



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Calculando el rango numérico de una clase de operadores tridiagonales

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Christian Hernández Becerra

bajo la dirección de

Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz

PACHUCA DE SOTO, HIDALGO. JULIO 2014.

RESUMEN

En esta tesis se calcula el rango numérico de una clase de operadores tridiagonales que provienen de sucesiones bi-infinitas de ceros y unos. Se demuestra que el rango numérico de tales operadores está contenido en un conjunto Γ y que para operadores provenientes de una clase particular de sucesiones, llamadas pseudo-ergódicas, el rango numérico alcanza al conjunto Γ . Así mismo se discute el espectro de tales operadores en el contexto de la dinámica simbólica.

In this thesis we calculate the numerical range of a class of tridiagonal operators induced by bi-infinite sequences of zeros and ones. It is shown that the numerical range of such operators is contained in a subset Γ and for operators induced by sequences from a particular class, called pseudo-ergodic, the numerical range reaches the subset Γ . Furthermore the spectrum of such operators is discussed within the framework of symbolic dynamics.

Quiero dedicar este trabajo a mi familia y a esa persona cómplice de mis locuras.

AGRADECIMIENTOS

Mi agradecimiento está ampliamente dirigido para todas aquellas personas que en algún momento me han apoyado para salir adelante en este trabajo y en todo mi trayecto por la licenciatura.

Particularmente quiero agradecer al núcleo de mi familia: a mis padres Andrea Laura Becerra y Raymundo Leonardo Hernández porque con su esfuerzo y dedicación integraron, desde el principio de mi educación, útiles valores que me han ayudado para siempre perseguir y luchar por mis sueños. Igualmente agradezco su presencia y constancia a lo largo de mis estudios. Agradezco también a mi hermano Edgar, que a contra voluntad me ha proporcionado diversión y momentos agradables.

Agradezco a mis amigos y compañeros de la LIMA y de la LIFTA a quienes estimo y con quienes pasé tardes enteras agradables discutiendo problemas de diversas áreas. Quiero resaltar de ellos a Pablo Neria, porque ha gran sido ejemplo de amistad incondicional y a José Luis Cruz, compañero y compadre pero sobre todo un gran amigo que me ha ofrecido incondicionalmente su apoyo en estos últimos años y con quien la palabra *teorema* ha significado grandes alegrías.

Quiero agradecer también a los profesores que me han impartido cursos pues ellos despertaron inquietudes en mí y ampliaron mi gusto por las matemáticas. Les agradezco por sus aportación a mi persona y mi saber, pues son verdaderos ejemplos a seguir. Aún cuando unas cuantas líneas son insuficientes para exponer de forma completa cada razón de mi agradecimiento, quiero resaltar al Dr. Benjamín Itzá pues le admiro mucho y es quien quien, con amplia paciencia, ha dedicado gran parte de su tiempo para guiarme, no sólo como mi tutor, asesor y profesor, sino también como compañero, amigo y persona. Agradezco al Dr. Fernando Barrera por sus valiosos consejos, su sincera confianza y gran apoyo; al Mtr. Humberto Robles por su confianza, paciencia y el tiempo dedicado a discutir ideas y problemas de programación; al Dr. Jorge Viveros de quien admiro su coraje y su empeño por proporcionar sus cursos con la mejor calidad posible; a la Mtra. Margarita Tetlalmatzi, por el apoyo que me ha brindado; finalmente y no por ello menos importante a Erika Palacios, quien desde mi inicio en la licenciatura me ha apoyado con trámites y papeleos cuando lo he necesitado.

Quiero agradecer a Dr. Rubén Martínez, Dr. Federico Menéndez, Dr. Jorge Viveros, Dr. Raúl Temoltzi y Dr. Benjamín Itzá, miembros del jurado, por la dedicación prestada en la revisión de este trabajo, por sus comentarios y correcciones. Quiero agradecer principalmente a Dr. Benjamín por todo su apoyo, por las largas sesiones de discusión en el transcurso del desarrollo de este trabajo así como por sus útiles ideas. Además agradezco a Dr. Rubén y Dr. Federico por las ideas proporcionadas para crear la nota 3.9.

Finalmente agradezco a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo que me ha proporcionado el entorno para poder desarrollarme a lo largo de la Licenciatura y, en varias ocasiones, me ha brindado el apoyo para complementar mi formación fuera de nuestra entidad.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	III
Dedicatoria	IV
Agradecimientos	V
Introducción	1
1. Nociones preliminares	5
1.1. Espacios ℓ^p	5
1.2. Dinámica simbólica	6
1.3. Operadores	9
1.4. Espectro y rango numérico	11
2. Operadores particulares	15
2.1. Operador A_0	15
2.2. Operador A_1	19
3. Rango numérico de los operadores A_b	23
3.1. El rango numérico de A_b contenido en un hexágono	23
3.2. Algunas herramientas de cálculo y geometría	26
3.3. Resultados	36
4. Espectro	51
5. Conclusiones	55

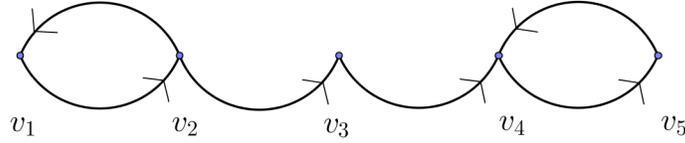
INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas se ha introducido en la matemática la tendencia de fusionar varias ramas de especialización, en muchos casos de áreas completamente distintas, para abordar problemas específicos, procurando resolver un mismo problema desde perspectivas distintas. Tal es el caso del área conocida como las matrices aleatorias y la dinámica simbólica.

Hoy en día las matrices aleatorias tienen una fuerte importancia, tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas. Esta teoría es un campo que últimamente ha tenido un amplio desarrollo debido a que es bastante fértil y que posee un gran número de aplicaciones en diferentes áreas como teoría de gráficas, teoría de números, combinatoria, entre otras. Esta teoría se ha aplicado para resolver problemas de estadística multivariante, física estadística, biología, ingeniería [1], procesamiento de señales, comunicación inalámbrica [2], teoría de juegos [4], etc. Su base principal consiste en considerar a las entradas de una matriz como variables aleatorias, y en consecuencia se obtienen resultados derivados de aplicar técnicas de análisis, pero interpretados desde el punto de vista probabilístico de acuerdo a la estructura generada por las variables aleatorias.

Por otro lado, la dinámica simbólica es también un área en desarrollo fuertemente ocupada en diversos ámbitos, por ejemplo: en las ciencias de la computación en autómatas celulares y teoría de la codificación; en biología sobre modelos matemáticos tales como la variación del ritmo cardíaco [5]; en álgebra de operadores y enlosados [13]. Dada su importancia, no es sorprendente que se quiera abordar desde la perspectiva de análisis matemático, y ya ha sido trabajado desde los años 80 en [8].

La dinámica simbólica es de los principales lugares en donde comienza a aparecer la correspondencia entre la teoría de gráficas y el álgebra lineal. Esto ocurre al asociar una gráfica dirigida con una matriz, denominada de adyacencia, la cual contiene la información de la cantidad de conexiones dirigidas entre los vértices de la gráfica. De manera que si una gráfica G tiene una matriz de adyacencia A , la entrada $a_{ij} \in \mathbb{N}$ indica la cantidad de conexiones del vértice v_i al vértice v_j . Como ejemplo considere la gráfica formada por los siguientes 5 vértices y las aristas dirigidas como se muestran



Entonces la matriz de adyacencia se obtiene de la siguiente manera

$$\text{conexiones: } \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los operadores de interés en este trabajo se pueden entender como una extensión de las matrices de adyacencia del caso finito. Se supone una cantidad numerable de vértices indexados con los números enteros de forma que un vértice siempre está conectado hacia el vértice inmediato de la derecha pero no siempre con el de la izquierda. Por medio de los operadores que aquí se estudian se pueden caracterizar las conexiones dirigidas entre cada vértice con el par de vértices contiguos.

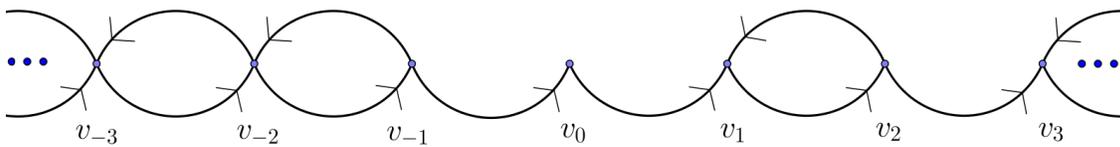


Figura 1: Conjunto numerable de vértices siempre conectados a la derecha, y no siempre conectados a la izquierda.

En [7] Chandler-Wilde, Chonchaiya y Linder estudian operadores inducidos por sucesiones de unos y menos unos. Entre los varios resultados obtenidos en [7], se demuestra que el rango numérico de los operadores que se estudian en ese trabajo está contenido en cierto conjunto Δ , y que cuando el operador es inducido por una sucesión pseudo-ergódica, se alcanza la igualdad. Los operadores estudiados en esta tesis son parecidos a los operadores estudiados en [7] considerando simplemente que se sustituye el valor -1 por 0 . En esta tesis se encuentra un conjunto Γ que contiene al rango numérico de los operadores, y se demuestra que cuando el operador

es generado por una sucesión pseudo-ergódica, se logra la igualdad. Sin embargo, aún cuando al principio se pensó que la estructura de las pruebas debería ser la misma debido a la similitud de los operadores, se requirió de un procedimiento distinto para la demostración de estos resultados.

A lo largo del desarrollo del trabajo el objetivo principal es calcular rango numérico, que es una herramienta muy importante del análisis funcional cuando se estudian operadores en espacios de Hilbert. Para cada operador, el rango numérico es un subconjunto de \mathbb{C} que tiene propiedades interesantes y que nos ofrece valiosa información sobre este operador. Por medio del rango numérico se puede decir si el operador es hermitiano, además contiene a los valores propios del operador y su cerradura contiene al espectro (otra herramienta importante para el análisis funcional). A diferencia del espectro, el rango numérico caracteriza con mayor detalle algunas propiedades y relaciones entre operadores, por ejemplo operadores que son unitariamente equivalentes poseen mismo rango numérico.

Esta tesis está dividida en cinco capítulos. En el primero se exponen principalmente definiciones útiles en el desarrollo del trabajo así como algunos resultados que serán de gran utilidad en el segundo capítulo. Primeramente se introduce a los espacios en los que estamos interesados así como algunas propiedades que se heredan de las características de dichos espacios. También se expone una pequeña introducción a la dinámica simbólica mostrando la relación con los espacios antes mencionados. Después se definen los operadores que nos interesan, algunas de sus propiedades como linealidad y acotabilidad, y se verá que es posible entender a estos operadores como una extensión de las matrices. Finalmente se define al *espectro* y al *rango numérico* de un operador y se muestra la relación que tienen entre sí.

En el segundo capítulo se analizan dos casos de operadores particulares que, pese a su sencillez, son la base para gran parte el trabajo en general y se demuestran algunos resultados útiles para el desarrollo del resto de los capítulos.

El tercer capítulo es el que contiene el trabajo principal y, como el título lo sugiere, está dedicado a mostrar algunas propiedades del rango numérico de los operadores que se definen en el primer capítulo. Está dividido en tres secciones: en la primera se obtiene un subconjunto de \mathbb{C} de forma hexagonal que contiene al rango numérico de cualquiera de los operadores aquí estudiados; en la segunda sección se prueban algunos resultados que serán ocupados en la tercera sección, finalmente en la última sección se muestran los resultados más interesantes de la tesis, pues se demuestra cuál es el conjunto más pequeño que contiene al rango numérico de cualquiera de los operadores aquí abordados.

En el cuarto capítulo se calcula el espectro de algunos operadores particulares y se muestra un pequeño resultado.

El último capítulo está dedicado a las conclusiones. Ahí se abordan algunas ideas que surgieron a lo largo del trabajo así como algunas conjeturas del comportamiento del rango numérico de estos operadores.

En este capítulo se presentan los conceptos principales para desarrollar este trabajo así como la notación ocupada. También presentamos algunos resultados que facilitan conclusiones de teoremas que se enuncian más adelante.

1.1

Espacios ℓ^p

Para describir los conjuntos de los números naturales, enteros, reales y complejos se utilizará las notaciones \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} y \mathbb{C} respectivamente. Para $z \in \mathbb{C}$ se ocupará la notación $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ para referir a la parte real e imaginaria de z respectivamente. Se define a una sucesión bi-infinita x como una función $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, y ocuparemos la notación x_k para expresar el valor de x en k con $k \in \mathbb{Z}$. Para cada $p \geq 1$ definiremos

$$\ell^p := \left\{ x = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mid x_j \in \mathbb{C}, \sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^p < \infty \right\}.$$

Estos conjuntos son los espacios vectoriales de las sucesiones bi-infinitas para las cuales la suma de los módulos de sus valores elevados a la potencia p converge. En estos espacios vectoriales la suma de elementos de ℓ^p y el producto por un escalar en el campo \mathbb{C} está definido de la misma manera que se hace con espacios vectoriales de \mathbb{C}^n . También se puede considerar $p = \infty$, definiéndose

$$\ell^\infty := \left\{ x = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mid x_j \in \mathbb{C}, \sup_{j \in \mathbb{Z}} \{|x_j|\} < \infty \right\}.$$

En estos espacios se puede definir la norma como sigue.

Definición 1.1. Sea $1 \leq p < \infty$, se define $\|\cdot\|_p$, la p -norma, como

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^p}$$

y para $p = \infty$ se define $\|x\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{Z}} \{|x_j|\}$. Cuando el valor p está fijo, usualmente se denota como $\|\cdot\|$, quedando implícito que se está trabajando con la p -norma correspondiente.

Un caso particular que es común considerar es cuando $p = 2$, pues se tiene que ℓ^2 es un espacio de Hilbert, (más aún, de los espacios ℓ^p es el único que es espacio de Hilbert) en el cual se define el producto interior como sigue

Definición 1.2. Sean $x, y \in \ell^2$, se define el *producto interior* de x con y , denotado por $\langle x, y \rangle$, como

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{y}_k x_k.$$

Esta definición además de satisfacer todas las propiedades de un producto interior, satisface que $\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Se denotará con $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ al conjunto de los elementos $x \in \ell^\infty$ tales que $x_k \in \{0, 1\}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Particularmente, se ocupará $\mathbf{0}$ para expresar al elemento de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ cuyas componentes son todas iguales a cero. De manera similar se ocupará $\mathbf{1}$ para referir al elemento de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ cuyas componentes son todas iguales a uno:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (\dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \dots). \\ \mathbf{1} &= (\dots 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \dots). \end{aligned}$$

De forma similar que en [6], se dirá que un elemento $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ es *pseudo-ergódico* si es posible encontrar cualquier patrón finito de unos y ceros, vista como una cadena de entradas consecutivas, en alguna parte de la sucesión.

1.2

Dinámica simbólica

En dinámica simbólica, se considera un conjunto finito A llamado *alfabeto* cuyos elementos se denominan *símbolos*, y se define al *espacio total de desplazamiento de A* a la colección de las sucesiones bi-infinitas de símbolos del alfabeto A , denotado por $A^{\mathbb{Z}}$. Como ejemplo, note

que cuando el alfabeto es el conjunto $\{0, 1\}$ el espacio total de desplazamiento es el conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, pues de su definición se sigue que es el conjunto de las sucesiones bi-infinitas cuyas componentes son uno o cero.

Cuando se escribe de manera explícita un elemento de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ se suele escribir un punto para separar los x_i con $i < 0$. Cuando se considera una sucesión finita de elementos del alfabeto, éstas son llamadas *bloques* o *palabras*. Para cualquier punto en $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, se denota el bloque que va de la coordenada i a la coordenada j , con $i \leq j$, como $x_{[i,j]}$. Cuando un bloque u satisface que $u = x_{[i,j]}$ para un elemento x y algunos i, j , se dice que el bloque u ocurre en x .

