1.27. *Sea* $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ *un sistema de votación sí-no donde* $\mathbf{N}$ *es el conjunto de votantes. Sea* p *el número de coaliciones perdedoras de este sistema de votación. Entonces es posible encontrar* p *sistemas de peso* $G_1 = (\mathbf{N}, \mathbf{W}_1), G_2 = (\mathbf{N}, \mathbf{W}_2), \ldots, G_p = (\mathbf{N}, \mathbf{W}_p)$*, tales que* $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 \cap \ldots \cap \mathbf{W}_p$*.*

Demostración. Sea $L_i \subseteq G$ una coalición perdedora. Definamos el sistema de peso G_i de la siguiente manera:

Sea $q_i := 1 - |L_i|$ y los pesos asignados por la función

$$w_i(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \in L_i, \\ 1, & \text{si } x \notin L_i, \end{cases}$$

donde $X \in \mathbf{W}_i \Leftrightarrow \sum_{x \in X} w_i(x) \geqslant q_i$.

Afirmación. *En el sistema de votación* $G_i = (\mathbf{N}, \mathbf{W_i})$ *las únicas coaliciones perdedoras son* $\emptyset$ *y* L_i

Veamos por qué esta afirmación es cierta.

Sea $X \subseteq \mathbf{N}, X \neq \emptyset$ tal que $X \neq L_i$. Tenemos dos casos:

1. $X \cap L_i = \emptyset$. En este caso tenemos que

$$\sum_{u \in X} w_i(u) = |X| \geq 1 \geq q_i,$$

   es decir, $X \in \mathbf{W_i}$.

2. $X \cap L_i \neq \emptyset$. Aquí tenemos dos opciones:

   a) $X \subseteq L_i$. Por hipótesis sabemos que $X \neq L_i$, de aquí que $|L_i \setminus X| \geq 1$, por lo tanto $-|X| \geq 1 - |L_i|$. Por lo tanto

$$\sum_{v \in X} w_i(v) = -|X| \geq -|L_i| + 1 = q,$$

   es decir, $X \in \mathbf{W_i}$.

b) $X \nsubseteq L_i$. Sea $Y = X \cap L_i$. Claramente $Y \neq X$, pues $X \nsubseteq L_i$, de aquí que $|X \setminus Y| \geq 1$ y $|Y| \leq| L_i|$. De aquí que

$$\sum_{v \in X} w_i(v) = |X \setminus Y| -| Y| \geq 1 - |L_i| = q.$$

En este caso $X \in \mathbf{W_i}$.

En cualquiera de los casos se tiene $X \in \mathbf{W_i}$ como se quería.

Queda demostrado que L_i es la única coalición perdedora en este sistema, es decir, $X \in \mathbf{W}_1$ para todo $X \neq L_1, X \subseteq N$.

Veamos entonces que el sistema de votación se puede describir como la intersección de estos sistemas de peso, es decir, se tiene que $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 \cap \ldots \cap \mathbf{W}_p$.

Sea $X \in \mathbf{W}$, tenemos entonces que $X \neq \emptyset$. Notemos que para todo i se tiene $X \in \mathbf{W_i}$, pues las únicas coaliciones perdedoras en el sistema G_i son $\emptyset$ y L_i y X no es ninguna de estas coaliciones (de lo contrario no pertenecería a $\mathbf{W}$). Es decir $X \in \bigcap_{i=1}^{p} \mathbf{W}_i$. En conclusión $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{W}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{W}_p$.

Si $X \in \mathbf{W}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{W}_p$ tenemos que para todo i $X \in \mathbf{W}_i$, lo que implica $X \neq \emptyset$ y $X \neq L_i$. Dicho de otra forma, X no es ninguna de las coaliciones perdedoras de G, lo que es lo mismo $X \in \mathbf{W}$, con lo que concluimos que $\mathbf{W}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{W}_p \subseteq \mathbf{W}$.

De los dos párrafos anteriores se tiene $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{W}_p$ ∎

Con este lema hemos probado que se puede encontrar una manera de representar todos los sistemas de votación sí-no utilizando sistemas de votación de peso. Sin embargo, nada nos garantiza que la manera que hemos encontrado de hacerlo sea la mejor. Por ejemplo, en el sistema de enmienda de la constitución canadiense hay muchas coaliciones perdedoras y para describir este sistema como la intersección de sistemas de peso sólo fueron necesarios dos.

En busca de ser eficientes en este sentido surge la siguiente definición.

Definición 1.28. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación sí-no. Decimos que este sistema tiene *dimensión* k si y sólo si este sistema puede representarse como la intersección de exactamente k sistemas de peso, pero no de $k-1$ sistemas de peso.

Anteriormente nos interesaba saber si era cierto que todos los sistemas de votación eran sistemas de peso. La idea principal de la sección anterior fue mostrar que no es así, y además se encontró una manera de caracterizar a los sistemas que sí son de peso.

Probablemente haya alguna manera de generalizar este concepto, que nos permita encontrar alguna propiedad que si se cumpla para todo sistema de votación. Que pasa si en lugar de considerar el peso de los votantes como un número real lo consideramos como un vector, y lo mismo para q. Entonces surge la siguiente definición

Definición 1.29. Un sistema de votación $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ es *de peso vectorial* si para algún entero n existe una función $w : \mathbf{N} \to \mathbb{R}^n$ y $q \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{x \in X} w(x) \geq q,$$

en donde la comparación se hace de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq (y_i, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_i \geq y_i \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Notemos entonces que el sistema de enmienda de la constitución canadiense, a pesar de no ser un sistema de peso, sí es un sistema de peso vectorial, pues si tomamos $q \in \mathbb{R}^2$ definido como $q = (7, 50)$ y $w : \mathbf{N} \Leftrightarrow \mathbb{R}^2$ definido como $w(v) = (w_1(v), w_2(v))$ donde w_1, w_2 son las mismas que en la Afirmación 1.3 entonces tenemos que

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} w(v) \geq q.$$

Probablemente esta definición nos de lo que estabamos buscando, una propiedad que se cumpla para todos los sistemas de votación. Además podriamos preguntarnos: ¿será que la dimensión del sistema determina cuántos elementos debe tener el vector asociado a los pesos y al umbral? Es justamente eso lo que nos dice el siguiente teorema:

Teorema 1.30. *Todo sistema de votación sí-no es de pesos vectoriales. Además, si el sistema es de dimensión d los pesos y el umbral se pueden tomar como d-adas de números, pero no como $(d-1)$-adas.*

Ahora que hemos definido lo que es la dimensión de un sistema de votación lo único que haremos en la siguiente demostración es juntar todos los pesos que son números reales en un vector y hacer lo mismo para el umbral, posteriormente verificaremos que con este peso y este umbral el sistema es vector pesado.

Demostración.

Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación. Sabemos por el Lema 1.27 que este sistema puede describirse como la intersección de algunos sistemas de votación de peso.

Sea d la dimensión de este sistema, por la Definición 1.28 existen d sistemas de votación de peso tales que G se puede describir como la intersección de ellos, pero no se puede describir como la intersección de $d-1$ sistemas.

Sean $G_1 = (\mathbf{N}, \mathbf{W_1}), \ldots, G_d = (\mathbf{N}, \mathbf{W_d})$ tales que el sistema S se puede escribir como la intersección de estos sistemas. Es decir

$$\mathbf{W} = \mathbf{W_1} \cap \mathbf{W_2} \cap \ldots \cap \mathbf{W_d}.$$

Esto quiere decir que

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow X \in \mathbf{W_1} \cap \mathbf{W_2} \cap \ldots \cap \mathbf{W_d}.$$

Cada sistema G_i es de peso. Si el peso asignado a los votantes en cada sistema está dado por la función: $w_i : \mathbf{N} \Rightarrow \mathbb{R}$ y el umbral correspondiente es q_i, entonces tenemos que

$$X \in \mathbf{W_i} \Leftrightarrow \sum_{x \in X} w_i(x) \geq q_i \quad \text{para todo } i,$$

dicho de otra manera

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{x \in X} w_i(x) \geq q_i \text{ para toda } i = 1, 2, \ldots, d.$$

Definamos entonces el peso (en vector) para cada votante con la función $w : \mathbf{N} \to \mathbb{R}^d$ definida de la siguiente manera

$$w(x) = (w_1(x), w_2(x), \ldots, w_d(x)),$$

y el umbral $q \in \mathbb{R}^d$ será

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_d).$$

Afirmación. *El sistema $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ es vector pesado con $w \in \mathbb{R}^d$ y $q \in \mathbb{R}^d$ dados anteriormente.*

Verificar esta afirmación resulta bastante sencillo, simplemente veamos que

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow X \in \mathbf{W_i} \quad \text{para todo } i \Leftrightarrow \sum_{x \in X} w_i(x) \geq q_i \quad \text{para todo } i.$$

Notemos que

$$\sum_{x\in X} w_i(x) \geq q_i \text{ para todo } i \Leftrightarrow (\sum_{x\in X} w_1(x),\ldots,\sum_{x\in X} w_d(x)) \geq (q_1,\ldots,q_d).$$

Es decir

$$\sum_{x\in X}(w_1(x),\ldots,w_d(x)) \geq (q_1,\ldots,q_d) \Leftrightarrow \sum_{x\in X} w(x) \geq q.$$

En conclusión

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{x\in X} w(x) \geq q.$$

Por lo tanto, como se quería probar, se tiene que $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ es de pesos vectoriales. Notemos que los pesos y el umbral no pueden ser $(d-1)$-adas, pues esto implicaría que el sistema puede escribirse como la intersección de $d-1$ sistemas de peso. ■

CAPÍTULO 2

Poder Político

Sin duda alguna, cada que hablamos de política uno de los temas más importantes es el de poder. Hablar de este tema no es fácil, pues es difícil definirlo y aún más complicado es encontrar una manera de medirlo.

La noción de poder suele estar relacionada a la acción social, y al hablar de poder, sobretodo en el país en el que vivimos, se nos vienen a la mente palabras como influencia, intimidación, etc.

En este trabajo, el concepto de poder que nos interesa es relacionado con los sistemas de votación tratados en el capítulo anterior, sistemas de votación sí-no. Recordemos que en estos sistemas cada votante tiene un número determinado de votos y en base a éstos se dan las condiciones para tomar una decisión. Si cada uno de los votantes tiene un voto y para ganar se requiere mayoría, entonces cada votante tiene la misma cantidad de poder, pues cada voto es igual de importante.

Intuitivamente pensaríamos que si uno de los votantes tiene el doble de votos, entonces, también tiene el doble de poder. Resulta que esto no es tan sencillo, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. *UNIÓN ECONÓMICA CAUSAMEX.*

Éste es un ejemplo hipotético basado en el ejemplo de BENELUX, uno de los ejemplos que se presentaron en el capítulo anterior. Supongamos que algo parecido se desea hacer entre México, Estados Unidos y Canadá. Como es de esperarse, Estados Unidos propone que se otorgue 1 voto a Canadá, 1 a México y ellos obtendrán 3 votos.

El total es entonces de 5 votos y se propone que las decisiones sean determinadas por mayoría, es decir, para tomar una decisión se requieren 3 votos. Si nos dejamos llevar por la intuición antes mencionada, pensaríamos que entonces Estados Unidos tiene 3 veces más poder que México. Sin embargo es obvio que ni México ni Canadá realmente intervienen en la toma de decisiones, basta que Estados Unidos esté a favor para tomar una decisión. Es decir, Estados Unidos tendría el poder al 100 %.

Con este ejemplo podemos darnos cuenta de que medir el poder no es tan sencillo como se podría pensar. En este capítulo definiremos algunos índices que nos permitirán cuantificar el poder de cada uno de los votantes en un sistema de votación sí-no.

Antes de comenzar a definir estos índices cabe mencionar que a partir de este momento, cuando se hable de sistemas de votación en realidad estamos hablando de sistemas de votación monótonos.

2.1

Índice de poder de Shapley-Shubik.

El índice de poder de Shapley-Shubik mide el poder tomando en cuenta las coaliciones a las que pertenecen todos los votantes, además, se consideran todas las distintas formas que hay de ordenarlos y asumiendo que los votos se van registrando en este orden consideramos en cuáles de estas coaliciones la opinión de un votante es determinante. Cuando la opinión de un votante es la que hace la diferencia se dice que éste es un jugador pivote. Veamos este concepto en la siguiente definición.

Definición 2.1. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación en donde $|\mathbf{N}| = n$. Sea $O = v_1 v_2 \ldots v_n$ un ordenamiento de los n votantes. Decimos que v_i es un *jugador pivote* si se tiene que $\{v_1, v_2, \ldots v_{i-1}\}$ es una coalición perdedora pero $\{v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, v_i\}$ es una coalición ganadora.

Veamos un ejemplo para que el concepto quede totalmente claro.

Consideremos el sistema de votación $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ donde $\mathbf{N} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ y supongamos que todos los votantes tienen un voto, excepto p_3 que tiene 2 votos. Para tomar una decisión se requieren 4 votos.

Consideremos el ordenamiento $p_5p_3p_2p_4p_1$. Veamos quién es el jugador pivote en este ordenamiento.

Notemos que: p_5 no es ganadora, p_5p_3 tampoco es ganadora, pero $p_5p_3p_2$ sí es ganadora. Por lo tanto el jugador pivote para este ordenamiento es p_2.

Ahora sí podemos definir el índice de Shapley-Shubik. La idea de este índice es que un jugador tiene más poder cuando es pivote para una mayor cantidad de ordenamientos que otro jugador. Esto es bastante lógico, pues si es pivote en una gran cantidad de ordenamientos, quiere decir que su voto es determinante y esto le da cierto poder. Veamos como se define este índice.

Antes de la definición recordemos que en un conjunto que contiene n elementos, el número de maneras en las que estos pueden ordenarse está dado por $n!$

Definición 2.2. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación en donde $|\mathbf{N}| = n$. Sea $p \in \mathbf{N}$ un votante. El *índice de Shapley-Shubik* de p denotado como $ISS(p)$, se define como:

$$ISS(p) = \frac{|\{O : O \text{ es un ordenamiento donde p es pivote}\}|}{n!}.$$

Observemos que para todo p elemento de $\mathbf{N}$ se tiene que $0 \leq ISS(p) \leq 1$. También es cierto que $\sum_{p \in \mathbf{N}} ISS(p) = 1$

Ejemplo. *CÁLCULO DEL ISS (BENELUX) .*

Cuando en un sistema de votación los votantes tienen asignada la misma cantidad de votos se tiene que su índice de Shapley-Shubik también es el mismo. Un ejemplo de esto se puede ver en la unión económica BENELUX. Como los únicos 3 miembros son Bélgica(B), Holanda (H) y Luxemburgo (L) tenemos que el número de posibles ordenamientos es $3! = 6$, los posibles ordenamientos son:

$$BHL, BLH, HBL, HLB, LBH, LHB$$

Es fácil notar que los ordenamientos en los que Bélgica es pivote son: HBL y LBH. Holanda es pivote en BHL y LHB. Por su parte Luxemburgo es pivote en BLH y HLB. Con esta información calculemos los índices.

$$ISS(B) = \frac{2}{6}, ISS(H) = \frac{2}{6} \text{ y } ISS(L) = \frac{2}{6}.$$

Ahora que hemos encontrado la manera en que este índice cuantifica el poder de un votante, valdría la pena preguntarnos: ¿Qué sucedería si se agregan votantes al sistema de votación?

Al agregar votantes se les deben otorgar votos, pero supongamos que la proporción de los votos necesarios para tomar una decisión se mantiene. En este caso esperaríamos que el poder de los votantes originales disminuya (pues deben "compartir" el poder que ya tenían con los nuevos votantes), o si bien les va, que el poder que ya tenían permanezca constante.

Pero contrario a esta intuición, no siempre es así, un ejemplo de que esto no siempre ocurre lo veremos a continuación. Esta situación se conoce como la paradoja de los nuevos miembros, pues es un sistema en el que al agregar nuevos miembros el poder de uno de los miembros originales aumenta.

Ejemplo. *PARADOJA DE LOS NUEVOS MIEMBROS (CAUSAMEX).*

Recordemos nuestro ejemplo hipotético de CAUSAMEX, como mencionamos antes, es una sociedad formada por México (M), Estados Unidos (E) y Canadá (Ca). La siguiente tabla nos muestra cómo estaban distribuidos los votos, así como el poder de Shapley-Shubik para cada jugador.

votante	votos	ISS
M, Ca	1	0
E	3	1

Supongamos que a esta sociedad se unirán los siguientes países: Chile (Ch), Argentina (A) y Colombia (Co). Al unirse estos países se les debe de asignar un número de votos. A Chile se le asignará el mismo número de votos que a México y Canadá, pero a Argentina se le asignará un número menor que a los tres antes mencionados, pero mayor que Colombia. Por lo que los votos se asignan como refleja la siguiente tabla.

votante	votos	ISS
E	9	$\frac{3}{5}$
M, Ca, Ch	3	$\frac{1}{10}$
A	2	$\frac{1}{10}$
Co	1	0

Podemos notar que Estados Unidos aún tiene el triple de votos que México y Canadá, además para que se apruebe una decisión se necesita una mayoría absoluta. Como se puede observar en las tablas anteriores resulta que al agregar votantes al sistema de votación México y Canadá ahora tienen un poco de poder, mientras que en el sistema original no tenían.

Como habíamos intuido, Estados Unidos vio disminuido su poder, lo curioso es que con México y Canadá pasó lo contrario.

2.1.1

La unión hace la fuerza.

En algunas ocasiones en los sistemas de votación sí-no los jugadores buscan estrategias para conseguir un triunfo, es decir, que la decisión que se tome sea por la que ellos votaron. Una de estas estrategias consiste en asociarse con otros votantes que desean lo mismo que ellos, es decir, forman alianzas esperando adquirir más fuerza e incrementar su poder.

Es justo esta situación la que se trata en este apartado. Comenzaremos por decir que cuando un grupo de jugadores deciden unirse y votar de la misma manera, es lo que llamaremos un bloque. Como todos los jugadores que componen el bloque votan igual, entonces el bloque será visto como un jugador.

Al final del apartado se enunciará un teorema que permite calcular el índice de Shapley-Shubik de dicho bloque de una manera muy sencilla en el caso de un sistema en el que a todos los votantes se les asigna la misma cantidad de votos y concluiremos viendo si agruparse en bloques tiene el resultado esperado, es decir, si de verdad al formar un bloque, los jugadores que lo componen aumentan su poder.

