UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

“Propuesta de actividades de aprendizaje para el concepto de variable en una función lineal utilizando el programa Geogebra5”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

PRESENTA:

Maribel Monzalvo Moreno

Dirigido por:

Dr. Marcos Campos Nava

Pachuca de Soto, Hidalgo. Septiembre, 2020.

Agradecimientos

Expreso mis agradecimientos:

Al Mtro. Marcos Campos Nava por sus valiosas orientaciones y recomendaciones durante la realización de esta investigación, así como por su apoyo, paciencia y dedicación brindados.

Al Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez por sus valiosas aportaciones y su atenta lectura a este trabajo.

Al Profesor Irving Axel Rodríguez Márquez por su gran apoyo para la realización de esta investigación y por sus sugerencias que contribuyeron al mejoramiento de este estudio.

A los estudiantes participantes en esta investigación, por su esfuerzo y dedicación en la realización de las actividades.

A los doctores que me impartieron cursos durante los estudios de maestría, por compartirme sus conocimientos y valiosas experiencias.

Al Dr. Ricardo Cruz Castillo por todo su apoyo académico y su consejo. Gracias por ayudarme a profundizar en el razonamiento matemático.

A Armando de Jesús Barragán por tu paciencia y apoyo durante toda la maestría. Sin ti, no lo hubiera logrado te estimo y aprecio mucho.

A mis compañeros, por acompañarme en el camino de mis estudios y brindarme su amistad.

Dedico este trabajo a:

Mi madre y mi hija, por el amor incondicional que me dan, por su motivación constante y gran apoyo para cumplir mis metas.

Resumen

Se presenta el desarrollo y resultados de un trabajo de investigación de tipo cualitativo cuyo objetivo es proponer una secuencia de actividades de aprendizaje relacionadas con el tema de variación lineal. Desde un enfoque epistemológico constructivista, basándose en los enfoques de resolución de problemas y los tres usos de la variable, propuestas y enriquecidas por diferentes autores como: Schoenfeld, Polya, Santos Trigo, Ursini y colaboradores, por mencionar algunos. Así como, en los objetivos de aprendizaje de la secuencia veinte del libro de texto de matemáticas para primer grado de telesecundaria. A través del uso del programa de geometría dinámica: Geogebra5.

Se destaca el proceso seguido para el diseño de la propuesta de las actividades de aprendizaje, reportando las observaciones hechas durante su puesta en práctica, haciendo énfasis en cómo el uso de herramientas tecnológicas permitió a los participantes examinar cualidades matemáticas asociadas al proceso de solución; usar diversas representaciones; plantear conjeturas; utilizar argumentos y comunicar resultados. Aun cuando les faltaban conocimientos previos como la ejecución de operaciones básicas (multiplicación y división), conocimientos sobre el plano cartesiano, ubicación de puntos, entre otros.

Los resultados mostraron que, la secuencia de actividades de aprendizaje propuestas con base en el modelo didáctico de los tres usos de la variable, utilizando Geogebra5 permitieron a los participantes reconocer a partir del problema verbal, que existía una correspondencia entre los valores de las dos variables involucradas, lograran simbolizar la relación funcional de correspondencia y determinaran el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra.

Abstract

This document presents the development and results of a qualitative research which objective is, to propose a sequence of learning activities related to the topic of linear variation. It is presented from a constructivist epistemological approach, based on didactic problems solving approaches and three uses of variable, proposed and enriched by different authors such as: Schoenfeld, Polya, Santos Trigo, Ursini and hers colaborators, to mention a few. The research is also based on the learning objectives of sequence twenty of the math textbook for the first year of telesecundaria. Through the use of the dynamic geometry software: Geogebra5.

The process followed in designing the learning activities proposal is highlighted. Observations made during its implementation are reported, emphasizing how the use of digital technological tools allowed participants to examine mathematical qualities associated with the solution process, use various representations, pose conjectures, use arguments, and communicate results; even when they lacked previous knowledge such as the performing of basic operations (multiplication and division), knowledge of the Cartesian plane, and location of points.

The results of this work, showed that the proposed learning sequence of activities based on the didactic model of the three uses of the variable, using Geogebra5. Allowed the participants to recognize from the verbal problem, that there was a correspondence between the values of the two variables involved, they achieved symbolize the functional relationship of correspondence and determine the value of one of the variables when the value of the other is known.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Actualmente la tecnología abarca cada día más espacios de nuestra vida cotidiana, por lo que se ha buscado obtener el mayor beneficio que nos puedan ofrecer, incluyendo al ámbito educativo. Recientemente la tecnología ha llegado hasta las aulas para ser incorporada en el proceso de enseñanza-aprendizaje y por ende en el área de estudio de las matemáticas. Esta presencia de tecnología en las cuestiones didácticas, se ha manifestado con el uso de calculadoras y programas computacionales especializados, entre otros. Así surge la necesidad de investigar sobre el diseño de actividades de aprendizaje que consideren el uso de herramientas tecnológicas, como el programa de geometría dinámica Geogebra5.

De esta manera, esta investigación tiene como objetivo, proponer una secuencia de actividades de aprendizaje para que el alumno reconozca la correspondencia entre los valores de dos variables involucradas en un problema; simbolice la relación funcional de correspondencia y determine el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra. Dentro de un ambiente de resolución de problemas, con base en el método de tres usos de la variable.

Así pues, en el primer capítulo se dan a conocer algunos antecedentes de investigaciones relacionadas con la problemática de este estudio y se da a conocer el problema de investigación, así como las preguntas que lo guían.

En el segundo capítulo se exponen los referentes teóricos-conceptuales obtenidos de la revisión de la literatura, que dan sustento al diseño de las categorías de análisis, la propuesta de actividades, su aplicación y análisis. Se abordan temas relevantes para este estudio como son: la resolución de problemas, el aprendizaje del concepto de variación lineal a través de tres usos de la variable y el uso de la tecnología como herramienta de aprendizaje.

El diseño de las hojas de trabajo, es descrito en el tercer capítulo. Se dan a conocer las hojas de trabajo y los objetivos específicos que tienen. Además, se detalla la manera en que se llevó a cabo la aplicación de los instrumentos, la población a la que fueron dirigidos y la forma en que se analizaron los datos obtenidos.

En el capítulo cuatro se presentan los resultados obtenidos, enfatizando la descripción de las estrategias y los recursos utilizados por los participantes en las hojas de trabajo, así como el uso que dieron al software Geogebra5 en los procesos de solución.

Las conclusiones a las que se llegaron en esta investigación son comentadas en el capítulo cinco. En la segunda parte, se plantean la propuesta de actividades, así como el guion didáctico para el aprendizaje del tema de variación lineal, ambos con las adecuaciones finales, instrumentos que pudieran ser aplicados en un futuro.

CAPÍTULO 1

Problema de investigación

La mente humana es un ente biológico que proporciona una serie limitada de "hipótesis admisibles" que son los conocimientos de la investigación científica humana y de los logros cognitivos en general.

NOAM CHOMSKY
¿Qué clase de criaturas somos?

1.1. Estado del arte.

Dentro de un proceso de investigación es indispensable la revisión de la literatura, porque permite establecer un marco de referencia, vincular las proposiciones derivadas del proceso de recolección y análisis de la información, con la intención de llegar a conocimientos generales que permitan proceder más rápidamente ante el problema planteado u otros similares (Daros, 2002 y Kumar, 2011).

La enseñanza y el aprendizaje del pensamiento algebraico es un tema recurrente en algunos trabajos de investigación en educación matemática, ya que a pesar de los esfuerzos realizados para que los estudiantes profundicen en los conocimientos de esta asignatura, se siguen reportando resultados poco favorables en pruebas estandarizadas nacionales e internacionales. Un ejemplo son los resultados del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA, 2015), los cuales arrojaron que los estudiantes tienen limitaciones para resolver problemas sobre cálculo de valor faltante que suponen relaciones de proporcionalidad directa o resolver ecuaciones de primer grado de la forma $ax+b=c$ y sus expresiones equivalentes. Sólo 1 de cada 10 estudiantes al concluir este nivel alcanzan los aprendizajes clave de manera satisfactoria o sobresaliente, a pesar de que el tema de función lineal es abordado desde primer grado de secundaria.

Respecto a los resultados obtenidos en la prueba del Programa Internacional para la Evaluación de los Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés) en 2015, que realizó el ahora desaparecido Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE), en coordinación con la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) muestran que:

> Los estudiantes mexicanos tienen un desempeño de 85 puntos en Ciencias, 82 en Matemáticas y 70 en Lectura […] Es decir, el promedio global nacional reporta, que la población examinada está por debajo del nivel mínimo de competencia necesario para acceder a estudios superiores o realizar las actividades que implica la complejidad de la sociedad contemporánea. Particularmente los alumnos mexicanos, próximos a finalizar su educación secundaria, no pueden resolver correctamente problemas algebraicos (SEP, 2017, p. 73).

Esto es preocupante, ya que el desarrollo del pensamiento algebraico "involucra la comprensión de las relaciones funcionales, la generalización de patrones y de relaciones numéricas, el trabajo con la estructura, el simbolismo y la modelización como medios de expresión, y la formalización de generalizaciones" (Butto y Rojano, 2010, p. 56) y permite a los estudiantes "expresar ideas complejas de forma sintética…", además de "ser una herramienta que favorece el análisis de una amplia variedad de fenómenos que involucran variación y cambio a través del concepto de función" (Principios y Estándares para la Matemática Escolar [NTCM], 2000, p. 37). Por consiguiente, el pensamiento algebraico favorece que los alumnos aborden el estudio de áreas como economía, física, geografía, biología, química, entre otras; cuyo eje rector es el uso de estructuras abstractas y la expresión de relaciones en lenguaje simbólico.

En este orden de ideas, Artigue (2012) propone tres caminos para introducir a los alumnos en el estudio del pensamiento algebraico, que van muy acordes con la propuesta planteada por la Secretaría de Educación Pública en los aprendizajes clave:

a) Haciendo el recorrido histórico de las ecuaciones asociadas con el enfoque analítico cartesiano que se ha elegido.
b) Forma de reconocimiento de patrones y la generalización que se ha seleccionado. Esto no intenta enseñar estructuras algebraicas sino identificar lo que se llaman patrones en secuencias de números, en configuraciones geométricas, para expresar algebraicamente y utilizar esta expresión algebraica para estudiar, caracterizar, comparar.
c) El camino de modelación que se ha elegido, a menudo vinculados con situaciones extra matemáticos.

La atención se centró en el hecho de que:

> Los enfoques más tradicionales empiezan por enseñar la sintaxis algebraica, destacando sus aspectos manipulativos y, al final, resuelven problemas aplicando dicho contenido sintáctico-algebraico. La principal crítica a este enfoque señala que, en él, se introduce al estudiante en un simbolismo desprovisto de significado y de sentido; se ignora que viene de trabajar con la aritmética, donde los símbolos se relacionan con diversas fuentes de significado y los contextos de los problemas determinan en buena medida la manera de resolverlos (Butto y Rojano, 2010, p. 56 y 57).

Una propuesta alternativa es la que presentan Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2016) quienes parten del hecho de que en "el nivel de secundaria intervienen esencialmente tres usos de la variable: para representar las incógnitas, los números generales y las relaciones funcionales entre distintas cantidades" (p. 22). En consecuencia, plantean que un alumno podrá tener cierto éxito si:

> En primer lugar, trabaja con las incógnitas, pero también con los números generales y con las relaciones funcionales, y que aprenda a pasar con flexibilidad entre estos distintos usos de la variable. En segundo lugar, que aprenda las reglas sintácticas que rigen el lenguaje algebraico, pero que pueda relacionar los distintos usos de la variable con diversas situaciones (p. 22)

Además, para que los estudiantes consideren que el desarrollo del pensamiento algebraico es útil, es necesario promover la resolución de problemas contextualizados, incluyendo la modelación de las situaciones a través del planteamiento de ecuaciones, la aplicación de algoritmos y la interpretación de los resultados en términos de la situación original (Kieran, 2006).

En relación al tipo de problemas y escenarios de instrucción que se plantean en la educación escolarizada, partamos de que una tarea de aprendizaje está definida como:

> Un segmento de la actividad en el aula que se dedica al desarrollo de una idea matemática particular. Una tarea puede involucrar varios problemas relacionados o trabajo extendido, hasta un período de clase completo, en un solo problema complejo. Definidas de esta manera, la mayoría de las tareas tienen una duración de entre veinte y treinta minutos. (Stein y Smith, 1998, p. 269).

En este sentido, el análisis y reflexión en torno a cómo se abordan los contenidos en los libros de texto resulta relevante, porque estos materiales representan un recurso importante que tiene una fuerte influencia en las prácticas del salón de clase (Stacey y Vincent, 2009)

En el caso del libro de matemáticas para primer grado de telesecundaria, el enfoque didáctico dice que debe "permitir además de construir contenidos matemáticos, desarrollar habilidades para comunicar información matemática usando el lenguaje propio de la asignatura, dar argumentos que justifiquen los procedimientos y razonamientos que permitieron llegar a un resultado" (SEP, 2018, p. 6). Sin embargo, Stacey y Vincent (2009), identifican que:

> La mayoría de los libros de texto proporcionan explicaciones para los temas presentando "reglas sin razones", pero el propósito principal pareciera ser la derivación de reglas o la justificación en la preparación para ejercicios de práctica, en lugar de utilizar explicaciones como herramientas de pensamiento. Los libros de texto en general no distinguían entre las legitimidades de los modos deductivos y otros modos de razonamiento (p.271).

Pero ¿qué es la resolución de problemas como propuesta para el desarrollo o construcción del conocimiento matemático de los estudiantes? Santos Trigo (2014, pp. 18-19) la considera "una forma de interactuar y pensar acerca de las situaciones matemáticas (problemas o conceptos) que se manifiesta en las dinámicas de la clase, los problemas y las formas de evaluar los desarrollos cognitivos del estudiante", donde el profesor considera actividades que gradualmente orientan y guían a los estudiantes en el desarrollo de recursos y estrategias (heurísticas y metacognitivas) de resolución de problemas. Destacando las diversas maneras de identificar y representar objetos matemáticos con la intención de buscar, formular y sustentar relaciones matemáticas. Es decir, aprender matemáticas va más allá del dominio de reglas, algoritmos, fórmulas y procedimientos para resolver problemas rutinarios.

En este orden de ideas, en relación a los procesos que sigue un estudiante para la resolución de problemas, Polya (2005) menciona cuatro fases: (1) comprender el problema, (2) Concebir un plan, (3) Ejecutar el plan y (4) examinar la solución obtenida. Cada fase es acompañada por una serie de preguntas usadas para guiar las acciones de un resolutor ideal. Schoenfeld (1985), por su parte, explica la conducta que toman los estudiantes al resolver problemas mediante un marco integrado por cuatro componentes: (1) recursos cognitivos, (2) Heurísticas, (3) Control y (4) Sistema de creencias.

Dentro del enfoque de resolución de problemas se ha introducido el uso de tecnologías digitales como herramientas de aprendizaje. El interés en la construcción de representaciones múltiples respaldadas por la tecnología no ha disminuido; de hecho, se mantiene presente en varias ramas de las matemáticas y su enseñanza. Así, gran parte de la investigación existente sobre el papel desempeñado por las tecnologías digitales en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra se ha centrado en las formas en que éstas, pueden enriquecer la información conceptual. La comprensión de los objetos y los procesos algebraicos (Kieran y Yerushalmy, 2004).

Kieran y Yerushalmy (2004), identifican tres temas predominantes sobre Ambientes Tecnológicos: (a) entornos de representaciones múltiples en computadoras y calculadoras gráficas, (b) entornos que ofrecen control dinámico, y (c) entornos con cálculo simbólico estructurado.

Estos autores consideran que los acercamientos basados en el uso de tecnología para desarrollar el pensamiento algebraico han permitido a los estudiantes, acceder a aspectos interesantes como la resolución de problemas algebraicos, incluso se ha documentado que quienes han aprendido sin ayuda de la tecnología, son buenos para las manipulaciones simbólicas algebraicas en el sentido tradicional, pero no necesariamente son buenos para tareas conceptuales como aquellos que han usado acercamientos tecnológicos por largo tiempo, o bien, que han aprendido álgebra principalmente con tecnología. En otras palabras, los estudiantes que aprenden habilidades algebraicas en varios ambientes tecnológicos están desarrollando también conocimiento conceptual de los objetos que están manipulando.

Además, en diversos trabajos de investigación se ha puesto de manifiesto la influencia de las tecnologías digitales en el proceso de aprendizaje de las matemáticas (Arcavi y Hadas, 2000; Moreno-Armella, 2002; Santos Trigo, 2014), mencionan que su empleo puede favorecer los procesos de comprensión de ideas y conceptos. Pea (1985) por su parte, propuso que las tecnologías digitales funcionan como herramientas cognitivas, ayudando con ello a la amplificación y reorganización del conocimiento matemático (Campos y Torres, 2017, p. 145).

Aunado a lo anterior, el NCTM (2000), considera dentro de los seis principios para las matemáticas escolares, que permiten representar ideas, facilitan la organización y el análisis de información, permiten realizar cálculos de manera eficiente y precisa, favoreciendo la comprensión y la intuición. Así los estudiantes pueden enfocarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución del problema.

Bajo esta perspectiva Barrera y Santos (2002) establecen que el profesor debe proponer actividades donde los estudiantes:

> Tengan oportunidad de valorar la importancia de plantear preguntas, utilizar distintos recursos y estrategias que les permitan examinar cualidades matemáticas asociadas al proceso de solución. […] usar diversas representaciones, plantear conjeturas, utilizar argumentos y comunicar resultados. Además, una situación puede estar inmersa en múltiples contextos y ofrecer al estudiante la oportunidad de establecer conexiones entre el quehacer de la disciplina y los contextos en que se presenta. (p. 167)

Campos y Torres (2017), plantean la siguiente metodología para el diseño de una tarea de aprendizaje:

a) Establecer el objetivo de aprendizaje o las competencias a desarrollar.

b) Determinar las competencias o conocimientos previos que son requeridos para poder abordar la tarea.

c) Redactar el enunciado de la actividad que será presentado a los estudiantes.

d) Considerar en qué contexto puede estar planteada la actividad (matemático, hipotético o del mundo real).

e) Una vez identificado el contexto, se identifica el escenario virtual en el que se desarrollará la tarea.

f) Bosquejar rutas hipotéticas de acción que los alumnos podrían tomar con la finalidad de considerar dificultades a las que se podrían enfrentar al tratar de resolver el problema o al usar las herramientas tecnológicas. Esto también servirá para detectar si los recursos tecnológicos propuestos son los adecuados.

g) Elaborar preguntas para guiar la actividad y pensar en qué momento se las pueden presentar a los alumnos. Para favorecer el proceso inquisitivo que permite desarrollar habilidades matemáticas, tales como la argumentación, la justificación, la generalización, la elaboración de conjeturas y la comunicación de resultados; este proceso. Además, da pie a la extensión de la actividad con otras que pudieran complementarla.

Finalmente, recomiendan que el profesor tome en cuenta que este proceso inquisitivo pues permite que una tarea o actividad de aprendizaje matemática alcance distintos niveles de *demanda cognitiva* (Stein y Smith, 1998), para lo cual se requiere que el estudiante realice procedimientos en los cuales se crean conexiones entre distintos conceptos y significados, que cuente con tiempo suficiente para su realización, donde pueda hacer preguntas y elaborar justificaciones y explicaciones.

1.2. Planteamiento del problema.

En los siguientes párrafos se expone la formulación del problema de esta investigación, el cual permitirá identificar el rumbo a seguir del proceso investigativo (Kumar, 2011). Con base en la revisión de la literatura, fue posible sustentar que durante la educación secundaria se le debiera conferir un papel preponderante al desarrollo del pensamiento algebraico, bajo el enfoque epistemológico constructivista y la metodología didáctica de resolución de problemas con uso de tecnología digital. Sin embargo, a pesar de los esfuerzos realizados, los alumnos siguen mostrando un bajo aprovechamiento escolar en este tema. Es por esto que, después de analizar varias líneas de investigación, se decidió enfocarse en el análisis y la reestructuración de las actividades del tema “Variación lineal 1”, planteadas en el libro de texto para el alumno, de primero de telesecundaria, que propone la SEP, editado en 2018, págs. 146-151 (Anexo 1).

En consecuencia, este trabajo es guiado por los siguientes objetivos:

General:

> Proponer una secuencia de actividades de aprendizaje para que el alumno reconozca la correspondencia entre los valores de dos variables involucradas en un problema;

simbolice la relación funcional de correspondencia y determine el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra. Basadas en la metodología didáctica de los tres usos de la variable, usando el programa de geometría dinámica, Geogebra5.

Específicos:

a) Analizar la estructura de una secuencia de actividades didácticas, del libro de texto para los alumnos de primero de telesecundaria relacionadas con el tema de variación lineal.

b) Reestructurar las actividades de la secuencia 20 del libro de texto para los alumnos de primero de telesecundaria con los mismos objetivos de aprendizaje, pero acordes con el enfoque epistemológico constructivista, la propuesta didáctica de los tres usos de la variable y la metodología de resolución de problemas.

c) Agregar a la propuesta actividades de aprendizaje con el uso de Geogebra5.

La pregunta que guía este estudio es: ¿Cómo diseñar actividades de aprendizaje que apoyen a reconocer la correspondencia entre los valores de dos variables involucradas en un problema, a simbolizar la relación funcional de correspondencia entre ellas y a determinar el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra, con base en la metodología didáctica de los tres usos de la variable y el uso del programa de Geogebra5?

CAPÍTULO 2

Marco teórico-conceptual

Los fundamentos de la enseñanza de las matemáticas,
pueden implementarse con unas matemáticas
disfrutables, curiosas, interesantes, apasionantes.

EDUARDO SAENZ DE CABEZÓN
Inteligencia matemática

La ciencia se distingue del lenguaje cotidiano, entre otras cosas, porque define con precisión los conceptos, palabras y objetos que involucra, a través del marco de investigación que guía el trabajo, la metodología y el análisis de los resultados (Eisenhart, 1991). Le da sentido a la interpretación de los datos, evitando las suposiciones y creencias del investigador, para profundizar en el análisis y comprensión de problemas más complejos (Lester, 2005).

En los siguientes párrafos se ha desarrollado un marco teórico-conceptual, basado en la revisión de la literatura previamente, directamente relacionados con el problema de investigación rescatando diferentes puntos de vista, constructos, teorías y aspectos del conocimiento para su sustento. Estas ideas o conceptos adoptados ayudan a: i) prevenir errores que se han cometido en otros estudios; ii) sugerir guías de investigación; iii) delimitar el área de la investigación; iv) conducir al establecimiento de hipótesis; v) inspirar nuevas líneas y áreas de investigación, y proveer un marco de referencia para interpretar los resultados del estudio, vi) así como para establecer las relaciones que guardan entre ellos (Izcara, 2014).

En este capítulo se presenta una revisión de la literatura relacionada con los elementos que enmarcan esta investigación, diferentes aproximaciones al concepto de matemáticas, constructivismo, enseñanza del concepto de variable, resolución de problemas, uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza del álgebra y análisis de las actividades en los libros de texto.

2.1. Dimensión ontológica.

Las matemáticas son fundamentales en el proceso de aprendizaje de cualquier ser humano, ya que permiten a los individuos estar preparados para enfrentar los desafíos de la actualidad. La UNESCO (2016, p. 26), plantea que "es indispensable incluir la formación matemática dentro de las competencias básicas que toda persona debe adquirir para enfrentar los desafíos de la vida en sociedad, cada vez más compleja". Una realidad con mucha información disponible y con mayor interconexión entre los distintos ámbitos de la actividad y el conocimiento humano, que requiere mayores exigencias sobre la enseñanza de la matemática.

Para la OCDE, el estudiante necesita adquirir la competencia matemática para entender "cuál es la función de las matemáticas en el mundo, que hace referencia a la capacidad del alumno para razonar, analizar y comunicar operaciones matemáticas… y utilizar el razonamiento matemático en la solución de problemas de la vida cotidiana" (OCDE s. f. p. 12).

En consecuencia, la Secretaría de Educación Pública (2017), establece que las matemáticas son:

> Un conjunto de conceptos, métodos y técnicas mediante los cuales es posible analizar fenómenos y situaciones en contextos diversos; interpretar y procesar información, tanto cuantitativa como cualitativa; identificar patrones y regularidades, así como plantear y resolver problemas. Las matemáticas proporcionan un lenguaje preciso y conciso para modelar, analizar y comunicar observaciones que se realizan en distintos campos (p. 299).

Sin embargo, han surgido otras conceptualizaciones sobre las matemáticas aquellas que las conciben como la ciencia de los patrones (Stein, 1998) que están más acordes con el enfoque didáctico que sustenta las actividades diseñadas en esta investigación.

2.2. Dimensión epistemológica.

El enfoque epistemológico que se retoma para este trabajo está basado en el constructivismo con el objetivo de lograr aprendizaje significativo, que se retoma del plan y programas de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017). Para Ausbel, Novak y Hanesian la esencia del proceso de aprendizaje significativo reside en que:

> Ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario y sustancial con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria queremos decir que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición. …De esta forma, el surgimiento de nuevos significados en el alumno refleja la consumación de un proceso de aprendizaje significativo (Ausubel, Novak y Hanesian, 2006, p. 48).

Lo anterior está vinculado con algunas investigaciones sobre el aprendizaje de las matemáticas, en las cuales se establece el papel fundamental que tiene la comprensión conceptual en el conocimiento y la actividad de personas competentes. Como lo menciona el NCTM (2000): aprender con entendimiento favorece el aprendizaje posterior, porque las matemáticas tienen más sentido y es más sencillo de recordar y aplicar cuando los estudiantes conectan nuevos conocimientos con conocimientos previos. Esto les permitirá enfrentarse a nuevos problemas en el futuro, ser autodidactas y se sentirán seguros respecto a sus habilidades para abordar problemas difíciles, serán flexibles en la exploración de ideas matemáticas y en cuanto a intentar soluciones alternativas; además, estarán dispuestos a perseverar, logrando así los objetivos de aprendizaje planteados por la Secretaría de Educación Pública.

Respecto al constructivismo, esta corriente tuvo su origen en la teoría psicológica de Piaget, retomada por Vygotski cuya premisa se basa en un marco epistemológico relativista, donde el conocimiento se entiende como una construcción subjetiva, dependiente del observador, pues considera que toda función mental surge en las interacciones sociales para luego interiorizarse al plano psicológico individual (Coll, 1996). Es decir, “para conocer la ontogénesis de las funciones cognoscitivas hay que observar al niño en interacción con los más expertos de su cultura y estudiar cómo se va apropiando de estas interacciones y las va internalizando” Ursini (1996 p. 44).

Por lo tanto, esta perspectiva propone entender el desarrollo cognitivo en función del contexto histórico y sociocultural en el cual se desenvuelve el individuo, el cual irá adquiriendo mayor complejidad durante el crecimiento (familia nuclear, familia extensa, escuela y pares, sociedad en general). En estos ámbitos se apropia de las herramientas mediadoras otorgadas por la cultura, ocupando un lugar central aquellos instrumentos de carácter semiótico. Precisamente, la progresiva participación y asimilación de los artefactos provistos por la cultura es lo que permite un mayor control consciente de la actividad y potencia los procesos cognitivos de manera de operar con formas cada vez más abstractas y potentes (Martí, 2000).

En relación a las estrategias curriculares basadas en el constructivismo, Hatano (1993) enumera un conjunto de características comunes: a) Posición activa del alumno, b) el supuesto de que los alumnos casi siempre buscan y a menudo logran comprender, c) una construcción es genuina sólo si está motivada por la búsqueda de sentido o por el interés de ampliar la comprensión, d) la construcción de los alumnos se ve facilitada por interacciones tanto horizontales (entre compañeros), como verticales (profesor-alumnos), e) el acceso a una multiplicidad de fuentes de información favorece la construcción, y f) la existencia de puntos de llegada no conocidos de antemano en los procesos constructivos.

Sin embargo, convendría reservar el termino constructivismo para referirse a un determinado enfoque o paradigma, que es compartido por distintas teorías psicológicas, para explicar el aprendizaje escolar, entendido como un complejo proceso de intercambios funcionales que se establecen entre tres elementos: el alumno que aprende, el contenido que es objeto de aprendizaje y el profesor que ayuda al alumno a construir significados y a atribuir sentido a lo que aprende (Coll, 1996).

2.3. Dimensión didáctica.

2.3.1. Enfoque de resolución de problemas.

Desde la resolución de problemas se reconoce que en el aprendizaje de las matemáticas es fundamental que el estudiante aprenda a formular preguntas y que reflexione abiertamente sobre los conceptos, problemas y estrategias de resolución. Aceptando que la actividad de aprender no se reduce a un conjunto de reglas que pueden aplicarse en la resolución de problemas, por el contrario, es una conceptualización dinámica de las matemáticas, en la cual es importante identificar elementos que ayuden a desarrollar y promover una disposición matemática en los aprendices (Santos Trigo, 2014).

La Secretaría de Educación Pública, sostiene que la resolución de problemas privilegia la formación ciudadana y el fortalecimiento de la lectura y la escritura al fomentar la comunicación, el trabajo en equipo, la búsqueda de acuerdos y argumentos para mostrar que un procedimiento o resultado es correcto o incorrecto, así como la disposición de escuchar y respetar las ideas de los demás y de modificar las propias. Este modelo es considerado un medio y un fin del proceso de aprendizaje. En la primera situación, se pretende que los estudiantes usen de manera flexible conceptos, técnicas, métodos o contenidos en general, aprendidos previamente; mientras que, en la segunda, desarrollen procedimientos de resolución que no necesariamente les han sido enseñados con anterioridad (SEP, 2017).

El término problema se vincula a contextos rutinarios o no rutinarios, en los que el alumno busca la solución o soluciones, pero además incluye tener que aprender algún concepto matemático. En consecuencia, el estudiante debe discutir alrededor del entendimiento de la situación o problema, usar representaciones, estrategias cognitivas y metacognitivas, y usar contraejemplos ya sea para avanzar, resolver o entender esa situación o problema. Con la finalidad de que además de usar y desarrollar habilidades para acceder a diversos recursos y los utilice, aprenda estrategias que le permitan trabajar eficientemente con tales recursos en diversas situaciones (Santos Trigo, 2014).

Para Schoenfeld (1985) la habilidad para resolver problemas “no es simplemente producto del conocimiento que tienen los estudiantes; también es derivado de sus experiencias con las matemáticas. Es decir, sus creencias sobre las matemáticas establecen el contexto psicológico dentro del cual hacen las matemáticas (p. 14)”, lo cual implica lidiar con nuevos problemas matemáticos de manera ingeniosa, flexible y eficiente. Propone un marco para explicar el comportamiento de los estudiantes en actividades de resolución de problemas a partir de cuatro categorías:

a) El empleo de recursos básicos o hechos y procedimientos específicos. Schoenfeld (1985) inicia diciendo que identifica cinco tipos de conocimientos que influyen en el uso de los recursos:

1. **Conocimiento informal e intuitivo** relacionado con las ideas que el estudiante tiene acerca del uso de conceptos el mundo real. Por ejemplo, la forma en que se usa la idea de límite en el contexto diario se ha encontrado que influye en la forma que los estudiantes interpretan este concepto desde el punto de vista matemático.
   En ocasiones este conocimiento informal impide entender el concepto matemático.
2. **Hechos y definiciones** para plantear o seleccionar algún camino de solución. Esa información puede tomar varias formas en el proceso mostrado por el estudiante al resolver el problema, ya que puede ser desconocida por el estudiante y por tanto carece de validez para él; puede sospechar que el hecho es válido, pero no está seguro y no encuentra la forma de probarlo; sospecha que la información es verdadera y busca alguna prueba geométrica; o piensa que la información es verdadera y la utiliza en la resolución del problema. Es decir, un repertorio de recursos incluye también la forma en que el estudiante recuerda este conocimiento y tiene acceso a él para resolver el problema.
3. **Procedimientos rutinarios.** Se ubican en un nivel táctico, separados de un nivel estratégico (incluyen decisiones acerca del plan de solución y la evolución de este durante el proceso de solución), el monitoreo o control se vuelven importantes sólo cuando hay un error en la implantación de estos procedimientos.
4. **Conocimiento acerca del discurso del dominio.** La percepción que el estudiante tenga acerca de las reglas al resolver un problema, determina la dirección y los recursos que utiliza en el proceso de solución. Se el estudiante piensa que no existe conexión entre las construcciones geométricas y las demostraciones, tratará de resolver estos problemas por separado.
5. **Errores consistentes o recursos débiles,** podrían ser el resultado de un mal aprendizaje.

b) El uso de estrategias cognitivas (conjunto de heurísticas). Estrategias generales que podrían ser útiles para avanzar en la resolución de un problema: analogías, elementos auxiliares en el problema o problemas auxiliares, descomponer o combinar algunos elementos del problema, dibujar figuras, variar el problema, o trabajar con casos específicos.

Es importante que el alumno participe en experiencias relacionadas con el cuándo y cómo utilizarlas. Una estrategia heurística general origina otras subestrategias, por lo tanto, las actividades de aprendizaje deben permitir:

-Identificar el uso de una estrategia en particular y seleccionar la versión que se ajuste al problema.

-Discutir la estrategia con suficiente detalle de manera descriptiva, generando o utilizando problemas relacionados más simples.

-Dar a los estudiantes un grado apropiado de entrenamiento para el uso de las estrategias.

c) El empleo de estrategias de monitoreo o autoevaluación (metacognitivo); el estar consciente de las propias capacidades y limitaciones; así como la consecuente regulación y orquestación de las decisiones y procesos utilizados en la resolución de un problema. Las acciones que involucran un control incluyen:

-Tener claridad acerca de lo que trata el problema antes de iniciar el proceso de resolución (fase de entendimiento)

-Considerar varias formas de resolver el problema y seleccionar un método particular a partir de una evaluación en relación con su utilidad (fase de diseño)

-Monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar algún camino que no esté produciendo resultados (fase de implantación)

-Revisar el proceso de resolución y evaluar la respuesta obtenida (visión retrospectiva)

Algunas actividades que pueden ayudar a desarrollar sus habilidades metacognitivas son:

-Discutir sobre videos que muestren alumnos resolviendo problemas para que el grupo analice y critique las diversas acciones que se muestran en los procesos de resolución.

-Que el instructor sea modelo del comportamiento metacognitivo, es importante que el estudiante conozca todas las dificultades que se presentan al intentar resolver un problema.

–Discusión de los problemas con todo el grupo.

-Resolución de problemas en grupos pequeños de estudiantes.

d) Las creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas y la resolución de problemas. Las creencias establecen el contexto dentro del cual funcionan los recursos, las estrategias heurísticas y el control. Estas creencias provienen del tipo de instrucción recibida en clase.

Respecto a la función del profesor dentro del proceso de instrucción. Varios autores como Schoenfeld (1985), Santos Trigo (2014) y Ursini et al. (2016), le dan un papel preponderante, ya que será quien guíe el proceso de aprendizaje de los alumnos.

En relación con los métodos heurísticos algunos elementos que pueden servir para guiar la discusión durante la resolución de problemas o el aprendizaje de algún concepto, incluyen (Santos Trigo, 2014):

El análisis: a) Dibujar un diagrama siempre que sea posible, b) Examinar casos especiales: como seleccionar valores particulares para ejemplificar el problema y encontrarle sentido; examinar casos límite para explorar el rango de posibilidades, y c) Tratar de simplificar el problema por medio del uso de simetría, así como argumentos en los que no haya pérdida de generalidad.

La exploración: a) Considerar problemas equivalentes: remplazar algunas condiciones por otras equivalentes; recombinar los problemas los elementos del problema de diferentes formas, introducir elementos auxiliares; y reformular el problema usando algún cambio de perspectiva o notación, consideraciones que involucren el método de contradicción, y el hecho de que el problema está resuelto y con base en esto determinar sus propiedades. b) Considerar problemas modificados ligeramente: seleccionar subtemas (considerando parcialmente las condiciones), descomponer el dominio del problema y trabajarlo caso por caso. c) Considerar problemas sustancialmente modificados: diseñar un problema semejante con menos variables; fijar todas las variables, excepto alguna y analizar qué pasa; tratar cualquier problema relacionado que tenga semejanza con la forma, los datos o las conclusiones.

Verificar que la solución cumpla con las siguientes pruebas: ¿usa los datos pertinentes?, ¿concuerda con las predicciones o estimaciones originales?, ¿resiste pruebas de simetría, dimensiones o escalas?, ¿puede obtenerse de otro modo diferente?, ¿puede ser reforzada con otros casos especiales?, ¿puede reducirse a resultados conocidos?, ¿puede ser generada a partir de algo que tú sabes?

