UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería.

Área Académica de Matemáticas y Física

Presencia de No-Conmutatividad en un modelo de Cosmología Cuántica

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN FÍSICA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

PRESENTA

LUIS EFRÉN ESCORZA ROSAS

ASESORES:

DR. OCTAVIO JOSÉ OBREGÓN DÍAZ
DR. CARLOS ARTURO SOTO CAMPOS

Pachuca Hgo.
Marzo del 2011

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a toda mi familia por su apoyo, pero en especial quiero agradecer a mi mamá María de los Ángeles Escorza por su dedicación y sacrificio, y a mi abuelito Luis Escorza Rangel, quien aunque ya no esta, fue mas que un padre para mi cuyas enseñanzas me han servido en todo momento.

También quiero agradecer a mis asesores el Dr. Octavio José Obregón Díaz y el Dr. Carlos Arturo Soto Campos por sus consejos y apoyo, al Dr. Julio César López Domínguez por su valiosa ayuda en la realización de este trabajo, y todos los profesores que he tenido durante la carrera y me han dado a conocer el mundo de la física.

Por último, a mis compañeros y amigos que has estado conmigo en todo este tiempo.

Índice general

Resumen

En esta tesis se abordan dos problemas en donde se presenta la no-conmutatividad. El primero de ellos consiste de un sistema en el que una partícula cargada está restringida a moverse en un plano que interactúa con un campo magnético perpendicular al plano de movimiento. Se analizará la no-conmutatividad en dicho sistema mediante un procedimiento propuesto por R. Jackiw.

El segundo problema consiste de un sistema que surge de la teoría de cuerdas. Dicho sistema incluye un campo de taquión. A través de la formulación ADM y la ecuación de Wheeler-DeWitt, aplicada a cosmologia veremos que se puede construir una ecuación cuántica para describir el Universo. En este sistema las coordenadas se identificarán con las variables del mini-superespacio, que se pueden elegir de diversas maneras. El problema de definir el tiempo ha sido salvado por la propuesta de A. Sen en en el sentido de que, al menos, en este modelo el taquión que aparece en la ecuacion de Wheeler-DeWitt se podría interpretar como el tiempo. Por eso es que podemos emular el caso de Jakiw en mecánica cuántica ahora con cosmología cuántica. Nuevamente veremos que en este sistema se presenta la no-conmutatividad en dos de las coordenadas del minisuperespacio.

Introducción

La no-conmutatividad fue propuesta en los inicios de la teoría cuántica de campos en la cual se pretendía usar estructuras no-conmutativas de coordenadas espacio-tiempo en escalas de longitudes muy pequeñas. El primero en formalizar esta idea fue Snyder [1], motivado por la necesidad de controlar las divergencias ultravioletas que aparecían en la teoría cuántica de campos. La idea detrás de un espacio-tiempo no-conmutativo está inspirada en las relaciones de conmutación entre los operadores de posición y momento de la mecánica cuántica.

A pesar de que las ideas de no-conmutatividad están inspiradas desde un punto de vista cuántico, es posible encontrar este tipo de relaciones en sistemas clásicos, por ejemplo, en el problema de Landau [2, 3] (sistema que consiste en un campo magnético intenso perpendicular a un plano actuando sobre una partícula moviéndose sobre éste), en el que surge una estructura no-conmutativa de forma natural. A pesar de que su interpretación física se da sólo en el nivel cuántico, relacionándolo con el principio de incertidumbre de Heisenberg.

El nacimiento de la teoría de álgebras de von Neumann fue origen de la geometría no-conmutativa, refiriéndose al estudio de espacios topológicos en los cuales las C*-álgebras conmutativas de funciones son reemplazadas por álgebras no-conmutativas. Las ideas de geometría no conmutativa fueron revividas en la década de los ochenta por los matemáticos Connes, Woronowicz y Drinfel'd, quienes generalizaron la noción de una estructura diferencial de arreglos no-conmutativos [1].

Además de encontrar la no-conmutatividad de forma natural en modelos matriciales, ésta surge de forma natural en otros escenarios como lo es la teoría de cuerdas. Recientemente, en conexión con desarrollos en teoría de cuerdas ha sido de gran interés el estudio de teoría de campos no-conmutativos. En la década de los ochenta se planteó el mismo tipo de expectaciones acerca de la estructura de espacio-tiempo en distancia pequeñas, sugiriendo que el espacio-tiempo podría ser no-conmutativo. Esta intrigante posibilidad implica nuevos y profundos cambios en nuestra concepción del espacio tiempo que podría ser visualizado en el nivel de mecánica cuántica.

Esta aparente necesidad en teoría de cuerdas para una descripción del espacio tiempo en términos de geometría no-conmutativa es actualmente más fuerte, debido a la noción de geometría cuántica, la cual podría ser definida como la modificación apropiada de la relatividad general implicada por la teoría de cuerdas.

Una consecuencia en cosmología es que, en edades tempranas del universo (antes del tiempo de Planck $t_P \approx 5{,}39124 \times 10^{-44} s$), efectos no triviales de no-conmutatividad pueden ser esperados. Es de suponer que en esta escala es necesario que el universo sea descrito con una teoría cuántica (cosmología cuántica). Si la Relatividad General es la base sobre la cual está sustentada la descripción del Universo, para poder describir cuánticamente al Universo es necesario tener una teoría cuántica de la gravedad.

Por otra parte en el estudio de universos homogéneos la métrica depende sólo en el parámetro temporal, entonces la dependencia espacial puede ser integrada fuera en la acción y un modelo con espacio de configuraciones de dimensión finita surge, llamado también minisuperespacio, cuyas variables son las componentes 3-métricas. Estas teorías han sido consideradas por si mismas, y su cuantización es ejecutada siguiendo las reglas de la mecánica cuántica. La construcción del minisuperespacio es un proceso para definir modelos de cosmología cuántica en la búsqueda de describir el comportamiento cuántico de escenarios muy tempranos del universo. Definiendo estos modelos necesariamente se congelan grados de libertad, de modo que estos son sólo simples y probablemente modelos aproximados de la gravedad cuántica completa en tiempos de Planck.

A la fecha existen diferentes propuestas de una teoría cuántica de la gravedad, sin embargo ninguna de éstas está del todo terminada. Una propuesta es la cuantización canónica del sistema, para lo cual es necesario formular la Relatividad General como un sistema canónico con constricciones y de ahí promover a operadores las variables canónicas clásicas. Sin embargo, esta tarea no es del todo simple ni consistente por lo que debemos de simplificar nuestra manera de cuantizar el sistema. La simplificación consiste en tomar los coeficientes de la métrica como las coordenadas canónicas y sus derivadas respecto al tiempo como sus momentos canónicos asociados, en caso de que el sistema a considerar contenga materia el campo de materia sería una coordenada canónica y su término cinético su momento canónico asociado. Una vez realizada esta tarea, se escribe el Hamiltoniano del sistema clásico en términos de estos momentos y coordenadas. Una de las constricciones del sistema nos proveerá de la ecuación cuántica del Universo (ecuación de Wheeler-DeWitt [4]) una vez que se promueven los momentos a operadores.

En la descripción del Universo actual es necesaria la inclusión de unos tipos de materia y energía que son distintas a las que conocemos, ésta es la materia oscura y la energía oscura. De estos solamente conocemos sus efectos gravitacionales sobre la materia conocida, como fotones, bariones, etc. Para completar el esquema teórico que describe estos efectos es necesario incluir materia tipo campo escalar en el tensor de energía-momento de las ecuaciones de Einstein o incluir una constante (constante cosmológica).

La teoría de cuerdas es, sin duda, uno de los candidatos más fuertes a ser la teoría del todo. El hecho de que sea necesaria la existencia de más dimensiones a las que conocemos podría ser un cuestionamiento sobre su validez, sin embargo esta característica es la que la hace aun más interesante. Cuando escribimos la teoría en 4 dimensiones, es decir, bajamos de dimensión la teoría, es posible obtener una basta cantidad de campos con ciertas características que pueden jugar el rol de candidatos a materia oscura o a energía oscura, entre otros. Uno de estos campos que es inherente a la teoría de cuerdas es el llamado Taquión.

Este trabajo se dividira en 4 capítulos: En el capítulo 1 daremos una breve introducción a relatividad general, y además, explicaremos en que consiste el formalismo ADM; en el capítulo 2, hablaremos sobre cosmología cuantica, para esto, se continuará con el formalismo ADM para construir una formulación Hamiltoniana, se explicará brevemente, como son los modelos cosmologico FRW (Friedman, Robertson, Walker), y se utilizará la cuantización canonica para contruir un modelo de cosmología cuantica; en el capítulo 3 se hablará un poco de no-conmutatividad en mecánica cuántica y se verá como es posible encontrar relaciones no-conmutativas en las coordenadas de forma clásica en el problema de Landau, con la ayuda de un procedimiento propuesto por Jackiw en [3]; por último, en el capítulo 4, tomaremos un modelos de cosmología proveniente de teoría de cuerdas [5], y analizaremos si es posible encontrar relaciones no-conmutativas siguiendo el procedimiento de Jackiw, las cuales si son encontradas, su interpretación es en el nivel de la cosmología cuántica.

Capítulo 1

Fundamentos de Relatividad General y Formalismo ADM

1.1. Relatividad General

La Relatividad General es la teoría de Einstein, la cual surgió a partir de la Relatividad Especial al ver que no incluía un análisis de aceleración y la fuerza de gravedad. La idea es que mientras que la mayoría de la fuerzas están representadas por campos definidos en el espacio-tiempo, de hecho, la gravedad está unida al espacio-tiempo, es decir que lo que nosotros conocemos y experimentamos como gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. Por lo tanto, necesitamos entender el espacio-tiempo, la curvatura y como está relacionada la curvatura con la gravedad.

1.1.1. Formalismo Matemático

En mecánica clásica tenemos tres dimensiones espaciales y el tiempo es visto como un parámetro, en este caso la distancia entre dos puntos (coordenadas cartesianas) está dada por

$$s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \tag{1.1}$$

La cual puede ser vista de forma infinitesimal como

$$ds^2 \equiv d\ell^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{1.2}$$

donde $(x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$ y

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Los cambios del sistema de coordenadas son hechos independientemente del tiempo, y si la coordenada x^i es una función de las coordenadas $x^{j'}$ en el otro sistema, utilizando la regla de la cadena, llegamos a

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} dx^{j'} = \Lambda^i_{j'} dx^{j'}. \tag{1.3}$$

En relatividad general vamos a considerar las coordenadas t, x, y y z en el espacio-tiempo, donde podemos ver x, y y z como las coordenadas en el sistema cartesiano estándar, y t la coordenada temporal. Un evento es definido en un punto en el espacio-tiempo, caracterizado únicamente por t, x, y y z. Entonces el intervalo espacio-tiempo entre dos eventos es

$$\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \tag{1.4}$$

donde c es algún factor de conversión fijo entre espacio y tiempo; en este caso, esto es una velocidad fija, la cual resultará ser la velocidad de la luz, y por simplicidad vamos a considerar $c = 1$. Este espacio 4-dimensional es conocido como espacio de Minkowski.

Vamos a introducir la métrica de Minkowski en su forma matricial

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces podemos escribir el intervalo de espacio-tiempo de forma infinitesimal

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \tag{1.5}$$

o lo que es lo mismo

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^i)^2 \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.6}$$

donde $x^0 = t$.

Si el intervalo ds^2 es negativo, cero o positivo, entonces se dice que el intervalo es temporaloide, nulo o espacialoide, respectivamente.

Durante el cambio de sistema de coordenadas, podemos escribir, justo como en el espacio tridimensional,

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} dx^{\nu'} = \Lambda^\mu_{\nu'} dx^{\nu'}. \tag{1.7}$$

Note que combinando esta transformación con la expresión para el intervalo ds^2 el cual es invariante con respecto al cambio de coordenadas, obtenemos la transformación de la métrica $\eta_{\mu\nu}$ del espacio de Minkowski:

$$\begin{aligned} ds^2 \quad &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= \eta_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'} \\ & &= \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}_{\mu} dx^\mu \Lambda^{\nu'}_{\nu} dx^\nu, \end{aligned} \tag{1.8}$$

la cual, en comparación con las declaraciones anteriores, nos deja con

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\nu} \tag{1.9}$$

o en escrito de forma matricial

$$\eta = \Lambda^{\mathrm{T}} \eta \Lambda \tag{1.10}$$

Las matrices que satisfacen (1.10) son conocidas como transformaciones de Lorentz; el conjunto de ellas forma un grupo bajo multiplicación de matrices, conocido como grupo de Lorentz.

Cualquier objeto matemático V^μ que es transformado como dx^μ es conocido como vector contravariante, o mas precisamente, una componente contravariante de un vector $\mathbf{V}$. Proyectando este vector sobre la base de vectores unitarios $\mathbf{e}_\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$, es fácil ver que

$$\mathbf{V} = V^\mu \mathbf{e}_\mu \quad y \quad V^\mu = \Lambda^\mu_{\mu'} V^{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^{\mu'} \tag{1.11}$$

donde $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ representa un vector en la base del llamado espacio tangente. Definimos el espacio dual como aquél generado por los vectores unitarios $\mathbf{e}^\mu$ tales que el producto interior es invariante:

$$\mathbf{e}^{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{1.12}$$

Los componentes covariantes del vector $\mathbf{V}$, esto es los elementos V_μ, son obtenidos de forma similar como (1.11), proyectando $\mathbf{V}$ sobre la base $\mathbf{e}^\mu$:

$$\mathbf{V} = V_{\mu}\mathbf{e}^{\mu} \tag{1.13}$$

Estos se transforman como sigue:

$$V_{\mu} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} V_{\mu'}. \tag{1.14}$$

Es fácil notar que las transformaciones matriciales $\Lambda^{\mu'}_{\mu}$ y $\Lambda^{\mu}_{\mu'}$ son inversas una con respecto a la otra:

$$\Lambda^{\mu'}_{\mu}\Lambda^{\nu}_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \delta^{\nu}_{\mu}. \tag{1.15}$$

Los elementos $\eta_{\mu\nu}$ de la métrica de Minkowski transforman como el producto de los dos vectores: éstos son tensores covariantes de rango 2. Podemos, de forma general, definir los elementos covariantes, contravariantes y mezclados, $T_{\mu\nu}$, $T^{\mu\nu}$ y T^{μ}_{ν} de un tensor T.