De esta manera, si

$$x = (\dots 011110 \cdot 100010 \dots)$$

se tiene que $x_{-2} = 1$, $x_{-1} = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, etc., y por ejemplo el bloque $u = x_{[-3,4]} = 11010001$ ocurre en x .

Note que cuando un elemento $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ es pseudo-ergódico, equivale a pedir que cualquier palabra de cualquier longitud del alfabeto $\{0, 1\}$ ocurre en algún lugar de b . Una manera sencilla de construir un elemento pseudo-ergódico es ordenar las palabras de forma creciente respecto a su cantidad de símbolos y acomodarlas de manera alternada.

$$x = (\dots 010\ 001\ 000\ 01\ 00\ 0 \cdot 1\ 11\ 10\ 111\ 110\ 101 \dots).$$

Definición 1.3. Se ocupará S para denotar al *mapeo desplazamiento* el cual va del espacio total de desplazamiento $A^{\mathbb{Z}}$ sobre sí mismo, y a cada punto x le asocia un punto $y = Sx$ de forma que la coordenada j -ésima es $y_j = (Sx)_j = x_{j+1}$.

Denotaremos a la composición de S consigo mismo $k > 0$ veces como $S^k = S \circ \dots \circ S$. Observe que la acción del mapeo es desplazar la sucesión k lugares a la izquierda, mientras que si se ocupa $S^{-k} = (S^{-1})^k$ desplaza la misma cantidad de lugares a la derecha.

Se puede definir una métrica sobre un espacio desplazamiento X de manera que el espacio junto con la métrica, forman un espacio métrico compacto y además el mapeo S es continuo [10].

Definición 1.4. Sea X un espacio de desplazamiento. Definiremos $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ como:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x_0 \neq y_0 \\ 2^{-k} & \text{donde } k \text{ es el mayor entero no negativo para el cual } x_{[-k,k]} = y_{[-k,k]}. \end{cases}$$

Demstrar que es una métrica no es complicado pues claramente ρ es una función no negativa, es simétrica y $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Para demostrar que se satisface condición

de subaditividad, solo se necesita trabajar un poco con los bloques centrales de sucesiones bi-infinitas.

Un subconjunto B de $A^{\mathbb{Z}}$ es un *subespacio de desplazamiento* si es compacto e invariante bajo el mapeo S , es decir $S(B) \subseteq B$.

Cuando se considera un espacio métrico compacto y un mapeo continuo, un concepto importante dentro de la dinámica simbólica es la órbita de un punto x en el espacio bajo este mapeo.

Definición 1.5. Un *sistema dinámico* (X, ϕ) consiste de un espacio métrico compacto X junto con un mapeo continuo $\phi : X \rightarrow X$. Para un sistema dinámico (X, ϕ) , la *órbita* de un punto $x \in X$ es el conjunto de las iteraciones $\{\phi^n x\}_{n \in \mathbb{Z}}$ cuando ϕ es invertible y $\{\phi^n x\}_{n \geq 0}$ cuando no.

Como se ve en la definición 1.3, el mapeo S es invertible y por lo tanto en este trabajo se ocupará la primera opción de la definición de órbita. Puesto que sólo se considera el mapeo S para el sistema dinámico, ocuparemos la notación $\text{orb}(x)$ para referirnos a la órbita del punto x bajo el mapeo S . Mostraremos a continuación un par de ejemplos.

Ejemplo 1.6. Considere $x = \mathbf{0}$, puesto que $(S\mathbf{0})_j = \mathbf{0}_{j+1} = \mathbf{0} = \mathbf{0}_j$, se tiene que $\text{orb}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$. Es claro que la cerradura de la órbita de $\mathbf{0}$ es $\{\mathbf{0}\}$, pues el conjunto tiene un único punto. De manera similar, cuando se considera $x = \mathbf{1}$ se tiene que $\text{orb}(\mathbf{1}) = \text{orb}(\mathbf{1}) = \{\mathbf{1}\}$.

Ejemplo 1.7. Sea $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ un elemento pseudo-ergódico. Demostraremos que para cada $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ fijo y cada $\varepsilon > 0$ existe un elemento ξ en $\text{orb}(b)$ tal que $\rho(x, \xi) < \varepsilon$. Si $x \in \text{orb}(b)$, el resultado es trivial haciendo $\xi = x$, supongamos entonces que $x \neq \xi$ para todo $\xi \in \text{orb}(b)$. Sea k_0 un entero positivo tal que $\frac{1}{2^{k_0}} < \varepsilon$. Debido a que b es un punto pseudo-ergódico se puede encontrar cualquier bloque de cualquier longitud de de 1's y 0's en b , en particular el bloque $x_{[-k_0, k_0]}$ ocurre en b . Es decir, existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $b_{[j_0, j_0+2k_0]}$ es la palabra de longitud $2k_0 + 1$ idéntica a $x_{[-k_0, k_0]}$.

Consideremos $\xi = S^{-j_0-k_0}b$, es claro que ξ es un elemento de la órbita de b , y que el operador $S^{-j_0-k_0}$ actúa sobre b desplazando el bloque $b_{[j_0, j_0+2k_0]}$ a la parte central, por lo que $\xi_{[-k_0, k_0]} = b_{[j_0, j_0+2k_0]} = x_{[-k_0, k_0]}$. Si k es el máximo entero tal que $x_{[-k, k]} = \xi_{[-k, k]}$, es claro que $k \geq k_0$. Con esto se tienen las siguientes líneas:

$$\begin{aligned} \rho(x, \xi) &= \frac{1}{2^k} \\ &\leq \frac{1}{2^{k_0}} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

por lo que se tiene que $\text{orb}(b)$ es un conjunto denso en el espacio total de desplazamiento, es decir $\overline{\text{orb}(b)} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.

1.3

Operadores

El objetivo principal de este trabajo es estudiar un conjunto de operadores específicos definidos sobre ℓ^p los cuales son lineales, acotados y además se pueden expresar en una especie de forma matricial. Esta forma matricial será de ayuda al interpretar la acción de dichos operadores sobre los elementos de ℓ^p .

Definición 1.8. Dados X y Y espacios vectoriales sobre el mismo campo y $A \subseteq X$, un *operador* T de A en Y es un mapeo, es decir, a cada elemento de $x \in A$ se le asocia un único elemento $y \in Y$ y se escribe $y = Tx$. El conjunto A es denominado el *dominio* de T , $\mathcal{D}(T)$. Por lo general se denota

$$T : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$$

Además se dirá que T es un *operador lineal* si para todo $x, y \in \mathcal{D}(T)$ y escalar α

$$\begin{aligned} T(x+y) &= Tx + Ty. \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx. \end{aligned}$$

Definición 1.9. Sean X y Y , espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ un operador lineal, con $\mathcal{D}(T) \subseteq X$. Se dice que T es un *operador lineal acotado* si existe un número real c tal que para todo $x \in \mathcal{D}(T)$,

$$\|Tx\| \leq c \|x\|.$$

Se define la *norma del operador* T como

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \right\} = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\|=1}} \{\|Tx\|\}.$$

La segunda igualdad se tiene por ser T un operador lineal. De esto se sigue que T es acotado si y sólo si $\|T\| < \infty$.

Utilizando cada $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ se construye el operador $A_b : \ell^p \rightarrow \ell^p$ de manera que para cada $x \in \ell^p$,

$$(A_b x)_j = b_{j-1} x_{j-1} + x_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (1.1)$$

Demostración. Sea $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Primero probaremos que A_b es un operador lineal y después que es acotado. Es directo de la ecuación 1.1 que A_b es lineal pues si $x, y \in \ell^p$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{aligned} (A_b(x+y))_j &= b_{j-1}(x_{j-1} + y_{j-1}) + (x_{j+1} + y_{j+1}) \\ &= b_{j-1}x_{j-1} + b_{j-1}y_{j-1} + x_{j+1} + y_{j+1} \\ &= (A_b x)_j + (A_b y)_j. \\ (A_b \alpha x)_j &= b_{j-1} \alpha x_{j-1} + \alpha x_{j+1} \\ &= \alpha (b_{j-1}x_{j-1} + x_{j+1}) \\ &= \alpha (A_b x)_j. \end{aligned}$$

Se muestra así que A_b es un operador lineal. Para probar que A_b es acotado solo basta ver que por la ecuación 1.2 se sigue que

$$\begin{aligned} \|A_b\| &= \sup_{\substack{x \in \ell^p \\ \|x\|=1}} \{\|A_b x\|\} \\ &\leq \sup_{\substack{x \in \ell^p \\ \|x\|=1}} \{2\|x\|\} \\ &= 2 \end{aligned}$$

con lo que se demuestra que el A_b es acotado. ■

Definición 1.11. Sea $T : H \rightarrow H$ un operador lineal acotado, donde H es un espacio de Hilbert, se define al *operador adjunto de T* , denotado por T^* , tal que para todo $x, y \in H$ se satisface que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$. Si además $T = T^*$ se dice que T es un *operador autoadjunto*.

Se puede demostrar que este operador siempre existe, es único, es acotado y además satisface que $\|T^*\| = \|T\|$ [9, Teorema 3.9-2].

1.4

Espectro y rango numérico

Cuando se estudian operadores, uno de los principales objetivos consiste en averiguar detalles del espectro. Una herramienta muy importante para el estudio del espectro de cualquier operador es el rango numérico de dicho operador pues es un subconjunto de \mathbb{C} cuya cerradura contiene a su espectro.

Definición 1.12. Sea T un operador lineal definido sobre un espacio de Hilbert. Se define el operador $T_\lambda = T - \lambda I$, donde λ es un número complejo e I es el operador identidad sobre $\mathcal{D}(T)$. Se define al *espectro de T* como el conjunto de valores λ tales que T_λ no es invertible y al conjunto de valores λ tales que T_λ sí es invertible se le denomina *resolvente de T* .

El espectro tiene una subdivisión de acuerdo a la forma en que se tiene la no invertibilidad. Se define al *espectro puntual*, o *espectro discreto* $\sigma_p(T)$, como el conjunto de los valores λ tal que T_λ no es inyectivo, es decir el sistema $T_\lambda x = 0$ tiene solución no trivial y por lo tanto, el espectro puntual es el conjunto de los valores propios de T . Para cada elemento $\lambda \in \sigma_p(T)$ los elementos x , distintos del vector cero tales que $T_\lambda x = 0$ se denominan *vectores propios asociados a λ* . Estos vectores equivalentemente satisfacen que $Tx = \lambda x$. El *espectro residual* $\sigma_r(T)$, es el conjunto de valores $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que T_λ es inyectivo, pero no tiene rango denso. El *espectro continuo* $\sigma_c(T)$, es el conjunto de valores $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que T_λ es inyectivo, tiene rango denso pero no es suprayectivo. Claramente $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$.

Se puede demostrar [6, 7] que el espectro del operador $A_b : \ell^p \rightarrow \ell^p$ no depende de p cuando $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ y $1 \leq p \leq \infty$, por lo que mantendremos la notación $\sigma(A_b)$ para referirnos a éste. Un resultado que utilizaremos adelante es el siguiente [11, Teorema 1.2.4].

Teorema 1.13. *Sea T un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert.*

- (I) *El espectro de T es un subconjunto de \mathbb{C} , no vacío y compacto.*
- (II) *Si T es un operador invertible, entonces*

$$\sigma(T^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T) \right\}.$$

- (III) *Si T^* denota al operador adjunto de T en el espacio de Hilbert, entonces*

$$\sigma(T^*) = \left\{ \bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T) \right\}.$$

Definición 1.14. Sea X un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y T un operador lineal acotado sobre X . Se define al *rango numérico de T* , denotado por $W(T)$, como

$$W(T) := \{ \langle Tx, x \rangle \mid x \in \mathcal{D}(T), \|x\| = 1 \}.$$

En [16, Proposición 2.4] y [15, Proposición 1.1] se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.15. *Sea T un operador en un espacio X de Hilbert, el rango numérico de T satisface que:*

- (1) $\sigma_p(T) \subseteq W(T)$, es decir, el rango numérico contiene a todos los valores propios de T .

- (II) Si se considera a I , la identidad en X , se tiene que $W(I) = \{1\}$, además si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $W(\alpha T + \beta I) = \alpha W(T) + \beta$.
- (III) Si S es otro operador en X , $W(T + S) \subseteq W(T) + W(S)$.
- (IV) $W(T)$ es un subconjunto convexo de \mathbb{C} .
- (V) $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$, es decir, el espectro de un operador está contenido en la cerradura de su rango numérico.

Demostración.

- (I) Sea $\lambda \in \sigma_p(T)$, y x un vector propio asociado a λ . Definiendo $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|}$ obtenemos un vector propio unitario asociado a λ , es decir, se tiene que $\|\hat{x}\| = 1$ y $T\hat{x} = \lambda\hat{x}$, por otro lado $\langle T\hat{x}, \hat{x} \rangle = \langle \lambda\hat{x}, \hat{x} \rangle = \lambda \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle = \lambda \in W(T)$, mostrando así que $\sigma_p(T) \subseteq W(T)$.
- (II) Consideremos I la identidad en X y sea $x \in X$ unitario, entonces $\langle Ix, x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 1$ con lo que queda claro que $W(I) = \{1\}$. Ahora notemos que si $x \in X$ con $\|x\| = 1$, entonces $\langle (\alpha T + \beta I)x, x \rangle = \langle \alpha Tx + \beta x, x \rangle = \alpha \langle Tx, x \rangle + \beta \langle x, x \rangle = \alpha \langle Tx, x \rangle + \beta$, por lo que se tiene lo que se quiere.
- (III) Notemos que $\langle (T + S)x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle + \langle Sx, x \rangle$, por lo que se tiene de manera trivial que $W(T + S) \subseteq W(T) + W(S)$.
- (IV) La demostración de este inciso se encuentra en [16, Proposición 2.4].
- (V) La demostración de este inciso se encuentra en [15, Proposición 1.1].

■

Teorema 1.16. Si T es un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert X , entonces tanto $W(T)$ como $\sigma(T)$ son subconjuntos de \mathbb{R} .

Demostración. Sea $x \in X$, entonces $\overline{\langle x, Tx \rangle} = \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle$. La primer igualdad es válida por la definición del producto interior y la segunda por ser un operador autoadjunto. Se sigue que $W(T) \subset \mathbb{R}$ y por lo tanto $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)} \subset \mathbb{R}$. ■

CAPÍTULO 2

OPERADORES PARTICULARES

Como ya se dijo anteriormente, estamos interesados en los operadores sobre ℓ^p definidos en la ecuación 1.1, con enfoque principal en su rango numérico y espectro. En este capítulo se estudiará un poco sobre dos operadores particulares que serán útiles más adelante: A_0 , el operador desplazamiento hacia la izquierda, y A_1 , el operador que consiste en la suma del desplazamiento a la izquierda más el desplazamiento a la derecha. Consideremos $p = 2$, teniendo que ℓ^p es espacio de Hilbert para poder ocupar la noción de rango numérico que en estos dos casos es fácil calcular.

2.1

Operador A_0

Recuerde que $\mathbf{0}$ es la sucesión que está conformada sólo con ceros. Note que A_0 es el operador desplazamiento hacia la izquierda pues de la ecuación 1.1, para todo $x \in \ell^2$, se tiene que $(A_0x)_j = x_{j+1}$. Es decir, al aplicar A_0 a x , a cada componente x_j se le asigna x_{j+1} (observemos que cuando este operador se aplica sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ es el mapeo desplazamiento S definido en las nociones preliminares de dinámica simbólica):

$$\begin{array}{cccccccc} x & = & (\dots & x_{-2} & x_{-1} & \cdot & x_0 & x_1 & x_2 & \dots) \\ & & & \swarrow & & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ A_0x & = & (\dots & x_{-1} & x_0 & \cdot & x_1 & x_2 & x_3 & \dots) \end{array}$$

Debe ser claro que cuando consideramos la norma de A_0x resultará que es igual a la norma de x , pues

$$\begin{aligned}\|A_0 x\| &= \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_{k+1}|^2} \\ &= \|x\|.\end{aligned}$$

Se demostrará que en este caso $W(A_0) = \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}$, el disco unitario de \mathbb{C} sin la frontera.

