Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

"La Incorporación de la Conjetura y el Contraejemplo en el Aprendizaje de las Matemáticas"

T E S I S

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica

Presenta:

Orlando Enrique García Marimón

Dirigida por:

Dr. Carlos Rondero Guerrero
Dra. Anna Tarasenko

Mineral de la Reforma, Hidalgo, Agosto de 2009

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DIRECCIÓN

M. en A. JULIO CESAR LEINES MEDECIGO
DIRECTOR DE CONTROL ESCOLAR
P R E S E N T E

Por este conducto le comunico que el jurado asignado al pasante de la *Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica* **C. L. M Orlando García Marimón**, quien presenta el trabajo de titulación ***"La incorporación de la conjetura y el contraejemplo en el aprendizaje de las Matemáticas"***, después de revisar el trabajo en reunión de Sinodales ha decidido ***autorizar la impresión*** del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación se anotan las firmas de conformidad de los integrantes del Jurado:

PRESIDENTE:	Mtro. Juan Alberto Acosta Hernández
PRIMER VOCAL:	Dr. Orlando Ávila Pozos
SECRETARIO:	Dr. Carlos Rondero Guerrero
SUPLENTE:	Dra. Anna Tarasenko

Sin otro particular, reitero a usted la seguridad de mi atenta consideración.

A T E N T A M E N T E
"AMOR, ORDEN Y PROGRESO"
Mineral de la Reforma, Hgo., 19 de agosto del 2009.
DIRECTOR

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
INSTITUTO DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

M. en C. OCTAVIO CASTILLO ACOSTA.

Ciudad Universitaria Carretera Pachuca – Tulancingo Km. 4.5 C.P. 42184
Col. Carboneras, Mineral de la Reforma, Hgo.
Tel. 017717172000 Ext. 2230, 2231 Fax ext. 2109
castillo@uaeh.reduaeh.mx

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por brindarme la oportunidad de obtener esta beca,
de seguir adelante y por concluir este trabajo de grado.

A mi amada con su apoyo incondicional, me impulsaron a no rendirme jamás
pese a todas las adversidades.

A mis padres, que desde lejos han tenido una muestra de que
su apoyo todavía se mantiene.

Al Doctor Carlos, la Doctora Anna y al Doctor Orlando, que siempre estuvieron dispuestos
a ayudar en la medida de su disponibilidades, por sus consejos y compresión.

ÍNDICE

Resumen

Es bien sabido que en el aprendizaje de las Matemáticas, están involucrados varios fenómenos de índole compleja que se presentan en todos los niveles educativos. Uno de tales fenómenos didácticos vertebrales, es el que se refiere a la estructuración de un pensamiento matemático en los estudiantes.

Es entonces pertinente plantear la pregunta: ¿La incorporación del uso del contraejemplo y la conjetura posibilita que los estudiantes transiten de un pensamiento ingenuo a un pensamiento matemático?

El pensamiento ingenuo es identificado como un pensamiento inmediato e irracional, el cual evita acceder al conocimiento de la realidad de manera científica porque está mal organizado, y se percibe como una característica predominante en muchos estudiantes de diversos niveles educativos.

Por contraposición, la instalación de un pensamiento científico en específico referido a un pensamiento matemático, requiere de elementos tales como inducción, pensamiento crítico y analítico, y por supuesto la incorporación de la argumentación, modelación y la abstracción, así como el uso adecuado de contraejemplos y conjeturas. Precisamente como señala Lakatos (1978) *el descubrimiento ni sube ni baja*, *sino que sigue una trayectoria zigzagueante aguijoneado por los contraejemplos, se mueve de la conjetura ingenua a las premisas y vuelve de nuevo a eliminar la conjetura ingenua, sustituyéndola por el teorema*, de manera tal que estos dos aspectos contraejemplos y conjeturas, resultan ser preponderantes en la construcción del conocimiento matemático, y su incorporación a la Didáctica propicia la instalación de un pensamiento matemático, en cuanto a poder dotar a los estudiantes de elementos conceptuales que amplíen su capacidad de argumentación e inducción, entre otros aspectos.

Este trabajo analiza desde una perspectiva epistemológica y cognitiva, el papel que juega la incorporación de estos recursos cuando se pretenden instalar algunos de los conceptos fundamentales de las Matemáticas escolares, así como en la resolución de problemas.

Palabras claves: pensamiento ingenuo, pensamiento matemático, conjetura y contraejemplo.

Abstract

It is well known that in the learning of Mathematics, involving various kinds of complex phenomena that occur at all educational levels. One such didactic vertebral phenomena, was that the structure of a mathematical thinking in students.

It is at the time pertinent to pose the question: does the incorporation of the use of the counterexample and the conjecture make possible that the students travel from a naive thinking to a mathematical thinking?

The naive thinking is identified as an immediate and irrational thinking, which avoids to accede to the knowledge of the reality of a scientific way because it is organized badly, and it is perceived as a predominant characteristic in many students of diverse educational levels.

In contrast, the installation of scientific thinking in reference to a specific mathematical thinking requires elements such as induction, critical thinking and analytical, and of course the inclusion of argumentation, modeling and abstraction, and the proper use of conjectures and counterexamples. Just as noted Lakatos (1978) *discovery does not go up or down, but follows a zig-zag path: prodded by counterexamples, it moves from the naive conjecture to the premises and then turns back again to delete the naive conjecture and replace it by the theorem*, so such that these two counterexamples and conjectures, prove to be dominant in the construction of mathematical knowledge, and their incorporation into Pedagogy encourages the installation of a mathematical thinking, as to be able to give students conceptual elements that enhance their capacity of reasoning and induction, among other things.

This paper analyzes epistemological and from a cognitive perspective, the role played by the incorporation of these resources when trying to install some of the basic concepts of school Mathematics, as well as in the resolution of problems.

Keywords: naive thinking, mathematical thinking, conjecture, and counterexample.

Introducción

La Didáctica de las Matemáticas se ha preocupado por caracterizar fenómenos que ocurren en la escuela sobre las Matemáticas, pero una gran inquietud de esta disciplina consiste en qué pasa con el entendimiento de los objetos matemáticos en el aula. Se observa en pruebas de evaluación internacionales como nacionales una limitada comprensión de los estudiantes mexicanos cuando obtienen bajas calificaciones, y todo lo anterior conlleva a una inadecuada estructuración de un pensamiento matemático en los alumnos de diferentes niveles educativos.

El primer capítulo del trabajo presenta la problemática expuesta en el aula sobre la estructuración de un pensamiento matemático con la ayuda de elementos matemáticos como la conjetura y el contraejemplo. En este capítulo se muestra en parte el problema recurrente que ocurre en las aulas latinoamericanas, se dan preguntas de investigación, una hipótesis y objetivos que se pretenden lograr en el trabajo.

En el segundo capítulo se caracterizan todas las nociones presentadas en la hipótesis como: pensamiento matemático, pensamiento ingenuo, conjetura, contraejemplo; y muestra aspectos apreciables en cada una. Además, se exponen teorías como metodologías que explican el papel de la conjetura y el contraejemplo para la estructuración de un pensamiento matemático. Uno de los matemáticos interesados sobre estas nociones fue Irme Lakatos (1978) quien explotó la importancia de ellas en el descubrimiento matemático.

El tercer capítulo presenta la metodología basada en Ingeniería Didáctica tomada en el trabajo de investigación sobre explicaciones generales de cada una que muestra más características que realzan aspectos en el descubrimiento matemático con la ayuda de la conjetura y el contraejemplo. Los capítulos cuarto, quinto y sexto presentan los análisis respectivos de la entrevista, el diagnóstico aplicado a profesores en activo y la revisión de los libros de textos matemáticos para ver como se emplean en todos estos tanto a la conjetura como al contraejemplo.

Después, se da un apartado de Conclusiones sobre las reflexiones finales del papel que juega la conjetura y el contraejemplo en el desarrollo de las nociones matemáticas, que sirve para mostrar el tránsito de un pensamiento ingenuo a un pensamiento matemático adecuado en los estudiantes.

Este trabajo está dirigido inicialmente a los niveles de secundaria, medio superior y superior. Sin embargo, con las modificaciones requeridas es posible emplearlo en otros niveles para la estructuración de un pensamiento matemático de los estudiantes.

Capítulo I

Definición del problema

Es bien sabido que el aprendizaje de las Matemáticas es un fenómeno complejo de interés principalmente didáctico que se presenta en todos los niveles educativos. Debido al bajo rendimiento de los estudiantes existe una preocupación que se observa en los resultados obtenidos de México, como se da el caso de las pruebas de PISA[1] colocándolos por debajo de la media internacional[2]; y que en cierta forma este rendimiento lo manifiestan los estudiantes cuando no logran la estructuración de un pensamiento matemático adecuado.

A través de la historia el desarrollo del pensamiento matemático no ha sido en forma progresiva, más bien los conocimientos matemáticos han sufrido cambios drásticos por el papel importante que han jugado recursos como las *conjeturas* y los *contraejemplos* en la construcción y evolución de las Matemáticas. Aunque estos recursos son empleados por los investigadores, como parte de su quehacer en el caso de la estructuración de los "nuevos conocimientos", pocas veces son usados por el profesor en su práctica docente para el desarrollo y adquisición de conocimientos en el aula. Este trabajo analiza el papel que juega la incorporación de la conjetura y el contraejemplo cuando se desean instalar algunos conceptos fundamentales de las Matemáticas escolar y al pretender la resolución de problemas que la involucran en diferentes niveles educativos.

En una sociedad, los individuos continuamente están tratando de resolver los problemas que se les presentan diariamente cuando intentan obtener explicaciones o resultados para avanzar en su actividad. De una u otra forma la construcción del conocimiento sucede cuando los investigadores se hacen preguntas, e intentan responderlas dando soluciones que no necesariamente son siempre correctas; y sin embargo, les permiten crear estrategias para abordar el mismo problema desde otras perspectivas.

Por otro lado, algunas investigaciones en Matemática Educativa han analizado las equivocaciones de los alumnos como lo muestra Rico (1995); el cual realizó un estudio minucioso en torno a la *categorización y clasificación de los errores*. En ese trabajo se presentan sistemáticamente como *aquellos que se deben a la dificultad de lenguaje, otros debido a asociaciones incorrectas, otros sobre la aplicación de*

[1] Program for International Student Assessment
[2] El Promedio de México en Habilidad Matemática es 406, y Media Internacional es 498. (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006, p. 70)

reglas, entre otros; los cuales surgen en la necesidad de construir conocimientos matemáticos en el aula. Con estos elementos propuestos para el docente las percepciones erróneas pueden ser prevenidas o corregidas pero no siempre son fáciles de cambiar por concepciones correctas, como lo muestran algunos estudiantes cuando vuelven a cometer las mismas faltas.

La conjetura y el contraejemplo son recursos que en cierta forma han sido usados desde tiempos inmemoriales: como es el caso de Sócrates y su joven discípulo Teeteto, cuando discuten el significado de ¿qué es la ciencia? En ese diálogo Sócrates pone en tela de juicio las "conjeturas" de su discípulo, por ejemplo cuando Teeteto expone *... lo que se puede aprender con Teodoro, como la geometría y las otras artes de que has hecho mención, son otras tantas ciencias, y, hasta todas las artes, sea la de zapatero o cualquier otro oficio, no son otra cosa que ciencias*, y Sócrates (con un contraejemplo) le contesta a su discípulo *...cuando se pregunta sobre qué es la ciencia, es ponerse en ridículo al dar por respuesta el nombre de una ciencia, puesto que es responder sobre el objeto de la ciencia, y no sobre la ciencia misma, que es a la que se refiere la pregunta*[3], con una refutación que ayuda a cambiar la respuesta de Teeteto (Platón, 2003). Aquí se observa cómo el maestro induce a "conjeturar" a su discípulo para modificar sus respuestas, lo cual le permite desarrollar un pensamiento mejor estructurado.

Frecuentemente los investigadores falsean sus propias conjeturas o bien las propuestas por otros colegas, y en parte lo hacen estructurando contraejemplos que pueden ayudar el logro de un enfoque distinto en sus investigaciones, llevándolos a la posible construcción de nuevos teoremas. De acuerdo a lo anterior Lakatos (1978) señala que *el descubrimiento ni sube ni baja sigue una trayectoria zigzagueante aguijoneado por los contraejemplos, se mueve a la conjetura ingenua a las premisas y vuelve de nuevo a eliminar la conjetura ingenua, sustituyéndola por el teorema*. Entonces construir conocimientos en las Ciencias requiere de recursos como la conjetura y el contraejemplo y así poder encontrar nuevas estructuras conceptuales.

Las Matemáticas como ciencia no escapan al uso de la conjetura y el contraejemplo, ya que científicos han logrado que a través de mostrar la validez de sus conjeturas su comunidad cambie los enfoques al identificar contradicciones o errores;

[3] Platón. (2003). *Diálogos. Volumen V: Parménides. Teeteto. Sofista. Político.* Madrid: Editorial Grecos.

lo cual permite incorporar otras nociones en una determinada teoría. Conforme a esto, Lakatos menciona que el uso del contraejemplo muestra la necesidad de modificar el objeto matemático por otro que lo convierta en un concepto más acabado. Y en ese sentido Castro y Puig (1997) dicen que *los asaltos al concepto por sucesivos contraejemplos son producidos como consecuencia de la prueba de teoremas y las formas de modificar el concepto*. En la historia de las Matemáticas diversos conceptos han sufrido cambios necesarios y en parte se debe al empleo de los contraejemplos, los cuales muestran incongruencias en el desarrollo de esas nociones matemáticas.