Antes de poder hacer esto es necesario introducir un poco de notación.

Consideremos un sistema de votación de peso $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ en donde $\mathbf{N} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ en donde cada jugador p_i tiene peso w_i y $q \in \mathbb{R}$ el umbral, es decir,

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{p_i \in X} w_i \geq q.$$

Esto lo denotaremos como

$$[q : w_1, w_2, \ldots, w_n].$$

Ahora, consideremos que h de estos jugadores se unen, formando un bloque b. Nuestro objetivo es calcular el índice de poder de Shapley-Shubik de este bloque para ver si resulta o no conveniente para un jugador aliarse con otros, es decir, si de esta manera obtiene un mayor índice de poder.

Para poder realizar este cálculo de manera muy sencilla utilizaremos el resultado del siguiente teorema.

Teorema 2.3. *Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación con $|\mathbf{N}| = n$ jugadores en donde todos tienen la misma cantidad de votos y para una aprobación se necesita que q de los votantes estén a favor. Según la notación antes mencionada, esto se puede representar de la siguiente forma:*

$$[q : 1, 1, \ldots, 1],$$

donde el número 1 aparece n veces.

Si b de estos jugadores deciden formar un bloque, consideremos un nuevo sistema que se obtiene de considerar a este bloque como un jugador. Este nuevo sistema puede expresarse, según la notación antes mencionada, de la siguiente manera:

$$[q : b, 1, 1, \ldots, 1].$$

donde el número 1 aparece $n - b$ veces.

Entonces, el índice de poder de Shapley-Shubik de este bloque es:

$$ISS(bloque) = \frac{b}{n - b + 1}.$$

Demostración. En este sistema hay $n-b+1$ jugadores, veamos primero para cuántas coaliciones se tiene que el bloque es pivote.

Notemos que el bloque es pivote cuando antes de él hay al menos $q - b$ jugadores y a lo mucho $q - 1$ jugadores. Es decir, cuando elegimos $q - b + j$ jugadores de un grupo de $n - b$ (donde $j = 0, 1, \ldots, b - 1$). Por lo tanto, hay $\binom{n-b}{q-b+j}$ maneras diferentes de elegirlos.

Además, es fácil observar que antes del jugador pivote hay $q - b + j$ jugadores, los cuales se pueden ordenar de $(q - b + j)!$ formas distintas. De la misma manera, después del bloque habrá $n-q-j$ jugadores, que se pueden ordenar de $(n-q-j)!$ formas distintas. Es decir, el número de coaliciones donde el bloque es pivote es

$$\sum_{j=0}^{b-1}\binom{n-b}{q-b+j}(q-b+j)!(n-q-j)!$$

Lo que es lo mismo

$$\sum_{j=0}^{b-1}\frac{(n-b)!}{(q-b+j)!(n-q-j)!}(q-b+j)!(n-q-j)! = \sum_{j=0}^{b-1}(n-b)!$$

es decir, el número de coaliciones donde el bloque es pivote es $b(n-b)!$ Con esto se tiene que

$$ISS(b) = \frac{b(n-b)!}{(n-b+1)!}.$$

por lo tanto $ISS(b) = \frac{b}{n-b+1}$. ∎

Notemos que el índice de poder de un jugador antes de aliarse con los demás era de $\frac{1}{n}$.

En cambio si consideramos a un jugador del bloque, suponiendo que el poder del bloque se reparte equitativamente entre todos los votantes que lo integran, su índice de poder es de $\frac{1}{n-b+1}$, es decir, al unirse al bloque su poder se incrementa.

En conclusión, como indica el nombre de la sección un jugador es mas fuerte si forma una alianza con otros jugadores dispuestos a votar igual que él.

2.2

Índice de poder de Banzhaf.

Como mencionamos al inicio de este capítulo la idea es medir el poder de los jugadores que forman parte de un sistema de votación sí-no.

En la sección anterior, definimos el índice de poder de Shapley-Shubik, pero este índice no es el único que existe para medir el poder de los jugadores de un sistema de votación sí-no. Otro índice que se puede utilizar es el índice de Banzhaf [7].

Este índice mide el poder de un jugador tomando en cuenta el número de coaliciones en que el voto de un jugador es determinante, es decir, aquellas coaliciones tales que son ganadoras pero que de no contar con el jugador en cuestión serían perdedoras.

Para poder definir el índice de Banzhaf de un jugador primero definiremos el poder total de Banzhaf del mismo, pero antes de esto, comencemos por definir el conjunto al que llamaremos dependiente de un jugador.

Definición 2.4. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación sí-no. Sea $p \in \mathbf{N}$ fijo. Definiremos el *conjunto dependiente del jugador* p, denotado D_p de la siguiente manera:

$$D_p = \{X \in \mathbf{W} : p \in X \text{ y } X \setminus \{p\} \notin \mathbf{W}\}.$$

Definición 2.5. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votacion sí-no y sea p uno de los votantes. Definimos el *poder total de Banzhaf* de este jugador, denotado como $PTB(p)$, como el número de coaliciones ganadoras a las que pertenece este jugador pero que sin p serían perdedoras. Dicho de otra forma

$$PTB(p) = |D_p|.$$

Veamos un ejemplo sencillo sobre el poder total de Banzhaf.

Consideremos el sistema de votación $G(\mathbf{N}, \mathbf{W})$ donde $\mathbf{N} = \{p_1, p_2, p_3\}$ y $\mathbf{W} = \{\{p_1, p_2, p_3\}, \{p_1, p_2\}, \{p_1, p_3\}\}$.

Calculemos el poder total de Banzhaf para p_1. Primero notemos que este jugador pertenece a todas las coaliciones ganadoras. Además

$$\{p_1, p_2, p_3\} \setminus \{p_1\} = \{p_2, p_3\} \notin \mathbf{W},$$

$$\{p_1, p_2\} \setminus \{p_1\} = \{p_2\} \notin \mathbf{W},$$

$$\{p_1, p_3\} \setminus \{p_1\} = \{p_3\} \notin \mathbf{W}.$$

Por lo tanto $PTB(p_1) = 3$.

De la misma manera hacemos los cálculos para p_2 y para p_3 obteniendo que $PTB(p_2) = PTB(p_3) = 1$.

Una vez que sabemos calcular el poder total de Banzhaf podemos definir lo que nos interesa: el índice de poder de Banzhaf de cada jugador. Como mencionamos antes, para calcular el índice de Banzhaf de un jugador utilizaremos el poder total de Banzhaf del mismo.

Definición 2.6. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación sí-no. Sea $p \in \mathbf{N}$ uno de los votantes. Definimos el *índice de poder de Banzhaf* del jugador p, denotado como $IB(p)$, de la siguiente manera:

$$IB(p) = \frac{PTB(p)}{\displaystyle\sum_{v \in \mathbf{N}} PTB(v)}.$$

Veamos un ejemplo para entender totalmente este índice. Para no hacer mas cuentas retomemos el ejemplo del sistema de votación $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ donde $\mathbf{N} = \{p_1, p_2, p_3\}$ y $\mathbf{W} = \{\{p_1, p_2, p_3\}, \{p_1, p_3\}, \{p_1, p_2\}\}$.

Recordemos que: $PTB(p_1) = 3$, $PTB(p_2) = 1$ y $PTB(p_3) = 1$. Por lo tanto,

$$IB(p_1) = \frac{3}{5}, IB(p_2) = \frac{1}{5} \text{ y } IB(p_3) = \frac{1}{5}.$$

2.3

Índice de poder de Johnston.

En la sección anterior, definimos una forma de medir el poder de un jugador tomando en cuenta el número de coaliciones en las que la presencia de este jugador es determinante, es decir, tomando en cuenta aquellas coaliciones que sin el jugador no serían ganadoras. Sin embargo el índice de poder de Banzhaf no toma en cuenta cuántos jugadores más cumplen esa misma condición para esa coalición.

La manera de medir el poder que se definirá en esta sección sí toma en cuenta este detalle, haciéndonos ver que tiene más poder un votante que es el único indispensable para la coalición que un votante que se encuentra en una coalición en la que todos los votantes son indispensables.

Esta forma de medir el poder será justamente el índice de poder de Johnston.

Este índice resulta muy similar al de Banzhaf , al igual que en la sección anterior primero definiremos el poder total de Johnston para un jugador p y lo denotaremos como $PTJ(p)$.

Antes de definir el poder total de Johnston de un jugador, primero veamos el siguiente concepto.

Definición 2.7. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación sí-no. Sea $X \in \mathbf{W}$. Definimos la *cantidad de indispensables de* X, denotada como m_X como el número de elementos de esta coalición sin los cuales X no sería una coalición ganadora. Es decir

$$m_X := |\{x \in X : X \setminus \{x\} \notin \mathbf{W}\}|.$$

Definición 2.8. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación sí-no y sea $p \in \mathbf{N}$ un jugador de este sistema. Definimos el *poder total de Johnston* de este jugador, denotado como $PTJ(p)$ de la siguiente manera:

$$PTJ(p) = \sum_{X \in D_p} \frac{1}{m_X}.$$

Al igual que antes, ahora que hemos definido el poder total de Johnston, simplemente normalizaremos este concepto para obtener lo que realmente nos interesa, un índice de poder.

Definición 2.9. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación. Sea $p \in \mathbf{N}$ fijo. Definimos el *índice de poder de Johnston de* p denotado como $IJ(p)$ de la siguiente manera:

$$IJ(p) = \frac{PTJ(p)}{\displaystyle\sum_{v \in \mathbf{N}} PTJ(v)}.$$

Veamos el mismo ejemplo de la sección anterior, un sistema de votación sí-no $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ donde $\mathbf{N} = \{p_1, p_2, p_3\}$ y $\mathbf{W} = \{\{p_1, p_2, p_3\}, \{p_1, p_2\}, \{p_1, p_3\}\}$.

Para poder escribir las cosas de manera más ordenada consideremos $A = \{p_1, p_2, p_3\}$, $B = \{p_1, p_2\}$ y $C = \{p_1, p_3\}$.

Comencemos calculando el poder total de Johnston para cada jugador:

Para p_1 tenemos que

$$D_{p_1} = \{A, B, C\},$$

de aquí que

$$m_A = 1,\ m_B = 2 \text{ y } m_C = 2.$$

Por lo tanto $PTJ(p_1) = 2$.

Análogamente hacemos los cálculos para los jugadores p_2 y p_3, de donde obtenemos que $PTJ(p_2) = \frac{1}{2}$ y $PTJ(p_3) = \frac{1}{2}$.

Es fácil verificar que

$$IJ(p_1) = \frac{2}{3}, \quad IJ(p_2) = \frac{1}{6} \quad \text{y} \quad IJ(p_3) = \frac{1}{6}.$$

2.4

Índice de poder de Deegan-Packel.

Este es el último de los índices que se tratarán en este trabajo. La idea de este índice para medir el poder es parecido al de Johnston, sólo que aquí no se tomarán en cuenta todas las coaliciones ganadoras, sino únicamente las coaliciones ganadoras mínimas. Recordemos que una coalición ganadora es mínima si al perder a cualquiera de sus votantes se vuelve perdedora.

La idea de este índice es medir el poder de un jugador según el número de coaliciones ganadoras a las que pertenece. Además su poder será mayor si son pocos los jugadores que pertenecen a esta coalición.

Ahora que hemos mencionado que es parecido al índice de Johnston es de esperarse que para poder definir el índice tengamos que definir primero el poder total de Deegan-Packel para un jugador $p \in \mathbf{N}$.

Definición 2.10. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación sí-no. Sea $p \in \mathbf{N}$ fijo. Sea M_p el conjunto de todas las coaliciones ganadoras mínimas a las que p pertenece. Definimos el *poder total de Deegan-Packel del jugador* p de la siguiente manera:

$$PTDP(p) = \sum_{X \in M_p} \frac{1}{|X|}.$$

Igual que en los índices anteriores, ahora que hemos definido el poder total de Deegan-Packel podemos definir el índice correspondiente.

Definición 2.11. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación sí-no. Sea p uno de los votantes. Se define el *índice de poder de Deegan-Packel de* p de la siguiente manera:

$$IDP(p) = \frac{PTDP(p)}{\sum_{v \in \mathbf{N}} PTDP(v)}.$$

Veamos el ejemplo que hemos utilizado en los índices anteriores.

Consideremos el sistema de votación sí-no $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$, en el cual $\mathbf{N} = \{p_1, p_2, p_3\}$ y $\mathbf{W} = \{\{p_1, p_2, p_3\}, \{p_1, p_2\}, \{p_1, p_3\}\}$. Comencemos calculando el índice de poder de Deegan-Packel.

Para esto, primero es necesario encontrar las coaliciones ganadoras mínimas, que son $\{p_1, p_2\}$ y $\{p_1, p_3\}$. Es fácil ver que

$$PTDP(p_1) = 1, \quad PTDP(p_2) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad PTDP(p_3) = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto,

$$IDP(p_1) = \frac{1}{2}, \quad IDP(p_2) = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad IDP(p_3) = \frac{1}{4}.$$

Hemos definido cuatro maneras de medir el poder. El índice de Shapley-Shubik se calcula en relación a los jugadores pivote (únicamente hay uno en cada coalición). A diferencia de este índice, los índices de Banzhaf, Johnston y Deegan-Packel se calculan teniendo en cuenta a los jugadores que son determinantes para una coalicíon (puede haber varios en una misma coalición).

Para el índice de Shapley-Shubik consideramos $n!$ coaliciones, todas del mismo tamaño. En cambio, para los otros 3 índices se consideran 2^n coaliciones de distintos tamaños. Más adelante utilizaremos estos cuatro índices para medir el poder de los implicados en el sistema político mexicano.

2.5

¿Influyente? ¿Qué tanto?

En las secciones anteriores definimos diferentes maneras para medir el poder de un votante en un sistema de votación sí-no. En esta sección buscaremos una forma que nos permita medir, no el índice de poder de un jugador, sino su relevancia dentro del sistema de votación, es decir que tan influyente es este jugador sin necesidad de calcular sus índices de poder.

Como hemos visto, en los sistemas de votación se forman alianzas entre algunos votantes, la idea de esta sección será definir algunos conceptos que nos permitan identificar cual de los jugadores es más deseable como aliado.

El primer paso para lograr este objetivo será dar una definición de cuando dos votantes tienen la misma influencia. Es decir, cuando dos jugadores son tales que a una coalición le da lo mismo contar con uno que con otro.

Definición 2.12. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación sí-no. Sean $x, y \in \mathbf{N}$. Diremos que x y y son *equivalentes* si y sólo si para toda $Z \subseteq \mathbf{N}$ tal que $Z \cap \{x, y\} = \emptyset$ se tiene que

$$Z \cup \{x\} \in \mathbf{W} \Leftrightarrow Z \cup \{y\} \in \mathbf{W},$$

denotaremos esto como $x \approx y$.

La definición anterior nos da una relación binaria entre los votantes del sistema de votación sí-no. De hecho, resulta ser más que una simple relación binaria, es una relación de equivalencia, tal como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.13. *Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación sí-no. La relación binaria $(\mathbf{N}, \approx)$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Para ver que la relación dada en la Definición 2.12 es una relación de equivalencia debemos verificar que se cumplen tres propiedades que son: reflexividad, simetría y transitividad.

Las primeras dos propiedades son consecuencia inmediata de la definición. A continuación veamos ahora que la transitividad también se cumple.

Sean $x, y, z \in \mathbf{N}$. Si $x \approx y$ tenemos que para todo $Z \subseteq \mathbf{N}$ tal que $Z \cap \{x, y\} = \emptyset$ es cierto que $Z \cup \{x\} \in \mathbf{W} \Leftrightarrow Z \cup \{y\} \in \mathbf{W}$.

Además, si $y \approx z$ es cierto que para todo $Z \subseteq \mathbf{N}$ tal que $Z \cap \{y, z\} = \emptyset$ es cierto que $Z \cup \{y\} \in \mathbf{W} \Leftrightarrow Z \cup \{z\} \in \mathbf{W}$.

Sea $Z \subseteq \mathbf{N}$ tal que $Z \cap \{x, z\} = \emptyset$. Consideremos dos casos.

Caso 1 $\quad y \notin Z$.

En este caso $Z \cap \{x, y\} = \emptyset$, de aquí que

$$Z \cup \{x\} \in \mathbf{W} \Leftrightarrow Z \cup \{y\} \in \mathbf{W},$$

además es claro que $Z \cap \{y, z\} = \emptyset$, por lo tanto,

$$Z \cup \{y\} \in \mathbf{W} \Leftrightarrow Z \cup \{z\} \in \mathbf{W}.$$

Es decir, si $Z \subseteq \mathbf{N}$ es tal que $Z \cap \{x, z\} = \emptyset$, se tiene que

$$Z \cup \{x\} \in \mathbf{W} \Leftrightarrow Z \cup \{z\} \in \mathbf{W},$$

dicho de otra forma, $x \approx z$.

Caso 2 $\quad y \in Z$.

Veamos que ocurre si $Z \cup \{x\} \in \mathbf{W}$.

Definamos $A := Z \setminus \{y\}$ y $B := A \cup \{x\}$. Claramente $Z \cup \{x\} = B \cup \{y\}$. Observemos que $B \cap \{y, z\} = \emptyset$ y $B \cup \{y\} \in \mathbf{W}$.

Por hipotésis tenemos que $y \approx z$, es decir,

$$B \cup \{y\} \in \mathbf{W} \Leftrightarrow B \cup \{z\} \in \mathbf{W}.$$

De ahí que $B \cup \{z\} \in \mathbf{W}$. Dado que $B \cup \{z\} = A \cup \{x\} \cup \{z\}$, se tiene que $A \cup \{x\} \cup \{z\} \in \mathbf{W}$.

Por último definamos $C := A \cup \{z\}$, es decir, $A \cup \{x\} \cup \{z\} = C \cup \{x\}$, por lo tanto, $C \cup \{x\} \in \mathbf{W}$.