Proposición 2.1. $W(A_0) = \mathbb{D}$.

Demostración. Se hará esta prueba mostrando las dos contenciones que garantizan la igualdad de conjuntos.

$\mathbb{D} \subseteq W(A_0)$. Primero veamos que de manera trivial $0 \in W(A_0)$. Sea $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ de manera que $x_0 = 1$ y $x_k = 0 \forall k \neq 0$. Debe ser claro que x escogido de esta manera es un elemento unitario que cumple $\langle A_0 x, x \rangle = \sum \bar{x}_k x_{k+1} = 0$.

Sea $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, se quiere demostrar que $\lambda \in W(A_0)$ y para ello se encontrará un elemento unitario $x \in \ell^2$ tal que $\lambda = \langle A_0 x, x \rangle$. Se sabe que existen $\theta \in [0, 2\pi)$ y $r \in (0, 1)$ únicos tales que $\lambda = r e^{i\theta}$. Sea $\alpha = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}$ y escojamos $x \in \ell^2$ tal que

$$x_k = \begin{cases} \alpha \lambda^k & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{si } k \leq 0. \end{cases}$$

Con esta elección de x se tiene que:

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k > 0} \alpha^2 |\lambda|^{2k}}.\end{aligned}$$

Note que $|\lambda| = r$ y si se aclara que se puede ocupar el resultado $\sum_{k > 0} (r^2)^k = \frac{r^2}{1-r^2}$ debido a que $r \in (0, 1)$, se sigue que

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\alpha^2 \sum_{k > 0} (r^2)^k} \\ &= \sqrt{\alpha^2 \frac{r^2}{1-r^2}} \\ &= 1,\end{aligned}$$

por lo cual x es un elemento de ℓ^2 unitario. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\langle A_0 x, x \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{x}_k (A_0 x)_k \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{x}_k x_{k+1} \\
&= \sum_{k > 0} \alpha^2 \bar{\lambda}^k \lambda^{k+1}.
\end{aligned}$$

Si se ocupa que $\lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2$ se sigue que

$$\begin{aligned}
\langle A_0 x, x \rangle &= \alpha^2 \sum_{k > 0} |\lambda|^{2k} \lambda \\
&= \alpha^2 \lambda \frac{r^2}{1 - r^2} \\
&= \lambda,
\end{aligned}$$

mostrando así que $\lambda \in W(A_0)$ y por consecuencia $\mathbb{D} \subseteq W(A_0)$.

$W(A_0) \subseteq \mathbb{D}$. Sea $x \in \ell^2$ unitario, ocupando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene que

$$|\langle A_0 x, x \rangle| \leq \|A_0 x\| \cdot \|x\|.$$

Pero los multiplicandos del lado derecho de la desigualdad son iguales a 1 pues $\|A_0 x\| = \|x\|$ y x es unitario. Con esto se tiene $W(A_0) \subseteq \mathbb{D}$, faltando sólo por probar que la frontera de \mathbb{D} no forma parte del rango numérico del operador. Sabemos que la igualdad en Cauchy-Schwarz se tiene si y sólo si $A_0 x$ y x son linealmente dependientes; es decir, si existe algún elemento $x \in \ell^2$ tal que $|\langle A_0 x, x \rangle| = 1$, entonces existe una constante $m \in \mathbb{C}$ tal que $x_{j+1} = mx_j$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Esto implica que $x_k = m^k x_0$, de donde se sigue:

$$\begin{aligned}
1 &= \|x\|^2 \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 \\
&= |x_0|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m|^{2k}.
\end{aligned}$$

Debido a que la suma se realiza sobre todos los números enteros es claro que es imposible encontrar $m \neq 0$ que satisfaga tal igualdad, pues si $|m| \geq 1$ la suma sobre los subíndices positivos es infinito y si $|m| \leq 1$ la suma sobre los subíndices negativos es infinito. Luego $|\langle A_0 x, x \rangle| < 1$ y por lo tanto $W(A_0) \subseteq \mathbb{D}$, con lo que se concluye la demostración. ■

Con ayuda de este operador se demostrará una proposición que nos será de utilidad más adelante.

Proposición 2.2. Sea $x \in \ell^2$ tal que $\|x\| = 1$ y definamos $a = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de manera que $a_k = \overline{x_k}x_{k+1}$. Entonces

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < 1.$$

Demostración. Sea $x \in \ell^2$ unitario. Se propone a $y \in \ell^2$ de manera que $y_k = |x_k|$. Entonces

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2} \\ &= \|x\| = 1, \end{aligned}$$

lo cuál nos dice que y es un elemento unitario de ℓ^2 . En consecuencia de la proposición 2.1 que establece que $W(A_0) = \mathbb{D}$, se sigue que

$$\langle A_0 y, y \rangle < 1. \quad (2.1)$$

Por otro lado, de la definición del producto interno se puede observar que

$$\begin{aligned} \langle A_0 y, y \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_{k+1} \overline{y_k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_{k+1}| |x_k| \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|, \end{aligned}$$

esta última expresión junto con la desigualdad 2.1 demuestra lo que se quiere. ■

La desigualdad que ofrece esta proposición es muy importante debido a que muestra que la sucesión de elementos $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ con $a_k = x_{k+1} \overline{x_k}$ es absolutamente sumable para cualquier elemento $x \in \ell^2$ unitario y por lo tanto cualquier subsucesión de $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es sumable. Esto dará amplia libertad sobre las sumas infinitas de los elementos de $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Por otro lado, note que es fácil calcular el inverso del operador A_0 , pues es el operador que describe el desplazamiento hacia la derecha en los espacios ℓ^p . Convenientemente se denotará como A_0^* debido a que es fácil demostrar que además es el operador adjunto de A_0 .

Para ver que en efecto son operadores inversos, sea $x \in \ell^p$ arbitrario, entonces

$$\begin{aligned} (A_0^* (A_0 x))_j &= (A_0 x)_{j-1} = x_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \\ (A_0 (A_0^* x))_j &= (A_0^* x)_{j+1} = x_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Demostración. Sean $x, y \in \ell^2$ arbitrarios, entonces

$$\begin{aligned}
 \langle x, A_1 y \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\overline{y_{k+1}} + \overline{y_{k-1}}) x_k \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{y_{k+1}} x_k + \overline{y_{k-1}} x_k \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{y_k} x_{k-1} + \overline{y_k} x_{k+1} \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{y_k} (x_{k-1} + x_{k+1}) \\
 &= \langle A_1 x, y \rangle.
 \end{aligned}$$

Note que la primera y quinta igualdad se tienen por definición de producto interior y la tercera igualdad se tiene porque la suma se realiza sobre todo \mathbb{Z} , con lo que se termina la demostración. ■

Como A_1 es autoadjunto, se puede aplicar el teorema 1.16. Esto, considerado junto con el hecho de que A_1 se puede entender como la suma del desplazamiento a la izquierda y el desplazamiento a la derecha, induce a la idea de que $W(A_1) = (-2, 2)$, pues $(-2, 2)$ se puede ver como la parte real del doble de los posibles valores del rango numérico del operador desplazamiento.

Proposición 2.4. $W(A_1) = (-2, 2)$.

Demostración. Esta prueba es muy similar a la prueba de la proposición 2.1.

$(-2, 2) \subseteq W(A_1)$. Es claro que $0 \in W(A_1)$ pues basta con escoger $x \in \ell^2$ de manera que $x_0 = 1$ y $x_k = 0$ para todo $k \neq 0$, así

$$(A_1 x)_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = -1, 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

por lo que $\langle A_1 x, x \rangle = 0$.

Sea $\lambda \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. Se quiere demostrar que $2\lambda \in W(A_1)$ por lo que encontraremos un elemento unitario $x \in \ell^2$ tal que $2\lambda = \langle A_1 x, x \rangle$. Sea $\alpha = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$ y $x \in \ell^2$ tal que

$$x_k = \begin{cases} \alpha \lambda^k & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{si } k \leq 0. \end{cases}$$

Con x escogido de esta forma se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k > 0} \alpha^2 \lambda^{2k}} \\
&= \sqrt{\alpha^2 \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por lo que x es un elemento unitario de ℓ^2 y de manera similar que antes, puesto que $\lambda \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, la igualdad $\sum_{k > 0} \lambda^{2k} = \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2}$ es válida. Además:

$$\begin{aligned}
\langle A_0 x, x \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{x}_k (x_{k+1} + x_{k-1}) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{x}_k x_{k+1} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{x}_k x_{k-1} \\
&= \sum_{k > 0} \alpha^2 (\lambda^{2k+1}) + \sum_{k > 1} \alpha^2 (\lambda^{2k-1}) \\
&= 2\alpha^2 \sum_{k > 0} \lambda^{2k} \lambda \\
&= 2\alpha^2 \lambda \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} \\
&= 2\lambda.
\end{aligned}$$

Mostrando así que $2\lambda \in W(A_1)$ y por consecuencia $(-2, 2) = (-2, 0) \cup \{0\} \cup (0, 2) \subseteq W(A_1)$, como se quería.

$W(A_1) \subseteq (-2, 2)$. Por otro lado, si $x \in \ell^2$ unitario, entonces

$$\begin{aligned}
\langle A_1 x, x \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{x}_k (x_{k-1} + x_{k+1}) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{x}_k x_{k-1} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{x}_k x_{k+1} \\
&= \overline{\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \bar{x}_{k-1}} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{x}_k x_{k+1} \\
&= 2\operatorname{Re} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \bar{x}_{k-1} \right) \\
&= 2\operatorname{Re} (\langle A_0 x, x \rangle).
\end{aligned}$$

Como ya se probó que $W(A_0) = \mathbb{D}$, se tiene la desigualdad estricta

$$\langle A_1 x, x \rangle < 2.$$

Con esto se demuestra la contención $W(A_1) \subseteq (-2, 2)$ y concluimos $W(A_1) = (-2, 2)$. ■

CAPÍTULO 3

RANGO NUMÉRICO DE LOS OPERADORES A_B

Este capítulo está dedicado a encontrar algunos subconjuntos de \mathbb{C} que garantizan contener al rango numérico de los operadores A_b , sin embargo se dedicarán las últimas dos secciones para mostrar que existe un subconjunto, denotado con Γ , que contiene al rango numérico de cualquier operador A_b y además, para algunas elecciones de b , Γ es igual al rango numérico de A_b .

3.1

El rango numérico de A_b contenido en un hexágono

En esta sección se mostrará un hexágono que contiene al rango numérico de A_b para $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ arbitrario. Se comenzará manipulando una expresión que se deriva de la definición del producto interior. Sea $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, $x \in \ell^p$ tal que $\|x\| = 1$ y a definida por $a_k = \overline{x_k}x_{k+1}$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle A_b x, x \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{x_k} (b_{k-1} x_{k-1} + x_{k+1}) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{k-1} \overline{x_k} x_{k-1} + \overline{x_k} x_{k+1} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{k-1} \overline{a_{k-1}} + a_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \overline{a_k} + a_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\operatorname{Re}(a_k)(1 + b_k) + i \operatorname{Im}(a_k)(1 - b_k)). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Esta expresión, junto con la proposición 2.2 es útil para deducir algunos puntos:

1.

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Re}(\langle A_b x, x \rangle)| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{Re}(a_k)(1 + b_k) \right| \\
&\leq 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\operatorname{Re}(a_k)| \\
&< 2.
\end{aligned}$$

Note que en este punto la primera desigualdad es cierta pues $b_k \in \{0, 1\}$ y la segunda se cumple porque $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ y $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < 1$.

2.

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Im}(\langle A_b x, x \rangle)| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{Im}(a_k)(1 - b_k) \right| \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\operatorname{Im}(a_k)| \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Note que en este punto la primera desigualdad es cierta pues $b_k \in \{0, 1\}$ y la segunda se cumple porque $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ y $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < 1$.

3.

$$\begin{aligned}
&|\operatorname{Re}(\langle A_b x, x \rangle)| \\
&+ |\operatorname{Im}(\langle A_b x, x \rangle)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\operatorname{Re}(a_k)|(1 + b_k) + |\operatorname{Im}(a_k)|(1 - b_k) \\
&= \sum_{b_k=0} |\operatorname{Re}(a_k)| + |\operatorname{Im}(a_k)| + \sum_{b_k=1} 2|\operatorname{Re}(a_k)| \\
&\leq \sum_{b_k=0} 2|a_k| + \sum_{b_k=1} 2|a_k| \\
&= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| \\
&< 2.
\end{aligned}$$

Con el primer punto se deduce que la parte real de todos los elementos de $W(A_b)$ se encuentran entre -2 y 2, con el segundo punto se tiene que la parte imaginaria de los elementos de $W(A_b)$ se encuentra entre -1 y 1, y con el tercer punto se obtiene que los elementos de $W(A_b)$ se encuentran dentro del cuadrilátero con vértices en -2, 2, -2i y 2i. Con estos tres puntos se sigue que $W(A_b)$ está contenido en el interior del hexágono con vértices en 2, 1 + i, -1 + i, -2, -1 - i, 1 - i.

Otra forma de obtener este resultado es notando que el operador A_b se puede escribir como la suma de otros dos operadores para los cuales se conoce su espectro y luego ocupar una propiedad del espectro de operadores como sigue

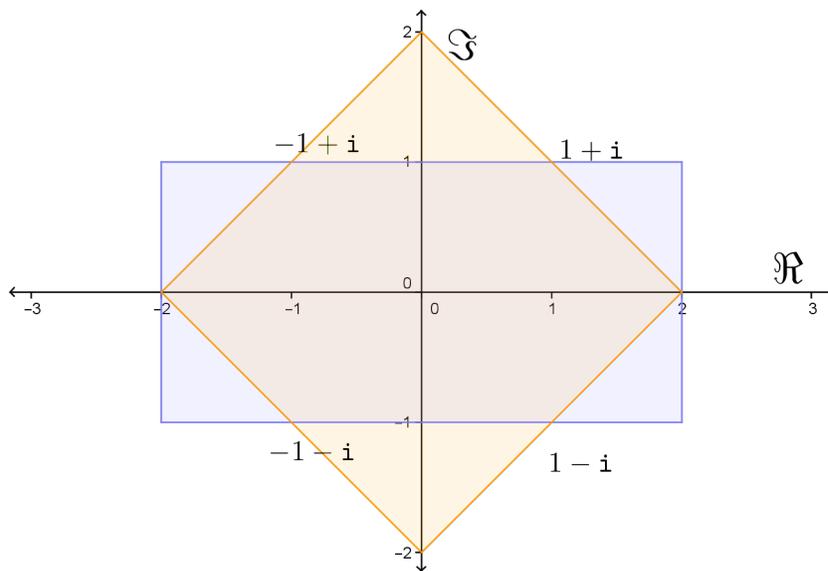


Figura 3.1: Hexágono que contiene el rango numérico de cualquier operador A_b , definido por los puntos $2, 1+i, -1+i, -2, -1-i, 1-i$.

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & \\ \ddots & 0 & 1 & & & \\ & b_0 & \boxed{0} & 1 & & \\ & & b_1 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & \\ \ddots & 0 & 1 & & & \\ & 1 & \boxed{0} & 1 & & \\ & & 1 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & \\ \ddots & 0 & 1 & & & \\ & h_0 & \boxed{0} & 1 & & \\ & & h_1 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

En donde se define $h_k = 2b_k - 1$, por lo que se puede pensar que $h \in \{1, -1\}^{\mathbb{Z}}$, el espacio total de desplazamiento del alfabeto $\{1, -1\}$. Extendiendo la notación A_h para $h \in \{1, -1\}^{\mathbb{Z}}$ se tiene

$$A_b = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_h.$$

En [7] se prueba que el rango numérico de A_h con $h \in \{1, -1\}^{\mathbb{Z}}$ arbitrario está contenido en $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| < 2\}$. Utilizando la proposición 1.15 se puede concluir que

$$\begin{aligned} W(A_b) &\subseteq \frac{1}{2}W(A_1) + \frac{1}{2}W(A_h) \\ &= (-1, 1) + \frac{1}{2}\Delta. \end{aligned}$$

En el lado derecho de la igualdad, el resultado de la suma de los dos conjuntos es el hexágono que ya se trató anteriormente, por lo que una primera idea es que este hexágono sea el

conjunto que buscamos para delimitar al rango numérico de cualquier operador A_b . Sin embargo, como mostraremos más adelante hay un mejor conjunto que contiene al rango numérico de los operadores A_b .