En la perspectiva de este trabajo de investigación, se pretende poner en práctica el papel de la conjetura y del contraejemplo en el aprendizaje de las Matemáticas, para analizar qué tanto propician el cambio del pensamiento ingenuo y cómo fomentan a la estructuración de un pensamiento matemático adecuado en los estudiantes.

1.1 Situación actual

El hombre es un ser dotado de capacidades mentales que han evolucionado paulatinamente tratando de responder las interrogantes que afronta a diario; aunque algunas veces sus soluciones son inadecuadas, éste persiste haciendo cambios de perspectiva presentando nuevas ideas. Entonces en su formación ha usado la ayuda del método de ensayo y error para su desarrollo como individuo; el cual está sustentado con la Teoría de aprendizaje de Thorndike (1911) sobre ¿cómo aprenden los seres humanos? donde se afirma que *cuando aprendemos a jugar golf o tenis o billar, … no aprendemos principalmente de ninguna idea que se explique a nosotros, por ninguna inferencia que razonamos hacia fuera. Aprendemos por la selección gradual del acto o del juicio apropiado, por su asociación con las circunstancias o la situación requerida.* Sin embargo, surgen otras teorías sobre ¿cómo se aprende? con diversos enfoques; las cuales intentan explicar las formas de adquirir conocimientos, destrezas y habilidades necesarios como es el caso del conductismo o el constructivismo o el socioconstructivismo, entre otras.

Muchas de esas teorías apuntan sobre la idea que algunos individuos a través de buenas preguntas pueden elaborar conjeturas con la intención de resolver sus problemas, pero frente a problemas con otro grado de dificultad presentan un "pensamiento ingenuo" que obstaculiza el desarrollo hacia un pensamiento científico. Algo similar ocurre con algunos estudiantes cuando están intentando aprender Matemáticas, y que se refleja en sus desempeños escolares cuando no logran comprender conceptos, propiedades, estructuras matemáticas, entre otras que son necesarias para la construcción de un pensamiento matemático propio.

Sobre el desempeño escolar, las evaluaciones del sistema educativo muestran en cierta forma las limitaciones de los alumnos. En ese sentido, actualmente se realizan pruebas anuales a estudiantes mexicanos como es el caso de ENLACE (*Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares)* desde primaria, secundaria y media superior en donde se manifiestan particularmente errores en Matemáticas. ¿Será que existen pensamientos muy arraigados en los alumnos? ¿Es posible cambiar estas percepciones con elementos lógico-matemáticos que lleven a transitar de un pensamiento ingenuo hacia uno matemático?

El pensamiento ingenuo se expresa algunas veces en errores que representan una preocupación en el medio educativo y muchas veces el docente lo caracteriza como un aspecto negativo en el proceso de aprendizaje, pues en su postura la equivocación de los estudiantes en su trabajo matemático escolar es un fracaso y *no se abandonan por simple exposición a los conceptos científicos correctos* (Pozo, 2003). Algunos autores lo han denominado obstáculo[4] en el sentido que impide la construcción de otros conocimientos y el surgimiento de nuevas ideas.

No es muy frecuente que el docente le pregunte a sus estudiantes sobre sus ideas o "conjeturas" para buscar soluciones a los problemas planteados en el aula, simplemente éste les da las respuestas sin realizar ningún análisis ni discusión con ellos acerca de cómo es que se llegó a tales respuestas. Es decir, la clase se presenta de manera tradicional cuando generalmente el docente expone el contenido siempre de la misma forma (contestándose él mismo sus preguntas), y exhibe una "postura conductista" dando todo como algo acabado sin un análisis crítico sobre el tema abordado.

Sin embargo, muchas veces los estudiantes no entienden el por qué esas respuestas son las adecuadas; ya que ellos poseen sus propias ideas que posteriormente

[4] La noción de obstáculo está relacionada con la idea de aprendizaje por adaptación. (Brousseau, 1986).

usan en la solución de sus problemas. Esas respuestas algunas veces no son las correctas y casi nunca cambian las percepciones erróneas (errores o pensamientos ingenuos) por las soluciones adecuadas negándose a analizar las equivocaciones construidas en el proceso de aprendizaje.

Además, dentro del quehacer educativo referente al aprendizaje de las Matemáticas, el contraejemplo es un recurso que puede hacer ver a los estudiantes de cualquier nivel educativo que su pensamiento ingenuo no siempre funciona. Por lo tanto, requiere modificarlo para tener una percepción adecuada de los conceptos y estructuras matemáticas estudiadas.

1.2 Planteamiento del problema

La Didáctica de las Matemáticas, se preocupa entre otros aspectos por encontrar un mejor proceso de enseñanza de la asignatura y en ese sentido; las deficiencias se han utilizado como un recurso didáctico, independientemente del origen de las mismas como lo hemos mencionado el caso de Rico (1995) sobre sus *categorizaciones y clasificación de los errores*.

Los errores[5] dentro de casos específicos de pensamiento ingenuo son elementos que se han estudiado logrando que ese camino sea el inadecuado al momento de resolver un problema en el aula, pero pocas veces son tomados desde otro ángulo comprendiendo que realmente ese camino es incorrecto para el mejor logro de los aprendizajes. En ese aspecto Carrión (2007) sostiene que *no es suficiente que un individuo sepa lo correcto; debe saber lo que es incorrecto porque, de esta manera, se puede identificar el punto donde termina lo correcto y empieza lo incorrecto*. Dentro de la investigación, los errores son tomados como concepciones previas que no permiten una evolución del pensamiento en el alumno imposibilitándolo cambiar a la estructuración de un pensamiento matemático.

Ahora, si un estudiante posee un pensamiento matemático bien estructurado, puede hacer un análisis crítico de estructuras matemáticas como otras concepciones propias de la ciencia, o diversas actividades que involucren a este tipo de pensar. Entonces, una preocupación para la Didáctica de las Matemáticas es intentar explicar

[5] Concepto equivocado o juicio falso. (RAE).

¿cómo se puede lograr estructurar un pensamiento matemático en los estudiantes? Con esta interrogante se intenta buscar elementos tanto en la Matemática como en la Didáctica, que sirvan para dar respuesta a esta inquietud dentro de la investigación presentada.

En ese sentido, el proceso de conjeturar como elemento de construcción de un pensamiento matemático para los estudiantes, la mayor parte de las veces es algo que no es fomentado por el docente en el aula dejando de observar los conocimientos previos que estos tienen. Los científicos no construyen los conocimientos fácilmente; más bien en la mayoría de las veces están elaborando nuevas conjeturas que más tarde pueden llegar a convertirse en conocimientos mejor estructurados como es el caso de definiciones, lemas, teoremas, corolarios y teorías completas que componen las ciencias.

La postura del docente se muestra por su poca disponibilidad de usar recursos diferentes a los que generalmente presenta en el aula, con esta forma siempre aborda los temas sin un análisis crítico de la situación, y existe una falta de interés de los estudiantes al intentar encontrar las respuestas a las problemas planteados en el aula. Aquí la postura del estudiante es que él aprende los nuevos conocimientos sólo cuando el maestro le enseña, de tal manera que no es capaz de buscar por su propia cuenta soluciones a sus dudas.

Parte de las posturas que adoptan algunos profesores, como las anteriormente señaladas, repercuten en los estudiantes cuando reiteradamente cometen las mismas equivocaciones a la hora de realizar sus desarrollos matemáticos; mostrando en parte un pensamiento ingenuo al no tener control sobre los mismos porque carecen de otros elementos que posibiliten un cambio y estas *ideas erróneas suelen ser muy resistentes al cambio, permaneciendo inalteradas incluso por largos periodos de instrucción* (Pozo, 2003). Desde nuestra perspectiva, puede ser el contraejemplo un recurso de aprendizaje de las matemáticas que proporcione cambiar el pensamiento ingenuo de los estudiantes a la estructuración de un pensamiento matemático.

Con todos estos elementos presentados surge la necesidad de usar otras estrategias para la estructuración de un pensamiento matemático en cualquier nivel educativo, el cual es fundamental incorporar en los estudiantes como miembros de una sociedad, que explica en gran parte muchos de sus fenómenos con el uso de un lenguaje matemático.

1.3 Preguntas de investigación

- ¿La incorporación del uso de la conjetura en los estudiantes sobre los problemas planteados en el aula, posibilita el desarrollo de un pensamiento matemático?
- ¿Cómo ayuda el contraejemplo como recurso didáctico para que el estudiante transite del pensamiento ingenuo a la estructuración de un pensamiento matemático?

1.4 Hipótesis de investigación

La estructuración de un pensamiento matemático en los estudiantes, se puede fortalecer en la medida que se incorpore la conjetura y el contraejemplo en sus estrategias de aprendizaje.

1.5 Objetivos

Objetivo General

- Mostrar el papel que juega la conjetura y el contraejemplo en el aprendizaje de las Matemáticas.

Objetivos Específicos

- Comprender el significado de la conjetura y el contraejemplo en el aula
- Analizar una entrevista no estructurada con un matemático sobre lo relevante de la conjetura y el contraejemplo en su práctica profesional y docente.
- Examinar una prueba diagnóstica donde se tome como actividades primordiales la construcción de conjeturas y contraejemplos como el papel de la argumentación.
- Analizar libros de textos de Matemáticas desde un enfoque basado en el descubrimiento matemático, específicamente sobre la elaboración de conjeturas y contraejemplos.

1.6 Justificación e importancia del estudio

La realidad de la problemática educativa del aprendizaje de las Matemáticas es algo que no se puede ocultar, y una evidencia clara son las pruebas de PISA *(Program for International Student Assessment)*; las cuales miden las destrezas necesarias sobre estudiantes mexicanos con edad promedio de 15 años que no logran competir con resultados obtenidos con países como Finlandia o Japón[6], y solo se observa un nivel básico de razonamiento matemático en el estudiantado. Es necesario el uso de recursos no tradicionales que intenten resolver esas dificultades presentes en los estudiantes de cualquier educativo, para lo cual se requiere realizar investigaciones en esa dirección.

Pareciera conveniente que el profesor propicie el que los estudiantes construyan sus propias conjeturas para buscar un desarrollo de su pensamiento matemático; como lo hacen los matemáticos cuando construyen nuevos conceptos o modifican teoremas, o bien cuando se encuentran incongruencias del mismo y así se superan dificultades. Por otra parte, en referencia al pensamiento ingenuo, cabe aclarar que aunque no se puede erradicar del todo, un estudiante debe estar atento a la presencia del mismo cuando se enfrenta a un determinado problema o situación de aprendizaje; y para en todo caso irlo modificando por un pensamiento más elaborado basado en argumentos bien sustentados, lo cual son necesarios para la compresión de los temas abordados.

Existe un recurso en Matemáticas que puede permitir en parte el cambio del pensamiento ingenuo de los estudiantes al que se le ha denominado “contraejemplo”. El contraejemplo consiste en plantear al estudiante una situación a partir de una contradicción que tiene que resolver, la cual constituye contraria a la que se analiza en el sentido que difiere del objeto de estudio.

Por ejemplo, cuando en álgebra se pregunta el resultado de $(a + b)^2$ algunos estudiantes dan como “conjetura precipitada” sin un buen análisis $a^2 + b^2$; se sabe que este pensamiento ingenuo y otros se ha estudiado desde distintas perspectivas teóricas como el caso de Ruano et al. (2008), los cuales clasifican y analizan los errores

[6] Media de Finlandia y Japón en habilidad matemática respectivamente, 548 y 523. (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006, p. 70)

cometidos por parte de los alumnos en álgebra. Pero la pregunta que surge es ¿por qué vuelven a presentar esta idea como solución?, cuando en realidad la respuesta es $a^2 + 2ab + b^2$. La ayuda del contraejemplo presenta casos donde se obtiene que la relación $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ no es válida, como se muestra cuando se asigna en particular $a = 1$ y $b = 2$. Con la ayuda de este pensamiento numérico $(1+2)^2 \neq 1^2 + 2^2 \Rightarrow 9 \neq 5$ se puede permitir un mejor tránsito a un pensamiento algebraico; lo que sirve para mostrar una contradicción a la concepción errónea previamente establecida.

El empleo del contraejemplo permite estimular el razonamiento en los estudiantes del cómo y del por qué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones, y disminuir los procedimientos memorísticos y algorítmicos de aprendizaje que generalmente es lo que realizan la mayoría de los estudiantes. De acuerdo con lo que afirma Santos (2007) *el uso de contraejemplos cumple una función fundamental en el establecimiento de argumentos matemáticos y es una actividad que los estudiantes necesitan practicar constantemente*.

Con el contraejemplo y la conjetura se puede avanzar en la estructuración de los razonamientos lógico-matemáticos necesarios en los estudiantes, para que puedan ser valorados y mejorados por el docente y por ellos mismos. De esta manera, sus razonamientos pueden ser refinados o hasta fortalecidos, lo que a la vez puede permitir la formación de un pensamiento crítico y analítico vital en la formación de los individuos de una sociedad.

En consecuencia, es necesario observar cómo el uso de estos recursos permite un análisis de los temas matemáticos, haciendo un contraste con la clase tradicional que todavía se da en las escuelas. Con lo cual, se intente obtener provecho de los mismos al posibilitar el fortalecimiento de un pensamiento matemático científico en los estudiantes.

En la Didáctica de las Matemáticas poco se ha reportado sobre la importancia y transcendencia de la conjetura y el contraejemplo en el aprendizaje de las Matemáticas. Resulta pues necesario realizar investigaciones sistemáticas sobre tales temas lo que puede permitir poner atención en cómo estos recursos ayudan a la estructuración de un pensamiento matemático.