Afirmamos que $y \notin C$, pues C está definida como $A \cup \{z\}$, donde $A = Z \setminus \{y\}$. Además $x \notin Z$, por lo tanto $x \notin A$, más aún, $x \notin C$. Es decir, $C \cap \{x, y\} = \emptyset$ y como $x \approx y$ se tiene que

$$C \cup \{x\} \in \mathbf{W} \Leftrightarrow C \cup \{y\} \in \mathbf{W}.$$

Como ya hemos mencionado $C \cup \{x\} \in \mathbf{W}$, por lo tanto, $C \cup \{y\} \in \mathbf{W}$. Es fácil ver que $C \cup \{y\} = Z \cup \{z\}$. En conclusión,

$$Z \cup \{x\} \in \mathbf{W} \Rightarrow Z \cup \{z\} \in \mathbf{W}.$$

De manera completamente análoga se puede mostrar que

$$Z \cup \{z\} \in \mathbf{W} \Rightarrow Z \cup \{x\} \in \mathbf{W}.$$

En conclusión, si $Z \subset \mathbf{N}$ es tal que $Z \cap \{x, z\} = \emptyset$ se tiene que

$$Z \cup \{x\} \in \mathbf{W} \Leftrightarrow Z \cup \{z\} \in \mathbf{W},$$

es decir, $x \approx z$ ■

La Definición 2.12 nos indica cuando dos jugadores tienen la misma influencia sobre una coalición, pero nos gustaría saber que pasa si no son equivalentes, ¿podremos decir algo más en ese caso?

¿Será que siempre uno es más influyente que otro? ¿O se dará algún caso en el que dos jugadores no solo no sean equivalentes, sino que además sea imposible determinar cuál de ellos es más influyente?

Resulta que hay casos en los que algunas coaliciones prefieren a un votante x sobre un votante y, pero para otras coaliciones, resulta preferible contar con el votante y que con el votante x. Cuando esto ocurre decimos que los votantes x y y son incomparables. Este es un concepto se da formalmente en la siguiente definición:

Definición 2.14. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación sí-no. Sean $x, y \in \mathbf{N}$. Diremos que x y y son *incomparables*, refiriéndonos a que es indecidible cual de ellos es mas influyente, si y sólo si existen $Z \subseteq \mathbf{N}$ y $Z' \subseteq \mathbf{N}$ tales que $Z \cap \{x, y\} = \emptyset$ y $Z' \cap \{x, y\} = \emptyset$ donde

$$Z \cup \{x\} \in \mathbf{W} \quad \text{pero} \quad Z \cup \{y\} \notin \mathbf{W}$$

y

$$Z' \cup \{y\} \in \mathbf{W} \qquad \text{pero} \qquad Z' \cup \{x\} \notin \mathbf{W}.$$

Denotaremos esta propiedad como $x \mid y$.

Recordemos que en el primer capítulo mencionamos que un sistema de votación sí-no podía tener algunas propiedades. Una de ellas era la de ser robusto en intercambio.

Resulta que la Definición 2.14 nos servirá para demostrar, de una manera distinta a la que se vió en el Capítulo 1, que un sistema de votación no es robusto en intercambio. Es justo de esto de lo que trata la siguiente proposición.

Proposición 2.15. *Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación sí-no. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Existen $x, y \in \mathbf{N}$ tales que $x \mid y$.*

2. *G no es robusto en intercambio.*

Demostración.
1 $\Rightarrow$ 2. Sean $x, y \in \mathbf{N}$ tales que $x \mid y$. Esto implica que existen coaliciones $Z, Z' \subseteq \mathbf{N}$ tales que $Z \cap \{x, y\} = \emptyset$ y $Z' \cap \{x, y\} = \emptyset$ donde

$$Z \cup \{x\} \in \mathbf{W} \qquad \text{pero} \qquad Z \cup \{y\} \notin \mathbf{W}$$
$$\text{y}$$
$$Z' \cup \{y\} \in \mathbf{W} \qquad \text{pero} \qquad Z' \cup \{x\} \notin \mathbf{W}.$$

Definamos $X = Z \cup \{x\}$ y $Y = Z' \cup \{y\}$. Claramente $X \in \mathbf{W}$ y $Y \in \mathbf{W}$. Además $x \in X \setminus Y$ y $y \in Y \setminus X$.

Si consideramos las siguientes coaliciones:

$$X' = (X \setminus \{x\}) \cup \{y\} \qquad \text{y} \qquad Y' = (Y \setminus \{y\}) \cup \{x\},$$

podemos notar que $X' = Z \cup \{y\}$, de la misma manera $Y' = Z' \cup \{x\}$. Por lo tanto

$$X' \notin \mathbf{W} \qquad \text{y} \qquad Y' \notin \mathbf{W},$$

es decir, al hacer un intercambio entre dos coaliciones ganadoras las dos que se obtienen son perdedoras, lo que es lo mismo, el sistema no es robusto en intercambio.

$2 \Rightarrow 1$. Como G no es robusto en intercambio existen $X, Y \in \mathbf{W}$ y $x, y \in \mathbf{N}$ tales que $x \in X \setminus Y$ y $y \in Y \setminus X$, donde

$$(X \setminus \{x\}) \cup \{y\} \notin \mathbf{W} \quad \text{y} \quad (Y \setminus \{y\}) \cup \{x\} \notin \mathbf{W}.$$

Definamos las siguientes coaliciones:

$$Z = X \setminus \{x\} \quad \text{y} \quad Z' = Y \setminus \{y\}.$$

Claramente $Z \cap \{x, y\} = Z' \cap \{x, y\} = \emptyset$. Además, es fácil ver que

$$Z \cup \{x\} \in \mathbf{W} \quad \text{pero} \quad Z \cup \{y\} \notin \mathbf{W}$$

$$\text{y}$$

$$Z' \cup \{y\} \in \mathbf{W} \quad \text{pero} \quad Z' \cup \{x\} \notin \mathbf{W}.$$

Es decir, $x \mid y$. ∎

Otra cosa que demostramos en el Capítulo 1, en el Teorema 1.5, es que todos los sistemas de votación de peso son robustos en intercambio. Por lo tanto, como una consecuencia de la proposición anterior tenemos que en un sistema de votación de peso no hay votantes incomparables.

Ahora que estamos hablando de los sistemas de peso, uno podría pensar que en estos sistemas dos jugadores son equivalentes cuando tienen el mismo peso, pero no es tan sencillo. Dado que la función de peso y el umbral en un sistema no son únicos, no podemos garantizar que siempre sean iguales. Lo que sí podemos asegurar es que existe una función que asigna los pesos iguales a jugadores equivalentes. Es justamente eso lo que dice el siguiente teorema.

Teorema 2.16. *Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación de peso, para cualesquiera $x, y \in \mathbf{N}$ los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$x \approx y$.*
2. *Existen $w : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$ tales que*

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} w(v) \geq q,$$

   con $w(x) = w(y)$.

3. Existen funciones $w_1 : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ *y* $w_2 : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ *y umbrales* $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} w_1(v) \geq q_1 \qquad y \qquad X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} w_2(v) \geq q_2,$$

además $w_1(x) > w_1(y)$ *pero* $w_2(x) < w_2(y)$.

Demostración.
$1 \Rightarrow 2$. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación de peso. Sean además $x, y \in \mathbf{N}$ tales que $x \approx y$.

Como el sistema es de peso, existen $w : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$ tales que

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} w(v) \geq q.$$

Definamos $\hat{w} : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\hat{w}(v) := w(v) \qquad \text{para todo } v \in \mathbf{N} \setminus \{x, y\}$$

y

$$\hat{w}(v) := \frac{w(x) + w(y)}{2} \qquad \text{para } v \in \{x, y\}.$$

Veamos que con esta función es cierto que

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} \hat{w}(v) \geq q.$$

Para verificar esto consideremos varios casos.

Caso 1 $\qquad X \cap \{x, y\} = \emptyset$.

En este caso se tiene que

$$\sum_{v \in X} \hat{w}(v) = \sum_{v \in X} w(v),$$

es decir,

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} w(v) \geq q \Leftrightarrow \sum_{v \in X} \hat{w}(v) \geq q.$$

Como queríamos se tiene que $X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} \hat{w}(v) \geq q$.

Caso 2 $\qquad X \cap \{x, y\} = \{x, y\}$.

Observemos que en este caso

$$\sum_{v\in X}\hat{w}(v)=\sum_{v\in X\setminus\{x,y\}}w(v)+\hat{w}(x)+\hat{w}(y)=\sum_{v\in X\setminus\{x,y\}}w(v)+2\big(\frac{w(x)+w(y)}{2}\big)=\sum_{v\in X}w(v).$$

Por lo tanto, igual que en el caso anterior

$$X\in\mathbf{W}\Leftrightarrow\sum_{v\in X}\hat{w}(v)\geq q.$$

Caso 3 $\qquad X\cap\{x,y\}=\{x\}$.

Para la demostración correspondiente a este caso primero es necesario observar que

$$\frac{\displaystyle\sum_{v\in X}w(v)+\sum_{v\in X\setminus\{x\}\cup\{y\}}w(v)}{2}=\sum_{v\in X\setminus\{x\}}w(v)+\frac{w(x)+w(y)}{2}.$$

Una vez que esto es claro, podemos comenzar la demostración. En este caso tenemos que

$$\sum_{v\in X}\hat{w}(v)=\sum_{v\in X\setminus\{x\}}w(v)+\hat{w}(x)=\sum_{v\in X\setminus\{x\}}w(v)+\frac{w(x)+w(y)}{2},$$

por la observación hecha anteriormente es cierto que

$$\sum_{v\in X}\hat{w}(v)=\frac{\displaystyle\sum_{v\in X}w(v)+\sum_{v\in X\setminus\{x\}\cup\{y\}}w(v)}{2}.$$

Como el sistema es de peso sabemos que $X\in\mathbf{W}\Leftrightarrow\sum_{v\in X}w(v)\geq q$.

Observemos que

$$X=X\setminus\{x\}\cup\{x\},$$

es decir,

$$X\in\mathbf{W}\Leftrightarrow X\setminus\{x\}\cup\{x\}\in\mathbf{W}\Leftrightarrow\sum_{v\in X\setminus\{x\}\cup\{x\}}w(v)\geq q.$$

Por hipótesis $x\approx y$, lo que implica que

$$X\setminus\{x\}\cup\{y\}\in\mathbf{W}.$$

Y como el sistema es de peso, a su vez, esto implica que

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow X \setminus \{x\} \cup \{x\} \in \mathbf{W} \Leftrightarrow X \setminus \{x\} \cup \{y\} \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X \setminus \{x\} \cup \{y\}} w(v) \geq q.$$

Juntando todo lo anterior tenemos que

$$\sum_{v \in X} \hat{w}(v) = \frac{\sum_{v \in X} w(v) + \sum_{v \in X \setminus \{x\} \cup \{y\}} w(v)}{2} \geq \frac{q+q}{2} = q.$$

En conclusión

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} \hat{w}(v) \geq q,$$

además $\hat{w}(x) = \hat{w}(y)$ como se quería.

Caso 4 $\qquad X \cap \{x, y\} = \{y\}$.

Este caso es completamente análogo al caso anterior.

$2 \Rightarrow 3$. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación de peso, además, por hipótesis existen $w : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$ tales que

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} w(v) \geq q,$$

con $w(x) = w(y)$.

Definamos los siguientes conjuntos

$$P = \text{máx}\{\sum_{v \in X} w(v) : X \notin \mathbf{W}\} \qquad \text{y} \qquad R = \text{mín}\{\sum_{v \in X} w(v) : X \in \mathbf{W}\}.$$

Claramente $P < q \leq R$. Si definimos $\hat{q} = \frac{P+R}{2}$ es fácil verificar que: $P < \hat{q} < R$.

Sea $\epsilon > 0$ tal que $P + \epsilon < \hat{q} < R - \epsilon$.

Definamos también $\hat{w} : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$\hat{w}(v) = \begin{cases} w(v), & \text{si } v \in \mathbf{N} \setminus \{x\}. \\ w(x) + \epsilon, & \text{si } v = x. \end{cases}$$

Nos gustaría probar que $X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} \hat{w}(v) \geq \hat{q}$. Para esto veamos los siguientes casos:

Caso 1 $\quad x \in X$.

Sea $X \in \mathbf{W}$. Sabemos por hipótesis que $X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} w(v) \geq q$.

Notemos que

$$\sum_{v \in X} \hat{w}(v) = \sum_{v \in X \setminus \{x\}} w(v) + \hat{w}(x) = \sum_{v \in X \setminus \{x\}} w(v) + w(x) + \epsilon = \sum_{v \in X} w(v) + \epsilon.$$

Es decir,

$$\sum_{v \in X} \hat{w}(v) \geq \sum_{v \in X} w(v).$$

Como $X \in \mathbf{W}$ se tiene que $\sum_{v \in X} w(v) \geq R > \hat{q}$. En conclusión

$$X \in \mathbf{W} \Rightarrow \sum_{v \in X} \hat{w}(v) \geq \hat{q}.$$

Ahora supongamos que X es tal que $\sum_{v \in X} \hat{w}(v) \geq \hat{q}$.

Supongamos que $X \notin \mathbf{W}$, por lo tanto, $\sum_{v \in X} w(v) \leq P$. Como escribimos antes $\sum_{v \in X} \hat{w}(v) = \sum_{v \in X} w(v) + \epsilon$. De aquí que

$$\sum_{v \in X} \hat{w}(v) < P + \epsilon < \hat{q},$$

pero esto contradice la hipótesis. Por lo tanto $X \in \mathbf{W}$.

Por lo tanto, $X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} \hat{w}(v) \geq \hat{q}$.

Caso 2 $\quad x \notin X$.

Sea $X \in \mathbf{W}$, entonces $\sum_{v \in X} w(v) \geq q$.

Notemos que en este caso

$$\sum_{v \in X} \hat{w}(v) = \sum_{v \in X} w(v) \geq R > \hat{q},$$

es decir,

$$X \in \mathbf{W} \Rightarrow \sum_{v\in X} \hat{w}(v) \geq \hat{q}.$$

Ahora supongamos que $\sum_{v\in X} \hat{w}(v) \geq \hat{q}$.

Si $X \notin \mathbf{W}$ se cumple que $\sum_{v\in X} w(v) \leq P < \hat{q}$, lo cual contradice la hipótesis.

En conclusión,

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v\in X} \hat{w}(v) \geq \hat{q}.$$

Hemos encontrado $\hat{w} : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ y $\hat{q} \in \mathbb{R}$ tales que

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v\in X} \hat{w}(v) \geq \hat{q}.$$

Recordemos que $\hat{w}(x) = w(x) + \epsilon$ mientras que $\hat{w}(y) = w(y) = w(x)$ por lo tanto $\hat{w}(x) > \hat{w}(y)$.

Definamos ahora $\tilde{w} : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$\tilde{w}(v) = \begin{cases} w(v), & \text{si } v \in \mathbf{N} \setminus \{x\}. \\ w(x) - \epsilon, & \text{si } v = x. \end{cases}$$

Análogamente a la construcción anterior es fácil ver que

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v\in X} \tilde{w}(v) \geq \hat{q} \quad \text{y} \quad \tilde{w}(x) < \tilde{w}(y).$$

$3 \Rightarrow 1$. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación de peso en el que existen $w_1 : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$, $w_2 : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$, $q_1 \in \mathbb{R}$ y $q_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v\in X} w_1(v) \geq q_1 \quad \text{y} \quad X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v\in X} w_2(v) \geq q_2,$$

donde $w_1(x) > w_2(y)$ pero $w_1(x) < w_2(y)$ para $x, y \in \mathbf{N}$ fijos. Consideremos una coalición Z tal que $Z \cap \{x, y\} = \emptyset$.

Si $Z \cup \{x\} \in \mathbf{W}$ se tiene que $\sum_{v\in Z\cup\{x\}} w_2(v) \geq q_2$. Notemos que

$$\sum_{v\in Z\cup\{y\}} w_2(v) = \sum_{v\in Z} w_2(v) + w_2(y) > \sum_{v\in Z} w_2(v) + w_2(x) = \sum_{v\in Z\cup\{x\}} w_2(v) \geq q_2,$$

es decir,

$$\sum_{v \in Z \cup \{y\}} w_2(v) \geq q_2.$$

Por lo tanto,

$$Z \cup \{y\} \in \mathbf{W}$$

Ahora veamos que ocurre si $Z \cup y \in \mathbf{W}$. Por hipótesis $\displaystyle\sum_{v \in Z \cup \{y\}} w_1(v) \geq q_1$. Igual que antes, podemos notar que:

$$\sum_{v \in Z \cup \{x\}} w_1(v) = \sum_{v \in Z} w_1(v) + w_1(x) > \sum_{v \in Z} w_1(v) + w_1(y) = \sum_{v \in Z \cup \{y\}} w_1(v) \geq q_1,$$

es decir,

$$\sum_{v \in Z \cup \{x\}} w_1(v) \geq q_1.$$

Lo que es lo mismo,

$$Z \cup \{x\} \in \mathbf{W}.$$

En conclusión

$$Z \cup \{x\} \in \mathbf{W} \Leftrightarrow Z \cup \{y\} \in \mathbf{W}.$$

Dicho de otra forma $x \approx y$. ■

A lo largo de este capítulo hemos encontrado diferentes formas de medir el poder, además hemos podido definir cuando es que dos votantes son igual de influyentes en un sistema de votación y cuando es imposible compararlos. Naturalmente nos gustaría también tener una definición que nos ayude a determinar cuando un jugador es mas influyente que otro.

Veamos la siguiente definición:

Definición 2.17. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación sí-no. Sean $x, y \in \mathbf{N}$. Diremos que x es más deseable que y si y sólo si ocurren las dos condiciones siguientes:

1. Para toda $Z \subseteq \mathbf{N}$ tal que $Z \cap \{x, y\} = \emptyset$ si $Z \cup \{y\} \in \mathbf{W}$ se tiene que $Z \cup \{x\} \in \mathbf{W}$.

2. Existe $\hat{Z} \subseteq \mathbf{N}$ tal que $\hat{Z} \cap \{x, y\} = \emptyset$ que cumple $\hat{Z} \cup \{x\} \in \mathbf{W}$ pero $\hat{Z} \cup \{y\} \notin \mathbf{W}$

Denotaremos esto como $x > y$.

La definición anterior determina la influencia de un jugador respecto a otro en términos de la deseabilidad que tienen. Es decir, cual de ellos resulta más importante para una coalición.