Por tanto, el instructor ayuda a los estudiantes a que acepten los retos de resolver problemas, construye una atmósfera basada en la confianza para atacar problemas no rutinarios y no sentirse mal al enfrentarse a alguna dificultad durante el proceso de solución, permitir y motivar que los estudiantes seleccionen e implanten sus propios caminos de solución y proporcionarles ayuda cuando ésta sea necesaria. Además, será quien cree las condiciones para que surjan zonas amplias de desarrollo próximo entendidas como:

> La distancia entre el nivel de desarrollo real, determinado por la capacidad del niño para resolver un problema de manera independiente, y el nivel de desarrollo potencial, determinado por su capacidad para resolver un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más capaces (Ursini et al 2016, p. 41).

Aunado a lo anterior, el instructor busca que el estudiante sea autónomo en el aprendizaje de las matemáticas, que utilice naturalmente estrategias para leer, conceptualizar y escribir argumentos matemáticos. De este modo, el valor de las estrategias, habilidades y procesos radica en que favorecen en el estudiante una forma flexible e independiente de pensar (Santos Trigo, 2014).

Es deseable como lo plantea Santos Trigo (2014) que, dentro de las discusiones en grupos, se permita a los estudiantes propongan conjeturas, usen ejemplos o contraejemplos, o discutan diversos caminos de solución. Algunas preguntas que pueden guiar la discusión son: ¿Tienes alguna dificultad para entender alguna parte del problema?, ¿Has resuelto algún problema similar a éste antes? Describe ese problema, ¿Qué estrategias podrían ayudar a resolver el problema? Después de resolver el problema: ¿Tu respuesta tiene sentido con respecto a las condiciones del problema? ¿Qué estrategias utilizaste? Explica su uso, ¿Podrías haber resuelto el problema en otra forma? Explica cómo lo harías sin necesidad de que lo resuelvas otra vez.

Para ello, se requiere un ambiente en el aula que favorezca la participación activa de los estudiantes en tareas y experiencias diseñadas para profundizar, conectar y reorganizar sus conocimientos, promoviendo la interacción social. De esta forma pueden proponer ideas y conjeturas matemáticas, evaluar su propio pensamiento y el de los demás, y desarrollar habilidades de razonamiento matemático (NCTM, 2000). Al llevar a cabo lo anterior, los estudiantes tendrán un cambio de actitud hacia la asignatura, pues se abre el espacio para que defiendan sus ideas y aprendan a escuchar a los demás; relacionen lo que saben con nuevos conocimientos y, de manera general, le encuentren sentido a la disciplina, es decir, disfruten haciendo matemáticas.

En un escenario de instrucción basado en la resolución de problemas es importante que el error sea visto como una oportunidad para aprender. Los estudiantes deben ver la dificultad de las tareas, que se les piden realizar, como un desafío que vale la pena, en lugar de una excusa para rendirse. Incluso cuando una tarea matemática es difícil, puede ser interesante y gratificante (SEP, 2017).

2.3.2. Uso de tecnología digital en el aprendizaje.

Esta propuesta de trabajo se complementa con el uso de tecnologías digitales, pues en el currículum de educación básica se reconoce la importancia de que los estudiantes utilicen distintas herramientas computacionales para el estudio de la disciplina (SEP, 2017). Las tecnologías digitales son importantes porque con su uso durante la resolución de problemas permite a los estudiantes razonar sobre aspectos generales como los cambios de parámetros, en la modelación y resolución de problemas complejos, que sin el uso de estas herramientas podrían resultar inaccesibles.

En particular, Santos Trigo (2014) considera que las representaciones que se realizan con la ayuda de software de geometría dinámica, en este caso Geogebra5 (Saidon, 2013 y Gómez, 2017), resultan importantes en la búsqueda e identificación de relaciones, ya que “los estudiantes pueden construir su propio repertorio de resultados matemáticos a partir de analizar el comportamiento de los elementos de la configuración (búsqueda de invariantes) al mover componentes dentro de la misma figura o construcción” (p. 133).

También permiten establecer conexiones entre los temas de álgebra, geometría y análisis de datos cuando usan ideas de un área de las matemáticas para comprender mejor otra área de las matemáticas. Además, los estudiantes de secundaria pueden trabajar con sistemas de álgebra computacional que realizan de manera eficiente la mayor parte de la manipulación simbólica; por lo que el estudio del álgebra no tiene por qué limitarse a situaciones o tareas en las que la manipulación simbólica es relativamente sencilla (NCTM, 2000).

Además, el subsistema de telesecundaria cuenta con instrumentos de enseñanza-aprendizaje variados, dentro de los cuales se considera el uso de tecnologías digitales, con el fin de estimular la comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los alumnos y fomentar el razonamiento matemático en la resolución de problemas (Ursini et al, 2016). Con base en las ideas expresadas, resulta relevante revisar si las actividades sugeridas en los libros de texto u otros materiales educativos permiten examinar cualidades matemáticas asociadas al proceso de solución, usar diversas representaciones, plantear conjeturas, utilizar argumentos y comunicar resultados (Barrera y Santos, 2002).

Respecto a las hojas de cálculo, Ursini et al (2016), nos dicen que:

> "Son particularmente útiles como herramientas para comprender el concepto de relación funcional entre variables, ya que su uso permite a los estudiantes familiarizarse con la lectura y el llenado de tablas para resolver problemas específicos, así como reconocer la correspondencia entre las variables, la influencia del cambio en una de ellas sobre la otra y su mutua variación". (p. 102)

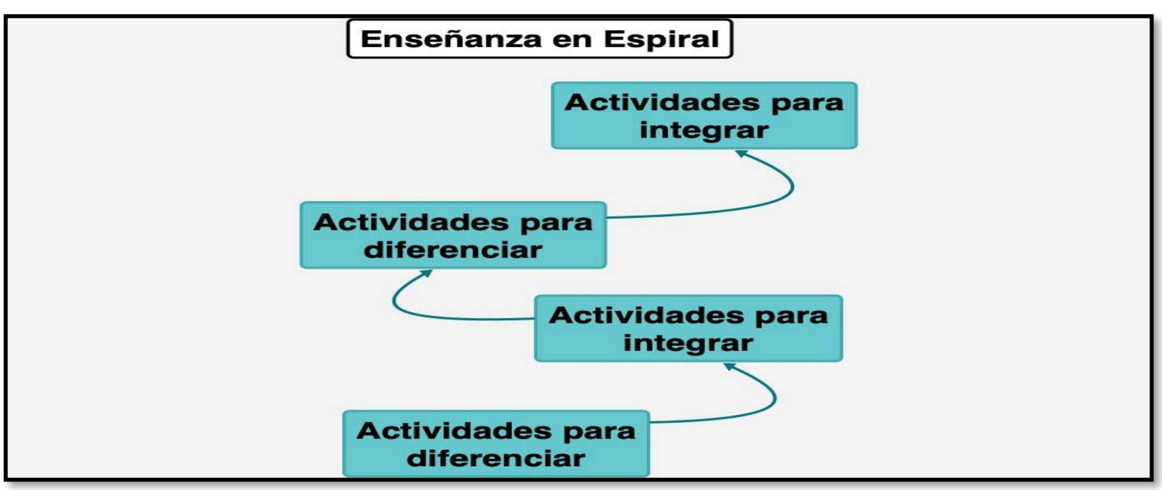
2.3.3. Modelo didáctico de los tres usos de la variable.

El inicio del desarrollo del pensamiento algebraico se caracteriza por la introducción de los símbolos literales para representar números o cantidades generales. En secundaria, el uso de las letras en el ámbito matemático surge, con mayor frecuencia, en contextos no geométricos y se espera que los estudiantes aprendan a interpretarlas como incógnitas o como números indeterminados, dependiendo de la expresión o situación en la que aparecen. Para ello los investigadores como Ursini et al. (2016), proponen que las actividades que realicen los estudiantes tengan un sentido integrador, que permita al adolescente resolver problemas y ejercicios que involucren los tres usos de la variable: como incógnita, como número general y como parte de una relación funcional.

Este modelo denominado tres usos de la variable, muestra de manera explícita, los aspectos que caracterizan a cada uno de los usos de la variable con los que se va a trabajar, propone una enseñanza en espiral que acerque gradualmente a los alumnos al trabajo con los distintos usos de la variable en situaciones cada vez más complejas, para abordar diversas temáticas del álgebra. Está integrado por dos fases fundamentales: en la primera fase se trabaja con actividades que involucran uno de los tres usos de la variable y en la segunda fase se trabajan actividades cuyo desarrollo requiere de los tres usos de la variable. Las actividades de ambas fases pueden partir de un mismo contexto o situación problemática, o de contextos distintos.

El propósito de la primera fase es que los estudiantes tengan un acercamiento a los aspectos que caracterizan a cada uno de los tres usos de la variable, mencionados en este modelo. Aunque puede ser complicado que las actividades involucren sólo un uso de la variable, se puede hacer énfasis en uno de ellos y sus aspectos, a través de preguntas pertinentes. En la segunda fase, se busca que los alumnos desarrollen la capacidad de pasar entre los distintos usos de la variable de manera flexible e integrada. En el Anexo 2 se desarrolla el ejemplo de una actividad de este modelo.

A continuación, se presenta el esquema sobre la enseñanza en espiral para pasar de una fase inicial a una fase integradora, que se propone en el modelo de los tres usos de la variable:



Esquema 2. Enseñanza en espiral del modelo didáctico 3UV (Ursini et al, 2016, p. 39)

Aunado a lo anterior, el examen del Programa Internacional PISA, constituye una de las herramientas que guía el aprendizaje en secundaria. Evalúa tres tipos de procesos con diferentes grados de complejidad. El primero se llama de *reproducción*, en el que trabaja con operaciones comunes, cálculos simples y problemas basados en el contexto y la rutina cotidiana. Los procesos de *conexión* involucran ideas y procedimientos matemáticos para la solución de problemas que ya no pueden definirse como ordinarios pero que aún incluyen escenarios familiares; además involucran la elaboración de modelos para la solución de problemas. El tercer tipo de procesos, de *reflexión*, soluciona problemas complejos y desarrolla una aproximación matemática original. Para ello los estudiantes deben matematizar[1] y conceptualizar las situaciones. Además, es capaz de conceptualizar, generalizar y utilizar información basada en sus investigaciones y en la elaboración de modelos para resolver problemas complejos. Puede relacionar diferentes fuentes de información. Demuestra pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Aplica conocimientos y destrezas matemáticas para enfrentar situaciones novedosas. Formula y comunica con precisión sus acciones y reflexiones (OCDE, s. f.).

Por su parte, la Secretaría de Educación Pública tiene los siguientes propósitos educativos para el nivel de secundaria:

> (a) Perfeccionar las técnicas para calcular valores faltantes en problemas de proporcionalidad y cálculo de porcentajes. (b) Resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado… (En primero de secundaria sólo se abordan ecuaciones lineales)… (c) Modelar situaciones de variación lineal, cuadrática y de proporcionalidad inversa; y definir patrones mediante expresiones algebraicas. (d) Elegir la forma de organización y representación —tabular, algebraica o gráfica— más adecuada para comunicar información matemática. (P.p. 299-300)

[1] El proceso de matematización "está compuesto por dos fases. En primer lugar, se ha de proceder a traducir los problemas desde el mundo real al matemático (matematización horizontal); y en segundo lugar, una vez traducido el problema, se procede a utilizar conceptos y destrezas matemáticas para su resolución (matematización vertical)" (Entrena, 2014 p. 14)

Cada propósito se trabaja desde primero de secundaria variando la complejidad de los problemas, el contexto en que se plantean y la profundidad con que se abordan los contenidos de cada tema.

Dentro del eje temático: número, álgebra y variación de la estructura curricular para secundaria (SEP, 2017), se contempla incorporar la relación entre variables, en particular al de variación lineal y variación inversamente proporcional. Se suma a las herramientas aritméticas, las herramientas algebraicas, por un lado, para generalizar y expresar simbólicamente las propiedades de los números y sus operaciones; y por otro, para representar situaciones y resolver problemas que requieren de la comprensión de conceptos y dominio de técnicas y métodos propios del álgebra. En este nivel escolar, se busca que los estudiantes desarrollen pensamiento algebraico a través del uso flexible de sus elementos fundamentales, a saber, números generales, incógnitas y variables en expresiones algebraicas, ecuaciones y situaciones de variación; en estas últimas, tanto en su expresión simbólica como en su representación por medio de tablas y gráficas cartesianas.

En términos generales, en estos contextos se concibe a la aritmética y al álgebra como herramientas para modelar situaciones problemáticas, y para resolver problemas en los que hay que reconocer variables, simbolizarlas y manipularlas.

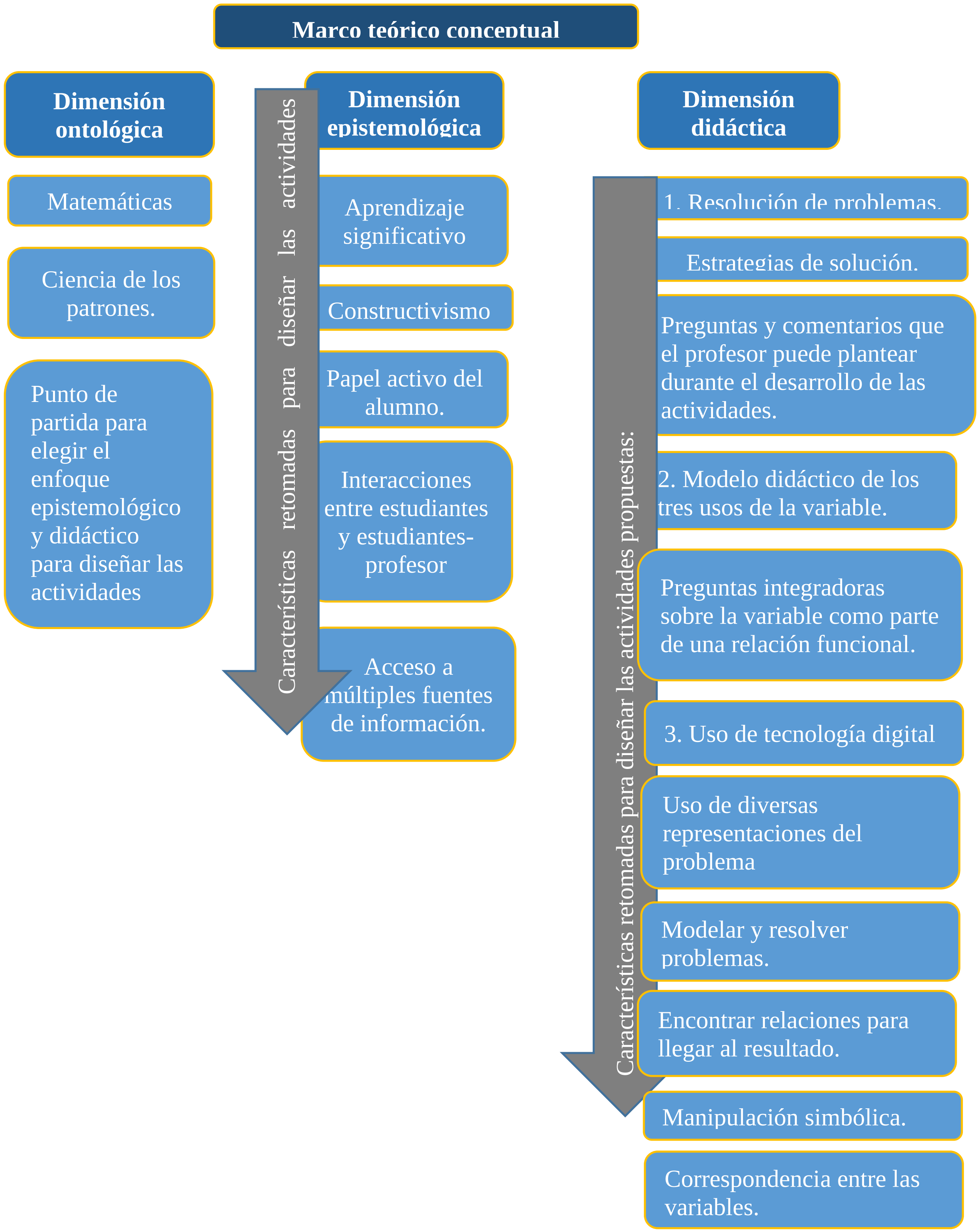
A los elementos anteriores, se anexa el libro de texto, el cual es la herramienta básica usada tanto por los profesores como por los alumnos durante las clases, como lo reportan Stacey y Vincent (2009, p. 272): “al menos el 90% de las lecciones en los ocho países utilizaron un libro de texto o una hoja de trabajo, por lo que los libros de texto son un recurso importante con una fuerte influencia en la práctica”. En telesecundaria, el libro es indispensable, pues los profesores no siempre tienen una formación profesional relacionada con las matemáticas, así que es natural suponer que las actividades del libro se plantean de manera textual, convirtiéndose en la traducción de las abstracciones de la política curricular en operaciones que los maestros y los estudiantes pueden llevar a cabo (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt y Houang, 2002)

Las actividades deberían estar planteadas con base en la metodología de resolución de problemas y uso de la tecnología, pues como se menciona en párrafos anteriores, así lo establece la Secretaría de Educación Pública, con el objetivo de favorecer el razonamiento matemático en los alumnos. Es por esto que se analizaron las secuencias relacionadas con el tema de variación para verificar qué tanto se apegan a esa metodología y en caso de que sea necesario, rediseñarlas.

El análisis se llevó a cabo considerando las categorías propuestas por Rondero, Reyes y Campos (2015), con algunas adecuaciones: i) Enfoque epistemológico, ii) contexto disciplinar y iii) uso de tecnología digital.

El enfoque epistemológico es constructivista, lo cual se ve reflejado en el contexto disciplinar, el cual comprende las etapas propuestas en la metodología de resolución de problemas y el modelo didáctico de los tres usos de la variable, con la finalidad de permitir al estudiante interpretarla, simbolizarla y manipularla. (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2016).

A continuación, se presenta la relación entre las dimensiones de este marco de investigación y la propuesta de actividades:



Esquema 3. Estructura del marco teórico-conceptual

CAPÍTULO 3

Metodología de investigación

En el método de encarar el problema reside el principal obstáculo a una respuesta satisfactoria.

EDWARD KASNER Y JAMES NEWMAN
Matemáticas e imaginación

En este capítulo se especifican las características de la investigación, en lo que respecta a la propuesta metodológica, las características de participantes, del escenario en que se llevó a cabo la recolección de datos y las actividades realizadas; así mismo, se proponen los instrumentos y el procedimiento de recolección y análisis de datos.

Considerando que este trabajo se realiza en un escenario natural, manteniendo una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de acciones de los participantes a través de sus producciones escritas, con la finalidad de ampliar la información existente en relación con el tema de estudio, el enfoque metodológico que se utilizó es de corte cualitativo, ya que permite describir, clasificar, analizar e interpretar fenómenos, así como los procesos que los originan o modifican, en contextos locales. Por lo tanto, la recolección de datos estuvo influida por las experiencias y las prioridades de los participantes en la investigación, más que por la aplicación de un instrumento de medición estandarizado, estructurado y predeterminado. En consecuencia, los significados que fueron extraídos de datos, no deben analizarse estadísticamente porque no se reducen a números (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

Se fundamenta en un proceso inductivo (explorar y describir, y luego generar perspectivas teóricas); es decir, que las etapas no son excluyentes, sino que la información que arrojan se organiza y analiza en forma continua, con el fin de garantizar la representatividad y validez de los datos y orientar, a su vez, la búsqueda de nuevas evidencias que profundicen la comprensión del problema, que lo aclaren o lo caractericen con mayor precisión (Castro, 2010).

El siguiente diagrama muestra los ciclos y procesos de la investigación cualitativa:

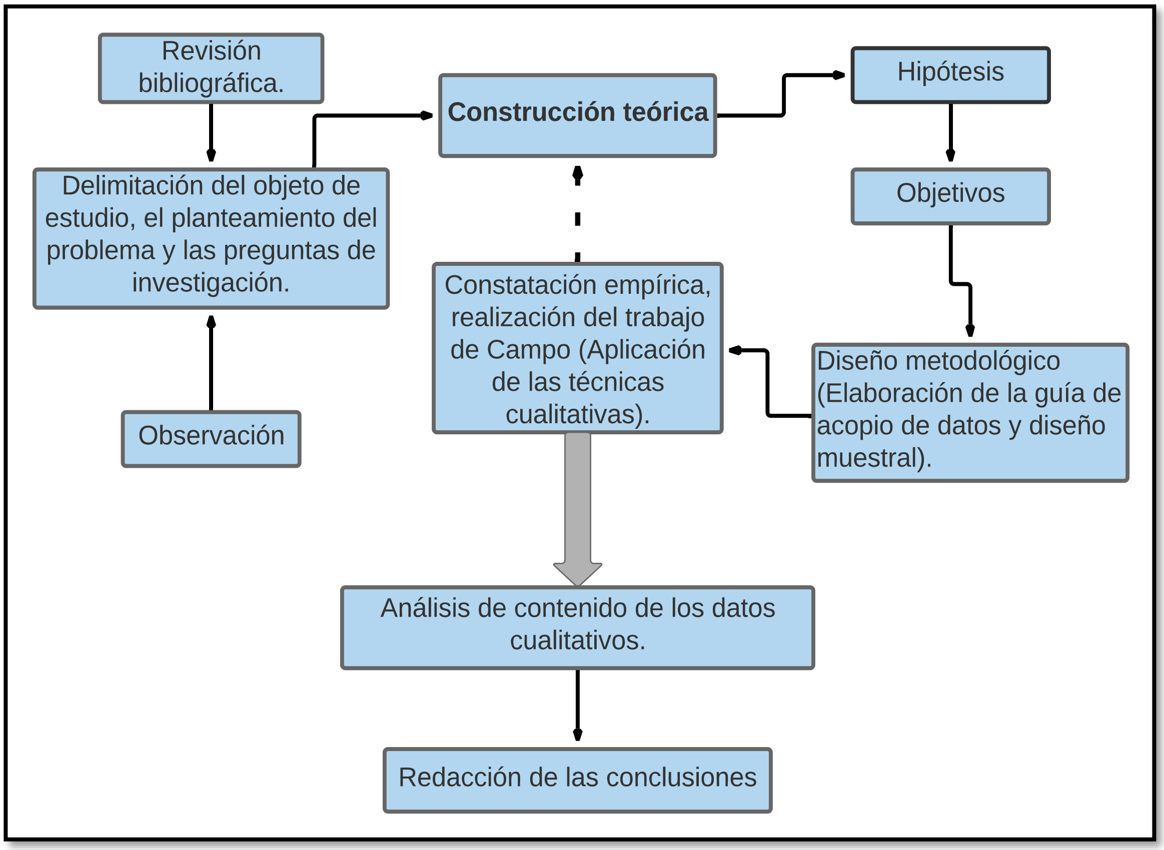


Figura 1. Diagrama que representa el proceso de la investigación cualitativa (Izacara, 2014, p 33)

Al buscar información en relación con el análisis de las actividades sugeridas en libros de texto, con base en la metodología de resolución de problemas y uso de la tecnología sobre el tema de variable; se decidió que este estudio sería exploratorio, con la intención de familiarizarse con el fenómeno que se estudia y obtener información sobre la posibilidad de llevar a cabo una investigación más completa, identificar conceptos o variables promisorias, establecer prioridades para investigaciones futuras o sugerir afirmaciones y postulados (Hernández et al., 2006).

Considerando que se examina un caso en detalle a lo largo del tiempo, empleando múltiples fuentes de datos encontradas en el entorno, que proporciona una descripción detallada, un análisis y las interpretaciones sobre el problema de investigación (McMillan y Schumacher, 2005); se identifica este trabajo como un estudio de caso.

Se desarrollaron dos etapas investigativas. En la primera etapa, se analizaron las actividades de la secuencia 20, del libro de texto de primer grado de telesecundaria, para identificar si cumplía con las características epistemológicas y didácticas planteadas en el modelo educativo de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017). Con base en este análisis, se diseñaron las actividades didácticas para ser implementadas por el investigador, con seis alumnos de primer grado de telesecundaria, utilizando únicamente las hojas de trabajo. Se analizó esta primera aplicación. En la segunda etapa, se hicieron modificaciones con base en las observaciones hechas en la primera etapa, se incorporaron actividades para desarrollar en Geogebra5, se elaboró un guion para el docente y la propuesta didáctica fue aplicada por un profesor de primer grado de telesecundaria al grupo que tenía a su cargo.

3.1. Participantes en la investigación.

En la primera etapa, los sujetos de estudio fueron seis alumnos de primer grado de telesecundaria, con diferentes niveles de aprovechamiento escolar (bajo, intermedio y alto). Ubicada en una zona semiurbana, del turno matutino, la cual presenta características comunes a las de un entorno social más amplio. La propuesta didáctica, la puso en práctica la responsable de este estudio.

Ya que se incorporaron las modificaciones a las actividades propuestas, identificadas en la primera etapa. Se eligió otra telesecundaria semiurbana, del turno matutino, pero con los recursos tecnológicos adecuados, pues para esta segunda etapa, se agregaron a la propuesta didáctica, actividades para desarrollar en Geogebra5.

Como se elaboró una guía didáctica para el docente, también fue necesario pedir la colaboración de un profesor que impartiera clases en primer grado de telesecundaria, interesado en aplicar la versión modificada al grupo del cual era titular.

El grupo de estudiantes estuvo integrado por 13 alumnos, de los cuales se seleccionó el trabajo de 6 participantes, que hicieron aportaciones orales, de manera constante en la clase y la información de sus hojas de trabajo estaba más detallada. Se buscó que tuvieran diferentes niveles de aprovechamiento escolar: dos con un nivel bajo, dos con nivel intermedio y dos con nivel alto, para tener una visión más amplia al realizar el análisis de la propuesta didáctica modificada.

Se comentó a los alumnos que estas actividades formaban parte de un estudio investigativo después de aplicar las actividades, con la intención de reducir al mínimo, las alteraciones a la realidad del aula. Además, los participantes seleccionados, estuvieron trabajando con todo el grupo en un contexto escolar apegado a la cotidianeidad. Pudiendo trabajar de manera consistente durante varias clases.

3.2. Instrumentos de recolección de datos.

Para el periodo recopilación de datos, se tomaron en cuenta las fases de la investigación propuestas por McMillan y Schumacher (2005), que inician con la planeación, la recopilación de datos y la finalización.

El método utilizado fue la observación, por considerarlo el más apropiado, por ser una manera sistemática y selectiva de ver y escuchar una interacción o fenómeno a medida que se lleva a cabo. También es apropiada en situaciones donde la información no puede obtenerse mediante preguntas (Kumar, 2011). Específicamente, la observación no participante y de campo (McMillan y Schumacher, 2005). Mediante grabaciones, archivos electrónicos, registros escritos realizados por los participantes en hojas de trabajo y notas realizadas por la investigadora.

Grabaciones. A partir de este instrumento se obtuvo información del trabajo de los participantes, así como de los diálogos que se generaron durante la aplicación de la actividad, para recuperar los procesos resolutivos planteados. Se obtuvieron seis grabaciones en los que se da cuenta de la actividad de los participantes. Es importante mencionar que no en todas las clases hubo una etapa de exposición, debido a la forma de trabajo del profesor y al tiempo que se empleó en la realización de las actividades. Todas las grabaciones se transcribieron.

Archivos electrónicos. Permitieron recolectar el trabajo de los participantes y sirvieron en la reconstrucción del proceso seguido por los estudiantes para resolver las actividades; sin embargo, durante el desarrollo de las clases, los alumnos borraron y agregaron elementos, siguiendo las indicaciones del profesor o de sus compañeros, por lo que en este caso se cuenta únicamente con información parcial.

Registros escritos realizados por los participantes en hojas de trabajo. Son las anotaciones, realizadas en papel, de los participantes, a partir de las cuales se obtuvo información sobre algunos cálculos numéricos o algebraicos, observaciones de las diferentes representaciones utilizadas, etcétera; relacionados con los procedimientos, operaciones y construcciones realizadas con las herramientas tecnológicas. Sin embargo, los alumnos hicieron modificaciones basadas en los comentarios del profesor, de lo cual se tienen algunos registros.

Notas realizadas por la investigadora. Son notas elaboradas durante todas las sesiones de trabajo, en las cuales se señalaban los acontecimientos relevantes con relación a la manera en que los participantes usaron las herramientas tecnológicas, los procesos de solución y los resultados que plantearon. Este es un instrumento que permite triangular la información obtenida de las grabaciones.

3.3. Actividades.

Los contenidos de matemáticas para telesecundaria, están organizados en secuencias integradas por, alrededor de 5 sesiones de 50 minutos cada una. Las secuencias tienen aprendizajes esperados, que se pretenden lograr al final de las mismas.

La secuencia didáctica, propuesta en este estudio investigativo, tiene los mismos objetivos de aprendizaje que la Secretaría de Educación Pública establece para la secuencia 20, denominada “variación proporcional 1”, por lo que no se desvía de los contenidos programados por las autoridades educativas para la asignatura.

Está basada en la metodología didáctica de resolución de problemas (Schoenfeld, 1985 y Santos Trigo, 2014) y el modelo didáctico de los tres usos de la variable, dando prioridad a la variable como parte de una relación funcional (Ursini et al, 2016). Se consideraron los tres componentes didácticos de las secuencias de telesecundaria (SEP, 2018 a), los cuales inician con: la recuperación de conocimientos previos. Seguido de actividades de estudio para lograr la intención didáctica de cada secuencia, conformadas por situaciones problemáticas acordes a la edad y a las características de los alumnos de este grado, que pretenden vinculen lo que ya saben con el análisis de lo que están aprendiendo. Además, buscan favorecer la deducción de nuevas estrategias de solución. Para terminar, se presentan actividades en las que los alumnos concretan lo aprendido durante la secuencia a través de la resolución de problemas, que les permitan la puesta en práctica del conocimiento nuevo y un mejor entendimiento de lo aprendido.

Las situaciones problemáticas, como lo proponen Ursini et al. (2016), están situadas en el contexto de fenómenos de movimiento rectilíneo uniforme e involucran cantidades ligadas por una relación sencilla: de proporcionalidad directa $y=ax$, ya que es el primer acercamiento "formal" a la variable en una relación funcional.

Para la primera etapa, las actividades se trabajaron en una sesión de noventa minutos, el aula donde se realizaron tenía cuatro mesas de laboratorio, un pintarrón y plumones. Los participantes trabajaron desde un inicio en dos equipos de tres integrantes: un alumno de nivel bajo, uno de nivel medio y uno de nivel alto para que la socialización de procedimientos y resultados tenga diversidad. Después de discutir al interior de los equipos las estrategias de solución y los resultados, compararon el trabajo con el otro equipo, complementando o corrigiendo lo realizado. La investigadora sólo aclaró dudas respecto a términos utilizados en las instrucciones o enunciados del problema.

En la segunda etapa, las tareas se implementaron durante seis clases con una duración de noventa minutos cada una. Las sesiones de trabajo se llevaron a cabo en un aula que contaba con una computadora para cada alumno, una para el profesor titular del grupo, la cual se conectaba a un cañón, cuya proyección se hacía en un pintarrón, que se utilizó para mostrar las actividades que el profesor o un par de estudiantes iban realizando. En cada equipo de cómputo estaba instalado Geogebra5 para el desarrollo de las actividades.

Las preguntas que se plantearon estuvieron basadas en el modelo didáctico de los tres usos de la variable (Ursini et al., 2016) y adecuadas al contexto en el que se planteó la situación problemática, a través de las cuales se pretendía que el alumno:

-Reconociera la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). Ejemplo de preguntas: ¿Qué distancia recorre en el minuto cero?, ¿Qué distancia recorre el autobús después de 5 minutos?, ¿y de 10?, ¿y de 15?

-Determinara los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente (¿Qué valores toma la variable *c* cuando *n* vale 0,1, 2, 3, 4,…, n?, ¿Qué tendría que hacerse para saber qué distancia tendrá en un instante dado?, ¿cuánto se le pagará al vender 15 paquetes?)

-Determinara los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente (¿Y para calcular el tiempo *n* que se requiere para que el autobús recorra 30, 35, 40, ..., n?, ¿qué se tiene que hacer para que el vendedor reciba 40, 80, 120, …, n pesos?

-Reconociera la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas), (¿Se observa alguna relación entre el tiempo y la distancia que recorre el autobús?, Si aumenta el tiempo, ¿aumentará la distancia que recorre el autobús?, ¿Cómo se interpretaría la situación si la gráfica fuera una recta horizontal?).

-Determinara los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra (¿Cuánto es lo mínimo y lo máximo en dinero que puede ganar el vendedor?, ¿en qué periodo el autobús recorrerá una distancia entre 25 y 40 km?, ¿Qué cantidad de dinero tendrá el vendedor si vende 5 y 26 paquetes?)

-Simbolizará una relación funcional, con base en el análisis de los datos del problema (¿Y si en vez de recorrer 2 kilómetros por minuto, recorriera 5?, ¿Cómo se representa la cantidad de dinero que ganará Jorge, al vender cualquier cantidad de paquetes?)

Los participantes en un primer momento trabajaron de manera individual con la intención de que ocuparan sus conocimientos previos para intentar resolver los problemas. En esta etapa el profesor aclaró sus dudas.

Después, el profesor los integró en parejas con forme fueron terminando el trabajo individual para que comentaran procedimientos y resultados, detectaran errores y en caso necesario hicieran correcciones. Finalmente exponían el trabajo realizado al grupo, en este momento nuevamente corregían o complementaban sus procedimientos y resultados.

CAPÍTULO 4

Presentación y análisis de resultados

Resolver un problema matemático es como completar un rompecabezas, sólo que no sabes de antemano cómo será la imagen final. Podría ser difícil, podría ser fácil o podría ser imposible de resolver.

EDWARD FRENKEL
Amor y matemáticas.

En este capítulo se describen y analizan los resultados obtenidos en esta investigación. En la primera parte se dan a conocer los resultados del análisis de las actividades propuestas en el libro de texto de primero de telesecundaria, las observaciones obtenidas de la aplicación de la propuesta de actividades al primer grupo de alumnos y los cambios realizados en las hojas de trabajo.

En la segunda parte, se describen y analizan las actividades de aprendizaje basadas en las hojas de trabajo reestructuradas, identificando los recursos heurísticos, las conjeturas formuladas y los argumentos empleados para justificarlas tanto de los alumnos como del profesor. En lo subsecuente (P-1, P-2, P-3, P-4, P-5 y P-6) se referirá a los participantes. Los ítems son las preguntas, actividades y situaciones problemáticas planteadas en las hojas de trabajo.

4.1. Aplicación y análisis de la propuesta de aprendizaje.

En la primera etapa, se revisaron las actividades propuestas en el libro de matemáticas para el alumno de primer grado de secundaria de la secuencia 20: “Variación lineal 1” (ver **Anexo 1**), para ello se elaboró la siguiente tabla en la que se plantean las categorías de análisis identificadas con base en el marco teórico-conceptual.

Categorías de análisis	Secuencia 20, sesión libro de texto de primer grado de telesecundaria.
i) Enfoque epistemológico	
Constructivismo: -Las ideas expresadas simbólicamente son relacionadas con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición.	-Están vinculados con los contenidos de la sesión anterior, y los problemas tratan temas relacionados con el contexto socio-cultural de los alumnos (distancia recorrida de un autobús y ganancias que obtiene un empleado por vender paquetes de una fábrica)
-Posición activa del alumno.	-Las actividades son sólo ejercicios, en los cuales se le pide al alumno observar una representación gráfica en el primer ejercicio y completar una tabla en el segundo; decir por qué cree que el cambio es constante, escribir una la representación algebraica de los ejercicios; para finalmente comparar, explicar y corregir, procedimientos y resultados. No es concluyente este punto.
-Se plantean interacciones tanto horizontales como verticales.	-Se les pide trabajar en equipos de dos integrantes, además de comparar, explicar y corregir, procedimientos y resultados con otros equipos.
-Se favorece el interés de ampliar la comprensión.	-No se observa.
-Exposición a una multiplicidad de fuentes de información.	-No se observa.
-Existencia de puntos de llegada no conocidos de antemano en los procesos constructivos.	-No se observa.