Capítulo II

Marco Teórico Conceptual

El problema del aprendizaje de las Matemáticas está fuertemente vinculado con muchas variables que entran en juego dentro y fuera del aula de clases. Sin embargo, los estudiantes manifiestan muchas veces en sus desempeños académicos una falta de comprensión de las Matemáticas; el cual es el punto de partida de este trabajo de investigación. En el sentido de que se buscan analizar algunos elementos que intervienen en la construcción de un pensamiento matemático necesario para la compresión de las Matemáticas.

Algunos autores han tratado de caracterizar el pensamiento matemático para identificar cuándo un individuo lo pone en juego en diversas situaciones de su entorno. Una interpretación está relacionada con la capacidad de hacer matemática de parte un sujeto, dentro de las cuales se rescata las actividades de resolver problemas que involucra Matemáticas como es el caso particular del cálculo de tasas de interés en un banco, o la interpretación y análisis de datos estadísticos en una encuesta, entre otras.

Sin embargo, la mayor parte de las veces la "construcción de un pensamiento matemático" dentro de las actividades escolares sólo involucra el aprender a hacer como si eso fuera algo "mecánico". Polya (1965) asegura que *para muchos estudiantes las matemáticas las pueden ver como un conjunto de rígidas reglas, algunas de las cuales se aprenden de memoria antes de los exámenes finales, y todas ellas se pueden olvidar después.* Entonces el aprendizaje de las Matemáticas solo se enfoca desde una perspectiva muy reducida sin intentar explicar otros elementos que entran en juego.

Todo lo anterior se refleja en la aula cuando se pide a los alumnos que resuelvan muchos ejercicios parecidos como una expresión del conductismo, cuando se observa las Matemáticas como algo principalmente algorítmico; lo que no permite una comprensión y análisis de que pensar matemáticamente incluye el aprender a conocer (logos), aprender a hacer (praxis) y aprender a ser profundizado en el objeto matemático estudiado en particular.

Sobre los aspectos antes mencionados se puede rescatar parte de los pilares de la educación en el informe de la UNESCO como lo reporta en Delors (1994) sobre el "*aprender a conocer"* que recae en adquirir conocimientos como su comprensión y contextualización para ser aprovechados a lo largo de la vida, el cual se entiende como una parte primordial para comprender el mundo que nos rodea porque el individuo accede en forma correcta a un razonamiento científico que lo hace involucrarse en el desarrollo de la humanidad. Relativo al "*aprender a hacer"* menciona que no es un *significado simple que tiene cuando se trata de preparar a alguien para una tarea material bien definida, para que participase en la fabricación de algo* sino que implica más allá de una mera transmisión de prácticas sociales rutinarias útiles en el desarrollo de una comunidad tanto actividades puramente físicas como otras de carácter de producción científica o intelectual. Sobre el *aprender a ser* se menciona de la capacidad de escoger responsablemente por medio de un *pensamiento autónomo y crítico y de elaborar un juicio propio, para determinar por sí mismos qué deben hacer en las diferentes circunstancias de la vida*, involucrando diversas formas de pensamientos que lleven a los estudiantes a ser tanto responsables como críticos en una sociedad de la que forman parte. Y entonces surge una pregunta ¿cómo es posible estructurar un pensamiento matemático en ellos?

2.1 Pensamiento matemático

El pensamiento matemático está relacionado con un saber erudito como sostiene Bachelard (1985, p.18) cuando habla de la formación de un espíritu científico sobre *la crisis del crecimiento del pensamiento implican una refundición total del sistema del saber*; para tal fin resulta importante dotar al estudiante elementos conceptuales que le permitan transitar de un pensamiento ingenuo a un pensamiento científico, referido a un pensamiento matemático (construido en parte por una comunidad de matemáticos) y que entre otros aspectos relevantes que lo conforman están lo crítico, analítico, entre otros.

Una de las tareas de la comunidad científica de matemáticos, es la que se refiere precisamente al desarrollo del saber erudito que entre otras actividades de su quehacer, están el caracterizar y definir diversos objetos abstractos con los que trabaja hasta llegar a obtener resultados generales que se expresan en teoremas y teorías completas. En cuanto al presente trabajo es de interés investigar lo relacionado con algunas formas de lograr que se desarrolle en los estudiantes su pensamiento matemático, que si bien en cierta forma se asemeja a lo que realizan los matemáticos profesionales, existen e intervienen otros elementos de carácter semiótico y sociocultural sobre los cuales se irá abundando más adelante.

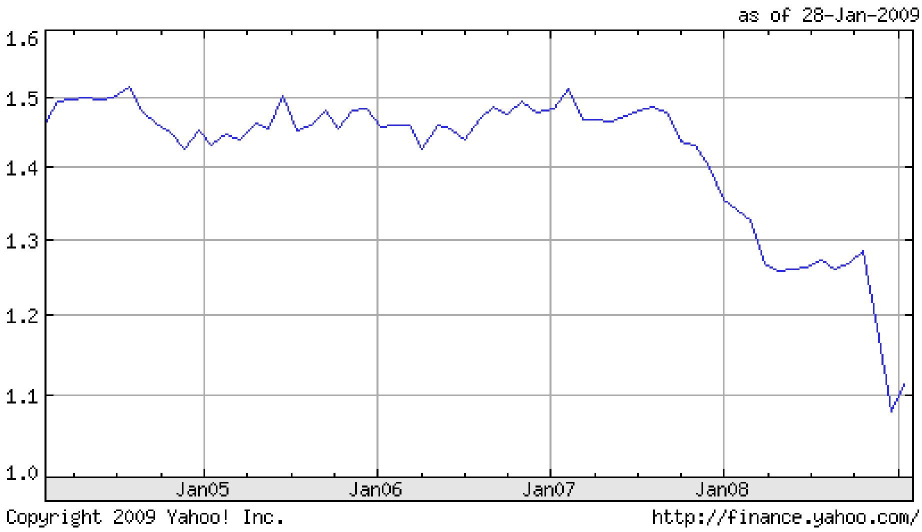
Una aproximación a un pensamiento matemático está dada como un *concepto de carácter cognitivo, generalmente ubicado dentro de la psicología matemática y dentro de la psicopedagogía, que hace alusión al conjunto de representaciones mentales, o redes de conceptos de carácter matemático, y a los procesos cognitivos que actúan sobre esas representaciones*; tomada de la S. E. C.[1] (2005). Sin embargo, se resalta el hecho que no sólo debe observarse o interpretarse como algo puramente sicológico y que debe incorporar otros aspectos de carácter cultural, escolar o social entre otros.

En ese sentido, el pensamiento matemático, es la capacidad del individuo de usar las matemáticas para resolver diversas situaciones que se dan en su vida cotidiana ya sea este un matemático profesional o un estudiante como sostienen Cantoral et al. (2005) que *se desarrolla en todos los humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas* y como aquel que *no se reduce al pensar cuando se está ante una actividad matemática*; sino que se involucra dentro de las necesidades sociales y culturales de cada individuo que le permitan darle solución, siempre y cuando posea los elementos matemáticos adecuados.

En cierta forma la sociedad en que se encuentra inmerso un individuo demanda de la construcción de un pensamiento matemático como un requisito indispensable para entender al menos en parte el mundo matematizado que está en medio de muchas de sus diarias actividades, como el caso entre otros aspectos matemáticos de entender o interpretar las representaciones gráficas. Si por ejemplo, un inversionista quiere examinar la evolución del dólar estadounidense frente a otras divisas monetarias en una página de Internet; tiene la posibilidad de hacer estudios de comportamiento, y tendrá la necesidad de usar un pensamiento matemático para buscar soluciones

[1] Secretaría de Educación de Colombia. Pruebas Comprender Matemáticas.

a sus inquietudes cuando lee, interpreta y analiza la gráfica que le permitan tomar decisiones.



Tomado de Yahoo! México finanzas el jueves 29 de enero de 2009, 3:32PM MX de la relación de cambio de dólares estadounidenses a euros.

En forma más amplia dentro de los Cuadernos de Evaluación, S. E. C.[2] (2005) designan al pensamiento matemático como conjunto de representaciones mentales internas, redes de conceptos, se relaciona con las diferentes representaciones simbólicas externas - lenguaje verbal, íconos, símbolos matemáticos. Entonces si los alumnos poseen elementos matemáticos bien definidos como conceptos, las relaciones entre conceptos, representaciones geométricas, representaciones algebraicas, entre otros pueden ser capaces en menor o mayor escala de construir un pensamiento matemático adecuado usándolo en un contexto particular donde interviene lo crítico y lo analítico.

Se afirma entonces que estructurar un pensamiento matemático en los individuos es relacionarlo con lo crítico y lo analítico; donde un pensamiento crítico es buscar características invariantes que se observan como: la capacidad de discernimiento aunado a elementos para incorporar al debate, evaluación de los hechos o eventos que entran en juego, la búsqueda de contradicciones, el aspecto autocrítico, entre otras. Además, en un pensamiento analítico se identifican variables que intervienen en la situación problema, se incorpora un razonamiento lógico inductivo o deductivo que muestra, participa e interrelaciona el todo y las partes de un objeto estudiado.

[2] Secretaría de Educación de Colombia. (2005)

El *pensamiento matemático* es un concepto en el que se hace referencia sobre la manera de pensar matemáticamente usando diversos elementos de la ciencia para resolver actividades que la requieran; pero involucrar a las Matemáticas es abarcar diferentes aspectos como el algebraico, el numérico, el geométrico, el variacional, entre otros. Es decir, dentro del pensamiento matemático existe una variedad de pensamientos más específicos muchas veces entrelazados que usa el matemático y también pueden ocuparlos los estudiantes en sus procesos de razonamiento que ligados conforman o unifican un pensamiento matemático requerido. Se han desarrollado diversos estudios que examinan estos pensamientos matemáticos como Rojano y Butto (2004) que investigan el tránsito del pensamiento numérico a un pensamiento algebraico, Bowman et al. (2000) caracterizando el pensamiento numérico, entre otros.

Bowman et al. (2000) mencionan que el pensamiento numérico está involucrado desde temprano en la vida por las acciones inmediatas de medir y contar. El pensamiento numérico está relacionado con los números con sus operaciones y las propiedades propias de sus desarrollos, es decir, involucra diversos aspectos de estructuras numéricas en procesos cognitivos y culturales asignados por los individuos como las acciones antes mencionadas. Específicamente en la construcción y comunicación para expresar relaciones de una estructura numérica, como se da el caso de las propiedades de los números enteros bajo las multiplicaciones con los criterios de divisibilidad mostradas en el siguiente problema, porque potencia el uso de pensamiento específicos de las Matemáticas.

¿Cuántos soldados hay en un pelotón que al formarse de dos en dos sobra uno, de tres en tres sobran dos, de cuatro en cuatro sobran tres, de cinco en cinco sobran cuatro y de seis en seis sobran cinco? Como ayuda inicial de este problema se da el caso que el pelotón consta de menos de 1000 soldados. Si se designa a x como el número de soldados y le suma 1 a x, entonces, $x + 1$ es múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6. Se puede cambiar $x + 1$ por el número abc donde a, b y c son sus dígitos. Como abc es múltiplo de cinco entonces termina en cinco o cero pero abc es múltiplo de dos con lo que se tiene que termina en cero, es decir, $c = 0$. Por otro lado, se puede reducir el número con la idea que $a + b + c$ es múltiplo de tres entonces $a + b$ es múltiplo de tres y de la misma manera se aplican otros criterios de divisibilidad como el caso del cuatro para reducir los casos y encontrar el número del pelotón que cumple con las condiciones establecidas en el problema. Con todo este análisis realizado de los criterios de divisibilidad sobre los números enteros, se está usando ciertos elementos de un pensamiento numérico propio de un individuo para la resolución del problema.

En el problema del pelotón se puede inducir qué el número *abc* es múltiplo de tres dado que la suma de sus dígitos es múltiplo de tres que aplica parte de un pensamiento algebraico; es decir con un desarrollo especial se describe, extiende y crea patrones numéricos o algebraicos. Entonces con la ayuda de un pensamiento algebraico el número *abc* se puede escribir como $100a + 10b + c$, que a su vez se puede desglosar en el número $99a + 9b$ que es múltiplo de tres, y el número $a + b + c$. Luego, se tendría que averiguar que en efecto $a + b + c$ es múltiplo de tres para que se cumpla que *abc* también lo sea.

En general, un número es múltiplo de tres si la suma de sus dígitos lo es y que daría como ejercicio de análisis para extender el problema inicial mostrando el tránsito de un pensamiento numérico a un pensamiento algebraico que sostienen Rojano y Butto (2004) cuando dicen que *el trabajo con la generalización constituye un aspecto indispensable para el desarrollo del pensamiento algebraico*. Entonces se muestra la relación innegable entre los diversos tipos de pensamientos matemáticos y existe la necesidad primordial de estructurar ese pensamiento en los alumnos como es el caso de los matemáticos con aspectos numéricos, algebraicos, geométricos, variacionales, entre otros.

Un matemático profesional como parte de su práctica cotidiana explora y afina sus ideas que ayudan a la construcción y estructuración de su conocimiento científico; todo esto conlleva al producto de una constante búsqueda de afirmaciones, las cuales se deben sustentar con procesos de razonamiento acordes con la teoría. En contraste un profesor de Matemáticas debe ser capaz de aproximarse al trabajo realizado por el matemático pero en el aula, usando recursos matemáticos para el desarrollo de sus clases, para sustentar y dar apoyo a todo lo mostrado en las explicaciones, es decir, crear una situación didáctica que simule *una micro-sociedad científica* (Brousseau, 1986). Donde el estudiante participe en la construcción y modificación de su conocimiento como miembro de esa pequeña comunidad.