En este capítulo hemos definido cuando dos votantes son equivalentes, incomparables o cuando uno es más deseable que otro. Es importante aclarar que en un sistema de votación $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ para todo $x, y \in \mathbf{N}$ se da sólo una de las siguientes opciones:

1. $x \mid y$.
2. $x \approx y$.
3. $x > y$ ó $y > x$.

Definición 2.18. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación. Sean $x, y \in \mathbf{N}$. Diremos que $x \geq y$ si $x \approx y$ ó bien si $x > y$.

Cuando una relación binaria cumple las propiedades de reflexividad y simetría, pero falla en la transitividad se le llama pre-orden. Teniendo esto en cuenta veamos la siguiente definición.

Definición 2.19. Sea C un conjunto, y $\geq$ un pre-orden en este conjunto. Si para todo $x, y \in C$ se cumple que sólo ocurre $x \geq y$ ó $y \geq x$ se dice que es un *pre-orden lineal*.

Ahora que sabemos a que se refiere un pre-orden lineal podemos entender la siguiente definición.

Definición 2.20. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación sí-no. Diremos que el sistema es *lineal* si no existen votantes incomparables, es decir, si el pre-orden $\geq$ es lineal.

Esta definición nos da otra manera de identificar sistemas robustos en intercambio. Justo eso es lo que dice la siguiente proposición.

Proposición 2.21. *Sea* $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ *un sistema de votación sí-no. El sistema* G *es lineal si y sólo si es robusto en intercambio.*

Demostración.
Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación lineal, es decir si $x, y \in \mathbf{N}$ entonces $x \geq y$ o $y \geq x$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \geq y$. Veamos los dos casos que podemos tener:

Caso 1 $\quad x \approx y$

Sean $X, Y \in \mathbf{W}$ tales que $x \in X \setminus Y$ y $y \in Y \setminus X$. Se tiene que

$$(X \setminus \{x\}) \cup \{x\} \in \mathbf{W}, \text{ como } x \approx y, \text{ entonces } (X \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathbf{W}.$$

De la misma manera

$$(Y \setminus \{y\}) \cup \{y\} \in \mathbf{W}, \text{ como } x \approx y, \text{ entonces } (Y \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathbf{W}.$$

Es decir, si se hace un intercambio entre las dos coaliciones ganadoras, las dos coaliciones resultantes también son ganadoras, por lo tanto, el sistema es robusto en intercambio.

Caso 2 $\quad x > y$

Sean $X, Y \in \mathbf{W}$ tales que $x \in X \setminus Y$ y $y \in Y \setminus X$. Es fácil ver que

$$(Y \setminus \{y\}) \cup \{y\} \in \mathbf{W}, \text{ como } x > y, \text{ entonces } (Y \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathbf{W}.$$

Es decir, si hacemos un intercambio entre dos coaliciones ganadoras, al menos una de las coaliciones resultantes es ganadora, lo cual indica que el sistema es robusto en intercambio.

En conclusión hemos demostrado que si G es un sistema de votación lineal, entonces es robusto en intercambio.

Ahora demostremos la otra dirección. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación robusto en intercambio.

Anteriormente mencionamos que dos jugadores x, y pueden cumplir únicamente una de las siguientes:

1. $x \mid y$.
2. $x \approx y$.

3. $x > y$ ó $y > x$.

Recordemos que el sistema no es lineal si existen $x, y \in \mathbf{N}$ tales que $x \mid y$. Sean $x, y \in \mathbf{N}$. Si $x \mid y$ por la Proposición 2.15 esto implica que G no es robusto en intercambio, lo cual contradice la hipótesis.

Es decir no existen jugadores incomparables lo que significa que G es lineal. ■

Aplicando esta proposición y el Teorema 1.5 podemos asegurar que todos los sistemas de votación de peso son lineales. A decir verdad, si sabemos que el sistema de votación es de peso podemos decir un poco mas, tal como lo indica el siguiente teorema:

Teorema 2.22. *Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación de peso. Sean $x, y \in \mathbf{N}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $x > y$.

2. $w(x) > w(y)$ *para todos* $w : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ *y* $q \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} w(v) \geq q.$$

Demostración.
$1 \Rightarrow 2$. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación de peso y sean $x, y \in \mathbf{N}$ tales que $x > y$.

Afirmación: Existen $w : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$ tales que $X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{v \in X} w(v) \geq q$ que cumplen que $w(x) > w(y)$.

Veamos porque es cierta esta afirmación. Si no fuera así, si para toda función de peso se tuviera que $w(x) \leq w(y)$, entonces, para toda $Z \subset \mathbf{N}$ tal que $Z \cap \{x, y\} = \emptyset$ se tendría que

$$\sum_{v \in Z \cup \{x\}} w(v) = \sum_{v \in Z} w(v) + w(x) \leq \sum_{v \in Z} w(v) + w(y) = \sum_{v \in Z \cup \{y\}} w(v),$$

es decir, para toda $Z \subset \mathbf{N}$ tal que $Z \cap \{x, y\} = \emptyset$ se tiene que

$$Z \cup \{x\} \in \mathbf{W} \Rightarrow Z \cup \{y\} \in \mathbf{W}$$

lo cual contradice la definición de que $x > y$.

Supongamos que además existe una función $\tilde{w} : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ y $\tilde{q} \in \mathbb{R}$ tales que $X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} \tilde{w}(v) \geq \tilde{q}$ donde además $\tilde{w}(x) \leq \tilde{w}(y)$.

Es decir, tenemos dos funciones w y $\tilde{w}$ de peso que determinan este sistema de votación, una de ellas cumple que $w(x) > w(y)$ y la otra cumple que $\tilde{w}(x) \leq \tilde{w}(y)$.

Por el Teorema 2.16 esto implica que $x \approx y$, sin embargo, esto contradice la hipótesis que dice que $x > y$. Por lo tanto esta función $\tilde{w}$ no existe, lo cual demuestra lo deseado.

$2 \Rightarrow 1$. Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ un sistema de votación tal que para toda $w : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ tal que $X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} w(v) \geq q$, donde $q \in \mathbb{R}$, se cumple que $w(x) > w(y)$ para $x, y \in \mathbf{N}$. Nos gustaría probar que con esta hipótesis es cierto que $x > y$.

Sabemos que el sistema es de peso, como mencionamos antes esto garantiza que es un sistema lineal, de modo que no hay votantes incomparables. Con esto nos quedan tres posibles opciones:

1. $y > x$.
2. $y \approx x$.
3. $x > y$.

Por lo que hemos probado antes la primera opción queda descartada, pues de tener $y > x$ se tendría que $w(y) > w(x)$ contradiciendo la hipótesis.

Si estuviéramos en el caso $x \approx y$ se tendría, por el Teorema 2.16, que existe $\tilde{w} : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ tal que $X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v \in X} \tilde{w}(v) \geq \tilde{q}$ que cumple $\tilde{w}(x) < \tilde{w}(y)$ lo cual contradice la hipótesis que dice que para cualquier función de peso w se cumple que $w(x) > w(y)$.

Por lo tanto la única opción que queda es $x > y$. ■

Con esta proposición concluimos el segundo capítulo.

CAPÍTULO 3

Aplicación al sistema político mexicano.

Una vez que sabemos lo que es un sistema de votación sí-no y conocemos algunas de sus propiedades nos gustaría encontrar una aplicación real. Resulta que una de las aplicaciones que podemos hacer es en el sistema político de nuestro país. Es fácil darse cuenta que la forma en que se reforman las leyes en México puede verse como un sistema de votación sí-no, en donde los votantes son los diputados, senadores y el presidente que votan a favor o en contra para tomar una decisión. Además nos interesa calcular el poder que los diputados y senadores tienen en cuanto a la toma de decisiones y los cuatro índices de poder que se introdujeron en el capítulo anterior nos servirán como una herramienta para cuantificar el poder.

Antes de poder calcular los índices de poder y tratar de identificar algunas de las propiedades antes vistas veamos una breve descripción del sistema político en México.

3.1

Reformas a la constitución en México

Nuestro país se rige por la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos, vigente desde el año de 1917. Esta constitución consta de 136 artículos, divididos en dos partes.

Los primeros 29 artículos comprenden las garantías indivivuales. Es una constitución compuesta de 9 títulos. El título octavo, comprende el artículo 135 y trata sobre las reformas a la constitución, el cual es uno de los temas de interés en este trabajo.

El artículo antes mencionado dice lo siguiente:

"La presente constitución puede ser adicionada o reformada. Para que las adiciones o reformas lleguen a ser parte de la misma, se requiere que el Congreso de la Unión, por el voto de las dos terceras partes de los individuos presentes, acuerde las reformas o adiciones, y que éstas sean aprobadas por la mayoría de las legislaturas de los estados. "[2]

El Congreso de la Unión, mencionado en las líneas anteriores esta compuesto por 500 diputados federales y 128 senadores. Las legislaturas de los estados se refiere a cada uno de los congresos locales de cada estado, siendo en total 32 legislaturas.

Es decir, podemos ver el sistema para reformar la constitución en nuestro país como un sistema de votación sí-no, en donde los votantes son los 500 diputados, 128 senadores y las 32 legislaturas, y para una aprobación es necesario que voten a favor de la propuesta 334 diputados o más, 86 senadores o más y al menos 17 de las legislaturas de los estados.

Como podemos recordar en el Capítulo 1 describimos algunas de las propiedades que pueden tener los sistemas de votación sí-no. Una de ellas es la de ser un sistema de peso. Como veremos a continuación, gracias a la Proposición 2.15 de manera muy sencilla demostraremos que el sistema para reformar la constitución en México no es un sistema de votación de peso. Para poder demostrar lo antes mencionado, primero veamos la siguiente proposición:

Proposición 3.1. *Consideremos el sistema para reformar la Constitución en México visto como un sistema de votación* $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ *donde* $\mathbf{N} = \{$*500 diputados, 128 senadores, 32 legislaturas de los estados*$\}$ *y* $\mathbf{W} = \{X \subseteq \mathbf{N} : X$ *contiene al menos 334 diputados, 86 senadores y 17 legislaturas*$\}$*. Sean* $x =$*diputado y* $y =$*senador, entonces* $x \mid y$*.*

Demostración.
Consideremos las siguientes coaliciones:

$$Z = \{333 \text{ diputados distintos de } x, 86 \text{ senadores distintos de } y \text{ y } 17 \text{ legislaturas de los estados}\},$$

$$Z' = \{334 \text{ diputados distintos de } x, 85 \text{ senadores distintos de } y \text{ y } 17 \text{ legislaturas de los estados}\}.$$

Claramente se tiene que $Z \cap \{x, y\} = \emptyset$, de la misma manera $Z' \cap \{x, y\} = \emptyset$ y es fácil notar que

$$Z \cup \{x\} \in \mathbf{W} \qquad \text{pero} \qquad Z \cup \{y\} \notin \mathbf{W},$$

de la misma manera se tiene que

$$Z' \cup \{y\} \in \mathbf{W} \qquad \text{pero} \qquad Z' \cup \{x\} \notin \mathbf{W}.$$

Dicho de otra forma $x \mid y$. ■

Afirmación 3.2. *El sistema para reformar la constitución en México no es un sistema de votación de peso.*

Demostración.
Basta con recordar que por la Proposición 2.15 y por la proposición anterior tenemos que G no es robusto en intercambio. Además por el Teorema 1.5 sabemos que el sistema no es de peso, pues si fuera de peso, debería ser robusto en intercambio. ■

Ahora que hemos demostrado que el sistema para reformar la constitución de México no es de peso, recordemos que en el Capítulo 1 mencionamos que si bien no todos los sistemas de votación son de peso, es cierto que todos son de pesos vectoriales. Además los pesos y el umbral pertenecen a $\mathbb{R}^n$ donde n es la dimensión del sistema.

Por lo tanto podemos garantizar que este sistema es de pesos vectoriales, antes de dar los pesos y el umbral encontremos su dimensión.

Proposición 3.3. *Sea* $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ *el sistema para reformar la constitución en México, es decir* $\mathbf{N} = \{$ *500 diputados, 128 senadores, 32 legislaturas*$\}$ *y* $\mathbf{W} = \{X \subseteq \mathbf{N} : X$ *contiene al menos 334 diputados, 86 senadores y 17 legislaturas*$\}$. *Entonces dim* $G = 3$.

Demostración. Para demostrar esto lo que tenemos que ver es que el sistema de votación se puede escribir como la intersección de tres sistemas de votación de peso, pero no como la intersección de menos sistemas.

Sabemos que G no es de dimensión igual a uno, porque hemos probado antes que no es de peso, veamos que tampoco se puede escribir como la intersección de dos sistemas de peso.

Si se pudiera escribir como la intersección de dos sistemas de votación de peso $G_1 = (\mathbf{N}, \mathbf{W_1})$, $G_2 = (\mathbf{N}, \mathbf{W_2})$, se tendría que $\mathbf{W_1} \cap \mathbf{W_2} = \mathbf{W}$. Es decir, una de estas $\mathbf{W_1}$ ó $\mathbf{W_2}$ debería de considerar como coaliciónes ganadoras aquellas que contienen diputados y senadores, o diputados y legislaturas, o senadores y legislaturas, o los tres.

Sin embargo de ser así el sistema correspondiente no sería de peso. Esto porque un diputado y un senador son incomparables, de la misma manera un senador y legislatura, o legislatura y diputado. Por lo tanto G no se puede describir como la intersección de dos sistemas de peso. Veamos que sí se puede describir como la intersección de tres sistemas de peso.

Sea $G_1 = (\mathbf{N}, \mathbf{W_1})$ donde $\mathbf{W_1} = \{X \subseteq \mathbf{N} : X$ contiene al menos 334 diputados$\}$, también definimos $G_2 = (\mathbf{N}, \mathbf{W_2})$ donde $\mathbf{W_2} = \{X \subseteq \mathbf{N} : X$ contiene al menos 86 senadores$\}$. Análogamente, sea $G_3 = (\mathbf{N}, \mathbf{W_3})$ donde $\mathbf{W_3} = \{X \subseteq \mathbf{N} : X$ contiene al menos 17 legislaturas $\}$.

Claramente se tiene que $\mathbf{W} = \mathbf{W_1} \cap \mathbf{W_2} \cap \mathbf{W_3}$. Es decir $dim\ G = 3$ como se quería probar. ■

Ahora que hemos demostrado que la dimensión del sistema para reformar la constitución en México es 3, podemos dar los pesos y el umbral con los cuáles este sistema es de pesos vectoriales.

Proposición 3.4. *Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ el sistema para reformar la constitución en México, es decir, $\mathbf{N} = \{$ 500 diputados, 128 senadores, 32 legislaturas$\}$ y $\mathbf{W} = \{X \subseteq \mathbf{N} : X$ contiene al menos 334 diputados, 86 senadores y 17 legislaturas$\}$. Definamos $w : \mathbf{N} \to \mathbb{R}^3$ de la siguiente manera*

$$w(n) = \begin{cases} (1,0,0), & \textit{si } n \textit{ es diputado,} \\ (0,1,0), & \textit{si } n \textit{ es senador,} \\ (0,0,1), & \textit{si } n \textit{ es legislatura,} \end{cases}$$

definamos también $q \in \mathbb{R}^3$ como $q = (334, 86, 22)$, entonces

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{n \in X} w(n) \geq q.$$

Demostración.

Consideremos $X \subseteq \mathbf{N}$, sea d el número de diputados que pertenecen a la coalición, de la misma manera sea s el número de senadores que pertenecen a la coalición y l el número de legislaturas con los que cuenta X.

Notemos que

$$\sum_{v\in X} w(v) = (d, s, l),$$

por lo tanto es cierto que

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow d \geq 334, s \geq 86 \text{ y } l \geq 17 \Leftrightarrow \sum_{v\in X} w(n) \geq (334, 86, 17) = q,$$

es decir, se cumple que

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{v\in X} w(v) \geq q.$$

Con esto queda demostrado que el sistema es de pesos vectoriales. ■

Hemos demostrado que el sistema para reformar la constitución en México no es de peso, sin embargo sí es de pesos vectoriales, donde los pesos y el umbral son vectores de $\mathbb{R}^3$. Ahora aplicaremos lo tratado en el Capítulo 2 a este sistema, es decir, calcularemos los cuatro índices de poder para los jugadores involucrados.

3.2

Cálculo de los índices de poder.

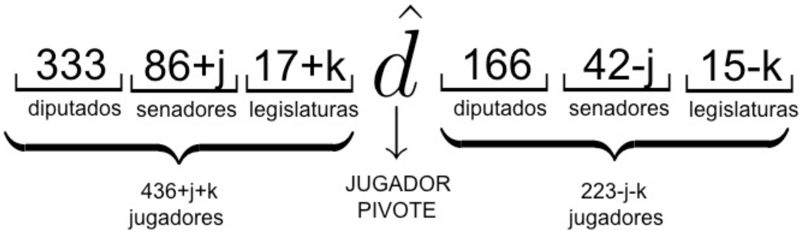
3.2.1

Índice de Shapley-Shubik.

Recordemos que el índice de Shapley-Shubik se calcula teniendo en cuenta todos los posibles ordenamientos, que en este caso son 660! y aquellos en donde el jugador de nuestro interés es pivote. Comencemos por los diputados.

DIPUTADOS.

Queremos calcular el número de coaliciones en las que un diputado $\hat{d}$ es pivote. El siguiente esquema nos ayudará a entender como calcular este número.



Notemos que para que $\hat{d}$ sea pivote antes de él debe haber justo 333 diputados, los cuales se eligen entre 499 que hay disponibles, es decir, hay $\binom{499}{333}$ formas de elegirlos; de la misma manera podemos notar que antes debe haber al menos 86 senadores, los cuales se eligen entre 128, es decir, hay $\binom{128}{86+j}$ maneras de elegirlos, donde $j = 0, \ldots, 42$. Además debe haber 17 legislaturas de los estados o más antes de $\hat{d}$ las cuales se eligen de 32 posibles, de aquí se tiene que hay $\binom{32}{17+k}$ formas de elegirlas, donde $k = 0, \ldots, 15$.

Como el dibujo nos indica, antes del diputado que nos interesa hay $436 + j + k$ jugadores, los cuales se pueden ordenar de $(436 + j + k)!$ maneras, y después de $\hat{d}$ hay $223 - j - k$ votantes.