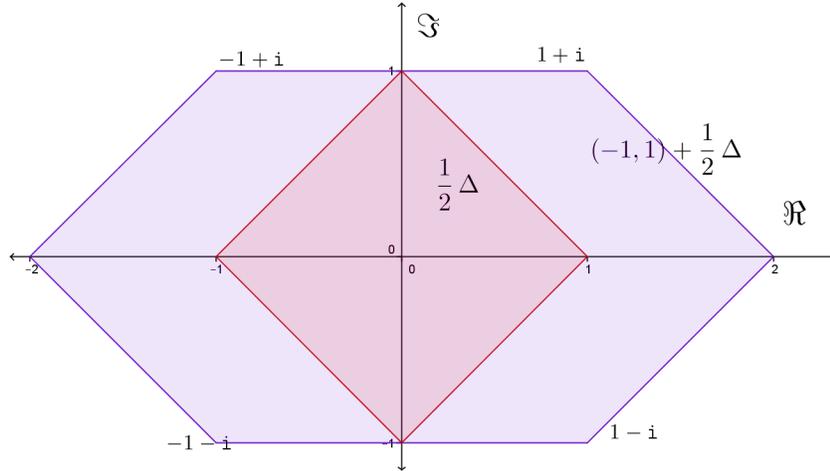


Figura 3.2: Hexágono como la suma de los conjuntos $(-1, 1)$ y $\frac{1}{2}\Delta$.

3.2

Algunas herramientas de cálculo y geometría

En esta sección se mostrarán algunas herramientas usadas más adelante. Se trabajará con un idea que consiste en definir una partición del conjunto $\{x \in \ell^2 \mid \|x\| = 1\}$, y así estudiar con mayor detalle el rango numérico de los operadores A_b . La base para esto será analizar el valor $\langle A_b x, x \rangle$ cuando se pide que x esté en un elemento específico de la partición.

Para cada $\lambda \in \mathbb{D}$ se define

$$X_\lambda := \{x \in \ell^2 \mid \|x\| = 1, \langle A_0 x, x \rangle = \lambda\}.$$

Note $X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$ si y sólo si $\lambda \neq \mu$ y debido a que $\mathbb{D} = W(A_0)$, se tiene $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{D}} X_\lambda = \{x \in \ell^2 \mid \|x\| = 1\}$. De esta manera se tiene que $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{D}}$ es una partición de la esfera unitaria de ℓ^2 .

Para aclarar un poco esta idea se muestra el siguiente ejemplo. Sea $\lambda \in \mathbb{D}$ y $x \in X_\lambda$, si se considera al operador A_0 entonces

$$\langle A_0 x, x \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{x}_k x_{k+1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k = \lambda, \quad (3.2)$$

mientras que para el operador A_1 se tiene que

$$\begin{aligned}\langle A_1 x, x \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{x_k} (x_{k-1} + x_{k+1}) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{a_{k-1}} + a_k \\ &= \overline{\lambda} + \lambda \\ &= 2\operatorname{Re}(\lambda).\end{aligned}$$

Definida esta partición de la esfera unitaria de ℓ^2 , se analizará el comportamiento de $\langle A_b x, x \rangle$ con $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Sea $\lambda \in \mathbb{D}$ y $x \in X_\lambda$, si a es tal que $a_k = \overline{x_k} x_{k+1}$, se tiene

$$\begin{aligned}\langle A_b x, x \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (b_{k-1} x_{k-1} + x_{k+1}) \overline{x_k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{k-1} \overline{a_{k-1}} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \\ &= \lambda + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \overline{a_k}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

En adelante será de importancia entender a λ como la suma infinita

$$\lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k.$$

Para ayudar al entendimiento de las afirmaciones que aparecerán más adelante, se hará una manipulación con los elementos a_k . La idea será interpretar a los valores como una serie (dicha manipulación se puede hacer debido la proposición 2.2).

Definiremos la sucesión $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de manera que $c_k = a_{(-1)^k \lceil \frac{k}{2} \rceil}$, en donde la notación $\lceil w \rceil$ significa el menor entero mayor o igual que w . La acción de esta fórmula es colocar los elementos a_k alternadamente en una sucesión infinita (hacia un sólo lado). Es decir $c_0 = a_0$, $c_1 = a_{-1}$, $c_2 = a_1$, $c_3 = a_{-2}$, $c_4 = a_2$, $c_5 = a_{-3}$ y así sucesivamente. Resulta claro que

$$\sum_{k \geq 0} c_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k = \lambda.$$

La ventaja de hacer este acomodo es que los elementos de la serie

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

se pueden interpretar como los vértices de una trayectoria sobre el plano complejo que comienza en 0, termina en λ y es conformada por segmentos.

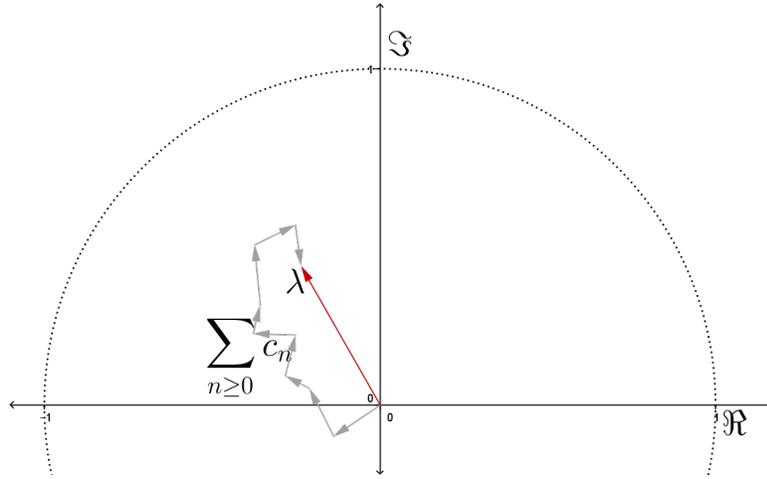


Figura 3.3: S_n como los vértices de una trayectoria de 0 a λ conformada por segmentos.

Denotaremos por κ a la longitud de dicha trayectoria, es decir, la suma de las longitudes de los segmentos que la conforman

$$\kappa = \sum_{n \geq 0} |S_{n+1} - S_n| = \sum_{k \geq 0} |c_k|.$$

Sin embargo, de la definición de c_n , es claro que

$$\kappa = \sum_{k \geq 0} |c_k| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|,$$

la cual nos permite ver que $\kappa < 1$ por la proposición 2.2.

La importancia de lo que se ha logrado radica en el siguiente lema:

Lema 3.1. *Sea $\lambda \in \mathbb{D}$, $x \in X_\lambda$ y a definido por $a_k = \overline{x_k} x_{k+1}$, entonces para cualquier elección de $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, el valor*

$$q = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k a_k,$$

está contenido en el interior de la elipse que tiene eje mayor de longitud 1 y como focos 0 y λ .

Demostración. Primero recuerde que en una elipse se satisface que la suma de las longitudes de los focos a cualquier punto sobre la elipse es la longitud del eje mayor. Si para un punto P se satisface que la suma de estas longitudes es mayor (menor) a la longitud del eje mayor, entonces el punto P es un punto exterior (interior) de la elipse. Entonces cualquier punto que satisfaga que la suma de las longitudes de ese punto a 0 y λ sea menor que 1, satisface que se encuentra dentro de la elipse con focos en 0 y λ y eje mayor de longitud 1. Por la proposición 2.2, es posible manipular las siguientes sumas infinitas sin preocupación alguna.

$$\begin{aligned}\lambda &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \\ &= \sum_{b_k=0} a_k + \sum_{b_k=1} a_k.\end{aligned}$$

Note que $b_k a_k = a_k$ si $b_k = 1$ y que $b_k a_k = 0$ si $b_k = 0$ por lo que

$$\begin{aligned}\lambda &= \sum_{b_k=0} a_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k a_k \\ &= \sum_{b_k=0} a_k + q.\end{aligned}$$

Despejando a q se tiene que

$$q = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k a_k = \lambda - \sum_{b_k=0} a_k.$$

Se calcula la suma de las distancias de q a 0 y de q a λ :

$$\begin{aligned}|q - 0| + |q - \lambda| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k a_k \right| + \left| \lambda - \sum_{b_k=0} a_k - \lambda \right| \\ &= \left| \sum_{b_k=1} a_k \right| + \left| \sum_{b_k=0} a_k \right| \\ &\leq \sum_{b_k=1} |a_k| + \sum_{b_k=0} |a_k| \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| \\ &= \kappa \\ &< 1.\end{aligned}$$

Mostrando que el punto q se encuentra dentro de la elipse descrita anteriormente, sin importar la elección de b . ■

Demostrado esto tenemos la siguiente conclusión:

Proposición 3.2. *Sea $\lambda \in \mathbb{D}$, entonces para cualquier $x \in X_\lambda$ y cualquier $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ el valor $\langle A_b x, x \rangle$ está contenido en el interior de la elipse que tiene eje mayor de longitud 1 y como focos λ y $2\operatorname{Re}(\lambda)$.*

Demostración. Como es bien sabido, el conjugado de un número z se interpreta, de manera gráfica en el plano complejo, como el reflejo de éste respecto a la recta real. Por el lema 3.1, el

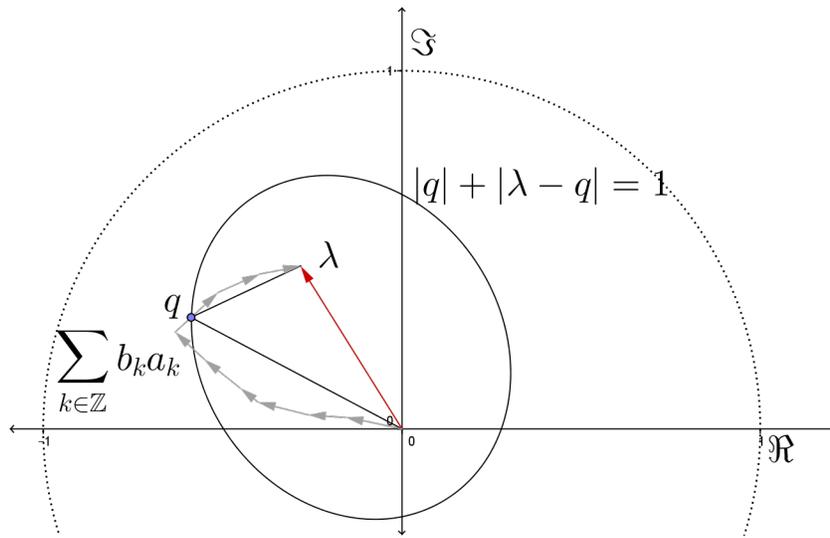


Figura 3.4: Se muestra que si q sale de la elipse se contradice $\kappa < 1$.

valor complejo $\overline{\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k a_k}$ está contenido en el interior de la elipse cuyo eje mayor tiene longitud 1 y focos en 0 y λ . En la igualdad de la ecuación 3.3

$$\langle A_b x, x \rangle = \lambda + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \bar{a}_k,$$

note que el segundo sumando del lado derecho es el conjugado de valor $\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k a_k$. De esto se sigue que el valor complejo $\langle A_b x, x \rangle$ está contenido en el interior de la elipse que resulta al sumar el valor λ a cada elemento de dicha elipse, es decir, $\langle A_b x, x \rangle$ está contenido en el interior de la elipse cuyos focos son $0 + \lambda = \lambda$ y $\lambda + \bar{\lambda} = 2\text{Re}(\lambda)$, con eje mayor de longitud 1.

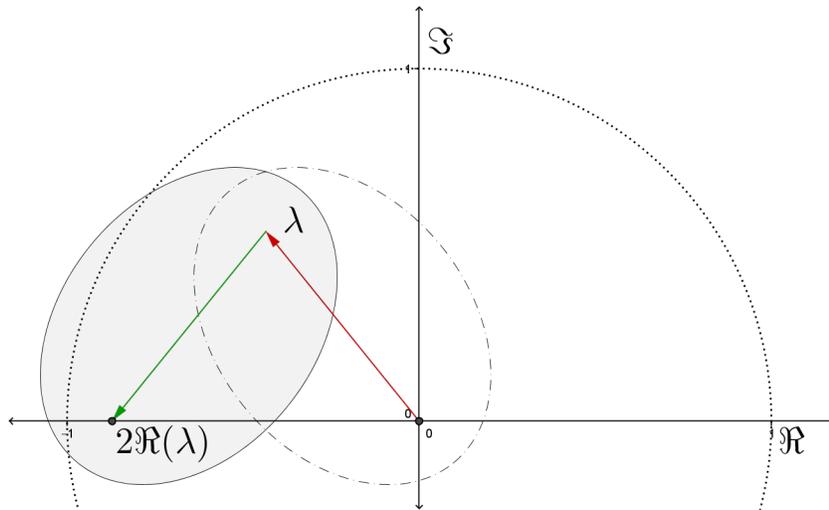


Figura 3.5: Región para los posibles valores de $\langle A_b x, x \rangle$ para $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ y $x \in X_\lambda$ arbitrarios.

Por simplicidad, para $\lambda \in \mathbb{D}$ diremos que la elipse con focos en λ y en $2\text{Re}(\lambda)$ cuyo eje

mayor tiene longitud 1 es la *elipse generada por λ* . ■

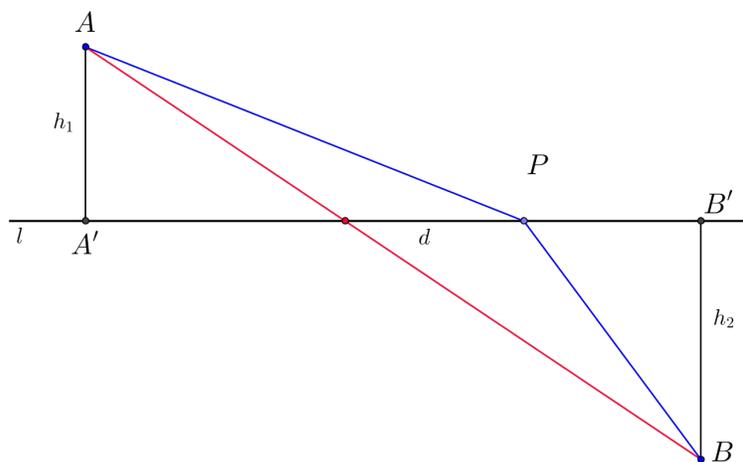
Con este resultado conviene pensar que el operador A_b es una perturbación del operador A_0 . Cuando se desea calcular el rango numérico de A_b restringiéndose al del conjunto X_λ , se perturba al rango numérico del operador A_0 (que restringido al conjunto X_λ , por la expresión 3.2, es el conjunto $\{\lambda\}$), y lo transforma en un subconjunto contenido en la elipse generada por λ . Si queremos saber el lugar donde se encuentran todos los posibles valores para el rango numérico de A_b con b arbitrario, basta saber el lugar geométrico de la elipse generada cuando se consideran todos los valores de λ en \mathbb{D} , pues como ya se demostró anteriormente, los elementos X_λ forman una partición de la esfera unitaria de ℓ^2 .

En la siguiente sección se va a demostrar que para cada $\lambda \in \mathbb{D}$ la elipse generada por λ se encuentra contenido en cierto conjunto Γ y para eso serán necesarios algunos resultados: dos que obtendremos con herramientas de geometría euclidiana y uno más que obtendremos del cálculo diferencial de una variable.