Las afirmaciones en Matemáticas necesitan de una indagación con la intención de alcanzar nuevos “conocimientos” en la ciencia, como es el caso del problema del pelotón al plantear la afirmación que *si la suma de los dígitos de un número es múltiplo de tres entonces el número también es múltiplo de tres*. Lo anterior muestra el modo que en Matemáticas una afirmación con condiciones bien definidas, se puede llegar a estructurar como una *conjetura*.

2.2 Sobre el significado de la conjetura

La Real Academia Española (RAE) define a la conjetura como *un juicio que se forma de las cosas o acaecimientos por indicios y observaciones,* entonces una conjetura está formada por una estructura que debe incluir elementos fundamentados en hechos previos que sirven de referencia pero no han sido corroborados por completo. Esta estructura matemática es usada por los matemáticos como parte de su quehacer cotidiano pero ¿qué pasa en la escuela?

Respecto a la escuela, la NCTM (*National Council of Teachears of Mathematics*) en el año 2000 en sus Principios y Estándares de la Escuela de Matemáticas, sostiene que aprender Matemáticas se debe propiciar en el aula con un ambiente donde los estudiantes puedan comunicar sus ideas, hacer preguntas, usar múltiples representaciones, construir conjeturas y formular contraejemplos. Pero el interés de esta investigación es ver que tan adentrados se presentan estos elementos como necesarios para el constructo de un pensamiento matemático; el cual se refleja en su formación como individuos. Entonces se establece la siguiente interrogante: ¿es necesario el uso de conjeturas, así de contraejemplos para el desarrollo o estructuración de un pensamiento matemático? Sin embargo, por el momento sólo se analiza la conjetura para observar sus características fundamentales como preocupación de esta investigación didáctica.

Parte del objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas, es explicar fenómenos que ocurren en el aula de clases, pero también es identificar posibles causas que intenten dar solución en diversos contextos educativos. En el caso de este estudio se busca profundizar en el análisis del papel que juega la conjetura en la estructuración de un pensamiento matemático en el estudiante.

Existen múltiples definiciones sobre lo que es una conjetura en Matemáticas, y la mayoría no dejan muy claro ¿cómo se va estructurando? ¿Será posible construir una conjetura con la ayuda de ciertos elementos? o ¿cómo es que se construye? No hay una idea clara o un manual establecido que sigan los matemáticos para estructurar una conjetura, sin embargo, se pretenden identificar algunas formas que presentan algunos investigadores en esta área. Un acercamiento presentado en los libros es la idea de usar casos particulares para buscar regularidades y poder establecer una conjetura como afirman Cañadas y Castro (2008) sobre el razonamiento inductivo que *es un proceso cognitivo que permite avanzar en el conocimiento mediante la obtención de más información de la que aportan los datos iniciales con los que se inicia el proceso.* Entonces, el pensamiento humano adopta una postura que produce afirmaciones y alcanza conclusiones, partiendo de casos particulares buscando una generalidad. En otras palabras, para estructurar una conjetura tiene que haber de por medio un razonamiento inductivo que conlleve a una posible generalización.

Como muestra de la búsqueda de una generalización [3] en Matemáticas, se tiene el caso de la suma de los n primeros números impares cuya construcción es presentada por primera vez por el famoso matemático griego Pitágoras, y que conlleva a la estructuración de una conjetura con la ayuda de un patrón.

¿Qué pasa con esta suma $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) =$?

Lo primero es observar casos particulares de la suma.

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Una conjetura inmediata es que en la suma aparecen cuadrados perfectos, ¿pero se espera que suceda algún tipo de generalidad en este problema o existe una

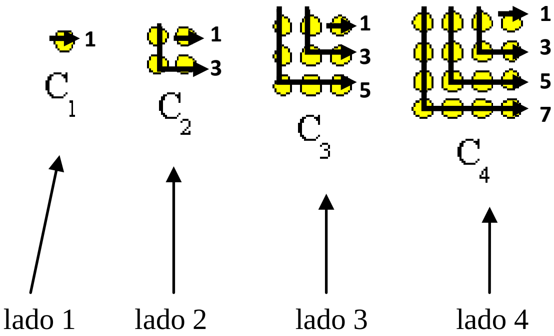
[3] La Generalización depende, tanto de la detección de un patrón, como de la identificación de un patrón adecuado. (Cañadas y Castro, 2008)

relación entre los cuadrados perfectos y los sumandos o la suma? Se tiene los siguientes comportamientos en las sumas $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$ y así sucesivamente. Con lo cual, existe una regularidad $1^2 + 3 = 2^2$, $2^2 + 5 = 3^2$, etc. ¿Qué representa los números al cuadrado a la derecha? Pero con una buena observación se tiene que la cantidad de sumandos a la izquierda es el número a la derecha al cuadrado.

$$\underbrace{1 + 3 + 5}_{\text{3 sumandos}} = 3^2$$

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7}_{\text{4 sumandos}} = 4^2$$

Por otro lado, usando representaciones geométricas como las siguientes se visualizan los números cuadrados, donde se puede observar los casos particulares antes mostrados del problema de Pitágoras. Se presenta una construcción con el mismo patrón usando flechas, las cuales muestran los números impares consecutivos en cada cuadrado posterior; todo lo anterior sirve para expresar una estrecha relación entre el patrón numérico dado y un patrón geométrico.



Cuadrados

¿Cómo se puede escribir el último número de la suma cuando hay *n* sumandos?

$$1 + 3 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad 1 + (2 * 2 - 1) = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2 \quad \Rightarrow \quad 1 + 3 + (2 * 3 - 1) = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 \quad \Rightarrow \quad 1 + 3 + 5 + (2 * 4 - 1) = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2 \quad \Rightarrow \quad 1 + 3 + 5 + 7 + (2 * 5 - 1) = 5^2$$

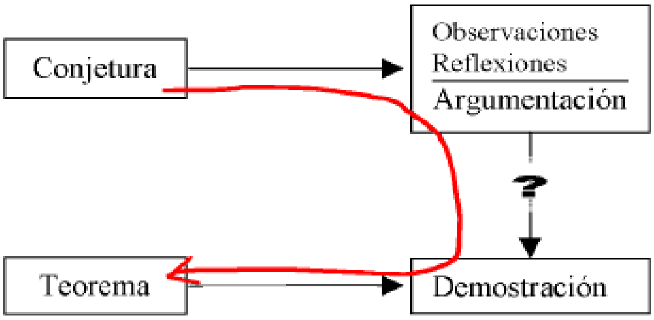
Escribiendo el último número como la representación de un número impar descrito de la forma $2n - 1$, se puede dar la generalidad $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$. Esa generalidad está sustentada por todas las regularidades obtenidas en la suma de los primeros n números impares; la cual se constituye en la conjetura que *la suma de los n primeros números impares es igual al número enésimo al cuadrado*.

Entonces se puede construir una conjetura por medio de la búsqueda de patrones o regularidades *que ayudan a propiciar en el aula un ambiente que permita contribuir al desarrollo de procesos fundamentales del pensamiento matemático (búsqueda de patrones, uso de múltiples representaciones, comunicación de ideas matemáticas, etc.)* como sostiene Benítez (2006), el cual sirve en el aprendizaje de los alumnos como un eje en la estructuración de sus procesos de razonamiento. Sin embargo, encontrar patrones numéricos o geométricos o algebraicos no es una actividad fácil y debe ser propiciado poco a poco por el docente para inducir si existen casos favorables para formular una generalidad.

Hay que tener claro que dentro de esta actividad matemática existen dos instancias, la primera es tratar de encontrar una conjetura (como se ha mostrado hasta el momento) con la ayuda de un patrón a seguir; y una vez dada su estructuración (si no existen ejemplos que lo refuten) se lleva a una segunda parte que es la demostración formal de la conjetura para intentar convertirla en un teorema. En el caso de la conjetura sobre *la suma de los n primeros números impares es igual al número enésimo al cuadrado*, su demostración se puede realizar usando el proceso de inducción matemática. Es evidente que un desarrollo como el anterior se realiza dentro de las Matemáticas, pero no es frecuente en el aula como parte de los procesos esperados para la estructuración de un pensamiento matemático adecuado.

El siguiente diagrama[4] muestra la estrecha relación entre una conjetura y un teorema dentro de la actividad matemática donde hay una *incógnita general sobre el paso entre la argumentación y la demostración, pero es posible considerar que existe, aunque con algunos obstáculo*s como sostiene Larios (2000).

[4] Fuente: Larios, V. (2000). *Las Conjeturas en los procesos de Validación Matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática*. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Querétaro, México.



En este cuadro se puede observar que para construir una conjetura es necesario dar argumentaciones que permita validarla como es el caso de patrones que explique la misma, o conceptos previos, entre otros aspectos para transitar a otros más formales como parte de un proceso riguroso de las Matemáticas. No se puede asegurar la validez de una afirmación, independientemente de la cantidad de casos especiales que lo cumplan; se necesita de un argumento, una demostración que posibilite la veracidad de esa afirmación. Sin embargo, en este trabajo solo se analiza el papel de las conjeturas en el proceso de aprendizaje para estructurar un pensamiento matemático.

Se desconocen otras formas para estructurar una conjetura, aunque la búsqueda de patrones es un buen medio de ayuda para su construcción como sostiene Polya (1965) con el uso de la "inducción" que *es un modo de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares y de sus combinaciones.* Además, en la estructuración se permite revisar conceptos previos que puedan ser necesarios en el nuevo conocimiento a surgir, y que sirva de base para la sustentación de la conjetura propuesta.

Una conjetura es una afirmación que parece razonable, pero cuya veracidad no ha sido demostrada y la constitución de la misma se puede llegar a proponer por diversos medios o estrategias que utiliza un individuo como es el caso de hacerse preguntas que permitan ayudar a conjeturar y que sostiene Bachelard (1985) que *para un espíritu científico todo conocimiento es una respuesta a una pregunta. Si no hubo pregunta, no puede haber conocimiento científico*. Entonces, es posible la construcción de nuevos conocimientos a través de buenas preguntas pero esta tarea no es sencilla y menos si se carece de elementos necesarios relacionados al tema tratado que sirvan para deducir patrones o regularidades en el caso que tales preguntas lo permitan.

Muchas conjeturas en Matemáticas no han podido ser demostradas ni refutadas a pesar de muchos años de existencia en la ciencia. Como es el caso del último teorema de Fermat, que no fue sino después de tres siglos que Andrew Wiles matemático británico, presenta una demostración pasando a convertirlo formalmente en un teorema. A la fecha existen "conjeturas de matemáticos muertos" que todavía no han sido demostradas ni refutadas (como ejemplo se tiene la conjetura de Riemann que dice que todos los ceros no triviales de la *función zeta de Riemann* $\zeta(s)$[5] tienen una parte real de ½) y parte del interés de la comunidad matemática es darle respuesta a éstas. Desde el año 2000 hay una recompensa por resolver los siete de los enigmas matemáticos, considerados como "las conjeturas sin resolver del siglo" y por cada una se da el premio de un millón de dólares, el cual se puede revisar en el portal www.claymath.org del Instituto de Matemáticas Clay.

Definitivamente que no se tiene certeza de ¿cómo construir una conjetura?; sin embargo, algunos matemáticos sostienen que con la ayuda de la visualización, una constante indagación, por ensayo y error entre otros "métodos", han logrado estructurar sus conjeturas. En la tesis doctoral de Sequera (2007) cita a Poincaré que describe la "creatividad matemática" en su famosa conferencia de 1908, sobre el *razonamiento de un matemático* que es buscar construcciones útiles en una ínfima minoría, pero estas inspiraciones repentinas se producen después de varios días de esfuerzo, y lo apoyado con Ervynck (1991) al decir que se necesita de una preparación del individuo con experiencias previas, buscando la selectividad en las estructuras matemáticas estudiadas.

Muchas de las conjeturas demostradas han requerido para su elaboración una constante modificación de las premisas, Cañadas y Castro (2008) ofrecen etapas anteriores para construir una conjetura como: trabajo con casos particulares, organización de casos particulares e identificación de un patrón, para más tarde formular una conjetura.

[5] La **función zeta de Riemann** $\zeta(s)$ está definida, para valores reales mayores que 1, por la serie de Dirichlet: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Una **serie de Dirichlet** es toda serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ donde s y a_n, n = 1, 2, 3, ... son números complejos. Se puede revisar esta información en algún libro que presente conjeturas famosas o en la página de internet http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/

En ese sentido, es posible que mediante el camino tomado para la construcción de una conjetura por el matemático pueda llegar a toparse con verdades con poco sustento. Lakatos (1978) lo explica cuando se refuta y modifica la conjetura por otra mejor elaborada y sustentada dentro de la teoría de las Matemáticas; lo cual le lleva en un ciclo de formular la conjetura, comprobar, tratar de refutar, demostrar, o reformular la conjetura por otra. Es decir, Lakatos (1978) menciona que quien elabora la idea matemática no desarrolla de inmediato un teorema; sino que hace una constante mejora de la conjetura por medio de la especulación y la crítica, siguiendo los procesos de pruebas que rara vez se obtiene de la conjetura inicial y las refutaciones necesarias en algunos casos.