En relatividad general, el espacio-tiempo puede ser descrito por una métrica mas general $g_{\mu\nu}$ y el intervalo espacio-tiempo es el escalar

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \quad \mu,\nu = 0,1,2,3. \tag{1.16}$$

Las leyes de transformación para los elementos del tensor métrico, ante un cambio del sistema de coordenadas, son análogas a las del espacio de Minkowski, aunque los elementos de la métrica $g_{\mu\nu}$ no son constantes y en general dependen de las coordenadas x^μ. La transformación de un vector covariante en uno contravariante es obtenida por contracción con el tensor métrico $g_{\mu\nu}$:

$$V^{\mu} = g^{\mu\nu}V_{\nu} \quad y \quad V_{\mu} = V^{\nu}g_{\mu\nu}, \tag{1.17}$$

con la regla de contracción bajo el tensor métrico en sí mismo:

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu'} = \delta^{\nu}_{\nu'}. \tag{1.18}$$

La diferenciación de un vector es sencilla en un espacio plano caracterizado por vectores unitarios $\mathbf{e}_\mu$ con dirección constante:

$$d\mathbf{V} = d(V^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}) = (dV^{\mu})\mathbf{e}_{\mu} = (\partial_{\nu}V^{\mu})dx^{\nu}\mathbf{e}_{\mu} \tag{1.19}$$

En un espacio curvo los vectores unitarios $\mathbf{e}_\mu$ cambian de dirección durante la traslación del punto x^μ a $x^\mu + dx^\mu$, y la derivada del vector $\mathbf{e}_\mu$ puede ser expresada como una combinación lineal del vectores de la base:

$$d\mathbf{e}_{\mu} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}dx^{\nu}\mathbf{e}_{\sigma}. \tag{1.20}$$

donde $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ se denominan términos de conexión o símbolos de Christoffel, y estan dados por la relación

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\nu\sigma,\lambda} + g_{\lambda\sigma,\nu} - \partial_{\nu\lambda,\sigma}). \tag{1.21}$$

Usando los resultados (1.19) y (1.20), la derivada covariante de un vector contravariante es definida por

$$\begin{aligned} d\mathbf{V} &= (\partial_{\nu}V^{\mu})dx^{\nu}\mathbf{e}_{\mu} + V^{\mu}d\mathbf{e}_{\sigma} = (\partial_{\nu}V^{\mu})dx^{\nu}\mathbf{e}_{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}dx^{\nu}V^{\sigma}\mathbf{e}_{\mu} \\ &= (D_{\nu}V^{\mu})dx^{\nu}\mathbf{e}_{\mu} = (DV^{\mu})\mathbf{e}_{\mu}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

La derivada covariante entonces toma la forma

$$DV^{\mu} = dx^{\nu}(D_{\nu}V^{\mu}) = dx^{\nu}(\partial_{\nu}V^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}V^{\sigma}) \tag{1.23}$$

Un enfoque análogo lleva a la derivada covariante de un vector covariante, con el único cambio posible en el signo previo al símbolo de Christoffel:

$$DV_{\mu} = dx^{\nu}(D_{\nu}V_{\mu}) = dx^{\nu}(\partial_{\nu}V_{\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}V_{\sigma}) \tag{1.24}$$

La derivada covariante de un tensor es tomada, justo como en la diferenciación covariante de un producto vectorial, con las variaciones correspondientes. Por ejemplo, la 4-divergencia de un tensor $D_{\mu}T^{\mu}_{\nu}$ es escrito, como,

$$D_{\mu}T^{\mu}_{\nu} = \partial_{\mu}T^{\mu}_{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}T^{\sigma}_{\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}T^{\mu}_{\sigma}. \tag{1.25}$$

Utilizando el valor especial del primer símbolo de Christoffel dependiendo de la derivada del determinante $g = |\det g_{\mu\nu}|$ de la métrica, esto es,

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_{\sigma}\sqrt{g}, \tag{1.26}$$

obtenemos el siguiente enunciado de la relación (1.22):

$$D_{\mu}T^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_{\sigma}(\sqrt{g}T^{\sigma}_{\nu}) - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}T^{\mu}_{\sigma}. \tag{1.27}$$

Teniendo dos vectores inicialmente paralelos, pertenecientes a una superficie cuyo origen está en el mismo punto, sí son trasladados paralelamente sobre rutas simétricas de la misma superficie hacia un nuevo punto fijo, sobre el cual reposarán los vectores, estos ahora no son paralelos, y de la diferencia de estos vectores en su nueva ubicación es posible encontrar el tensor de curvatura de Riemann el cual nos indica la curvatura de la superficie (véase [6, 7]).La segunda derivada covariante de un vector lleva a la definición deltensor de curvatura de Riemann-Christoffel (cuarto-rango) con la ayuda del conmutador

$$[D_{\nu}, D_{\mu}]V^{\alpha} = R^{\alpha}_{\varepsilon\mu\nu}V^{\varepsilon} \tag{1.28}$$

La contracción de este tensor bajo los índices $\alpha = \mu$ define el tensor de curvatura de Ricci (de segundo-rango):

$$R^{\alpha}_{\varepsilon\alpha\nu} = R_{\varepsilon\nu}, \tag{1.29}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + (\Gamma\Gamma)_{\mu\nu}. \tag{1.30}$$

donde

$$(AB)_{\mu\nu} = A^{\tau}_{\mu\varepsilon}B^{\varepsilon}_{\nu\tau} - A^{\tau}_{\mu\nu}B^{\varepsilon}_{\tau\varepsilon}, \tag{1.31}$$

La contracción del tensor de curvatura de Ricci bajo estos índices finalmente define el escalar de curvatura del espacio tiempo:

$$R^{\mu}_{\mu} \equiv R \tag{1.32}$$

1.1.2. Tensor de energía-momento

En teoría de campos la acción es definida por una densidad lagrangiana $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$, y la acción Hamiltoniana para un campo escalar φ en un espacio-tiempo curvado es escrito como,

$$S = \int \tilde{\mathcal{L}}(\varphi, \partial_\mu \varphi) d^\mu x = \int \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - V(\varphi) \right) d^4 x \tag{1.33}$$

con $\partial^\mu \varphi = g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi$. El principio de mínima-acción lleva a las ecuaciones de campo tipo Klein-Gordon en un espacio-tiempo curvo, esto es

$$\delta S = 0 \;\; \rightarrow \;\; -D^\mu D_\mu \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \tag{1.34}$$

En cada punto en el espacio-tiempo existe un tensor de energía momento, el cual contiene información sobre la densidad y la corriente de la energía y el momento, ver [6, 8]. El tensor de energía-momento es definido con la densidad Lagrangiana del campo radiación o materia $\tilde{\mathcal{L}}_{mat} = \sqrt{g}\mathcal{L}_{mat}$ por las relaciones

$$T_{\mu\nu} = \frac{2c}{\sqrt{g}} \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}_m}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{2c}{\sqrt{g}} \left[\partial_\sigma \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{mat}}{\partial(\partial_\sigma^{\mu\nu})} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{mat}}{\partial g^{\mu\nu}} \right], \tag{1.35}$$

donde $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Para un campo escalar con densidad Lagrangiana del tipo mostrado en (1.35), esta definición lleva al tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\sigma \varphi \partial_\sigma \varphi + V(\varphi) \right). \tag{1.36}$$

Más adelante veremos que uno de los modelos que se considera para el estudio del universo, consiste en verlo como un fluido perfecto. Un fluido perfecto es caracterizado por tres cantidades: una cuatri-velocidad $u^\mu = dx^\mu/d\tau$; una densidad propia $\varrho = \varrho(x)$, y una presión $P = P(x)$. El tensor de energía-momento para un fluido perfecto puede ser construido del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, P, ϱ, y la cuatri-velocidad, quedando como

$$T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} + (P + \varrho) u_\mu u_\nu. \tag{1.37}$$

regresaremos a esta ecuación más adelante en la sección 2.3.1.

1.1.3. Ecuaciones de Einstein y el Principio de Equivalencia

La Relatividad General de Einstein está basada en el principio de equivalencia entre la masa inercial y la masa gravitacional, demostrado por Galileo, Huygens, Newton, Bessel y Eötvöns, ver la Ref. [7].

Uno de los enunciados del principio de equivalencia nos dice que "Un sistema uniformemente acelerado relativo a un marco inercial en relatividad general el localmente idéntico a un sistema en reposo en un campo gravitacional", y además nos dice que "No hay experimentos locales que puedan distinguir la caída libre en un campo gravitacional del movimiento uniformemente acelerado en el espacio en ausencia de un campo gravitacional". Además en un un sistema inercial, en relatividad especial, se utiliza la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, y si usamos sistemas de referencia no-inerciales, entonces esto es equivalente a usar una métrica mas general $g_{\mu\nu}$.

Entonces, la hipótesis fundamental de Einstein es asumir que el campo gravitacional es descrito por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ del espacio tiempo, que es ahora nuestra variable dinámica, (ver la Ref.

[8]). Esto nos lleva a preguntarnos, ¿qué cantidad escalar podemos obtener de la métrica para que sirva como una Lagrangiana? Hilbert calculó que utilizar el escalar de curvatura de Ricci es la elección mas simple posible para una Lagrangiana, y propuso la acción

$$S_g = -\frac{1}{2\chi}\int R\sqrt{g}d^4x, \tag{1.38}$$

conocida como la acción de Hilbert-Einstein para el campo gravitacional. Aplicando el principio de mínima acción a la ec. (1.38) se llega a la ecuaciones de Einstein en el vacío, que son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \tag{1.39}$$

Pero nos interesa conocer las ecuaciones de campo de Einstein no-vacías, para esto introducimos la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$ y el correspondiente Hamiltoniano que describe la presencia de materia o radiación

$$S_m = \int \mathcal{L}_m\sqrt{g}d^4x. \tag{1.40}$$

Aplicando nuevamente el principio de mínima acción a la acción Hamiltoniana total $S = S_g + S_m$, llegamos a las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General.

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\chi T_{\mu\nu} \tag{1.41}$$

La constante χ determinada del límite Newtoniano de las ecuaciones de Einstein es dada por

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4} \tag{1.42}$$

Algunas propuestas sugieren que en el vacío el tensor de enegía.momento tiene una expresión en términos de la métrica y la constante cosmologica, véase por ejemplo [8].

$$T^{(vac)}_{\mu\nu} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}. \tag{1.43}$$

Descomponiendo el tensor de energía-momento en una parte correspondiente a materia $T_{\mu\nu}$ y otra al vacío $T^{(vac)}_{\mu\nu}$, las ecuaciones de Einstein quedan como

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\chi(T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}). \tag{1.44}$$

La acción de Hilbert-Einstein para obtener estas ecuaciones mediante el principio de mínima acción es

$$S_g = -\frac{1}{2\chi}\int (R - 2\Lambda)\sqrt{g}d^4x. \tag{1.45}$$

1.2. Formalismo ADM (Arnowitt, Deser y Misner)

En Relatividad General las leyes físicas son independientes del sistema de coordenadas debido al principio de equivalencia, esta invarianza de coordenadas crea problemas en el análisis de la dinámica. Una forma de estudiar la dinamica de la Relatividad General es analizarla como la evolución de una hipersuperficie 3-dimensional donde se encuentran definidos los campos; esta manera de reformular la Relatividad General se conoce como formulación ADM desarrollada por R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner en 1962. [6, 9, 10]

1.2.1. Descomposición del espacio-tiempo en espacio y tiempo

Tomaremos hipersuperficies Σ sucesivas en las cuales, por mayor conveniencia, la geometría es descrita por valores de un parámetro tiempo t, viendo la evolución como el cambio de estas hipersuperficies en el parámetro t. Uno trata en diferentes bases las 3-geometrías de estas superficies y la 4-geometría que llena entre estas foliaciones, ver [4, 10] La información necesaria para la construcción del espacio-tiempo, es el elemento de línea de la 3-geometría en un tiempo t, que es:

$$d\sigma^2 = g_{ij}(t, x, y, z)dx^i dx^j,$$

así como el elemento de línea en un tiempo $t + dt$, la superficie Σ se ha movido a Σ' en la cual un punto es definido por el elemento de longitud

$$d\sigma'^2 = g_{ij}(t + dt, x, y, z)dx'^i dx'^j.$$

Durante la transición de Σ a Σ', hay un lapso de tiempo $N(t, x, y, z)dt$ (N es conocida como función lapso), donde dx^i es transformado en esta misma transición de la siguiente forma

$$dx'^i = dx^i + N^i dt$$

donde las N^i son llamadas funciones corrimiento. El intervalo espacio-tiempo entonces toma la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\sigma'^2 - (Ndt)^2 \\ &= g_{ij}dx'^i dx'^j - (Ndt)^2 \\ &= g_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) - (Ndt)^2 \\ &= g_{ij}dx^i dx^j + g_{ij}N^j dx^i dt + g_{ij}N^i dx^j dt + (g_{ij}N^i N^j - N^2)dt^2, \end{aligned}$$

la cual finalmente lleva a

$$ds^2 = -(N^2 - N_i N^i)dt^2 + 2N_i dx^i dt + g_{ij}dx^i dx^j. \tag{1.46}$$

De donde podemos descomponer la métrica como

$$^{(4)}g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (N_s N^s - N^2) & N_j \\ N_i & ^{(3)}g_{ij} \end{pmatrix}, \tag{1.47}$$

con 4-métrica recíproca

$$^{(4)}g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/N^2 & (N^j/N^2) \\ (N^i/N^2) & (^{(3)}g^{ij} - N^i N^j/N^2) \end{pmatrix}, \tag{1.48}$$

1.2.2. Curvatura Intrínseca y Extrínseca

Es importante distinguir dos importantes tipos de curvatura: intrínseca y extrínseca. Considere, por ejemplo, un cilindro. Dado que el cilindro es redondo en una dirección, uno piensa que es curvo. Esta es su curvatura extrínseca; la curvatura que tiene en relación con el espacio plano 3-dimensional del cual forma parte el cilindro. Por otro lado, un cilindro puede ser formado enrollando una pieza plana de papel sin deshacer o arrugar, así que la geometría intrínseca es la del papel original: es plana. Esto significa que la distancia en la superficie de un cilindro entre dos puntos cualquiera es la misma que en el papel original; lineas paralelas permanecen paralelas cuando continúan; de hecho la geometría sigue siendo Euclidiana para la superficie del cilindro. La curvatura extrínseca del cilindro viene de considerarlo como una superficie dentro de un espacio de mayor dimensión, y de preguntarse la relación que tienen los vectores que están sobre la superficie con los vectores normales a la superficie. Entonces cuando se habla de curvatura del espacio tiempo, estamos hablando de su curvatura intrínseca, ya que todos los vectores están confinados a permanecer en el espacio-tiempo, (ver [6]).

Curvatura Extrínseca

Sea η^β el campo de vectores normales a la superficie Σ. Ahora, elegimos la dirección del vector unitario η_β estableciendo

$$\eta_\beta = N(-1, 0, 0, 0). \tag{1.49}$$

Por la segunda forma fundamental nos referimos al tensor simétrico

$$K_{il} = D_l\eta_i - \Gamma^\beta_{il}\eta_\beta \tag{1.50}$$

y, usando la forma (1.49) del vector unitario η_β,

$$-N\Gamma^0_{li} = K_{li}. \tag{1.51}$$

Porque el símbolo de Christoffel es simétrico con respecto a los subíndices i y l, el tensor K_{il} es también un tensor simétrico.

El tensor K_{il} describe la curvatura de la superficie $\Sigma(x^0$ =constante) visto desde el espacio-tiempo cuatri-dimensional en el cual está inmerso.

$$K_{il} = K_{li} = -N\Gamma^0_{il} = -N(g^{00}\Gamma_{0li} + g^{0j}\Gamma_{jli}) = \frac{1}{2N}({}^{(3)}D_jN_i +^{(3)} D_iN_j - \dot{g}_{il}) \tag{1.52}$$

Por curvatura extrínseca de la superficie Σ nos referimos al escalar construido de la segunda forma fundamental (1.50), de la que podemos escribir la expresión:

$$\mathrm{Tr}K^2 - (\mathrm{Tr}K)^2 = K_{ij}K^{ij} - (K^i_i)^2 \tag{1.53}$$

Curvatura Escalar Intrínseca

Vamos a evaluar el escalar ${}^{(4)}R^\mu_\mu$ separando la parte espacial de la parte temporal, y notando que en coordenadas comoviles (en las cuales la métrica es libre de términos cruzados $dtdx^i$ y la componentes tipo espacio son proporcionales a una función de t), los símbolos de Christoffel Γ^μ_{00} y $\Gamma^0_{0\mu}$ son cero. Por curvatura intrínseca entendemos la curvatura ${}^{(3)}R^i_i$ de la superficie Σ y, usando la expresión para el escalar de curvatura:

$${}^{(4)}R^\mu_\mu =^{(4)} g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} =^{(4)} g^{\mu\nu}[\partial_\nu\Gamma^\gamma_{\mu\gamma} - \partial_\gamma\Gamma^\gamma_{\mu\nu} + (\Gamma\Gamma)_{\mu\nu}] \tag{1.54}$$

e introduciendo los tensores de la curvatura intrínseca y extrínseca de la superficie Σ, obtenemos la también llamada ecuación de Gauss-Codazzi

$${}^{(4)}R^\mu_\mu =^{(3)} R^i_i + \mathrm{Tr}K^2 - (\mathrm{Tr}K)^2 + \partial_0\mathrm{Tr}K + g^{ij}\partial_0K_{ij}. \tag{1.55}$$

El escalar de curvatura ${}^{(4)}R^\mu_\mu$ es entonces expresado en términos de la curvatura intrínseca ${}^{(3)}R^i_i$ de la superficie Σ, su curvatura extrínseca $\mathrm{Tr}K^2 - (\mathrm{Tr}K)^2$ y la evolución del tensor K por los términos $\partial_0\mathrm{Tr}K + g^{ij}\partial_0K_{ij}$.