Categorías de análisis	Secuencia 20, sesión libro de texto de primer grado de telesecundaria.
ii) Contexto disciplinar	
a) Etapas para la resolución de problemas:	La sesión está conformada por dos ejercicios; el primero trata sobre un autobús que viaja a velocidad constante, el segundo sobre las comisiones que recibe un vendedor en una fábrica.
-Situaciones en donde sea necesario analizar y evaluar diversas estrategias (diagramas, tablas, ejemplos y contraejemplos, así como ajustes para avanzar a la solución).	-Presentan la información de los problemas en gráficas y tablas; sin embargo, no hay contraejemplos.
-Recursos: Conocimiento informal, hechos y definiciones, procedimientos rutinarios, conocimiento acerca de la disciplina, errores consistentes o recursos débiles.	-Aunque después de algunas preguntas se les pide a los estudiantes que argumenten sus respuestas y que las discutan, primero en binas y después en grupo; no hay preguntas que los guíen para identificar errores consistentes o recursos débiles.
-Métodos heurísticos: Se identifica el uso de una estrategia en particular que se ajusta al problema.	-La estrategia didáctica inicia con la observación de una gráfica para el primer ejercicio y completar los datos de una tabla para el segundo. A partir de estas representaciones se les pide que expliquen por qué la velocidad y las ganancias, respectivamente, se mantuvieron constantes. Después, que identifiquen la representación algebraica que expresa la relación entre las variables de los datos. En el primer problema deben aplicar la expresión para calcular otras distancias. Finalmente, deben escribir tres ejemplos de otras situaciones de variación lineal. Para cerrar la sesión explican sus procedimientos y resultados, corrigen lo que sea necesario. Considero que las actividades no inciden en la construcción de estrategias particulares para este tipo de problemas.
-Estrategias metacognitivas: Discusión de los problemas con todo el grupo. Resolución de problemas en grupos pequeños de estudiantes.	-Durante la sesión los alumnos trabajan en parejas, al final de las actividades se les pide que comparen, discutan sus resultados y en caso necesario hagan correcciones.

Categorías de análisis	Secuencia 20, sesión libro de texto de primer grado de telesecundaria.
-Sistema de creencias: Conceptos ingenuos y conceptos rituales.	-No se encontraron preguntas que ayuden a los estudiantes para detectar sus propios conceptos ingenuos o conceptos rituales.
b) El papel del profesor: -Guía a los estudiantes para que durante la discusión se planteen diferentes caminos de actuación: 1. En el análisis: -Dibujar un diagrama. -Examinar casos especiales: como seleccionar valores particulares y/o examinar casos límite para explorar el rango de posibilidades. -Tratar de simplificar el problema por medio del uso de simetría, así como argumentos en los que no haya pérdida de generalidad. 2. En la exploración: -Considerar problemas equivalentes, recombinar los elementos del problema en diferentes formas, introducir elementos auxiliares; y reformular el problema usando algún cambio de perspectiva o notación, usar el método de contradicción, determinar las propiedades del problema. -Considerar problemas modificados ligeramente: seleccionar subtemas (considerando parcialmente las condiciones), descomponer el dominio del problema y trabajarlo caso por caso. -Considerar problemas sustancialmente modificados: diseñar un problema semejante con menos variables; fijar	-Esta categoría se consideró hasta el análisis del segundo acercamiento, en el cual se incluyó el guion para el profesor.

Categorías de análisis	Secuencia 20, sesión libro de texto de primer grado de telesecundaria.
todas las variables, excepto alguna; tratar cualquier problema relacionado que tenga semejanza con la forma, los datos o las conclusiones. 3. Después de resolver el problema, puede plantear pregunta como: ¿Escribiste la respuesta completa? ¿Tu respuesta tiene sentido con respecto a las condiciones del problema? ¿Qué estrategias utilizaste? Explica su uso. ¿Piensas que tu solución es correcta? Explica. ¿Fue el problema fácil o difícil para ti? Explica. ¿Podrías haber resuelto el problema en otra forma? Explica cómo lo harías sin necesidad de que lo resuelvas otra vez. -Ayuda a los estudiantes a que acepten los retos de resolver problemas, -Construye una atmósfera basada en la confianza y no sentirse mal al enfrentarse a alguna dificultad. -Permite y motiva que los estudiantes seleccionen e implanten sus propios caminos de solución. -Proporciona ayuda cuando ésta sea necesaria. -Crea las condiciones para que surjan zonas de desarrollo próximo. -Busca que el estudiante sea autónomo y flexible en su forma de pensar y por lo tanto en el aprendizaje de las matemáticas -Que utilice naturalmente estrategias para leer, conceptualizar y escribir argumentos matemáticos.	

Categorías de análisis	Secuencia 20, sesión libro de texto de primer grado de telesecundaria.
-Dentro de las discusiones en grupos, permite que los estudiantes propongan conjeturas, usen ejemplos o contraejemplos, o discutan las formas de solución. -Promueve la interacción social, para que defiendan sus ideas y aprendan a escuchar a los demás. -Considera al error como una oportunidad para continuar aprendiendo.	
c) Modelo didáctico de los tres usos de la variable. La variable como parte de una relación funcional: -Presentan esta relación mediante una tabla, una gráfica y una expresión algebraica. -Se refieren a contextos muy diversos (llenado o vaciado de recipientes, movimiento, compra de artículos, geometría, etc.) -F1. Las preguntas verifican que el alumno reconoce la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas). Ejemplo de preguntas: ¿Qué distancia recorre en el minuto cero?, ¿Qué distancia recorre el autobús después de 5 minutos?, ¿y de 10?, ¿y de 15? -F2. Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente (¿Qué valores toma la variable *c* cuando *n* vale 0,1, 2, 3, 4, …, n?, ¿Qué tendría que hacerse para saber qué distancia tendrá en un instante dado?, ¿cuánto se le pagará al vender 15 paquetes?)	 -Se cumple con las tres representaciones. -En esta sesión uno de los problemas trata la relación entre tiempo y distancia; y el otro problema la relación entre paquetes vendidos y las comisiones que gana el vendedor. -Sólo se plantean preguntas de este tipo para el primer problema. -Se plantean las siguientes preguntas: Usen la expresión algebraica que hallaron y contesten. Si t=1, 12, 50 minutos, ¿Cuál es la distancia de d? En el segundo problema, en una tabla, los estudiantes deben escribir los valores faltantes respecto a lo que ganará el empleado al vender cierta cantidad de paquetes.

Categorías de análisis	Secuencia 20, sesión libro de texto de primer grado de telesecundaria.
-F3. Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente (¿Y para calcular el tiempo *n* que se requiere para que el autobús recorra 30, 35, 40, ..., n?, ¿qué se tiene que hacer para que el vendedor reciba 40, 80, 120, …, n pesos?	-No hay preguntas de este tipo.
-F4. Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas), (¿Se observa alguna relación entre el tiempo y la distancia que recorre el autobús?, Si aumenta el tiempo, ¿aumentará la distancia que recorre el autobús?, ¿Cómo se interpretaría la situación si la gráfica fuera una recta horizontal?).	- No hay preguntas de este tipo.
-F5. Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra (¿Cuánto es lo mínimo y lo máximo en dinero que puede ganar el vendedor?, ¿en qué periodo el autobús recorrerá una distancia entre 25 y 40 km?, ¿Qué cantidad de dinero tendrá el vendedor si vende 5 y 26 paquetes?)	- No hay preguntas de este tipo.
-F6. Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos del problema (¿Y si en vez de recorrer 2 kilómetros por minuto, recorriera 5?, ¿Cómo se representa la cantidad de dinero que ganará Jorge, al vender cualquier cantidad de paquetes?)	-Sólo se pide que después de observar la gráfica o escribir los datos faltantes en la tabla escriban una expresión algebraica que represente la relación entre las variables.

Categorías de análisis	Secuencia 20, sesión libro de texto de primer grado de telesecundaria.
iii) Uso de tecnología digital	
Permite que el profesor favorezca que los estudiantes: **a) Tecnología digital:** -Valoren la importancia de plantear preguntas -Utilicen distintos recursos y estrategias que les permitan examinar cualidades matemáticas asociadas al proceso de solución. -Usen diversas representaciones, plantear conjeturas. -Utilicen argumentos y comunicar resultados. -Las actividades están inmersa en múltiples contextos. -Establezcan conexiones entre el quehacer de la disciplina y los contextos en que se presenta. **b) Representaciones dinámicas**: -Razonen sobre temas más generales como los cambios de parámetros, en alguna estructura algebraica. -Puedan modelar y resolver problemas complejos, que hasta ese momento les eran inaccesibles. -Encuentren relaciones, ya que les permiten construir su propio repertorio de resultados matemáticos a partir de analizar el comportamiento de los elementos de la configuración (búsqueda de invariantes) al mover componentes dentro de la misma figura o construcción.	La secuencia planteada en el libro de texto para el tópico de variación lineal, no sugiere ni promueve el uso de herramientas digitales ya sea como elemento de justificación de los resultados o como elemento para extender el problema.

Categorías de análisis	Secuencia 20, sesión libro de texto de primer grado de telesecundaria.
-Establezcan relaciones entre los temas de álgebra, geometría y análisis de datos cuando usan ideas de un área de las matemáticas para comprender mejor otra área. -Puedan trabajar con sistemas de álgebra computacional que realizan de manera eficiente la mayor parte de la manipulación simbólica; por lo que el estudio del álgebra no tiene por qué limitarse a situaciones simples en las que la manipulación simbólica es relativamente sencilla. **c) Hojas de cálculo:** -Se familiaricen con la lectura y el llenado de tablas para resolver problemas específicos. -Reconozcan la correspondencia entre las variables, la influencia del cambio en una de ellas sobre la otra y su mutua variación.	

Tabla 1. *Categorías empleadas para analizar las actividades del libro de matemáticas.*

Respecto al enfoque epistemológico, no se observaron actividades que expusieran a los alumnos a multiplicidad de fuentes de información. En relación a la metodología de resolución de problemas, están ausentes el planteamiento de contraejemplos; preguntas para que identifiquen errores consistentes o recursos débiles, así como para detectar conceptos ingenuos o conceptos rituales; además las actividades no inciden en la construcción de estrategias particulares para este tipo de problemas.

En relación al modelo didáctico de los tres usos de la variable faltaron actividades para determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la variable dependiente, para reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada y para determinar los intervalos de variación de una variable, dado el intervalo de variación de la otra.

Se detectó que en las actividades del libro de texto no se sugiere el uso de herramientas digitales.

Con base en esta revisión y en las categorías de análisis, se elaboró la primera propuesta de actividades para la enseñanza del concepto intuitivo de variación lineal (ver **Anexo 2**), que fue implementada por la investigadora, utilizando únicamente las hojas de trabajo.

Posteriormente, se realizó el acercamiento a la telesecundaria para plantear la propuesta de trabajo y solicitar el permiso para aplicarla al primer grupo. Obteniendo las siguientes observaciones:

4.1.1. Aplicación de la primera propuesta de aprendizaje, al grupo uno.

El concepto de velocidad constante creó confusión entre los participantes, al mencionar en la actividad que es una razón de cambio inalterable en el tiempo. Por lo tanto, se consideró conveniente modificar el contexto de la situación problemática, de modo que no se mencione explícitamente el término velocidad, de tal manera que el estudiante tenga que relacionar diferentes distancias donde se ubica el autobús con tiempos determinados. Pues en el constructivismo, se entiende el desarrollo cognitivo en función del contexto histórico y sociocultural en el cual se desenvuelve el individuo. Ese cambio contextual, también permitió que los alumnos pudieran retomar sus conocimientos informales e intuitivos, con miras a que comprendan el enunciado del problema.

Tras la implementación de esta primera versión de la propuesta de actividades con fines exploratorios, se detectó que algunas instrucciones fueron confusas, ya que los alumnos se acercaron a preguntar qué debían hacer. Por tanto, para la segunda etapa, se requirió redactarlas nuevamente para que los estudiantes tuvieran claridad respecto a lo que se les estaba pidiendo en el enunciado del problema.

Es necesario considerar que la actividad se puede iniciar con trabajo individual o por equipo esto dependerá de las características de los alumnos. El constructivismo al igual que la metodología de resolución de problemas, ponen énfasis en las interacciones entre alumnos y alumnos-profesor; sin embargo, en este primer acercamiento se observó que algunos alumnos esperaban a que su compañero contestara las preguntas para después copiarlas. En consecuencia, al momento de compartir sus procedimientos no pudieron explicar cómo es que habían logrado llegar al resultado. Por lo tanto, para grupos con estas características es deseable que se inicie con trabajo individual, para después poder realizar la comparación de procedimientos y resultados en quipos.

Debido a que sólo se contaba con cincuenta minutos para aplicar la propuesta de actividades, no realizaron algún diagrama y es probable que esa palabra pueda crearles confusiones por lo que se cambió por la palabra “gráfica”. Entonces, para la segunda etapa, se pidió que la elaboraran a partir de una tabla con datos de distancia recorrida por el autobús contra tiempo, utilizando la herramienta de geometría dinámica Geogebra5, con la finalidad de que busquen las relaciones a partir del análisis de los elementos de la configuración.

Luego del primer acercamiento, se consideró necesario hacer un guion para el profesor, que complementara las actividades propuestas para el alumno, pues en la primera aplicación, se pensó que las actividades del libro bastarían para que el alumno pudiera alcanzar los aprendizajes esperados, pero el papel del profesor desde el enfoque constructivista, basando las actividades en la metodología de resolución de problemas y considerando los tres usos de la variable, es considerado fundamental; ya que guía la discusión, retoma las dudas y participaciones de los estudiantes para profundizar en el tema, además de crear un ambiente de trabajo propicio para el aprendizaje, entre otras funciones (Santos Trigo, 2014).

En este primer acercamiento con la actividad, los estudiantes identificaron que para calcular la distancia en la que se ubica el autobús**,** pueden hacer operaciones con los datos que se les proporcionan sobre el tiempo, pero les costó mucho trabajo identificar las operaciones que necesitaban realizar con los datos de distancia para poder calcular el tiempo correspondiente. Por lo tanto, en el guion del profesor se sugerirá que, en la fase de exploración, planteé casos particulares con la intención de que observen las relaciones entre las cantidades.

4.1.2. Aplicación de la propuesta de aprendizaje reestructurada, al grupo dos.

Se hicieron modificaciones con base en las observaciones de la primera etapa. Se incorporaron actividades que implicaban para su resolución el uso de Geogebra5. Como ya fue mencionado, se elaboró una guía de aplicación para el profesor y la propuesta didáctica fue aplicada por un profesor de primer grado de telesecundaria al grupo que tenía a su cargo.

Previo a la aplicación de la propuesta modificada, se instaló el programa de Geogebra5 en las computadoras, se observó que los equipos de cómputo funcionaban, pero eran muy básicos y lentos. La cantidad de computadoras era suficiente para trabajar de manera individual. Además, se podría conectar una de ellas al cañón para que se pudieran proyectar las actividades con la intención de apoyar el trabajo de los alumnos.

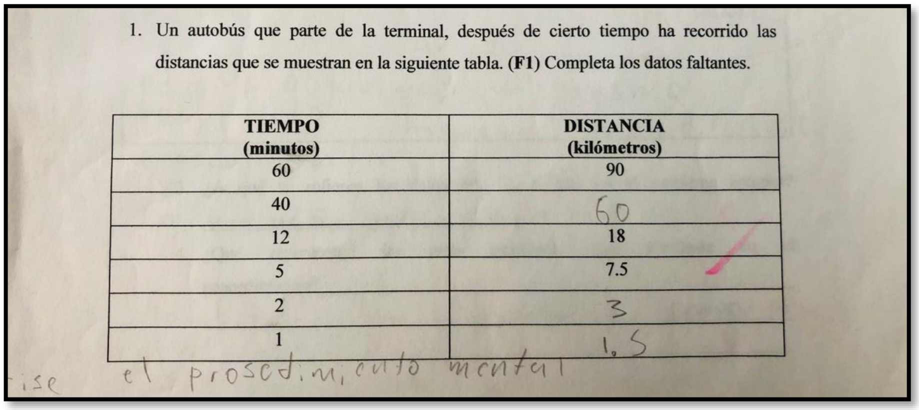
Se entregó al docente que aplicó la actividad un juego de hojas de trabajo y el guion del profesor, dos semanas antes de su aplicación para que los revisara y se pudieran comentar las dudas que surgieran con el investigador.

El profesor comentó que el grupo ya había tenido un primer acercamiento al software, por lo que pidió que no se realizara la introducción a Geogebra5 que se había planeado.

Los resultados de la aplicación de la propuesta de actividades se presentan con base en las categorías de análisis establecidas en el marco teórico-conceptual:

Enfoque de resolución de problemas, modelo de los tres usos de la variable y uso de tecnología digital.

Los siguientes resultados se presentan basados en estas tres categorías de análisis, ya que están estrechamente vinculadas. El completar la tabla 1 permitió a los participantes determinar los valores de la variable dependiente a partir de los valores dados de la variable independiente, logrando identificar que existe una correspondencia entre ellas. Además, las hojas de trabajo muestran los métodos heurísticos que eligieron para llegar al resultado.



1. Un autobús que parte de la terminal, después de cierto tiempo ha recorrido las distancias que se muestran en la siguiente tabla. (**F1**) Completa los datos faltantes.

TIEMPO (minutos)	DISTANCIA (kilómetros)
60	90
40	60
12	18
5	7.5
2	3
1	1.5

ise el prosedimiento mental

Respuesta de P-4

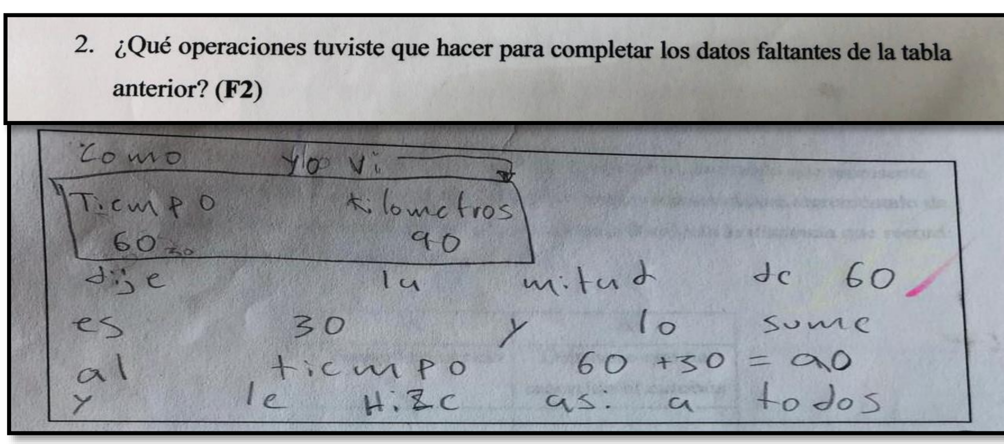
P-4 fue el primero en terminar, relacionó las variables: 60min con 90km, dividiendo 60 entre 2 y al resultado (30), le sumó la cantidad que faltaba para obtener 90, es decir el número 60. Al darse cuenta que haciendo esto obtenía los 90km, aplicó el mismo procedimiento a los 12 minutos:

$$\frac{12}{2} = 6 + 12 = 18\text{km}$$

Así que llegó a la siguiente relación:

$$\frac{n}{2} + n = 1.5n$$

De esta forma corroboró que su procedimiento era correcto y lo aplicó para calcular los kilómetros que faltaban en la tabla.



2. ¿Qué operaciones tuviste que hacer para completar los datos faltantes de la tabla anterior? (**F2**)

Como yo vi

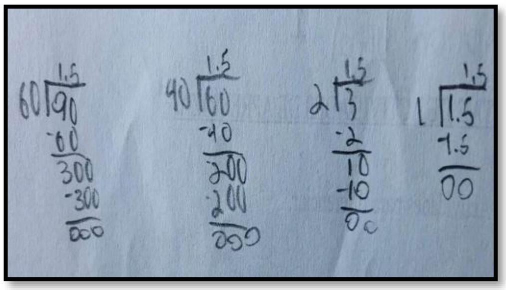
Tiempo	kilometros
60 30	90

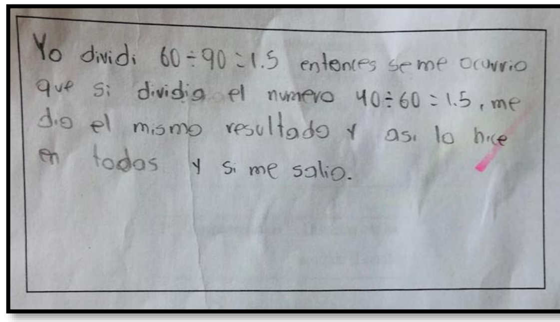
dije la mitad de 60 es 30 y lo sume al tiempo 60 +30 = 90 y le Hize asi a todos

Respuesta de P-4

P-3 dividió 90 entre 60, obteniendo 1.5, luego 60 entre 40, 3 entre 2 y 1.5 entre 1, observó que en todas las divisiones debía obtener 1.5 y así fue como dedujo que las distancias calculadas estaban bien. La relación que encontró fue:

$$\frac{x}{y} = 1.5$$



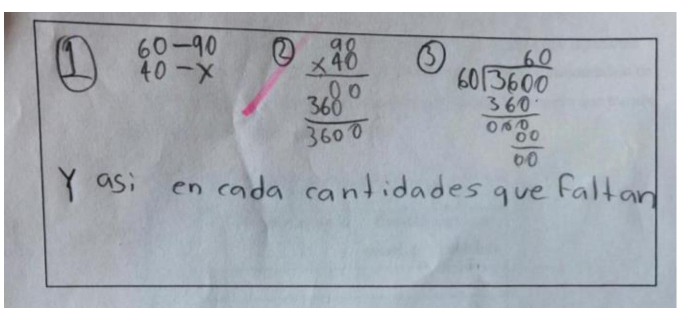


Respuesta de P-3

Se desconoce por qué decidió dividir 60 entre 40, pues en la tabla no está impreso el 60 como la distancia correspondiente a 40 minutos.

Entonces, la relación que encontró entre las variables fue la constante de proporcionalidad que usó para calcular los demás resultados y corroborar que sus resultados eran correctos.

El resto de los participantes escribió que utilizó la regla de tres, qué es el método sugerido por el profesor al iniciar la clase:



Respuesta de P-5 al ítem 2

A partir de la actividad 5 los participantes usaron el software Geogebra5. En la ejecución de estas actividades continuaron trabajando con la correspondencia entre las variables relacionadas, así como en la determinación de los valores de la variable dependiente, dados los valores de la variable independiente.

Durante la actividad se apreciaron las interacciones entre alumnos y alumnos-profesor, que se proponen en el enfoque didáctico, así como la posición activa del alumno al escribir en las celdas, el método heurístico de su preferencia.

Las representaciones que realizó P-1 con ayuda del software de geometría dinámica, le permitieron encontrar nuevas relaciones, que con lápiz y papel no había encontrado.

5. Utiliza una hoja de cálculo en Geogebra5 para obtener una tabla que represente esta situación. En la columna ***A*** coloca el tiempo transcurrido e increméntalo de minuto en minuto hasta 20min. En la columna ***B*** calcula la distancia del autobús con la fórmula general. (**F3**)

	A	B
1	Tiempo recorrido	Distancia en la que se ubica el autobús
2		
3		
4		

P-1 fue el primero en terminar, en su procedimiento podemos observar que calcular la distancia recorrida desde el minuto 1, le permitió identificar la constante de proporcionalidad, al relacionar que cada minuto el autobús recorre 1.5 km, así pudo establecer la fórmula “distancia = 1.5(tiempo)” y usarla para calcular el resto de las distancias, como se planeó con base en la metodología de los tres usos de la variable. Además, el software le permitió comparar sus resultados con lo que había hecho con lápiz y papel:

P-1: Poniendo el resultado que nos salió en 1, que es 1.5 y lo multipliqué por el número de minutos.
Profesor: ¿Por qué por 1.5?
P-1: Es lo que equivale a 1 minuto.
Profesor: Entonces vas a multiplicar 1.5 en todas las filas.

Hoja de Cálculo

	A	B
1	Tiempo transcurrido	Distancia recorrida por el autobús
2	1	1.5
3	2	3
4	3	=3 * 1.5
5	4	6
6	5	7.5
7	6	9
8	7	10.5
9	8	12

Trabajo realizado por P-1

Mientras tanto, P-2 aplicó el procedimiento que encontró usando lápiz y papel:

$$\frac{n}{2} + n = 1.5n$$

Hoja de Cálculo

	A	B
1	Tiempo transcurrido	Distancia recorrida por el autobús
2	1	1.5
3	2	3
4	3	4.5
5	4	=4 / 2 + 4
6	5	7.5
7	6	9
8	7	10.5
9	8	12

Se les pidió que construyeran la tercera columna indicada en el ítem número 7. Al comparar resultados de manera grupal, los participantes identificaran que cuando el tiempo y la distancia eran correspondientes, al dividirlos, se obtenía el mismo cociente, pudiendo reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en la relación funcional, considerado en la metodología de los tres usos de la variable. Además, la constante de proporcionalidad, les permitió verificar que las distancias que habían calculado eran correctas. De esta forma, la construcción de la tabla 1, en la hoja de cálculo, sirvió como introducción al concepto de relación funcional entre variables.

Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	mpo transcurrido	Distancia recorrida por el autobús	Distancia/Tiempo
2	1	1.5	1.5
3	2	3	1.5
4	3	4.5	1.5
5	4	6	1.5
6	5	7.5	1.5
7	6	9	=9 / 6
8	7	10.5	1.5
9	8	12	1.5
10	9	13.5	1.5

Trabajo realizado por P-3

7. En la columna C, divide 5 valores de la columna de la distancia, entre la columna del tiempo ¿Qué resultados obtuviste?

dio lomismo entodos

	A	B	C
1	Tiempo recorrido	Distancia que ha recorrido el autobús	Distancia/Tiempo
2	1	1.5	1.5
3	2	3	1.5
4	3	4.5	1.5
5	4	6	1.5
6	5	7.5	1.5

Respuesta de P-5

Hoja de Cálculo

	A	B	C	D
1	mpo transcurrido	Distancia recorrida por el autobús	Distancia/Tiempo	
2	1	1.5	1.5	
3	2	3	1.5	
4	3	4.5	1.5	
5	4	6	1.5	
6	5	7.5	1.5	
7	6	9	1.5	
8	7	10.5	1.5	
9	8	12	1.5	
10	9	13.5	1.5	
11	10	15	1.5	
12	11	16.5	1.5	
13	12	18	1.5	
14	13	19.5	1.5	
15	14	21	1.5	
16	15	22.5	1.5	
17	16	24	1.5	
18	17	25.5	1.5	

Trabajo realizado por P-6

En los ítems 8, 9, 10, 11 y 12 se les pidió a los participantes calcular los valores de la variable independiente a partir de los valores de la variable dependiente.

Inicialmente, multiplicaron 45 por 1.5, pero escribir 45 kilómetros en la columna de distancia de la tabla 1, permitió a P-3 deducir que desconocían la cantidad que se multiplicaba por 1.5. Se observó que la pregunta del profesor "¿Qué operaciones tienen que hacer para que en la columna C les dé 1.5?, facilitó que los participantes aplicaran la relación entre las variables identificada en la actividad anterior al calcular la constante de proporcionalidad. Las interacciones entre estudiantes y entre profesor y estudiantes sirvieron para guiar el proceso metacognitivo, lo cual les permitió revisar los métodos heurísticos que emplearon.

Los participantes iniciaron con trabajo individual, después de un momento el profesor preguntó que habían hecho:

P-5: Multiplicar 1.5 por 45 igual a 67.5

Profesor: Comprueben en su tabla. Abajo del 30 (en la columna de distancia), escriban 45. ¿Qué operaciones tienen que hacer para que en la columna C les dé 1.5? (Esta pregunta es sugerida en el guion del profesor)

P-3: 45 entre el resultado que nos había salido (refiriéndose al tiempo que desconocían).

Profesor: ¿Qué número necesitan para que les dé 1.5?

P-3: 30

Profesor: Contrasten este resultado con lo que contestaron en la pregunta 8, ¿coincide 67.5 con el 30?

P-3: No, porque no sabíamos cuántos minutos eran.

P-2: 45 son kilómetros, sería a la inversa.

Profesor: ¿Cuál es la operación inversa a la multiplicación?

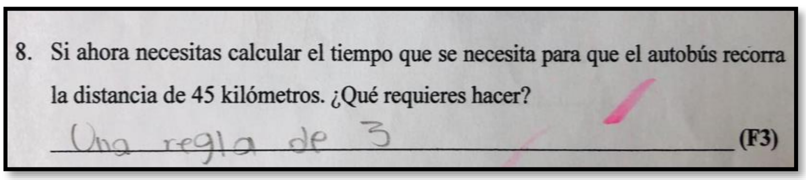
P-3: 45 entre 1.5 igual a 30

P-3 trató de buscar alguna relación entre el 15 y 45 kilómetros igual a 30 min.

Así fue como P-3 encontró otro posible procedimiento:

Si a los 10 minutos el autobús estaba a 15km de distancia, me faltan 30km para llegar a los 45km, en la tabla vi que el tiempo correspondiente a 30km eran 20min, se los sumé a los 10 minutos y así obtuve como resultado 30minutos.

Aunque la explicación verbal fue distinta P-3 escribió en sus hojas de trabajo, que utilizó una regla de tres.


8. Si ahora necesitas calcular el tiempo que se necesita para que el autobús recorra la distancia de 45 kilómetros. ¿Qué requieres hacer?

Una regla de 3 **(F3)**

Respuesta de P-3

Cabe mencionar que en lugar de hacer las operaciones, buscó el tiempo correspondiente a 30km en la tabla construida en Geogebra5.

La construcción de la tabla 2 con el uso del software dinámico Geogebra5, produjo resultados distintos a los observados en la primera aplicación. Ahora, los participantes, además de calcular los minutos correspondientes a 45 kilómetros, lograron encontrar diferentes procedimientos para poder calcular cualquier tiempo. Reconocieron la correspondencia entre variables y la influencia del cambio en una de ellas sobre la otra. Ya que el uso de la tecnología digital les permitió examinar cualidades matemáticas asociadas al proceso de solución, así como encontrar relaciones, que les permiten construir su propio repertorio de resultados matemáticos a partir de analizar el comportamiento de los elementos de la configuración (búsqueda de invariantes) al mover componentes dentro de la misma construcción y finalmente se familiaricen con la lectura y el llenado de tablas para resolver problemas específicos.

11. En Geogebra5, deja seis celdas en blanco debajo de la tabla que hiciste y elabora otra tabla que represente esta situación. En la columna ***A*** coloca la distancia recorrida por el autobús; es decir, su posición respecto a la terminal e increméntala de uno en uno hasta 30km. En la columna ***B*** calcula el tiempo transcurrido con la fórmula general. **(F3)**

En el trabajo de P-3 se pudo observar que utilizó la constante de proporcionalidad calculada en las actividades anteriores y dividió la distancia sobre la constante para calcular el tiempo, así que logró calcular la variable dependiente a partir de los valores de la variable independiente, situación que con lápiz y papel no pudieron hacer los participantes en la primera aplicación:

Hoja de Cálculo

	A	B	C
32	1	0.67	
33	2	1.33	
34	3	=3 / 1.5	
35	4	2.67	
36	5	3.33	

Trabajo realizado por P-3

Mientras tanto P-1, utilizó la constante de proporcionalidad, pero de la forma siguiente:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{1.5}$$

Lo anterior mostró que P-1 identificó que el tiempo tenía una variación proporcional de 0.67. al observar que era el tiempo equivalente a 1km, así que utilizó este resultado y lo fue sumando al anterior para calcular el siguiente, es decir:

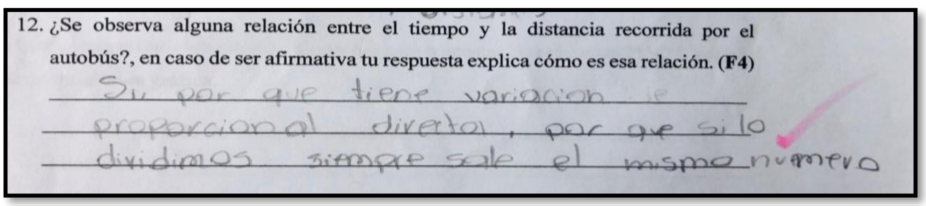
31	Distancia que ha recorrido el autobús	Tiempo
32	1	0.67
33	2	1.34
34	3	=1.34 + 0.67
35	4	2.68
36	5	3.35

Trabajo realizado por P-1

En los comentarios grupales, P-1 y P-3 comentaron que si existía una relación entre las variables:

> P-3: La relación es que no cambia la constante de 1.5.
>
> Profesor: ¿Cuánto aumentan los resultados de los kilómetros?
>
> P-1: 1.5 y el tiempo 0.67.
>
> Profesor: Entonces por cada kilómetro el tiempo va aumentando 0.67, va aumentando de manera proporcional.

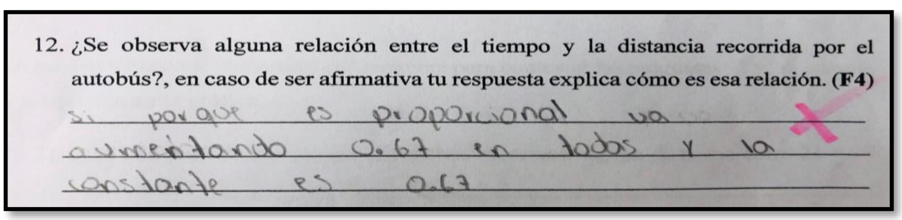
En las hojas de trabajo escribieron, P-1, P-3 y P-5 que las variables tenían una relación proporcional porque no cambiaba la constante, mientras que P-2, P-4 y P-6 expresaron que la relación proporcional era constante e igual a 0.67.



12. ¿Se observa alguna relación entre el tiempo y la distancia recorrida por el autobús?, en caso de ser afirmativa tu respuesta explica cómo es esa relación. (F4)

Si por que tiene variacion le proporcional directa, por que si lo dividimos siempre sale el mismo numero

Respuesta de P-3



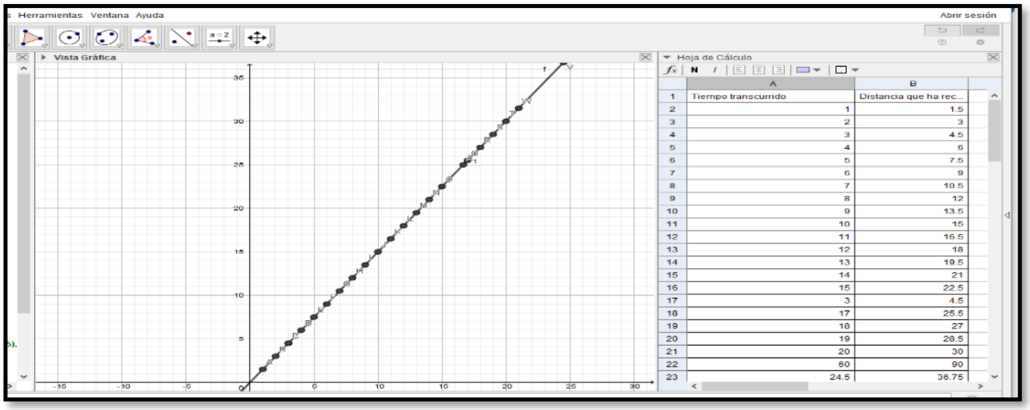
12. ¿Se observa alguna relación entre el tiempo y la distancia recorrida por el autobús?, en caso de ser afirmativa tu respuesta explica cómo es esa relación. (F4)

si porque es proporcional va aumentando 0.67 en todos y la constante es 0.67

Respuesta de P-2

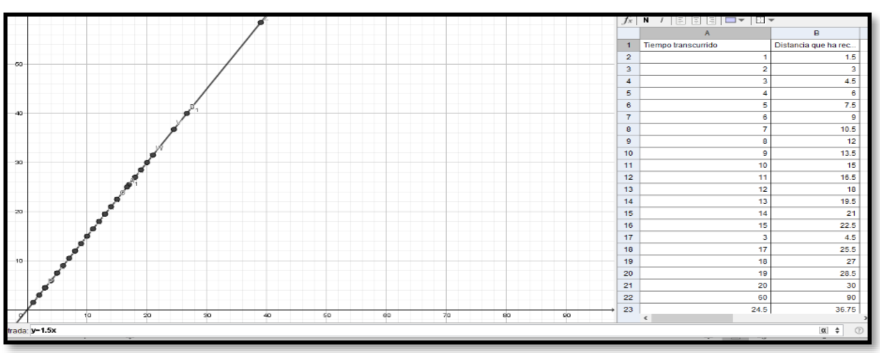
Los participantes continuaron con las actividades del ítem 13: Convirtieron los datos de tiempo y distancia en pares ordenados para marcarlos como puntos en el plano cartesiano, después trazaron una recta del punto A al punto B y se les preguntó si la recta pasaba por todos los puntos marcados.