Por lo tanto el total de coaliciones en donde un diputado $\hat{d}$ es pivote esta dado por

$$\sum_{j=0}^{42}\sum_{k=0}^{15}\binom{32}{17+k}\binom{128}{86+j}\binom{499}{333}(436+k+j)!(223-k-j)!$$

por lo tanto, el índice de Shapley-Shubik para el diputado $\hat{d}$ es

$$ISS(\hat{d}) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{42}\sum_{k=0}^{15}\binom{32}{17+k}\binom{128}{86+j}\binom{499}{333}(436+k+j)!(223-k-j)!}{660!}.$$

Utilizando Maple para hacer esta operación se tiene que: $ISS(\hat{d}) = 0{,}00095528$.

SENADORES.

Un senador se considera el jugador pivote de un ordenamiento cuando antes de él hay exactamente 85 senadores, 17 legislaturas o más y 334 diputados o más. De manera análoga a lo hecho con los diputados obtenemos que el número de ordenamientos donde un senador $\hat{s}$ es pivote está dado por

$$\sum_{j=0}^{166}\sum_{k=0}^{15}\binom{32}{17+k}\binom{127}{85}\binom{500}{334+j}(436+k+j)!(223-k-j)!$$

con esto se tiene que

$$ISS(\hat{s})=\frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{166}\sum_{k=0}^{15}\binom{32}{17+k}\binom{127}{85}\binom{500}{334+j}(436+k+j)!(223-k-j)!}{660!},$$

haciendo estas operaciones en Maple se obtiene $ISS(\hat{s})=0{,}0038661$.

LEGISLATURAS.

Para que una de las legislaturas de los estados $\hat{l}$ se considere pivote, es porque antes de ella hay exactamente 16 legislaturas, 334 diputados o más y 86 senadores o más. Por lo tanto igual que para los jugadores anteriores obtenemos que el número de coaliciones en donde $\hat{l}$ es pivote esta dado por

$$\sum_{j=0}^{166}\sum_{k=0}^{42}\binom{31}{16}\binom{128}{86+k}\binom{500}{334+j}(436+k+j)!(223-k-j)!$$

de aquí que

$$ISS(\hat{l})=\frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{166}\sum_{k=0}^{42}\binom{31}{16}\binom{128}{86+k}\binom{500}{334+j}(436+k+j)!(223-k-j)!}{660!},$$

ayudándonos de Maple obtenemos que $ISS(\hat{l})=0{,}00085916$.

Es fácil comprobar que

$$\sum_{n\in N} ISS(n)=1.$$

Este índice de poder nos indica que quienes mayor poder tienen son los senadores, que de manera individual tienen 0,38 % del poder. En segundo lugar se encuentran los diputados con el 0,09 % de poder cada uno y por último las legislaturas de los estados, que tienen 0,08 % de poder cada una. Además podemos observar que la diferencia entre el poder que tienen los senadores y el de los diputados es considerable, mientras que la diferencia entre el poder asignado a uno de los diputados y a las legislaturas de los estados es muy poca.

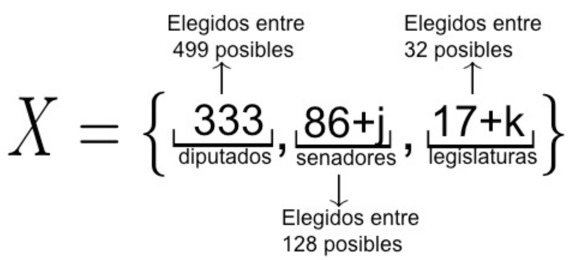
3.2.2

Índice de poder de Banzhaf.

Ahora calculemos el índice de poder de Banzhaf de cada uno de los jugadores de este sistema. Recordemos que para poder calcular el índice de poder de Banzhaf de un jugador primero es necesario calcular su poder total. A continuación calcularemos el poder total de Banzhaf para cada jugador.

DIPUTADOS.

El poder total de Banzhaf de un diputado $\hat{d}$ es el número de coaliciones ganadoras que contienen a $\hat{d}$ pero que si no contarán con él serían perdedoras. Las coaliciones ganadoras que cumplen lo mencionado son aquellas que tienen justamente 334 diputados($\hat{d}$ incluído), 86 senadores o más y 17 legislaturas o más. Veamos el siguiente dibujo para entender mejor esta situación.



Como se indica en el gráfico anterior, se eligen 333 diputados de un grupo de 499, por lo tanto hay $\binom{499}{333}$ formas diferentes de elegirlos, se eligen 86+j senadores de un grupo de 128, de aquí que la cantidad de elecciones posibles es de $\binom{128}{86+j}$ donde $j = 0, \ldots, 42$. Hay $\binom{32}{17+k}$ formas distintas de elegir a las legislaturas donde $k = 0, \ldots 15$. Por lo tanto se tiene que

$$PTB(\hat{d}) = \sum_{k=0}^{42} \sum_{j=0}^{15} \binom{499}{333}\binom{128}{86+k}\binom{32}{17+j},$$

utilizando Maple obtenemos que $PTB(\hat{d}) = 1{,}033108173 \times 10^{180}$.

SENADORES.

El poder total de Banzhaf de un senador $\hat{s}$ es el número de coaliciones ganadoras a las que $\hat{s}$ pertenece y que además sin $\hat{s}$ no serían coaliciones ganadoras, es decir, aquellas coaliciones que cuentan con 334 diputados o más, 17 legislaturas o más y 85 senadores además de $\hat{s}$. Por lo tanto de manera análoga a lo ocurrido con los diputados se tiene que

$$PTB(\hat{s}) = \sum_{k=0}^{166} \sum_{j=0}^{15} \binom{500}{334+k} \binom{127}{85} \binom{32}{17+j},$$

con esto y haciendo las operaciones en Maple obtenemos que

$$PTB(\hat{s}) = 1{,}084994537 \times 10^{180}.$$

LEGISLATURAS.

Por último, calculemos el poder total de Banzhaf para una legislatura $\hat{l}$, es decir, encontremos el número de coaliciones ganadoras a las que $\hat{l}$ pertenece, pero que sin $\hat{l}$ serían perdedoras. Es decir, aquellas coaliciones ganadoras que además de tener a $\hat{l}$ tienen 334 diputados o más, 86 senadores o más y 16 legislaturas. De la misma manera que para los demás jugadores se tiene que

$$PTB(\hat{l}) = \sum_{k=0}^{166} \sum_{j=0}^{42} \binom{500}{334+k} \binom{128}{86+j} \binom{31}{16},$$

usando Maple se obtiene $PTB(\hat{l}) = 4{,}947317764 \times 10^{179}$.

Con los valores encontrados antes se tiene que

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} PTB(n) = 500PTB(\hat{d}) + 128PTB(\hat{d}) + 32PTB(\hat{l}) = 6{,}712648039 \times 10^{182}.$$

Ahora sí podemos calcular los índices de poder de Banzhaf. Igual que en las demás operaciones, usando Maple se obtienen los siguientes resultados.

DIPUTADOS.

$$IB(\hat{d}) = \frac{PTB(\hat{d})}{\sum_{n \in \mathbf{N}} PTB(n)} = 0{,}0015390.$$

Análogamente, obtenemos los índices de los senadores y legislaturas de los estados. Con lo que se obtiene

SENADORES.

$$IB(\hat{s}) = \frac{PTB(\hat{s})}{\sum\limits_{n \in \mathbf{N}} PTB(n)} = 0{,}0016163.$$

LEGISLATURAS.

$$IB(\hat{l}) = \frac{PTB(\hat{l})}{\sum\limits_{n \in \mathbf{N}} PTB(n)} = 0{,}00073701.$$

Es fácil verificar que

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} IB(n) = 1.$$

Al igual que en el índice anterior quienes mayor poder tienen son los senadores, con un 0,16 % del poder de cada uno. En segundo lugar se encuentran los diputados con un 0,15 % del poder cada uno. Por último se ubican las legislaturas de los estados con un 0,07 %. Sin embargo, en este índice la diferencia de poder entre un diputado y un senador es poca, mientras que la diferencia entre un diputado y una de las legislaturas de los estados, es mucha, un diputado tiene el doble de poder que una legislatura.

3.2.3

Índice de poder de Johnston.

A continuación calcularemos el índice de Johnston para el sistema para reformar la constitución en México. Recordemos que para poder obtener el índice de poder de Johnston de un jugador primero necesitamos obtener el poder total de Johnston del mismo.

DIPUTADOS.

Para calcular el poder total de Johnston de un diputado $\hat{d}$ debemos considerar no sólo las coaliciones ganadoras a las que pertenece el jugador y que sin $\hat{d}$ no serían ganadoras, sino además hay que ver cuántos jugadores mas cumplen eso para cada una de estas coaliciones.

Para la sección 3.2.2 encontramos que el número de coaliciones dependientes del diputado $\hat{d}$ es

$$\sum_{k=0}^{42}\sum_{j=0}^{15}\binom{499}{333}\binom{128}{86+k}\binom{32}{17+j}.$$

Para calcular el poder total de Johnston es necesario calcular m_X para cada una de estas coaliciones. Recordemos que m_X es el número de jugadores que pertenecen a la coalición pero que sin ellos la coalición dejaría de ser ganadora. Es claro que si X es una de las coaliciones dependientes de $\hat{d}$ los 334 diputados son indispensables para X. Si hay exactamente 86 senadores, los 86 resultan indispensables para X, pero si hay más de 86 senadores ninguno de ellos lo es. De la misma manera si hay justo 17 legislaturas las 17 resultan indispensables para X, sin embargo, si hay más de 17 ninguna de ellas lo es.

Es decir, si X es una de las coaliciones dependientes de $\hat{d}$ se tiene que

$$m_X = \begin{cases} 437, & \text{si } j=0, k=0, \\ 351, & \text{si } j=0, k\neq 0, \\ 420, & \text{si } j\neq 0, k=0, \\ 334, & \text{si } j\neq 0, k\neq 0. \end{cases}$$

Otra manera de describir esta situación es definiendo las siguientes funciones para cada X dependiente de $\hat{d}$.

$$\alpha(j) = \begin{cases} 1, & \text{si } j=0, \\ 0, & \text{si } j\neq 0 \end{cases} \qquad \beta(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k=0, \\ 0, & \text{si } k\neq 0 \end{cases}$$

Con estas funciones podemos decir que para cada X dependiente de $\hat{d}$ se tiene que $m_X = 334 + 86\cdot\beta(k) + 17\cdot\alpha(\text{j})$.

Recordemos que $PTJ(n) = \sum_{X \in D_n} \frac{1}{m_X}$. Es fácil ver que

$$\sum_{X \in D_{\hat{d}}} \frac{1}{m_X} = \sum_{k=0}^{15} \sum_{j=0}^{42} \binom{499}{333} \binom{128}{86+j} \binom{32}{17+k} \cdot \frac{1}{334 + 86\alpha(j) + 17\beta(k)}.$$

Con esto y usando Maple para los cálculos se obtiene que

$$PTJ(\hat{d}) = 2{,}719647814 \times 10^{177}.$$

SENADORES.

De forma análoga calcularemos ahora el poder total de Johnston de un senador $\hat{s}$, ahora consideraremos aquellas coaliciones que contienen a $\hat{s}$ y que de no contar con él no serían ganadoras. Para cada una de estas coaliciones calcularemos el número de elementos, además de $\hat{s}$, que tienen esta característica.

Comencemos por observar que las coaliciones ganadoras que contienen a $\hat{s}$ y que sin él serían perdedoras son aquellas coaliciones que tienen 334 diputados o más, 86 senadores ($\hat{s}$ incluido) y 17 legislaturas o más.

Sea $X = \{334 + j$ diputados, 86 ($\hat{s}$ incluido) senadores, $17 + k$ legislaturas$\}$.

Consideremos $\alpha(j)$ y $\beta(k)$ definidas para cada X dependiente de $\hat{s}$ de la misma manera que lo hicimos anteriormente.

Igual que para los diputados tenemos que

$$\sum_{X \in D_{\hat{s}}} \frac{1}{m_X} = \sum_{k=0}^{5} \sum_{j=0}^{166} \binom{500}{334+j} \binom{127}{85} \binom{32}{17+k} \cdot \frac{1}{334\alpha(j) + 86 + 17\beta(k)},$$

haciendo las operaciones con Maple obtenemos que

$$PTJ(\hat{s}) = 7{,}183613512 \times 10^{177}.$$

LEGISLATURAS.

Al igual que como lo hicimos en los dos casos anteriores, ahora tenemos que el poder total de Johnston de una legislatura $\hat{l}$ se calcula encontrando las coaliciones ganadoras que contienen a $\hat{l}$ y que sin $\hat{l}$ no serían ganadoras, posteriormente encontraremos el número de jugadores que cumplen lo mismo.

Recordemos que las coaliciones ganadoras que cumplen lo antes mencionado son aquellas que contienen 334 diputados o más, 86 senadores o más y exactamente 17 legislaturas de los estados, incluyendo a $\hat{l}$. Sea X una coalición ganadora con estas características. Consideremos $\alpha(j)$ y $\beta(k)$ definida igual que en las dos ocasiones anteriores, con esto se obtiene que

$$\sum_{X\in D_{\hat{l}}} \frac{1}{m_X} = \sum_{X\in D_{\hat{l}}} \Big(\sum_{k=0}^{42} \sum_{j=0}^{166} \binom{500}{334+j} \binom{128}{86+k} \binom{31}{16} \cdot \frac{1}{334\alpha(j)+86\beta(k)+17},$$

por lo tanto se tiene que

$$PTJ(\hat{l}) = 8{,}599196248 \times 10^{177}.$$

Una vez que hemos calculado el poder total de Johnston para cada uno de los jugadores obtenemos que

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} PTJ(n) = 500PTJ(\hat{d}) + 128PTJ(\hat{s}) + 32PTJ(\hat{l}) = 2{,}554500716 \times 10^{180}$$

Ahora que hemos calculado los poderes totales de Johnston para cada jugador podemos encontrar los índices de poder de Johnston para cada uno de los diputados, senadores y legislaturas de los estados.

DIPUTADOS.

$$IJ(\hat{d}) = \frac{PTJ(\hat{d})}{\sum_{n\in\mathbf{N}} IPJ(n)} = 0{,}0010646.$$

SENADORES.

$$IJ(\hat{s}) = \frac{PTJ(\hat{s})}{\sum_{n\in\mathbf{N}} IPJ(n)} = 0{,}0028121.$$

LEGISLATURAS.

$$IJ(\hat{l}) = \frac{PTJ(\hat{l})}{\sum_{n\in\mathbf{N}} IPJ(n)} = 0{,}0033663.$$

A diferencia de lo que ocurrió con los índices anteriores, el índice de Johnston le asigna mayor poder a las legislaturas de los estados que obtienen un 0,33 % del poder total, en segundo lugar a los senadores con un 0,28 % y por último, con un 0,106 % del poder están los diputados. Esto se debe a que a pesar de que el número de coaliciones ganadoras que dependen de una legislatura es menor que el número de coaliciones ganadoras que dependen de un senador, se tiene que son menos los jugadores indispensables para aquellas coaliciones que dependen de las legislaturas, por esta razón se les asigna mayor poder según este índice.

3.2.4

Índice de poder de Deegan-Packel.

Por último calcularemos el índice de poder de Deegan-Packel para los involucrados en el sistema para reformar la constitución en México . Para calcular este índice de poder primero es necesario calcular el poder total de Deegan-Packel de cada uno de los jugadores, el cual se calcula teniendo en cuenta únicamente a las coaliciones ganadoras mínimas. Realicemos el cálculo para cada jugador.

DIPUTADOS.

Para encontrar el poder total de Deegan-Packel de un diputado $\hat{d}$ debemos considerar el conjunto $M_{\hat{d}}$, que es el conjunto de todas las coaliciones ganadoras mínimas a las que $\hat{d}$ pertenece. Recordemos que éstas son aquellas coaliciones ganadoras que contienen a $\hat{d}$ y que al perder a cualquiera de sus jugadores se vuelven perdedoras.

Por lo tanto se tiene que si $X \in M_{\hat{d}}$ entonces $X = \{$ 334 diputados ($\hat{d}$ incluido), 86 senadores y 17 legislaturas de los estados $\}$. Claramente para todo $X \in M_{\hat{d}}$ se tiene que $|X| = 437$.

Como mencionamos en la Sección 2.4 se tiene que

$$PTDP(\hat{d}) = \sum_{X \in M_{\hat{d}}} \frac{1}{|X|},$$

por lo tanto se tiene que el poder total de Deegan-Packel es simplemente $|M_{\hat{d}}| \times \frac{1}{437}$.

Encontrar el número de coaliciones ganadoras mínimas a las que pertenece $\hat{d}$ es sencillo. Basta notar que si X es una coalición ganadora mínima que contiene a $\hat{d}$ es porque de los 499 diputados restantes, X contiene a 333, es decir hay $\binom{499}{333}$ formas diferentes de elegirlos. También se tiene que X contiene exactamente 86 senadores, elegidos de un grupo de 128, por lo tanto hay $\binom{128}{86}$ formas diferentes de elegir a los senadores de X. Además X debe tener justamente 17 legislaturas de las 32 posibles. Es decir hay $\binom{32}{17}$ maneras diferentes de elegir estas 17 legislaturas.

Por lo tanto el número de coaliciones ganadoras mínimas a las que $\hat{d}$ pertenece está dado por

$$\binom{499}{333}\binom{128}{86}\binom{32}{17},$$

de aquí que

$$PTDP(\hat{d}) = \binom{499}{333}\binom{128}{86}\binom{32}{17} \cdot \frac{1}{437} = 3{,}802697493 \times 10^{176}.$$

SENADORES.

Para calcular el índice de Deegan-Packel de un senador $\hat{s}$ usaremos el conjunto $M_{\hat{s}}$ que es el conjunto de todas aquellas coaliciones ganadoras mínimas que contienen a $\hat{s}$. Igual que antes tenemos que si $X \in M_{\hat{s}}$ entonces contiene 336 diputados, 86 senadores ($\hat{s}$ incluido) y 17 legislaturas de los estados. Es decir, para todo $X \in M_{\hat{s}}$ se tiene que $|X| = 437$.

Por lo tanto análogo a lo que ocurría con los diputados se tiene que

$$PTDP(\hat{s}) = \binom{500}{334}\binom{127}{85}\binom{32}{17} \cdot \frac{1}{437} = 3{,}868518071 \times 10^{176}.$$

LEGISLATURAS.