1.2.3. Acción de los campos Gravitacional y materia

Ahora queremos ver como queda la acción del campo Gravitacional y materia en términos de la notación ADM. [4] Considere un campo materia escalar ϕ en la presencia de un campo gravitacional y la acción Hilbert-Einstein:

$$\begin{aligned}\tilde{S}(g_{\mu\nu},\phi) &= -\frac{1}{2\chi}\left\{\int_{\partial M} 2\sqrt{h}Kd^3x + \int_M (R-2\Lambda)\sqrt{g}d^4x\right\} \\ &+ \int L_{mat}(g_{\mu\nu},\phi)\sqrt{g}d^4x,\end{aligned} \tag{1.56}$$

en la cual la constante de Einstein χ es expresada con la constante de la gravitación universal G o en unidades naturales ($\hbar = c = 1$) con la masa de Planck M_p:

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4} = \frac{8\pi}{M_p^2}. \tag{1.57}$$

La métrica ${}^{(3)}g_{ij} = h_{ij}$ es la de una métrica tri-dimensional en una frontera ∂_M y $K = K_i^i = \mathrm{Tr}K$ es la traza de la segunda forma fundamental. El término de superficie es necesario para cancelar términos del escalar de curvatura por las segundas derivadas del tensor métrico.

Puede ser mostrado que la acción Hamiltonana $S_g = -(1/2\chi)\int\sqrt{g}Rd^4x$ puede ser reemplazado con la acción reducida de Hilbert $\bar{S}_g = -(1/2\chi)\int(\Gamma\Gamma)\sqrt{g}d^4x$. Cuando descomponemos el escalar de curvatura ${}^{(4)}R^\mu_\mu$ en sus partes temporal y espacial, los términos en $\partial_0 K_{ij}$ y K_i^i no harán contribución a la acción integral.

Un caso especialmente importante es obtenido cuando una subvariedad 3-dimensional compacta divide la variedad 4-dimensional en dos partes. Esto es lo que consideramos durante el plegado por las superficies Σ en (1.48). La métrica espacio-tiempo puede ser entonces descrita en la forma

$$ds^2 = -(N^2 - N_iN^i)dt^2 + 2N_idx^idt + h_{ij}dx^idx^j, \tag{1.58}$$

donde $h_{ij} ={}^{(3)} g_{ij}$ es la métrica 3-dimensional en la superficie Σ en la cual los puntos $x^i (i = 1, 2, 3)$ son localizados, y $h = \det|h_{ij}|$.

La acción de Einstein-Hilbert lleva a:

$$\tilde{S}(g_{\mu\nu},\phi) = \frac{M_p^2}{16\pi}\int dtd^3x\sqrt{h}N\left\{K_{ij}K^{ij} - K^2 -{}^{(3)} R_i^i + 2\Lambda - \frac{16\pi}{M_p^2}L_{\mathrm{mat}}(\phi)\right\}. \tag{1.59}$$

Expresado en coordenadas comoviles, esto supone la introducción de una densidad Lagrangiana reducida para el campo gravitacional de la forma

$$\tilde{S}_g = \frac{m_p^2}{16\pi}\int dtd^3x\sqrt{h}\left\{\mathrm{Tr}K^2 - (\mathrm{Tr}K)^2 -{}^{(3)} R_i^i\right\}. \tag{1.60}$$

El término entre corchetes es la diferencia entre las curvaturas intrínseca y extrínseca de la superficie Σ. Esta puede también tomar la forma

$$\tilde{S}_g = \frac{m_p^2}{16\pi}\int dtd^3x\sqrt{h}\left\{(h^{ik}h^{jl} - h^{ij}h^{kl})K_{ij}K_{kl} -{}^{(3)} R_i^i\right\} \tag{1.61}$$

Lo cual es la acción de Einstein-Hilbert descrita en términos de la métrica de cada foliación, de forma que ahora tenemos una función lagrangiana dada por una integral sobre la hipersuperficie, y además, la acción ahora está dada por la integral de la función lagrangiana entre un tiempo inicial (t_i) y un tiempo final (t_f). En el siguiente capitulo, con base a esto ultimo, se construira una formulación hamiltoniana, con el fin de poder cuantizar un modelo cosmologico.

Capítulo 2

Cosmología Cuántica

La cosmología cuántica puede ser considerada como una amalgama de la teoría cuántica y la cosmología relativista clásica, y puede ofrecer una respuesta a la pregunta: ¿De donde viene todo? Como en cualquier sistema cuántico, el universo es descrito por un vector estado el cual contiene toda la información posible acerca de este sistema. En el centro de la cosmología cuántica hay un doble objetivo; el descubrimiento de un correcto vector de estado, el cual predice una alta probabilidad para un universo final con las características que observamos, y un entendimiento del mecanismo por el cual este estado particular es elegido de un conjunto de todos los posibles estados. Los fundamentos para esto ultimo fueron establecidos en la década de 1960, con el trabajo de DeWitt, Wheeler, and Misner.

Nos preguntamos ahora, ¿Cómo es posible aplicar la teoría cuántica al estudio del universo entero? Si la teoría cuántica estudia fenómenos a escala microscópica, esta pregunta la podemos responder tomando el escenario de la teoría del big-bang, la cual dice que el universo se está expandiendo, y en el pasado era muy pequeño, por lo tanto existe un breve pero muy importante periodo en la evolución del universo en el cual la aproximación clásica no puede ser aplicada, y los efectos cuánticos predominaron.

En este capítulo, veremos como es posible construir un modelo de cosmología cuántica, basandonos en el formalismo ADM. Para ésto primero veremos la formulación hamiltoniana del formalismo ADM, despues hablaremos un poco sobre cosmología, y por último, expliremos como se puede construir un modelo de cosmología cuantica.

2.1. Superespacio

Al finalizar el capítulo 1, se expresó la acción de Einstein-Hilbert en términos del formalismo ADM, donde la acción esta dada por la integral de la función lagrangiana entre un tiempo inicial (t_i) y un tiempo final (t_f), por lo tanto se está especificando la métrica sobre una hipersuperficie inicial (en t_i) y sobre la final (en t_f) , por lo que la variación será sobre todas las posibles hipersuperficies (la métrica) que conecten a las dos hipersuperficies de los extremos. Entonces, para poder estudiar la dinamica de la geometría de cada hipersuperfice, tomamos los elementos de la métrica espacial como variables independientes, pero al tener una métrica simetrica, contamos con un total de 6 variables, formando un espacio 6-dimensional llamado superespacio, es decir el espacio de todas las geometrías espaciales.

La dinámica de la geometría espacial curvada de Einstein sigue su curso en el superespacio como la dinámica de una partícula que se despliega en el espacio-tiempo. Ninguna versión de mecánica hace más corto el salto de la dinámica clásica a la cuántica. Por lo tanto ofrece un principio para la propagación de crestas de onda en el superespacio, y para encontrar donde las crestas de onda dan un equivalente clásico de interferencia constructiva. De esta forma uno encuentra la pista del desarrollo de un 3-geometría con el tiempo expresado como un punto, una delgada hoja de historia que corta en el superespacio. El principio cuántico reemplaza esta consideración determinista con una enredada hoja de historia de longitud finita. En consecuencia, las fluctuaciones cuánticas toman lugar en la geometría del espacio que domina la escena en las distancias del orden de la longitud de Planck $L = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1{,}6 \times 10^{-33}$, y menores, ver la Ref. [6]. Dado que cada 3-geometría es infinitesimal, la ecuación de evolución tipo Schrödinger para la Cosmología Cuántica (conocida como ec. Wheeler-DeWitt, la cual veremos más adelante) debe ser un funcional del superespacio.

2.1.1. Tensor Supermétrico

Vamos a usar el espacio $\{x^i\}$ de la métrica h_{ij} (vista en la sección 1.2.3) para construir un superespacio 6-dimensional con la supermétrica (métrica del superespacio G^{ijkl}, el espacio correspondiente a todas las geometrías espaciales. Para simplificar la notación, introducimos un índice global $ij \equiv a$, de manera que el índice a toma los valores

$$\begin{array}{ccccccccc} (ij) & = & (11) & (22) & (33) & (12) & (13) & (23) \\ a & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6. \end{array}$$

Así

$$\begin{aligned} G^{ijkl} &= \frac{1}{2}\sqrt{h}\{h^{ik}h^{jl} + h^{il}h^{jk} - 2h^{ij}h^{kl}\}, \\ G^{ab} &= \sqrt{h}\{h^{ab} - h^a h^b\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

La forma covariante del tensor supermétrico es entonces

$$G_{ab} = \frac{1}{\sqrt{h}}(h_{ab} - \frac{1}{2}h_a h_b), \tag{2.2}$$

la cual lleva a las relaciones de clausura:

$$G_{ab}G^{ac} = G_b^c = \delta_b^c = \frac{1}{2}(\delta_k^m \delta_l^n + \delta_l^m \delta_k^n). \tag{2.3}$$

Hay que recordar aquí que el tensor supermétrico es definido localmente, es decir, debemos escribir de hecho:

$$G^{ab}(x, x') = \sqrt{h}\{h^{ab}(x, x') - h^a(x)h^b(x')\}\delta^3(x - x'). \tag{2.4}$$

Aplicado a un tensor simétrico de rango 2, la supermétrica transforma en su codual de acuerdo a relaciones que son verificadas directamente y fácilmente:

$$\begin{aligned} &G_{ab}T^b = \hat{T}_a = \frac{1}{\sqrt{h}}\left(T_a - \frac{1}{2}h_a T\right), \\ &G^{ab}T_b = \hat{T}^a = \sqrt{h}(T^a - h^a T), \\ &G_{ab}\hat{T}^b = T_a \quad \text{and} \quad G^{ab}\hat{T}_b = T^a \end{aligned} \tag{2.5}$$

La traza del tensor T está definida en el espacio 3-dimensional o en el superespacio 6-dimensional:

$$T \quad = \mathrm{Tr}T = T_\mu^\mu = T_{\mu\nu}h^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \quad = T_a h^a = T^a h_a. \tag{2.6}$$

Teniendo en cuenta que en el espacio tri-dimensional la traza del tensor métrico tiene el valor

$$\mathrm{Tr}h = h = h_\mu^\mu = 3, \tag{2.7}$$

obtenemos los coduales

$$\hat{h}^a = -2\sqrt{h}h^a \quad \text{and} \quad \hat{h}_a = -\frac{1}{2\sqrt{h}}h_a. \tag{2.8}$$

2.1.2. Momento conjugado

Vamos a introducir el momento conjugado de la métrica h_{ij} de acuerdo a la definición usual y usando la notación global

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{h}_{ij}} \quad \text{o} \quad \pi^a = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{h}_a}, \tag{2.9}$$

con la ec.(1.61) de la acción de Einstein-Hilbert (hacemos $\bar{\mathcal{L}} = \frac{16\pi}{M_p^2}\bar{\mathcal{L}}_g$):

$$\tilde{S}_g = \frac{M_p^2}{16\pi}\int dtd^3x\sqrt{h}N\{(h^{ik}h^{jl} - h^{ij}h^{kl})K_{ij}K_{kl} -^{(3)} R_i^i\} = \int dtd^3\bar{\mathcal{L}}_g \tag{2.10}$$

Ahora, vamos a escribir la densidad Lagrangiana en una forma diferente introduciendo el tensor supermétrico:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} = \frac{16\pi}{M_p^2}\bar{\mathcal{L}}_g \quad &= -\sqrt{h}N^{(3)}R_i^i + \sqrt{h}N\left\{\frac{1}{2}(h^{ik}h^{jl} + h^{il}h^{jk}) - h^{ij}h^{kl}\right\}K_{ij}K_{kl} \\ &= -\sqrt{h}N^{(3)}R_i^i + \sqrt{h}N\{h^{ab} - h^a h^b\}K_a K_b \\ &= -\sqrt{h}N^{(3)}R_i^i + NG^{ab}K_a K_b \end{aligned} \tag{2.11}$$

Aplicando la ec.(2.9), fácilmente obtenemos

$$\pi^a = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{h}_a} = N(2G^{ab}K_c\frac{\partial K_b}{\partial \dot{h}_a}) = N(2G^{ab}K_c\frac{1}{2N}\delta_b^a) = -G^{ac}K_c = -\hat{K}^a = -\sqrt{h}\{K^a - h^a K\} \tag{2.12}$$

La acción de Einstein-Hilbert puede además ser escrita en la siguiente forma:

$$\tilde{S}_g = \frac{M_p^2}{16\pi}\int_{t_1}^{t_2}(\pi^a\dot{h}_a - NX^0 - N_i X^i)d^3xdt, \tag{2.13}$$

donde los términos X^0 y Xi están dados por

$$\begin{aligned} X^0 &\equiv \sqrt{h}\Big\{\mathrm{Tr}K^2 - (\mathrm{Tr}K)^2 +^{(3)} R_i^i\Big\}, \\ X^i &\equiv 2D_\ell(K^{il} - h^{il}K) = -2D_l\pi^{il}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Las funciones N y N_i pueden ser consideradas como multiplicadores de Lagrange. Ésto es claro si tomamos las variaciones de $\tilde{S}_g$ respecto de N y N_i, por ejemplo $\delta\tilde{S}_g/\delta N = 0$ es la constricción Hamiltoniana de la relatividad general. Manteniendo las constricciones $X^0 = 0$ y $X^i = 0$ durante la variación de $\tilde{S}_g$, debemos considerar los h_{ij}, N_i y N como variables independientes. La constricción $X^i = 0$ corresponde a la conservación del momento conjugado y la constricción $X^0 = 0$ a la conservación de la energía total en el Universo considerado como un sistema cerrado y aislado.

2.1.3. Intervalos en el Superespacio

Cada punto en la hipersuperficie Σ está asociado con la métrica $h_{ij}(x) = h_a(x)$. El intervalo en Σ es escrito como

$$ds^2 = h_{ij}dx^i dx^j. \tag{2.15}$$

Dado que cada tensor métrico $h^{ij}(x) = h^a(x)$ lleva a un punto en el superespacio, introducimos el intervalo correspondiente al superespacio:

$$dL^2 = \int h_{ab}(x,x')dh^a(x)dh^b(x')d^3xd^3x'. \tag{2.16}$$

Debido a la definición local (2.4) el tensor supermétrico, puede escribirse como

$$h_{ab}(x,x') = h_{ab}(x)\delta^3(x-x'). \tag{2.17}$$

El intervalo dL^2, definido en cada punto en Σ, para todas las 3-métricas $h_a(x)$ puede también tomar la forma

$$dL^2 = \int h_{ab}(x)dh^a(x)dh^b(x)d^3x. \tag{2.18}$$

Es conveniente generalizar la convención de suma de Einstein completando el intervalo dado en la ec. (2.18) con la integración bajo todas las variables espaciales tales como ellas aparecen en (2.16) y (2.17), dando como resultado

$$dL^2 = h_{ab}(x,x')dh^a(x)dh^b(x'). \tag{2.19}$$

Podemos usar la 3-métrica de Σ para definir el tensor supermétrico en el espacio supermétrico en el cual los intervalos dS^2 serán descritos utilizando el tensor contravariante G^{ab}

$$dS^2 = G^{ab}(x,x')dh_a(x)dh_b(x'). \tag{2.20}$$

2.2. Formulación Hamiltoniana

La densidad lagrangiana $\bar{\mathcal{L}}$ descrita en (2.11) toma la de una diferencia entre una energía cinética y una energía potencial:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}} = \hat{K}^b K_b - V \quad &= \pi^b \hat{\pi}_b - V \\ &= G_{ab}\pi^a\pi^b - V.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Podemos inferir de esto un super-Hamiltoniano denotado $\bar{H}$:

$$\begin{aligned}\bar{H} = \hat{\pi}^a \dot{h}_a - \bar{\mathcal{L}} \quad &= 2\hat{\pi}^a\pi_a - \bar{\mathcal{L}} \\ &= \hat{\pi}^b\pi_b + V \quad = G_{ab}\pi^a\pi^b + V = G_{ab}\pi^a\pi^b + \sqrt{h}^{(3)}R^i_i.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Contrayendo la ec. (2.14) a X^0 entonces corresponde a $\bar{H} = 0$, que es, una energía total cero en el superespacio.