Los participantes no lograron explicar por qué la recta pasaba por todos los puntos marcados previamente. Sin embargo, el software permitió que representaran el problema con una gráfica a pesar de no tener los conocimientos previos sobre el plano cartesiano y ubicación de puntos en el mismo, de esta manera se pudo continuar trabajando con los objetivos de aprendizaje planeados, pues usando lápiz y papel, no hubieran podido realizar la actividad, sin tener que desviar la clase para explicar estos temas. Además, partiendo de la tabla 1, representaron las condiciones del problema como una función.

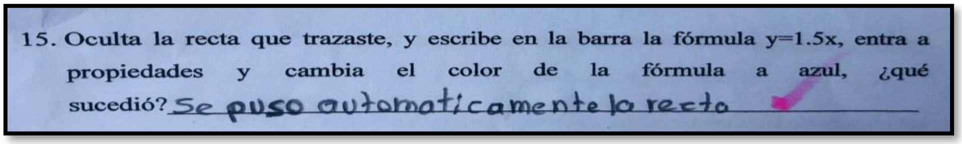


Trabajo realizado por P-1

En la siguiente actividad, los participantes ocultaron la recta y escribieron la fórmula y=1.5x en la barra de entrada, luego se les pidió que escribieran lo que sucedió. Como se puede observar en el trabajo de P-1, en el monitor tenían el problema representado en una tabla, en una gráfica y con una expresión algebraica. Así el uso de la tecnología como herramienta de aprendizaje, facilitó la construcción de diversas representaciones del problema y que pudieran ver que están relacionadas entre sí como se menciona en el modelo de los tres usos de la variable y fue posible observarlo en el trabajo de P-1:



Trabajo realizado por P-1



15. Oculta la recta que trazaste, y escribe en la barra la fórmula y=1.5x, entra a propiedades y cambia el color de la fórmula a azul, ¿qué sucedió? Se puso automaticamente la recta

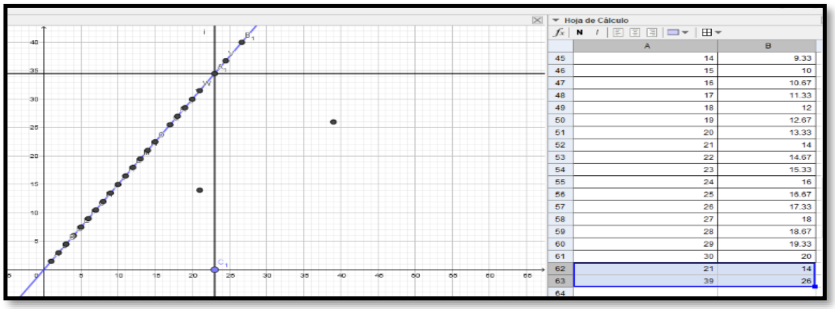
Respuesta de P-1

Continuando con las actividades, se les pidió calcular el intervalo de tiempo en que el autobús recorrió la distancia entre 21 y 39 kilómetros, así como la distancia mínima y máxima que recorrería el autobús en el periodo de 25 a 40 minutos.

Los participantes revisaron en las tablas construidas en Geogebra5 las operaciones hechas para calcular la variable tiempo y poder determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

Estas últimas actividades mostraron que los participantes tenían claro el procedimiento que podían utilizar para calcular tanto tiempos como distancias relacionadas con la situación problemática planteada en las hojas de trabajo. Además, para poder resolver las actividades tuvieron que pasar constantemente de una de las representaciones del problema a otra, lo cual se facilitó con el uso del software. Como se hace referencia en el modelo de los tres usos de la variable y el enfoque de resolución de problemas con uso de la tecnología como herramienta de aprendizaje.

Profesor: Ese es el inicio del periodo, ¿cuál es el final?
P-3: 39 kilómetros.
Profesor: Revisen la tabla 2.
P-4: La tabla 2 sólo llega hasta el número 30.
Profesor: ¿Qué podemos hacer?
P-3: Dividir 39 entre 1.5 = 26.
Profesor: ¿Cuál es el intervalo de tiempo que encontraron?
P-1: Entre 14 y 26 minutos.

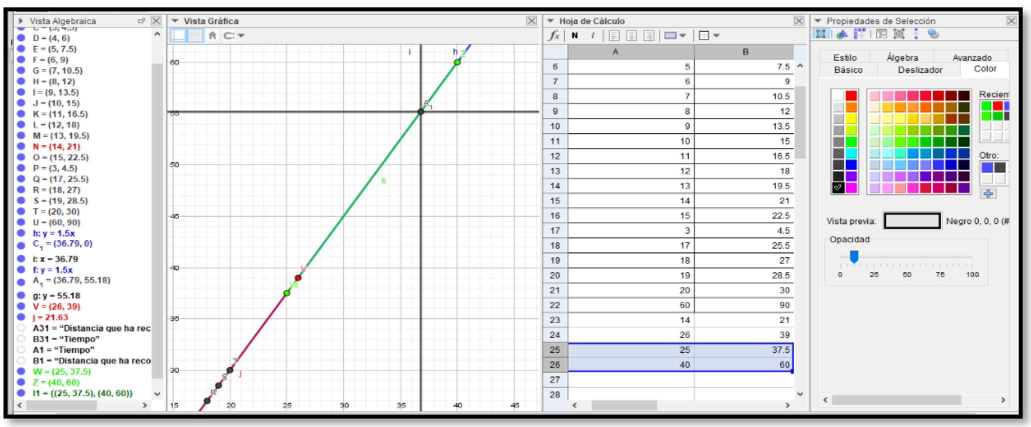


Trabajo realizado por P-2 y P-4 en la computadora principal

21. ¿En qué periodo de tiempo el autobús recorrerá alguna distancia entre 21 y 39 kilómetros? Del minuto 14 hasta el minuto 26, en kilometros es del 21 al 39
Ubica en la gráfica este intervalo y cambia su color a rojo.

Respuesta de P-3

En esta imagen se pueden observar los dos periodos identificados.



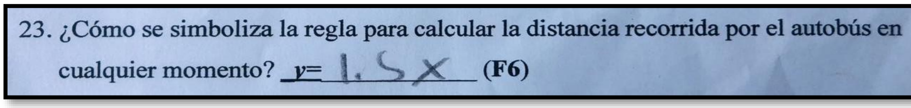
Trabajo Realizado por P-4

Todos los participantes identificaron que la distancia mínima era 37.5 kilómetros y la máxima 60 kilómetros.

22. En el periodo de 25 y 40 minutos, ¿cuál será la distancia mínima y la máxima que recorrerá el autobús? (F5) la minima da 25 minutos es a 37.5 la maxima ocHo minutos es a 60
Ubica estos puntos en la gráfica, en color verde.

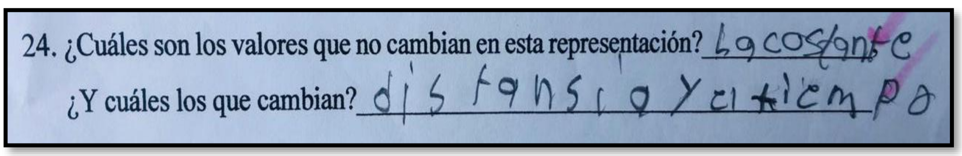
Respuesta de P-6

Al escribir en las hojas de trabajo la regla para calcular la distancia recorrida por el autobús en cualquier momento, cinco de los seis participantes lograron identificarla, sólo P-6 escribió y=y*a. Por tanto, de acuerdo al modelo de los tres usos de la variable, se tiene evidencia de que 5 de los 6 participantes lograron simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos del problema.


23. ¿Cómo se simboliza la regla para calcular la distancia recorrida por el autobús en cualquier momento? y= 1.5x (F6)

Respuesta de P-5

Para terminar la actividad, en el ítem 24 se les preguntó cuáles eran los valores que cambian y los que no cambian en la representación y=1.5x. Todos los participantes identificaron que el valor que no cambia era la constante o 1.5 y que los valores que cambian son la distancia y el tiempo; siendo estos últimos, parte de los objetivos de aprendizaje de la propuesta de actividades.


24. ¿Cuáles son los valores que no cambian en esta representación? La costante
¿Y cuáles los que cambian? distansia y el tiempo

Respuesta de P-6

4.2. Resultados adicionales.

En relación al contexto disciplinar, es deseable, que los profesores conozcan a profundidad el modelo educativo y la metodología didáctica con los cuales van a trabajar, independientemente de poder contar con sugerencias didácticas que los orienten. Respecto a la socialización de procedimientos, se observaron mejores resultados cuando los alumnos iniciaron trabajando de manera individual, escribieron su procedimiento y posteriormente lo compartieron con sus compañeros.

En la propuesta final, además de las modificaciones mencionadas se hicieron otras relacionadas con redacción de las preguntas y de la información complementaria, así como con el formato.

Se agregó la lista de actividades que los estudiantes deben poder realizar en Geogebra5 antes de empezar con la secuencia didáctica y las ligas de un video introductorio y el manual de introducción para el manejo del programa (Saidon, 2013 y Gómez, 2017).

En el guion para el profesor se sugiere que los guíe para que lleguen a la representación:

1.5*kilómetros=minutos

Para que pudieran construir la tabla 1 en Geogebra5, pero en la práctica se observó que no es necesario hacerlo, ya que pueden construir su tabla con cualquiera de los métodos que los participantes encontraron. Por lo tanto, se cambió la información al final de la sesión, con la intención de que utilicen el procedimiento de su preferencia, luego se les pedirá que, en algunas celdas, cambien el procedimiento y usen la fórmula general.

La secuencia de la clase se vio interrumpida para atender fallas con los equipos, que son ejemplos de los inconvenientes que se agregan a la dinámica de la sesión con el uso de herramientas tecnológicas dentro del proceso enseñanza-aprendizaje.

Para reducir el tiempo que invierten buscando los íconos para realizar los trazos y construcciones, se agregaron las imágenes en las instrucciones.

En la información sobre la fórmula para calcular la distancia, se cambió el símbolo asterisco y se escribió la palabra por. Además, se colocó la información dentro de un polígono amarillo, para resaltarla.

Les costó trabajo ubicar el punto (60, 90) porque la escala ocasionaba que no se viera en pantalla, por lo cual se cambiaron las coordenadas en la instrucción a (32, 48). Y se agregó en la instrucción que debían usar la fórmula general para encontrar los puntos adicionales, ubicarlos en el plano cartesiano y observar si se ubican en la recta.

4.3.Propuesta de actividades.

Retomando el análisis de resultados fue posible observar que la propuesta de actividades favoreció el logro de los aprendizajes esperados planeados. Por tanto, como resultado de este proceso de investigación se presenta la propuesta de actividades ya con las modificaciones realizadas:

PROPUESTA 3 DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Conocimientos previos de Geogebra5.

- Construye una tabla en la hoja de cálculo. Multiplica los datos de la columna A por la columna B. Divide los datos de la columna B entre los datos de la columna A.
- Guardar un archivo.
- Guarda los cambios en un archivo ya guardado.
- Cambiar la escala usada en el plano cartesiano.
- Convertir los datos de dos columnas en lista de puntos.
- Trazar un segmento de recta.
- Ubicar un punto en la recta.
- Ocultar un objeto.
- Localizar la barra de entrada y escribir una función y=x.
- Trazar perpendicular que pase por un punto determinado.
- Ubicar el punto de intersección entre dos rectas.
- Cambiar el color de un segmento de recta y de un punto.
- Mostrar la etiqueta de valor de un punto.
- Mover un objeto.
- Activar vista algebraica y vista gráfica.
- Hacer más grande o más pequeño el plano cartesiano.

Ligas de internet para iniciar con el manejo de Geogebra5.

Gómez, G. (2017). *Introducción a Geogebra.* [En línea] Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=iXB24rJem0w&t=290s

Saidon, L. (2013). *Guía de inicio rápido. Geogebra* [En línea] Disponible en: https://wiki.geogebra.org/uploads/a/a4/Gu%C3%ADa_Tablets%25Win_8_.pdf

Objetivos de aprendizaje.

Que los alumnos:

- Reconozcan a partir del problema verbal, que existe una correspondencia entre los valores de las dos variables involucradas.
- Simbolicen la relación funcional de correspondencia.
- Determinen el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra.

INSTRUCCIONES. Lee el enunciado del problema y completa la tabla.

SESIÓN 1

1. Un autobús que mantiene una velocidad constante, parte de la terminal. Después de cierto tiempo ha recorrido las distancias que se muestran en la siguiente tabla. (**F1**) Completa los datos faltantes.

Realiza lo que se te pide.

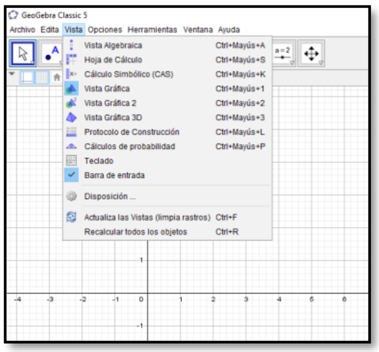
TIEMPO (minutos)	**DISTANCIA (kilómetros)**
60	90
40	
12	18
5	7.5
2	
1	

2. ¿Qué operaciones tuviste que hacer para completar los datos faltantes de la tabla anterior? (**F2**)

Comparen entre compañeros los procedimientos que usaron y escriban ¿cuáles fueron las diferencias y similitudes?

3. ¿A qué se refieren los datos 40, 12, 5, etc. en el problema anterior? ________________
____
4. ¿Qué representan las otras cantidades que escribiste en el procedimiento? __________
____
____

5. Utiliza una hoja de cálculo en Geogebra para obtener una tabla que represente esta situación. En la columna ***A*** coloca el tiempo transcurrido e increméntalo de uno en uno hasta 20min. En la columna ***B*** calcula la distancia que recorre el autobús con la fórmula general. **(F3)**



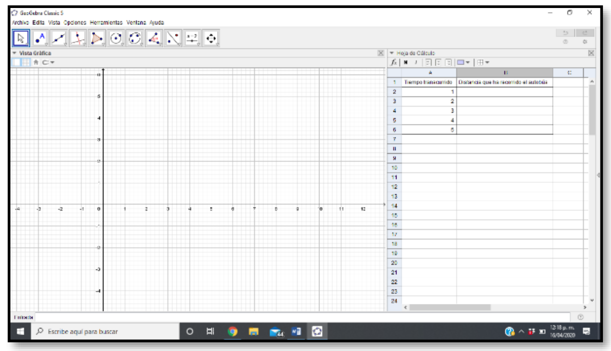


TABLA 1

	A	B
1	Tiempo transcurrido	Distancia que ha recorrido el autobús
2		
3		
4		

6. ¿A qué distancia se ubicará el autobús a los 7, 16 y 20 minutos?_________________

____

Compara tus procedimientos y respuestas con tus compañeros.

Escribe en la tabla de arriba las operaciones que hiciste y el resultado que obtuviste en Geogebra5.

Guarda tu archivo con el nombre: sesión 1_(Aquí escribe tu nombre por ejemplo: Paco), para continuar con el trabajo la siguiente sesión.

SESIÓN 2

Continúa trabajando individualmente.

7. En la columna C, divide 5 valores de la columna de la distancia, entre la columna del tiempo. Recuerda que el símbolo para expresar división es: /. ¿Qué resultados obtuviste? ____

TABLA 1

	A	B	C
1	Tiempo transcurrido	Distancia que ha recorrido el autobús	Distancia/Tiempo
2			
3			
4			
5			

Escribe en la tabla de arriba las operaciones que hiciste y el resultado que obtuviste en Geogebra5.

8. ¿Cómo puedes ocupar el resultado de la columna C para calcular la distancia recorrida por el autobús? ____

____

Una posible fórmula para calcular la distancia del autobús puede expresarse así:

$$\mathbf{a} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

Es decir: 1.5 por (el tiempo transcurrido) = Distancia del autobús en kilómetros

En donde **"a"** representa un número constante, y las variables están

9. En la columna B borra 5 resultados y utiliza la fórmula para calcular nuevamente la distancia. ¿Hubo cambios en los resultados? ____________________________

	A	B	C
1	Tiempo transcurrido	Distancia que ha recorrido el autobús	Distancia/Tiempo
2	**1**	**=1.5*1**	
3	**2**	**=1.5*2**	

Compara y discute tus respuestas con tus compañeros.

Guarda los cambios en tu archivo.

SESIÓN 3

Continúa trabajando de manera individual.

10. Si ahora debes calcular el tiempo que se necesita para que el autobús recorra la distancia de 45 kilómetros. ¿Qué requieres hacer? (**F3**) _________________________ ____

11. ¿Qué representan el número 45 en la pregunta anterior? _______________________ ____ ¿Qué representan las otras cantidades que escribiste en el procedimiento? _______________________________ ____ ____

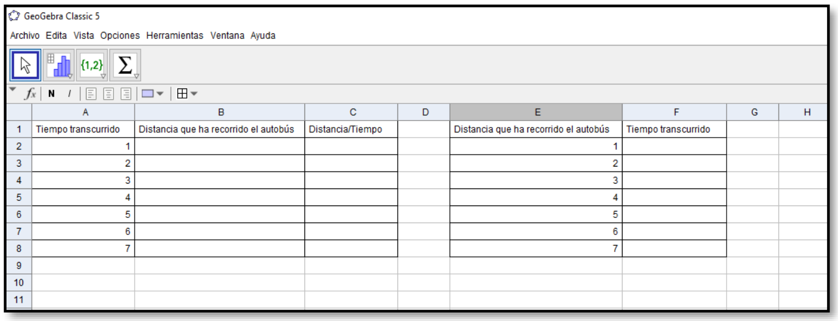
12. Escribe en el recuadro los diferentes procedimientos que usaron para calcular los minutos.

Compara y discute tus procedimientos y respuestas con tus compañeros.

Continúa trabajando de manera individual.

13. En Geogebra, deja en blanco una columna a la derecha de la tabla 1. Elabora la tabla 2, coloca en la columna ***A*** la distancia recorrida por el autobús, es decir, su posición respecto a la terminal e increméntala de uno en uno hasta 30km. En la columna ***B*** calcula el tiempo transcurrido con la fórmula general. (**F3**)

TABLA 2


GeoGebra Classic 5

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Tiempo transcurrido	Distancia que ha recorrido el autobús	Distancia/Tiempo		Distancia que ha recorrido el autobús	Tiempo transcurrido		
2	1				1			
3	2				2			
4	3				3			
5	4				4			
6	5				5			
7	6				6			
8	7				7			
9								
10								
11								

14. ¿Cómo puedes ocupar el resultado de la columna C de la tabla 1 para calcular el tiempo transcurrido? ____

Si observas la fórmula para calcular la posición del autobús puede expresarse así:

$$\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{x}$$

que es lo mismo que: $\boldsymbol{y/a = x}$

$\boldsymbol{(distancia\ recorrida\ por\ el\ autobús)\ entre\ 1.5 = Tiempo\ transcurrido}$

En donde "a" representa un número constante y las variables están representadas por "*x"* y *"y"*.

15. En la columna B borra los 5 primeros resultados y utiliza la fórmula para calcular nuevamente el tiempo. ¿Hubo cambios en los resultados? ____________________

16. ¿Existe alguna relación entre el tiempo y la distancia recorrida por el autobús?, en caso de ser afirmativa tu respuesta explica cómo es esa relación. (**F4**)____________

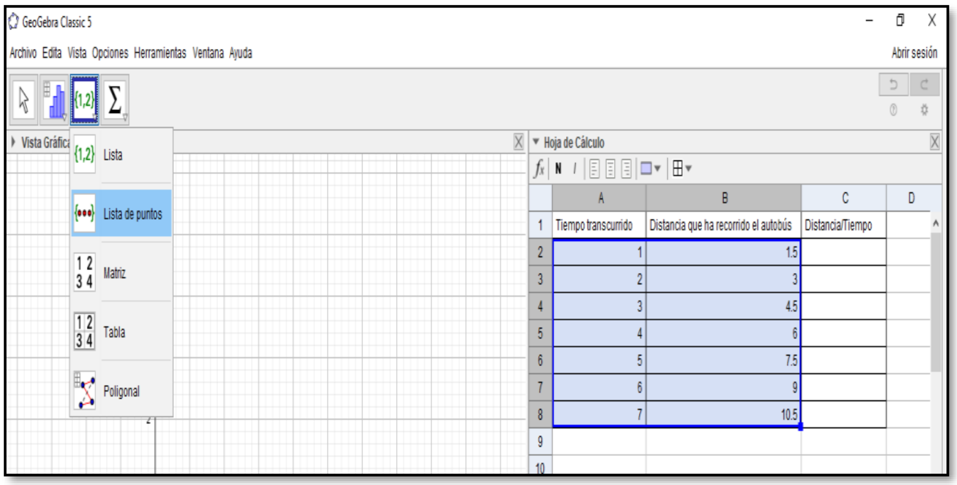
Compara y discute tus procedimientos y respuestas con tus compañeros.

Guarda los cambios en tu archivo.

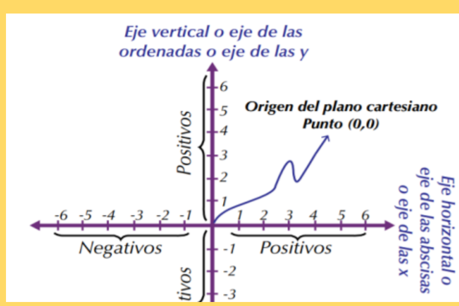
SESIÓN 4

Continúa trabajando individualmente.

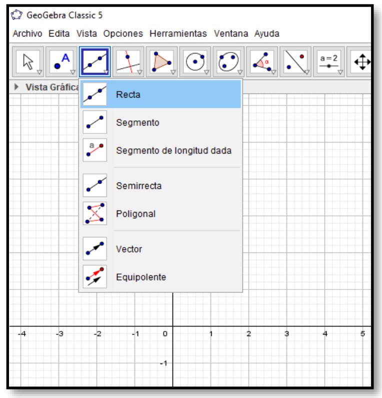
17. En Geogebra, usa la tabla 1 de la pregunta 5, selecciona los datos numéricos de las columnas A y B, conviértelos a “lista de puntos” para que se marquen estos puntos en el plano cartesiano.



Si observas todos los números de la columna A representan los valores de las “abscisas” ubicadas en el eje *“x”* y la columna B representan los valores de las “ordenadas” ubicadas en el eje *“y”*.



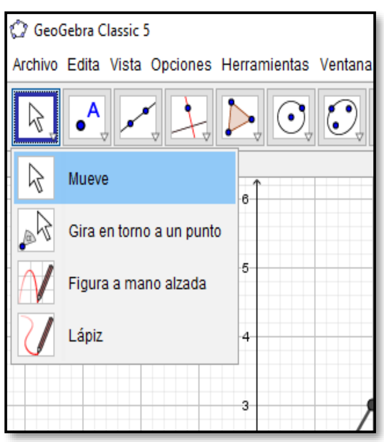
18. Construye una “recta” del punto A= (1,1.5) al punto B= (2,3). ¿Esta recta pasa por todos los puntos que fueron marcados en el plano cartesiano? ______



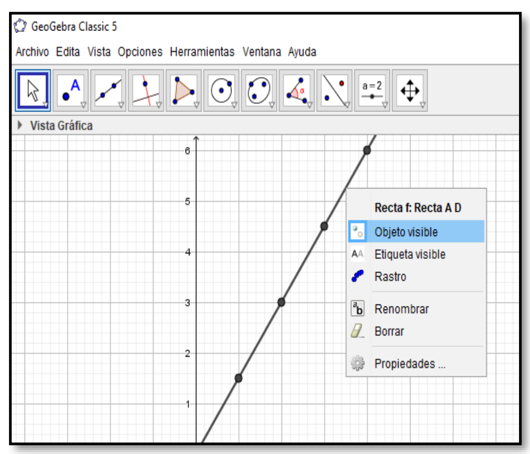
19. Agrega a la tabla 1 el punto (32, 48) y usando la fórmula general encuentra otros dos puntos diferentes a los que ya están marcados, conviértelos a “lista de puntos”, ¿se ubican estos nuevos puntos sobre la recta? ____________

20. Oculta la recta que trazaste.

<u>Paso 1.</u> Click izquierdo sobre la opción “mueve”.



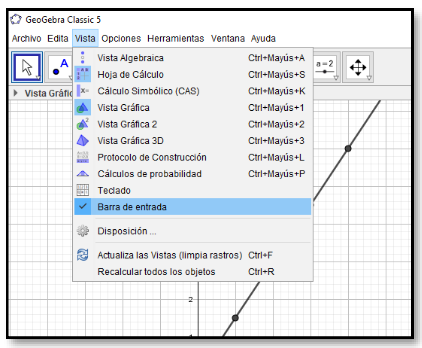
<u>Paso 2.</u> Coloca el cursor sobre la recta y click derecho en el botón del mouse.



21. Escribe en la barra de entrada la fórmula y=1.5x, ¿qué sucedió? _______________

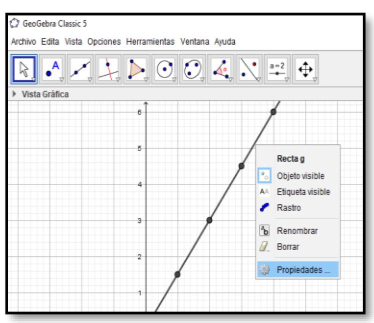
____

Si no aparece la barra de entrada, de click izquierdo en “vista”, luego click izquierdo en “barra de entrada”.

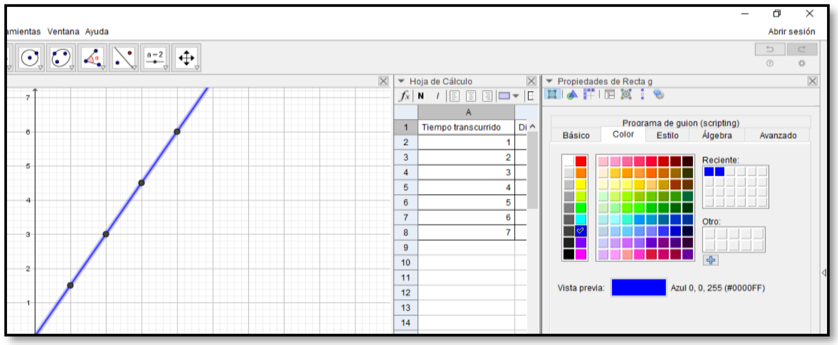


22. Cambia el color de la línea recta a azul.

<u>Paso 1.</u> Click derecho sobre la recta, luego click izquierdo en “propiedades”.



Paso 2. Click sobre el color azul de tu preferencia.

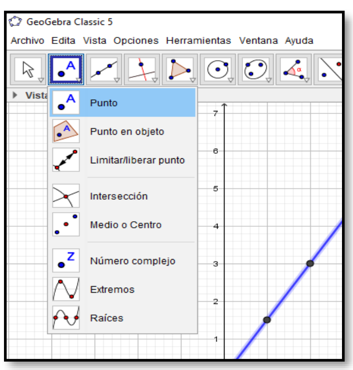


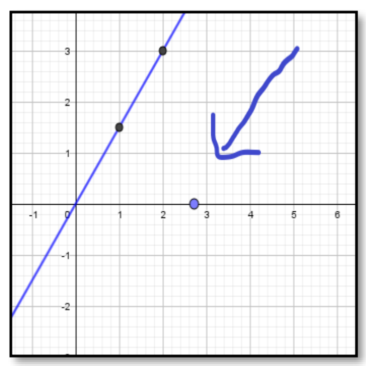
Observa que has representado las condiciones del problema, de 3 formas diferentes: con la *tabla*, con la *recta o gráfica* que trazaste sobre los puntos y finalmente con la fórmula *y=1.5x*

23. Coloca un punto sobre el eje “x” (abscisas).

Paso 1. Click izquierdo sobre la opción “punto”.

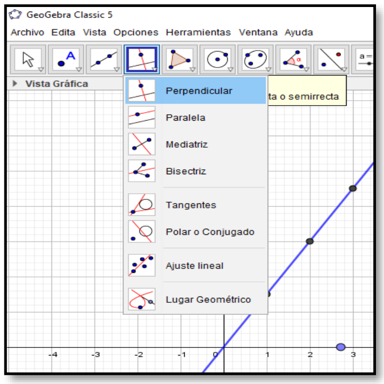
Paso 2. Click izquierdo sobre el eje “x” (abscisas)



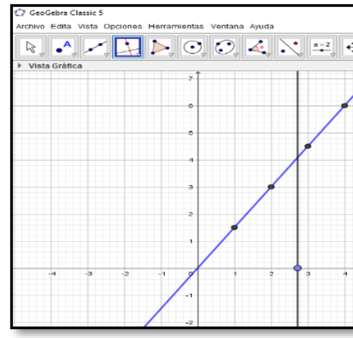


24. Traza una recta perpendicular al eje “x”, que pase por ese punto.

Paso 1. Click izquierdo en “perpendicular”

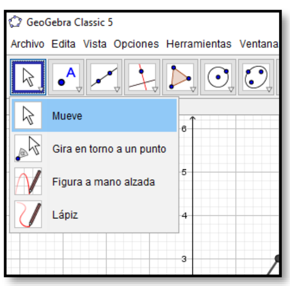


Paso 2. Click izquierdo sobre el punto marcado en el eje “x” (abscisas) y después click izquierdo sobre el eje “x” (abscisas)

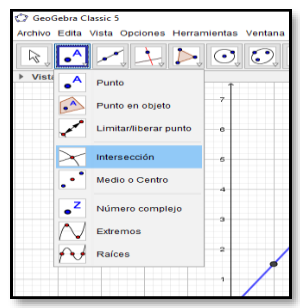


25. Marca la intersección de esa recta con la gráfica y=1.5x. En un puto distinto a los ya marcados.

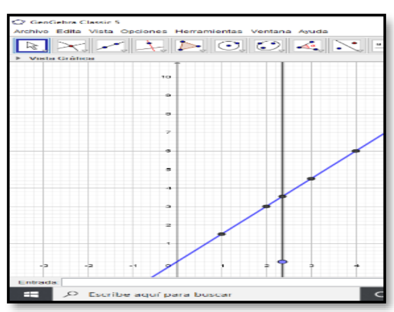
Paso 1. Click izquierdo sobre “mueve”.



Paso 2. Click izquierdo sobre “intersección”.

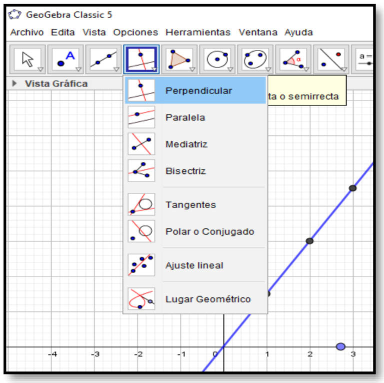


Paso 3. Click izquierdo sobre la perpendicular y luego click izquierdo sobre la gráfica.

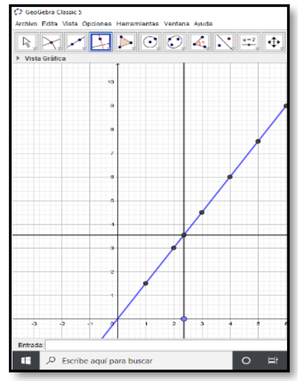


26. Traza una perpendicular al eje *y* (ordenadas), que pase por el punto de intersección.

<u>Paso 1.</u> Click izquierdo en "perpendicular".

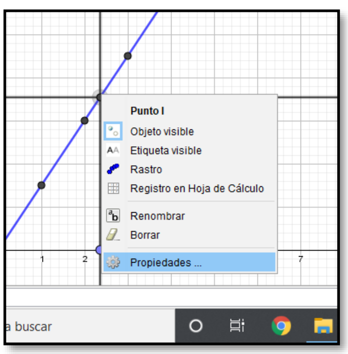


<u>Paso 2.</u> Click izquierdo sobre el "punto de intersección" y luego click izquierdo sobre el eje "y" (ordenadas).

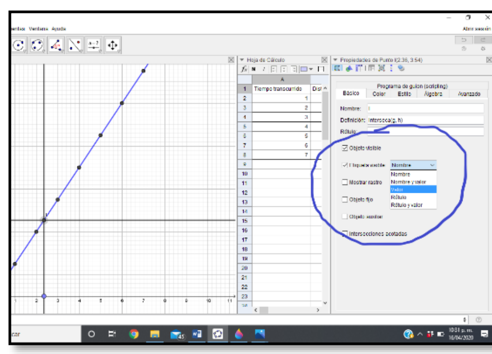


27. Selecciona el "punto de intersección" y activa su "etiqueta de valor".

<u>Paso 1.</u> Click derecho sobre "punto de intersección" y click izquierdo sobre "propiedades".



<u>Paso 2.</u> Click izquierdo sobre "básico", click izquierdo sobre "nombre" a un lado de "etiqueta visible", click izquierdo sobre "valor".



28. Mueve el punto que esta sobre el eje "x" (abscisas), observa la "etiqueta de valor", ¿qué pasa con el valor de "y" (ordenadas), cuando cambias el valor en el eje "x" (abscisas)? ____

____

Si observas, todos los números de la columna A representan los valores de las **abscisas** ubicadas en el eje ***"x"*** y la columna B

Compara tus construcciones, trazos, procedimientos y respuestas con los de tus compañeros. Guarda los cambios en tu archivo.

SESIÓN 5

Continúa trabajando individualmente.

Utiliza las dos tablas que elaboraste en Geogebra para contestar las preguntas 21 y 24.

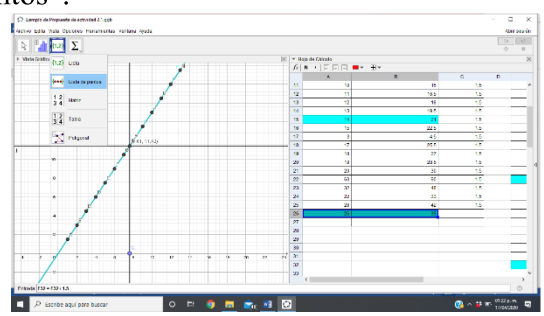
29. ¿En qué periodo de tiempo el autobús recorrerá alguna distancia entre 21 y 39 kilómetros? ____
____

Ubica estos puntos en la gráfica en color verde.

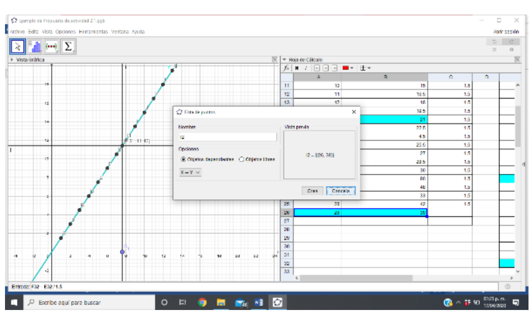
Resalta el periodo trazando un segmento de recta verde.

Paso 1. Coloca el punto para 39 kilómetros de distancia en la tabla 1, pon atención en colocar en la columna correcta el tiempo y la distancia.

Paso 2. Selecciona los datos para 39 km de distancia en la tabla 1, click izquierdo en "lista de puntos".

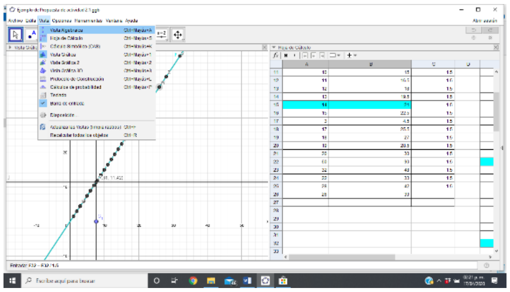


Paso 3. Click izquierdo sobre "crear".

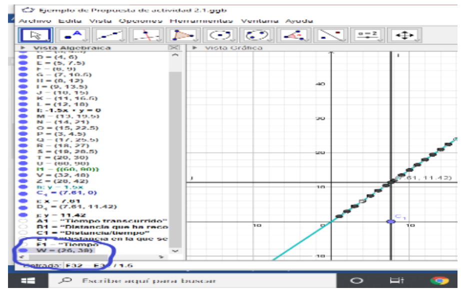


En caso de no poder ver el punto (26, 39):

<u>Paso 1.</u> Activa “vista algebraica”.

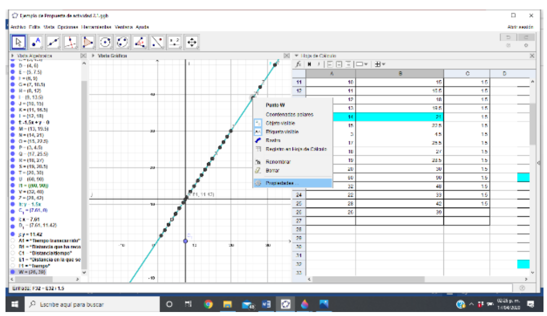


<u>Paso 2.</u> Busca el punto creado con base en las coordenadas y da click izquierdo sobre el punto.