Se sabe que lo anterior explica parte del hacer matemático en la construcción del conocimiento científico y ocurre con poca frecuencia en la escuela con los estudiantes; ya que cuando ellos presentan pensamientos ingenuos se consideran como conjeturas sin poco o con un nulo sustento. Estos pensamientos ingenuos se omite por el docente dando la respuesta adecuada sin explicar ¿por qué son incorrectos?; y por lo general, no es frecuente aprovecharlos dentro del proceso de aprendizaje.

2.3 Pensamiento ingenuo

Generalmente los estudiantes presentan respuestas a los problemas matemáticos sin hacer un estudio minucioso o sin intentar conectar con sus conocimientos previos, en ese sentido Brousseau (1986) sostiene *jamás introducir un conocimiento más que por un método de construcción conocido que se refiera a conceptos conocidos*, el cual apoya con la “teoría del constructivismo”. Sin embargo, ellos presentan un pensamiento ingenuo que es un pensamiento inmediato e irracional; el cual evita acceder al conocimiento de la realidad de manera científica porque está mal organizado. Entonces un pensamiento ingenuo es un obstáculo porque dificulta la producción de un nuevo conocimiento como sostiene Bachelard (1985) que se *plantea el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos*; y se requiere de un *verdadero cambio conceptual, una autentica revolución conceptual similar a las ocurridas en el progreso del conocimiento científico a lo largo de la Historia* como afirma Pozo (2003) porque son “construcciones” aceptadas sin críticas.

En esa dirección, Canché (2007, p. 52) sostiene que los métodos de enseñar Matemáticas han cambiado; sin embargo, todavía aparece un cierto grado de mecanización y que *es importante proponer en los programas de estudios de las asignaturas del área de matemáticas, estrategias didácticas que promuevan el desarrollo de habilidades y actitudes propias del quehacer matemático*. Todo esto conlleva al cambio del contrato didáctico (Brousseau, 1986) establecido en la relación profesor estudiantes; el cual requiere comprometerse más al desarrollo de un pensamiento matemático mejor estructurado en el alumno, imitando parte del quehacer científico.

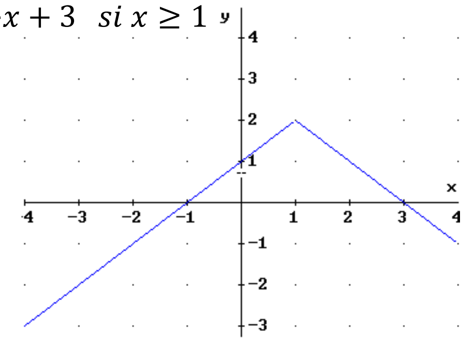
El pensamiento ingenuo se puede convertir en un obstáculo que muchas veces no permite la construcción de un pensamiento matemático principalmente en los estudiantes, entonces es necesario poder caracterizarlo. Un pensamiento ingenuo se puede manifestar en un error que requiere el uso de elementos auxiliares que puedan cambiar o modificar esas percepciones por otras; los cuales ayuden a transitar a un pensamiento matemático a los alumnos.

Existen elementos auxiliares en el proceso de enseñanza-aprendizaje, como es el caso de ejemplos que refuten la forma incorrecta de pensar sobre temas tratados por el estudiante. Estos ejemplos pueden cambiar en parte el contrato didáctico tradicional, el cual se da carácter principalmente acrítico en las unidades académicas observadas.

Dentro de los cursos de matemáticas examinados el contrato didáctico es tradicional (con una postura conductista, en general); porque la mayor parte de las veces sólo se presentan las demostraciones formales de los teoremas y se hace poca referencia a sus recíprocos. Con respecto a los recíprocos, se tiene el caso de la afirmación que "*toda función continua es derivable*" (ejemplo de un curso de Cálculo); para observar que este enunciado es falso se puede hacer un ejemplo que lo refute como el siguiente:

Sea g la función definida por: $g(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 1 \\ -x+3 & si\ x \geq 1 \end{cases}$

Su representación gráfica es la siguiente:



Los estudiantes se pueden percatar por medio de la representación gráfica que la función no es derivable en $x_0 = 1$, con lo cual el enunciado "*toda función continua es derivable*" no es verdadero. Sin embargo, es importante notar que si se busca entender este problema con una matemática formal; se pueden calcular las derivadas laterales *por la derecha* y *por la izquierda* con $g(x)$ evaluada en $x_0 = 1$, con el fin de mostrar que no existe la derivada.

Se pueden comprobar los siguientes hechos,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(h+1) - g(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(h+1)+1-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \qquad \text{y}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(h+1) - g(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(h+1)+3-2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$\text{Así, } \lim_{h\to 0^+} \frac{g(h+1) - g(1)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{g(h+1) - g(1)}{h}$$

Luego, no existe la derivada cuando $x_0 = 1$. Es decir, que no es posible definir $g'(1)$.

Con lo anterior se tiene que:

$$g'(x) = 1 \quad \text{si } x < 1,$$
$$g'(x) = -1 \quad \text{si } x > 1$$

Con estos argumentos presentados se expresa de una manera formal que en efecto la derivada no puede evaluarse en el punto $x_0 = 1$. Entonces con este ejemplo se tiene claro que no todas las ideas propuestas como "conjeturas" son verdaderas, el cual introduce otro elemento a investigar en este trabajo: *el contraejemplo*.

2.4 Sobre el contraejemplo

Un ejemplo en matemática que refute un enunciado (como el caso del problema anterior) es conocido como un *contraejemplo*; el cual permite observar claramente cuando una conjetura no es correcta. Según la RAE un contraejemplo *es un ejemplo que contradice lo que se ha pretendido mostrar con otro*. Es decir, que el enunciado tomado como verdadero presenta ejemplos que lo refutan en un contexto que no cubre con las mínimas expectativas para ser cierto. Esta idea está apoyada en que *es un* *elemento perteneciente al dominio de una determinada afirmación que no verifica lo afirmado. La existencia de un contraejemplo, desde un punto de vista lógico, es una crítica con la fuerza suficiente para refutar la afirmación, o sea, para hacer explícita su falsedad* (Calvo, 2001).

En ese sentido, muchas afirmaciones presentadas como conjeturas son falsas y en el caso del quehacer matemático es necesario refutarlas, para poder limitar cuando se ha construido un nuevo conocimiento de otro que podría considerarse un obstáculo. Como muestra Lakatos (1978) presenta la construcción del concepto poliedro regular donde se ocupa a la conjetura como al contraejemplo que forman parte del razonamiento matemático, el cual se debería reflejar dentro de la práctica escolar cuando los alumnos muestran pensamientos ingenuos o errores o conjeturas con poca sustentación teórica. Entonces, existe la necesidad de un cambio en las prácticas educativas tradicionales porque estas no permiten la estructuración de un pensamiento matemático en los estudiantes similar a los científicos, ya que no introducen elementos como la conjetura y el contraejemplo.

Se ha recalcado que no todas las afirmaciones llegan a ser conjeturas porque carecen de una estructuración adecuada, con lo cual es posible encontrar pensamientos ingenuos en los estudiantes. En ese sentido, al estudiar funciones elementales en el Cálculo puede aparecer el enunciado "*toda función $f(x)$ con limite en x_0 es continua en x_0*". Esta afirmación se refuta presentado el siguiente contraejemplo:

Sea $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, ¿qué pasa con la continuidad de $f(x)$ cuando $x_0 = 2$?

Se entiende que una función $h(x)$ es continua si se cumple lo siguiente:

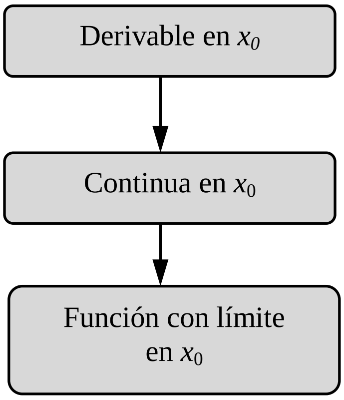
$$\lim_{x \to x_0} h(x) \text{ existe} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = h(x_0)$$

Por un lado, se tiene que $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$

Sin embargo, el dominio de la función *f(x)* es todos los números reales excepto para $x = 2$, porque no se puede dividir entre cero.

Aún cuando existe el $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \neq f(x_0)$ ya que $f(x)$ no está definida en $x_0 = 2$ de tal manera, que no toda función $f(x)$ con limite en x_0 es continua en x_0

Con estos lineamentos tratados sobre las funciones elementales en Cálculo en los enunciados anteriores[6], existe una relación entre una función *f*(x) con límite, una continua y una derivable en un mismo punto x_0. Se muestra un diagrama a continuación que propone una "jerarquía conceptual" después de una discusión académica.



Relación sobre categorías de una función elemental
en el estudio de Cálculo

Pero entender esta propuesta sobre la jerarquía conceptual, es observar las condiciones que cumple una función $f(x)$ en cada categoría definida a continuación:

- *Primera categoría*. Las exigencias de una función con límite en un punto x_0 es cumplir solamente la definición dada por Weierstrass[7] ocupando ε y δ, en donde se muestre que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Sin embargo, no es un requisito que $f(x)$ pueda ser evaluada en x_0.
- *Segunda categoría.* Una función es continua en x_0 cuando el límite existe en ese punto y es igual a $f(x_0)$, es decir que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L = f(x_0)$. Entonces es posible evaluar $f(x)$ en x_0. Pero, no es obligatorio que existe la derivada de la función $f(x)$ en x_0.
- *Tercera categoría*. Función con derivada en x_0, donde se cumple todas las condiciones de la segunda categoría; y debe existir $f'(x_0)$, es decir, $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ donde se observa que debe ser posible evaluarse en $f(x_0)$ y encontrar el $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Con estas categorías definidas se pueden establecer implicaciones tanto verdaderas como falsas, que se muestran a continuación. Sin embargo, para facilitar la

---

6 Afirmaciones de las páginas 25 y 27

7 Definición con modificaciones de la original $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x| < \delta \Rightarrow | f(x) - L| < \varepsilon$.

escritura se usa un lenguaje lógico-matemático, donde las proposiciones p, q y r se definen como sigue: p = función derivable en x_0, q = función continua en x_0 y r = función con límite en x_0.

Las implicaciones verdaderas son las siguientes:

$p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ y por transitividad $p \Rightarrow r$

Sin embargo, los contraejemplos muestran que hay que tener cuidado cuando se tiene:

$q \Rightarrow p$, $r \Rightarrow q$ ó $r \Rightarrow p$

Ya se ha mostrado que para $q \Rightarrow p$ se tiene el contraejemplo

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 1 \\ -x+3 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

En donde no es posible derivar la función en x_0 = 1, aunque la misma sea continua en dicho punto.

En general, existe un pensamiento ingenuo cuando los alumnos construyen implicaciones como $r \Rightarrow q$, ya que no están comprendiendo que hay funciones con una categoría superior, es decir, que tienen mayores exigencias que otras en estas funciones elementales estudiadas. Por lo cual, la construcción de contraejemplos permite invalidar ésta y otras implicaciones que surgen en el desarrollo de los cursos de Matemáticas.

Si las afirmaciones no están claramente construidas con buenos argumentos lógico - matemáticos como los dos últimos enunciados en los cursos de Cálculo ("*toda función con limite en x_0 es continua en x_0*" y "*toda función continua es derivable"*), pueden llevar a errores de conceptualización. En efecto, el desarrollo del Cálculo ha sufrido cambios drásticos por el papel importante que han tenido los contraejemplos en la construcción en parte de estos objetos matemáticos. Como muestra, a principios del siglo XIX, Ampere, Lacroix y Beltrán presentaron una "*demostración*" de que toda función continua es derivable; pero más tarde Weierstrass presenta un contraejemplo de una función continua sobre $\mathbb{R}$ que no es derivable en ningún elemento de $\mathbb{R}$. Entonces, es necesario el uso de los contraejemplos (si existen) que posibiliten cambiar esos errores que frecuentemente se exhiben en la construcción de las ciencias, pero también en los estudiantes en su tránsito hacia la estructuración de un pensamiento matemático.

Por otro lado, se han estudiado y caracterizado los errores de los alumnos en la Didáctica de la Matemáticas cuando intentan dar solución a ejercicios o problemas matemáticos, los cuales muchas veces sólo llegan a ser pensamientos ingenuos (inmediatos). Rico (1995) sostiene en sus trabajos de análisis sobre errores en el aprendizaje matemático que *son elementos usuales en nuestro camino hacia el conocimiento verdadero, hemos de concluir que en el proceso usual de construcción de los conocimientos matemáticos van a aparecer de forma sistemática errores y por tanto el proceso mencionado de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones.*

Los errores son elementos que aparecen de forma natural en el aula, como es el caso cuando se pide a un alumno que defina a $|x|$, y presenta la respuesta errónea *x* para cualquier valor en $\mathbb{R}$. Claramente, esta respuesta se puede refutar con los contraejemplos $|-1| = 1$ o haciendo una comparación de la gráfica de $y = |x|$ con la recta $y = x$; entonces no se puede decir siempre que $|x| = x$. Con lo cual, esos pensamientos ingenuos deben ser modificados por unos matemáticos mejor estructurados con contraejemplos que los posibiliten.