Trabajando con la forma general (2.10) de la acción Einstein-Hilbert:

$$\tilde{S} = \frac{M_p^2}{16\pi}\int dtd^3x\sqrt{h}N\left\{\mathrm{Tr}K^2 - (\mathrm{Tr}K)^2 -^{(3)} R^i_i + 2\Lambda - \frac{16\pi}{M_p^2}L_{\mathrm{mat}}(\phi)\right\}. \tag{2.23}$$

Inferimos de esto que el super-Hamiltoniano puede escribirse en la forma integral:

$$\bar{H} \equiv \int (NH_0 + N_i H^i) d^3x, \tag{2.24}$$

con el super-Hamiltoniano H_0:

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{16\pi}{M_p^2} \int G_{ab}(x,x')\pi^a(x)\pi^b(x')d^3x \\ &+ \int \sqrt{h}\partial^3(x-x') \left\{ \frac{M_p^2}{16\pi}(-^{(3)}R_i^i + 2\Lambda) + T_{00}(\phi, \pi^\phi, h^a) \right\} d^3x' \end{aligned} \tag{2.25}$$

y el súper-Hamiltoniano H^i definido por

$$H^i = 2D_j\pi^{ij} - \sqrt{h}T^{0i}. \tag{2.26}$$

Las funciones $N(x)$ y $N_i(x)$ son considerados como multiplicadores de Lagrange tales que las ecuaciones clásicas de los campos serán obtenidas ajustando

$$H_0(x) = 0 \quad H^i(x) = 0 \quad \forall x, \tag{2.27}$$

o en forma equivalente, usando (2.24),

$$H = 0 \quad \forall N, N_i. \tag{2.28}$$

2.3. Fundamentos del Modelo estándar de Cosmología

El actual modelo estándar de cosmología, o modelo del Big Bang, ha recibido mucha atención desde el descubrimiento de la radiación cósmica de fondo, la cual es el remanente de la radiación que surgió con el Big Bang, y que podemos observar hoy en día en el rango de las microondas, con una temperatura de 2.73 K, Dicho modelo está basado en muy pocos factores observables, que son: El hecho de que en una mayor escala la distribución de las estrellas en el cielo parece ser isotrópica (el espacio luce igual sin importar en qué dirección se mire) y homogénea, el descubrimiento del corrimiento al rojo de la luz emitida por estrellas, y la abundancia de elementos ligeros determinados mediante mediciones experimentales. Por lo tanto está basado en tres ideas principales: La primera asume la existencia de un principio cosmológico siguiendo que en gran escala el universo homogéneo e isotrópico puede ser representado por un fluido perfecto que se comporta como un gas ideal con densidad de energía $\varrho(t)$ y presión $p(t)$, las cuales son solo dependiente del tiempo; la segunda asume que las leyes físicas que se cumplen en el laboratorio son aplicables a nivel cósmico; y la tercera asume que la relatividad general es aplicable en escala cósmica y es capaz de contabilizar la evolución del universo desde su inicio, revisar [8]

Cuando miramos galaxias lejanas parece que se alejan de nosotros; el universo no es aparentemente estático, sino que cambia con el tiempo. La construcción de modelos cosmológicos se basa en la idea de que el universo es homogéneo e isotrópico en el espacio, pero no en el tiempo. En relatividad general esto se traduce en afirmar que el universo pude ser enmarcado en rebanadas tipo espacio tales que cada una es homogénea e isotrópica.

Además consideramos nuestro espacio tiempo como $\mathbf{R} \times \Sigma$, donde $\mathbf{R}$ representa la dirección del tiempo y Σ es una tri-variedad homogénea e isotrópica. La homogeneidad e isotropía implican que podemos tomar nuestra métrica de la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)h_{ij}(x)dx^i dx^j. \tag{2.29}$$

Aquí t es la coordenada tipo tiempo, y x^1, x^2, x^3 son las coordenadas en Σ; h_{ij} es la métrica simétrica en Σ. La función $a(t)$ es conocida como el factor de escala, y nos dice que tan grande es la rebanada tipo espacio Σ en el momento t. Las coordenadas usadas aquí, en las cuales la métrica es libre de términos cruzados $dtdx^i$ y las componentes tipo espacio son proporcionales a una función de t, son conocidas como coordenadas comoviles, y un observador que permanece en x^i constante es también llamado comóvil.

Nuestro interés está entonces en 3-métricas Euclidianas simétricas h_{ij}. Sabemos que las métricas maximalmente simétricas obedecen

$$R_{ijkl} = k(h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}), \tag{2.30}$$

donde k es alguna constante, y el tensor de Riemann está asociado con la 3-métrica h_{ij}, no la métrica del espacio-tiempo entero. El tensor de Ricci es entonces

$$R_{jl} = 2kh_{jl} \tag{2.31}$$

Si el espacio ha de ser maximalmente simétrico, entonces indudablemente debe ser esféricamente simétrico. La métrica puede ser puesta en la forma

$$d\sigma^2 = h_{ij}dx^i dx^j = e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi). \tag{2.32}$$

Las componentes del tensor de Ricci para tal métrica pueden ser obtenidos del tensor de Ricci para un espacio-tiempo esfericamente simétrico, y comparando con el tensor de Ricci que obedece a métricas maximalmente simétricas, obtenemos

$$\begin{aligned} R_{11} &= 2ke^{2\beta(r)} = \tfrac{2}{r}\partial_r\beta(r) \\ R_{22} &= 2kr^2 = e^{-2\beta}(r\partial_r\beta - 1) + 1 \\ R_{33} &= 2kr^2\sin^2\theta = e^{-2\beta}\left[(r\partial_r\beta - 1) + 1\right]\sin^2\theta \end{aligned} \tag{2.33}$$

lo cual resolviendo para β

$$\beta = -\frac{1}{2}\ln(1 - kr^2). \tag{2.34}$$

Estos nos lleva a la siguiente métrica en el espacio-tiempo

$$ds^2 = -d\tau^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2\right) \tag{2.35}$$

con $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Conocida como métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW).

El coeficiente $a(t)$ (con frecuencia denominado erróneamente el radio del universo) es el factor de escala de la expansión del universo. El coeficiente k es denominado la constante de curvatura, porque da el signo de la curvatura intrínseca del espacio 3-dimensional. Si $k = 1$, entonces el espacio 3-dimensional es finito, un modelo esferico, y $a(t)$ puede ser interpretado como el radio de curvatura del universo. Si $k = 0$ o $k = 1$, la función escalar $a(t)$ solo puede ceder una escala de medición de la geometría en un espacio 3-dimensional; para $k = 0$ obtenemos un modelo Euclideano y, finalmente, un modelo hiperbólico para $k = -1$.

2.3.1. Ecuaciones de Friedmann

En una escala muy grande del universo, éste puede ser considerado como un fluido perfecto de acuerdo a las condiciones de isotropía y homogeneidad, y el tensor de energía-momento esta dado por la ec. (1.37) tomando $c = 1$

$$T_{\mu\nu} = Pg_{\mu\nu} + (P + \varrho)u_\mu u_\nu$$

donde P y ϱ son la densidad de energía y la presión como medidas en el sistema en reposo, y u^μ es la 4-velocidad del fluido. Está claro que, si un fluido que es isotrópico en algún sistema lleva a la métrica que es isotrópica en algún sistema, los dos sistemas coincidirán; esto estará en reposo en coordenadas comoviles. La 4-velocidad es entonces

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \tag{2.36}$$

y el tensor de energía momento es

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g_{ij}P & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

Note que la traza está dada por

$$T = T^\mu_\mu = -\varrho + 3P. \tag{2.38}$$

Pasamos ahora a las ecuaciones de Einstein (1.41), la cuales pueden ser escritas en la forma:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right). \tag{2.39}$$

en las cuales sutituiremos el elemento de linea FRW. La ecuacion con $\mu\nu = 00$ es

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\varrho + 3P), \tag{2.40}$$

y las ecuaciones $\mu\nu = ij$ dan

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G(\varrho - P). \tag{2.41}$$

Podemos usar (2.40) para eliminar segundas derivada en (2.41), para obtener

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\varrho + 3P), \tag{2.42}$$

y

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\varrho - \frac{k}{a^2}. \tag{2.43}$$

A la vez éstas son conocidas como las ecuaciones de Friedmann, y métricas de la forma (2.35) que obedece estas ecuaciones definen universos Friedmann-Robertson-Walker (FRW).

Usando los datos más recientes proporcionados por la física de partículas y nuclear, los cosmólogos han sido capaces de explicar coherentemente la evolución del Universo, desde unos pocos minutos después de su creación (big bang) al presente. El modelo matemático más simple del Big Bang implica la existencia de una singularidad inicial en el tiempo t_0, para el cual el factor de escala $a(t_0)$ es cero, donde la densidad de energía y la temperatura equivalente del fluido cósmico es infinita. Ésto significa que el tiempo cosmológico introducido con las coordenadas comoviles FRW es descrito en un intervalo de tiempo abierto $(t_0, +\infty)$, donde se excluye el tiempo inicial. Los modelos físicos del Big Bang son salvados de la singularidad en t_0 introduciendo un dominio de Planck que abarca el tiempo inicial del orden de $10^{-44}s$, un periodo para el cual se aplican las leyes físicas, cuánticas, semiclasicas y clásicas. La cosmología cuántica busca interpretar la transición de este periodo puramente cuántico a aquel semi-clásico determinando la función de onda del universo que obedece a condiciones iniciales o de frontera adecuadas para hacer esta transición fundamental posible.

2.4. Ecuacion Wheeler-DeWitt

Una de las ideas para llegar a una teoría cuántica del Universo, es encontrar una ecuación análoga a la ecuación de Schrödinger para el Universo, la cual gobierne los campos de materia y la geometría espacio-temporal del universo, esta ecuación es conocida como ecuación Wheleer-DeWitt (WDW).

Con base en la separación del espacio-tiempo del formalismo ADM, vamos a considerar un universo homogéneo e isotrópico con curvatura k, descrito por una métrica FRW en la forma

$$ds^2 = \sigma^2 \left[-N^2 dt^2 + e^{2\alpha(t)} d\Omega_3^2(k) \right], \tag{2.44}$$

en donde α es un factor de escala, $d\Omega_3^2(k)$ la métrica de la sección espacial con curvatura k y el coeficiente $\sigma = 2/3\pi M_p^2$. La fuente del campo de materia es el campo escalar $\sqrt{2\pi}\sigma^2\phi(t)$ con potencial $2\pi^2\sigma^2 V(\phi)$. Usando la forma (1.61) de la acción de Einstein Hilbert y la acción del campo de materia, obtenemos la densidad Lagrangiana

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} N e^{3\alpha} \left[-\frac{\dot{\alpha}^2}{N^2} + \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - V(\phi) + k e^{-2\alpha} \right]. \tag{2.45}$$

La variación de ésta con respecto a las variables ϕ, N y α nos conduce a las tres ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{array}{l} (\ddot{\phi} + 3\dot{\alpha}\dot{\phi})N - \dot{\phi}\dot{N} - \frac{1}{2}N^3 V' = 0, \\ -(\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2 + \frac{3}{2}\dot{\phi}^2)N + \dot{\alpha}\dot{N} + \left(\frac{3}{2}V - \frac{1}{2}ke^{-2\alpha}\right)N^3 = 0, \\ \dot{\alpha}^2 - \dot{\phi}^2 - N^2(V + ke^{-2\alpha}) = 0. \end{array} \tag{2.46}$$

eligiendo ahora la norma $N = 1$, obtenemos las ecuaciones de movimiento y la constricción

$$\begin{array}{l} \ddot{\phi} + 3\dot{\alpha}\dot{\phi} + \frac{1}{2}V'(\phi) = 0, \\ \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 + 2\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0, \\ -\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2 + V(\phi) = ke^{-2\alpha}. \end{array} \tag{2.47}$$

Ahora necesitamos construir el Hamiltoniano con la transformacion de Legendre, para esto primero vamos a usar la definición (2.9) para determinar el momento conjugado:

$$\begin{array}{ll} \pi_\alpha = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\alpha}} = -e^{3\alpha}\frac{\dot{\alpha}}{N} & \text{t.q.} \quad \dot{\alpha} = -N\pi_\alpha e^{-3\alpha}, \\ \pi_\phi = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\phi}} = e^{3\alpha}\frac{\dot{\phi}}{N} & \text{t.q.} \quad \dot{\phi} = N\pi_\phi e^{-3\alpha}. \end{array} \tag{2.48}$$

entonces el Hamiltoniano queda como

$$\begin{array}{rl} H_c & = \pi_\alpha\dot{\alpha} + \pi_\phi\dot{\phi} - \bar{\mathcal{L}} \\ & = \frac{1}{2}Ne^{-3\alpha}[-\pi_\alpha^2 + \pi_\phi^2 + e^{6\alpha}V - ke^{4\alpha}] \equiv NH. \end{array} \tag{2.49}$$

La acción de Einstein-Hilbert escrita con (2.45) en la forma Hamiltoniana tomando $\bar{\mathcal{L}}$ de la primera ecuación en (2.49), puede ser expresada de la siguiente forma

$$S = \int dt[\dot{\alpha}\pi_\alpha + \dot{\phi}\pi_\phi - NH]. \tag{2.50}$$

El potencial $V(\phi)$ es de tipo inflacionario si, para algunos valores de ϕ, el potencial $V(\phi)$ es muy grande, donde $|V'(\phi)/V(\phi)| \ll 1$. Las condiciones iniciales que llevan a un escenario inflacionario, de hecho, requieren que

$$\dot{\phi} \simeq 0 \quad y \quad k = +1. \tag{2.51}$$

Entonces eligiendo la curvatura $k = +1$ e insertando (2.48) en la expresión (2.49) para H, notamos que N es un multiplicador de Lagrange imponiendo la constricción

$$H = 0, \tag{2.52}$$

la cual corresponde a la tercera ecuación de (2.47).

Ahora, vamos a cuantizar el sistema introduciendo una función de onda $\psi(\alpha, \phi, t)$ y obteniendo una ecuación de Schrödinger construida con el Hamiltoniano canónico:

$$i\partial_t\psi = H_c\psi. \tag{2.53}$$

Usando la constricción $H = 0$ y el principio de correspondencia (promover los momentos en operadores diferenciales) para las variables α y ϕ

$$\pi_\alpha = -i\partial_\alpha \quad y \quad \pi_\phi = -i\partial_\phi, \tag{2.54}$$

obtenemos una ecuación tipo Schrödinger

$$H\psi = \frac{1}{2}e^{-3\alpha}\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + e^{6\alpha}V - e^{4\alpha}\right]\psi = 0. \tag{2.55}$$

Se puede notar que es independiente del tiempo, lo cual es una característica esencial de las funciones de onda tipo WDW.

2.4.1. Cuantización Canónica

Para poder obtener la ec. WDW vamos a usar el principio de correspondencia en el superespacio introduciendo las relaciones de conmutación usuales de la teoría de campos:

$$\begin{aligned} &[h_a(x), h_b(x')] = 0, \\ &\left[\pi^a(x), \pi^b(x')\right] = 0, \\ &\left[h_a(x), \pi^b(x')\right] = i\delta_a^b\delta^3(x - x') \end{aligned} \tag{2.56}$$

Esto significa usar el principio de correspondencia para el momento conjugado en términos de las derivadas funcionales (lo cual tiene mucho sentido, ya que la función de onda es un funcional de la métrica)

$$\begin{aligned} \pi^a &= -i\delta_a = -i\frac{\delta}{\delta h_a}, \\ \pi^\pi &= -i\delta_\phi = -i\frac{\delta}{\delta\phi}. \end{aligned} \tag{2.57}$$

El súper-Hamiltoniano $\bar{H} = \bar{E}$ —definido en la ec. (2.22)— y el principio de correspondencia también lleva a la ecuación WDW para la función de onda del Universo:

$$-G_{ab}\delta^2\psi/\delta h_a\delta h_b + V\psi = \bar{E}\psi. \tag{2.58}$$

En un Universo cerrado, la energía total es cero, como hemos visto anteriormente, dando la ecuacion WDW en la ausencia de un campo de materia:

$$-G_{ab}\frac{\delta^2\psi}{\delta h_a\delta h_b} + V\psi = 0. \tag{2.59}$$

Usando el principio de correspondencia y la ec. (2.25), establecemos la forma general de la ecuación WDW (es decir, con materia y constante cosmologica), la ecuación fundamental de la cosmología cuántica,

$$\left[-G_{ab}\frac{\delta^2}{\delta h_a\delta h_b} - \sqrt{h}\left({}^{(3)}R(h) - 2\Lambda + \frac{16\pi}{M_p^2}T_{00}(\delta\phi,\phi)\right)\right]\psi(h_a,\phi) = 0, \tag{2.60}$$

Esta ecuación contiene información dinámica para discutir la gravedad en escala cuántica.