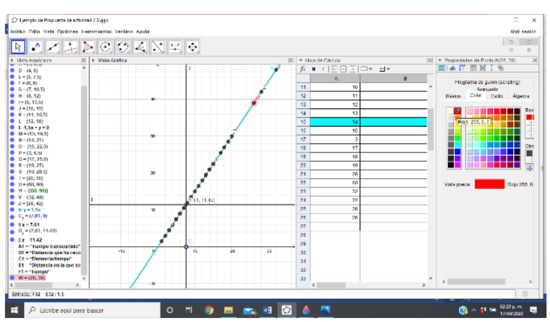


Para cambiar el color a rojo de ambos puntos:

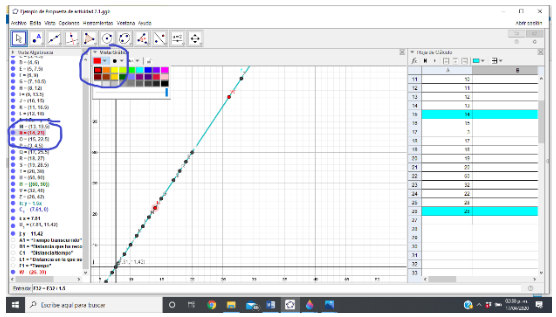
<u>Paso 1.</u> Click derecho sobre el punto, click izquierdo sobre “propiedades”.



<u>Paso 2.</u> Click izquierdo sobre el cuadrado de color rojo.

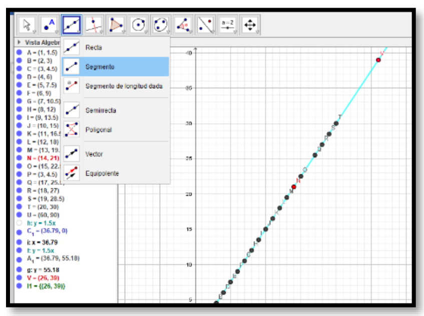


Paso 3. Click izquierdo sobre la flecha de “vista gráfica”, click izquierdo sobre el rectángulo que despliega el menú de colores, click izquierdo sobre el rectángulo rojo. Observa que también cambia de color del punto en la vista algebraica.



Para trazar el segmento,

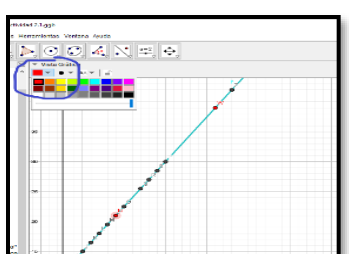
Paso 1. Click izquierdo sobre el ícono “recta”, click izquierdo sobre segmento.



Paso 2. Click izquierdo sobre el punto (14, 21), luego click izquierdo sobre el punto (26, 39)

Para cambiarlo de color:

Click izquierdo sobre la flecha de “vista gráfica”, click izquierdo sobre el rectángulo que despliega el menú de colores, click izquierdo sobre el rectángulo rojo.



30. En el periodo de 25 y 40 minutos, ¿cuál será la distancia mínima y la máxima que recorrerá el autobús? (**F5**)____
    Ubica estos puntos en la gráfica en color verde.
    Resalta el periodo trazando un segmento de recta verde.
    Sigue el procedimiento de la pregunta anterior.
31. ¿Cómo se simboliza la regla para calcular la distancia recorrida por el autobús en cualquier momento? (**F6**) ____
32. ¿Cuáles son los valores que no cambian en esta representación? ________________
    ____
    ¿Y cuáles los que cambian**?** ____
    ____

Compara tus construcciones, procedimientos y respuestas con los de tus compañeros.

GUION PARA EL PROFESOR

PROPUESTA 3 DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Conocimientos previos de Geogebra5.

- Construye una tabla en la hoja de cálculo. Multiplica los datos de la columna A por la columna B. Divide los datos de la columna B entre los datos de la columna A.
- Guardar un archivo.
- Guarda los cambios en un archivo ya guardado.
- Cambiar la escala usada en el plano cartesiano.
- Convertir los datos de dos columnas en lista de puntos.
- Trazar un segmento de recta.
- Ubicar un punto en la recta.
- Ocultar un objeto.
- Localizar la barra de entrada y escribir una función y=x.
- Trazar perpendicular que pase por un punto determinado.
- Ubicar el punto de intersección entre dos rectas.
- Cambiar el color de un segmento de recta y de un punto.
- Mostrar la etiqueta de valor de un punto.
- Mover un objeto.
- Activar vista algebraica y vista gráfica.
- Hacer más grande o más pequeño el plano cartesiano.

Ligas de internet para iniciar con el manejo de Geogebra5.

Gómez, G. (2017). *Introducción a Geogebra*. [En línea] Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=iXB24rJem0w&t=290s

Saidon, L. (2013). *Guía de inicio rápido. Geogebra* [En línea] Disponible en: https://wiki.geogebra.org/uploads/a/a4/Gu%C3%ADa_Tablets%25Win_8_.pdf

Objetivos de aprendizaje.

Que los alumnos:

- Reconozcan a partir del problema verbal, que existe una correspondencia entre los valores de las dos variables involucradas.
- Simbolicen la relación funcional de correspondencia.
- Determinen el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra.

INSTRUCCIONES. Lee el enunciado del problema y completa la tabla.

SESIÓN 1

33. Un autobús que parte de la terminal, después de cierto tiempo ha recorrido las distancias que se muestran en la siguiente tabla. (**F1**) Completa los datos faltantes.

TIEMPO (minutos)	**DISTANCIA (kilómetros)**
60	90
40	**60**
12	18
5	7.5
2	**3**
1	**1.5**

Después de observar la tabla pregunte, ¿Cuáles son los datos del problema que proporcionan información para poderlo resolver?

Realiza lo que se te pide.

34. ¿Qué operaciones tuviste que hacer para completar los datos faltantes de la tabla anterior? (**F2**)

Los posibles procedimientos que usarán los alumnos son:
$90 \div 60 = 1.5$ → **30*1.5=45** $\frac{60}{30} = \frac{90}{x=45}$
Es importante que no sugiera ningún procedimiento antes de que los alumnos contesten esta pregunta.

Comparen entre compañeros los procedimientos que usaron y escriban ¿cuáles fueron las diferencias y similitudes?

35. ¿A qué se refieren los datos 40, 12, 5, etc. en el problema anterior? **El tiempo en minutos**

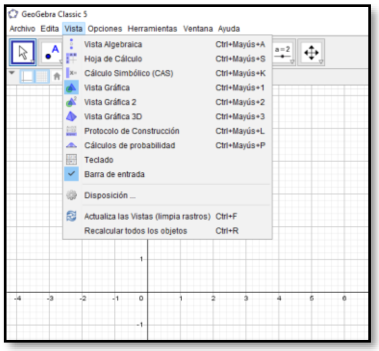
36. ¿Qué representan las otras cantidades que escribiste en el procedimiento?

El 90, 60, 18, 7.5, 3 y 1.5 representan la distancia recorrida por el autobús en un tiempo determinado. El 1.5 representa la posición que ocupará el autobús después de un minuto.

Si los alumnos utilizan la regla de tres escriba en el pizarrón las fracciones equivalentes, para este ejemplo: $\frac{45}{30}$ y $\frac{90}{60}$, pregunté ¿Qué operación tendrían que hacer si sólo conocieran el tiempo para poder calcular los kilómetros?

37. Utiliza una hoja de cálculo en Geogebra para obtener una tabla que represente esta situación. En la columna ***A*** coloca el tiempo transcurrido e increméntalo de uno en uno hasta 20min. En la columna ***B*** calcula la distancia que recorre el autobús con la fórmula general. (**F3**)

Permita que los alumnos usen cualquiera de los procedimientos que encontraron anteriormente.



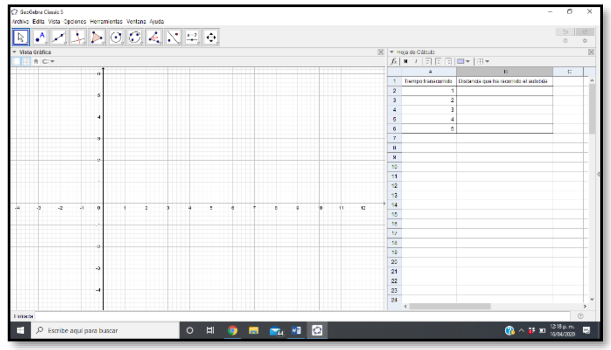


TABLA 1

	A	B
1	Tiempo transcurrido	Distancia que ha recorrido el autobús
2	**1**	**Antes de escribir cualquier operación deben escribir el signo =**
3	**2**	**=**
4	**3**	**=**

38. ¿A qué distancia se ubicará el autobús a los 7, 16 y 20 minutos? **10.5km, 24km y 30km**

Compara tus procedimientos y respuestas con tus compañeros.

Escribe en la tabla de arriba las operaciones que hiciste y el resultado que obtuviste en Geogebra5.

Guarda tu archivo con el nombre: sesión 1_(Aquí escribe tu nombre por ejemplo: Paco), para continuar con el trabajo la siguiente sesión.

SESIÓN 2

Continúa trabajando individualmente.

39. En la columna C, divide 5 valores de la columna de la distancia, entre la columna del tiempo. Recuerda que el símbolo para expresar división es: /. ¿Qué resultados obtuviste? **_1.5 _**

TABLA 1

	A	B	C
1	Tiempo transcurrido	Distancia que ha recorrido el autobús	Distancia/Tiempo
2	**1**		**= Seleccionar celda de la columna B/ Celda de la columna A**
3	**2**		**=B3/A3**
4	**3**		**=B4/A4**
5	**4**		**=B5/A5**

Haga hincapié en que 1.5 es la constante de proporcionalidad tanto para calcular el tiempo, como la distancia. Comente que cuando se divide distancia entre tiempo se está hablando de velocidad.

Escribe en la tabla de arriba las operaciones que hiciste y el resultado que obtuviste en Geogebra5.

40. ¿Cómo puedes ocupar el resultado de la columna C para calcular la distancia recorrida por el autobús? **Multiplicando 1.5 por el tiempo, si no logran contestar esta pregunta pida que lean la información de abajo.**

Si los estudiantes hacen procedimientos donde no aparece la constate 1.5, pregunte ¿qué distancia recorre el autobús en un minuto? con la intención de guiarlos para llegar a esta representación:

1.5*60=90

Una fórmula general para hacer esto es:

1.5* (tiempo transcurrido) = ubicación del autobús en kilómetros

Comente que la fórmula general les permitirá calcular la distancia recorrida por el autobús en cualquier momento.

Una posible fórmula para calcular la distancia del autobús puede expresarse así:

a $* \, x = y$

Es decir: 1.5 por (el tiempo transcurrido) = Distancia del autobús en kilómetros

En donde **"a"** representa un número constante, y las variables están

41. En la columna B borra 5 resultados y utiliza la fórmula para calcular nuevamente la distancia. ¿Hubo cambios en los resultados? No_____

	A	B	C
1	Tiempo transcurrido	Distancia que ha recorrido el autobús	Distancia/Tiempo
2	**1**	**=1.5*1**	
3	**2**	**=1.5*2**	

Pregunte a los alumnos: ¿Lo que has realiza hasta aquí te ayuda a resolver el problema?, ¿Cuál es la solución del problema?

Compara y discute tus respuestas con tus compañeros.

Guarda los cambios en tu archivo.

SESIÓN 3

Continúa trabajando de manera individual.

42. Si ahora debes calcular el tiempo que se necesita para que el autobús recorra la distancia de 45 kilómetros. ¿Qué requieres hacer? (**F3**) **45/1.5= 30** **Si los alumnos no logran calcular el tiempo, sugiera que continúen con los cálculos en la tabla 1, hasta que encuentren la distancia de 45 kilómetros.**

43. ¿Qué representan el número 45 en la pregunta anterior? **la distancia recorrida por el autobús** ¿Qué representan las otras cantidades que escribiste en el procedimiento? **El 1, 2, 5, 12, 40, 60 representan el tiempo. El 90, 60, 18, 7.5, 3 y 1.5 representan la distancia del autobús en un tiempo determinado. El 1.5 representa la distancia del autobús después de un minuto.**

44. Escribe en el recuadro los diferentes procedimientos que usaron para calcular los minutos.

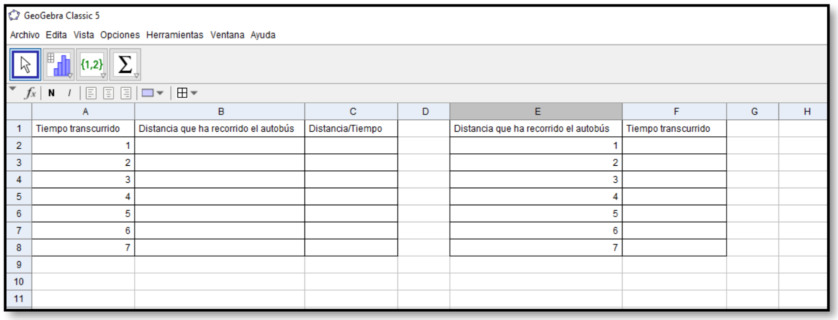
Compara y discute tus procedimientos y respuestas con tus compañeros.

Continúa trabajando de manera individual.

45. En Geogebra, deja en blanco una columna a la derecha de la tabla 1. Elabora la tabla 2, coloca en la columna ***A*** la distancia recorrida por el autobús, es decir, su posición respecto a la terminal e increméntala de uno en uno hasta 30km. En la columna ***B*** calcula el tiempo transcurrido con la fórmula general. (**F3**)

Comente que en la tabla 1 se calcularon distancias, pero en la tabla 2 se les pide calcular el tiempo.

TABLA 2



GeoGebra Classic 5

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Tiempo transcurrido	Distancia que ha recorrido el autobús	Distancia/Tiempo		Distancia que ha recorrido el autobús	Tiempo transcurrido		
2	1				1			
3	2				2			
4	3				3			
5	4				4			
6	5				5			
7	6				6			
8	7				7			
9								
10								
11								

46. ¿Cómo puedes ocupar el resultado de la columna C de la tabla 1 para calcular el tiempo transcurrido? **En caso de que los alumnos escriban otros procedimientos o no sepan cómo calcular el tiempo, pida que lean los párrafos de abajo y comente: Una vez que calculaste que el autobús recorre 1.5 km por minuto, multiplicas por el tiempo para obtener la distancia; pero si ahora te doy la distancia, ¿qué operación debes hacer con 1.5 para obtener el tiempo? con la intención de que guiarlos para llegar a esta representación:**

$$\mathbf{45 \div 1.5 = 30}$$

Si observas la fórmula para calcular la posición del autobús puede expresarse así:

$$\frac{y}{a} = x$$

que es lo mismo que: $y/a = x$

$$(distancia\ recorrida\ por\ el\ autobús)\ entre\ 1.5 = Tiempo\ transcurrido$$

En donde “a” representa un número constante y las variables están representadas por “*x*” y “*y*”.

47. En la columna B borra los 5 primeros resultados y utiliza la fórmula para calcular nuevamente el tiempo. ¿Hubo cambios en los resultados? No____________

48. ¿Existe alguna relación entre el tiempo y la distancia recorrida por el autobús?, en caso de ser afirmativa tu respuesta explica cómo es esa relación. (**F4**)_______ **Comente que si aumenta el tiempo aumenta la distancia y viceversa.**

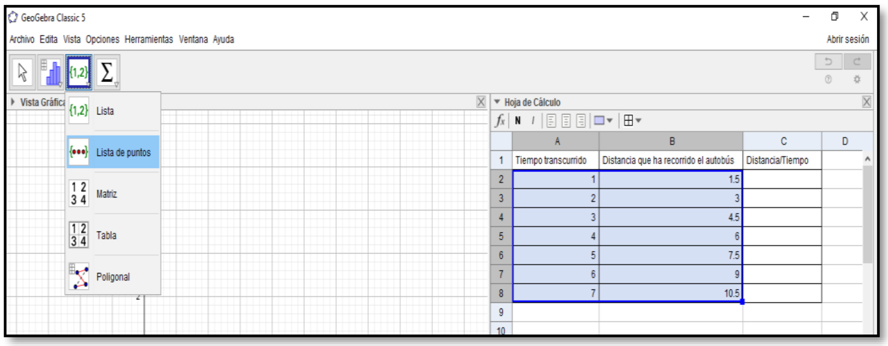
Compara y discute tus procedimientos y respuestas con tus compañeros.

Guarda los cambios en tu archivo.

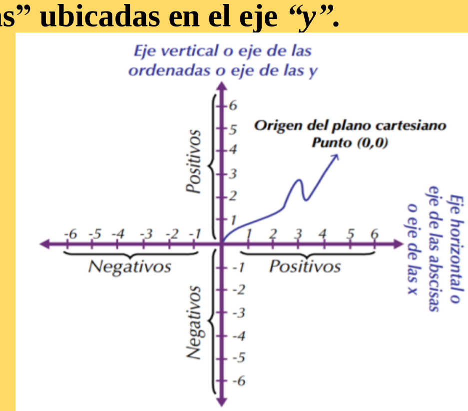
SESIÓN 4

Continúa trabajando individualmente.

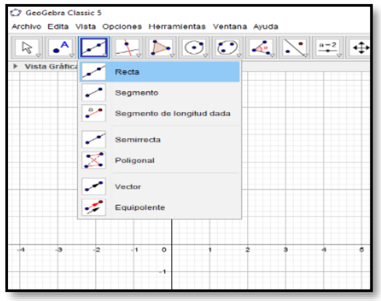
49. En Geogebra, usa la tabla 1 de la pregunta 5, selecciona los datos numéricos de las columnas A y B, conviértelos a “lista de puntos” para que se marquen estos puntos en el plano cartesiano.



Si observas todos los números de la columna A representan los valores de las “abscisas” ubicadas en el eje *“x”* y la columna B representan los valores de las “ordenadas” ubicadas en el eje *“y”*.



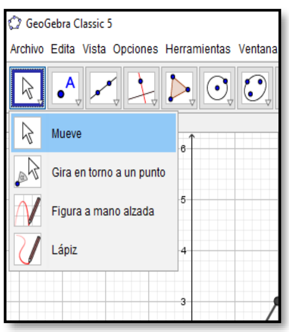
50. Construye una "recta" del punto A= (1,1.5) al punto B= (2,3). ¿Esta recta pasa por todos los puntos que fueron marcados en el plano cartesiano? __**Si**__



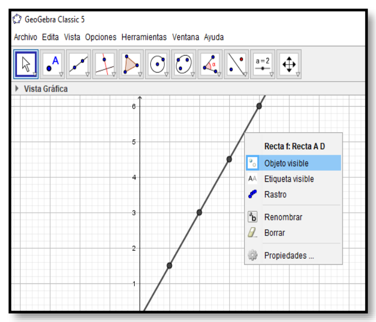
51. Agrega a la tabla 1 el punto (32, 48) y usando la fórmula general encuentra otros dos puntos diferentes a los que ya están marcados, conviértelos a "lista de puntos", ¿se ubican estos nuevos puntos sobre la recta? __**Si**__

52. Oculta la recta que trazaste.

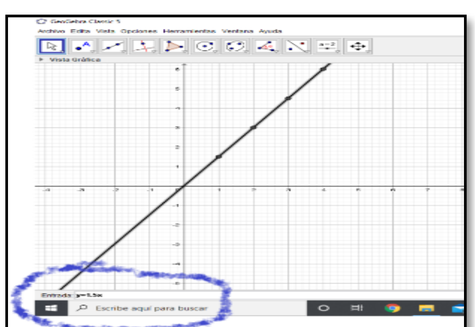
Paso 1. Click izquierdo sobre la opción "mueve".



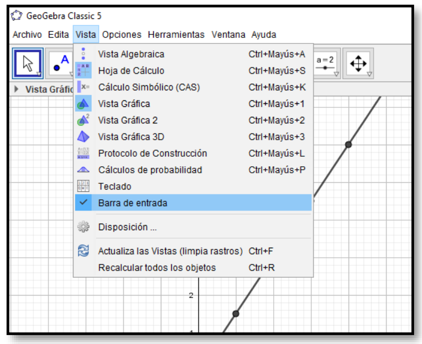
Paso 2. Coloca el cursor sobre la recta y click derecho en el botón del mouse.



53. Escribe en la barra de entrada la fórmula y=1.5x, ¿qué sucedió? __**La recta correspondiente a la función y=1.5x es igual a la recta que pasa por los puntos de la tabla de la pregunta 5**__

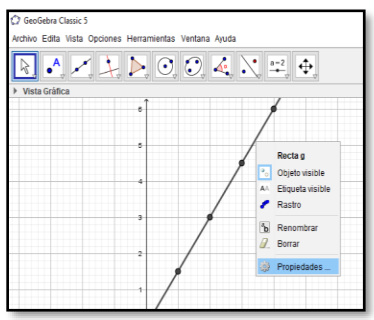


Si no aparece la barra de entrada, de click izquierdo en "vista", luego click izquierdo en "barra de entrada".

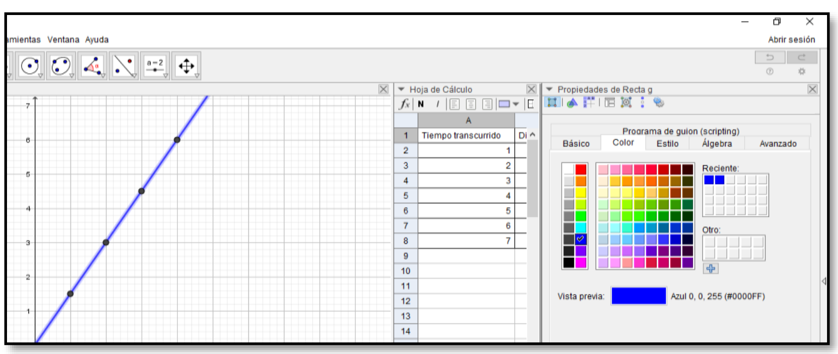


54. Cambia el color de la línea recta a azul.

<u>Paso 1.</u> Click derecho sobre la recta, luego click izquierdo en "propiedades".



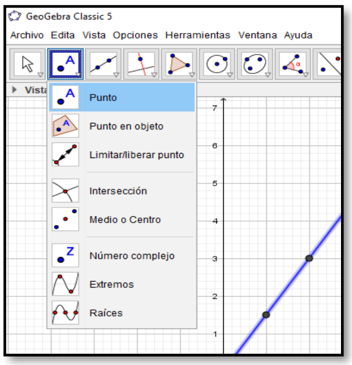
<u>Paso 2.</u> Click sobre el color azul de tu preferencia.



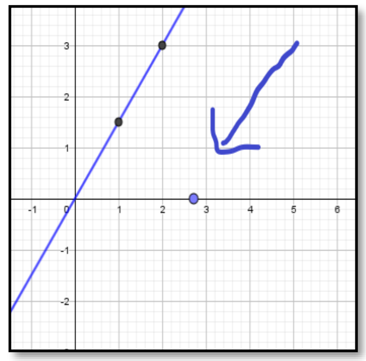
Observa que has representado las condiciones del problema, de 3 formas diferentes: con la *tabla*, con la *recta o gráfica* que trazaste sobre los puntos y finalmente con la fórmula *y=1.5x*

55. Coloca un punto sobre el eje "x" (abscisas).

Paso 1. Click izquierdo sobre la opción "punto".

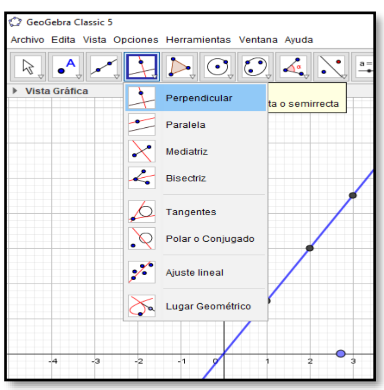


Paso 2. Click izquierdo sobre el eje "x" (abscisas)

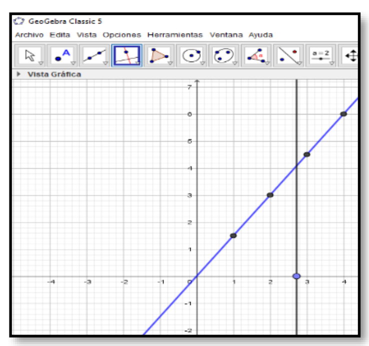


56. Traza una recta perpendicular al eje "x", que pase por ese punto.

Paso 1. Click izquierdo en "perpendicular"

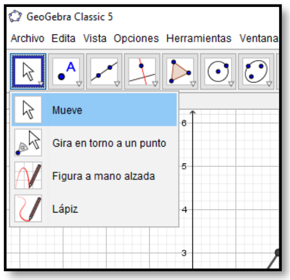


Paso 2. Click izquierdo sobre el punto marcado en el eje "x" (abscisas) y después click izquierdo sobre el eje "x" (abscisas)

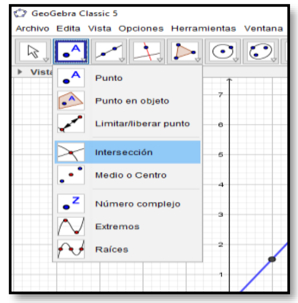


57. Marca la intersección de esa recta con la gráfica y=1.5x. En un puto distinto a los ya marcados.

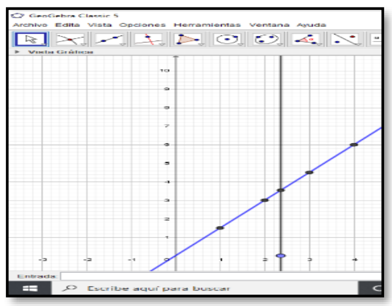
Paso 1. Click izquierdo sobre “mueve”.



Paso 2. Click izquierdo sobre “intersección”.

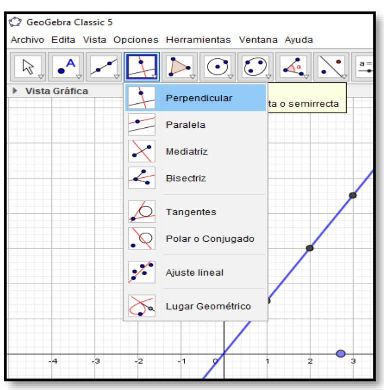


Paso 3. Click izquierdo sobre la perpendicular y luego click izquierdo sobre la gráfica.

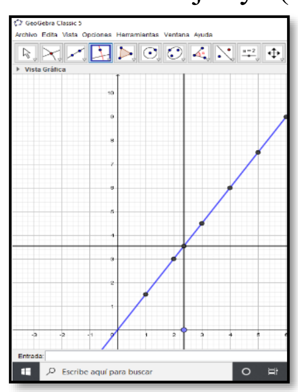


58. Traza una perpendicular al eje *y* (ordenadas), que pase por el punto de intersección.

Paso 1. Click izquierdo en “perpendicular”.



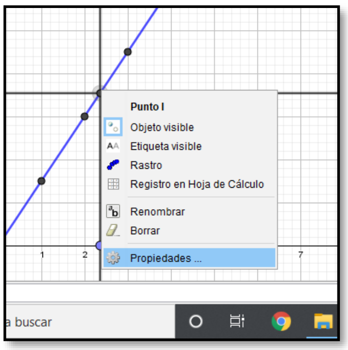
Paso 2. Click izquierdo sobre el “punto de intersección” y luego click izquierdo sobre el eje “y” (ordenadas).

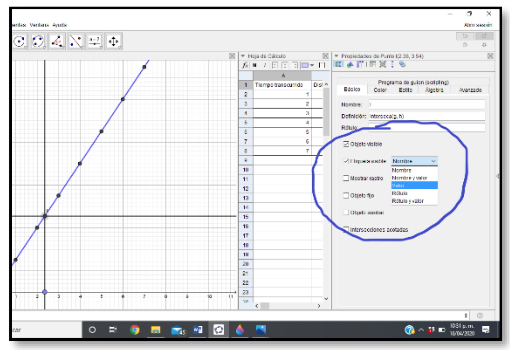


59. Selecciona el “punto de intersección” y activa su “etiqueta de valor”.

Paso 1. Click derecho sobre “punto de intersección” y click izquierdo sobre “propiedades”.

Paso 2. Click izquierdo sobre “básico”, click izquierdo sobre “nombre” a un lado de “etiqueta visible”, click izquierdo sobre “valor”.





60. Mueve el punto que esta sobre el eje “x” (abscisas), observa la “etiqueta de valor”, ¿qué pasa con el valor de “y” (ordenadas), cuando cambias el valor en el eje “x” (abscisas)? **El valor de las ordenadas cambia de manera proporcional**

Si observas, todos los números de la columna A representan los valores de las **abscisas** ubicadas en el eje ***“x”*** y la columna B

Compara tus construcciones, trazos, procedimientos y respuestas con los de tus compañeros. Guarda los cambios en tu archivo.

SESIÓN 5

Continúa trabajando individualmente.

Utiliza las dos tablas que elaboraste en Geogebra para contestar las preguntas 21 y 24.

Estas preguntas tienen la finalidad de que el alumno determine intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

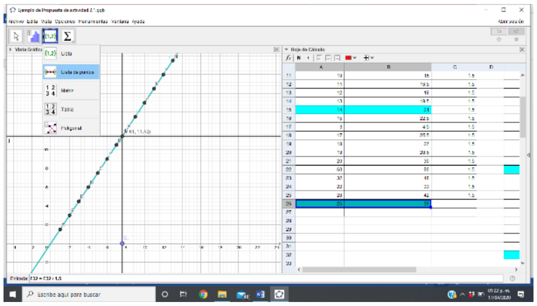
61. ¿En qué periodo de tiempo el autobús recorrerá alguna distancia entre 21 y 39 kilómetros? **entre 14 y 26 minutos. Si los alumnos no lo notan, pregunte ¿cuáles son los datos del tiempo? Pues corresponden a las abscisas (“x”) que son el 14 y 26, mientras que las distancias 21 y 29 van en las ordenadas (“y”), por lo tanto los puntos son (14, 21) y (26, 39)**

Ubica estos puntos en la gráfica en color rojo.

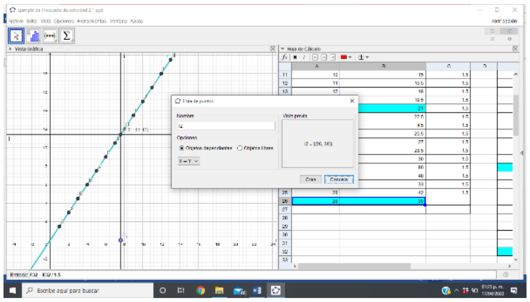
Resalta el periodo trazando un segmento de recta rojo.

Paso 1. Coloca el punto para 39 kilómetros de distancia en la tabla 1, pon atención en colocar en la columna correcta el tiempo y la distancia.

Paso 2. Selecciona los datos para 39 km de distancia en la tabla 1, click izquierdo en “lista de puntos”.

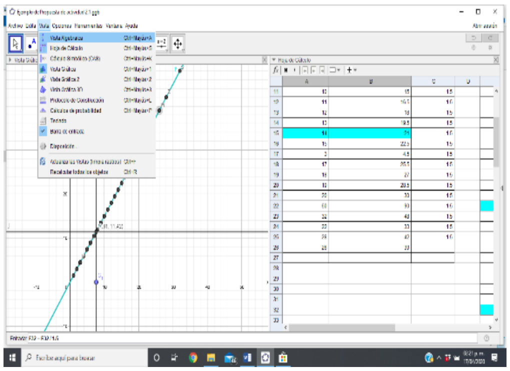


Paso 3. Click izquierdo sobre “crear”.

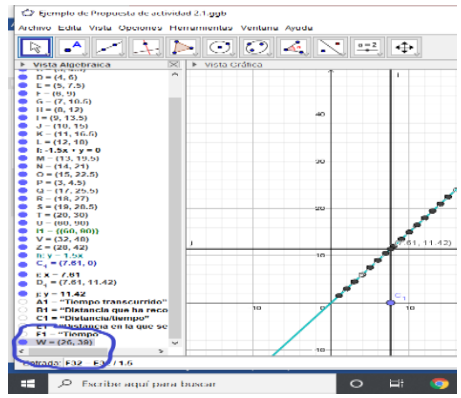


En caso de no poder ver el punto (26, 39):

Paso 1. Activa "vista algebraica".

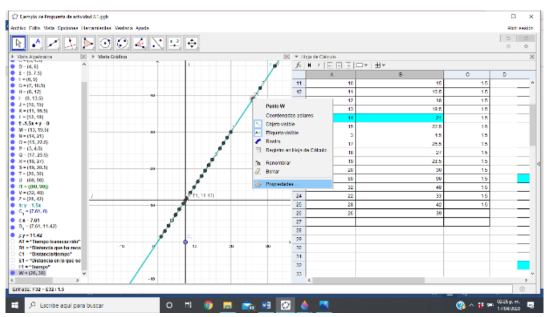


Paso 2. Busca el punto creado con base en las coordenadas y da click izquierdo sobre el punto.

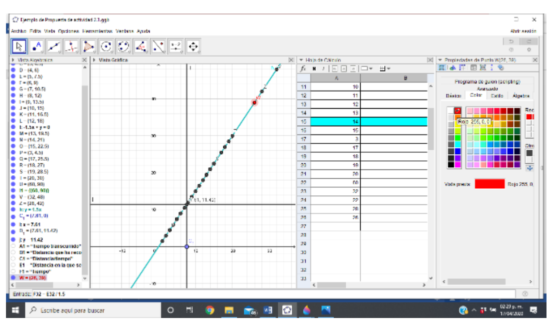


Para cambiar el color a rojo de ambos puntos:

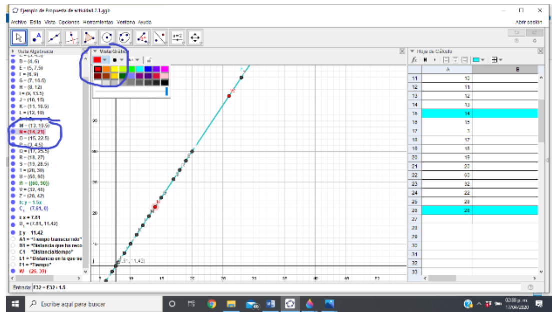
Paso 1. Click derecho sobre el punto, click izquierdo sobre "propiedades".



Paso 2. Click izquierdo sobre el cuadrado de color rojo.

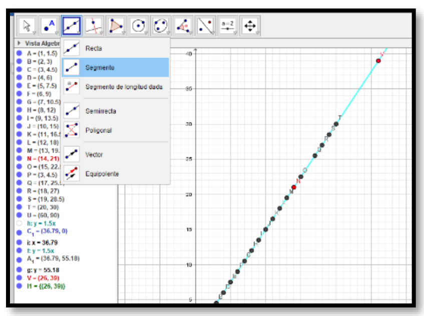


Paso 3. Click izquierdo sobre la flecha de "vista gráfica", click izquierdo sobre el rectángulo que despliega el menú de colores, click izquierdo sobre el rectángulo rojo. Observa que también cambia de color del punto en la vista algebraica.



Para trazar el segmento,

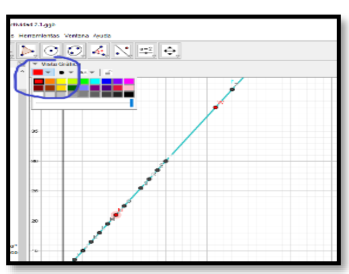
Paso 1. Click izquierdo sobre el ícono "recta", click izquierdo sobre segmento.



Paso 2. Click izquierdo sobre el punto (14, 21), luego click izquierdo sobre el punto (26, 39)

Para cambiarlo de color:

Click izquierdo sobre la flecha de "vista gráfica", click izquierdo sobre el rectángulo que despliega el menú de colores, click izquierdo sobre el rectángulo rojo.



62. En el periodo de 25 y 40 minutos, ¿cuál será la distancia mínima y la máxima que recorrerá el autobús? (**F5**)**Mínimo 37.5 km y máximo 60 km_**

    Ubica estos puntos en la gráfica en color verde.

    Resalta el periodo trazando un segmento de recta verde.

    Sigue el procedimiento de la pregunta anterior.

63. ¿Cómo se simboliza la regla para calcular la distancia recorrida por el autobús en cualquier momento? (**F6**) **_y=_1.5x_(Tener en cuenta que los estudiantes pueden dar otras respuestas, comente que el procedimiento más simple es la expresión: y=1.5x)__**

64. ¿Cuáles son los valores que no cambian en esta representación**?__1.5_(Es posible que el estudiante podría decir que x no cambia o y, porque los ve fijos en la fórmula)**, ¿Y cuáles los que cambian**? _Los valores que representan el tiempo y la ubicación del autobús__**

Compara tus construcciones, procedimientos y respuestas con los de tus compañeros.