Balacheff (1990) citado en Calvo (2001) analiza cuándo algunas repuestas provocan en los alumnos la necesidad de construir contraejemplos:

- *Rechazo de la conjetura*: este efecto es considerado la mayor parte de las veces como poco común en los estudiantes por la falta de un pensamiento crítico y analítico, ya que por lo general piensa que todo lo que se expresa en el aula es verdadero. Sin embargo, existen casos donde las afirmaciones presentadas dan poca sustentación y permiten la construcción de posibles contraejemplos.
- *Ninguna reacción*: Simplemente admiten la existencia de excepciones a la afirmación propuesta, es decir, porque hay "dudas conceptuales" en cuanto a lo planteado en el aula.
- *Modificación de la conjetura:* Cuando la conjetura mostrada da un dominio inadecuado de validez, y existe la necesidad de cambiarlo con la ayuda de posibles contraejemplos construidos para tal fin. Como es el caso de "*por un*

punto exterior a una recta en el espacio $\mathbb{R}^3$ *sólo cabe trazar una paralela*", modificándola por la afirmación "*por un punto exterior a una recta en un plano sólo cabe trazar una paralela*", ya que en el contexto asignado inicialmente no es verdadero el enunciado.

- *Rechazo del contraejemplo:* Cuando no se toman todas las propiedades del concepto estudiado entonces pierde validez el ejemplo propuesto.

Con todos los aspectos planteados se puede observar que no todos los contraejemplos tienen el mismo nivel de poder de refutación, pero siempre intentan cambiar los pensamientos ingenuos por otros mejor estructurados (pensamientos matemáticos) como preocupación de este trabajo didáctico sobre ¿cómo hacer ese tránsito?

Entonces un verdadero contraejemplo invalida una regla, una definición o un enunciado general cualquiera. En el caso de la construcción de una conjetura que se presenta debido a generalizaciones muy inmediatas sin realmente haber estudiado todos los casos posibles, existe el compromiso de presentar contraejemplos que modifique o rechace esa conjetura por otra mejor sustentada como se muestra en la afirmación que "*todos los polígonos con lados iguales tienen todos sus ángulos iguales"*. En este problema el estudiante puede alegar con casos particulares como un triangulo equilátero, un cuadrado o un pentágono regular; pero está dejando por fuera cuando se tiene un rombo, el cual es un cuadrilátero con lados iguales pero ángulos distintos.

Además, si se cambia la afirmación anterior por "*todos los polígonos con sus ángulos iguales tiene lados iguales"*, el estudiante puede mostrar más casos aislados que están sujetos a contraejemplos dando una falta de compresión sobre el aspecto de la *generalización*. Una importancia del contraejemplo radica en que se evita llegar al proceso de inducción tan fácilmente, con lo cual es necesario un constante entrenamiento que permitan observar cuándo algo es generalizable y cuándo no lo es.

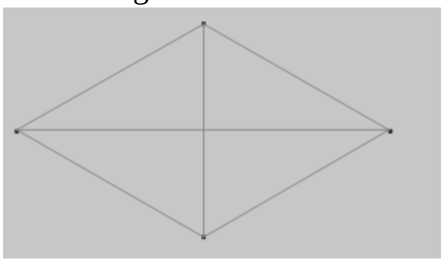
Un matemático emplea el contraejemplo en su quehacer cotidiano con el afán de afinar las posibles conjeturas que formule como la modificación o el cambio de perspectivas propuestas sobre ideas que se creían validas en un cierto contexto, lo cual lleva a reflexionar de cuando se puede generalizar una conjetura.

Es importante recordar que la *generalización* se abordó en la estructuración de la conjetura *la suma de los n primeros números impares es igual al número enésimo al cuadrado*; pero hay investigaciones que abordan sobre su entendimiento poniendo de manifiesto las carencia o limitaciones en los estudiantes (Knuth y Sutherland, 2004; Cañadas y Castro, 2008; entre otros). La generalización es un aspecto que debe ser tratado con cuidado y el mismo se puede lograr en parte con la ayuda del contraejemplo.

Al existir por lo menos un caso particular donde no se cumpla la afirmación planteada se muestra el "poder de un contraejemplo", pero ¿qué elementos permiten la estructuración de uno para invalidar una aseveración?

Los contraejemplos que se han presentado hasta el momento sólo permiten observar donde no se cumplen las afirmaciones, pero ¿cómo se construye un contraejemplo? Con el apoyo de la Lógica Matemática se proponen las siguientes condiciones a seguir:

1. Tener una regla general. Una afirmación p tal que $p(x)$ se cumple $\forall\, x \in U$ (p es una proposición, U el universo o contexto donde tiene sentido p)
   Ejemplo: *Todos los cuadrados son paralelogramos.*
2. Identificar si existe una excepción a la regla. Es decir, $\exists\, y \in U,\ p(y)$ no se cumple. Ejemplo: *Los cuadriláteros cuyas diagonales son perpendiculares entre sí son cuadrados.* Una excepción a la proposición es el *rombo*.
3. Justificar con argumentos válidos entonces que no siempre se cumple p para algún valor del contexto (U). En el caso anterior: el rombo es un cuadrilátero donde sus diagonales son perpendiculares pero sus ángulos internos son diferentes y como muestra se presenta su representación geométrica.



Diagonales perpendiculares entre sí no implica que el polígono sea un cuadrado.

Con parte de lo anterior expuesto el universo donde tiene sentido la afirmación es importante, es decir, es necesario entender que el *contexto* influye para la construcción de los contraejemplos. Por ejemplo, si se tiene como respuesta de $|x|$ a x

pero se modifica por $|x| = x$ para $x \geq 0$. Entonces la nueva respuesta es válida porque cambia el contexto, la cual no permite que existan excepciones o se puedan construir contraejemplos. En ese sentido, Lakatos (1978) afirma que *ninguna conjetura es generalmente valida, sino tan solo valida en el dominio restringido que excluye las excepciones*, y por lo cual hay que tener cuidado donde se refuta una afirmación.

Lakatos (1978) identifica dos tipos de contraejemplos que denotó como contraejemplo local y contraejemplo global. El *contraejemplo global* es aquel que refuta la propia conjetura principal como el caso de la afirmación, *"todos los múltiplos de 2 son múltiplos de 4"*, ya que existen excepciones como es el caso de 6 ó 10. El papel principal de los contraejemplos es la refutación una "conjetura" o una afirmación, pero es posible refutar un subconjunto del universo donde es "valida" la misma; lo cual posibilita hacer una modificación de la conjetura como sostiene Balacheff [8].

El *contraejemplo local* es un ejemplo que refuta una inducción (extensión del enunciado) de la afirmación, sin refutar necesariamente toda la conjetura principal. Como muestra se tiene *"todos los primos mayores que 3 son impares",* pero si generaliza esta afirmación a *"todos los primos son impares",* se tiene el contraejemplo del número 2 porque es par y primo. Es decir, no refuta la conjetura inicial pero indica que el nuevo enunciado usa una característica que se supone valida en otro contexto.

Sin embargo, hasta el momento sólo se ha mostrado a los contraejemplos y a las conjeturas como dos elementos conceptuales que no se interrelación, como si en el *descubrimiento matemático* hubiera una separación entre ellos. La realidad en el proceso de la construcción del conocimiento específicamente matemático no ocurre de esa manera, la cual se caracteriza en parte como una dialéctica de conjeturas-refutaciones y sostiene Lakatos (1978) al decir que *las matemáticas crecen a través de la mejora permanente de conjeturas, por especulación y crítica, por la lógica de la demostración y las refutaciones*.

En ese sentido, el proceso de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas debe hacer hincapié en el desarrollo de una matemática informal, enfocándose en el *descubrimiento matemático* como un aspecto primordial por la estructuración de un

---

[8] Balacheff citado en Calvo (2001). Revisar página 30.

pensamiento científico en los estudiantes. En dicha construcción aparecen de manera natural pensamientos ingenuos en algunos momentos erróneos que requieren el uso de contraejemplos, pero otras veces permiten al avance para la estructuración de conjeturas, las cuales muestran el desarrollo de nuevas ideas.

En general, se puede ver como un juego teórico, donde primero se presenta una afirmación que se procura estructurar como una conjetura. Pero en el camino surgen obstáculos (casos particulares) que imposibilitan continuar con la idea inicial, por lo cual se requiere la construcción de contraejemplos. Después, se modifica la conjetura en un nuevo contexto donde tenga validez o se rechaza de manera total.

Todo lo mostrado en el párrafo anterior se va haciendo en la evolución de la matemática informal a la formal; simplemente las cosas no se ven como algo acabado, más bien se van construyendo con los elementos conceptuales disponibles por parte del sujeto y que afirma Villareal (2003) que *los procesos de pensamiento matemático de los estudiantes se caracterizan por ser juegos de conjeturas y refutaciones* (contraejemplos). Es decir, el proceso de enseñanza aprendizaje debe ser un proceso de descubrimiento en este caso descubrimiento matemático, unas veces con intervención docente en el momento adecuado para guiarlos a un desarrollo estructurado del pensamiento matemático. Donde la presentación de ejemplos muestra en cierta forma a la conjetura y el contraejemplo en el desarrollo del descubrimiento matemático informal.

¿Qué pasa si la siguiente idea se muestra en el aula como parte de un desarrollo escolar?

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

¿Hay problemas en esta igualdad?

¿Se cumple siempre para cualquier valor de $\mathbb{R}$?

Estas preguntas como algunas otras se pueden hacer para que los estudiantes reflexionen sobre la respuesta obtenida $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ en el aula, en donde se posibilite la necesidad de investigar si existe problemas. Si surgen dudas o hay "curiosidad matemática", es el momento apropiado para ver si existen casos que no cumplan esa igualdad.

2.5 Estructurando un pensamiento matemático

2.5.1 Construcción de un contraejemplo

La pregunta obligada es ¿existen ejemplos que invalidan esa igualdad?

De entrada hay una cantidad incontable de casos que no cumplen, pero con al menos uno se refuta la "regla general" a seguir.

Si se toma los valores a = 1 y b = 2 se tiene que:

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$$

$$(1 + 2)^2 \neq 1^2 + 2^2$$ Reemplazando los valores de a y b

$$(3)^2 \neq 1 + 4$$

$$9 \neq 5$$

Como se muestra, al sustituir los valores para a y b en $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ se observa que existe la necesidad de regresarse a la afirmación para obtener entonces que $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$. Sin embargo, dentro de las aulas de Matemáticas existe un predominio al signo "=", y pocas veces es usada la notación de distinto de "≠" para resaltar en ocasiones obligadas que no hay una relación de equivalencia.

En este proceso de descubrimiento matemático, surgen otra preguntas como ¿cuál de las dos desigualdades siguientes es verdadera $(a + b)^2 > a^2 + b^2$ ó $(a + b)^2 < a^2 + b^2$?

Una forma de investigar que está pasando es asignarles diferentes valores a ambas variables.

- Si a = 1 y b = 2 se tiene que 9 > 5
- Si a = 5 y b = −2 se tiene que 9 < 29

No se observa alguna regularidad por el momento, para comenzar el proceso de generalización. Si se restringe el espacio donde se ubica la desigualdad ¿Qué sucede?

Si $a > 0$ y $b > 0$.

- Si a = 2 y b = 3 se tiene que 25 > 13
- Si a = 3 y $b = \frac{1}{2}$ se tiene que $\frac{49}{4} > \frac{37}{4}$
- Si a = 0.1 y b = 2 se tiene que 4.41 > 4.01

2.5.2 Construcción de una conjetura

Al parecer existe una notoria regularidad donde se cumple $(a + b)^2 > a^2 + b^2$ si $a > 0$ y $b > 0$. Pero si se pregunta ahora ¿Qué le falta para ser una igualdad en los casos particulares anteriores? ¿Cuánto hay que agregar al segundo miembro?

- Si $a = 2$ y $b = 3$ se tiene que $25 = 13 + 12$, ¿Cómo se obtiene 12?
- Si $a = 3$ y $b = \frac{1}{2}$ se tiene que $\frac{49}{4} = \frac{37}{4} + \frac{12}{4}$, ¿Cómo se obtiene $\frac{12}{4}$?
- Si $a = 0.1$ y $b = 2$ se tiene que $4.41 = 4.01 + 0.4$, ¿Cómo se obtiene 0.4?

¿Se puede relacionar lo agregado con a ó b ó con algún número u operación específica?

Después de hacer varios intentos y relacionando se tiene que:

$$12 = 2(2)(3), \quad \frac{12}{4} = 3 = 2(3)\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad 0.4 = 2(2)(0.1)$$

En general, se induce que hay una x cantidad que agregar relacionada con a y b de esta manera: $x = 2ab$

Entonces se construye la conjetura $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + x = a^2 + b^2 + 2ab$

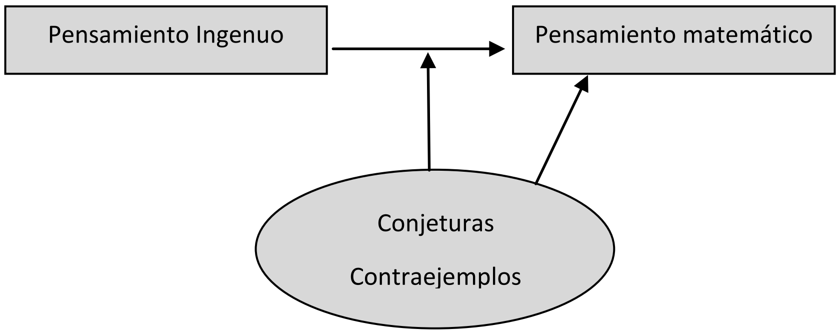
Ordenando se tiene que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Se aclara que el proceso de conjeturar no es fácil de lograr y menos si se carece de una práctica constante en la actividad matemática escolar. Todo lo anterior muestra la correlación de un pensamiento algebraico y uno numérico, el cual permite la estructuración de un pensamiento matemático coherente donde se refleja una articulación de saberes matemáticos (Rondero, 2005) como la *equilibración* al encontrar cuando se cumple la igualdad, la *acumulación* cuando el término $2ab$ cumple ciertas expectativas en la relación inicial, entre otras. Esas nociones son una base de sustento que sirve para apoyar la construcción del objeto matemático que posibilita una generalidad.