2.5. Mini-Superespacios

Podemos reducir el número de grados de libertad de h_{ij} para encontrar un número finito usando modelos cosmológicos simétricos como los de Friedmann-Robertson-Walker. En este caso la métrica puede ser descrita por un número pequeño y finito de funciones de t (por ejemplo, la función de escala $a(t)$ en una métrica FRW estándar. En tal caso, decimos que el superespacio ha sido reducido a un mini-superespacio dimensionalmente finito. Es decir, si restringimos, mediante constricciones, por ejemplo, las 3-geometrias bajo consideración (métricas FRW), el número de grados de libertad se reduce, eliminando los términos impares de la métrica, entonces la función de onda lleva a un funcional bajo un subespacio del superespacio, es decir, un mini-superespacio. Si la clase de las 3-geometrías es suficientemente restringida, el minisuperespacio puede ser dimensionalmente finito.

2.5.1. Mini-Superespacio bi-dimensional

Considere el caso en el cual el campo gravitacional es localmente homogéneo e isotrópico. La 3-métrica es entonces determinada por el factor de escala $a(t)$ y podemos establecer

$$h_{ij} = h_a = \sigma^2 a^2(t)\tilde{h}_a, \tag{2.61}$$

donde el espacio 3-dimensional tiene una curvatura intrínseca

$${}^{(3)}R_{ab} = k\tilde{h}_{[ab]} = h\{\tilde{h}_{ik}\tilde{h}_{jl} - \tilde{h}_{il}\tilde{h}_{jk}\}. \tag{2.62}$$

Así se obtiene $k = +1$, $k = 0$ o $k = -1$. El coeficiente σ es un coeficiente de normalización dado por

$$\sigma = \left(\frac{3M_p^2}{4\pi}\int\sqrt{\tilde{h}}d^3x\right)^{1/2}. \tag{2.63}$$

Introducimos un campo materia escalar constante ϕ en la superficie homogénea Σ ajustando

$$\phi = \left(\frac{3M_p^2}{4\pi^4}\right)^{1/2}\tilde{\phi}, \tag{2.64}$$

y una auto-interacción de este potencial denotada $U(\phi)$:

$$U(\phi) = \frac{3M_p^2}{4\pi}\tilde{U}(\tilde{\phi}) \tag{2.65}$$

(un campo escalar ϕ con masa M/σ tendrá una auto-interacción $\tilde{U} = \frac{1}{2}m^2\tilde{\phi}^2$, por ejemplo.)

Entonces podemos definir el mini-superespacio como un espacio bi-dimensional con coordenadas $a(t)$ y $\tilde{\phi}(x)$, y su métrica puede ser definida por la constante N en las superficies Σ haciendo

$$ds^2 = \sigma N^{-1}(-ada^2 + a^3 d\tilde{\phi}^2). \tag{2.66}$$

Porque el mini-superespacio es plano para N independiente de $\tilde{\phi}$, elegimos el gauge $N = \sigma$, el cual define un intervalo

$$ds^2 = -ada^2 + a^3 d\tilde{\phi}^2. \tag{2.67}$$

En un universo cerrado, ψ no es explicitamente dependiente del tiempo y $\partial_t\psi = 0$, lo cual lleva a una ecuación W independiente del tiempo

$$\left(a\frac{\partial}{\partial a}a\frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - ka^4 + 2a^6\tilde{U}\right)\psi(a,\tilde{\phi}) = 0. \tag{2.68}$$

2.6. Ecuación Wheeler-DeWitt en una Métrica Friedman-Robertson-Walker

Considere un campo escalar $V(\phi)$ en interacción con el campo gravitacional. La densidad Lagrangiana puede ser escrita en la formado

$$\tilde{\mathcal{L}}(g_{\mu\nu},\phi) = \sqrt{g}\left(-\frac{R_\mu^\mu}{2\chi} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right). \tag{2.69}$$

En un universo cerrado de Friedmann de coordenadas comoviles, el intervalo espacio-tiempo es expresado con la relación

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)d\Omega_3^2, \tag{2.70}$$

donde $N(t)$ es la función lapse definida en la separación del espacio-tiempoy $d\Omega_3^2$ el elemento de longitud en un espacio 3-dimensional. Podemos determinar, de (2.69) y (2.70), una densidad Lagrangiana Efectiva de la forma

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{3M_p^2\pi}{4}\left(\frac{\dot{a}^2a}{N} - Na\right) + 2\pi^2a^3N\left(\frac{\dot{\phi}}{2N^2} - V(\phi)\right). \tag{2.71}$$

El termino $2\pi^2a^3$ corresponde a la integración bajo las coordenadas espaciales de $\sqrt{g}$ para una esfera de radio unitario.

Comenzamos determinando el momento conjugado de la densidad Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}$ con la definición (2.9):

$$\begin{aligned}
\pi_\phi &= \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\phi}} = \frac{2\pi^2a^3}{N}\dot{\phi},\\
\pi_a &= \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{a}} = -\frac{3M_p^2\pi}{2N}\dot{a}a,\\
\pi_n &= \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{N}} = 0.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Para obtener el súper-Hamiltoniano en el mini-superespacio tri-dimensional (de coordenadas a, ϕ y N):

$$\begin{aligned}\bar{H} &= \pi_a\dot{a} + \pi_\phi\dot{\phi} + \pi_N\dot{N} - \tilde{\mathcal{L}}(a,\phi) \\ &= -\frac{N}{a}\left(\frac{\pi_a^2}{3\pi M_p^2} + \frac{3\pi M_p^2}{4}a^2\right) + \frac{N}{a}\left(\frac{\pi_\phi^2}{4\pi^2 a^2} + 2\pi^2 a^4 V(\phi)\right).\end{aligned} \tag{2.73}$$

El valor de la derivada parcial de $\bar{H}$ con respecto a N puede ser inmediatamente determinada, y siguiendo (2.22) y (2.26) es igual a cero:

$$0 = \frac{\partial \bar{H}}{\partial N} = \frac{\bar{H}}{N} = -\frac{1}{a}\left(\frac{\pi_a^2}{3\pi M_p^2} + \frac{3\pi M_p^2}{4}a^2\right) + \frac{1}{a}\left(\frac{\pi_\phi^2}{4\pi^2 a^2} + 2\pi^2 a^4 V(\phi)\right). \tag{2.74}$$

Este corresponde a la constricción vista en la formulación Hamiltoniana de Relatividad General, dando $\bar{H} = 0$, que es una energía total cero en el mini-superespacio para un Universo de Friedman cerrado. La cuantización de Dirac de la ecuación anterior da la función de onda del Universo en forma análoga a la ecuación de Schrödinger

$$i\partial\psi(a,\phi)/\partial t = \bar{H}\psi(a,\phi) = 0 \tag{2.75}$$

Usando el principio de correspondencia (para cuantización canonica) asociado con las variables ϕ y R del mini-superespacio:

$$\begin{aligned}\pi_\phi &\to -i\partial_\phi, \\ \pi_a &\to -i\partial_a,\end{aligned} \tag{2.76}$$

La ecuación (2.74) da la ecuación equivalente a la ecuación de Schrödinger en el mini-superespacio bi-dimensional. Esta es la ecuación WDW para determinar la función de onda del Universo en una métrica FRW:

$$\left(-\frac{1}{3\pi M_p^2}\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{3\pi M_p^2}{4}a^2 + \frac{1}{4\pi^2 a^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi} - 2\pi^2 a^4 V(\phi)\right)\psi(a,\phi) = 0. \tag{2.77}$$

Debido a las relaciones de conmutación entre a y π_a, puede haber algún tipo de ambigüedad en la escritura del operador diferencial en la ecuación W. Algunos autores introducen un termino $\frac{1}{a^p}\frac{\partial}{\partial a}a^p\frac{\partial}{\partial a}$ en lugar de $\frac{\partial^2}{\partial a^2}$ donde p es un parámetro libremente escogido.

Capítulo 3

No-conmutatividad de un sistema bidimensional mediante el procedimiento de Jackiw

Hasta ahora hemos visto como construir, un modelo de cosmología cuántica mediante el formalismo ADM, pero el objetivo de este trabajo es ver si es posible encontrar relaciones no-conmutativas en un modelo de cosmología cuántica. Es por eso que en este capítulo veremos el papel que juegan las coordenadas no-conmutativas en la mecánica cuántica, y de paso ver el procedimiento que utilizaremos en el modelo que estamos interesados.

Una rama de la mecánica cuántica que está tomando mucha fuerza es la que se desarrolla cuando las coordenadas no conmutan, físicamente esto se puede interpretar como si se tuviera un principio de incertidumbre entre las coordenadas (en el espacio de configuración), de la misma forma en que se tiene el principio de incertidumbre convencional entre el momento y la posición (en el espacio de configuración). La idea detrás de un espacio-tiempo no-conmutativo está inspirada en las relaciones de conmutación entre los operadores de posición y momento de la mecánica cuántica. Este procedimiento constituye la base de teorías más fundamentales en la física moderna, como la teoría de campos, la teoría de cuerdas o incluso la óptica cuántica, la cual puede tener una influencia más directa con el desarrollo de nuevas tecnologías en un futuro no muy lejano.

En este capítulo analizaremos un sistema en el cual es posible encontrar relaciones de no-conmutatividad en las coordenadas de forma natural, que es el problema de Landau, estudiado en [3]. Después revisaremos, como es posible introducir coordenadas no-conmutativas, con la ayuda del producto estrella, en mecánica cuántica [11, 12].

3.1. No-conmutatividad en presencia de fuertes campos magneticos: Partícula noconmutativa en el nivel más bajo de Landau

Uno de los ejemplos donde surge la no-conmutatividad de forma natural es el problema de Landau, el cual consiste en el movimiento de una partícula cargada moviéndose en un plano en presencia de un campo magnético perpendicular a este plano [2]. Este ejemplo es analizado en [3], el cual veremos a continuación.

Como ya sabemos, estamos interesados en una partícula puntual moviéndose en un plano con un campo magnético $\mathbf{B}$ perpendicular al plano, la ecuación de movimiento para el 2-vector $\mathbf{r} = (x, y)$ es

$$m\dot{v}^i = \frac{e}{c}\epsilon^{ij}v^jB + f^i(\mathbf{r}) \tag{3.1}$$

donde v es la velocidad $\dot{\mathbf{r}}$, y $\mathbf{f}$ representa otras fuerzas, las cuales son derivadas de un potencial $V : \mathbf{f} = -\nabla V$, y además

$$\epsilon^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una de las formas de obtener la ec. (3.1) es usando la fuerza de Lorentz,

$$F_B = \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{e}{c}(v_yB_z\hat{\imath} - v_xB_z\hat{\jmath})$$

Al cuantizar este modelo [2], se encuentra que la energía está dada por

$$E_n = \hbar\frac{eB}{mc}(n + \frac{1}{2}) \tag{3.2}$$

y da origen a los llamados niveles de Landau, con separaciones $\hbar\frac{eB}{mc}$. Si consideramos el límite de B muy grande, se puede ver que proyecta a el nivel más bajo (debido a la magnitud de la separación de niveles), y que además es equivalente a m muy pequeña, por lo tanto impondremos que la masa tienda a cero. Imponiendo la masa a cero en (3.1) llegamos a la ecuación:

$$\frac{e}{c}\epsilon^{ij}v^jB + f^i(\mathbf{r}) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\dot{r}^k = \epsilon^{ki}\frac{c}{eB}f^i(\mathbf{r}) \tag{3.3}$$

Podemos derivar el álgebra no-conmutativa partiendo de la lagrangiana del sistema. La lagrangiana que nos lleva a la ecuación de movimiento (3.1) es

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - V \tag{3.4}$$

donde podemos escoger $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$, ya que el campo magnético es perpendicular al plano

$$B_i = (\nabla \times \mathbf{A})_i = \epsilon_{ijk}\partial_jA_k$$
$$B_3 = \epsilon_{3jk}\partial_jA_k = \epsilon_{312}\partial_1A_2 - \epsilon_{321}\partial_2A_1$$
$$B_3 = \epsilon_{312}\partial_1A_2 = b$$

Imponiendo m como cero, como se hizo en la ecuación de movimiento, llegamos a

$$L_0 = \frac{eB}{c}x\dot{y} - V(x, y) \tag{3.5}$$

lo cual sería equivalente a decir que la parte cinética del lagrangiano tiende a cero, y es posible ver que esta lagrangina es de la forma $p\dot{q} - h(p, q)$, así que $(\frac{eb}{c}x, y)$ forman un par canónico. Esto implica no-conmutatividad en las coordenadas x y y, e identifica a V como el Hamiltoniano.

Entonces la ecuación de movimiento (3.3) puede ser obtenida realizando el paréntesis de Poisson de $\mathbf{r}$ con el Hamiltoniano para este sistema

$$H_0 = V \tag{3.6}$$

siempre que los paréntesis fundamentales describan coordenadas no-conmutativas

$$\{r^i, r^j\} = \frac{c}{eB}\epsilon^{ij} \tag{3.7}$$

lo cual se puede comprobar al escribir $\dot{r}^i$ en términos del paréntesis de Poisson de r^i con H_0:

$$\dot{r}^i = \{H_0, r^i\} = \frac{\partial H_0}{\partial r^k}\frac{\partial r^i}{\partial p^k} - \frac{\partial H_0}{\partial p^k}\frac{\partial r^i}{\partial r^k} = \frac{\partial V}{\partial r^j}\frac{\partial r^j}{\partial r^k}\frac{\partial r^i}{\partial p^k} - \frac{\partial V}{\partial r^j}\frac{\partial r^j}{\partial p^k}\frac{\partial r^i}{\partial r^k} = \{r^j, r^i\}\frac{\partial V}{\partial r^j}$$

$$\dot{r}^i = -\{r^j, r^i\} f^i(\mathbf{r}) = \epsilon^{ij}\frac{c}{eB} f^j(\mathbf{r})$$

$$\dot{r}^i = \{H_0, r^i\} = \{r^j, r^i\}\partial_j V = \epsilon^{ij}\frac{c}{eB} f^j(\mathbf{r}) \tag{3.8}$$

Ahora daremos una derivación canónica de no conmutatividad de este sistema en el límite $m \to 0$, partiendo del Hamiltoniano

$$H = \frac{\pi^2}{2m} + V \tag{3.9}$$

donde $\boldsymbol{\pi}$ es el momento cinético, $m\dot{\mathbf{r}}$, que está relacionado con el momento canónico $\mathbf{p}$ de la forma $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$, y además H da la ec.(3.1) haciendo paréntesis con r y luego con π

$$\dot{r}^i = \{H, r^i\} = \frac{\partial H}{\partial r^k}\frac{\partial r^i}{\partial p^k} - \frac{\partial H}{\partial p^k}\frac{\partial r^i}{\partial r^k} = -\frac{\partial H}{\partial p^i} = \frac{\pi^j}{m}\frac{\partial \pi^j}{\partial pi^i}$$

y

$$m\dot{r}^i = -\pi^i$$

$$\dot{\pi}^i = \{H, \pi^i\} = \frac{\partial H}{\partial r^k}\frac{\partial \pi^i}{\partial p^k} - \frac{\partial H}{\partial p^k}\frac{\partial \pi^i}{\partial r^k} = \frac{\partial H}{\partial r^i} - \frac{\partial H}{\partial p^k}\frac{\partial \pi^i}{\partial r^k}$$

$$\dot{\pi}^i = \frac{\partial}{\partial r^i}\left(\frac{\pi^2}{2m} + V\right) - \frac{\partial}{\partial p^k}\left(\frac{\pi^2}{2m}\right)\frac{\partial(p^i - \frac{e}{c}A^i)}{\partial r^k}$$

$$\dot{\pi}^i = \frac{\pi^j}{m}\frac{\partial \pi^j}{\partial r^i} + \frac{e\pi^l}{cm}\frac{\partial \pi^l}{\partial p^k}\frac{\partial A^i}{\partial r^k} + \partial_i V$$

$$\dot{\pi}^i = -\frac{\pi^j e}{mc}\frac{\partial A^j}{\partial r^i} + \frac{e\pi^k}{cm}\frac{\partial A^i}{\partial r^k} + \partial_i V$$

$$-m\ddot{r}^i = \frac{\dot{r}^j e}{c}\frac{\partial A^j}{\partial r^i} - \frac{e\dot{r}^k}{c}\frac{\partial A^i}{\partial r^k} + \partial_i V$$

donde es fácil ver que esta última ecuación es equivalente a la ecuación (3.1). Los paréntesis de Poison nos llevan a las siguientes relaciones

$$\{r^i, r^j\} = \frac{\partial r^i}{\partial r^k}\frac{\partial r^j}{\partial p^k} - \frac{\partial r^i}{\partial p^k}\frac{\partial r^j}{\partial r^k} = 0 \tag{3.10}$$

$$\{r^i, \pi^j\} = \frac{\partial r^i}{\partial r^k}\frac{\partial \pi^j}{\partial p^k} - \frac{\partial r^i}{\partial p^k}\frac{\partial \pi^j}{\partial r^k} = \frac{\partial r^i}{\partial r^k}\frac{\partial \pi^j}{\partial p^k} = \delta^{ij} \tag{3.11}$$

$$\{\pi^i, \pi^j\} = \frac{\partial \pi^i}{\partial r^k}\frac{\partial \pi^j}{\partial p^k} - \frac{\partial \pi^i}{\partial p^k}\frac{\partial \pi^j}{\partial r^k} = -\frac{e}{c}\frac{\partial A^i}{\partial r^k}\delta^{jk} + \frac{e}{c}\frac{\partial A^j}{\partial r^k}\delta^{ik}$$

$$\{\pi^i, \pi^j\} = -\frac{e}{c}\frac{\partial A^i}{\partial r^j} + \frac{e}{c}\frac{\partial A^j}{\partial r^i} = -\frac{eB}{c}\epsilon^{ij}. \tag{3.12}$$

De igual forma, al cuantizar el sistema, cuando el campo magnético es muy grande, se proyecta al nivel más bajo de Landau, y por lo tanto queremos imponer de nuevo m a cero, pero el hacer ésto nos lleva una indeterminación, es por eso que hacemos desaparecer π, imponiendo $\boldsymbol{\pi} = 0$ como una constricción, eliminando la indeterminación. Pero de acuerdo con la ecuación (3.12), el paréntesis de esta constricción es diferente de cero, y forma una matriz no singular, por lo tanto la constricción pasa a ser de segundo clase en la terminología de Dirac [13, 14], y las relaciones de conmutación están dadas por los paréntesis de Dirac [13].

$$\{r^i, r^j\}_D = \{r^i, r^j\}_P - \{r^i, \pi^k\}_P \{\pi^k, \pi^l\}_P^{-1} \{\pi^l, r^j\}_P = \frac{c}{eB}\epsilon^{ij} \tag{3.13}$$

donde el subíndice P indica que se trata de paréntesis de Poison.