El primero consiste en que dada una recta l , dos puntos A y B arbitrarios del plano y un punto P sobre l , se quiere calcular el mínimo de la suma de las distancias de A a P y de B a P que se puede obtener cuando se desplaza P a lo largo de l . Ocuparemos la notación QR para referir al segmento definido por los puntos Q y R .

Teorema 3.3. Sean l una recta, A, B dos puntos arbitrarios del plano, A', B' las intersecciones de l con las perpendiculares a l que pasan por A y B respectivamente y denotemos con h_1, h_2 y d a las longitudes de los segmentos AA', BB' y $A'B'$ respectivamente. Si P es un punto sobre l y $f(P)$ es la función que describe la suma de las longitudes de los segmentos AP y BP , entonces

$$\inf_{P \in l} f(P) = \sqrt{d^2 + (h_1 + h_2)^2}.$$



Demostración. Note que la recta l divide al plano en dos semiplanos. La prueba consiste en analizar dos casos: cuando A y B están en el mismo semiplano y cuando no. Se ocupará fuertemente que la distancia más corta entre dos puntos es el segmento de línea recta que los une.

Supongamos que A y B no se encuentran en un mismo semiplano por lo que el segmento AB cruza a la recta l . Entendiendo que la función f describe la distancia de A a B pasando por el punto P , se tiene que el mínimo de la función se alcanza cuando P se encuentra sobre AB , es decir, cuando P es el punto de intersección de AB con la recta l . Con esto se tiene que el valor mínimo de la función f es la longitud del segmento AB .

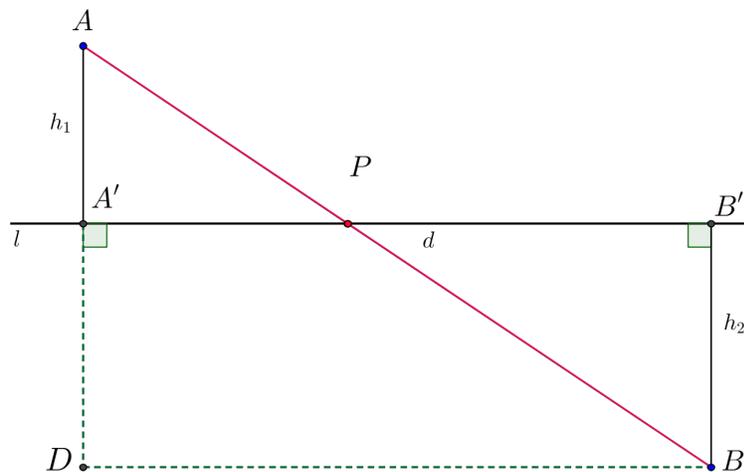


Figura 3.6: Caso en que A y B no están en el mismo semiplano.

Sea D el punto de intersección de la recta que contiene al segmento AA' y la recta perpendicular a AA' que pasa por B . Note que los puntos A' , B' , B y D forman un rectángulo y por lo tanto se tiene que el segmento DB tiene longitud d , y el segmento $A'D$ tiene longitud h_2 . Aplicando el teorema de pitágoras al triángulo ABD y considerando que el segmento AD tiene longitud $h_1 + h_2$, la longitud del segmento AB es

$$\sqrt{d^2 + (h_1 + h_2)^2},$$

concluyendo así que el valor mínimo de f es lo que se quiere.

Supongamos que A y B se encuentran en el mismo semiplano.

Sin pérdida de generalidad, sea B'' el punto simétrico de B respecto a la recta l . Debido a esta construcción, l es la mediatriz del segmento BB'' cumpliéndose que para todo punto P en la recta l las longitudes de los segmentos PB y PB'' son iguales. Finalmente, el problema de encontrar la distancia mínima de A a B pasando por P es equivalente a encontrar la distancia mínima de A a B'' pasando por P , lo que cae en el caso anterior y se concluye el mismo resultado.

■

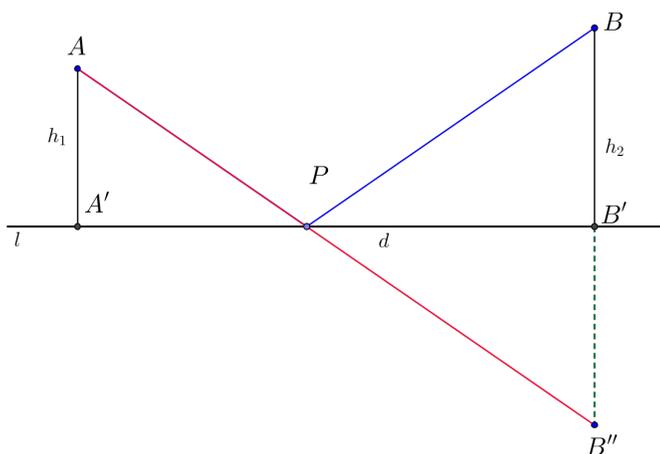


Figura 3.7: Caso en que A y B están en el mismo semiplano.

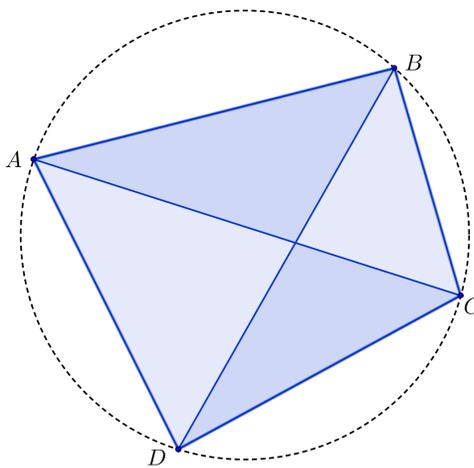
Algo interesante de este resultado es que el valor mínimo de la función f está únicamente definido por tres valores: las longitudes de las alturas de los puntos A y B hacia la recta l y la distancia entre los pies de sus alturas.

Otro resultado que necesitaremos será un resultado de geometría euclidiana conocido como *Teorema Extendido de Ptolomeo*

Teorema 3.4. *Dados cuatro puntos en el plano A, B, C, D , se satisface que*

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot DA,$$

y la igualdad se tiene si y sólo si los cuatro puntos se encuentran sobre una circunferencia y en ese orden.



La prueba de este resultado se encuentra en [3, Teorema 3.4.7]. En el trabajo se aplicará de

manera que los puntos A, B, C y D son vértices de un cuadrilátero, por lo que el teorema se interpreta como *en un cuadrilátero, el producto de las longitudes de las diagonales es menor o igual que la suma de los productos de las longitudes de los lados opuestos, teniéndose la igualdad si y sólo si el cuadrilátero es convexo cíclico.*

Un pequeño resultado que necesitaremos para la siguiente proposición es el siguiente lema

Lema 3.5. *Sea $f(x) : A \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ entonces, $f(x)$ es estrictamente creciente si y sólo si $f(x)^2$ es estrictamente creciente.*

Demostración. \Rightarrow . Por definición, f es estrictamente creciente si $f(a) < f(b)$ para todo $a < b$ en el dominio. Se sigue que

$$0 \leq f(a)^2 < f(a)f(b) < f(b)^2,$$

que es lo que se quería.

\Leftarrow . Si f^2 es estrictamente creciente, se tiene que para todo $a < b$ en el dominio $0 \leq f(a)^2 < f(b)^2$, por lo que se sigue que

$$\begin{aligned} f(a)^2 < f(b)^2 & \Leftrightarrow \\ f(a)^2 - f(b)^2 < 0 & \Leftrightarrow \\ (f(a) + f(b))(f(a) - f(b)) < 0 & \Leftrightarrow \\ f(a) - f(b) < 0, & \end{aligned}$$

En donde la última línea es válida debido a que por definición $f \geq 0$ y a que $f(a) \neq -f(b)$, pues de otra manera se tendría que $f^2(a) = f^2(b)$ con $a < b$, lo que contradice que f sea estrictamente creciente. Finalmente se sigue que $f(a) < f(b)$. ■

Proposición 3.6. *Sea A un punto en el plano \mathbb{R}^2 distinto de $(0,0)$ y $\tau(\theta) : [\arg(A), \arg(A) + 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ es la función que describe la distancia del punto A al punto $P(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ de la circunferencia unitaria de \mathbb{R}^2 , entonces $\tau(\theta)$ es estrictamente creciente en el intervalo $(\arg(A), \arg(A) + \pi)$.*

Demostración. Note que la función τ se puede escribir como

$$\tau(\theta) = |P(\theta) - A| = \sqrt{\langle P - A, P - A \rangle}.$$

Se busca en dónde τ es creciente, por simplicidad aplicaremos lema 3.5. Notando que $|P(\theta) - A|$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d\tau(\theta)^2}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} (|P(\theta)|^2 - 2\langle P(\theta), A \rangle + |A|^2) \\
&= \frac{d}{d\theta} (1 - 2|P(\theta)||A|\cos(\theta - \arg(A)) + |A|^2) \\
&= -2|A| \frac{d \cos(\theta - \arg(A))}{d\theta} \\
&= 2|A| \sin(\theta - \arg(A)).
\end{aligned}$$

Note que la expresión $\sin(\theta - \arg(A))$ es positiva en el intervalo $(\arg(A), \arg(A) + \pi)$, por lo que la derivada es positiva, demostrando que $\tau(\theta)^2$ es estrictamente creciente y en consecuencia $\tau(\theta)$ es estrictamente creciente. ■

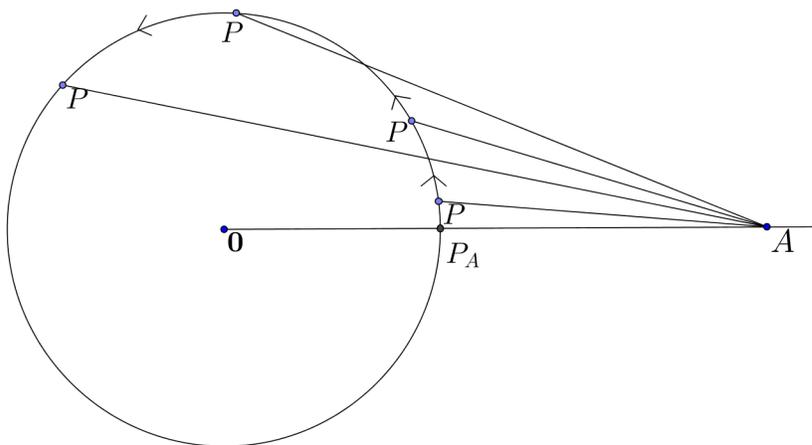


Figura 3.8: Se muestra que la longitud del segmento AP crece mientras el punto P se aleja de P_A .

Este resultado muestra que si P_A es la intersección de la circunferencia unitaria y el rayo que tiene extremo en el origen y pasa por A , conforme P , un punto sobre la circunferencia, se aleja de P_A , la distancia de A a P incrementa. Debido a la simetría, no importa hacia qué lado se aleje, el resultado es válido.

En la siguiente sección demostraremos que esta cota se puede hacer ligeramente más fina mostrando que $W(A_b) \subseteq \Gamma$, para un conjunto Γ .

3.3

Resultados

Esta sección es la más larga de todo el trabajo, y contiene la definición de un conjunto Γ y dos teoremas relacionados con este conjunto. En el primero se demuestra que para todo operador A_b el conjunto $W(A_b)$ está contenido en Γ . En el segundo se prueba que es el conjunto más pequeño que puede satisfacer esta propiedad.

Note que si se desea una cota para el rango numérico de un operador A_b arbitrario, ésta debe contener a $W(A_0)$ y $W(A_1)$ y puesto que $W(A_b)$ es un conjunto convexo (Teorema 1.15), parece intuitivamente razonable pedir que Γ sea un conjunto convexo. Se define $\Gamma = \text{conv}(\mathbb{D} \cup (-2, 2))$, es decir, la envolvente convexa del conjunto $\mathbb{D} \cup (-2, 2)$. Note que en realidad lo que estamos definiendo como Γ es la envolvente convexa de la unión de los rangos numéricos de los operadores A_0 y A_1 .

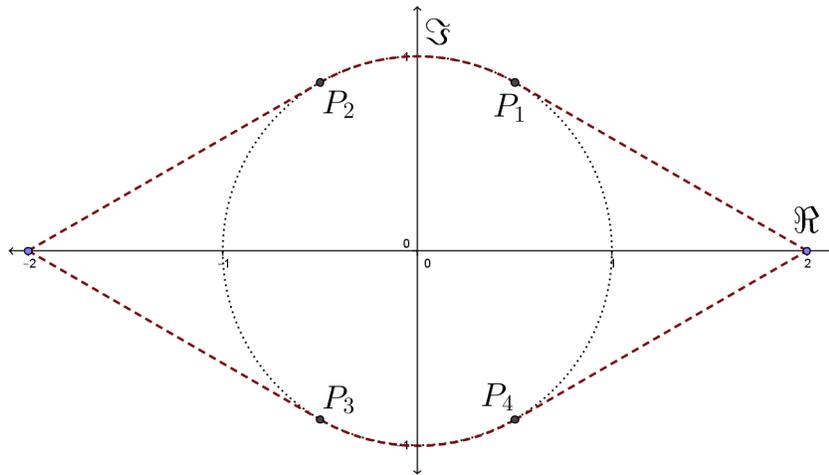


Figura 3.9: El conjunto Γ .

Antes de proseguir se analizará quién es el conjunto Γ . Sea l_1 la recta en el plano complejo que pasa por 2 y es tangente a la circunferencia unitaria en el cuadrante 1; l_2 la recta en el plano complejo que pasa por -2 y es tangente a la circunferencia unitaria en el cuadrante 2; l_3 la recta en el plano complejo que pasa por -2 y es tangente a la circunferencia unitaria en el cuadrante 3; l_4 la recta en el plano complejo que pasa por 2 y es tangente a la circunferencia unitaria en el cuadrante 4. Se denominará a esos puntos de tangencia como P_1 , P_2 , P_3 y P_4 respectivamente. El conjunto Γ se puede describir como el interior del conjunto delimitado por seis líneas, los cuatro segmentos que van de 2 a P_1 , de -2 a P_2 , de -2 a P_3 y de 2 a P_4 , y los dos arcos menores de la circunferencia unitaria que unen los puntos P_1 , P_2 y P_3 , P_4 .

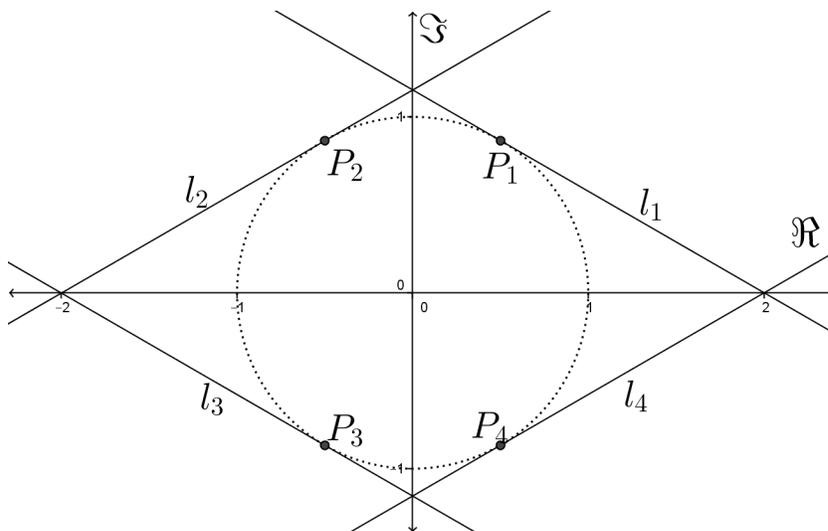


Figura 3.10: Rectas l_1, l_2, l_3, l_4 y puntos P_1, P_2, P_3, P_4 .