Por último calculemos el poder total de Deegan-Packel para una legislatura $\hat{l}$. Recordemos que para esto debemos considerar todas las coaliciones ganadoras mínimas que contienen a $\hat{l}$, denotado como $M_{\hat{l}}$. Igual que en los dos casos anteriores se tiene que si X pertenece a $M_{\hat{l}}$ entonces $|X| = 437$. De aquí que

$$PTDP(\hat{l}) = \binom{500}{334}\binom{128}{86}\binom{31}{16} \cdot \frac{1}{437} = 3{,}058828242 \times 10^{176}.$$

Ahora que hemos calculado los poderes totales de Deegan-Packel para cada jugador obtenemos que

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} PTDP(n) = 2{,}494401563 \times 10^{179}$$

los índices de Deegan-Packel. Con la ayuda de Maple encontramos los siguientes índices.

DIPUTADOS.

$$IDP(\hat{d}) = \frac{PTDP(\hat{d})}{\sum_{n\in\mathbf{N}} PTDP(n)} = 0{,}0015245.$$

SENADORES.

$$IDP(\hat{s}) = \frac{PTDP(\hat{s})}{\sum_{n\in\mathbf{N}} PTDP(n)} = 0{,}0015509.$$

LEGISLATURAS.

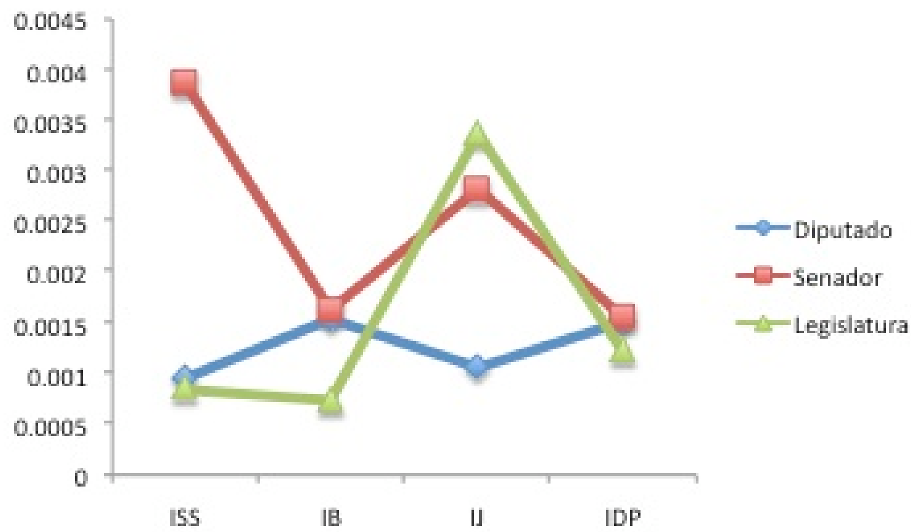
$$IDP(\hat{l}) = \frac{PTDP(\hat{l})}{\sum_{n\in\mathbf{N}} PTDP(n)} = 0{,}0012263.$$

Notemos que en esta manera de medir el poder, al igual que ocurrió con los dos primeros índices se asigna un mayor poder a los senadores, en segundo lugar a los diputados y en tercer lugar a las legislaturas de los estados. A diferencia de lo ocurrido en los índices de Shapley-Shubik y de Banzhaf, en este índice de poder se da una distribución casi uniforme, pues asigna un 0,152 % de poder a los diputados, mientras que los senadores obtienen el 0,155 % y las legislaturas de los estados el 0,122 % del poder .

Hemos calculado los cuatro índices de poder tratados en el capítulo anterior para los jugadores involucrados en el sistema para reformar la constitución en México. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos:

Jugador	ISS	IB	IJ	IDP
Diputado	0.00095528	0.0015390	0.0010646	0.0015245
Senador	0.0038661	0.0016163	0.0028121	0.0015509
Legislatura	0.00085916	0.00073701	0.0033663	0.0012263

A continuación presentamos una gráfica, con los datos de la tabla anterior, que ayudará a entender mejor la distribución del poder para los jugadores en cada uno de los cuatro índices y nos será útil porque así será mas fácil compararlos.



En esta gráfica podemos notar que la mayor asignación de poder es a un senador con el índice de Shapley-Shibik, mientras que el menor índice de poder es el índice de Banzhaf para una legislatura. En la gráfica es fácil observar que el índice en el que hay mayor diferencia entre el poder asignado a los jugadores es el índice de Johnston, además es evidente que el índice que distribuye de manera más pareja es el índice de Deegan-Packel.

3.3

Legislaturas de los estados.

En la sección anterior calculamos el índice de poder para las legislaturas de los estados. Es importante mencionar que cada una de las legislaturas de los estados esta formada por una determinada cantidad de diputados locales, por lo tanto el índice de poder arriba mencionado no está en manos de una sola persona, sino que se encuentra distribuido entre varios. En esta sección daremos a conocer como es que se forma cada uno de los congresos locales y calcularemos el índice de poder para un diputado local en cada uno de los estados.

El número de diputados locales es diferente para cada estado. La siguiente tabla muestra el número de diputados locales que componen cada una de las legislaturas de los estados. Además muestra el índice de poder que cada uno de los diputados tiene. Este índice se calcula considerando el poder asignado a las legislaturas de los estados en las secciones anteriores y distribuyéndolo de manera uniforme entre los diputados locales de cada estado [8].

estado	# diputados	ISS	IB	IJ	IDP
Ags.	27	$3,18 \times 10^{-5}$	$2,72\times^{-5}$	$1,24 \times 10^{-4}$	$4,54 \times 10^{-5}$
B.C.	25	$3,43 \times 10^{-5}$	$2,94 \times 10^{-5}$	$1,34 \times 10^{-4}$	$4,9 \times 10^{-5}$
B.C.S.	21	$4,09 \times 10^{-5}$	$3,5 \times 10^{-5}$	$1,6 \times 10^{-4}$	$5,83 \times 10^{-5}$
Camp.	35	$2,5 \times 10^{-5}$	$2,10 \times 10^{-5}$	$9,61 \times 10^{-5}$	$3,50 \times 10^{-5}$
Chis.	40	$2,14 \times 10^{-5}$	$1,82 \times 10^{-5}$	$8,41 \times 10^{-5}$	$3,06 \times 10^{-5}$
Chih.	33	$2,6 \times 10^{-5}$	$2,23 \times 10-5$	$1,02 \times 10^{-4}$	$3,71 \times 10^{-5}$
Coah.	31	$2,77 \times 10^{-5}$	$2,37 \times 10^{-5}$	$1,08 \times 10^{-4}$	$3,95 \times 10^{-5}$
Col.	25	$3,43 \times 10^{-5}$	$2,94 \times 10^{-5}$	$1,34 \times 10^{-4}$	$4,9 \times 10^{-5}$
D.F.	66	$1,30 \times 10^{-5}$	$1,11 \times 10^{-5}$	$5,1 \times 10^{-5}$	$1,85 \times 10^{-5}$
Dgo.	30	$2,86 \times 10^{-5}$	$2,45\times^{-5}$	$1,12 \times 10^{-4}$	$4,08 \times 10^{-5}$
Gto	36	$2,38 \times 10^{-5}$	$2,04 \times 10^{-5}$	$9,35 \times 10^{-5}$	$3,4 \times 10^{-5}$
Gro	46	$1,86 \times 10^{-5}$	$1,6 \times 10^{-5}$	$7,31 \times 10^{-5}$	$2,66 \times 10^{-5}$
Hgo	29	$2,96 \times 10^{-5}$	$2,54 \times 10^{-5}$	$1,16 \times 10^{-4}$	$4,22 \times 10^{-5}$
Jal	39	$2,2 \times 10^{-5}$	$1,88 \times 10^{-5}$	$8,63 \times 10^{-5}$	$3,14 \times 10^{-5}$
Edo. Mex	75	$1,14 \times 10^{-5}$	$9,82 \times 10^{-6}$	$4,48 \times 10^{-5}$	$1,63 \times 10^{-5}$
Mich.	40	$2,14 \times 10^{-5}$	$1,82 \times 10^{-5}$	$8,41 \times 10^{-5}$	$3,06 \times 10^{-5}$
Mor.	30	$2,86 \times 10^{-5}$	$2,45\times^{-5}$	$1,12 \times 10^{-4}$	$4,08 \times 10^{-5}$
Nay.	30	$2,86 \times 10^{-5}$	$2,45\times^{-5}$	$1,12 \times 10^{-4}$	$4,08 \times 10^{-5}$
N. L.	42	$2,04 \times 10^{-5}$	$1,75 \times 10^{-5}$	$8,01 \times 10^{-5}$	$2,91 \times 10^{-5}$
Oax.	42	$2,04 \times 10^{-5}$	$1,75 \times 10^{-5}$	$8,01 \times 10^{-5}$	$2,91 \times 10^{-5}$
Pue.	41	$2,09 \times 10^{-5}$	$1,79 \times 10^{-5}$	$8,21 \times 10^{-5}$	$2,99 \times 10^{-5}$
Qro	25	$3,43 \times 10^{-5}$	$2,94 \times 10^{-5}$	$1,34 \times 10^{-4}$	$4,9 \times 10^{-5}$
Q. R.	25	$3,43 \times 10^{-5}$	$2,94 \times 10^{-5}$	$1,34 \times 10^{-4}$	$4,9 \times 10^{-5}$
S. L. P.	27	$3,18 \times 10^{-5}$	$2,72\times^{-5}$	$1,24 \times 10^{-4}$	$4,54 \times 10^{-5}$
Sin.	40	$2,14 \times 10^{-5}$	$1,82 \times 10^{-5}$	$8,41 \times 10^{-5}$	$3,06 \times 10^{-5}$
Son.	33	$2,6 \times 10^{-5}$	$2,23 \times 10-5$	$1,02 \times 10^{-4}$	$3,71 \times 10^{-5}$
Tab.	35	$2,5 \times 10^{-5}$	$2,10 \times 10^{-5}$	$9,61 \times 10^{-5}$	$3,50 \times 10^{-5}$
Tam.	32	$2,68 \times 10^{-5}$	$2,3 \times 10^{-5}$	$1,05 \times 10^{-4}$	$3,83 \times 10^{-5}$
Tlax.	32	$2,68 \times 10^{-5}$	$2,3 \times 10^{-5}$	$1,05 \times 10^{-4}$	$3,83 \times 10^{-5}$
Ver.	50	$1,71 \times 10^{-5}$	$1,47 \times 10^{-5}$	$6,73 \times 10^{-5}$	$2,45 \times 10^{-5}$
Yuc.	25	$3,43 \times 10^{-5}$	$2,94 \times 10^{-5}$	$1,34 \times 10^{-4}$	$4,9 \times 10^{-5}$
Zac.	30	$2,86 \times 10^{-5}$	$2,45\times^{-5}$	$1,12 \times 10^{-4}$	$4,08 \times 10^{-5}$

Como podemos observar en la tabla anterior quien más diputados locales tiene es el Distrito Federal, y el congreso local más pequeño es el del estado de Baja California Sur, por lo tanto, los diputados locales con mayor poder son los de este último estado.

No es sorpresa que estos diputados tengan muy poco poder.

3.4

Reformas a una Ley General en México

En la sección 3.1 hablamos sobre cómo es que se puede hacer alguna modificación a la constitución en nuestro país. Otro tema que trataremos en este trabajo es el de las reformas a una ley en México. Si se realiza o no algún cambio a una de las leyes en nuestro país es algo que deciden los diputados, senadores y el presidente.

Para hacer un cambio a alguna ley de nuestro país los implicados pueden votar a favor o en contra, por lo tanto también podemos verlo como un sistema de votación sí-no, en donde los jugadores son los 500 diputados federales, los 128 senadores y el presidente de la República. Para que se dé un cambio en una de las leyes es necesario que este a favor el presidente, la mitad de los senadores más uno y la mitad de los diputados más uno. Otra opción para que se acepte un cambio en una ley es que el presidente no esté a favor, pero sí lo estén dos terceras partes de los diputados o más y dos terceras partes de los senadores o más. [2]

Consideremos entonces la reforma de las leyes en México como un sistema de votación sí-no $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ donde $\mathbf{N} := \{$Presidente, 500 diputados, 128 senadores$\}$ y $\mathbf{W} = \{X : X$ contiene al presidente, 251 diputados o más y 65 senadores o más $\}$ $\cup\{X : X$ contiene 334 diputados o más y 86 senadores o más$\}$.

Proposición 3.5. *Consideremos la reforma de leyes en México visto como un sistema de votación* $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ *donde* $\mathbf{N} := \{$*Presidente, 500 diputados, 128 senadores*$\}$ *y* $\mathbf{W} = \{X : X$ *contiene al presidente, 251 diputados o más y 65 senadores o más* $\}$ $\cup\{X : X$ *contiene 334 diputados o más y 86 senadores o más*$\}$*. Sean* $x =$*diputado y* $y =$*senador, entonces* $x \mid y$.

Demostración. Para esta demostración definamos las siguientes coaliciones:

$$Z = \{250 \text{ diputados distintos de } x, 65 \text{ senadores distintos de } y, \text{presidente}\},$$

$$Z' = \{251 \text{ diputados distintos de } x, 64 \text{ senadores distintos de } y, \text{presidente}\}.$$

Es claro que $Z \cap \{x, y\} = \emptyset$, también es fácil ver que $Z' \cap \{x, y\} = \emptyset$. Además es fácil observar que

$$Z \cup \{x\} \in \mathbf{W} \qquad \text{pero} \qquad Z \cup \{y\} \notin \mathbf{W},$$

de la misma manera se tiene que

$$Z' \cup \{y\} \in \mathbf{W} \qquad \text{pero} \qquad Z' \cup \{x\} \notin \mathbf{W}.$$

En conclusión $x \mid y$. ■

Afirmación 3.6. *El sistema para reformar las leyes en México no es un sistema de votación de peso.*

La demostración para esta afirmación es totalmente análoga a la de la Afirmación 3.2.

Proposición 3.7. *Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ el sistema para reformar las leyes en México. Es decir $\mathbf{N} = \{$Presidente, 500 diputados, 128 senadores$\}$ y $\mathbf{W} = \{X : X$ contiene al presidente, 251 diputados o más y 65 senadores o más $\} \cup \{X : X$ contiene 334 diputados o más y 86 senadores o más$\}$. La dimensión de este sistema es 2.*

Demostración. Es claro que la dimensión del sistema no es 1 pues el sistema no es de peso. Para demostrar que el sistema de votación tiene dimensión 2 hay que encontrar dos sistemas de peso tales que G se pueda describir como su intersección.

Sea $G_1 = (\mathbf{N}, \mathbf{W_1})$ un sistema de peso que asigna los pesos mediante la siguiente función:

$$w_1(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es diputado,} \\ 0, & \text{si } n \text{ es senador,} \\ 83, & \text{si } n \text{ es presidente,} \end{cases}$$

y sea $q_1 = 334$ el umbral para este sistema. Es decir, en este sistema

$$X \in \mathbf{W_1} \Leftrightarrow \sum_{n \in X} w_1(n) \geq 334.$$

Sea $G_2 = (\mathbf{N}, \mathbf{W_2})$ un sistema de peso que asigna los pesos mediante la siguiente función:

$$w_2(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es diputado,} \\ 1, & \text{si } n \text{ es senador,} \\ 21, & \text{si } n \text{ es presidente,} \end{cases}$$

y sea $q_2 = 86$ el umbral para este sistema. Por lo tanto en este sistema se cumple que

$$X \in \mathbf{W_2} \Leftrightarrow \sum_{n \in X} w_2(n) \geq 86.$$

Hay que verificar que $\mathbf{W_1} \cap \mathbf{W_2} = \mathbf{W}$.

Si $X \in \mathbf{W_1} \cap \mathbf{W_2}$ esto implica que $\sum_{n \in X} w_1(n) \geq 334$ y $\sum_{n \in X} w_2(n) \geq 86$.

Sea d el número de diputados que pertenecen a X y sea s el número de senadores contenidos en X. Tenemos dos casos, puede ser que X contenga o no al presidente.

Si X contiene al presidente tenemos que

$$\sum_{n \in X} w_1(n) = d(1) + s(0) + 83 = 83 + d \geq 334,$$

de aquí que $d \geq 251$.

Además

$$\sum_{n \in X} w_2(n) = d(0) + s(1) + 21 = 21 + s \geq 86,$$

por lo tanto $s \geq 65$.

Es decir X es una coalición que contiene al presidente, 65 senadores o más y 251 diputados o más. Por lo tanto $X \in \mathbf{W}$.

Si X no contiene al presidente tenemos que

$$\sum_{n \in X} w_1(n) = d(1) + s(0) = d \geq 334,$$

además

$$\sum_{n \in X} w_2(n) = d(0) + s(1) = s \geq 86,$$

por lo tanto X es una coalición que contiene 334 diputados o más y al menos 86 senadores, dicho de otra forma $X \in \mathbf{W}$.

En ambos casos concluimos que $X \in \mathbf{W}$, es decir $\mathbf{W_1} \cap \mathbf{W_2} \subseteq \mathbf{W}$.

Por otra parte si $X \in \mathbf{W}$ tenemos dos casos:

1. X es una coalición que contiene al presidente, 251 diputados o más y 65 senadores o más. En este caso tenemos que

$$\sum_{n \in X} w_1(n) = d + 83 \geq 251 + 83 = 334 \Rightarrow X \in \mathbf{W_1},$$

$$\sum_{n \in X} w_2(n) = s + 21 \geq 65 + 21 = 86 \Rightarrow X \in \mathbf{W_2},$$

   es decir, $X \in \mathbf{W_1} \cap \mathbf{W_2}$.

2. X es una coalición que no contiene al presidente, pero contiene al menos dos terceras partes de los diputados y más de dos terceras partes de los senadores, es decir 334 diputados o más y 86 senadores o más. Por lo tanto

$$\sum_{n \in X} w_1(n) = d \geq 334 \Rightarrow X \in \mathbf{W_1},$$

$$\sum_{n \in X} w_2(n) = s \geq 86 \Rightarrow X \in \mathbf{W_2},$$

   es decir, $X \in \mathbf{W_1} \cap \mathbf{W_2}$.