Además, la regularidad encontrada debe ser avalada por medio de una rigurosa demostración o con la ayuda de otros elementos conceptuales matemáticos. Sin embargo, el propósito de mostrar este ejemplo es permitir realzar la relación estrecha entre la conjetura y el contraejemplo en la estructuración de un pensamiento matemático como sostiene la NCTM (2000).[9]

Todo lo mostrado en el problema anterior permite presentar un diagrama relacionando las variables que entran en juego en ese descubrimiento matemático:



Si un estudiante cuando está usando sus estructuras cognitivas muestra un pensamiento ingenuo, existe la necesidad de transitar hacia un pensamiento matemático. Entonces es el momento donde la conjetura y el contraejemplo juegan un papel preponderante que en parte es lo que se está trabajando dando evidencia, y que se puede observar en el siguiente explicación.

Primero surge un *pensamiento ingenuo*, en este caso la idea $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ que se considera un *obstáculo* para el desarrollo de un pensamiento científico porque se acepta sin crítica. En el *tránsito* hacia el *pensamiento matemático* surgen recursos como *contraejemplos* y *conjeturas* que se presentaron en el problema, y que dieron pie a presentar una idea mejor estructurada de que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. En todo ese proceso se percibe una interrelación de las variables donde construir conjeturas y contraejemplos es parte de los desarrollos matemáticos expuestos.

En ese sentido, la presentación de metodologías facilita en cierta forma cómo explicar las acciones de *conjeturar* y *refutar* en el desarrollo cognitivo o el descubrimiento matemático por parte de un sujeto. Entonces aquí es relevante ver como la conjetura y el contraejemplo pueden complementarse con la Mayéutica, el Ensayo-Error, entre otras.

[9] NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Virginia: Nathional Council of Teachers of Mathematics.

2.6 La Mayéutica

La palabra *Mayéutica* proviene del griego μαιευτικός cuyo significado etimológico es " *hacer parir o dar a luz la verdad* "; el cual sostiene Gutiérrez (1976) que es una doctrina filosófica basada principalmente en buscar la verdad, pero para llegar a ella se pone en duda a los supuestos planteados siempre a base de preguntas. Donde se pretende poner en conflicto lo que se "cree" saber de una noción u objeto de estudio.

Es una metodología que establece el hecho de que los pensamientos ingenuos o las conjeturas con poca sustentación presentadas por el individuo son debatidas con conceptos previamente establecidos, que le puede mostrar lo equivocado que estaba en sus apreciaciones. Personajes como Sócrates y otros filósofos de la antigua Grecia, ocuparon la Mayéutica para formar a sus discípulos, donde usaban la conjetura y el contraejemplo[10] para la construcción de un pensamiento filosófico.

La *Mayéutica* se basa en la dialéctica[11] donde hay una persona responsable de dirigir a su pupilo con una serie de interrogantes, para explorar si hay inconsistencias entre sus "conjeturas"; y el uso de los contraejemplos que refutan sus afirmaciones con lo que lleva a no aceptarlas como verdaderas. De La Torre (2003) sostiene que *el camino hacia el conocimiento es un proceso gradual, en el cual la opinión y la creencia constituyen etapas intermedias. El aprendiz se esfuerza y participa activamente en el proceso, que termina cuando aquel inventa o descubre la respuesta adecuada a una pregunta bien formulada.*

La Mayéutica propuesta por Sócrates con el uso de la dialéctica da fuertes indicios en preguntar a los estudiantes ¿qué más se puede revelar sobre el tema abordado?, dándoles pistas cuando sus conjeturas son correctas o incorrectas para resolver el problema. A la vez presentándoles contraejemplos que muestran las debilidades en sus respuestas, que permiten en parte a la estructuración de un pensamiento crítico, analítico, deductivo, inductivo, entre otras características, necesarios para convivir en una sociedad matematizada.

[10] Revisar página 3.
[11] Proceso intelectual que permite llegar, a través del significado de las palabras, a las realidades trascendentales. (RAE)

De La Torre (2003) afirma que *el papel del maestro consiste en estimular este proceso de reflexión e introspección en el aprendiz, gracias al cual llega a conocer. El acto de conocer se produce cuando las Ideas se despiertan en el alma, reavivadas al contacto con el mundo sensible y mediante el recurso del diálogo.* El maestro debe incluir dentro de su práctica docente estos procesos de conjeturar y contra-ejemplar, que dan lugar a la estructuración de un pensamiento matemático en los estudiantes, haciéndolos coparticipes de su propia formación; similar a lo que realizan los matemáticos al realizar las construcciones de los conocimientos, habilidades y destrezas necesarias en la ciencia.

Sin embargo, este método es muy poco usado dentro del aula en Matemáticas, y sólo se enfoca desde una perspectiva filosófica socrática que percibe una constante refutación de las ideas (pensamientos ingenuos o conjeturas con poca sustentación), que se examinan como parte de la construcción intelectual en la formación de los individuos.

2.7 Ensayo – error

El método de ensayo-error es aquel desarrollado inicialmente por Thorndike, el cual sustenta que el individuo aprende a través de sus equivocaciones. Aquí se puede señalar el hecho que para llegar a la solución de un problema se eliminan los caminos que no sirven para encontrar a una respuesta. Thorndike (1911) solamente lo trató para casos de animales basándose en su hipótesis de *estímulo-respuesta*, que explica a través de una motivación externa como:*…aquellas respuestas que van acompañadas o seguidas inmediatamente de malestar para el animal, no variando las circunstancias, se debilitarán en su fuerza de unión a tal situación, de forma que, cuando ésta se reproduzca, aquéllas se darán con menos facilidad. A mayor satisfacción o malestar, mayor será el fortalecimiento o debilitación de la conexión.*

En el caso del individuo para lograr el éxito es necesaria la eliminación de pensamientos ingenuos erróneos, y por medio de los procesos de conjeturar y contraejemplar permite la identificación de la verdad - o al menos, de lo que racionalmente puede aceptarse como tal para la construcción de los nuevos conocimientos. Pero corregir los errores, no es solamente decir que estos llevan a caminos erróneos en la solución del problema; sino presentar argumentos válidos que muestren realmente que tal desarrollo es inadecuado. Entonces incorporar a la conjetura y el contraejemplo en el proceso de aprendizaje, permite en parte el tránsito de un pensamiento ingenuo a la estructuración de un pensamiento matemático en los estudiantes.

Los errores aparecen en el trabajo de los alumnos principalmente cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben como sostienen Ruano, Socas y Palarea (2008). Tales pensamientos erróneos se pueden corregir en la medida que la conjetura y el contraejemplo ayuden en el enfrentamiento de nuevas problemáticas cognitivas, y que generalmente se observan en la construcción de los objetos de estudio como nociones matemáticas.

*El error tendrá distintas procedencias, pero siempre se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de falta de conocimie*nto como afirman Ruano, Socas y Palarea (2008). Es decir, es posible encontrar diversos errores en el camino hacia el descubrimiento matemático, pero por medio de constantes ensayos bien fundamentos con argumentos válidos se podrá lograr el desarrollo cognitivo deseado en el sujeto.

2.8 Descubrimiento matemático

Lakatos (1978) presenta cómo la historia de conceptos tan importantes dentro de las Matemáticas fueron evolucionando; primero porque todo lo que se presentaba como conjeturas se discutía y se cambiaban las concepciones por otras mejores; y también se debatían “teoremas demostrados” con claros contraejemplos que los hacían modificarlos o desecharlos.

El descubrimiento matemático es un eje fundamental en el trabajo de Lakatos (1978), lo cual se muestra en su libro de Pruebas y Refutaciones, que en parte ya se ha mencionado expresando una verdad matemática después de una cantidad considerable de conjeturas que surgen en el desarrollo siendo falsas, y hay que modificarlas tan pronto como se encuentran incongruencias. Pero todo eso forma parte de la estructuración del pensamiento matemático y en ese proceso se produce un ciclo constructivo:

1. Estructurar una conjetura
2. Verificarla
3. Intentar refutarla
4. Adquirir ideas para validarla
5. Demostrarla ó estructurar otra conjetura

Con estas ideas se puede hablar sobre una cultura matemática a través de la historia, la cual ha impactado en la estructuración de la ciencia debido al uso de las conjeturas para solucionar conflictos conceptuales a través de diversas épocas; como también del contraejemplo para hacer modificaciones o eliminar aquellos enunciados que no lograban una asociación con la teoría ya probada.

Polya (1965) asegura que *si el aprendizaje de las matemáticas tiene algo que ver con el descubrimiento de la matemática se debe dar al estudiante la oportunidad de hacer algunos problemas en los cuales primero conjeture y después se pruebe algunos hechos matemáticos en un nivel adecuado.* Lo cual va en dirección con lo expuesto por Lakatos, que la construcción del conocimiento incluye a estos elementos en forma fundamental para el desarrollo de un pensamiento matemático.

Sin embargo, Harada (2004) sostiene que *la propuesta de Lakatos ha sido criticada por numerosas razones, entre ellas porque al intentar reconstruir "racionalmente" la historia de la ciencia presenta una imagen idealizada de ella*. Por ello, resulta importante emplear otras estrategias didácticas que combinada con la propuesta por Lakatos enriquezca el proceso de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas, cuyo propósito es ayudar a estructurar un pensamiento matemático en los estudiantes.

2.9 Constructivismo

En la investigación se muestra en parte el constructivismo planteado por Piaget, es decir, como interviene los conceptos previos como "conjeturas" para la construcción del nuevo conocimiento, donde se involucra una serie de aspectos de *asimilación* de las nuevas ideas, y con la intervención de las contraejemplos cuando las conjeturas propuestas no son las correctas, o en el proceso de *acomodación* al momento de hacer los cambios necesarios sobre las afirmaciones.

Para Piaget (1981) asimilar consiste *en la incorporación de los objetos en los esquemas de la conducta, no siendo tales esquemas más que la rama de las acciones susceptibles de repetirse activamente.* Es decir, esos esquemas son como andamios de acciones donde sujeto puede reproducir activamente el mundo exterior. Esa asimilación mental es lograda en parte cuando las conjeturas construidas por el propio individuo son interiorizadas.

En cuanto al aspecto de acomodación, Piaget (1981) menciona que es reajustar (las estructuras construidas) en función de las transformaciones sufridas y, por consiguiente, a "acomodarlas" a los objetos externos. Aquí la conjetura como el contraejemplo son recursos que juegan un papel primordial en el proceso del descubrimiento matemático. Por un lado, el contraejemplo tiende a hacer las transformaciones requeridas de los pensamientos ingenuos erróneos que surgen en la apropiación de un objeto de estudio. Además, la acomodación funciona conjuntamente con la asimilación, una vez que las conjeturas han sido incorporadas a las estructuras cognitivas del sujeto, es necesario hacer "posibles modificaciones" sobre las mismas.

Entre la asimilación y la acomodación hay de por medio un "desequilibrio" cuando se muestran contraejemplos que transforman las estructuras mentales de un objeto. Pero a la vez un "reequilibrio" cuando se reorganizan dichos esquemas en parte con la modificación de las conjeturas. Todo esto se observa en el proceso del descubrimiento matemático cuando los alumnos van del equilibrio a un desequilibrio, y nuevamente llegan a la acomodación de nuevas estructuras mentales mas fortalecidas en ese juego mental.

Sin embargo, el equilibrio no puede entenderse por inmovilidad, ya que siempre el individuo está cuestionando sus concepciones sobre un objeto cuando surgen nuevas interrogantes en un proceso de aprendizaje más profundo. Pero este "desarrollo cognitivo" puede darse solo cuando el profesor y el estudiante tienen un contrato establecido.

2.10 Contrato didáctico y transposición didáctica

La Didáctica de las Matemáticas puede sustentar parte del hecho de usar estos dos recursos, cuando se hace un contrato didáctico muy comprometido por parte del docente y el estudiante; formando al alumno como un individuo analítico y crítico, e incorporándolo a que sea parte de su formación integral. Según Brousseau (1986) el contrato didáctico es *un conjunto de reglas, generalmente implícitas que organizan las relaciones entre el saber enseñado, los alumnos y el profesor*. En cuanto a las Matemáticas escolares, el proceso del descubrimiento matemático sólo es logrado en parte cuando existe un interés del estudiante de involucrarse en su proceso de aprendizaje.

Sin embargo, existen efectos de un contrato didáctico y Brousseau (1986) afirma que *la transmisión del saber obliga a adaptarlo, a modificarlo, a recortarlo, a reorganizarlo. Tal proceso, llamado transposición, es necesario pero en un cierto sentido, es también lamentable, pues el juego de relaciones y obligaciones que se establecen durante la relación didáctica, produce diversos efectos, en ocasiones escasamente favorables a quien está en posición de aprender. Incluso, algunos de estos efectos deterioran y llegan a sustituir los aprendizajes.* Entonces este contrato no debe tomarse a la ligera como una simple reproducción del conocimiento matemático, más bien es la búsqueda de la verdad sobre un objeto de estudio donde está presente el descubrimiento matemático.