Se verá que las ecuaciones de las rectas se pueden calcular. Como son tangentes a la circunferencia unitaria y pasan por 2 ó -2 , se tendrán cuatro triángulos rectángulos, el primero con vértices en $0, P_1$ y 2 ; el segundo con vértices en $0, P_2$ y -2 ; el tercero con vértices en $0, P_3$ y -2 y el cuarto con vértices en $0, P_4$ y 2 . Estos triángulos tienen un cateto de longitud 1 e hipotenusa de longitud 2 por lo que los ángulos interiores de cada uno de ellos son $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$. Se puede calcular que los puntos de tangencia son $P_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, P_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, P_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, P_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Con esta información se puede decir que las ecuaciones de las rectas son:

$$l_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sqrt{3}\text{Im}(z) = -\text{Re}(z) + 2 \right\}, \quad l_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sqrt{3}\text{Im}(z) = \text{Re}(z) + 2 \right\}.$$

$$l_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\sqrt{3}\text{Im}(z) = -\text{Re}(z) + 2 \right\}, \quad l_4 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\sqrt{3}\text{Im}(z) = \text{Re}(z) + 2 \right\}.$$

Teorema 3.7. Sea $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, entonces $W(A_b) \subseteq \Gamma$.

Demostración. Para esta demostración se recurrirá a la partición de la esfera unitaria de ℓ^2 en los conjuntos X_λ con $\lambda \in \mathbb{D}$ y se probará que la elipse generada por λ está contenida en Γ , con lo que se demuestra que $\langle A_b x, x \rangle \subseteq \Gamma$ para cualquier $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, x \in X_\lambda$, y $\lambda \in \mathbb{D}$.

Esta prueba es bastante extensa y se realizará en dos partes. En la primera se demuestra que para cada $\lambda \in \mathbb{D}$, la elipse generada está contenida en el rombo formado por las rectas l_j con $j = 1, 2, 3$ y 4 . En esta parte se ocupará el teorema 3.3. En la segunda se verá, con ayuda de la primera parte, que las elipses están contenidas en Γ , ocupando principalmente el teorema extendido de Ptolomeo y la proposición 3.6.

Primera parte

Sea $\lambda \in \mathbb{D}$, por lo que existen $r \in [0, 1)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ tales que $\lambda = re^{i\theta}$. Se considerará primero a la recta l_1 y se probará que la elipse generada está en el semiplano que contiene al origen. Posteriormente se argumenta que el resultado es análogo con las otras tres rectas, y finalmente eso implica que la elipse generada por λ se encuentra en el rombo formado por las rectas l_j .

Se probará que para cualquier punto en la recta l_1 , la suma de las distancias a λ y $2\text{Re}(\lambda)$ es mayor o igual que 1 ocupando el teorema 3.3, con lo que se demostrará que la elipse se encuentra por debajo de la recta l_1 . Para poder ocupar el resultado necesitamos sólo 3 datos: las longitudes de las alturas de los puntos sobre la recta l_1 y la distancia entre los pies de sus alturas. En este contexto estas tres cantidades se pueden calcular fácilmente pues todas se pueden entender como lados de triángulos rectángulos adecuados. Sea l'_1 la recta perpendicular a l_1 que pasa por P_1 . Esta recta también pasa por el origen pues l_1 es tangente a la circunferencia unitaria y además pasa por P_2 .

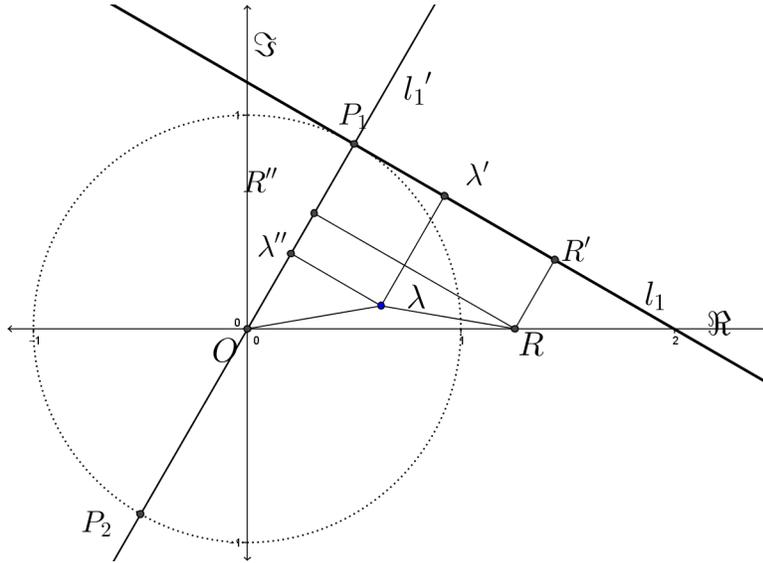


Figura 3.11: Proyecciones de λ y $2\text{Re}(\lambda)$ sobre l_1 y l'_1 .

Se denotará por λ' y λ'' a los pies de las alturas de λ sobre l_1 y l'_1 respectivamente. Ocuparemos R para denotar al punto sobre la recta real que es igual a $2\text{Re}(\lambda)$ y de manera similar R' y R'' serán los pies de las alturas de R sobre l_1 y l'_1 respectivamente. Note que los cuadriláteros con vértices $P_1, \lambda', \lambda, \lambda''$ y P_1, R', R, R'' son rectángulos, por lo que se satisface que las longitudes de los segmentos $\lambda\lambda'$ y $P_1\lambda''$ son iguales, así como sucede con RR' y P_1R'' .

Lo siguiente que se hará es deducir los valores que necesarios, para ocupar el teorema 3.3 empezando por la longitud de $\lambda\lambda'$.

$$\lambda\lambda' = P_1\lambda'' = 1 \mp O\lambda'',$$

en donde el signo en la ecuación depende de si λ'' está entre P_1 y O (en tal caso sería negativo) o entre P_2 y O (resultando positivo en tal caso). Podemos ver que la longitud del segmento

$O\lambda''$ está determinada por la expresión $O\lambda \cos(\phi)$ donde ϕ es el ángulo comprendido entre $O\lambda$ y $O\lambda''$, sin embargo, sustituyéndola por $O\lambda \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$ se arregla el signo \mp debido a que $\theta \in [0, 2\pi)$. Sustituyendo además que el segmento $O\lambda$ tiene longitud r se tiene que

$$\lambda\lambda' = 1 - r \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = 1 - \frac{r}{2}(\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta)).$$

En la última igualdad simplemente se está aplicando la regla para obtener el coseno de la resta de dos ángulos.

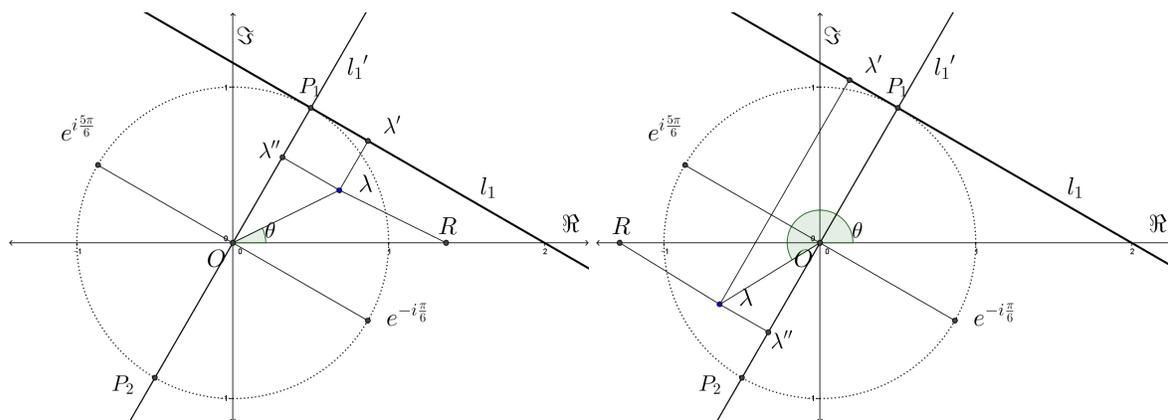


Figura 3.12: Primera imagen, λ'' está entre P_1 y O ; en la segunda λ'' está entre P_2 y O .

De manera similar se describirá la distancia de R a R' .

$$RR' = P_1 RR'' = 1 \mp OR'',$$

en donde el signo depende de si R está en la parte positiva de la recta real (en tal caso el signo de la expresión debe ser negativo) o en la parte negativa de la recta real (por lo que debe ser positivo el signo de la expresión). Note que la longitud de OR'' se puede obtener trabajando con el triángulo rectángulo $OR''R$. Se tiene que OR'' es igual a OR por el coseno del ángulo comprendido entre OR'' y OR , el cual siempre es $\frac{\pi}{3}$. Note también que $OR = 2r|\cos(\theta)|$. Finalmente se tiene que $OR'' = 2r|\cos(\theta)|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = r|\cos(\theta)|$. Observe que las barras del valor absoluto se pueden omitir debido al signo \mp quedando la expresión

$$RR' = 1 - r\cos(\theta).$$

Recuerde que que en el teorema 3.3 se requiere la suma de las longitudes de las alturas de los puntos sobre la recta, por lo que calcularemos ese valor

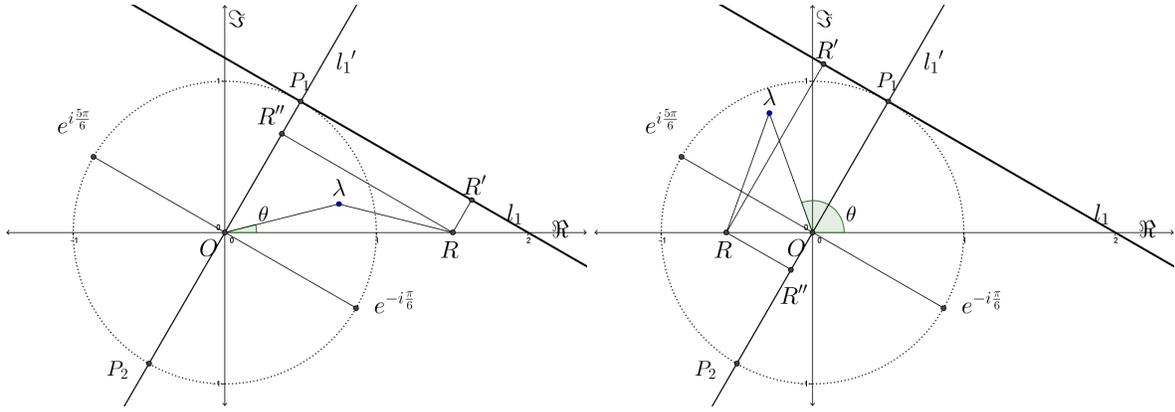


Figura 3.13: Primera imagen, R está entre 2 y 0, en la segunda R está entre -2 y 0.

$$\begin{aligned}
 \lambda\lambda' + RR' &= 1 - \frac{r}{2}(\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta)) + 1 - r\cos(\theta) \\
 &= 2 - \frac{r}{2}(3\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta)) \\
 &= 2 - \sqrt{3}r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{2}\sin(\theta)\right) \\
 &= 2 - \sqrt{3}r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right).
 \end{aligned}$$

En la última igualdad se ocupó nuevamente la regla para el coseno de la resta de dos ángulos. Por último, la distancia entre λ' y R' es igual a la magnitud de la proyección del conjugado de λ sobre $e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Se sabe que la magnitud de una proyección de un elemento v sobre un elemento unitario u es $|P_u(v)| = \left|\frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u\right| = |v|\cos(\phi)$, donde ϕ es el ángulo entre los elementos u y v . Entonces

$$\begin{aligned}
 \lambda'R' &= \left|P_{e^{-i\frac{\pi}{6}}}(\bar{\lambda})\right| \\
 &= |\bar{\lambda}|\left|\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right| \\
 &= r\left|\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right|
 \end{aligned}$$

En la segunda igualdad se agregan unas barras de valor absoluto al coseno debido a que nos interesa la magnitud de la proyección y se desea que la expresión sea útil para todo $\theta \in [0, 2\pi)$.

Ocupando directamente la formula del teorema 3.3 se tiene que el mínimo de la suma de las distancias de un punto sobre l_1 a λ y R es:

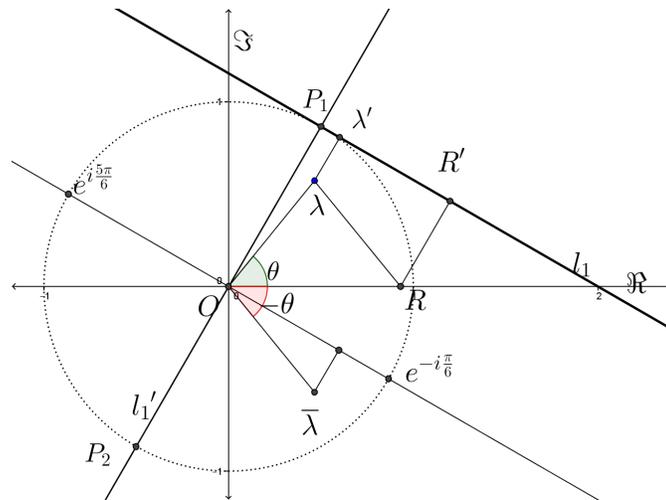


Figura 3.14: Proyección de $\bar{\lambda}$ sobre $e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\left(2 - \sqrt{3}r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right)^2 + \left(r\left|\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right|\right)^2} \\
 &= \sqrt{4 - 4\sqrt{3}r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + 3r^2\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + r^2\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} \\
 &= 2\sqrt{1 - \sqrt{3}r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + r^2\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} \\
 &= 2\sqrt{1 + r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\left(r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\right)}
 \end{aligned}$$

Esta expresión depende completamente de los parámetros θ y r por lo que queda claro que una vez que se escoge λ , este valor ya queda fijo. Por otro lado, nos gustaría saber para qué valores de λ sucede que la expresión alcanza su mínimo y cuál es éste. Para dicho cálculo observemos que si $v = r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$, entonces la expresión se simplifica en $2\sqrt{1 + v(v - \sqrt{3})}$. Basta obtener el mínimo de la expresión $v(v - \sqrt{3})$, que es una función cuadrática en v , la cual describe una parábola que abre hacia arriba y que se anula en $v = 0$, y $v = \sqrt{3}$, por lo que alcanza su valor mínimo cuando $v = \frac{\sqrt{3}}{2}$; es decir, se quiere

$$\begin{aligned}
 r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} && \Leftrightarrow \\
 r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{2}\sin(\theta)\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} && \Leftrightarrow \\
 r(\sqrt{3}\cos(\theta) + \sin(\theta)) &= \sqrt{3} && \Leftrightarrow \\
 r\sin(\theta) &= -\sqrt{3}r\cos(\theta) + \sqrt{3} && \Leftrightarrow \\
 \operatorname{Im}(\lambda) &= -\sqrt{3}\operatorname{Re}(\lambda) + \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Observe que esta ecuación es de la recta que pasa por los puntos 1 y P_1 , sin embargo por restricción $\lambda \in \mathbb{D}$ se tiene que λ forma parte del segmento con extremos en P_1 y 1. El mínimo valor que se puede obtener de la función $2\sqrt{1 + v(v - \sqrt{3})}$ es

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1 + v(v - \sqrt{3})} &= 2\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \right)} \\ &= 2\sqrt{1 - \frac{3}{4}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Esto indica que los puntos de l_1 no están en el interior de la elipse generada por λ y en el caso extremo, sucede que la elipse y l_1 son tangentes (vease figura 3.15).