3.2. Producto moyal o producto estrella en mecánica cuántica

Una de las herramientas usadas para imponer no-conmutatividad es el producto moyal, por eso es que vamos a ver cómo se utiliza el producto u operador estrella para imponer coordenadas no-conmutativas [11], y mas tarde, en otra sección comparar el caso donde imponemos no-conmutativad, con el que vimos en la primera sección de este capítulo, dondé la no-conmutatividad se encontro de forma natural. Empezaremos con el caso del sistema de una partícula situada en dos dimensiones bajo la influencia de un potencial $V(\mathbf{x})$. La ecuación de Schrödinger es:

$$i\frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})\right] \Psi(\mathbf{x}, t) \tag{3.14}$$

y puede ser obtenida de la acción:

$$S = \int dt d^2x \bar{\Psi} \left[i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - V(\mathbf{x})\right] \Psi(\mathbf{x}, t) \tag{3.15}$$

Vamos a formular esta teoría de campo lineal de Schrödinger en una variedad base con coordenadas no-conmutativas:

$$[x'^i, x'^j] = i\theta^{ij} \tag{3.16}$$

donde θ^{ij} es un miembro de la matriz antisimétrica:

$$\theta^{ij} = \theta\epsilon^{ij} \tag{3.17}$$

y $\epsilon^{12} = 1$ es el tensor antisimétrico total de rango 2.

Vamos a remplazar los productos normales por el producto estrella:

$$A \star B(\mathbf{x}) = e^{\frac{1}{2}\theta^{ij}\partial_i^{(1)}\partial_j^{(2)}} A(\mathbf{x}_1)B(\mathbf{x}_2) \tag{3.18}$$

Bajo el operador estrella los términos que contienen $\partial/\partial t$ y $\mathbf{p}^2$ no cambian, pero el potencial cambiará.

$$V(\mathbf{x}) \star \Psi(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{2}\right)^n \partial_{i_1}...\partial_{i_n} V(\mathbf{x})\theta^{i_1 j_1}...\theta^{i_n j_n}\partial_{j_1}...\partial_{j_n}\Psi(\mathbf{x}) \tag{3.19}$$

Reemplazando ∂_{j_k} por $ip_{j_k} = \frac{\partial}{\partial x^{jk}}$ e introduciendo

$$\tilde{p}_{i_k} = \theta^{i_k j_k} p_{j_k} \tag{3.20}$$

quedando

$$V(\mathbf{x}) \star \Psi(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \partial_{i_1}...\partial_{i_n} V(\mathbf{x})\tilde{p}_{i_1}...\tilde{p}_{i_n}\Psi(\mathbf{x}) \tag{3.21}$$

tomando la transformada de Fourier sobre $V(\mathbf{x})$, llegamos a

$$V(\mathbf{x}) \star \Psi(\mathbf{x}) = \int d^2k e^{i\mathbf{kx}} V(\mathbf{k})\Psi(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{2}\right)^n \int d^2k e^{i\mathbf{kx}} V(\mathbf{k})(\boldsymbol{k}\tilde{\mathbf{p}})^n \Psi(\mathbf{x}) \tag{3.22}$$

y sumando llegamos a

$$V(\mathbf{x}) \star \Psi(\mathbf{x}) = \int d^2k e^{i\mathbf{kx}} e^{-\frac{i}{2}\tilde{\mathbf{p}}\mathbf{x}} V(\mathbf{k})\Psi(\mathbf{x}). \tag{3.23}$$

Usando la relación:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]+\cdots} \tag{3.24}$$

donde los operadores $A = i\mathbf{kx}$, $B = -\frac{i}{2}\tilde{\mathbf{p}}\mathbf{x}$, y usando que $k\tilde{k}$ y $[p_i, x_j] = -i\delta_{ij}$, llegamos a

$$V(\mathbf{x}) \star \Psi(\mathbf{x}) = \int d^2k e^{i\mathbf{kx}-\frac{i}{2}\tilde{\mathbf{p}}\mathbf{x}} V(\mathbf{k})\Psi(\mathbf{x}), \tag{3.25}$$

obteniendo que

$$V(\mathbf{x}) \star \Psi(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x} - \frac{\tilde{\mathbf{p}}}{2})\Psi(\mathbf{x}) \tag{3.26}$$

El siguiente paso es considerar un potencial central bidimensional, $V = V(r)$ donde $r = \sqrt{|x|^2}$, tal y como se realizo en [12]. El lado derecho de (3.26) da

$$V(|\mathbf{x} - \frac{\tilde{\mathbf{p}}}{2}|^2)\Psi = V(\frac{\theta^2}{4}p_x^2 + x^2 + \frac{\theta^2}{4}p_y^2 + y^2 - \theta L_z)\Psi = V(\hat{\aleph})\Psi \tag{3.27}$$

donde el operador $\hat{\aleph}$ está definido como

$$\hat{\aleph} = \hat{H}_{HO} - \theta\hat{L}_z \tag{3.28}$$

donde $\hat{H}_{HO}$ corresponde al oscilador armónico bidimensional con masa efectiva $m = 2/\theta$, frecuencia $\omega = \theta$ y L_z es la componente del momento angular $L_z = xp_y - yp_x$. La simetría de grupo para este sistema es $SU(2)$ y el espectro de $\hat{\aleph}$ puede ser ordenado notando que

$$\begin{aligned} L_x &= \tfrac{1}{2}(a_x^\dagger a_x - a_y^\dagger a_y), \\ L_y &= \tfrac{1}{2}(a_x^\dagger a_y + a_y^\dagger a_x), \\ L_z &= \tfrac{1}{2i}(a_x^\dagger a_y - a_y^\dagger a_x), \end{aligned} \tag{3.29}$$

Son generadores simétricos satisfaciendo el álgebra de Lie $[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k$ y, entonces, $\{\hat{\aleph}, \hat{\mathbf{L}}^2, J_z = \frac{1}{2}\hat{L}_z\}$ es un conjunto completo de observables que conmutan. Si denotamos por λ_{jm} y $|j, m>$ los eigenvalores y eigenvectores, respectivamente, luego tenemos las reglas selectoras

$$\begin{aligned} j &= 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, ... \\ m &= j, j-1, j-2, ..., -j. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Las eigenfunciones |j,m>son bien conocidas y los eigenvalores de $\hat{\aleph}$ están dados por

$$\lambda_{jm} = \theta[2j + a - 2m] \tag{3.31}$$

Usando estos resultados, el cálculo de los eigenvalores de $V(\hat{\aleph})$ es simple. Es mas, si los eigenvalores del operador $\hat{A}$ son a_n, entonces la función $f(\hat{A})$, después de expandir para pequeños valores de ϵ, es

$$\begin{aligned} f(\hat{A}+\epsilon)\psi_n &= \left(f(\hat{A}) + f'(\hat{A})\epsilon + \tfrac{1}{2!}f''(\hat{A})\epsilon^2\right)\psi_n \\ &= \left(f(a_n) + f'(a_n)\epsilon + \tfrac{1}{2!}f''(a_n)\epsilon^2\right)\psi_n \\ &= f(a_n+\epsilon)\psi_n \to f(a_n)\psi_n. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Como consecuencia, la ecuación de eigenvalores de $V(\hat{\aleph})$ es

$$V(\hat{\aleph})|j,m> = V[\theta(2j+1-2m)]|j,m> \tag{3.33}$$

Una vez es encontrada la ecuación (3.31), debemos encontrar el espectro del hamiltoniano completo dado por

$$\begin{aligned} H &= \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + V(\hat{\aleph}) \\ &= \frac{2}{M\theta^2}\left(\frac{\theta^2}{4}\mathbf{p}^2 + \mathbf{r}^2 - \theta L_z\right) - \frac{2}{M\theta^2}\mathbf{r}^2 + V(\hat{\aleph}) + \frac{2}{M\theta}L_z \\ &= \frac{2}{M\theta^2}\hat{\aleph} + V(\hat{\aleph}) - \frac{2}{M\theta^2}\mathbf{r}^2 + \frac{2}{M\theta}L_z \\ &\equiv H_0 - \frac{2}{M\theta^2}\mathbf{r}^2 + \frac{2}{M\theta}L_z \end{aligned} \tag{3.34}$$

Usando las ecuaciones (3.31) y (3.33) encontramos que los eigenvalores de $\hat{H}_0$ son

$$\Lambda_{j,m} = \frac{2}{M\theta}[2j+1-2m] + V[\theta(2j+1-2m)] \tag{3.35}$$

El segundo término del Hamiltoniano puede ser visto como una perturbación para grandes valores finitos de θ. Vamos a concentrarnos en las expresiones del Hamiltoniano completo, $E_{jm} =< j,m|\hat{H}|j,m>$.

$$\begin{aligned} E_{jm} &= < j,m|\hat{H}_0|j,m> - \tfrac{2}{M\theta^2} < j,m|\mathbf{r}^2|j,m> + \tfrac{4}{m\theta} < j,m|L_z|j,m> \\ &= \tfrac{2}{M\theta^2}\left(\tfrac{\theta^2}{4}\mathbf{p}^2 + \mathbf{r}^2 - \theta L_z\right) - \tfrac{2}{M\theta^2}\mathbf{r}^2 + V(\hat{\aleph}) + \tfrac{2}{M\theta}L_z \end{aligned} \tag{3.36}$$

El último término del lado derecho de (3.36) puede ser calculado usando la teoría de perturbaciones para grandes valores de θ. Es más, en cada caso $|j,m>$ corresponde a los eigenvectores del oscilador armónico bidimensional.

$$|j,m> = \frac{a_+^{\dagger j+m} a_-^{\dagger j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}|0,0>, \tag{3.37}$$

donde en (3.37) se ha utilizado la representación de Schrödinger para el oscilador armónico bidimensional y $< j,m|\mathbf{r}^2|j,m>$ da

$$< j,m|\mathbf{r}^2|j,m> = \frac{\theta}{2}[2j+1]. \tag{3.38}$$

3.3. Problema de Landau y mecánica cuántica no-conmutativa

Ahora se corroboran las relaciones de no-conmutatividad vistas en la Ref. [3], revisado en la sección 3.1, encontrando una equivalencia entre el problema de Landau y la Mecánica Cuantíca, tal y como se hizo en la Ref. [15]. Para esto consideran las relaciones de conmutación relacionadas con un espacio no-conmutativo como

$$[x, y] \sim \alpha\theta. \tag{3.39}$$

Donde hemos definido $\alpha\theta$ como $\tilde{\theta}$, el cual es un parámetro con dimensiones de longitud.

Empezaremos con el producto moyal para el término potencial en la ecuación de Schrödinger en un plano no-conmutativo (ec. (3.26)). Ahora para fuerzas centrales bidimensionales, la ec. (3.26) nos da

$$V(|\mathbf{x}|^2) \star \Psi(\mathbf{x}) = V(\hat{\aleph})\Psi(\mathbf{x}) \tag{3.40}$$

De (3.40) uno ve que $\aleph$ tiene unidades de longitud, y además, las dimensiones de θ son tiempo/masa. Este último factor implica que en la ec.(3.39) se debe escoger $\alpha = \hbar$ en (3.39), es decir,

$$\tilde{\theta} = \hbar\theta \tag{3.41}$$

Entonces, de la ec. (3.39) uno puede pensar que $\tilde{\theta}$ mide los efectos no-conmutativos del espacio.

El Hamiltoniano para la mecánica cuántica no-conmutativa en un campo central es entonces

$$\hat{H} = \frac{1}{2M}p^2 + V(\hat{\aleph}). \tag{3.42}$$

Ahora, sí escogemos el potencial

$$V(\hat{\aleph}) = \Omega\aleph \tag{3.43}$$

siendo Ω una constante apropiada, entonces el hamiltoniano (3.34) puede escribirse como

$$H = \left(\frac{1}{2M} + \frac{\Omega\theta^2}{4}\right)(p_x^2 + p_y^2) + \Omega(x^2 + y^2) - \Omega\theta L_z. \tag{3.44}$$

El siguiente paso es considerar el problema de Landau 2-dimensional, cuyo Hamiltoniano es, para una partícula con masa μ

$$\hat{H}_{Landau} = \frac{1}{2\mu}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{e^2B^2}{8\mu}(x^2 + y^2) - \frac{eB}{2\mu}L_z \tag{3.45}$$

donde H_0 es la magnitud del campo magnético. Comparando (3.44) con (3.45), se puede notar que hay una equivalencia, la cual significa que el campo magnético deberá ser suficientemente fuerte para confinar la partícula en el plano (x, y), lo que concuerda con el límite de campo magnético muy intenso que conduce al nivel más bajo. De esta comparación se llega a la expresión para θ,

$$\tilde{\theta} = \frac{4\hbar}{eB}, \tag{3.46}$$

la cual concuerda con la relación de no-conmutatividad dada por los paréntesis de Poison encontradas anteriormente en la sección 3.1.

Capítulo 4

Procedimiento de Jackiw para un sistema de cosmología impulsada por campo de taquión

En los capítulos anteriores, estudiamos como es posible construir modelos de cosmología cuántica utilizando el formalismo ADM (Capítulos 1 y 2) y la cuantización canónica, y en el capítulo 3 se estudió un sistema en el cual hay una interacción con un campo magnético externo, posteriormente se estudia el espectro de energías del correspondiente sistema cuántico y se identifica una relación de no-conmutatividad en un par de coordenadas, tanto en términos de paréntesis de Poison como de paréntesis de Dirac.

Ahora revisaremos el procedimiento implementado por Jackiw en [3] (el mismo que se utilizo en el capítulo 3) pero ahora sobre un sistema cosmológico proveniente de la teoría de cuerdas. La idea de implementar este procedimiento surge de nuestro deseo de encontrar una similitud entre la lagrangiana de un sistema de cosmología cuántica y la lagrangiana que describe al sistema no-conmutativo del problema de Landau, es decir, encontrar un campo que juegue el papel del campo magnético B del problema de Landau, además que será posible encontrar una ecuación del tipo WDW dependiente del tiempo [5], siguiendo la propuesta de A. Sen [16] de que en algunos límites, el campo taquión se puede ver como el tiempo.