Extensión de la actividad:

Pedir a los alumnos que cambien la pendiente **de la recta en la expresión y=**1.5**x y observen qué sucede con la gráfica, que logren determinar que la pendiente de la función determina la ubicación e inclinación de la gráfica.**

CAPÍTULO 5

Conclusiones

> La cultura digital resulta ser una de las competencias esenciales que los individuos deben adquirir, lo cual involucra conocer los cambios que produce el empleo de esas herramientas en los contenidos matemáticos y en la resolución de problemas.
>
> LUZ MANUEL SANTOS TRIGO
>
> *La educación matemática en el siglo XXI.*

El propósito de este último capítulo es presentar las conclusiones generales que se obtuvieron tomando como eje la pregunta de investigación que tenía como objetivo analizar y proponer una secuencia de actividades para trabajar el tema de variación lineal, en primer año de telesecundaria, desde la propuesta didáctica de los tres usos de la variable, la metodología de resolución de problemas y el uso de la tecnología como herramienta de aprendizaje. Posteriormente, se describen las reflexiones finales en torno a los alcances y limitaciones de esta investigación, así como problemáticas que se desprenden de los resultados obtenidos y que pueden ser retomados en investigaciones futuras.

La pregunta que buscó responder esta investigación es ¿Cómo diseñar actividades de aprendizaje que apoyen a reconocer la correspondencia entre los valores de dos variables involucradas en un problema, a simbolizar la relación funcional de correspondencia entre ellas y a determinar el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra, con base en la metodología didáctica de los tres usos de la variable y el uso del programa de Geogebra5?

Para responderla a continuación se presenta el proceso que se siguió para diseñar la propuesta de actividades didácticas implementadas en este trabajo investigativo:

a) Identificar el concepto de matemáticas que será la base de toda la propuesta.

Se planteó por qué es importante el aprendizaje de las matemáticas dentro de la educación formal de un ser humano y se complementó el concepto de matemáticas planteado por las autoridades educativas, con definiciones dadas por otros autores, partiendo de la idea de que el enfoque debe ir más allá de la mecanización.

En el aprendizaje de las matemáticas es fundamental que el estudiante aprenda a formular preguntas y que reflexione abiertamente sobre los conceptos, problemas y estrategias de resolución. Aceptando que la actividad de aprender no se reduce a un conjunto de reglas que pueden aplicarse en la resolución de problemas, por el contrario, es una conceptualización dinámica de las matemáticas (Santos Trigo, 2014).

b) Tener claro el enfoque epistemológico y didáctico.

La secuencia de actividades propuesta en este documento de investigación parte de la información didáctica que se encuentra en el libro “Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio para la educación básica” (SEP, 2017). De este se retomaron el enfoque epistemológico constructivista, los objetivos de aprendizaje para el tema de: “variación lineal 1” y la metodología didáctica resolución de problemas y uso de la tecnología.

Posteriormente, se investigó cada uno de estos elementos para identificar sus principales características, mencionados en el marco teórico-conceptual, se observó que no había ninguna propuesta didáctica enfocada a la enseñanza de variación lineal, por lo que se complementó la investigación con la metodología del uso de las tres variables (Ursini et al., 2016).

c) Establecer los aprendizajes que se pretenden lograr al finalizar las actividades.

Los aprendizajes esperados son los establecidos por la Secretaría de Educación Pública, en el plan y programa de matemáticas para primero de secundaria (SEP, 2017). Con los cuales se pretende que el alumno: i) reconozca a partir del problema verbal, que existe una correspondencia entre los valores de las dos variables involucradas, ii) simbolice la relación funcional de correspondencia y iii) determine el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra.

d) Establecer la estructura didáctica de las actividades.

Fue necesario considerar alguna estructura didáctica que le diera orden pedagógico a las actividades y al proceso de aprendizaje. Para este estudio, se retomaron los tres componentes de las secuencias didácticas de telesecundaria (SEP, 2018b): a) Recuperación de conocimientos previos. b) Actividades de estudio para lograr la intención didáctica de cada secuencia, conformadas por situaciones problemáticas acordes a la edad y a las características de los alumnos de este grado, que pretenden vinculen lo que ya saben con el análisis de lo que están aprendiendo. Con la intención de favorecer la deducción de nuevas estrategias de solución. c) Actividades en las que los alumnos concretan lo aprendido durante la secuencia a través de la resolución de problemas, que les permitan la puesta en práctica del conocimiento nuevo y un mejor entendimiento de lo aprendido.

e) Elegir la metodología didáctica: resolución de problemas, los tres usos de la variable y el uso de tecnología digital como herramienta de aprendizaje.

La Secretaría de Educación Pública establece que la enseñanza de las matemáticas se basará en la resolución de problemas y uso de herramientas tecnológicas, pero los libros de texto utilizan las herramientas tecnológicas sólo para resolver ejercicios. Así que fue necesario diseñar la propuesta de actividades basada en el uso de herramientas tecnológicas que permitieran a los estudiantes examinar cualidades matemáticas asociadas al proceso de solución, usar diversas representaciones, plantear conjeturas, utilizar argumentos y distintos recursos que les permiten examinar cualidades matemáticas asociadas al proceso de solución comunicar resultados (Barrera y Santos, 2002).

Se investigó una metodología didáctica enfocada a la enseñanza de la variable, se eligió “los tres usos de la variable” (Ursini et al, 2016), porque está acorde con el enfoque epistemológico constructivista, a través de la resolución de problemas y uso de la tecnología.

f) Elegir el contexto de la situación problemática.

La situación problemática puede estar situada en contextos muy diversos, por ejemplo: de llenado o vaciado de recipientes, fenómenos de movimiento rectilíneo, compra de artículos, geometría, etc. Sin embargo, los problemas deberán involucrar cantidades ligadas por una relación sencilla: de proporcionalidad directa ($y=kx$), aditiva ($y = x + a$) o afín ($y = ax + b$), ya que es el primer acercamiento "formal" a la variable en una relación funcional (Ursini, 2016). Para la propuesta se usó un problema de velocidad constante, que es un tema relacionado con actividades cotidianas de los alumnos.

g) Redactar los enunciados de las situaciones problemáticas, actividades y preguntas.

La metodología didáctica de los tres usos de la variable (Ursini et al., 2016), retoma la resolución de problemas y el uso de tecnología digital como herramienta de aprendizaje. Propone diferentes tipos de preguntas y actividades para que el estudiante aplique sus conocimientos previos, adquiera nuevos, realice procesos de metacognición y exprese conjeturas y resultados, entre otros. Estas fueron modificadas acorde al contexto en el que se planteó la situación problemática.

h) Elaborar un guion didáctico para el profesor.

El guion didáctico para el docente, es indispensable en el subsistema de telesecundaria, ya que los profesores imparten diez asignaturas en un grado y los perfiles profesionales son muy variados. En el mejor de los casos, el profesor, se especializa en alguna de las asignaturas; pero es posible encontrar profesionistas casi de cualquier rama, impartiendo clases en este subsistema.

Este documento tuvo el objetivo de apoyar al profesor titular del grupo, con posibles respuestas a las que los alumnos podían llegar; así como sugerirle el tipo de preguntas o ideas que podía plantear con la intención de profundizaran en los diferentes momentos didácticos. De tal manera que, aun sin ser especialista en matemáticas y su enseñanza, pueda trabajar con el enfoque epistemológico y la metodología didáctica que se propone en las actividades de esta investigación. Como se menciona en la metodología de enseñanza basada en la resolución de problemas, la cual establece que el papel del profesor es guiar la discusión de los alumnos a través de preguntas para que se planteen diferentes caminos de actuación y realicen procesos metacognitivos (Santos Trigo, 2014).

i) Aplicar y analizar secuencia de actividades.

A partir de la aplicación de las actividades se pudieron detectar las confusiones que la sintaxis o algunas palabras provocaron en los estudiantes. Además, comprobar que las actividades y preguntas eran claras en relación a lo que se pretendía que los alumnos respondieran o realizaran. En fin, se pudo analizar si se lograban los objetivos de aprendizaje que se tenían planeados.

j) Hacer los cambios pertinentes.

Con base en el análisis de la aplicación de las actividades, se pudieron hacer las correcciones y agregados; tanto en la redacción de los problemas, preguntas y actividades; como en el formato de la actividad, ya fuese resaltar información o para que el proceso de aprendizaje se diera de mejor manera.

Es importante mencionar que, aún después de corregir y volver a aplicar las actividades propuestas, se identificaron aspectos que requerían ser corregidos o rediseñados con la intención de reducir confusiones tanto de manejo del software como sobre las acciones que se piden realicen los estudiantes.

5.1. Reflexiones finales.

Enfoque epistemológico, constructivismo.

Aunque el modelo educativo mexicano está basado en un enfoque epistemológico constructivista, la metodología didáctica de resolución de problemas y uso de las herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Se detectó que, a las actividades del tema de variación lineal 1, del libro de texto de primero de telesecundaria, les faltan varios de los elementos que conforman ese marco teórico.

Contexto disciplinar.

Los resultados mostraron que la propuesta de actividades favorece el logro de los objetivos de aprendizaje planeados:

Que los alumnos:

- Reconozcan a partir del problema verbal, que existe una correspondencia entre los valores de las dos variables involucradas.
- Simbolicen la relación funcional de correspondencia.
- Determinen el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra.

Pero se requiere una inversión de tiempo para su resolución de aproximadamente nueve horas de trabajo.

El guion del profesor pretende orientarlo respecto a sus intervenciones y apoyos que puede brindar a los estudiantes para que sean acordes con la metodología didáctica. Sin embargo, se pudo observar que el docente hará las aportaciones que, desde su perspectiva, considere adecuadas, ya sea retomando las sugeridas, complementándolas o haciendo comentarios totalmente diferentes a lo escrito en el documento.

Por tanto, es fundamental que los profesores conozcan a profundidad el modelo educativo y la metodología didáctica con los cuales van a trabajar. Ya que su papel y participaciones durante el proceso de aprendizaje será determinado por estos referentes, pues al hacer el análisis de la información recabada en las grabaciones y las hojas de trabajo, se observó que los comentarios del profesor determinaron el tipo de procedimientos, argumentos y conclusiones a los que llegaron los participantes.

Se observaron mejores resultados cuando los alumnos iniciaron trabajando de manera individual, escribieron su procedimiento y posteriormente lo compartieron con sus compañeros.

El modelo didáctico de los tres usos de la variable, retoma el gran parte del marco teórico-conceptual en el que se basa la educación pública en México. Así que puede ser una propuesta adecuada para abordar el tema de variación lineal en secundaria para el logro de los objetivos de aprendizaje.

Uso de tecnología digital.

No todas las escuelas telesecundarias cuentan con computadoras actualizadas y mucho menos con la cantidad suficiente para que los estudiantes puedan trabajar de manera individual durante las clases. Así que es necesario verificar que el equipo este en óptimas condiciones antes de iniciar con las actividades. Ya que las fallas con el equipo provocaron que se desviara la atención de los contenidos de la materia para poder resolverlas.

De igual forma, el desconocimiento del funcionamiento del programa Geogebra5, implicó para los alumnos desviar su atención para poder realizar las actividades, por ejemplo: expresar la operación de división, trazar un objeto o cambiar su color. El profesor por su parte, tuvo que explicar los pasos a seguir para realizar las actividades, ignorando o poniendo poca atención a algunas de las respuestas de los alumnos y provocando muchos tiempos muertos. Por tanto, es importante hacer la introducción a Geogebra5, aunque los estudiantes ya conozcan el software.

Es importante considerar que el uso de herramientas tecnológicas, puede requerir una inversión de tiempo mayor, ya que además de realizar los cálculos en el programa de geometría dinámica, es deseable que también los escriban en las hojas, porque generalmente los adolescentes no cuentan con equipo de cómputo propio, convirtiendo ese material en el único que podrán utilizar para retomar los procedimientos, deducciones, conjeturas y resultados.

Los participantes lograron resolver la propuesta de actividades, aun cuando no tenían conocimientos previos como la ejecución de operaciones básicas (multiplicación y división), el plano cartesiano, ubicación de puntos en el plano cartesiano, entre otros.

REFERENCIAS

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. International Journal for Computers for Mathematics Learning. 5: 25-45.

Artigue, M. (2012). Enseignement et apprentissage de l'algèbre. Recuperado el 19 de octubre de 2018 en http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-artigue-1

Ausubel D., Novak J. y Hanesian H. (2006). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo.* -Reimpresión- Ciudad de México, México, Trillas.

Barreto C., Gutiérrez L., Pirilla B. y Parra C. (s/f). Límites del constructivismo pedagógico. En *Educación y valores*. La Sabana, Colombia 1 (9), p. p. 11-31

Barrera, F. y Santos, M. (2002). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamentos. En Ministerio de Educación Nacional (ed.). *Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. p.p. 166-185. Santa Fe de Bogotá, Colombia.

Butto, C., y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación matemática*, *22*(3), 55-86. Recuperado en 18 de agosto de 2018, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262010000300004&lng=es&tlng=es.

Campos, M. y Torres, A. A. (2017). Las tareas de aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas a distancia. *Bachillerato a distancia.* 9(17), P. p. 144-147.

Castro, E. (2010). El estudio de casos como metodología de investigación y su importancia en la dirección y administración de empresas. *Revista Nacional de Administración*, Costa Rica, 1 (2), p. 31-54

Coll, César. (1996). Constructivismo y educación escolar: ni hablamos siempre de lo mismo ni lo hacemos siempre desde la misma perspectiva epistemológica. Anuario de psicología; Núm.: 69. 69.

Cubero, R. (2005). Elementos básicos para un constructivismo social. *Avances en Psicología Latinoamericana, 23*, 43-61.

Daros, W. R. (2002). ¿Qué es un marco teórico? Enfoques, *Universidad Adventista del Plata*, Libertador San Martín, Argentina, v. 14, n. 1, enero-diciembre, pp. 73-112

Devlin, K. (1994). Mathematics the science of patterns, Scientific American Library, Nueva York, EUA.

Eisenhart, M. A. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: ideas from a cultural anthropologist; implication for mathematics education researchers. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 203-219). Blacksburg, Virginia: PME.

Entrena, I. (2014). Aprende a matematizar. Matematización como medio y no como fin. (Tesis de maestría inédita) Universidada de Granada, España.

Gómez, G. (2017). *Introducción a Geogebra.* [En línea] Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=iXB24rJem0w&t=290s

Hatano, G. (1993). Time to merge Vygotskian and constructivist conception of knowledge adquisition. En *E. Forman, N. Minick & C. Addison Stone, Contexts for learning. Sociocultural dynamics in children‘s development*. Nueva York: Oxford University Press.

Hernández S., Fernández C. y Baptista (2006). *Metodología de la investigación*. Ciudad de México, México. Mc Graw-Hill Interamericana.

Izcara S. (2014). *Manual de investigación cualitativa.* Ciudad de México, México. Fontamara.

Kieran, C. y Yerushalmy, M. (2004). Research on the Role of Technological Environments in Algebra Learning and Teaching. En K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.). *The future of the teaching and learning algebra. The 12th ICMI study*, (pp. 99-152). USA: Kluwer academic publisher.

Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra, En A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11-49) UK: Sense Publisher. Lester F. K. (2005). On the theorical, conceptual and philosophical foundations for research in mathematics education. School of Education. Indiana University. Bloomington, Indiana, 37(6), P. p. 457-467

Kumar, R. (2011). Research Methodology. A step-by-step guide for beginners.-3ra. Ed.- Gran Bretaña. Mixed Sources.

Martí, E. (2000). El alumno de Piaget y el alumno de Vigotsky. En S. Aznar y E. Serrat (coords.), *Piaget y Vigotsky ante el siglo XXI: Referentes de actualidad* (pp. 101-108). Girona, España: Universitat de Girona-Horsori.

McMillan J. y Schumacher S. (2005). *Investigación educativa*. -5ª. ed.-, Madrid, Pearson educación S. A.

Moreno, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Bogotá, Colombia, P. p.81-86.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO] (2016). Enfoque de enseñanza de la disciplina en la región en Aportes para la enseñanza de la matemática. Santiago, Chile: UNESCO.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico [OCDE] (s. f.) El progama PISA de la OCDE. ¿Qué es y para qué sirve? París, Francia: OCDE.

Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes [PLANEA] (2015). *Resultados nacionales 2015. Instituto Nacional para la Evaluación Educativa (INEE).* Pp. 102-119 [En línea] Disponible en: https://www.inee.edu.mx/index.php/580-planea

Pea, R.D. (1985). Beyond amplification: Using the computers to reorganize mental functioning. *Educational Psychologist,* 20(4): 167-182.

Polya, G. (2005). *Cómo plantear y resolver problemas* (27a. ed). (Zagazagoitia, J. Trad.). México D.F, México: Trillas. (Trabajo original publicado en 1945).

Rondero, Reyes y Campos (2015). Análisis de libros de texto de matemáticas de bachillerato: El caso de la relación pitagórica. *XIII Congreso Nacional de Investigación Educativa.* Chihuahua, México.

Ruano, R. M., Socas M. M. y Palare M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. Investigación en Educación Matemática. *Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 311-322). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Saidon, L. (2013). *Guía de inicio rápido. Geogebra* [En línea] Disponible en: https://wiki.geogebra.org/uploads/a/a4/Gu%C3%ADa_Tablets%25Win_8_.pdf

Sandoval, C. (2002). *Investigación Cualitativa*. (Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior, ICFES). Colombia: ARFO Editores e Impresores Ltda.

Santos, L. M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos.* -2da. Edición- México D. F., México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic Press.

Secretaría de Educación Pública [SEP] (2017). Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio para la educación básica. Ciudad de México, México: SEP.

Secretaría de Educación Pública [SEP] (2018 a). Matemáticas. Libro para el maestro. Primer grado. Telesecundaria. Ciudad de México, México: SEP.

Secretaría de Educación Pública [SEP] (2018 b). Matemáticas. Primer grado. Telesecundaria. Ciudad de México, México: SEP.

Stein, M. y Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*. 3 (January, 1998):: 268-275.

Stacey, K. & Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanation in Australian eighth-grade mathematics textbooks. Educational Studies in Mathematics, 72, 271-288.

Ursini, S. (1996). Una perspectiva social para la educación matemática. La influencia de la teoría de L. S. Vygotsky. *Educación Matemática*, Iberoamericana, Ciudad de México, México, v.8, n.3, P.p. 42-49.

Ursini S., Escareño F., Montes D. y Trigueros M. (2016). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa.* Ciudad de México, México: Trillas.

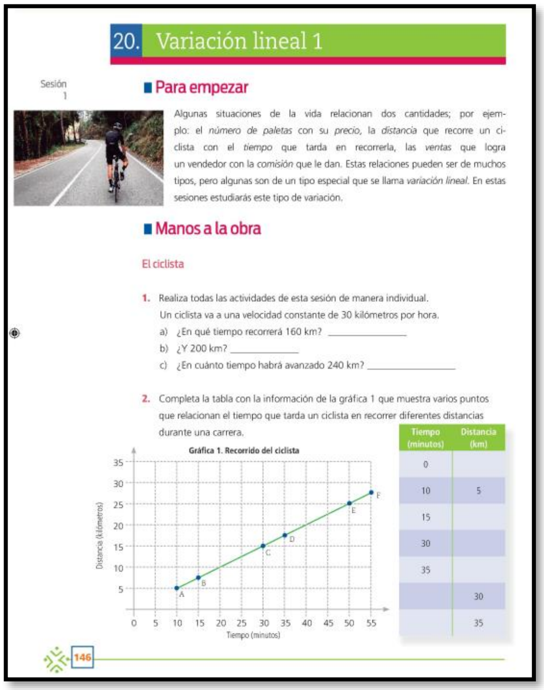
Valverde G., Bianchi L., Wolfe R., Schmidt W, y Houang R. (2002). According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Yacuzzi, E. (2005). El Estudio de Caso como metodología de investigación: Teoría, mecanismos causales, validación. Universidad del CEMA, Buenos Aires, Argentina, 1-37.

https://skat.ihmc.us/rid=1229718825773_635935073_15910/1225382497180I166239096I64713Ix-cmapIx-storable

ANEXOS

Anexo 1. Actividades de la secuencia 20: "Variación lineal 1".



20. Variación lineal 1

Sesión 1

Para empezar

Algunas situaciones de la vida relacionan dos cantidades; por ejemplo: el *número de paletas* con su *precio*, la *distancia* que recorre un ciclista con el *tiempo* que tarda en recorrerla, las *ventas* que logra un vendedor con la *comisión* que le dan. Estas relaciones pueden ser de muchos tipos, pero algunas son de un tipo especial que se llama *variación lineal*. En estas sesiones estudiarás este tipo de variación.

Manos a la obra

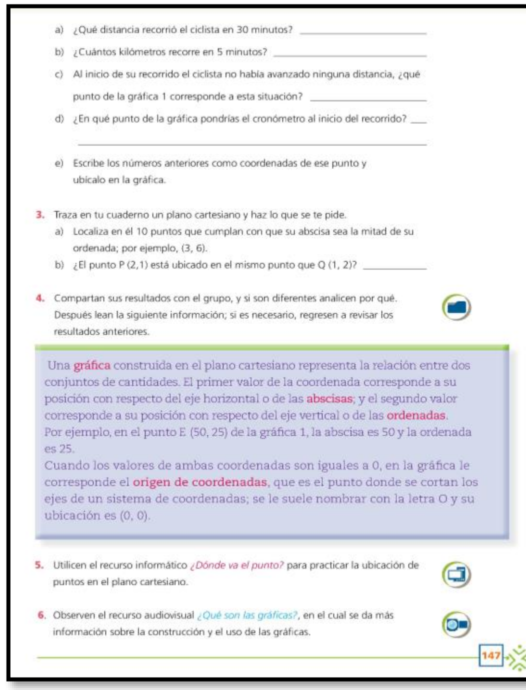
El ciclista

1. Realiza todas las actividades de esta sesión de manera individual.
   Un ciclista va a una velocidad constante de 30 kilómetros por hora.
   a) ¿En qué tiempo recorrerá 160 km? ____________
   b) ¿Y 200 km? ____________
   c) ¿En cuánto tiempo habrá avanzado 240 km? ____________

2. Completa la tabla con la información de la gráfica 1 que muestra varios puntos que relacionan el tiempo que tarda un ciclista en recorrer diferentes distancias durante una carrera.

Tiempo (minutos)	Distancia (km)
0	
10	5
15	
30	
35	
	30
	35

146



a) ¿Qué distancia recorrió el ciclista en 30 minutos? ____________
b) ¿Cuántos kilómetros recorre en 5 minutos? ____________
c) Al inicio de su recorrido el ciclista no había avanzado ninguna distancia, ¿qué punto de la gráfica 1 corresponde a esta situación? ____________
d) ¿En qué punto de la gráfica pondrías el cronómetro al inicio del recorrido? ____________
e) Escribe los números anteriores como coordenadas de ese punto y ubícalo en la gráfica.

3. Traza en tu cuaderno un plano cartesiano y haz lo que se te pide.
   a) Localiza en él 10 puntos que cumplan con que su abscisa sea la mitad de su ordenada; por ejemplo, (3, 6).
   b) ¿El punto P (2,1) está ubicado en el mismo punto que Q (1, 2)? ____________

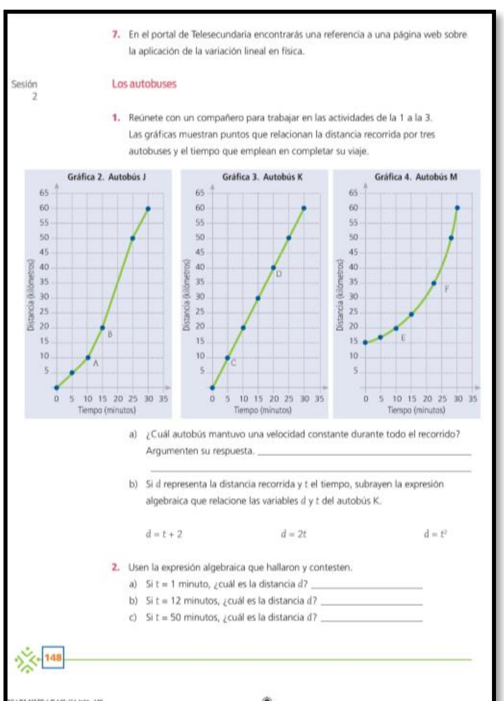
4. Compartan sus resultados con el grupo, y si son diferentes analicen por qué. Después lean la siguiente información; si es necesario, regresen a revisar los resultados anteriores.

Una **gráfica** construida en el plano cartesiano representa la relación entre dos conjuntos de cantidades. El primer valor de la coordenada corresponde a su posición con respecto del eje horizontal o de las **abscisas**; y el segundo valor corresponde a su posición con respecto del eje vertical o de las **ordenadas**.
Por ejemplo, en el punto E (50, 25) de la gráfica 1, la abscisa es 50 y la ordenada es 25.
Cuando los valores de ambas coordenadas son iguales a 0, en la gráfica le corresponde el **origen de coordenadas**, que es el punto donde se cortan los ejes de un sistema de coordenadas; se le suele nombrar con la letra O y su ubicación es (0, 0).

5. Utilicen el recurso informático *¿Dónde va el punto?* para practicar la ubicación de puntos en el plano cartesiano.

6. Observen el recurso audiovisual *¿Qué son las gráficas?*, en el cual se da más información sobre la construcción y el uso de las gráficas.

147



7. En el portal de Telesecundaria encontrarás una referencia a una página web sobre la aplicación de la variación lineal en física.

Sesión 2

Los autobuses

1. Reúnete con un compañero para trabajar en las actividades de la 1 a la 3. Las gráficas muestran puntos que relacionan la distancia recorrida por tres autobuses y el tiempo que emplean en completar su viaje.

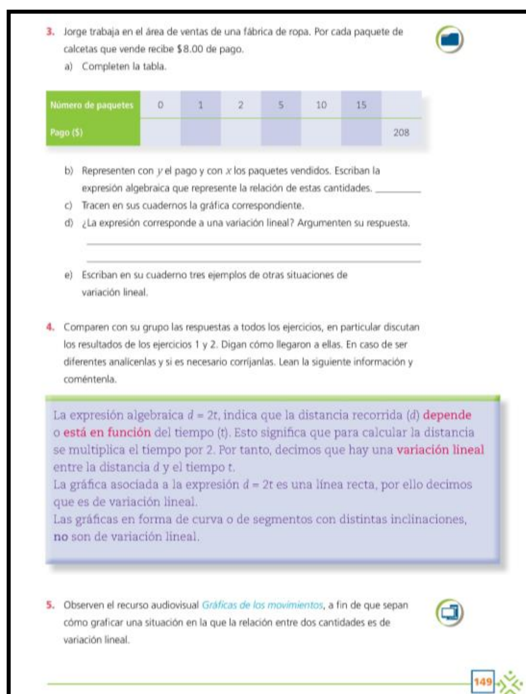
   a) ¿Cuál autobús mantuvo una velocidad constante durante todo el recorrido? Argumenten su respuesta. ____________
   b) Si d representa la distancia recorrida y t el tiempo, subrayen la expresión algebraica que relacione las variables d y t del autobús K.

   $d = t + 2$ $\qquad$ $d = 2t$ $\qquad$ $d = t^2$

2. Usen la expresión algebraica que hallaron y contesten.
   a) Si $t = 1$ minuto, ¿cuál es la distancia d? ____________
   b) Si $t = 12$ minutos, ¿cuál es la distancia d? ____________
   c) Si $t = 50$ minutos, ¿cuál es la distancia d? ____________

148

TS-LPA-MATE-1-P-146-151.indd 148



3. Jorge trabaja en el área de ventas de una fábrica de ropa. Por cada paquete de calcetas que vende recibe $8.00 de pago.
   a) Completen la tabla.

Número de paquetes	0	1	2	5	10	15	
Pago ($)							208

   b) Representen con y el pago y con x los paquetes vendidos. Escriban la expresión algebraica que represente la relación de estas cantidades. ____________
   c) Tracen en sus cuadernos la gráfica correspondiente.
   d) ¿La expresión corresponde a una variación lineal? Argumenten su respuesta. ____________
   e) Escriban en su cuaderno tres ejemplos de otras situaciones de variación lineal.

4. Comparen con su grupo las respuestas a todos los ejercicios, en particular discutan los resultados de los ejercicios 1 y 2. Digan cómo llegaron a ellas. En caso de ser diferentes analícenlas y si es necesario corríjanlas. Lean la siguiente información y coméntenla.

La expresión algebraica $d = 2t$, indica que la distancia recorrida (d) **depende** o **está en función** del tiempo (t). Esto significa que para calcular la distancia se multiplica el tiempo por 2. Por tanto, decimos que hay una **variación lineal** entre la distancia d y el tiempo t.
La gráfica asociada a la expresión $d = 2t$ es una línea recta, por ello decimos que es de variación lineal.
Las gráficas en forma de curva o de segmentos con distintas inclinaciones, **no** son de variación lineal.

5. Observen el recurso audiovisual *Gráficas de los movimientos*, a fin de que sepan cómo graficar una situación en la que la relación entre dos cantidades es de variación lineal.

149

Sesión 3

¿Es o no es variación lineal?

1. Trabaja de manera individual todas las actividades de esta sesión. En la sesión *Ventas al menudeo y al mayoreo* de la secuencia 7 trabajaste con estas dos tablas.

Tabla 1 Lápices al mayoreo	
Cantidad	Precio ($)
10	40.00
20	78.00
30	114.00
40	1[illegible]6.00
50	180.00
60	216.00
70	238.00
80	264.00
90	288.00
100	316.00

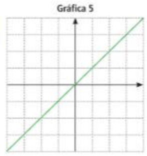
Tabla 2 Lápices al menudeo	
Cantidad	Precio ($)
10	40.00
20	80.00
30	120.00
40	160.00
50	[illegible]
60	240.00
70	280.00
80	320.00
90	360.00
100	400.00

¿Cuál de ellas presenta una variación lineal? Argumenta tu respuesta. ____________

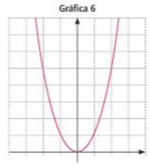
2. Si *y* representa el precio de un lápiz y *x* la cantidad de lápices, escribe una expresión algebraica que relacione *y* con *x*. ____________

3. Anota una ✓ a las gráficas que correspondan a una situación de variación lineal.

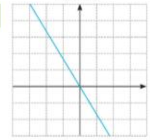
Gráfica 5



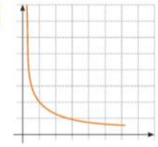
Gráfica 6



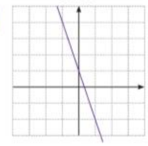
Gráfica 7



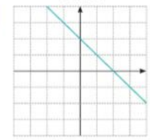
Gráfica 8



Gráfica 9



Gráfica 10



4. ¿A cuál gráfica corresponde cada una de estas expresiones algebraicas?

$y = -\frac{5}{3}x$ ☐ $y = x$ ☐ $y = -3x + 1$ ☐ $y = -x + 2$ ☐

5. Comparen sus respuestas en grupo. Comenten en particular cómo identificaron las gráficas en el ejercicio 3.

Para terminar

Contesta en tu cuaderno.

a) ¿Todas las situaciones de proporcionalidad directa son situaciones de variación lineal?

b) ¿Todas las situaciones de variación lineal son también situaciones de proporcionalidad directa?

c) Escribe también los argumentos de tus respuestas, da ejemplos y las características que tiene la variación lineal.

Anexo 2. Ejemplo de actividades para la enseñanza en espiral. (Ursini et al. 2016, p. 70-73 y 85-87).

Se propone el análisis de situaciones problemáticas, la presencia de cantidades relacionadas y se pide que representen esa relación mediante una tabla, una gráfica y una expresión algebraica.

Actividades para diferenciar.

Un tinaco que tiene 50 litros de agua recibe de una llave de 7.5 litros por minuto:

- ¿Cuántos litros de agua tiene el tinaco antes de abrir la llave?
- ¿Cuántos litros tendrá después de un minuto de abrir la llave?
- ¿Y después de dos?
- ¿Después de tres?
- ¿Se observa alguna relación entre el tiempo en que permanece abierta la llave y la cantidad de agua que hay en le tinaco?

Con las preguntas anteriores se asegura que los alumnos reconocen la correspondencia entre las dos variables involucradas en este problema y su variación conjunta.

- Entre los 5 y 10 minutos, ¿cuánto es lo mínimo y lo máximo en litros de agua que tendrá el tinaco?

Esta pregunta permite que determinen los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

Ahora para simbolizar la relación funcional que se presenta en el problema, se plantea la siguiente pregunta:

- ¿Cómo se obtiene la cantidad de litros de agua que hay en el tinaco a los 0, 1, 2, 3, …, 10 minutos?
- ¿Qué operaciones hay que hacer?

Se llenará una tabla como la siguiente, en la que se considere que el tinaco tiene inicialmente 50 litros de agua. Después se llamará la atención del alumno a las regularidades que se manifiestan en las expresiones con las que se calcula el número de litros: unos términos no varían (50 y 7.5) y otros sí.

Número de minutos (n)	Número de litros de agua en el tinaco (c)
0	50+0*7.5
1	50+1*7.5
2	50+2*7.5
…	…
10	50+10*7.5

Finalmente, se pide la simbolización de la regla:

- ¿Cómo se representa la cantidad de agua que hay en el tinaco en un minuto cualquiera, si representamos un minuto cualquiera con la letra n?

- En la regla que encontraron c=50+n*7.5, ¿Qué pasa a los valores de c cuando los de n aumentan? Cuando el valor de *c* aumenta, ¿qué puede decirse del valor de *n*? ¿También aumenta?

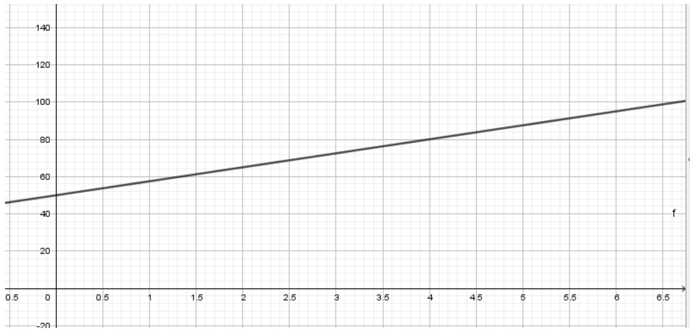
- ¿Cómo se utilizará esta regla para calcular la cantidad de agua c que hay en el tinaco a los 9, 10, 10.5 minutos?

- ¿Y para calcular el tiempo *n* que se requiere para que el tinaco tenga 100, 200, 300 litros de agua?

- ¿Cómo se simboliza la regla de la función si, antes de abrir la llave, el tinaco tiene 20 litros de agua en vez de 50?

- ¿Y si, además, en vez de recibir 7.5 litros de agua por minuto recibe 10 litros?

Las siguientes actividades para diferenciar implicarían representaciones gráficas de funciones con base en la tabla obtenida con anterioridad:

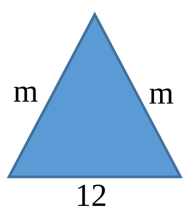


- A partir de la gráfica de la función, ¿puede saberse cuántos litros de agua tiene el tinaco en cualquier instante, desde el momento de abrir la llave?
- ¿Qué tendría que hacerse para saber cuántos litros tendrá en un instante dado?
- ¿Qué tendría que hacerse para saber en qué momento el tinaco tiene 80 litros?
- En qué términos de la situación, ¿Cómo se interpreta el hecho de que la gráfica sea una recta que sube por la derecha?

Actividad integradora

En este segundo momento didáctico se propondrá una situación que implica distintos usos de la variable.

¿Cuál es el perímetro de este triángulo?



Después de que los alumnos propongan soluciones, se plantean preguntas como:

- ¿Qué representa aquí la letra m?
- ¿Qué valor tiene?
- ¿Qué operación debe hacerse para hallar el perímetro de esta figura?
- ¿Es lo mismo $m + m + 12$ que $2*m + 12$?

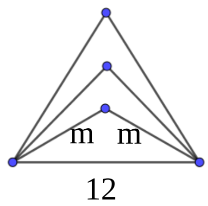
Se impone al problema una condición: El perímetro del triángulo es 50 cm. Ahora la situación puede expresarse así: $2m + 12 = 50$ y preguntamos:

- ¿Puede *m* tener cualquier valor?

- ¿Cómo podemos conocer su valor?

- ¿Cómo puede comprobarse que el valor de *m* es el que encontraste?

Cambiamos nuevamente las condiciones del problema: supón que la figura está formada por una cinta elástica, con base fija de 12cm, y que podemos modificarla como se muestra en la figura.