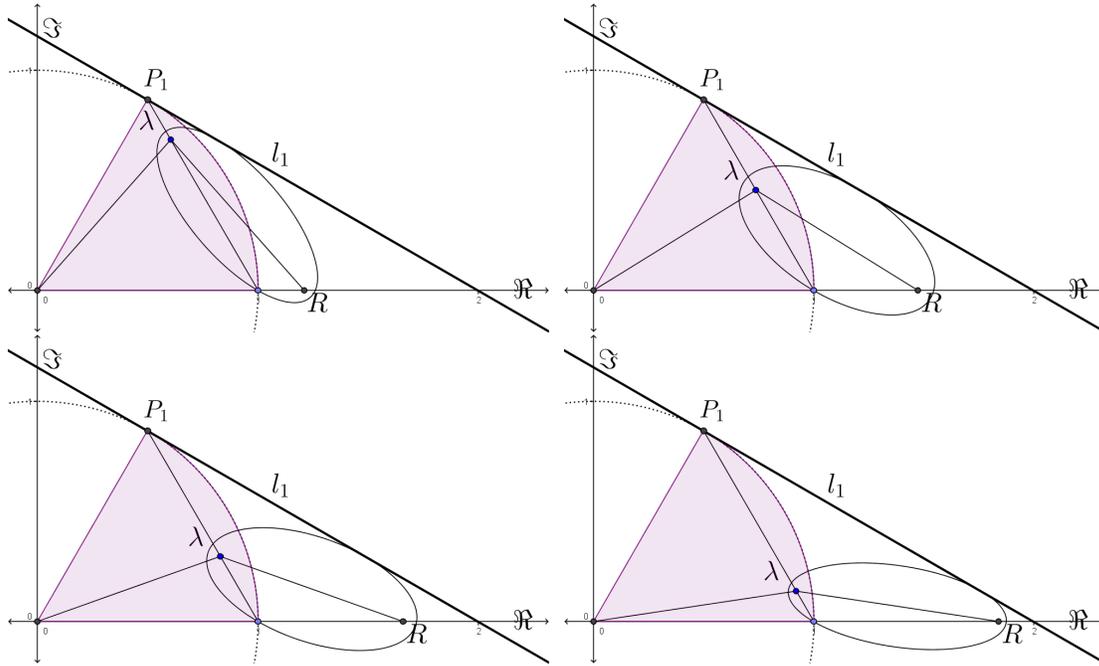


Figura 3.15: Ejemplos de λ tal que la elipse generada es tangente a l_1 .

Si se consideran las rectas l_2 , l_3 y l_4 , se puede hacer un análisis similar, considerando para cada l_j la recta perpendicular que pasa por P_j y proyectando a $\bar{\lambda}$ sobre $e^{i\frac{7\pi}{6}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ y $e^{i\frac{\pi}{6}}$ para $j = 2, 3$ y 4 respectivamente, el resto de los cálculos es análogo.

Segunda Parte

Ahora se verá que cualquier punto P de la circunferencia unitaria entre P_1 y P_2 , y entre P_3 y P_4 satisface que la suma de las distancias de P a los focos de las elipses generadas por $\lambda \in \mathbb{D}$

es mayor o igual que 1, por lo que se tendrá que la elipse no cruza a la circunferencia en esos arcos. Consideraremos dos casos recordando que θ es el argumento de λ .

Primer caso. Si λ es tal que $|\cos(\theta)| \leq \frac{1}{2}$. Sea un punto P arbitrario de la circunferencia. Note que cuando $r = 0$, se tiene trivialmente lo que buscamos, pues tanto λ como R son cero y por lo tanto, la suma de las distancias de P a λ y R es 2. Supongamos que $r \neq 0$.

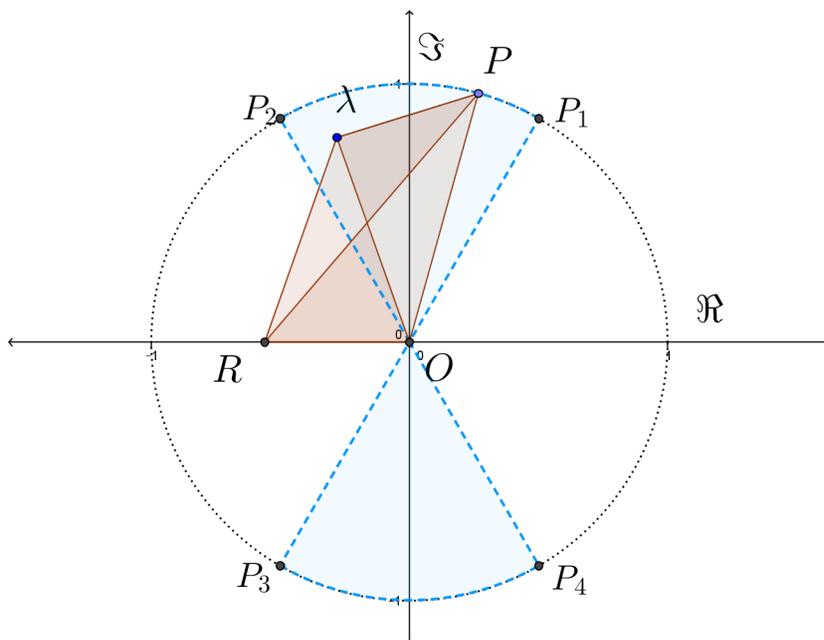


Figura 3.16: El sector circular sombreado es el conjunto donde λ satisface $|\cos(\theta)| \leq \frac{1}{2}$.

Si se aplica el *Teorema extendido de Ptolomeo*, a los puntos λ , O , R y P se tiene que:

$$\lambda R \cdot OP \leq \lambda O \cdot RP + \lambda P \cdot RO.$$

En esta desigualdad sustituiremos los valores conocidos: el segmento λR tiene longitud $|\overline{\lambda}| = r$, el segmento OP es un radio de la circunferencia unitaria por lo que vale 1, el segmento λO tiene longitud $|\lambda| = r$ y el segmento RO tiene longitud $2r|\cos(\theta)|$. Entonces la desigualdad se escribe como

$$r \cdot 1 \leq r \cdot RP + \lambda P \cdot 2r|\cos(\theta)|.$$

Debido a que r es un valor positivo podemos dividir toda la expresión entre r sin alterar el signo de la desigualdad

$$1 \leq RP + 2\lambda P \cdot |\cos(\theta)|.$$

Finalmente ocuparemos la condición $|\cos(\theta)| \leq \frac{1}{2}$ del lado derecho de la desigualdad para obtener

$$1 \leq RP + \lambda P$$

El lado derecho de esta última expresión es lo que estamos buscando debido a que es la suma de las longitudes de P a λ y R por lo que la suma de las distancias de P a λ y R es mayor o igual que uno. Con esto queda demostrado que si $|\cos(\theta)| \leq \frac{1}{2}$, entonces el interior de la elipse generada por λ está contenida en el interior de la circunferencia unitaria.

Segundo caso. Si λ es tal que $|\cos(\theta)| > \frac{1}{2}$. Suponga que λ es tal que tiene parte real positiva. Si $P = P(t) = (\cos(t), \sin(t))$ es un punto sobre la circunferencia, cuando $t = \frac{\pi}{3}$ se tiene que la suma de las distancias de P a λ y R es mayor o igual que 1 pues $P(\frac{\pi}{3}) = P_1$ que se encuentra sobre la recta l_1 y está incluido en la primera parte de esta demostración. De forma análoga, cuando $t = \frac{5\pi}{3}$, $P(t) = P_4$ que se encuentra sobre la recta l_4 , y por último basta notar que las funciones de distancia de λ al punto P y de R al punto P son crecientes por la proposición 3.6 cuando P se mueve de P_1 a P_2 y cuando P se mueve de P_4 a P_3 , por lo que el valor de la suma de las distancias de P a λ y a R es mayor que 1.

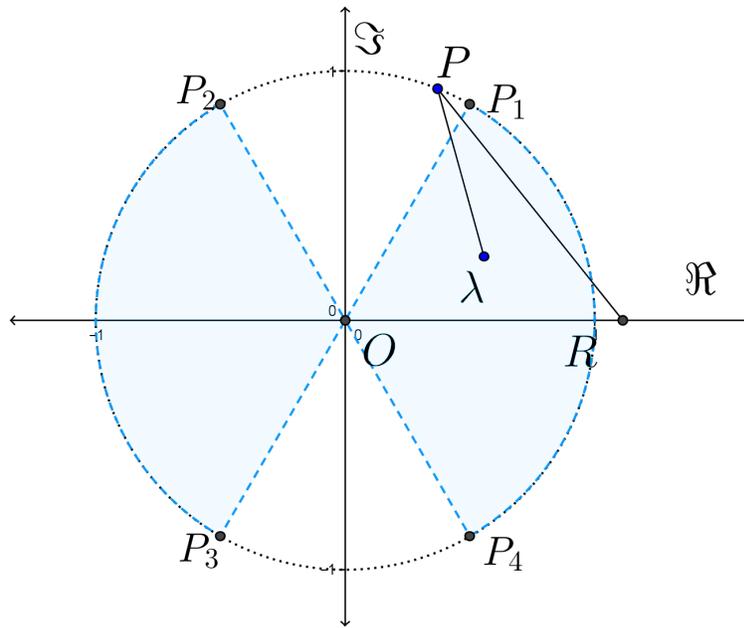


Figura 3.17: λ con $|\cos(\theta)| > \frac{1}{2}$

La prueba es similar cuando λ tiene parte real negativa, basta notar que si $t = \frac{2\pi}{3}$, se tiene que la suma de las distancias de P a λ y R es mayor o igual que 1 pues $P(\frac{2\pi}{3}) = P_2$ se encuentra sobre la recta l_2 . De forma análoga, cuando $t = \frac{4\pi}{3}$, $P(t) = P_3$, que se encuentra sobre la recta l_3 , y finalmente basta notar que las funciones de distancia de λ a P y de R a P son crecientes cuando P se mueve de P_2 a P_1 y cuando P se mueve de P_3 a P_4 , por lo que el valor de la suma de las distancias de P a λ y a R es mayor que 1.

Con ambos casos de esta parte, hemos concluido que los puntos de la circunferencia unitaria comprendidos en los arcos menores entre P_1 y P_2 ; y entre P_3 y P_4 no pueden formar parte de las elipses, por lo que las elipses no salen del conjunto Γ .

Esto concluye la demostración pues al estar todas las elipses contenidas en Γ , Γ contiene todos los valores $\langle A_b x, x \rangle$. ■

Demostrado que Γ contiene al rango numérico de cualquier operador A_b con $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, surge la pregunta: ¿Será posible encontrar un conjunto más chico que contenga a los rangos numéricos de los operadores A_b ?

El siguiente teorema más que resolver la cuestión de qué tan pequeño se puede pedir un conjunto para que contenga a todos los rangos numéricos de estos operadores, muestra que basta tener un elemento b adecuado para que el rango numérico del operador asociado iguale a Γ . Este resultado es bastante interesante porque por lo general en una colección de conjuntos no sucede que todos estén contenidos en uno solo, que es precisamente lo que afirma este teorema: de la colección de los posibles rangos numéricos, existe uno tal que los contiene a todos.

Teorema 3.8. *Sea $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ de forma que es un elemento pseudo-ergódico, entonces*

$$W(A_b) = \Gamma.$$

Demostración. La manera en la que se realizará la prueba será mostrando explícitamente que para cada punto $\lambda \in \mathbb{D} \cup (-2, 2)$ se pueden encontrar elementos $x \in \ell^2$ unitarios tales que $\lambda = \langle A_b x, x \rangle$. Se tendrá que $\mathbb{D} \cup (-2, 2) \subseteq W(A_b)$. Finalmente como $W(A_b)$ es un conjunto convexo y por el teorema anterior se concluye $W(A_b) = \Gamma$.

Como ya se mostró antes, x escogido de forma que una de sus componentes es 1 y el resto son cero hace que $\langle A_b x, x \rangle = 0$. Sea $\lambda \in \mathbb{D}$ tal que $\lambda = r e^{i\theta} \neq 0$.

Puesto que $0 < r < 1$, sea k_0 un entero tal que

$$\frac{1-r}{2} > \left(\frac{r+1}{2} \right)^{2k_0+1}. \quad (3.4)$$

Considere la función $f(t) = t - t^{2k_0+1} - r$ donde r es la norma de λ . Note que es una función polinomial y por lo tanto es continua. Además $f(r) = -r^{2k_0+1}$ es un número negativo y $f\left(\frac{r+1}{2}\right) = \frac{1-r}{2} - \left(\frac{r+1}{2}\right)^{2k_0+1}$ es un número positivo por la desigualdad 3.4. Por el *teorema del valor intermedio*, existe una raíz de f entre r y $\frac{r+1}{2}$. Sea t_0 esta raíz, es decir

$$\begin{aligned} t_0 - t_0^{2k_0+1} - r &= 0 \\ 1 - t_0^{2k_0} &= \frac{r}{t_0}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sea $\eta = t_0 e^{i\theta}$ donde θ es el argumento de λ . Puesto que $r < t_0 < \frac{r+1}{2} < 1$, entonces la siguiente suma converge

$$\sum_{k>0} t_0^{2k} = \frac{t_0^2}{1-t_0^2} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Si se define $\alpha = \frac{\sqrt{1-t_0^2}}{t_0}$, se tiene que

$$\sum_{k>0} t_0^{2k} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Note que

$$\alpha^2 \sum_{k>0}^{k_0} t_0^{2k} = \alpha^2 \sum_{k>0} t_0^{2k} - \alpha^2 \sum_{k>k_0} t_0^{2k} = 1 - t_0^{2k_0}. \quad (3.6)$$

Por otro lado, debido a que b es una sucesión pseudo-ergódica, es posible encontrar $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $b_{[j_0+1, j_0+k_0]}$ es la palabra formada por k_0 ceros que ocurre en b . Escogeremos a x de la siguiente forma

$$x_k = \begin{cases} \alpha \eta^{k-j_0} & \text{si } 0 < k - j_0 < k_0 + 2 \\ t_0^{k_0+1} & \text{si } k = j_0 + k_0 + 3 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De esta manera se tiene que

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 \\ &= t_0^{2(k_0+1)} + \sum_{0 < k - j_0}^{j_0+k_0+1} \alpha^2 |\eta|^{2(k-j_0)} \\ &= t_0^{2(k_0+1)} + \alpha^2 \sum_{0 < k}^{k_0+1} t_0^{2k}. \end{aligned}$$

Ocupando la ecuación 3.6 se tiene que

$$\|x\|^2 = t_0^{2(k_0+1)} + 1 - t_0^{2(k_0+1)} = 1.$$

Por lo que x es un elemento de ℓ^2 unitario. Además notemos que si se define a de manera que $a_k = \bar{x}_k x_{k+1}$, se obtiene

$$a_k = \begin{cases} \alpha^2 \eta t_0^{2(k-j_0)} & \text{si } 0 < k - j_0 < k_0 + 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Considere la ecuación 3.1, ocupando la ecuación 3.7 y que $b_{j_0+1} = \dots = b_{j_0+k_0} = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle A_b x, x \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \bar{a}_k + a_k \\ &= \sum_{j_0 < k}^{j_0+k_0} a_k \\ &= \sum_{j_0 < k}^{j_0+k_0} \alpha^2 \eta t_0^{2(k-j_0)}. \end{aligned}$$

Aplicando propiedades de sumas y las ecuaciones 3.6 y 3.5 se sigue que

$$\begin{aligned} \langle A_b x, x \rangle &= \alpha^2 \eta \sum_{0 < k}^{k_0} t_0^{2k} \\ &= \eta \left(1 - t_0^{2k_0} \right) \\ &= t_0 e^{i\theta} \frac{r}{t_0} \\ &= r e^{i\theta} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Hasta aquí se ha demostrado que $\mathbb{D} \subseteq W(A_b)$ cuando b es pseudo-ergódico. Sólo resta la demostración para el caso en que $\lambda \in (-2, 2)$, pero el procedimiento es similar. De hecho, exactamente el mismo procedimiento, simplemente cambiando que $b_{j_0+1} = \dots = b_{j_0+k_0} = 0$ por $b_{j_0+1} = \dots = b_{j_0+k_0} = 1$ arroja como resultado en las líneas anteriores que

$$\begin{aligned} \langle A_b x, x \rangle &= r e^{i\theta} + r e^{-i\theta} \\ &= 2r \cos(\theta). \end{aligned}$$

Dado que todo elemento en el intervalo $(-2, 2)$ se puede escribir $2r \cos(\theta)$ para algún valor θ y algún valor r (no necesariamente únicos), se sigue que $(-2, 2) \subseteq W(A_b)$ cuando b es pseudo-ergódico. ■

Nota 3.9. Una cuestión interesante es sobre el recíproco de este teorema, es decir ¿será cierto que si $W(A_b) = \Gamma$, entonces b es un elemento pseudo-ergódico? La respuesta es no, y no es

difícil encontrar un contraejemplo. En el argumento de la prueba se usa que por ser b pseudo-ergódico, en él ocurren todas las palabras, en particular palabras de ceros y palabras de unos. Esta condición se puede exigir sin que b sea pseudo-ergódico. Sea

$$b = (\dots 0000000 \cdot 1111111 \dots).$$

Claramente, b sirve para la prueba, pero no es pseudo-ergódico, pues no se puede encontrar la palabra 010.