A continuación daremos una breve revisión del modelo visto en [5], donde es analizada la acción efectiva para una teoría de cuerdas tipo II, en la cual se considera un sistema de p-branas. La acción, consta de 2 contribuciones: la acción S_{bulto} que corresponde al bulto (que es todo el espacio 10-dimensional), y la otra corresponde a la acción de la brana S_{brana}, la cual se encuentra encajada en el bulto. La acción S_{brana} dada por la acción del taquión (el cual vive en la brana) más un término que describe el acoplamiento del taquión con campos RR. Y en la acción S_{bulto} es añadida la acción de supergravedad 10-dimensional de fondo, dondé se considerará sólo el sector bosónico. La acción propuesta en [17] para esta teoría es:

$$S = S_{bulto} + S_{brana}, \tag{4.1}$$

$$S_{bulto} = \frac{1}{16\pi G_{10}} \int d^{10}x\sqrt{-g}\left[R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{e^{a\phi}}{2(p+2)!}F_{p+2}^2\right], \tag{4.2}$$

$$S_{brana} = \frac{\Lambda}{16\pi G_{10}} \int d^{p+2}x_{\parallel}\hat{\varrho}_{\perp}[-V(T)e^{-\phi}\sqrt{-\mathcal{A}}] + \frac{\Lambda}{16\pi G_{10}} \int \hat{\varrho}_{\perp}\mathcal{F}dT \wedge C_{p+1}, \tag{4.3}$$

donde G_{10} es la constante de Newton en la teoría 10-dimensional, Λ es el acoplamiento brana, $a \equiv (3-p)/2$ es el acoplamiento dilaton, $\mathcal{A} = \det\mathcal{A}_{\alpha\beta}$, $\mathcal{A}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}e^{\phi/2} + \partial_\alpha T\partial_\beta T$ es la métrica asociada al taquión, $\mathcal{F}(T)$ es el factor de acoplamiento entre el taquión y los campos RR C_{p+1}, y $V(T)$ es el potencial taquión. Podemos pensar en que S_{brana} representa los grados de libertad de un sistema de D-branas que interactúan sobre la geometría. En la acción anterior, $\hat{\varrho}_\perp$ es la "densidad de branas", las cuales no dependen de las coordenadas paralelas de la brana $x_\parallel$, es decir, $\hat{\varrho}_\perp$ describe la distribución de D-branas en las direcciones transversales a ellas mismas. Los índices griegos $\alpha, \beta = 0, 1, ..., p+1$, etiquetarán a las coordenadas paralelas a las branas (denotadas por el símbolo $\|$), incluyendo el tiempo. Y p nos da información sobre las dimensiones de una D-brana, y puede tomar valores entre 1 y 8. Los índices latinos $i, j = 1, .., 8-p$ indican las coordenadas perpendiculares a la brana (denotadas por $\perp$), y letras mayúsculas $A, B, ..., etc.$ se usan para todas las coordenadas del bulto.

Siguiendo la referencia [17], el modelo más simple que podemos estudiar es tomar una métrica FRW homogénea (pero no isotrópica):

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a_\parallel^2(t)dx_\parallel^2 + a_\perp^2(t)dx_\perp^2, \tag{4.4}$$

donde $a_\parallel(t)$ y $a_\perp(t)$ son los factores de escala paralelo y perpendicular de la brana y $N(t)$ es la función lapse. En este modelo homogéneo el espacio paralelo (perpendicular) a la brana es caracterizado por la constante de curvatura $k_\parallel(k_\perp)$. En [17] se analiza que la SDp-brana no es apropiada para ser localizada por una función delta, ello obedece a argumentos de simetría que van más allá del objetivo de esta tesis. En este sentido se propone distribuir la localización de la brana por una distribución homogénea a lo largo de $x_\perp$, de manera que la densidad $\hat{\varrho}_\perp$ esté dada por

$$\hat{\varrho}_\perp = \rho_\perp d^{8-p}x_\perp, \tag{4.5}$$

donde $\rho_\perp = \rho_0\sqrt{g_{H_{8-p}}} = \rho_0 a_\perp^{8-p}$, ρ_0 es una constante y $g_{H_{8-p}}$ es el determinante de la métrica de un espacio hiperbólico perpendicular a la brana. La intensidad de campo dada por la $(p+2)$-forma F_{p+2} se expresa en términos la $(p+1)$-forma de RR, C_{p+1}, el cual es elegido en un gauge en donde el único componente que no desaparece es $C_{12...p+1}$=C(t),

$$F_{p+2}^2 = -N^{-2}\dot{C}_{p+1}^2 = -N^{-2}\dot{C}^2. \tag{4.6}$$

Para preservar la homogeneidad, el campo taquión es una función solo del tiempo $T = T(t)$. Entonces el taquión acopla a los campos RR en la siguiente forma

$$dT \wedge C_{p+1} = \dot{T}Cd^{p+2}x_\parallel \tag{4.7}$$

donde el producto cuña es definido como $A \wedge B = A \otimes B - B \otimes A$ (si A y B son 1 formas) y a su vez, $A \otimes B$ es el producto tensorial.

Podemos simplificar la Lagrangiana introduciendo las coordenadas β_1 y β_2 definidas como,

$$\beta_1 = \frac{1}{9}[(p+1)\beta_\parallel + (8-p)\beta_\perp], \tag{4.8}$$

$$\beta_2 = \beta_\parallel - \beta_\perp, \tag{4.9}$$

donde $\beta_\parallel = \ln a_\parallel$ y $\beta_\perp = \ln a_\perp$. También el volumen espacial está dado por $V_S = \frac{1}{16\pi G_{10}}\int d^{p+1}x_\parallel d^{8-p}x_\perp$, así que $S = \int d^{10}x\mathcal{L}$ con $\mathcal{L} = V_S\int dtL$.

Con el fin de describir la influencia de la materia taquión en el nivel cuántico, en la conducción de un modelo cosmológico simple consideramos el caso donde se toman ambas constantes de curvatura $k_{\parallel}$ y $k_{\perp}$ como cero. Este caso nos permitirá dar alguna visión acerca de la materia taquión en el nivel cuántico. Otros caso con $k_{\parallel}$ y $k_{\perp}$ tomando valores dentro de 0,1,-1 puede ser analizado siguiendo el mismo procedimiento.

En coordenadas β_1 y β_2 y con el ansatz (4) tenemos una lagrangiana

$$\begin{aligned} L \;=\; & -\tfrac{e^{9\beta_1}}{N}\left[72\dot{\beta}_1^2 - \tfrac{(p+1)(8-p)}{9}\dot{\beta}_2^2 - \tfrac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \tfrac{e^{9\phi}}{2(p+2)!}\dot{C}^2\right] \\ & -\lambda e^{9\beta_1 - a\phi/2} V(T)\sqrt{N^2 e^{\phi/2} - \dot{T}^2} + \lambda e^{(8-P)[\beta_1 - (1/9)(P+1)\beta_2]}\mathcal{F}(T)\dot{T}C \end{aligned} \tag{4.10}$$

Podemos formular una teoría equivalente si introducimos un multiplicador de Lagrange Ω en la Lagrangiana (4.10) como sigue:

$$\begin{aligned} L \;=\; & -\tfrac{e^{9\beta_1}}{N}\left[72\dot{\beta}_1^2 - \tfrac{(p+1)(8-p)}{9}\dot{\beta}_2^2 - \tfrac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \tfrac{e^{9\phi}}{2(p+2)!}\dot{C}^2\right] - \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}(N^2 e^{\phi/2} - \dot{T}^2) \\ & -\tfrac{1}{2}\lambda^2 e^{18\beta_1 - a\phi} V^2(T)\Omega + \lambda e^{(8-p)[\beta_1 - (1/9)(p+1)\beta_2]}\mathcal{F}(T)\dot{T}C \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde $\lambda = \Lambda\rho_0$.

4.1. Identificación de términos entre el modelo de comoslogía y el problema de Landau

Como habíamos mencionado, la idea es emular el procedimiento de Jackiw en el modelo visto al inicio de este capítulo. Para esto vamos a comparar los términos de la lagrangiana (4.11) del modelo de cosmología impulsado por campo taquión con la lagrangiana del problema de Landau (3.4) entonces se puede ver que de igual forma tenemos un término cinético equivalente a $\frac{1}{2}mv^2$ que sería

$$-\frac{e^{9\beta_1}}{N}\left[72\dot{\beta}_1^2 - \frac{(p+1)(8-p)}{9}\dot{\beta}_2^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{e^{9\phi}}{2(p+2)!}\dot{C}^2\right] - \frac{1}{2}\Omega^{-1}\dot{T}^2$$

y un término equivelente al producto punto del potencial con la velociadad $\frac{e}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} = \frac{eb}{c}x\dot{y}$ en este caso

$$\lambda e^{(8-p)[\beta_1 - (1/9)(p+1)\beta_2]}\mathcal{F}(T)\dot{T}C,$$

lo cual nos permite poder ver una similitud entre $\mathcal{F}(T)\dot{T}$ con $\dot{y}$, y entre $\lambda e^{(8-p)[\beta_1-(1/9)(p+1)\beta_2]}C$ y $\frac{eB}{c}x$, donde C podría tomar un papel análogo al de bx del modelo de Landau, es decir como magnitud del campo y la cordenada de posición, por lo tanto aplicamos el procedimiento de Landau para ver si se pueden encontrar relaciones, entre la coordenada C y $W = \mathcal{F}(T)\dot{T}$.

El modelo estudiado se encuentra en la aproximación del minisuperespacio, teniendo como coordenadas a B_1, B_2, N, T, C y ϕ. Ahora hacemos el cambio de variable $\dot{W} = \mathcal{F}(T)\dot{T}$, y también tomamos $\mathcal{F}(T) = V(T) = e^{\alpha T}$, por lo tanto $\dot{W} = e^{\alpha T}\dot{T}$ y $\mathcal{F}(T) = V(T) = \alpha W$.

$$\begin{aligned} & L_r = -\tfrac{e^{9\beta_1}}{N}\left[72\dot{\beta}_1^2 - \tfrac{(p+1)(8-p)}{9}\dot{\beta}_2^2 - \tfrac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \tfrac{e^{9\phi}}{2(p+2)!}\dot{C}^2\right] - \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}(N^2 e^{\phi/2} - \tfrac{\dot{W}^2}{\alpha^2 W^2}) \\ & -\tfrac{1}{2}\lambda^2 e^{18\beta_1 - a\phi}\alpha^2 W^2\Omega + \lambda e^{(8-p)[\beta_1-(1/9)(p+1)\beta_2]}\dot{W}C, \end{aligned} \tag{4.12}$$

teniendo ahora como coordenadas a B_1, B_2, N, W, C y ϕ, y considerando la analogía entre C y W con bx y y del problema de Landau, hacemos la parte cinetica cero, obteniendo la siguiente densidad lagrangiana:

$$L_0 = -\frac{1}{2}\Omega^{-1}N^2 e^{\phi/2} - \frac{1}{2}\lambda^2 e^{18\beta_1 - a\phi}\alpha^2 W^2\Omega + \lambda e^{(8-p)[\beta_1-(1/9)(p+1)\beta_2]}\dot{W}C. \tag{4.13}$$

A continuación consideraremos 2 casos: el caso particular $p = 8$ y el general $p \neq 8$.

4.2. No-conmutatividad en C,W (caso particular $p = 8$)

Comenzaremos encontrando las relaciones de no-conmutatividad para el caso particular donde $p = 8$, el cual es un caso muy particular, ya que convierte la brana en el bulto, eliminando las coordenadas perpendiculares a la brana y además se vuelve a tener una metrica FRW isotropica, caracteristica que se había perdido al introducir la brana en el bulto. Para $p = 8$ la densidad lagrangiana queda ahora como

$$L_0 = -\frac{1}{2}\Omega^{-1}N^2e^{\phi/2} - \frac{1}{2}\lambda^2 e^{18\beta_1 - a\phi}\alpha^2 W^2\Omega + \lambda C\dot{W} \tag{4.14}$$

Al calcular los momentos asociados a partir de la lagrangiana reducida L_0, obtenemos

$$P_W = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{W}} = \lambda C \tag{4.15}$$

$$P_2 = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\beta}_2} = 0 \tag{4.16}$$

$$P_C = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{C}} = 0 \tag{4.17}$$

Al calcular el hamiltoniano, mediante la transformación $p\dot{q} - h(p,q)$, vemos que es posible tomar el Hamiltoniano H_0 como:

$$H_0 = \frac{1}{2}\Omega^{-1}N^2 + \frac{1}{2}\lambda^2\alpha^2W^2\Omega \tag{4.18}$$

lo que es muy similar a lo visto en el problema de Landau.

La ecuación de movimiento obtenida a partir de L_0, asociada a W es entonces:

$$\frac{\partial L_0}{\partial W} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{W}} \tag{4.19}$$

$$\dot{C} = -\lambda\alpha^2 W\Omega \tag{4.20}$$

Expresando $\dot{C}$ en términos de paréntesis de Poison, obtenemos

$$\dot{C} = \{H_0, C\} = \frac{\partial H_0}{\partial q^k}\frac{\partial C}{\partial p^k} - \frac{\partial H_0}{\partial p^k}\frac{\partial C}{\partial q^k} = \frac{\partial H_0}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial q^k}\frac{\partial C}{\partial p^k} - \frac{\partial H_0}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial p^k}\frac{\partial C}{\partial q^k} = \{q^j, C\}\frac{\partial H_0}{\partial q^j}$$

$$\dot{C} = \{H_0, C\} = \{q^i, C\}\frac{\partial H_0}{\partial q^i} = \{W, C\}\frac{\partial H_0}{\partial W} \tag{4.21}$$

$$\dot{C} = \{W, C\}\lambda^2\alpha^2 W\Omega. \tag{4.22}$$

Comparando las ecuaciones (4.20) y (4.22), encontramos la siguiente relación de no-conmutatividad

$$\{C, W\} = -\frac{1}{\lambda}, \tag{4.23}$$

lo cual es lo que queríamos encontrar inicialmente.

4.3. No-conmutatividad en C, W (caso general)

Ahora vamos a analizar el modelo para cualquier valor de p entre 0 y 7. Al calcular los momentos asociados a partir de la lagrangiana reducida L_0 ec. (4.13), obtenemos

$$P_W = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{W}} = \lambda e^{(8-p)[\beta_1-(1/9)(p+1)\beta_2]}C \tag{4.24}$$

$$P_1 = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\beta}_1} = 0 \tag{4.25}$$

$$P_2 = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\beta}_2} = 0 \tag{4.26}$$

$$P_\phi = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\phi}} = 0 \tag{4.27}$$

$$P_C = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{C}} = 0 \tag{4.28}$$

Al calcular el hamiltoniano, nos damos cuenta que L_0 está escrita como una relación de la forma $p\dot{q} - h(p,q)$, para $p = P_W$ y $q = W$, tal y como vimos en el caso particular para $p = 8$, entonces el Hamiltoniano reducido H_0 queda como:

$$H_0 = \frac{1}{2}\Omega^{-1}N^2 e^{\phi/2} + \frac{1}{2}\lambda^2 e^{18\beta_1 - a\phi}\alpha^2 W^2 \Omega \tag{4.29}$$

La ecuación de movimiento obtenida a partir de L_0, asociada a W queda como:

$$\frac{\partial L_0}{\partial W} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{W}} \tag{4.30}$$

$$\dot{C} = -\lambda e^{18\beta_1 - a\phi + (p-8)[\beta_1-(1/9)(p+1)\beta_2]}\alpha^2 W\Omega + C(p-8)[\dot{\beta}_1 - (1/9)(p+1)\dot{\beta}_2] \tag{4.31}$$

Y expresando $\dot{C}$ en términos de paréntesis de Poison, obtenemos

$$\dot{C} = \{H_0, C\} = \frac{\partial H_0}{\partial q^k}\frac{\partial C}{\partial p^k} - \frac{\partial H_0}{\partial p^k}\frac{\partial C}{\partial q^k} = \frac{\partial H_0}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial q^k}\frac{\partial C}{\partial p^k} - \frac{\partial H_0}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial p^k}\frac{\partial C}{\partial q^k} = \{q^j, C\}\frac{\partial H_0}{\partial q^j}$$

$$\dot{C} = \{H_0, C\} = \{q^i, C\}\frac{\partial H_0}{\partial q^i} = \{W, C\}\frac{\partial H_0}{\partial W} + \{\beta_1, C\}\frac{\partial H_0}{\partial \beta_1} + \{\beta_2, C\}\frac{\partial H_0}{\partial \beta_2} + \{\phi, C\}\frac{\partial H_0}{\partial \phi} \tag{4.32}$$

y suponiendo que C conmuta con β_1, β_2 y ϕ

$$\dot{C} = \{W, C\}\lambda^2\alpha^2 W\Omega. \tag{4.33}$$

Comparando la ecuación (4.31) con la ec. (4.33), encontramos la siguiente relación de no-conmutatividad

$$\{C, W\} = -\frac{1}{\lambda}e^{(p-8)[\beta_1-(1/9)(p+1)\beta_2]} + \frac{\Omega^{-1}C}{\lambda^2\alpha^2 W}(p-8)[\dot{\beta}_1 - (1/9)(p+1)\dot{\beta}_2]e^{-18\beta_1 + a\phi}. \tag{4.34}$$

Regresando al lagrangiano original L, ec. (4.11), vemos que el momento asociado a β_1 y β_2 es proporcional a sus respectivas velocidades, es decir:

$$P_1 = -\frac{144}{N} e^{9\beta_1} \dot{\beta}_1, \quad P_2 = \frac{2}{9} \frac{(p+1)(8-p)}{N} e^{9\beta_1} \dot{\beta}_2 \tag{4.35}$$

Por lo tanto, ya que en la lagrangiana L_0, los momentos asociados son $P_1 = 0$ y $P_2 = 0$, podemos decir que $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 0$ en este caso, por lo tanto la relación de no-conmutatividad queda como:

$$\{C, W\} = -\frac{1}{\lambda} e^{(p-8)[\beta_1 - (1/9)(p+1)\beta_2]} \tag{4.36}$$

donde podemos ver que en el caso $p = 8$, encontramos las mismas relaciones de no-conmutatividad encontradas anteriormente.