De aquí que $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{W_1} \cap \mathbf{W_2}$.

En conclusión: $\mathbf{W} = \mathbf{W_1} \cap \mathbf{W_2}$. ■

Proposición 3.8. *Sea $G = (\mathbf{N}, \mathbf{W})$ el sistema para reformar las leyes en México. Es decir $\mathbf{N} = \{$Presidente, 500 diputados, 128 senadores$\}$ y $\mathbf{W} = \{X : X$ contiene al presidente, 251 diputados o más y 65 senadores o más $\} \cup \{X : X$ contiene 334 diputados o más y 86 senadores o más$\}$. Sea $w : \mathbf{N} \to \mathbb{R}^2$ definida de la siguiente manera:*

$$w(n) = \begin{cases} (1,0), & \textit{si } n \textit{ es diputado,} \\ (0,1), & \textit{si } n \textit{ es senador,} \\ (83,21), & \textit{si } n \textit{ es presidente,} \end{cases}$$

definamos también $q \in \mathbb{R}^2$ como $q = (334, 86)$. Entonces

$$X \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \sum_{n \in X} w(n) \geq q.$$

Esta proposición es una consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Hemos demostrado que el sistema para reformar las leyes en México no es un sistema de peso, sin embargo si es de pesos vectoriales y los pesos y el umbral son elementos de $\mathbb{R}^2$.

3.5

Cálculo de los índices de poder.

En esta sección calcularemos los cuatro índices de poder definidos en el capítulo 2 para los jugadores del sistema descrito en la Sección 3.4.

3.5.1

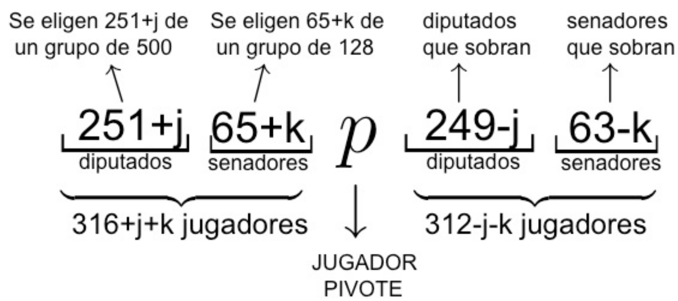
Índice de Shapley-Shubik.

Para calcular el índice de poder de Shapley-Shubik debemos considerar todos los ordenamientos que se pueden hacer con los jugadores, en este caso en total hay 629! ordenamientos. Para el índice de Shapley-Shubik de un jugador es necesario calcular el número de ordenamientos en los que un jugador es pivote. A continuación los cálculos para el presidente, diputados y senadores.

PRESIDENTE.

El presidente es pivote en los siguientes casos:

1. Antes de él hay 251 diputados o más pero menos de 334; además hay 65 senadores o más pero menos de 86. El siguiente dibujo sirve para encontrar el número de ordenamientos incluidos en este caso.



Con la idea expresada por este gráfico se tiene que, al igual que en la sección 3.2, en este caso el total de coaliciones en donde el presidente es pivote esta dado por

$$A := \sum_{j=0}^{82}\sum_{k=0}^{20}\binom{500}{251+j}\binom{128}{65+k}(316+j+k)!(312-j-k)!$$

$$A = 1{,}199400582 \times 10^{1488}.$$

2. Antes del presidente hay 251 diputados o más pero menos de 334, también antes de él se hay 86 senadores o más. Siguiendo la misma idea que en el caso anterior se tiene que

$$B := \sum_{j=0}^{82}\sum_{k=0}^{42}\binom{500}{251+j}\binom{128}{86+k}(337+j+k)!(291-j-k)!$$

$$B = 1{,}762499597 \times 10^{1487}.$$

3. Antes del presidente hay 334 diputados o más, 65 senadores o más pero menos de 86. Análogo a los dos casos anteriores se tiene que

$$C := \sum_{j=0}^{166}\sum_{k=0}^{20}\binom{500}{334+j}\binom{128}{65+k}(399+j+k)!(229-j-k)!$$

$$C = 1{,}762473472 \times 10^{1487}.$$

Por lo tanto, el número total de ordenamientos en los que el presidente es pivote es $A + B + C$, de aquí que

$$ISS(p) = \frac{A+B+C}{629!}.$$

Utilizando Maple para hacer las cuentas se obtiene que $ISS(p) = 0{,}1630660231$.

DIPUTADOS.

Primero debemos calcular en cuántos ordenamientos se tiene que un diputado $\hat{d}$ es pivote. El diputado $\hat{d}$ es pivote en los siguientes casos:

1. Antes de $\hat{d}$ se encuentra el presidente, exactamente 250 diputados (elegidos de un grupo de 499) y 65 senadores o más de un grupo de 128. En este caso tenemos que antes del jugador que nos interesa hay $316+k$ jugadores y después de el hay $312-k$ votantes. Siguiendo la misma idea que con el presidente se obtiene que la cantidad de ordenamientos en este caso es

$$A := \sum_{k=0}^{63} \binom{499}{250} \cdot \binom{128}{65+k} \cdot (316+k)! \cdot (312-k)!$$
$$A = 4{,}621691685 \times 10^{1485}.$$

2. Antes de $\hat{d}$ hay exactamente 333 diputados, los cuales se eligen de un grupo de 499, y 86 o más senadores elegidos entre 128 posibilidades. En este caso el número de ordenamientos es

$$B := \sum_{k=0}^{42} \binom{499}{333} \cdot \binom{128}{86+k} \cdot (419+k)! \cdot (209-k)!$$
$$B = 3{,}065275273 \times 10^{1485}.$$

De los dos casos anteriores obtenemos que

$$ISS(\hat{d}) = \frac{A+B}{629!}.$$

Haciendo las cuentas en la computadora obtenemos que $ISS(\hat{d}) = 0{,}00080771$. Este es el poder de cada diputado, también podemos calcular el poder que adquiere la cámara de diputados en conjunto, el cual es de 0,4038.

SENADORES.

El cálculo para saber en cuántos ordenamientos un senador $\hat{s}$ es pivote es completamente análogo a lo hecho con los diputados. De la misma manera tenemos dos casos:

1. Antes de $\hat{s}$ está el presidente, además hay 251 diputados o más elegidos de un grupo de 500 y exactamente 64 senadores que se escogen entre 127 posibilidades. Por lo tanto el número de ordenamientos en este caso es de

$$A := \sum_{j=0}^{249} \binom{500}{251+j} \cdot \binom{127}{64} \cdot (316+j)! \cdot (312-j)!$$

$$A = 2{,}076723789 \times 10^{1486}.$$

2. Antes de $\hat{s}$ se encuentran 334 diputados o más elegidos entre 500 posibilidades y exactamente 85 diputados que se escogen entre los 127 senadores restantes. Entonces, análogo a los casos anteriores se tiene que

$$B := \sum_{j=0}^{166} \binom{500}{334+j} \cdot \binom{127}{85} \cdot (419+j)! \cdot (209-j)!$$

$$B = 1{,}143283803 \times 10^{1486}.$$

Entonces el índice de Shapley-Shubik para $\hat{s}$ es $\frac{A+B}{629!}$. Utilizando Maple para las operaciones obtenemos que $ISS(\hat{s}) = 0{,}0033834$. De la misma manera que lo que lo hicimos para los diputados, aquí tenemos que el poder asignado a la cámara de senadores es de 0,4330.

Es fácil verificar que $\sum_{n \in \mathbf{N}} ISS(n) = 1$.

Según este índice es el presidente de México la persona con más poder pues tiene el 16,3 % del poder en el país, además podemos observar su poder es mucho mayor al que tienen los diputados y los senadores quienes tienen el 0,08 % y 0,33 % cada uno respectivamente. Observemos que los diputados tienen un poco menos de la cuarta parte del poder asignado a los senadores.

También podemos observar que ya en conjunto la diferencia entre ambas cámaras no es demasiada, pues la cámara de diputados cuenta con el 40,38 % mientras que la cámara de senadores tiene el 43,3 %. Por último podemos observar que ambas cámaras tienen más del doble del poder asignado al presidente.

3.5.2

Índice de poder de Banzhaf.

Para poder calcular el índice de poder de Banzhaf de un jugador necesitamos calcular primero el poder total de Banzhaf para cada votante involucrado en el sistema.

Recordemos que el poder total de Banzhaf de un jugador es el número de coaliciones dependientes de él. Comencemos por el presidente.

PRESIDENTE.

Las coaliciones dependientes del presidente pueden estar en alguno de los siguientes casos:

1. Coaliciones que contienen al presidente, 251 diputados o más pero menos de 334, 65 senadores o más pero menos de 86. En este caso se eligen $251 + j$ diputados de un grupo de 500 (con $j = 0, \ldots, 82$) y $65 + k$ senadores entre 128 disponibles ($k = 0, \ldots, 20$). De aquí que el número de coaliciones en este caso es

$$\sum_{j=0}^{82} \sum_{k=0}^{20} \binom{500}{251 + j} \cdot \binom{128}{65 + k} = 2{,}496027804 \times 10^{188}.$$

2. Coaliciones que contienen al presidente, 251 diputados o más pero menos de 334 y 86 o más senadores. Es decir, para estas coaliciones se eligen $251 + j$ diputados entre 500 posibilidades (j=0,. . . ,82) y de 128 senadores se eligen $86 + k$ con $k = 0, \ldots, 42$. Por lo tanto el número de coaliciones incluídas en este caso es de

$$\sum_{j=0}^{82} \sum_{k=0}^{42} \binom{500}{251 + j} \cdot \binom{128}{86 + k} = 3{,}366341925 \times 10^{184}.$$

3. Por último tenemos las coaliciones que contienen al presidente, 334 diputados o más y 65 senadores o más pero menos de 86. En estas coaliciones se eligen $334 + j$ diputados de un grupo de 500 con $j = 0, \ldots, 166$ y de los 128 senadores se eligen $65 + k$ donde $k = 0, \ldots, 20$, de aquí podemos concluir que el número de coaliciones en este caso es

$$\sum_{j=0}^{166} \sum_{k=0}^{20} \binom{500}{334 + j} \cdot \binom{128}{65 + k} = 1{,}220558038 \times 10^{175}.$$

Para encontrar el poder total de Banzhaf del presidente hay que sumar el número de coaliciones obtenidas en los tres casos. Usando Maple para realizar estas operaciones obtenemos que: $PTB(p) = 2{,}496364439 \times 10^{188}$.

DIPUTADOS.

Ahora encontraremos las coaliciones dependientes de un diputado $\hat{d}$. Sea $X \in \mathbf{W}$ tal que $\hat{d} \in \mathbf{X}$ y $X \setminus \{\hat{d}\} \notin \mathbf{W}$. X puede encontrarse en alguno de los siguientes casos:

1. X es una coalición a la cual pertenece el presidente, 65 senadores o más elegidos de un grupo de 128 y exactamente 250 diputados que se eligen entre los 499 restantes. De manera análoga a lo que se hizo con el presidente, obtenemos que el número de coaliciones en este caso es de

$$\sum_{k=0}^{63} \binom{499}{250} \cdot \binom{128}{65+k} = 9{,}232467986 \times 10^{186}.$$

2. X es una coalición a la que no pertenece el presidente, pero contiene al menos 86 senadores que se eligen entre 128 y exactamente 333 diputados elegidos entre los 499 restantes. Igual que en el caso anterior se tiene que el número de coaliciones en este caso es

$$\sum_{k=0}^{42} \binom{499}{333} \cdot \binom{128}{86+k} = 5{,}593610195 \times 10^{170}.$$

Por lo tanto el poder total de Banzhaf para un diputado $\hat{d}$ es

$$PTB(\hat{d}) = \sum_{k=0}^{63} \binom{499}{250} \cdot \binom{128}{65+k} + \sum_{k=0}^{42} \binom{499}{333} \cdot \binom{128}{86+k}.$$

Con ayuda de la computadora se obtiene que $PTB(\hat{d}) = 9{,}232467986 \times 10^{186}$.

SENADORES.

De manera completamente análoga a lo que hicimos con los diputados obtenemos que el poder total de Banzhaf para un senador $\hat{s}$ es

$$PTB(\hat{s}) = \sum_{j=0}^{249} \binom{500}{251+j} \cdot \binom{127}{64} + \sum_{j=0}^{166} \binom{500}{334+j} \cdot \binom{127}{85}.$$

Haciendo estas operaciones en Maple obtenemos que

$$PTB(\hat{s}) = 1{,}890132409 \times 10^{187}.$$

Con ayuda de la computadora se obtiene que $\sum_{n \in \mathbf{N}} PTB(n) = 7{,}2852 \times 10^{189}$. Una vez que hicimos este cálculo podemos obtener el índice de poder de Banzhaf para cada uno de los jugadores.

PRESIDENTE.

$$IB(p) = \frac{PTB(p)}{\sum_{n \in \mathbf{N}} PTB(n)} = 0{,}034266.$$

DIPUTADOS.

$$IB(\hat{d}) = \frac{PTB(\hat{d})}{\sum_{n \in \mathbf{N}} PTB(n)} = 0{,}0012673.$$

SENADORES.

$$IB(\hat{s}) = \frac{PTB(\hat{s})}{\sum_{n \in \mathbf{N}} PTB(n)} = 0{,}0025945.$$

Es fácil comprobar que $\sum_{n \in \mathbf{N}} PTB(n) = 1$.

Ahora que hemos calculado el índice de poder de Banzhaf para cada uno de los votantes involucrados en el sistema para reformar una ley en México podemos concluir que, al igual que en el índice anterior, el presidente es el jugador con mayor poder con el 3,42 %. Igual que en el índice de Shapley-Shubik quienes menos poder tienen son los diputados con el 0,12 % cada uno. La diferencia entre el poder asignado a los diputados y el que se da a cada uno de los senadores es menor que en el índice de Shapley-Shubik, pues el índice de poder de Banzhaf de un senador es el doble que el de un diputado.

Calculando el poder conjunto de los diputados y senadores podemos notar que, a diferencia del índice anterior, éste asigna mayor poder a la cámara de diputados, pues tiene el 63,36 % del poder. La cámara de senadores tiene casi la mitad, pues con esta forma de medir el poder se le asigna el 33,2 % del mismo dejando al presidente con diez veces menos poder que la cámara de senadores y casi veinte veces menos poder que la cámara de diputados.

3.5.3 Índice de poder de Johnston.

Para poder calcular el índide de poder de Johnston primero necesitamos calcular el poder total de Johnston de cada uno de los jugadores del sistema. Comencemos por el presidente.

PRESIDENTE.

Recordemos que el índice de poder de Johnston se calcula teniendo en cuenta las coaliciones dependientes de un jugador y ademas encontrando el número de jugadores que resultan indispensables para cada una de estas coaliciones. Al igual que en los dos índices anteriores para calcular el poder total de Johnston del presidente tenemos tres casos:

1. Consideremos las coaliciones dependientes del presidente que contienen al presidente, 251 senadores o más, pero menos de 334 y 65 senadores o más pero menos de 86. Sea X una coalición con estas características.

   X tiene $251 + j$ diputados con $j = 0, \ldots, 82$ y $65 + k$ senadores tomando $k = 0, \ldots, 20$. Es claro que el presidente es indispensable para esta coalición. Si en X hay exactamente 251 diputados se tiene que los 251 son indispensables para la coalición, pero si hay 252 o más, ninguno de ellos lo es. De la misma manera si hay justo 65 senadores todos son indispensables, pero si hay 66 o más ninguno de ellos lo es.

   Igual que lo hecho en la Sección 3.2.3 definamos dos funciones $\alpha(j)$ y $\beta(k)$ de la siguiente manera:

$$\alpha(j) = \begin{cases} 1, & \text{si } j = 0, \\ 0, & \text{si } j \neq 0 \end{cases} \qquad \beta(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0, \\ 0, & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

   Tenemos que el número de jugadores indispensables para X es: $1 + 251 \cdot \alpha(j) + 65 \cdot \beta(k)$.

2. Coaliciones que contienen al presidente, 251 diputados o más (pero menos de 334) y 86 senadores o más. Es evidente que el presidente es indispensable para estas coaliciones y que ninguno de los senadores lo es. Con los diputados ocurre

lo mismo que en el caso anterior. Por lo tanto, considerando $\alpha(j)$ definida antes obtenemos que el número de jugadores de los que depende la coalición para ser ganadora es $1 + 251 \cdot \alpha(j)$.

3. Coaliciones que contienen entre 65 y 85 senadores, 334 o más diputados y el presidente. De manera completamente análoga al caso anterior se tiene que el número de jugadores sin los cuales estas coaliciones no son ganadoras es: $1 + 65 \cdot \beta(k)$ con $\beta(k)$ definida en el Caso 1.

Al calcular el poder total de Banzhaf del presidente encontramos que el número de coaliciones que se encuentran en el caso uno es

$$\sum_{j=0}^{82}\sum_{k=0}^{20}\binom{500}{251+j}\cdot\binom{128}{65+k},$$

cada una de estas coaliciones tiene $1+251\cdot\alpha(j)+65\cdot\beta(k)$ jugadores indispensables.

El número de coaliciones incluidas en el caso número dos es

$$\sum_{j=0}^{82}\sum_{k=0}^{42}\binom{500}{251+j}\cdot\binom{128}{86+k},$$

donde cada una de ellas tiene $1+251\cdot\alpha(j)$ jugadores sin los cuales no sería ganadora.

El número de coaliciones en el caso 3 es

$$\sum_{j=0}^{166}\sum_{k=0}^{20}\binom{500}{334+j}\cdot\binom{128}{65+k},$$

con $1 + 65 \cdot \beta(k)$ jugadores necesarios para que sea ganadora.

Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned}PTJ(p) = &\sum_{j=0}^{82}\sum_{k=0}^{20}\binom{500}{251+j}\cdot\binom{128}{65+k}\cdot\frac{1}{1+251\cdot\alpha(j)+65\cdot\beta(k)}+\\ &\sum_{j=0}^{82}\sum_{k=0}^{42}\binom{500}{251+j}\cdot\binom{128}{86+k}\cdot\frac{1}{1+251\cdot\alpha(j)}+\\ &\sum_{j=0}^{166}\sum_{k=0}^{20}\binom{500}{334+j}\cdot\binom{128}{65+k}\cdot\frac{1}{1+65\cdot\beta(k)}.\end{aligned}$$

Utilizando Maple para realizar las operaciones obtenemos que

$$PTJ(p) = 1{,}973593359 \times 10^{188}.$$

DIPUTADOS.