Desde el punto de vista de dinámica simbólica pudiera ser intuitivo que si b es pseudo-ergódico, sucedería la igualdad $W(A_b) = \Gamma$ pues, como se prueba en el ejemplo 1.7, la órbita de b es densa en $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. De manera que la órbita de b , contiene elementos arbitrariamente cerca de cualquier elemento de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, en particular de $\mathbf{0}$ y de $\mathbf{1}$, y por lo tanto se podría pensar que $W(A_b)$ tiene elementos “muy cerca” de $W(A_{\mathbf{0}})$ y de $W(A_{\mathbf{1}})$.

Por otro lado, para cada $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, A_b se puede interpretar como la “matriz infinita” de adyacencia de G , donde G es un conjunto de vértices indexados con los números naturales $V(G) = \{v_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y conectados con aristas dirigidas de manera que v_k está conectado con exactamente una arista hacia el vértice inmediato a la derecha y está conectado con el vértice inmediato a la izquierda por medio de una única arista si $(A_b)_{k,k-1} = b_k = 1$ y cuando $(A_b)_{k,k-1} = b_k = 0$ no hay conexión dirigida de v_k a v_{k-1} . Esto deja claro que b proporciona la información sobre las conexiones hacia la izquierda. Supongamos que se asigna una probabilidad $q \in (0, 1)$ de forma que se tengan las probabilidades $P(b_k = 1) = q$ y $P(b_k = 0) = 1 - q$, es decir, cada componente de b es una variable aleatoria con distribución Bernoulli de parámetro q , independiente de las demás.

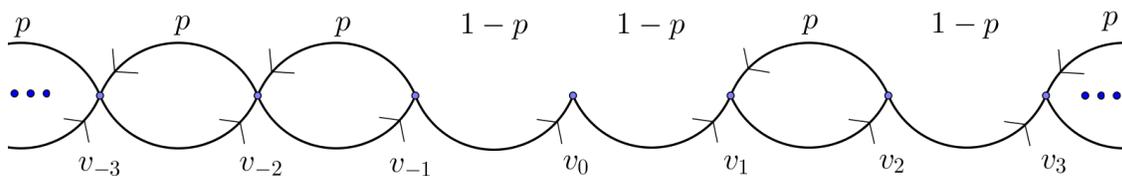


Figura 3.18: Gráfica cuyo operador de adyacencia es generado por $b = (\dots 111 \cdot 00101 \dots)$.

Con esta interpretación, pedir que b sea un elemento pseudo-ergódico es una condición nada exigente debido a que por [7, Lema 2.3], el elemento b es pseudo-ergódico con probabilidad 1 cuando cada una de sus componentes son variables aleatorias como en el párrafo anterior.

Un resultado de interés es que el rango numérico de los operadores asociados a sucesiones que se encuentran en una misma órbita son iguales.

Teorema 3.10. Para $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ arbitrario se tiene que

$$W(A_b) = W(A_d) \quad \forall d \in \text{orb}(b)$$

Demostración. Sea $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ y $d \in \text{orb}(b)$ arbitrario, por lo que existe un $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $d = S^{k_0}b$. Sea x un elemento unitario arbitrario de ℓ^p . Recordemos que cuando se aplica el operador $A_{\mathbf{0}}$ al elemento x , el vector resultante sigue siendo unitario. Si definamos $\tilde{x} = A_{\mathbf{0}}^{k_0}x$ tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle A_b x, x \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{x_k} (x_{k+1} + b_{k-1} x_{k-1}) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{x_{k+k_0}} (x_{k+k_0+1} + b_{k+k_0-1} x_{k+k_0-1}) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\tilde{x}_k} (\tilde{x}_{k+1} + d_{k-1} \tilde{x}_{k-1}) \\ &= \langle A_d \tilde{x}, \tilde{x} \rangle \end{aligned}$$

De esta manera se muestra que $W(A_b) \subseteq W(A_d) \quad \forall d \in \text{orb}(b)$. Basta notar que cuando $d \in \text{orb}(b)$ entonces $\text{orb}(b) = \text{orb}(d)$ pues aplicando este mismo resultado para cada elemento de la órbita de b , se tiene que $\forall d \in \text{orb}(b)$, $W(A_d) \subseteq W(A_b)$, obteniendo así lo que se quiere. ■

Por lo general, calcular el espectro de un operador no es una tarea fácil. En esta sección se calcula el espectro para algunos operadores particulares, y se muestra un teorema que relaciona los espectros de los operadores en una misma órbita. Como se mencionó en la sección 1.4, se puede demostrar que cuando $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ y $1 \leq p \leq \infty$, entonces el espectro de A_b no depende de p ([6],[7]). Trabajaremos en el espacio ℓ^∞ , pues es más sencillo encontrar vectores propios.

El primer caso particular será el operador desplazamiento A_0 . Recuerde que $W(A_0) = \mathbb{D}$ y por consecuencia del teorema 1.15, $\sigma(A_0) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Por otro lado considerando que $(A_0)^{-1} = A_0^*$ y ocupando el teorema 1.13 se tiene que que

$$\begin{aligned}\sigma\left((A_0)^{-1}\right) &= \left\{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A_0)\right\} \\ &\subseteq \left\{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \leq 1\right\} \\ &= \{\lambda \mid \lambda \geq 1\}, \\ \sigma(A_0^*) &= \left\{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A_0)\right\} \\ &\subseteq \{\lambda \mid \lambda \leq 1\},\end{aligned}$$

Lo cual implica que $\sigma(A_0^*) \subseteq \partial\mathbb{D}$ y ocupando nuevamente el teorema 1.13 se concluye que $\sigma(A_0) \subseteq \partial\mathbb{D}$.

Sea $\lambda \in \partial\mathbb{D}$, es decir $|\lambda| = 1$ y sea x tal que $x_k = \lambda^k$, es claro que $x \in \ell^\infty$ pues $|x_k| = |\lambda|^k = 1$, y además

$$(A_0 x)_j = \lambda^{j+1} = \lambda \lambda^j = \lambda x_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Es decir, x es un vector propio asociado a λ del operador A_0 . luego $\lambda \in \sigma(A_0)$, con lo que se prueba que $\sigma(A_0) = \partial\mathbb{D}$.

Como siguiente caso considere al operador A_1 . Anteriormente se vio que $W(A_1) = (-2, 2)$ y por el teorema 1.15 sabemos que $\sigma(A_1) \subseteq [-2, 2]$.

Sea $\lambda \in [-2, 2]$, como $\frac{\lambda}{2} \in [-1, 1]$, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\cos(\theta) = \frac{\lambda}{2}$. Sea x tal que $x_k = e^{ik\theta}$, al igual que antes, es claro que $x \in \ell^\infty$ pues $|x_k| = |e^{i\theta}|^k = 1$. Además

$$\begin{aligned} (A_1 x)_j &= e^{i(j+1)\theta} + e^{i(j-1)\theta} \\ &= e^{ij\theta}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ &= 2e^{ij\theta} \cos(\theta) \\ &= 2\cos(\theta)x_j \\ &= \lambda x_j. \end{aligned}$$

Por lo que x es un vector propio asociado a λ , mostrando así que $\sigma(A_1) = [-2, 2]$. A continuación mostraremos un resultado de interés en relación al espectro.

Teorema 4.1. *Sea $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, entonces para cada $d \in \text{orb}(b)$ se tiene que $\sigma(A_d) = \sigma(A_b)$.*

Demostración. Sea $b \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ y $d \in \text{orb}(b)$, recuerde que $\text{orb}(b)$ es el conjunto de las iteraciones del mapeo desplazamiento aplicado a b , por lo cual existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $d = S^{k_0}b$, donde S es el mapeo desplazamiento sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Observe que si $Q = (A_0)^{k_0}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\begin{aligned} (Q(A_b x))_j &= (A_b x)_{j+k_0} \\ &= x_{j+k_0+1} + b_{j+k_0-1} x_{j+k_0-1} \\ &= (Qx)_{j+1} + (S^{k_0}b)_{j-1} (Qx)_{j-1} \\ &= (Qx)_{j+1} + d_{j-1} (Qx)_{j-1} \\ &= (A_d(Qx))_j. \end{aligned}$$

Con lo que se sigue la igualdad de operadores $QA_b = A_dQ$, y debido a que $Q = (A_0)^{k_0}$ es un operador invertible (acotado y además unitario pues $Q^{-1} = Q^*$) entonces A_b y A_d son operadores similares (más aún, son unitariamente equivalentes). Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned} QA_b &= A_dQ && \Leftrightarrow \\ QA_b - \lambda Q &= A_dQ - \lambda Q && \Leftrightarrow \\ Q(A_b - \lambda I) &= (A_d - \lambda I)Q && \Leftrightarrow \\ A_b - \lambda I &= Q^{-1}(A_d - \lambda I)Q \end{aligned}$$

De esta última igualdad, debido a que Q que es invertible, es claro que $A_b - \lambda I$ es invertible, de inverso acotado y de dominio denso si y solo si $A_d - \lambda I$ también lo es, finalmente se concluye lo que se buscaba: $\sigma(A_b) = \sigma(A_d)$. ■

Lo que este teorema muestra es que operadores que son generados por elementos en una misma órbita de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ tienen el mismo espectro. Más aún, debido a la relación de similaridad podemos afirmar que la división de los espectros también es idéntica, es decir, los espectros continuo, residual y puntual de A_b son iguales a los los espectros continuo, residual y puntual de A_d respectivamente para d en la órbita de b .

Parte de la motivación a lo largo de esta tesis fue el trabajo [7]. Se pensó que los resultados serían similares cuando se consideraba cambiar -1 por 0 siguiendo la línea de argumentos, sin embargo aún cuando se tuvo éxito para demostrar algunos resultados, se tuvo que abordar de diferente manera al querer calcular el rango numérico, en general con matemáticas más elementales. Una idea que surgió en el transcurso de la elaboración de esta tesis fue analizar a profundidad la bibliografía de [7] y ver si los resultados con argumentos de operadores límite se puede extender para el caso abordado aquí.

El trabajo realizado por Chandler-Wilde, Chonchaiya y Linder es mucho más amplio de lo que se aborda en esta tesis pues abarcan ideas más elaboradas como *pseudo espectro* y *teoría de operadores límite* entre otros.

Nos parece que, considerando los resultados de esta tesis, sería interesante seguir la línea de investigación en las siguientes ideas

- Estudiar desde la perspectiva de matrices aleatorias las proyecciones de los operadores sobre espacios de dimension finita y analizar el comportamiento de estas matrices cuando la dimensión tiende a infinito.
- Investigar de qué manera estos resultados se ven afectados cuando se considera un alfabeto diferente, por ejemplo el alfabeto $\{a, b\}$ donde $a = 0$ y $b \in \mathbb{R}$, pues de forma intuitiva, los resultados concernientes a sucesiones pseudo-ergódicas deberían seguir argumentos similares.
- ¿Será cierto que si en un subespacio de desplazamiento B existe b tal que $\overline{\text{orb}(b)} = B$, entonces para todo $y \in B$ se cumple que

$$W(A_y) \subseteq W(A_b)?$$

- Si se considera un alfabeto A con una cantidad de símbolos arbitraria y para cada $\alpha \in A$ denotamos con A_α al elemento de $A^{\mathbb{Z}}$ cuyas componentes son todas iguales a α , ¿será cierto que para un elemento pseudo-ergódico $b \in A^{\mathbb{Z}}$ se tiene que

$$W(A_b) = \text{conv} \left(\bigcup_{\alpha \in A} W(A_\alpha) \right)?$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Anderson, Greg W.; Guionnet, Alice; Zeitouni, Ofer. *An introduction to random matrices*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 118. Cambridge University Press, Cambridge, 2010. xiv+492 pp. ISBN: 978-0-521-19452-5.
- [2] Bai, Zhidong; Fang, Zhaoben; Liang, Ying-Chang. *Spectral theory of large dimensional random matrices and its applications to wireless communications and finance statistics. Random matrix theory and its applications*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ; University of Science and Technology of China Press, Hefei, 2014. xii+220 pp. ISBN: 978-981-4579-05-6 15-01.
- [3] Bulajich Manfrino, Radmila; Gómez Ortega, José Antonio. *Geometría, Cuadernos de Olimpiada de Matemáticas*, Publicaciones del Instituto de Matemáticas, UNAM, 2002. ISBN 978-970-32-0444-1.
- [4] Deift, Percy; Gioev, Dimitri. *Random matrix theory: invariant ensembles and univxersality*. Courant Lecture Notes in Mathematics, 18. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. x+217 pp. ISBN: 978-0-8218-4737-4.
- [5] Cabezuelo, E.; Vallverdú, M; Caminal, P; Cygankiewicz, I.; Bayes de Luna, A. *Dinámica Simbólica Aplicada al Análisis de la Variabilidad del Ritmo Cardíaco*. <http://www.ceautomatica.es/old/actividades/jornadas/XXV/documentos/83-onerdrat.pdf>, (2004).
- [6] Chandler-Wilde, Simon N.; Chonchaiya, Ratchanikorn; Lindner, Marko. *Eigenvalue problem meets Sierpinski triangle: computing the spectrum of a non-self-adjoint random operator*. *Operator and Matrices* **5** (2011), no. 4, 633-648.
- [7] Chandler-Wilde, Simon N.; Chonchaiya, Ratchanikorn; Lindner, Marko. *On the spectra and pseudospectra of a class of non-self-adjoint random matrices and operators*. *Operator and Matrices* **7** (2013), no. 4, 739-775.

- [8] Cuntz, Joachim; Krieger, Wolfgang. *A class of C^* -algebras and topological Markov chains*. *Inventiones Mathematicae* **56** (1980), no. 3, 251-268.
- [9] Kreyszig, Erwin. *Introductory functional analysis with applications*. Wiley Classics Library. John Wiley Sons, Inc., New York, 1989. xvi+688 pp. ISBN: 0-471-50459-9.
- [10] Lind, Douglas; Marcus, Brian. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xvi+495 pp. ISBN: 0-521-55124-2; 0-521-55900-6.
- [11] Martínez-Avendaño, Rubén A.; Rosenthal, Peter. *An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space*. Graduate Texts in Mathematics, 237. Springer, New York, 2007. xii+220 pp. ISBN: 978-0-387-35418-7; 0-387-35418-2.
- [12] Pedersen, Gert K.(DK-CPNH) *Analysis now*. Graduate Texts in Mathematics, 118. Springer-Verlag, New York, 1989. xiv+277 pp. ISBN: 0-387-96788-5.
- [13] Pérez-Gómez, Oscar E. *Espacios de desplazamiento de sustitución*. Tesis de Licenciatura, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 2013.
- [14] Schmidt, Palle; Spitzer, Frank. *The Toeplitz matrices of an arbitrary Laurent polynomial*. *Mathematica Scandinavica* **8** (1960) 15-38.
- [15] Shapiro, Joel H. *Notes on the Numerical Range*,
http://www.mth.msu.edu/~shapiro/pubvit/downloads/numrangenotes/numrange_notes.pdf, (2003).
- [16] Skoufranis, Paul. *Numerical Ranges of Operators*,
<http://www.math.ucla.edu/~pskoufra/DANotes-NumericalRanges.pdf>, (2012).