La expresión que representa el perímetro es P = 2 * *m* + 12. Preguntamos:

- ¿El valor del perímetro *P* es el mismo en los tres casos?

- ¿De qué depende su valor?

- ¿Si el valor de *m* es 10, ¿cuál es el de *P*?

- Si el valor del perímetro de *P* es 100, ¿cuál es el de *m*?

- Si cambia el valor de *m*, ¿cambia el de *P*?

- Si el máximo valor que puede tomar *m* es 20, ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar *P*?

- En los ejemplos anteriores hemos analizado tres expresiones:

$2*m + 12$

$2m + 12=50$

$P =2*m + 12$

Anexo 3. Primera propuesta de actividades.

Actividad 1. Primera Fase: Actividades para diferenciar.

Objetivos de aprendizaje.

Que los alumnos:

- Reconozcan a partir del problema verbal, que existe una correspondencia entre los valores de las dos variables involucradas.
- Simbolicen la relación funcional de correspondencia.
- Determinen el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra.

Formen equipos de tres personas. Lean el enunciado del problema y contesten.

Un autobús avanza a una velocidad constate de 120 kilómetros por hora. ¿Qué distancia recorrió después de 43 minutos?

1. ¿Cuáles son los datos del enunciado del problema que proporcionan información para poderlo resolver? ____

   ____

2. ¿Qué entiendes por velocidad constante? ____________________________________

   ____

3. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido el autobús a los cero minutos? __________ ¿Cuántos kilómetros ha recorrido después de 1 minuto? ________, ¿y después de 2 minutos? __________, ¿y a los 5 minutos? ___________________________________ (**F1**)

4. ¿Qué tuviste que hacer para saber qué distancia recorre el autobús en 1, 2, 15, 35, …, n minutos? ____ (**F2**)

5. Completa la siguiente tabla, escribiendo las operaciones que debes realizar para calcular los datos faltantes.

Tiempo en minutos	Distancia recorrida en kilómetros
0	
1	
2	
15	
35	
60	
X	

6. Comparen y expliquen sus operaciones y resultados. (¿qué representa cada cantidad que escribiste?)
7. Escribe los diferentes procedimientos que usaron
8. ¿Cuál es el procedimiento que permite conocer la distancia recorrida por el autobús en cualquier momento? ____
9. ¿Lo anterior te ayuda a resolver el problema? __________ ¿Cuál es la solución del problema? ____
10. Si ahora necesitas calcular el tiempo que se requiere para que el autobús recorra 25 kilómetros, ¿Qué requieres hacer? ____________________________________ (**F3**)
11. Completa la siguiente tabla, escribiendo las operaciones que debes realizar para calcular los datos faltantes.

Distancia recorrida en kilómetros	Tiempo en minutos
0	
1	
2	
10	
25	
100	
Y	

12. Si aumenta el tiempo, ¿aumentará la distancia que recorre el autobús?______ ¿Se observa alguna relación entre el tiempo y la distancia que recorre el autobús?, en caso de ser afirmativa tu respuesta explica cómo es la relación entre el tiempo y la distancia que recorre el autobús.____
____ (**F4**)
13. ¿En qué periodo de tiempo el autobús habrá recorrido entre 21 y 38 kilómetros?
____

    Entre los 25 y 50 minutos, ¿cuánto es lo mínimo y lo máximo en kilómetros que habrá recorrido al autobús? ____ (**F5**)
14. Compara tus procedimientos y resultados, ¿Cuál fue el procedimiento más corto para calcular los kilómetros y cuál para calcular el tiempo?

    Tiempo (***x***)=________________ Kilómetros (***y***) = _______________
15. Si la letra ***x*** representa el tiempo y la letra ***y*** representa los kilómetros, ¿Qué valores toma ***y*** cuando el autobús avanzó 7, 12, 16, …, minutos?, ¿y para ***x*** minutos? Completa los datos de la tabla.

Tiempo (***x***)	Distancia (***y***)
7	***y***=
12	***y***=
16	***y***=
X	***y***=

16. ¿Cómo se simboliza la regla para calcular la distancia que recorre el autobús en cualquier momento? _***y***=_____________ (**F6**)
17. ¿Cuáles son los valores que no cambian en esta representación? ______________, ¿Y cuáles los que cambian?__________________
18. Haz algún diagrama que ilustre el problema y su solución.

Recuerda que a los valores que no cambian se les llaman **constantes** y a los valores que cambian se les llaman **variables.**

19. Si el autobús ahora va a 90 kilómetros por hora, ¿Qué distancia recorrerá después de 43 minutos? ¿Qué estrategias podrían ayudar a resolver este nuevo problema?
____

Anexo 4. Segunda propuesta de actividades.

PROPUESTA 2 DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Actividad 1. Primera Fase: Actividades para diferenciar.

Objetivos de aprendizaje.

Que los alumnos:

- Reconozcan a partir del problema verbal, que existe una correspondencia entre los valores de las dos variables involucradas.
- Simbolicen la relación funcional de correspondencia.
- Determinen el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra.

INSTRUCCIONES. Lee el enunciado del problema

1. Un autobús que parte de la terminal, después de cierto tiempo ha recorrido las distancias que se muestran en la siguiente tabla. (**F1**) Completa los datos faltantes.

TIEMPO (minutos)	**DISTANCIA (kilómetros)**
60	90
40	
12	18
5	7.5
2	
1	

Realiza lo que se te pide.

2. ¿Qué operaciones tuviste que hacer para completar los datos faltantes de la tabla anterior? (**F2**)

Comparen entre compañeros los procedimientos que usaron y escriban ¿cuáles fueron las diferencias y similitudes?

3. ¿A qué se refieren los datos 60, 12, 5, etc. en el problema anterior? ____
4. ¿Qué representan las otras cantidades que escribiste en el procedimiento? ____

   ____
5. Utiliza una hoja de cálculo en Geogebra5 para elabora una tabla que represente esta situación. En la columna ***A*** coloca el tiempo transcurrido e increméntalo de minuto en minuto hasta 20min. En la columna ***B*** calcula la distancia que recorre el autobús con la fórmula general. (**F3**)

	A	B
1	Tiempo recorrido	Distancia que ha recorrido el autobús
2		
3		
4		

6. ¿A qué distancia se ubicará el autobús a los 7, 16 y 20 minutos?

____

____

7. En la columna C, divide 5 valores de la columna de la distancia, entre la columna del tiempo ¿Qué resultados obtuviste?

____

	A	B	C
1	Tiempo recorrido	Distancia que ha recorrido el autobús	Distancia/Tiempo
2			
3			
4			
5			
6			

Una posible fórmula para calcular la distancia del autobús puede expresarse así:

$$a * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

Es decir: 1.5* (tiempo transcurrido) = distancia del autobús en kilómetros

En donde "a" representa un número constante, y las variables están representadas por "***x***" y ***"y".***

Compara y discute tus respuestas con tus compañeros.

Continúa trabajando de manera individual.

8. Si ahora necesitas calcular el tiempo que se necesita para que el autobús recorra la distancia de 45 kilómetros. ¿Qué requieres hacer? ____________________**(F3)**
9. ¿Qué representan el número 45 en la pregunta anterior? ____________________
   ¿Qué representan las otras cantidades que escribiste en el procedimiento?
   ____
   ____
10. Escribe en el recuadro los diferentes procedimientos que usaron para calcular los minutos.

11. En Geogebra5, deja seis celdas en blanco debajo de la tabla que hiciste y elabora otra tabla que represente esta situación. En la columna ***A*** coloca la distancia recorrida por el autobús; es decir, su posición respecto a la terminal e increméntala de uno en uno hasta 30km. En la columna ***B*** calcula el tiempo transcurrido con la fórmula general. (**F3**)

	A	B
1	Distancia que ha recorrido el autobús	Tiempo recorrido
2		
3		
4		

Si observas, la fórmula para calcular la distancia recorrida por el autobús puede expresarse así:

$$y \div a = x$$

$$(distancia\ recorrida\ por\ el\ autobús) \div 1.5 = Tiempo\ transcurrido$$

En donde **“a”** representa un número constante y las variables están representadas por ***“x”*** y ***“y”.***

12. ¿Se observa alguna relación entre el tiempo y la distancia recorrida por el autobús?, en caso de ser afirmativa tu respuesta explica cómo es esa relación. (**F4**)

    ____

    ____

Compara y discute tus respuestas con tus compañeros. Continúa trabajando de manera individual.

13. En Geogebra5, usa la tabla de la pregunta 5, selecciona los datos de la tabla y conviértelos a lista de puntos, serán marcados estos puntos en el plano cartesiano. Selecciona el ícono para construir una recta del punto A al punto B. ¿Esta recta pasa por todos los puntos que fueron marcados en el plano cartesiano? ____
14. Ubica el punto (60,90) y otros dos puntos diferentes a los que ya están marcados, ¿se ubican sobre la recta? ____
15. Oculta la recta que trazaste, y escribe en la barra la fórmula y=1.5x, entra a propiedades y cambia el color de la fórmula a azul, ¿qué sucedió? ____

    ____
16. Coloca un punto sobre el eje x (abscisas), traza una recta perpendicular al eje *x*, que pase por ese punto.
17. Marca la intersección de esa recta con la gráfica y=1.5x.
18. Traza una perpendicular al eje *y* (ordenadas), que pase por el punto de intersección.
19. Entra a propiedades y activa: etiqueta ver valor.

20. Mueve el punto que esta sobre el eje *x* (abscisas), ¿qué pasa cuando cambia el valor en el eje x (abscisas)?

    ____

    ____

Si observas, todos los números de la columna A representan los valores de las **abscisas** ubicadas en el eje ***x*** y la columna B representan los valores de las **ordenadas** ubicadas en el eje ***y***.

Utiliza las dos tablas que elaboraste en Geogebra5 para contestar las preguntas 21 y 24, además ubica los puntos en la gráfica.

21. ¿En qué periodo de tiempo el autobús recorrerá alguna distancia entre 21 y 39 kilómetros? ____

    Ubica en la gráfica este intervalo y cambia su color a rojo.
22. En el periodo de 25 y 40 minutos, ¿cuál será la distancia mínima y la máxima que recorrerá el autobús? (**F5**)

    ____

    ____

    Ubica estos puntos en la gráfica, en color verde.
23. ¿Cómo se simboliza la regla para calcular la distancia recorrida por el autobús en cualquier momento? _***y***=____________ (**F6**)
24. ¿Cuáles son los valores que no cambian en esta representación? _______________, ¿Y cuáles los que cambian? ____

Formen equipos de tres personas. Comparen y expliquen sus operaciones y resultados de las preguntas anteriores, después comparen sus respuestas con el resto del grupo.

GUÍON PARA EL PROFESOR

PROPUESTA 2 DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Actividad 1. Primera Fase: Actividades para diferenciar.

Objetivos de aprendizaje.

Que los alumnos:

- Reconozcan a partir del problema verbal, que existe una correspondencia entre los valores de las dos variables involucradas.
- Simbolicen la relación funcional de correspondencia.
- Determinen el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra.

INSTRUCCIONES. Lee el enunciado del problema y completa la tabla.

1. Un autobús que parte de la terminal, después de cierto tiempo ha recorrido las distancias que se muestran en la siguiente tabla. (**F1**) Completa los datos faltantes.

TIEMPO (minutos)	**DISTANCIA (kilómetros)**
60	90
40	60
12	18
5	7.5
2	3
1	1.5

Después de observar la tabla pregunte, ¿Cuáles son los datos del problema que proporcionan información para poderlo resolver?

Realiza lo que se te pide.

2. ¿Qué operaciones tuviste que hacer para completar los datos faltantes de la tabla anterior? (**F2**)

Los posibles procedimientos que usarán los alumnos son: $90 \div 60 = 1.5$ → 30*1.5=45 $\frac{60}{30} = \frac{90}{x=45}$

Comparen entre compañeros los procedimientos que usaron y escriban ¿cuáles fueron las diferencias y similitudes?

3. ¿A qué se refieren los datos 60, 12, 5, etc. en el problema anterior? _El tiempo en minutos_______________
4. ¿Qué representan las otras cantidades que escribiste en el procedimiento?

El 90, 60, 18, 7.5, 3 y 1.5 representan la posición del autobús en un tiempo determinado. El 1.5 representa la posición que ocupará el autobús después de un minuto.

Si los alumnos utilizan la regla de tres, escriba en el pizarrón las fracciones equivalentes, para este ejemplo: $\frac{45}{30}$ y $\frac{90}{60}$, pregunté ¿Qué operación tendrían que hacer si sólo conocieran el tiempo para poder calcular los kilómetros?

Si los estudiantes hacen procedimientos donde no aparece la constate 1.5, pregunte ¿qué distancia recorre el autobús en un minuto? con la intención de guiarlos para llegar a esta representación:

La operación que hiciste probablemente fue:

1.5*60=90

Una fórmula general para hacer esto es:

1.5* (tiempo transcurrido) = ubicación del autobús en kilómetros

5. Utiliza una hoja de cálculo en Geogebra5 para obtener una tabla que represente esta situación. En la columna ***A*** coloca el tiempo transcurrido e increméntalo de minuto en minuto hasta 20min. En la columna ***B*** calcula la distancia que recorre el autobús con la fórmula general. (**F3**)

	A	B
1	Tiempo transcurrido	Distancia que ha recorrido el autobús
2	1	=A1*1.5
3	2	=A2*1.5
4	3	=A3*1.5
5	4	=A4*1.5
6	5	=A5*1.5

Donde A1, A2, etc. representan el nombre de la columna, cuyos valores se multiplicarán por 1.5, lo cual permitirá que al seleccionar dos celdas y arrastrar el cursor hacia abajo se copie la fórmula en el resto de la columna.

6. ¿A qué distancia se ubicará el autobús a los 7, 16 y 20 minutos? 10.5km, 24km y 30km

7. En la columna C, divide 5 valores de la columna de la distancia, entre la columna del tiempo ¿Qué resultados obtuviste? ____________________

	A	B	C
1	Tiempo transcurrido	Distancia que ha recorrido el autobús	Distancia/Tiempo
2	1	=A1*1.5	= Seleccionar celda de la columna B/ la celda de la columna A
3	2	=A2*1.5	
4	3	=A3*1.5	
5	4	=A4*1.5	
6	5	=A5*1.5	

Haga hincapié en que 1.5 es la constante de proporcionalidad tanto para calcular el tiempo, como la distancia y que cuando se divide distancia sobre tiempo se está hablando de velocidad.

Una posible fórmula para calcular la distancia del autobús puede expresarse así:

$$a * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

Es decir: 1.5* (tiempo transcurrido) = distancia del autobús en kilómetros

En donde "a" representa un número constante, y las variables están representadas por ***x*** y ***y*.**

Compara y discute tus respuestas con tus compañeros.
Continúa trabajando de manera individual.

Pida a los alumnos que comparen la fórmula que escribieron en la columna B con la expresión algebraica

$$a * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

Pregunte a los alumnos: ¿Lo anterior te ayuda a resolver el problema?, ¿Cuál es la solución del problema?

8. Si ahora necesitas calcular el tiempo que se necesita para que el autobús recorra la distancia de 45 kilómetros. ¿Qué requieres hacer? _45/1.5= 30_____ (**F3**)
9. ¿Qué representan el número 45 en la pregunta anterior? __la distancia recorrida por el autobús_ ¿Qué representan las otras cantidades que escribiste en el procedimiento? El 1, 2, 5, 12, 40, 60 representan el tiempo. El 90, 60, 18, 7.5, 3 y 1.5 representan la distancia del autobús en un tiempo determinado. El 1.5 representa la distancia del autobús después de un minuto.
10. Escribe en el recuadro los diferentes procedimientos que usaron para calcular los minutos.

Si los estudiantes hacen procedimientos donde no aparece la constate 1.5, comente: Cuándo sabes que el autobús recorre 1.5 km por minuto, multiplicas por el tiempo para obtener la distancia; pero si ahora te doy la distancia, ¿qué operación debes hacer con 1.5 para obtener el tiempo? con la intención de que guiarlos para llegar a esta representación:

La operación que hiciste probablemente fue:

$$45 \div 1.5 = 30$$

Una fórmula general para hacer esto es:

$$(ubicación\ del\ autobús) \div 1.5 = Tiempo\ transcurrido$$

11. En Geogebra5, deja seis celdas en blanco debajo de la tabla que hiciste y elabora otra tabla que represente esta situación. En la columna ***A*** coloca la distancia recorrida por el autobús, es decir, su posición respecto a la terminal e increméntala de uno en uno hasta 30km. En la columna ***B*** calcula el tiempo transcurrido con la fórmula general. (**F3**)

	A	B
1	Distancia que ha recorrido el autobús	Tiempo transcurrido
2		
3		
4		

Si observas la fórmula para calcular la posición del autobús puede expresarse así:

$$y \div a = x$$

$$(distancia\ recorrida\ por\ el\ autobús) \div 1.5 = Tiempo\ transcurrido$$

En donde **"a"** representa un número constante y las variables están representadas por ***"x"*** y ***"y"***.

12. ¿Se observa alguna relación entre el tiempo y la distancia recorrida por el autobús?, en caso de ser afirmativa tu respuesta explica cómo es esa relación. (**F4**) Haga hincapié en el hecho de que si aumenta el tiempo el autobús se ubica más lejos de su posición de salida y viceversa.

Compara y discute tus respuestas con tus compañeros. Continúa trabajando de manera individual.

13. En Geogebra5, usa la tabla de la pregunta 5, selecciona los datos de la tabla y conviértelos a lista de puntos, serán marcados estos puntos en el plano cartesiano. Selecciona el ícono para construir una recta del punto A al punto B. ¿Esta recta pasa por todos los puntos que fueron marcados en el plano cartesiano? _Si____
14. Ubica el punto (60,90) y otros dos puntos diferentes a los que ya están marcados, ¿se ubican sobre la recta? _Si_ Pida a los alumnos que los agreguen al final de la tabla.
15. Oculta la recta que trazaste, y escribe en la barra la fórmula y=1.5x, entra a propiedades y cambia el color de la fórmula a azul, ¿qué sucedió? _La recta correspondiente a la función y=1.5x es igual a la recta que pasa por los puntos de la tabla de la pregunta 5____
16. Coloca un punto sobre el eje x (abscisas), traza una recta perpendicular al eje x, que pase por ese punto.
17. Marca la intersección de esa recta con la gráfica y=1.5x.
18. Traza una perpendicular al eje *y* (ordenadas), que pase por el punto de intersección.
19. Entra a propiedades y activa: etiqueta ver valor.
20. Mueve el punto que esta sobre el eje x (abscisas), ¿qué pasa cuando cambia el valor en el eje x (abscisas)?__El valor de las ordenadas cambia de manera proporcional____

Si observas todos los números de la columna A representan los valores de las **abscisas** ubicadas en el eje ***x*** y la columna B representan los valores de las **ordenadas** ubicadas en el eje ***y***.

Utiliza las dos tablas que elaboraste en Geogebra5 para contestar las preguntas 21 y 24, además ubica los puntos en la gráfica.

Estas preguntas tienen la finalidad de que el alumno determine intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

21. ¿En qué periodo de tiempo el autobús recorrerá alguna distancia entre 21 y 39 kilómetros? entre 14 y 26 minutos
22. En el periodo de 25 y 40 minutos, ¿cuál será la distancia mínima y la máxima que recorrerá el autobús? (**F5**) Mínimo 37.5 km y máximo 60 km
    Ubica estos puntos en la gráfica, en color verde.
23. ¿Cómo se simboliza la regla para calcular la distancia recorrida por el autobús en cualquier momento? _*y*=_1.5x_(Tener en cuenta que los estudiantes pueden dar otras respuestas)__ (**F6**)
24. ¿Cuáles son los valores que no cambian en esta representación? __1.5_(Es posible que el estudiante podría decir que x no cambia o y, porque los ve fijos en la fórmula), ¿Y cuáles los que cambian? _Los valores que representan el tiempo y la ubicación del autobús__

Formen equipos de tres personas. Comparen y expliquen sus operaciones y resultados de las preguntas anteriores, después comparen sus respuestas con el resto del grupo.

Extensión de la actividad: Pedir a los alumnos que cambien la pendiente de la recta en la expresión y=1.5x y observen qué sucede con la gráfica, que logren determinar que la pendiente de la función determina la ubicación e inclinación de la gráfica.

Anexo 5. Descripción de las sesiones de aprendizaje observadas.

Primera sesión.

Antes de iniciar con las hojas de trabajo, el grupo revisó la definición de variación proporcional impresa en su libro en la secuencia 7. El profesor, resaltó que las dos características de la variación proporcional eran que la cantidad de objetos aumentaba proporcionalmente a la cantidad de dinero que se pagó por ellos y viceversa. Además, que la constante de proporcionalidad se obtenía al dividir el precio entre la cantidad de objetos.

En el guion para el profesor elaborado por la investigadora, no se sugiere esa introducción, pues se pretende que el estudiante recupere conocimientos significativos para resolver nuevas situaciones problemáticas; tanto como un camino para continuar aprendiendo, como una forma de corroborar que los contenidos enseñados se han transformado en nuevos aprendizajes significativos.

Respecto al contexto disciplinar la metodología de enseñanza basada en la resolución de problemas, establece que el estudiante utilice conocimientos informales, así como que identifique alguna estrategia que se ajuste al problema. El profesor guía su trabajo a través de preguntas, pero no le dice qué procedimiento seguir.

P-3 leyó en voz alta los objetivos de aprendizaje de la secuencia:

PROPUESTA 2 DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

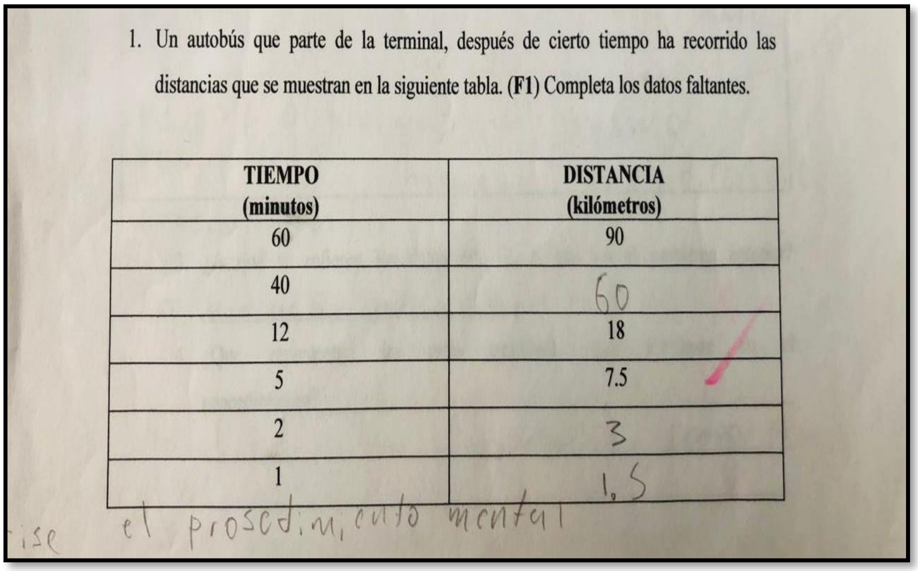
Actividad 1. Primera Fase: Actividades para diferenciar.

Objetivos de aprendizaje.

Que los alumnos:

- Reconozcan a partir del problema verbal, que existe una correspondencia entre los valores de las dos variables involucradas.
- Simbolicen la relación funcional de correspondencia.
- Determinen el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra.

La primero que hicieron fue completar la tabla 1, explicaron por escrito el procedimiento que siguieron.



1. Un autobús que parte de la terminal, después de cierto tiempo ha recorrido las distancias que se muestran en la siguiente tabla. **(F1)** Completa los datos faltantes.

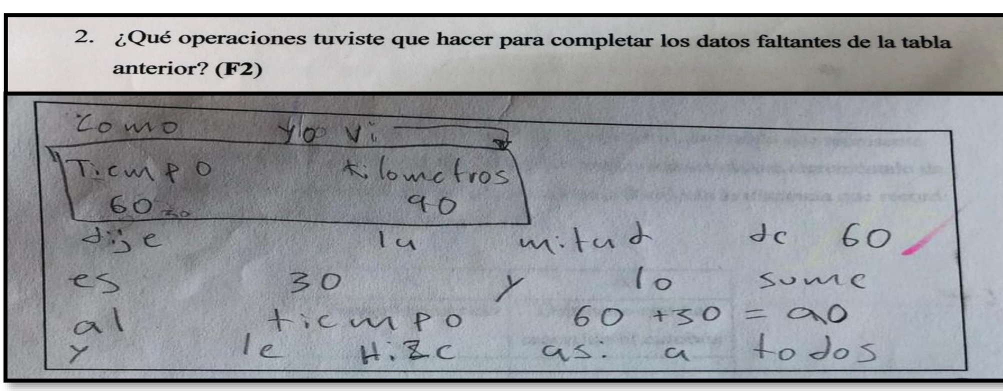
TIEMPO (minutos)	DISTANCIA (kilómetros)
60	90
40	60
12	18
5	7.5
2	3
1	1,5

ise el prosedimiento mental

Respuesta de P-4

P-4 fue el primero en terminar, relacionó 60min con 90km, mentalmente dividió 60 entre 2 y al resultado (30), le sumó la cantidad que faltaba para obtener 90, es decir el número 60. Al darse cuenta que haciendo esto obtenía los 90km, aplicó el mismo procedimiento a los 12 minutos:

$$\frac{12}{2} = 6 + 12 = 18\text{km}$$



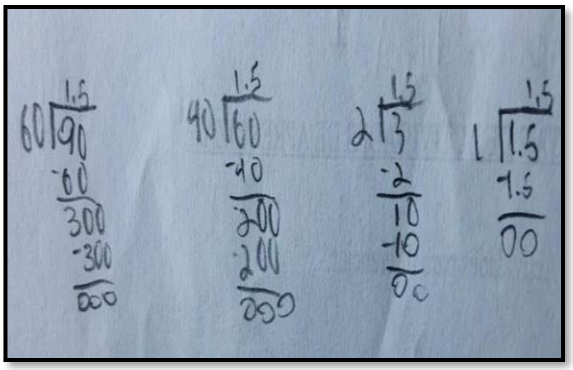
2. ¿Qué operaciones tuviste que hacer para completar los datos faltantes de la tabla anterior? **(F2)**

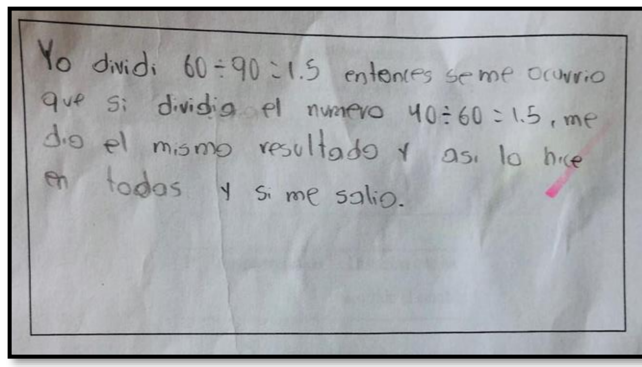
Como yo vi
Tiempo kilometros
60 30 90
dije la mitad de 60
es 30 y lo sume
al tiempo 60 +30 = 90
y le Hize as: a todos

Respuesta de P-4

De esta forma corroboró que su procedimiento era correcto y lo aplicó para calcular los kilómetros que faltaban en la tabla.

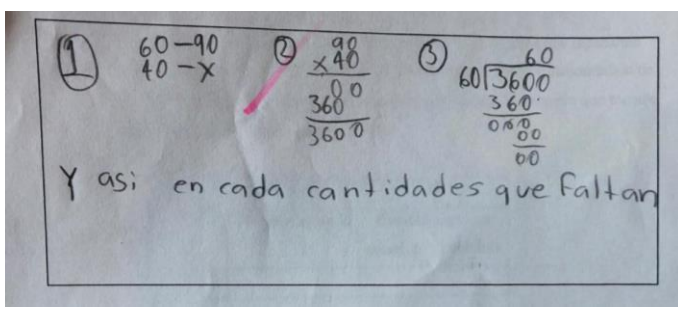
P-3 dividió 90 entre 60, obteniendo 1.5, luego 60 entre 40, 3 entre 2 y 1.5 entre 1, observó que en todas las divisiones debía obtener 1.5 y así fue como dedujo que las distancias calculadas estaban bien. Se desconoce por qué decidió dividir 60 entre 40, pues en la tabla no está impreso el 60 como la distancia correspondiente a 40 minutos.





Respuesta de P-3

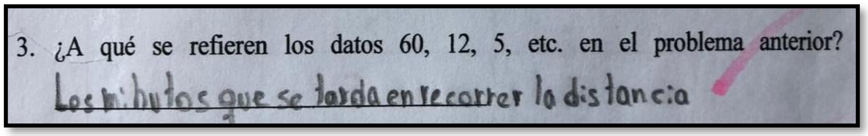
El resto de los participantes escribió que utilizó la regla de tres:



Respuesta de P-5 al ítem 2

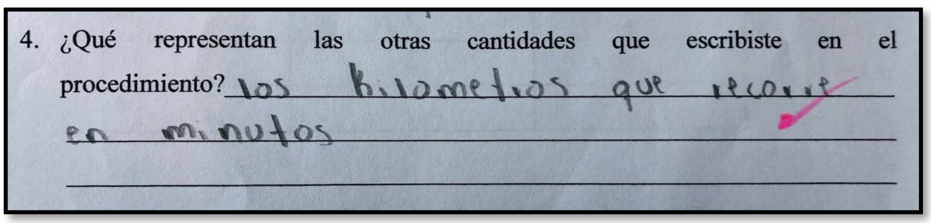
En la propuesta se pidió comparar los procedimientos propios con los de sus compañeros y escribir las diferencias, conforme fueron terminando de resolver la tabla, el profesor indicó que formaran equipos de dos integrantes. Se observó que haber explicado, previamente, por escrito su procedimiento, facilitó el proceso de comparación y discusión con sus compañeros. Después se comentaron de manera grupal las respuestas y corrigieron resultados equivocados.

Al preguntarles a qué se referían los datos 60, 12, 5, etc. en el problema, P-1, P-2 y P-3 lograron identificar que se trataba de minutos.


3. ¿A qué se refieren los datos 60, 12, 5, etc. en el problema anterior?
Los minutos que se tarda en recorrer la distancia

Respuesta de P-3

Cuando el profesor preguntó sobre lo que representaban las otras cantidades que escribieron en su procedimiento, esos mismos participantes reconocieron que eran la distancia o kilómetros que recorría el autobús


4. ¿Qué representan las otras cantidades que escribiste en el procedimiento? los kilometros que recorre en minutos

Respuesta de P-2

Los participantes están identificando las variables involucradas en el problema: tiempo expresado en minutos y la distancia expresada en kilómetros.

El profesor comentó que esas dos preguntas hacían referencia a las variables, cantidades que van cambiando, las cuales en el problema eran el tiempo y la distancia, agregó que una variable depende de otra, a la cual se le llama dependiente.

Profesor: ¿cuál es?

P-3: la distancia del tiempo.

El profesor repitió la pregunta.

P-3: Las dos variables dependen una de otra, porque si se considera un tiempo de 60 minutos el autobús recorre 90 km; pero si se considera la distancia de 90km el tiempo que tardaría en recórrela sería 60 minutos.

El profesor repartió las computadoras a los alumnos, para resolver el ítem 5.

5. Utiliza una hoja de cálculo en Geogebra5 para obtener una tabla que represente esta situación. En la columna ***A*** coloca el tiempo transcurrido e incrementalo de minuto en minuto hasta 20min. En la columna ***B*** calcula la distancia del autobús con la fórmula general. (**F3**)

	A	B
1	Tiempo recorrido	Distancia en la que se ubica el autobús
2		
3		
4		

P-1 fue el primero en terminar y explicó su procedimiento.

P-1: Poniendo el resultado que nos salió en 1, que es 1.5 y lo multipliqué por el número de minutos.

Profesor: ¿Por qué por 1.5?

P-1: Es lo que equivale a 1 minuto.

Profesor: Entonces vas a multiplicar 1.5 en todas las filas.

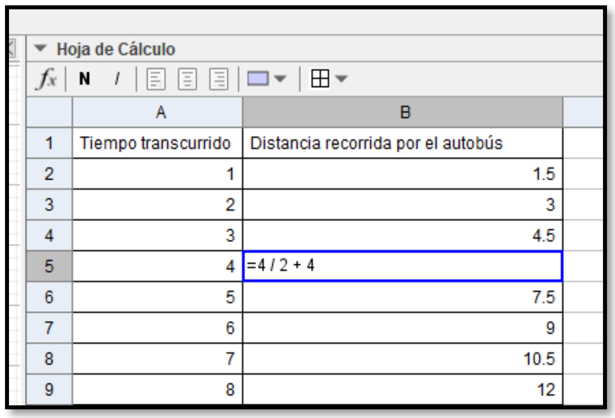
Hoja de Cálculo

	A	B
1	Tiempo transcurrido	Distancia recorrida por el autobús
2	1	1.5
3	2	3
4	3	=3 * 1.5
5	4	6
6	5	7.5
7	6	9
8	7	10.5
9	8	12

Trabajo realizado por P-1

P-1 identificó la constante de proporcionalidad al identificar que cada minuto el autobús recorre 1.5 km, así pudo establecer la fórmula “distancia = 1.5(tiempo)” y usarla para calcular el resto de las distancias, con ayuda del software.

Mientras tanto, P-2 dividió los minutos entre dos y al resultado le sumó los minutos iniciales (1/2+1=1.5), este procedimiento fue el que encontró usando lápiz y papel, el cual también le funcionó en Geogebra5:



	A	B
1	Tiempo transcurrido	Distancia recorrida por el autobús
2	1	1.5
3	2	3
4	3	4.5
5	4	=4 / 2 + 4
6	5	7.5
7	6	9
8	7	10.5
9	8	12

Uno de los alumnos preguntó si debían escribir en las celdas las letras A y B, debido a esta confusión, las imágenes impresas en la actividad se cambiaron por fotografías de pantalla.

Segunda sesión.

El profesor inició la clase comentando que el tiempo y la distancia eran variables y que 1.5 era la constante por ser la cantidad de kilómetros que recorría el autobús en un minuto.

Cabe mencionar que esta actividad no era parte de la propuesta didáctica, pues la constante la calcularán solos en la siguiente actividad, en la que se les pidió que en la tabla 1 construida en Geogebra5, hicieran una tercera columna, en la cual dividan la distancia entre el tiempo. Después de que los estudiantes observaran que obtenían el mismo resultado, se sugería al profesor mencionar que ese número se llama constante de proporcionalidad y que les serviría para calcular cualquier distancia y cualquier tiempo relacionados con el problema.

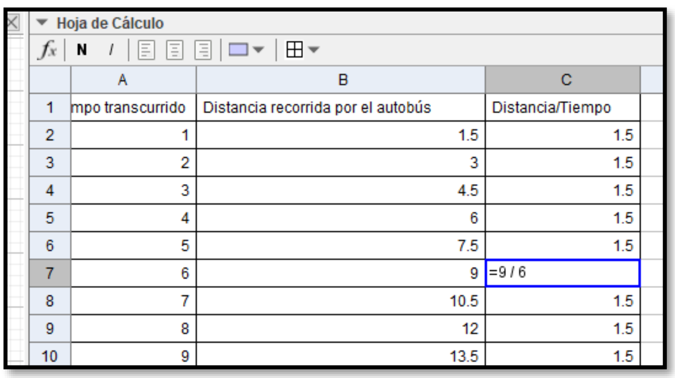
Los participantes 5 y 6 no terminaron la tabla 1 y en esta sesión continuaron con esa actividad.

El profesor preguntó: ¿qué podemos hacer, si ahora quisiera saber la distancia recorrida por el autobús en tres horas? Como nadie contestó, preguntó: ¿Cuántos minutos hay en tres horas?

P-3: 180 minutos

P-1: 180 minutos por 1.5. El profesor asintió.

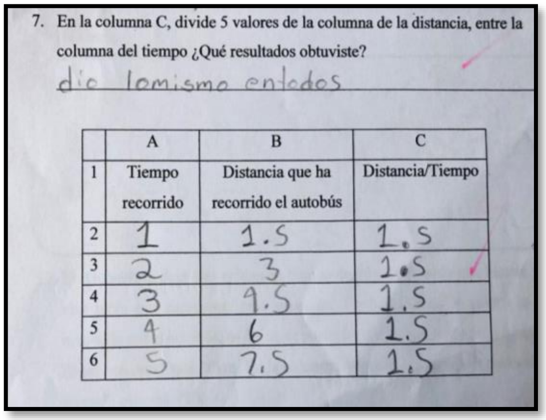
Se les pidió que construyeran la tercera columna indicada en el ítem número 7.


Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	mpo transcurrido	Distancia recorrida por el autobús	Distancia/Tiempo
2	1	1.5	1.5
3	2	3	1.5
4	3	4.5	1.5
5	4	6	1.5
6	5	7.5	1.5
7	6	9	=9 / 6
8	7	10.5	1.5
9	8	12	1.5
10	9	13.5	1.5

Trabajo realizado por P-3

El profesor solicitó que escribieran en las hojas de trabajo lo que estaban haciendo en Geogebra5. Los participantes escribieron sólo los resultados (el tiempo, la distancia y la constante de proporcionalidad). Se agregó en la propuesta final, la instrucción para que escriban en sus hojas de trabajo las operaciones que hicieron y los resultados que obtuvieron en Geogebra5, pensando en que puede ser una herramienta de repaso, en caso de no poder acceder al archivo del programa.

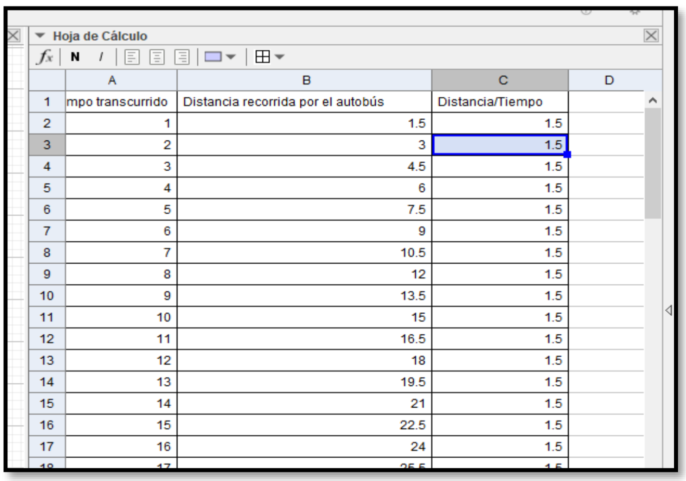


7. En la columna C, divide 5 valores de la columna de la distancia, entre la columna del tiempo ¿Qué resultados obtuviste?

dio lomismo entodos

	A	B	C
1	Tiempo recorrido	Distancia que ha recorrido el autobús	Distancia/Tiempo
2	1	1.5	1.5
3	2	3	1.5
4	3	4.5	1.5
5	4	6	1.5
6	5	7.5	1.5

Respuesta de P-5



	A	B	C	D
1	mpo transcurrido	Distancia recorrida por el autobús	Distancia/Tiempo	
2	1	1.5	1.5	
3	2	3	1.5	
4	3	4.5	1.5	
5	4	6	1.5	
6	5	7.5	1.5	
7	6	9	1.5	
8	7	10.5	1.5	
9	8	12	1.5	
10	9	13.5	1.5	
11	10	15	1.5	
12	11	16.5	1.5	
13	12	18	1.5	
14	13	19.5	1.5	
15	14	21	1.5	
16	15	22.5	1.5	
17	16	24	1.5	

Trabajo realizado por P-6

En el ítem 8, se les preguntó el tiempo transcurrido cuando el autobús se ubicaba a una distancia de 45km. Empezaron a trabajar solos, después de un momento el profesor preguntó que habían hecho:

P-5: Multiplicar 1.5 por 45 igual a 67.5

Profesor: Comprueben en su tabla. Abajo del 30 (en la columna de distancia), escriban 45. ¿Qué operaciones tienen que hacer para que en la columna C les dé 1.5? (Esta pregunta es sugerida en el guion del profesor)

P-3: 45 entre el resultado que nos había salido (refiriéndose al tiempo que desconocían).

Profesor: ¿Qué número necesitan para que les dé 1.5?

P-3: 30

Profesor: Contrasten este resultado con lo que contestaron en la pregunta 8, ¿coincide 67.5 con el 30?

P-3: No, porque no sabíamos cuántos minutos eran.

P-2: 45 son kilómetros, sería a la inversa.

Profesor: ¿Cuál es la operación inversa a la multiplicación?

P-3: 45 entre 1.5 igual a 30

Inicialmente, los participantes multiplicaron 45 por 1.5, pero escribir 45 kilómetros en la columna de distancia de la tabla 1, permitió a P-3 deducir que desconocían la cantidad que se multiplicaba por 1.5. Se observó que la pregunta del profesor "¿Qué operaciones tienen que hacer para que en la columna C les dé 1.5?, facilitó que los participantes aplicaran la relación entre las variables identificada en la actividad anterior al calcular la constante de proporcionalidad.

Después de leer en las hojas de trabajo la fórmula general para calcular la distancia y comentarla, preguntó:

Profesor: ¿Qué hacemos si ahora queremos saber el tiempo?, que es la pregunta 8.

P-2: Dividir 45 entre 1.5.

Profesor: Entonces estamos utilizando esta misma "ecuación", pero para encontrar el otro valor que es el tiempo. Vamos a generalizar: ¿si quiero encontrar la distancia?

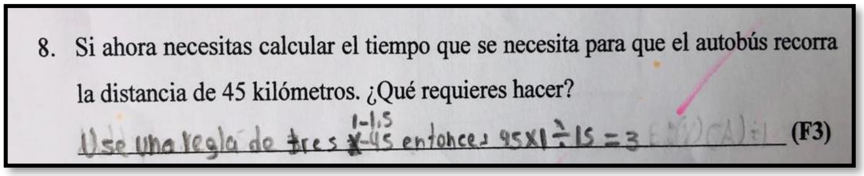
Algunos alumnos a coro: multiplico.

Profesor: ¿Si quiero encontrar el tiempo?

Algunos alumnos a coro: divido.

Profesor: ¿Alguien más puso otro procedimiento?

P-1: Una regla de tres ¿si 1 es igual a 1.5, 45 a cuánto es igual?

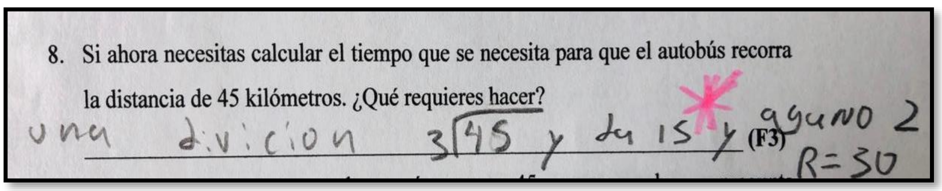

8. Si ahora necesitas calcular el tiempo que se necesita para que el autobús recorra la distancia de 45 kilómetros. ¿Qué requieres hacer?

Use una regla de tres 1-1.5 x-45 entonces 45x1÷1.5 = 3 (F3)

Respuesta de P-1

Ya que sabían que 45 kilómetros se recorrían en 30 minutos, P-4 también lo resolvió con una regla de tres, pero partiendo de que en 2 minutos el autobús se ubica a 3km:

45/3 = 15	45*2 = 90
15*2 = 30	90/3 = 30

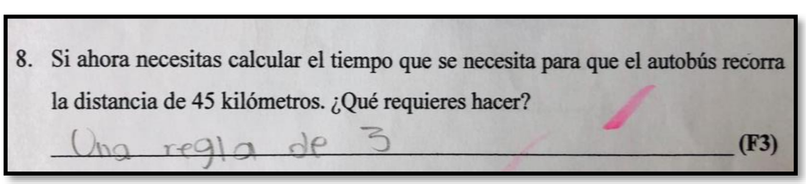

8. Si ahora necesitas calcular el tiempo que se necesita para que el autobús recorra la distancia de 45 kilómetros. ¿Qué requieres hacer?

una divicion 3⟌45 y da 15 y aguno 2 (F3) R=30

Respuesta de P-4

Sin embargo, P-4 no pudo explicar de dónde obtuvo el 3 y el 2. Entonces, P-3 trató de buscar alguna relación entre el 15 y 45 kilómetros igual a 30 min. Así fue como P-3 encontró otro posible procedimiento:

Si a los 10 minutos el autobús estaba a 15km de distancia, me faltan 30km para llegar a los 45km, en la tabla vi que el tiempo correspondiente a 30km eran 20min, se los sumé a los 10 minutos y así obtuve como resultado 30minutos. Sin embargo, en las hojas de trabajo escribió que usó la regla de tres.


8. Si ahora necesitas calcular el tiempo que se necesita para que el autobús recorra la distancia de 45 kilómetros. ¿Qué requieres hacer?

Una regla de 3 (F3)

Respuesta de P-3

Tercera sesión.

Inició la clase con la construcción de la tabla 2:

11. En Geogebra5, deja seis celdas en blanco debajo de la tabla que hiciste y elabora otra tabla que represente esta situación. En la columna ***A*** coloca la distancia recorrida por el autobús; es decir, su posición respecto a la terminal e increméntala de uno en uno hasta 30km. En la columna ***B*** calcula el tiempo transcurrido con la fórmula general. (**F3**)

	A	B
1	Distancia que ha recorrido el autobús	Tiempo recorrido
2		
3		
4		

P-2 y P-3 multiplicaron la distancia por 1.5. El profesor les comentó que ese procedimiento lo habían ocupado en la tabla 1, preguntó:

Profesor: ¿Ahora que tenemos que hacer?

P-2: Dividir

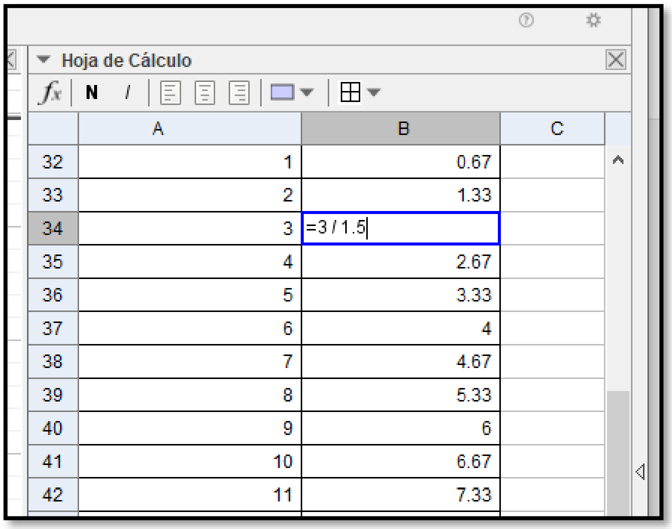
P-4 dividió 20 entre 2 y multiplicó por 3. El profesor explicó al grupo, que era una regla de tres, considerando que 2 minutos era igual a 3km, pero al considerar que 1min = 1.5km, se observa que hay que dividir la distancia entre 1.5 para conocer el tiempo.

$$\frac{1min}{x} = \frac{1.5km}{1km} \qquad \frac{distancia}{constante} = tiempo$$

Profesor: ¿Ahora cómo lo van a hacer apoyándose de Geogebra5?

P-3: 0.67

Al observar su trabajo, P-3 fue dividiendo el tiempo sobre la distancia:

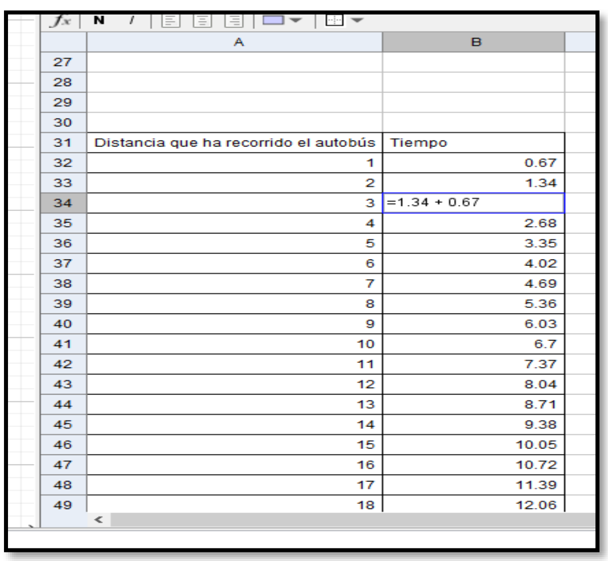


Hoja de Cálculo

	A	B	C
32	1	0.67	
33	2	1.33	
34	3	=3 / 1.5	
35	4	2.67	
36	5	3.33	
37	6	4	
38	7	4.67	
39	8	5.33	
40	9	6	
41	10	6.67	
42	11	7.33	

Trabajo realizado por P-3

Mientras tanto P-1, al encontrar el tiempo equivalente a 1km, fue sumando 0.67 al resultado anterior para encontrar el siguiente, es decir:



	A	B
27		
28		
29		
30		
31	Distancia que ha recorrido el autobús	Tiempo
32	1	0.67
33	2	1.34
34	3	=1.34 + 0.67
35	4	2.68
36	5	3.35
37	6	4.02
38	7	4.69
39	8	5.36
40	9	6.03
41	10	6.7
42	11	7.37
43	12	8.04
44	13	8.71
45	14	9.38
46	15	10.05
47	16	10.72
48	17	11.39
49	18	12.06

Trabajo realizado por P-1

La resolución del ítem número 11, con el uso del software dinámico Geogebra5, produjo resultados distintos a los observados en la primera aplicación. Ahora, los participantes, además de calcular los minutos correspondientes a 45 kilómetros, lograron encontrar diferentes procedimientos para poder calcular cualquier tiempo. Reconocieron la correspondencia entre variables y la influencia del cambio en una de ellas sobre la otra.

En los comentarios grupales, P-1 y P-3 comentaron que si existía una relación entre las variables:

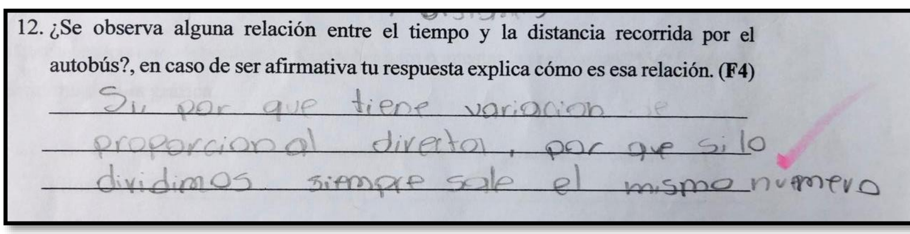
P-3: La relación es que no cambia la constante de 1.5.

Profesor: ¿Cuánto aumentan los resultados de los kilómetros?

P-1: 1.5 y el tiempo 0.67.

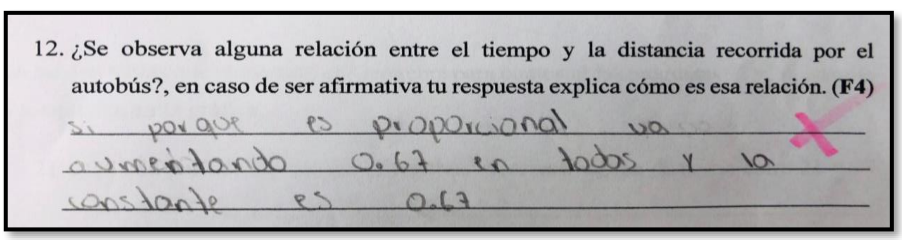
Profesor: Entonces por cada kilómetro el tiempo va aumentando 0.67, va aumentando de manera proporcional.

En las hojas de trabajo escribieron, P-1, P-3 y P-5 que las variables tenían una relación proporcional porque no cambiaba la constante, mientras que P-2, P-4 y P-6 expresaron que la relación proporcional era constante e igual a 0.67.


12. ¿Se observa alguna relación entre el tiempo y la distancia recorrida por el autobús?, en caso de ser afirmativa tu respuesta explica cómo es esa relación. (F4)

Si por que tiene variacion de proporcional directa, por que si lo dividimos siempre sale el mismo numero

Respuesta de P-3

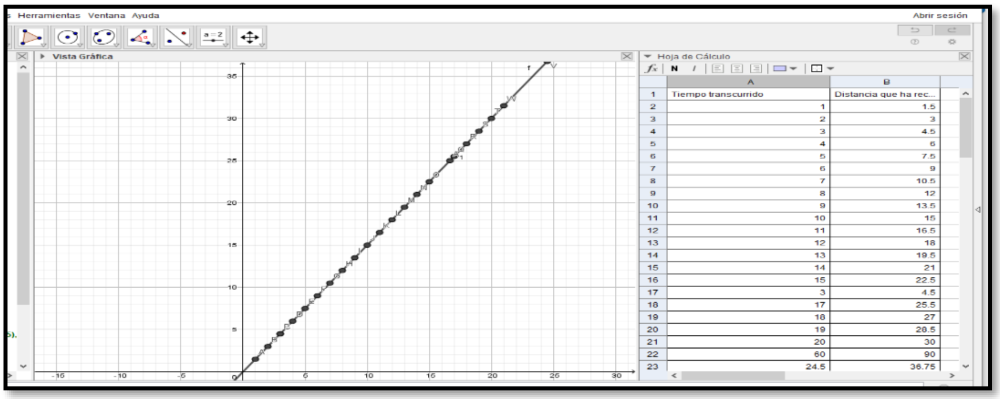

12. ¿Se observa alguna relación entre el tiempo y la distancia recorrida por el autobús?, en caso de ser afirmativa tu respuesta explica cómo es esa relación. (F4)

si porque es proporcional va aumentando 0.67 en todos y la constante es 0.67

Respuesta de P-2

Cuarta sesión.

Continuaron con las actividades del ítem 13: Convirtieron los datos de tiempo y distancia en pares ordenados para marcarlos como puntos en el plano cartesiano, después trazaron una recta del punto A al punto B y se les preguntó si la recta pasaba por todos los puntos marcados.



Trabajo realizado por P-1

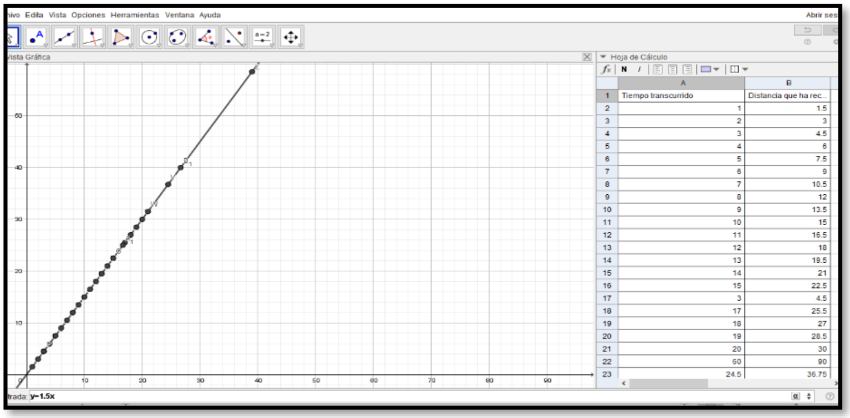
El profesor les preguntó qué significaba que la recta pasara por todos los puntos, pero ninguno de los participantes contestó. Entonces preguntó cuál era el "eje de las x", nuevamente nadie contestó. (Debido a esto se decidió cambiar la explicación sobre la ubicación de las ordenadas y las abscisas en el plano cartesiano, en la versión final de las hojas de trabajo y ubicarla después de los dos primeros ítems de la sesión para que los alumnos ubiquen correctamente los ejes y puedan realizar las actividades posteriores).

Mostró en la proyección la ubicación de cada eje y cómo se denominan. Explicó que en el eje de las "x o abscisas", se representa el tiempo y la distancia en el eje de las "y u ordenadas". Que a esos puntos se les llaman pares ordenados.

Preguntó los pares ordenados de diferentes puntos, primero los buscaban en las columnas A y B de la tabla 1 y luego los ubicaban en la gráfica, mientras los participantes decían sus valores. Esta aportación del profesor, favoreció que los alumnos pudieran vincular dos de las representaciones del problema: la tabla y la gráfica. Esto es parte de las características que deben tener las actividades didácticas basadas en el modelo didáctico de los tres usos de la variable.

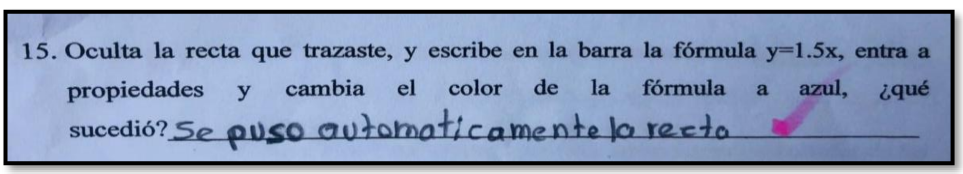
Quinta sesión.

Continuaron con el ítem 15, ocultaron la recta y escribieron la fórmula y=1.5x en la barra de entrada, luego se les pidió que escribieran lo que sucedió.



Trabajo realizado por P-1

En las hojas de trabajo, sólo P-1 escribió que la recta se había trazado automáticamente. Con estas actividades se pretendía que los alumnos observaran que las condiciones del problema, se pueden representar también, con una función. Pero como no se logró ese objetivo, en la versión final de la propuesta, se agregó un cuadro informativo relacionado con esta idea.



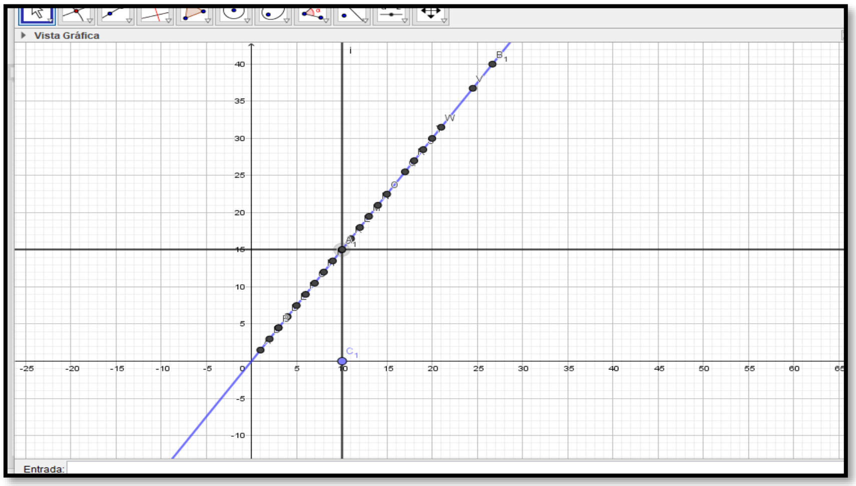
15. Oculta la recta que trazaste, y escribe en la barra la fórmula y=1.5x, entra a propiedades y cambia el color de la fórmula a azul, ¿qué sucedió? Se puso automaticamente la recta

Respuesta de P-1

Observa que has representado las condiciones del problema de 3 formas diferentes: con la *tabla*, con la *recta o gráfica* que trazaste sobre los puntos y finalmente con la fórmula *y=1.5x*

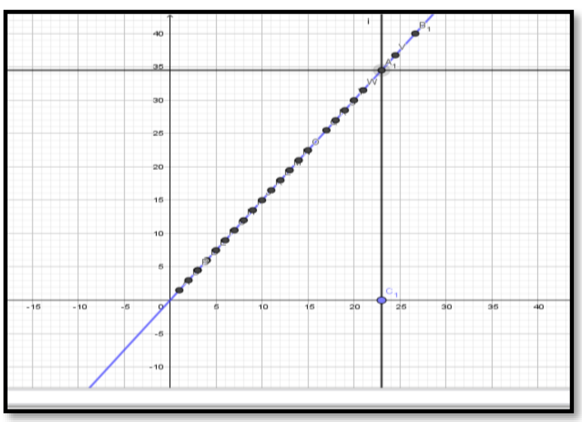
Cuadro informativo agregado a la actividad

Lo siguiente que hicieron fue marcar un punto sobre el eje de las abscisas, trazar una perpendicular al eje de las abscisas que pasara sobre ese punto. Marcar el punto de intersección entre la perpendicular y la gráfica de la función y=1.5x. Después trazar una perpendicular al eje de las ordenadas que pasara por el punto de intersección con la gráfica.



Trabajo realizado por P-6

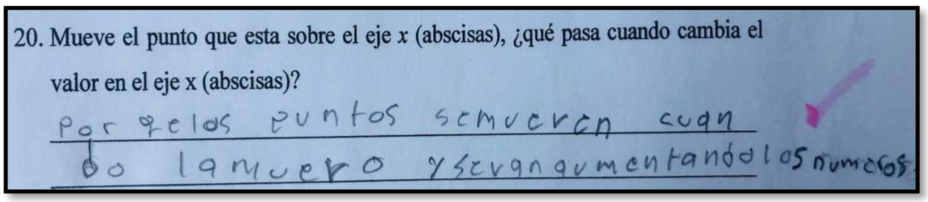
En el ítem 19, se les pedía que movieran en el punto de intersección de las paralelas trazadas con la gráfica para que pudieran observar el cambio de valores en las abscisas y las ordenadas.



Trabajo realizado por P-3

En el ítem 20, se les pidió que escribieran qué pasaba cuando cambiaba el valor de las abscisas. El profesor hizo el ejercicio en la proyección y pidió que escribieran lo que observaban.

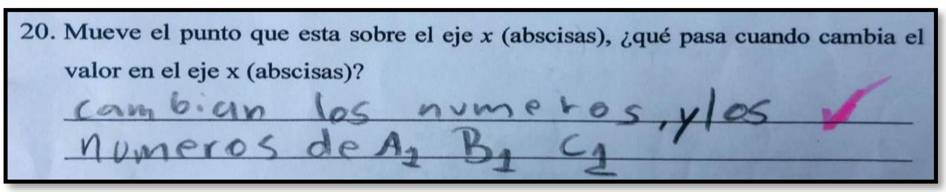
Sólo P-5 y P-6 mencionó que al moverse el punto los valores de las abscisas y las ordenadas cambiaban.



20. Mueve el punto que esta sobre el eje x (abscisas), ¿qué pasa cuando cambia el valor en el eje x (abscisas)?

Por qe los puntos se mueven cuan do la muevo y se van aumentando los numeros.

Respuesta de P-5



20. Mueve el punto que esta sobre el eje x (abscisas), ¿qué pasa cuando cambia el valor en el eje x (abscisas)?

cambian los numeros, y los numeros de A_1 B_1 C_1

Respuesta de P-6

Con base en las respuestas de los participantes, se modificó la pregunta a: Mueve el punto que esta sobre el eje “x” (abscisas), observa la “etiqueta de valor”, ¿qué pasa con el valor de “y” (ordenadas), cuando cambias el valor en el eje “x” (abscisas)?, para centrar la atención en la variación conjunta de las variables en la relación funcional, como lo propone el modelo didáctico de los tres usos de la variable, propuesta en el modelo didáctico de los tres usos de la variable.

Para finalizar la sesión, calcularon el tiempo en que el autobús recorrió la distancia entre 21 y 39 kilómetros. P-1, usando el software, multiplicó 21 (1.5) = 31.5. El profesor comentó que les estaban preguntando cuántos minutos habrían pasado, señalando los 21 kilómetros en la tabla 2, entonces P-1, después de observar la tabla, contestó que 14 minutos.

Profesor: Ese es el inicio del periodo, ¿cuál es el final?

P-3: 39 kilómetros.

Profesor: Revisen la tabla 2.

P-4: La tabla 2 sólo llega hasta el número 30.

Profesor: ¿Qué podemos hacer?

P-3: Dividir 39 entre 1.5 = 26.

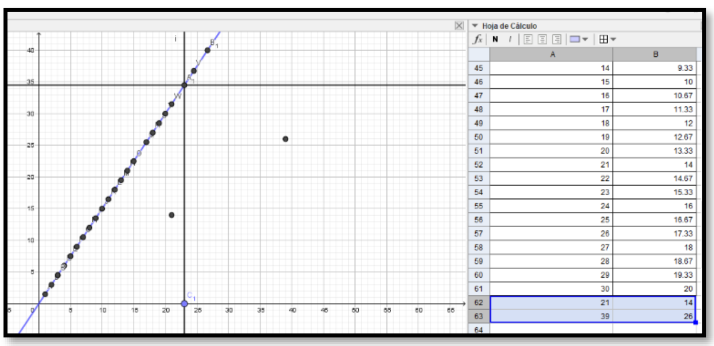
Profesor: ¿Cuál es el intervalo de tiempo que encontraron?

P-1: Entre 14 y 26 minutos.

Profesor: Ubiquen el periodo en la gráfica.

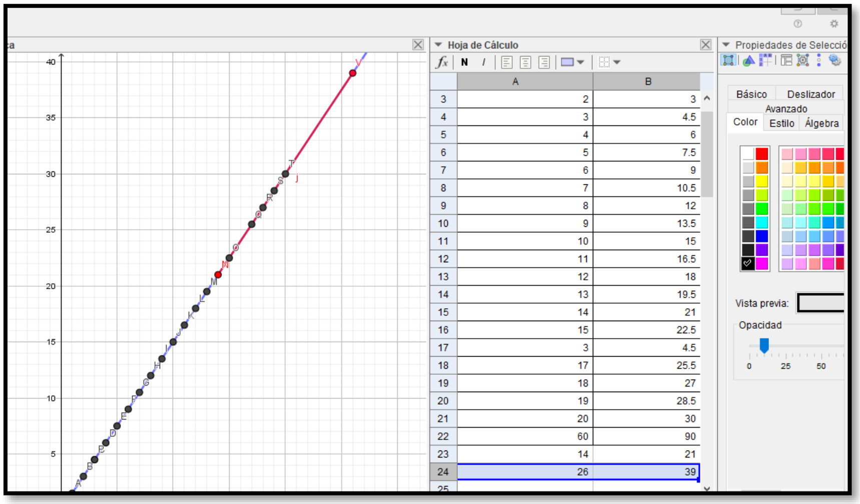
Pide a P-4 y P-2 que escriban las cifras (21,14) y (39,26), en la tabla 2, para convertirlas a lista de puntos. Al hacerlo los puntos se marcaron fuera de la recta.

P-3: Están al revés los números, es (14, 21) y (26, 39).

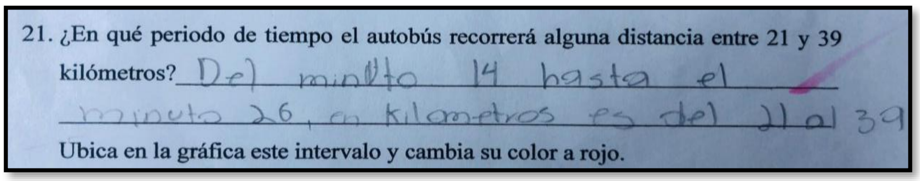


Trabajo realizado por P-2 y P-4 en la computadora principal

El profesor pidió a P-2 y P-4 que borraran las cifras de la tabla 2 y las escribieran en la tabla 1. Luego, cambiaron el color de los puntos a rojo, además trazaron un segmento cuyos extremos eran los puntos (14, 21) y (26, 39). Guardaron su trabajo y finalizó la sesión.



Trabajo realizado por P-3



21. ¿En qué periodo de tiempo el autobús recorrerá alguna distancia entre 21 y 39 kilómetros? Del minuto 14 hasta el minuto 26, en kilometros es del 21 al 39

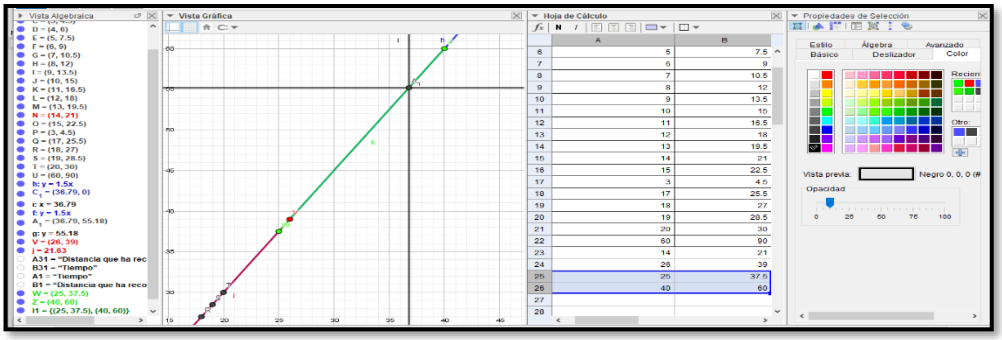
Ubica en la gráfica este intervalo y cambia su color a rojo.

Respuesta de P-3

Sexta sesión.

El profesor pidió que resolvieran el ítem 22, el cuál preguntaba la distancia mínima y máxima que recorrería el autobús en el periodo de 25 a 40 minutos

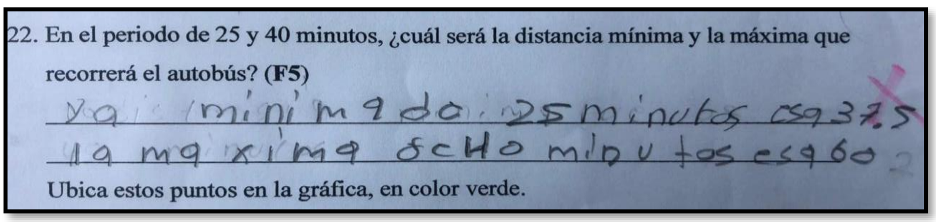
P-1 comentó a P-4: Hay que multiplicar los minutos por 1.5, porque lo que nos están preguntando es la distancia.



Trabajo Realizado por P-4

En esta imagen se pueden observar los dos periodos identificados.

Todos los participantes identificaron que la distancia mínima era 37.5 kilómetros y la máxima 60 kilómetros.


22. En el periodo de 25 y 40 minutos, ¿cuál será la distancia mínima y la máxima que recorrerá el autobús? **(F5)**

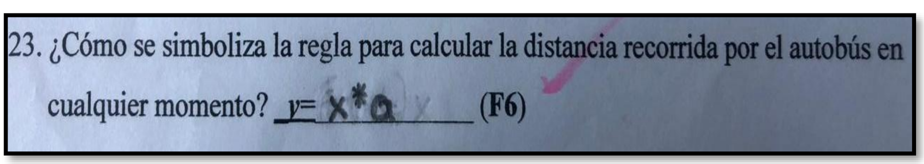
la minima da 25 minutos es 37.5
la maxima ocHo minutos es 60

Ubica estos puntos en la gráfica, en color verde.

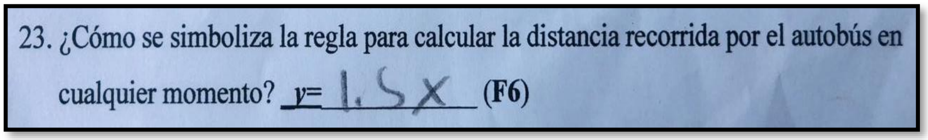
Respuesta de P-6

Con estas actividades, los alumnos determinaron los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

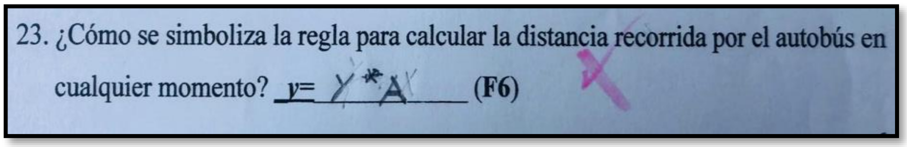
Al escribir en las hojas de trabajo la regla para calcular la distancia recorrida por el autobús en cualquier momento, cinco de los seis participantes lograron identificarla, sólo P-6 escribió y=y*a. Por tanto, los participantes lograron simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos del problema.


23. ¿Cómo se simboliza la regla para calcular la distancia recorrida por el autobús en cualquier momento? y= x*a **(F6)**

Respuesta de P-1

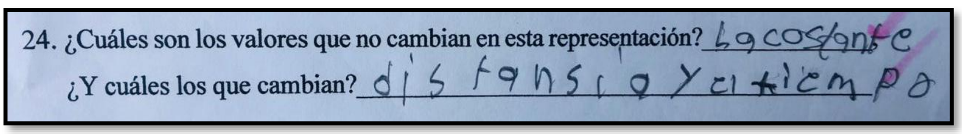

23. ¿Cómo se simboliza la regla para calcular la distancia recorrida por el autobús en cualquier momento? y= 1.5X (F6)

Respuesta de P-5


23. ¿Cómo se simboliza la regla para calcular la distancia recorrida por el autobús en cualquier momento? y= Y*A (F6)

Respuesta de P-6

Para terminar la actividad, en el ítem 24 se les preguntó cuáles eran los valores que cambian y los que no cambian en la representación y=1.5x. Todos los participantes identificaron que el valor que no cambia era la constante o 1.5 y que los valores que cambian son la distancia y el tiempo.


24. ¿Cuáles son los valores que no cambian en esta representación? La costante
¿Y cuáles los que cambian? distansia y el tiempo

Respuesta de P-6