Para encontrar las coaliciones dependientes de un diputado $\hat{d}$ en el índice anterior tomamos dos casos. Como aquí utilizaremos las mismas coaliciones veamos cuales eran

1. Coaliciones que contienen al presidente, 65 senadores o más y exactamente 251 diputados($\hat{d}$ incluido). Notemos que en estas coaliciones el presidente resulta indispensable, lo mismo que los 251 diputados, con los senadores ocurre lo mismo que antes, de haber justo 65, todos ellos son indispensables, de lo contrario ninguno lo es. De aquí obtenemos que el número de jugadores sin los cuales las coaliciones incluidas en este caso no serían ganadoras es $252 + 65 \cdot \beta$ tomando $\beta(k)$ antes definida.

2. Coaliciones en las que no está el presidente pero hay justo 334 diputados, incluyendo a $\hat{d}$ y 86 senadores o más. Al igual que antes es claro que los 334 diputados son necesarios para que la coalición sea ganadora. Con los senadores ocurre que si sólo hay 86 todos ellos son necesarios, pero si hay 87 o más ninguno lo es. Por lo tanto, el número de jugadores sin los que una coalición no es ganadora es $334 + 86 \cdot \beta$.

Considerando que el número de coaliciones incluidas en el primer caso es de

$$\sum_{k=0}^{63} \binom{499}{250} \cdot \binom{128}{65+k},$$

y el número de coaliciones en el segundo caso es de

$$\sum_{k=0}^{42} \binom{499}{333} \cdot \binom{128}{86+k},$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned} PTJ(\hat{d}) = &\sum_{k=0}^{63} \binom{499}{250} \cdot \binom{128}{65+k} \cdot \frac{1}{252 + 65 \cdot \beta(k)} + \\ &\sum_{k=0}^{42} \binom{499}{333} \cdot \binom{128}{86+k} \cdot \frac{1}{334 + 86 \cdot \beta(k)}. \end{aligned}$$

Usando la computadora para realizar estos cálculos se obtiene que

$$PTJ(\hat{d}) = 3{,}551668953 \times 10^{184}.$$

SENADORES.

De manera totalmente análoga a lo hecho con los diputados se obtiene que, para un senador determinado $\hat{s}$

$$\begin{aligned} PTJ(\hat{s}) = & \sum_{j=0}^{299} \binom{500}{251+j} \cdot \binom{127}{64} \cdot \frac{1}{66 + 251 \cdot \alpha(j)} + \\ & \sum_{j=0}^{166} \binom{500}{334+j} \cdot \binom{127}{85} \cdot \frac{1}{86 + 334 \cdot \alpha(j)}. \end{aligned}$$

Usando Maple para las operaciones obtenemos

$$PTJ(\hat{s}) = 2{,}696778375 \times 10^{185}.$$

Una vez que hemos calculado los poderes totales de Johnston de poder para cada uno de los jugadores obtenemos que

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} PTJ(n) = 2{,}496364439 \times 10^{188},$$

con lo cual podemos calcular los índices de poder de Johnston.

PRESIDENTE.

$$IJ(p) = \frac{PTJ(p)}{\sum_{n \in \mathbf{N}} PTJ(n)} = 0{,}79059.$$

DIPUTADOS.

$$IJ(\hat{d}) = \frac{PTJ(\hat{d})}{\sum_{n \in \mathbf{N}} PTJ(n)} = 0{,}0001422.$$

SENADORES.

$$IJ(\hat{s}) = \frac{PTJ(\hat{s})}{\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} PTJ(n)} = 0{,}0010803.$$

Como podemos observar, a diferencia de los dos índices anteriores este asigna la mayor cantidad de poder al presidente, pues tiene el 79,05 % del poder, mientras que los diputados (de manera conjunta) tienen el 7,11 % del poder, a pesar de ser 500 personas. La cámara de senadores tiene el 13,82 %. Además el poder asignado a un solo diputado es casi diez veces menor que el asignado a un senador.

3.5.4

Índice de poder de Deegan-Packel.

Al igual que en los dos índices anteriores, para poder calcular este índice de poder necesitamos obtener el poder total de Deegan-Packel de cada jugador. Recordemos que para calcular el poder total de Deegan-Packel debemos conocer el número de coaliciones ganadoras mínimas a las que pertenece cada uno de los votantes. Como mencionamos en la Definición 1.2 estas coaliciones son aquellas que son ganadoras, pero que de perder a cualquiera de sus integrantes dejan de serlo.

PRESIDENTE.

Las coaliciones ganadoras mínimas a las que pertenece el presidente son aquellas que además de contar con él contienen exactamente 65 senadores y 251 diputados. Es decir, aquellas que de un grupo de 500 eligen justo 251 y de los 128 senadores disponibles escogen 65. Por lo tanto, el número de coaliciones ganadoras mínimas a las que pertenece el presidente es

$$\binom{500}{251} \cdot \binom{128}{65},$$

cada una de estas coaliciones tiene 317 elementos. De aquí que

$$PTDP(p) = \binom{500}{251} \cdot \binom{128}{65} \cdot \frac{1}{317}.$$

Haciendo la cuenta se tiene que $PTDP(p) = 8{,}650389949 \times 10^{183}$.

DIPUTADOS.

Las coaliciones ganadoras mínimas a las que pertenece un diputado $\hat{d}$ pueden ser de alguna de las siguientes dos formas:

1. Contienen al presidente, 65 senadores elegidos entre 128 y 250 diputados (además de $\hat{d}$) elegidos entre los 499 restantes. Por lo tanto el número de coaliciones en este caso es de
$$\binom{499}{250} \cdot \binom{128}{65},$$
cada una de estas coaliciones tiene 317 elementos.
2. Coaliciones que contienen a 86 de los 128 senadores, y 333 diputados elegidos entre los 499 restantes. Por lo tanto el número de coaliciones en este caso es de
$$\binom{499}{333} \cdot \binom{128}{86},$$
cada una de estas coaliciones tiene 420 elementos.

En conclusión obtenemos
$$PTDP(\hat{d}) = \binom{499}{250} \cdot \binom{128}{65} \cdot \frac{1}{317} + \binom{499}{333} \cdot \binom{128}{86} \cdot \frac{1}{420}.$$
Con ayuda de Maple se tiene que $PTDP(\hat{d}) = 4{,}342495755 \times 10^{183}$.

SENADORES.

De manera completamente análoga a lo hecho para los diputados se tiene que
$$PTDP(\hat{s}) = \binom{500}{251} \cdot \binom{127}{64} \cdot \frac{1}{317} + \binom{500}{334} \cdot \binom{127}{85} \cdot \frac{1}{420}.$$
Una vez que hemos hecho las operaciones obtenemos $PTDP(\hat{s}) = 4{,}392776146 \times 10^{183}$.

Ahora que hemos calculado el poder total de cada jugador se obtiene
$$\sum_{n \in \mathbf{N}} PTDP(n) = 2{,}742173614 \times 10^{186}.$$

Ahora podemos obtener los índices de poder.

PRESIDENTE.

$$IDP(p) = \frac{PTDP(p)}{\displaystyle\sum_{n \in \mathbf{N}} PTDP(n)} = 0{,}0031546.$$

DIPUTADOS.

$$IDP(\hat{d}) = \frac{PTDP(\hat{d})}{\displaystyle\sum_{n \in \mathbf{N}} PTDP(n)} = 0{,}0015836.$$

SENADORES.

$$IDP(\hat{s}) = \frac{PTDP(\hat{s})}{\displaystyle\sum_{n \in \mathbf{N}} PTDP(n)} = 0{,}001609.$$

Como podemos observar este índice es el que distribuye el poder de manera un poco más uniforme, pues a pesar de que es al presidente a quién mas poder el otorga (igual que en los demás índices), en este caso la diferencia no es tan marcada, pues da al presidente el 0,31 %, a un diputado el 0,15 % y a un senador 0,16 %.

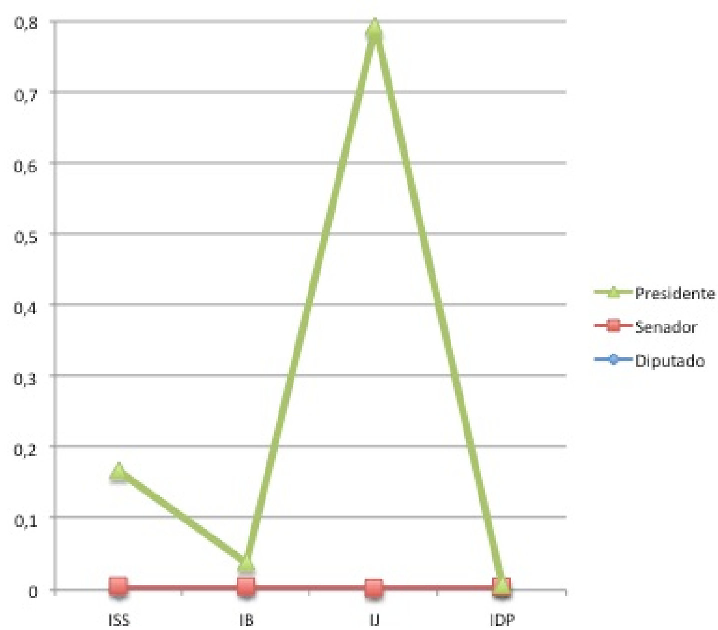
Calculando el poder de manera conjunta se tiene que la cámara de diputados obtiene el 79,18 %, la de senadores el 20,5 %. Es curioso pues el presidente, que se supone es la persona más importante en cuestiones políticas tiene menos del 1 % del poder según este índice.

Hemos terminado los cálculos de los cuatro índices de poder definidos en el segundo capítulo para los jugadores del sistema para reformar las leyes en México. La siguiente tabla nos muestra los resultados obtenidos.

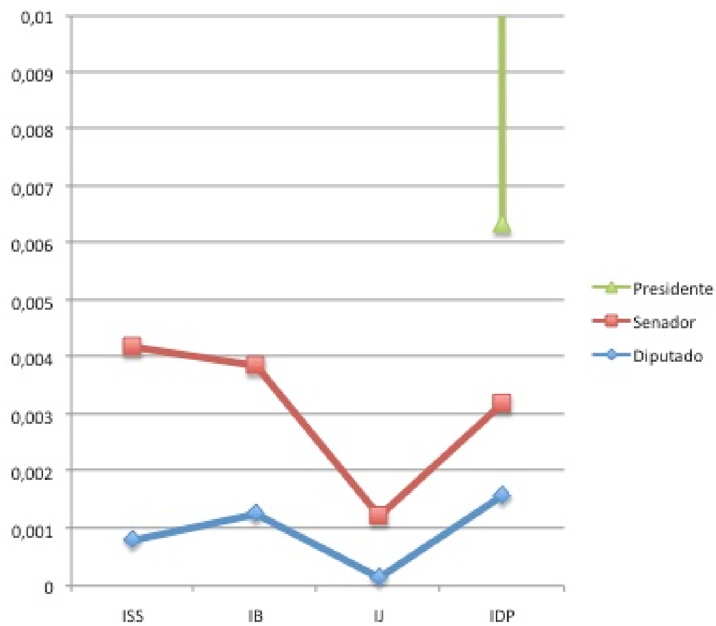
jugador	ISS	IB	IJ	IDP
Diputado	0.080771 %	0.12673 %	0.01422 %	0.15836 %
Senador	0.3383 %	0.25945 %	0.10803 %	0.1609 %
Presidente	16.307 %	3.4266 %	79.059 %	0.31546 %

En la tabla anterior podemos observar que los cuatro índices otorgan una mayor cantidad de poder al presidente, en segundo lugar a los senadores y en tercer lugar a los diputados, lo cual es coherente con la política de nuestro país.

Al igual que lo hecho en el sistema de enmienda de la Constitución Mexicana a continuación presentamos una gráfica que nos ayuda a comparar el poder que los cuatro índices estudiados en este trabajo asignan a cada uno de los involucrados en el sistema para reformar una ley en México.

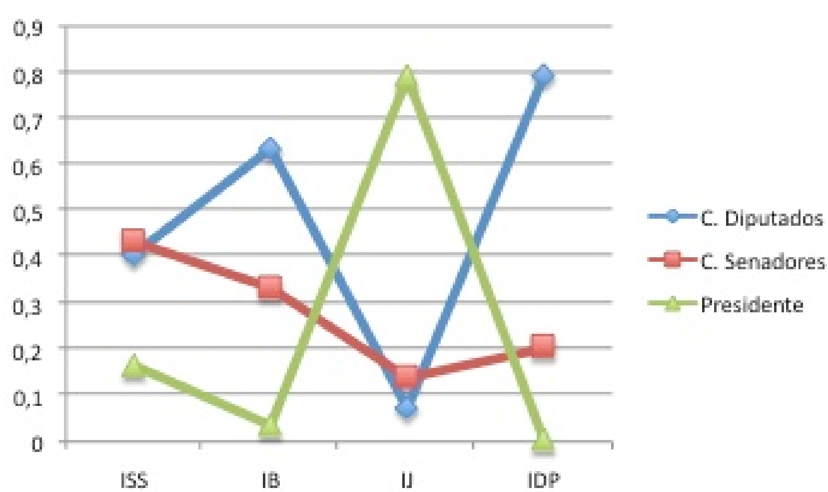


En esta gráfica es muy evidente que quien mas poder tiene es el presidente, es tanta la diferencia que el poder asignado a los diputados y senadores se pierde, por esta razón para observar lo que ocurre con los diputados y senadores hubo necesidad de realizar la siguiente gráfica en la que se disminuye la escala, por lo cuál solo aparecen los diputados y senadores.



Aquí podemos notar que en cualquier índice que se considere siempre los senadores tienen mayor poder que los diputados, pero como mencionamos antes, no se compara con el poder asigando al presidente, el cual es mucho mayor.

Parecería que esta gráfica en realidad no nos dice demasiado pues sólo indica que el presidente tiene mayor poder que un diputado y un senador, lo cuál no es ninguna sorpresa. La siguiente gráfica nos permite comparar el poder asignado al presidente con el poder que se asigna a la cámara de diputados y a la de senadores.



Conclusiones

Es interesante encontrar algunos conceptos de matemáticas aplicados a temas sociales, en particular, fue sorprendente encontrar una aplicación en una área como la política, por la polémica que este tema puede causar. Aplicar algunos modelos ya conocidos a temas en la política de nuestro país resulta complicado pues hay muchos intereses en juego que no son fáciles de examinar, por lo tanto debimos considerar los casos mas sencillos, por lo que este trabajo represento una primera aproximación a un modelo.

En el primer capítulo describimos lo que era un sistema de votación sí-no, así como algunas de sus propiedades, descubrimos que no todos los sistemas de votación son de peso y encontramos una manera de reconocer aquellos que sí lo son. Al comenzar a estudiar los sistemas de votación, resulto sorprendente que no todos los sistemas de votación son de peso, pues la intuición nos indicaba lo contrario, sin embargo, esto intenta corregirse con el concepto de pesos vectoriales. Descubrimos que si generalizamos la idea de peso y umbral a vectores entonces sí se cumple que todos los sistemas de votación son de pesos vectoriales.

En el segundo capítulo nos propusimos encontrar formas para medir el poder de los jugadores en un sistema de votación, con este objetivo en mente presentamos cuatro índices que nos sirven para medir el poder de los votantes en un sistema de votación y, utilizando un ejemplo sencillo, realizamos el cálculo de estos índices para los votantes implicados. Posteriormente se dieron algunas definiciones que nos permiten comparar a los jugadores en términos de que tan deseable resulta cada uno de ellos para las coaliciones y haciendo uso de estas definiciones encontramos nuevas maneras de definir si un sistema de votación cuenta con algunas de las propiedades mencionadas en el Capítulo 1.

Al estudiar la reforma de la Constitución en México como un sistema de votación los resultados de tres de los índices de poder fueron bastante predecibles, sin embargo en el caso del índice de Johnston es sorprendente que asigne mayor poder a las legislaturas de los estados que a los diputados o senadores. Tal como esperábamos un senador tiene mas poder que un diputado, sin importar cuál de los índices estamos utilizando.

Por otra parte, al estudiar la reforma de las leyes generales en nuestro país sabíamos que el presidente tendría más poder que cada diputado y cada senador sin embargo al hacer las comparaciones entre el presidente y las cámaras resulta sorprendente que no siempre es igual. Si consideramos el índice de Shapley-Shubik este asigna a la cámara de senadores casi el mismo poder que la cámara de diputados y ambos tienen mucho mas poder que el presidente. En el caso del índice de Banzhaf también la cámara de diputados cuenta con mayor poder que la cámara de senadores y el presidente mucho menos poder que cualquiera de las dos cámaras. Sin embargo si consideramos el índice de Johnston el presidente tiene mucho más poder que todos los senadores y diputados juntos. Por otro lado si consideramos el índice de poder de Deegan-Packel el presidente obtiene muy poco poder mientras que la cámara de diputados obtiene mucho mas poder que la cámara de senadores.

Esperamos que en un futuro se realice algún proyecto en el que se utilicen herramientas para realizar un modelo que refleje mejor lo que en realidad sucede en las situaciones antes mencionadas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Alan D. Taylor, *Mathematics and Politics: Strategy, Voting, Power and Proof*, Primera edición, Springer, Nueva York (1995).

[2] *Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos* http://info4.juridicas.unam.mx/ijure/fed/9/

[3] J.J. O'Connor y E.F. Robertson, *The history of Voting*, The MacTutor History of Mathematics Archive http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Voting.html

[4] Alan Taylor y William Zwicker, *A Characterization of Weighted Voting*, Proceedings of the American Mathematical Society **115** (1992) 1089-1094.

[5] Manfred J. Holler y Edward W. Packel, *Power, luck and the right index*, Journal of Economics **43** (1983) 21-29.

[6] Statistics Canada,

http://www40.statcan.gc.ca/l01/cst01/demo02d-eng.htm

[7] John Banzhaf, *Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis*, Rutgers Law Review **19** (1965) 317-343.

[8] Consorcio para el diálogo parlamentario y la equidad, http://www.consorcio.org.mx/vinculos.htm#congresos