4.4. Formulación Hamiltoniana

Tal y como vimos en el caso del problema de Landau, en el capítulo 3, ahora vamos a encontrar las mismas relaciones de no-conmutatividad para el modelo de cosmología cuántica partiendo del Hamiltoniano. Por lo tanto vamos a utilizar la transformada de Legendre, y para ésto primero calculamos los momentos canónicos de la lagrangiana L_r (4.12),

$$P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_1} = -\frac{144}{N} e^{9\beta_1} \dot{\beta}_1, \tag{4.37}$$

$$P_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_2} = \frac{2}{9} \frac{(p+1)(8-p)}{N} e^{9\beta_1} \dot{\beta}_2, \tag{4.38}$$

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{e^{9\beta_1}}{N} \dot{\phi}, \tag{4.39}$$

$$P_C = \frac{\partial L}{\partial \dot{C}} = \frac{e^{9\beta_1 + a\phi}}{N(p+2)!} \dot{C}, \tag{4.40}$$

$$P_W = \frac{\partial L}{\partial \dot{W}} = \frac{\Omega^{-1} \dot{W}}{\alpha^2 W^2} + \lambda e^{(8-p)[\beta_1 - (1/9)(p+1)\beta_2]} C, \tag{4.41}$$

entonces las velocidades en términos de los momentos quedan como

$$\dot{\beta}_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_1} = -\frac{N}{144} e^{-9\beta_1} P_1 \tag{4.42}$$

$$\dot{\beta}_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_2} = \frac{9}{2} \frac{N}{(p+1)(8-p)} e^{-9\beta_1} P_2 \tag{4.43}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = N e^{-9\beta_1} P_\phi \tag{4.44}$$

$$\dot{C} = \frac{\partial L}{\partial \dot{C}} = N(p+2)! e^{9\beta_1 + a\phi} P_C \tag{4.45}$$

$$\dot{W} = \frac{\partial L}{\partial \dot{W}} = \Omega \alpha^2 W^2 P_W + \Omega \alpha^2 W^2 \lambda e^{(8-p)[\beta_1 - (1/9)(p+1)\beta_2]} C \tag{4.46}$$

Ahora calculamos el hamiltoniano

$$\begin{aligned}
H &= P_i q_i - L \\
H &= -\tfrac{N}{144}e^{-9\beta_1}P_1^2 + \tfrac{9}{2}\tfrac{N}{(p+1)(8-p)}e^{-9\beta_1}P_2^2 + Ne^{-9\beta_1}P_\phi^2 + N(p+2)!e^{9\beta_1+a\phi}P_C^2 + \\
&\quad +\Omega\alpha^2W^2P_W^2 + \Omega\alpha^2W^2\lambda e^{(8-p)[\beta_1-(1/9)(p+1)\beta_2]}CP_W - \{\tfrac{1}{2}[-\tfrac{N}{144}e^{-9\beta_1}P_1^2 \\
&\quad +\tfrac{9}{2}\tfrac{N}{(p+1)(8-p)}e^{-9\beta_1}P_2^2 + Ne^{-9\beta_1}P_\phi^2 + N(p+2)!e^{9\beta_1+a\phi}P_C^2] - \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}(N^2e^{\phi/2} \\
&\quad -\tfrac{1}{\alpha^2W^2}(\Omega\alpha^2W^2P_W + \Omega\alpha^2W^2\lambda e^{(8-p)[\beta_1-(1/9)(p+1)\beta_2]}C)^2) - \tfrac{1}{2}\lambda^2e^{18\beta_1-a\phi}\alpha^2W^2\Omega \\
&\quad +\lambda e^{(8-p)[\beta_1-(1/9)(p+1)\beta_2]}(\Omega\alpha^2W^2P_W + \Omega\alpha^2W^2\lambda e^{(8-p)[\beta_1-(1/9)(p+1)\beta_2]}C)C\}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

el cúal se reduce a

$$\begin{aligned}
H &= \tfrac{1}{2}[-\tfrac{N}{144}e^{-9\beta_1}P_1^2 + \tfrac{9}{2}\tfrac{N}{(p+1)(8-p)}e^{-9\beta_1}P_2^2 + Ne^{-9\beta_1}P_\phi^2 + N(p+2)!e^{9\beta_1+a\phi}P_C^2] \\
&\quad +\tfrac{1}{2}\alpha^2W^2\Omega[P_W - \lambda e^{(8-p)[\beta_1-(1/9)(p+1)\beta_2]}C]^2 + \tfrac{1}{2}\Omega^{-1}e^{\phi/2} + \tfrac{1}{2}\Omega\alpha^2W^2\lambda^2e^{18\beta_1-a\phi}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Expresaremos ahora sólo la parte cinética del momento canónico, indicando el momento cinético por π

$$\pi_1 = -\frac{144}{N}e^{9\beta_1}\dot{\beta}_1 = P_1 \tag{4.49}$$

$$\pi_2 = \frac{2}{9}\frac{(p+1)(8-p)}{N}e^{9\beta_1}\dot{\beta}_2 = P_2 \tag{4.50}$$

$$\pi_\phi = \frac{e^{9\beta_1}}{N}\dot{\phi} = P_\phi \tag{4.51}$$

$$\pi_C = \frac{e^{9\beta_1+a\phi}}{N(p+2)!}\dot{C} = P_C \tag{4.52}$$

$$\pi_W = \frac{\Omega^{-1}\dot{W}}{\alpha^2W^2} = P_W - \lambda e^{(8-p)[\beta_1-(1/9)(p+1)\beta_2]}C \tag{4.53}$$

Tal y como se realizó en el procedimiento de Jackiw, calcularemos los paréntesis de Poison entre los momentos cinéticos y las posiciones, quedando como sigue:

$$\{r_i, r_j\} = 0 \tag{4.54}$$

$$\{r_i, \pi_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial r_i}{\partial r_k}\frac{\partial \pi_j}{\partial \pi_k} - \frac{\partial r_i}{\partial \pi_k}\frac{\partial \pi_j}{\partial r_k}\right) = \delta_{ij} \tag{4.55}$$

$$\{\pi_i, \pi_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial r_k}\frac{\partial \pi_j}{\partial \pi_k} - \frac{\partial \pi_i}{\partial \pi_k}\frac{\partial \pi_j}{\partial r_k}\right) \tag{4.56}$$

$$\{\pi_i, \pi_j\} = 0, \;\; i,j = 1,2,\phi,C$$

$$\{\pi_W, \pi_1\} = (p-8)\lambda e^{(8-p)[\beta_1-(1/9)(p+1)\beta_2]}C = (p-8)(\pi_W - P_W)$$

$$\{\pi_W, \pi_2\} = \frac{1}{9}(p-8)(p+1)\lambda e^{(8-p)[\beta_1-(1/9)(p+1)\beta_2]}C = \frac{1}{9}(p-8)(p+1)(\pi_W - P_W)$$

$$\{\pi_W, \pi_C\} = -\lambda e^{(8-p)[\beta_1-(1/9)(p+1)\beta_2]}.$$

Ahora tomaremos como constricciones $\pi_i = 0$ $(i = 1,2,\phi,C,W)$ las componentes de momento cinetico por la misma razón que tomamos la parte cinetica como 0 en proceso anterior, como se realizo en el capítulo 3,y veremos a continuación el caso $p = 8$ y el caso general con $p \neq 8$.

4.4.1. Caso $p = 8$

En este caso particular, los paréntesis de Poison entre los momentos cineticos quedan como

$$\{\pi_i, \pi_j\} = 0, \;\; i, j = 1, 2, \phi, C$$
$$\{\pi_W, \pi_1\} = 0)$$
$$\{\pi_W, \pi_2\} = 0$$
$$\{\pi_W, \pi_C\} = -\lambda$$

Entonces en este caso, podemos decir que π_W y π_C son constricciones de segunda clase [13], ya que sus paréntesis de Poison son diferentes de cero, por lo tanto las relaciones de conmutación están dadas por los paréntesis de Dirac.

$$\{r_i, r_j\}_D = \{r_i, r_j\}_P - \{r_i, \pi_k\}_P \{\pi_k, \pi_l\}_P^{-1} \{\pi_l, r_j\}_P = -\delta_{ik}\{\pi_k, \pi_l\}^{-1}\delta_{lj} = -\{\pi_k, \pi_l\}^{-1} \tag{4.57}$$

con $i, j, k, l = W, C$, obteniendo las siguientes relaciones:

$$\{C, W\}_D = -\frac{1}{\lambda} \tag{4.58}$$

4.4.2. Caso general

En este caso surge un problema para ver de qué clase son las constricciones encontradas. La constricción $\pi_\phi = 0$, es fácil ver que es de primera clase ya que los paréntesis de Poison con cada una de las otras constricciones desaparecen [13, 18]; pero en el caso de las otras constricciones $\pi_i = 0$, $(i = 1, 2, C, W)$ al menos uno de los paréntesis de Poison de cada constricción con las restantes constricciones no lo hace. Eso hace pensar que son de segunda clase, pero la matriz que forman los paréntesis de estas 4 constricciones entre ellas, es no singular, y otra de las condiciones que se tienen que cumplir es que la matriz sea singular para que las constricciones sean de segunda clase [14], de lo contrario entre estas 4 constricciones al menos una de ellas es de 1ra. clase. Entonces determinar cuáles constricciones son de primera y cuáles de segunda clase aún no es posible con el análisis hecho hasta el momento.

Pero en caso de que solo las contricciones $\pi_i = 0$, $i = C, W$ sean de segunda clase, y viendo que los paréntesis de Poisson entre C y W forman la matriz

$$\{\pi_i, \pi_j\} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda e^{(8-p)[\beta_1 - (1/9)(p+1)\beta_2]} \\ -\lambda e^{(8-p)[\beta_1 - (1/9)(p+1)\beta_2]} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad (i, j = C, W) \tag{4.59}$$

las relaciones dadas por los paréntesis de Dirac, nos llevan a las siguientes relaciones de conmutación:

$$\{r_i, r_j\}_D = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\lambda} e^{(p-8)[\beta_1 - (1/9)(P+1)\beta_2]} \\ \frac{1}{\lambda} e^{(p-8)[\beta_1 - (1/9)(P+1)\beta_2]} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad (i, j = C, W) \tag{4.60}$$

las cuales son las mismas encontradas en la ec. (4.36).

A pesar de que estos últimos paréntesis de Dirac son iguales a los resultados encontrados anteriormente —ec. (4.36)— en términos de los paréntesis de Poisson, aún no podemos saber si son las únicas relaciones de conmutación distintas de cero, ya que, como se había mencionado antes, hasta este punto no podemos clasificar las restantes constricciones.

Conclusiones

Este trabajo constituye una primera aproximación sobre la interrogante de si es posible trabajar con coordenadas no-conmutativas en un modelo de cosmología proveniente de teoría de cuerdas.

Se revisó en los capítulos 1 y 2 el formalismo ADM, para poder escribir una formulación hamiltoniana de la gravedad, y encontrar una ecuación tipo Schrödinger (ecuación Wheeler-DeWitt) mediante la cuantización canónica de las coordenadas del superespacio, y se definió el concepto de minisuperespacio donde los modelos de cosmología cuántica están mejor definidos.

En el capítulo 3 se estudiaron algunos aspectos de la no-conmutatividad, particularmente para el problema de Landau (partícula cargada confinada moverse en un plano interactuando un campo magnético perpendicular a dicho plano), realizando una revisión del artículo [3], donde relaciones no-conmutatividad se encuentran de forma clásica, con el fin de utilizar mas adelante el procedimiento descrito ahí.

Por último, en el capítulo 4, estudiamos un modelo de cosmología proveniente de teoría de cuerdas. En dicho modelo se emuló el procedimiento mediante el que fueron encontradas las relaciones no-conmutativas en el modelo de Landau (capítulo 3), haciéndose una comparación entre ambos sistemas. Se observó que al menos en un caso particular (p=8) se pueden encontrar relaciones no-conmutativas entre dos coordenadas, en este caso el campo de taquión y un campo RR (coordenadas del minisuperespacio), los cuales viven en la brana, considerando a la brana como el plano del problema de Landau, sólo que la interacción que nos lleva a las relaciones no-conmutativas no es entre una partícula y un campo perpendicular, sino la interacción entre el campo de taquión y el campo RR. Para el caso general ($p = 1, 2, ..., 8$) aún falta trabajar más sobre éste, ya que hasta este momento no ha sido posible clasificar las constricciones que aparecen como constricciones de primera o segundo clase, por lo cual se propone dejar esta tarea para un trabajo posterior.

Bibliografía

[1] Richard J. Szabo. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Physics Reports*, 378(4):207–299, 2003.

[2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Curso de Física Teórica vol. 3. Mecánica cuántica: teoría no relativista*. REVERTE, 1972.

[3] R. Jackiw. Physical instances of noncommuting coordinates. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 108:30–36, 2002.

[4] E. Elbaz. *Quantum. The Quantum theory of Particles, Fields and Cosmology*. Springer, 1995.

[5] H. Garcia-Compean, G. Garcia-Jimenez, O. Obregon, and C. Ramirez. Tachyon driven quantum cosmology in string theory. *Phys. Rev.*, D71:063517, 2005.

[6] C. W. Misner, K. S. thorne thorne thorne thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. Freeman, 1973.

[7] Ray DÍnverno. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, 1992.

[8] Sean Carrol. *Spacetime and Geometry: An introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.

[9] Richard L. Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. The dynamics of general relativity. 1962.

[10] Alejandro Corichi and Dario Núñez. Introducción al Formalismo A D M. *Rev. Mex. Fís.*, 37(4):720–747, 1991.

[11] Luca Mezincescu. Star Operation in Quantum Mechanics. 2000.

[12] J. Gamboa, M. Loewe, and J. C. Rojas. Non-Commutative Quantum Mechanics. *Phys. Rev.*, D64:067901, 2001.

[13] K. Sundermeyer. *Constrained Dynamics*. Springer, Berlin, 1982.

[14] M. Henneaux and C. Teitelboim. Quantization of gauge systems. Princeton, USA: Univ. Pr. (1992) 520 p.

[15] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, and J. C. Rojas. The Landau problem and noncommutative quantum mechanics. *Mod. Phys. Lett.*, A16:2075–2078, 2001.

[16] Ashoke Sen. Time and tachyon. *Int. J. Mod. Phys.*, A18:4869–4888, 2003.

[17] Frederic Leblond and Amanda W. Peet. SD-brane gravity fields and rolling tachyons. *JHEP*, 04:048, 2003.

[18] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields Vol. 1 Foundations*. Cambridge University Press, 1995.