La elección o la ruptura de un contrato condicionan la evolución del sistema didáctico, que permiten mantenerlo en un ámbito de eficacia aceptable. Es por ello fundamental observar cuando se dan las circunstancias para que los alumnos puedan construir sus propias conjeturas, pero también cuando el docente deba intervenir en la apropiación del conocimiento. Este contrato didáctico establece el hecho de que cada alumno ayude a la construcción necesaria, con la ayuda estrecha de su profesor al momento de presentar contraejemplos cuando sea de utilidad, los cuales permite cambiar pensamientos ingenuos erróneos de sus aprendices.

Por otro lado, la transposición didáctica fue creada por Michel Verret 1975 en Sociología y tomada por Yves Chevallard en el campo de las Matemáticas (1980-1985). Chevallard (1991) señala que *el "trabajo" que transforma de un objeto de saber a* *enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica.* Los docentes deben ser capaces de hacer una transposición didáctica de los conocimientos presentados en el aula; donde ellos deben hacer una conversión o transformación de los saberes sabios a un saber manejable, para la transmisión del mismo para ser "comprendido" por sus estudiantes.

Para hacer esa transposición didáctica el docente necesita conocer ¿cómo se hizo la construcción de esos saberes en la comunidad científica?, en las cuales se usó en parte a las conjeturas y los contraejemplos haciendo cambios fundamentales sobre los mismos. Es importante conocer la construcción del conocimiento, específicamente su evolución que ayuda en parte a una transposición didáctica exitosa, como sostiene Chevallard (1991) que *un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre (...) un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza.*

Pero dentro de esa transposición didáctica hay que entender que los objetos matemáticos en estudio toman diferentes significados en la ciencia y en el propio proceso de enseñanza-aprendizaje; agrupándolos de acuerdo al papel que tomen como Chevallard (1991) lo reporta:

Nociones matemáticas: son aquellas que se ubican como el propio objeto de estudio y son construidas en la ciencia. Sin embargo, en el caso de esta investigación a la conjetura y al contraejemplo se observa que son objeto de estudio, ya que la conjetura se puede estudiar en la construcción del proceso de inducción; y al contraejemplo en el desarrollo temático de la Lógica Matemática. En general, son objetos de enseñanza que pueden ser evaluados directamente.

Nociones Paramatemáticas: no son objeto de estudio, más bien son nociones-herramientas para la actividad matemática. Es decir, que ellas son usadas en el proceso como objetos auxiliares que posibilita la enseñanza necesaria de los objetos de estudio en cuestión. En esta categoría es donde más se ubica a la conjetura y al contraejemplo como herramientas que ayudan a la construcción y comprensión respectivamente de las nociones matemáticas.

Nociones Protomatemáticas: son aquellas que se utilizan como un medio para resolver un problema, es decir, que no son reconocidas como objetos de estudio como el caso: de los patrones que sirven para desarrollar en parte una conjetura o el contexto donde se invalida una afirmación que sirve para construir un contraejemplo.

En efecto, la conjetura y el contraejemplo tienden a ocupar varios papeles en la Matemáticas unas veces siendo nociones matemáticas, otras paramatemáticas y en ocasiones protomatemáticas. En general, estas nociones alcanzan un nivel superior en la ciencia llamándolas *metamatemáticas* porque funcionan como organizadoras de nociones matemáticas, paramatemáticas y protomatemáticas, ya que es producto del llamado descubrimiento matemático que se desea lograr en esta ciencia.

Capítulo III

Metodología

La metodología que se ocupa en este trabajo es de tipo cualitativa sustentada en la Ingeniería Didáctica, de tal manera que se ha realizado un análisis de la relevancia de la conjetura y el contraejemplo en el medio escolar sobre el aprendizaje de las Matemáticas. Con respecto al análisis se toman como elementos de búsqueda de información una entrevista, un examen diagnóstico y la revisión de libros de textos; donde todo lo anterior es similar al trabajo realizado por un ingeniero pero en la Didáctica de las Matemáticas.

En ese mismo orden, Artigue et al. (1995) denominan a la Ingeniería Didáctica como *una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo de un ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control científico*. Una investigación que se sustenta en la Ingeniería Didáctica no se basa solamente en un cuadro teórico didáctico general, ya que se ocupan herramientas como la entrevista a un experto[1] que enriquecen el trabajo; y que ayuda a validar en parte lo mostrado en el marco conceptual sobre el papel de la conjetura y el contraejemplo al estructurar un pensamiento matemático.

La Ingeniería Didáctica tiene sus inicios en los trabajos realizados en los IREM (Institutos de Investigación en Enseñanza de las Matemáticas, Francia), debido a la problemática presentada sobre la enseñanza de las Matemáticas en el nivel básico; esos trabajos hacen estudios de fenómenos didácticos comenzando un proceso de búsqueda de explicaciones acerca de la estructuración de concepciones en los estudiantes, y además en lo que corresponde a la formación de profesores tanto en los contenidos matemáticos como de los pedagógicos.

La Ingeniería Didáctica, desde la perspectiva de este trabajo se ocupa en parte de una forma de investigación que confronta un escenario observado, esto es la simulación de una realidad enfrentándola con lo que ocurre en la práctica docente. En este sentido, Brousseau (1990) en congruencia con este planteamiento refiere que *una ingeniería se apoya sobre un campo científico en las técnicas que propone*. Es decir, para llevar a cabo esta compleja labor se requiere el perfil de un docente en tres dimensiones:

1. Un docente como Didacta: aquel que dedica tiempo y esfuerzo con el fin de caracterizar el objeto de estudio y los posibles métodos de aprendizaje.

[1] *Ver sección 3.1 página 48*

2. Un docente como Ingeniero: aquel que produce cosas innovadoras en su propia práctica.
3. Un docente como Investigador: aquel cuyas indagaciones en el aula se reflejan en el cambio del proceso de enseñanza-aprendizaje.

La Ingeniería Didáctica (Artigue et al., 1995) presenta cuatro fases que permiten ayudar en el desarrollo del trabajo investigativo, y las cuales se explican a continuación.

- *Primera fase:* un análisis preliminar, *se estructura en torno al análisis del funcionamiento de un sistema, un equilibrio que por mucho tiempo fue estable pero que ahora se percibe como obsoleto.* En el trabajo se ubica la situación del aprendizaje de las Matemáticas en México, haciendo un análisis general breve de algunas de las evaluaciones en parte del sistema educativo mexicano, revisando libros de texto de autores extranjeros usados en las aulas, entre otras actividades teniendo en cuenta los objetivos de la investigación.

- *Una Segunda fase:* el análisis a priori y concepción, donde *el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones*. En el trabajo se relación dos variables, el pensamiento ingenuo y el pensamiento matemático, pero a su vez qué papel en ese tránsito juegan la conjetura y el contraejemplo, donde todo lo anterior permite un análisis descriptivo de todas esas variables.

- *Tercera fase: la experimentación,* donde se ocupan variables para observar su desarrollo. En el trabajo no se realiza una intervención didáctica directa en el sistema; más bien se muestra cómo aparecen las variables en los libros de textos y cómo lo emplea el docente entrevistado, lo cual permite mostrar las ventajas de la conjetura y el contraejemplo en la educación.

- *Cuarta fase: análisis a posteriori, se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber de las observaciones realizadas*. Hay un análisis a posteriori que realiza la investigación sobre las consecuencias de la incorporación de la conjetura y el contraejemplo que permitan algunas modificaciones de las prácticas tradicionales, donde se analiza en parte las formas de enseñanza del experto como el uso de estos recursos en libros de textos que se emplean para la preparación de las clases por parte de los profesores.

Douady (1995) sostiene que la Ingeniería Didáctica se considera un *producto*, el cual resulta de un análisis a priori que se realiza en el transcurso del trabajo de investigación. Además, los análisis a priori y a posterior permiten una confrontación y *se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación*, como sostienen Artigue et al. (1995), en el caso de este trabajo se buscan evidencias que permitan mostrar que tanto la puesta en escena en situación escolar de la conjetura y el contraejemplo, posibilitan el tránsito del pensamiento ingenuo al pensamiento matemático.

3.1 La entrevista

La entrevista es un instrumento para recolectar información muy apreciable, y la cual se presta a la revisión de los contenidos involucrados de una manera más profunda, ya que es considerada una técnica significativa y productiva de que dispone el analista para recabar datos.

La palabra *entrevista* deriva del *latín* que significa "los que van entre sí". Se trata de una técnica o instrumento empleado en una *investigación*, la cual no es casual sino que debe haber un acuerdo previo con intereses y expectativas. El diccionario de la Real Academia Española la define como: *la conversación que tiene como finalidad la obtención de información*.

La entrevista como parte de la Ingeniería Didáctica se ocupa como un análisis preliminar, a priori y a posteriori. Primero, en el sentido de buscar elementos que no pueden ser identificados por otros medios en este caso los efectos de los cambios de la enseñanza tradicional por medio del descubrimiento matemático. Segundo, muestra variables relevantes para la conjetura como el contraejemplo específicamente en la investigación como el *contexto* de una noción o el proceso de *generalización*.

Además, la entrevista presenta un análisis a posteriori sobre la estructuración de las clases propuestas del entrevistado usando las nociones matemáticas de la conjetura y el contraejemplo, en donde se percibe las riquezas obtenidas con esta forma de "enseñar" los objetos matemáticos en el aula.

En el trabajo se presenta una entrevista no estructurada, es decir, el entrevistador tiene mayor flexibilidad al realizar las preguntas adecuadas a quien responde y puede explotar áreas que surgen espontáneamente durante el proceso. Con la cual, se hace un análisis del uso de la conjetura y el contraejemplo, en específico en su práctica profesional para la construcción de modelos matemáticos. En esa dirección, se indaga cuál es su relevancia y cómo ocupa estos recursos en su práctica docente con sus estudiantes que permiten posibilitar la estructuración de un pensamiento analítico, crítico y científico. La entrevista se realizó en el *Área Académica de Matemáticas*, de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo el día 16 de enero de 2009 por el *Dr. Carlos Rondero Guerrero* al *Dr. Carlos Castillo Chávez* (profesor investigador matemático de la Universidad de Arizona) director ejecutivo del Instituto de Biología Teórica y Matemáticas y el Instituto para el Fortalecimiento de la comprensión de las Matemáticas y la Ciencia, que se encarga en parte del análisis de comportamientos de enfermedades como construcción de modelos que expliquen estos fenómenos.

La entrevista se realizó con un experto ya que muestra otros aspectos que un estudiante o un profesor no pueden explicar cómo es la parte del quehacer matemático para la estructuración de conjeturas que modela fenómenos, donde se requiere una afinación o modificación de las mismas con el uso de contraejemplos; además de cómo puede llegar a ocupar esos recursos (la conjetura y el contraejemplo) en su práctica educativa cuando desea rescatar aspectos de un objeto de estudio necesarios para su compresión en las Matemáticas.

3.2 El examen diagnóstico

Un examen diagnóstico permite mostrar otros aspectos que resalten en su exploración, y que puedan ayudar a corroborar lo expuesto en la entrevista, como a exponer otros temas que son difíciles de evidenciar. El examen propuesto contiene reactivos enfocados principalmente a la estructuración de una conjetura, así como la construcción de contraejemplos, y que deben reflejar la capacidad de análisis sobre las temáticas tratadas.

En un examen diagnóstico se observan en parte otros aspectos que no habían sido tomados en cuenta en el desarrollo teórico de los temas, como la profundización sobre la hipótesis de estudio que se presenta en el trabajo de investigación. Por lo tanto, es un instrumento que investiga las situaciones de los profesores en la construcción de conjeturas como contraejemplos, y que se puede reflejar en otras personas esas características que sirven para entender lo ocurre a otro nivel.

Todo esto se puede observar a través del instrumento de evaluación realizado a 4 estudiantes de la Maestría en Ciencias Matemáticas y su Didáctica de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, los cuales son profesores en activo en el sistema escolar en diversos niveles. Estos profesores tienen una formación en Ingeniería con una experiencia docente entre los 7 y 22 años, ellos han impartido materias como: álgebra, Cálculo, entre otras. Además, el análisis de un examen diagnóstico muestran en parte cómo ocupan estos docentes esas nociones (la conjetura y el contraejemplo) en el aula como un recurso que posibilita la estructuración de un pensamiento matemático en sus estudiantes. Con este examen, se intenta recolectar información que comprende en parte el proceso de descubrimiento matemático en los desarrollos expuestos como las explicaciones vertidas en cada reactivo por cada profesor.

Este examen diagnóstico permite un análisis a priori como parte de la Ingeniería Didáctica, sobre el papel que ocupan la conjetura y el contraejemplo en los desarrollos matemáticos de los docentes y que se puede reflejar en sus propias prácticas educativas. De manera que antes de realizar una secuencia de aprendizaje, es necesario observar las conceptualizaciones de los profesores, en donde el análisis posibilite mostrar variables que deben ser tomadas en cuenta en sus clases, como parte de un descubrimiento matemático escolarizado.

Además, es necesario recalcar que la aplicación de este examen diagnóstico es a profesores que son estudiantes de una maestría especializada en Didáctica, los cuales deben *mostrar interés genuino para abordar la problemática en el aprendizaje de las matemáticas* (según el perfil de ingreso)[2] a diferencia de otros profesores en activo, y de esta manera ver que tanto ellos incluyen dentro de su práctica y discurso escolar a la conjetura y al contraejemplo como parte de una metodología enfocada al descubrimiento.

[2] UAEH (2004).

3.3 Los libros de textos

Dentro de la metodología se hace un análisis de los libros de textos matemáticos, ya que estos son herramientas utilizadas en el aula muchas veces de apoyo y otras como principal recurso para la elaboración de la clase; el interés de este trabajo es ver qué tanto ocupan a la conjetura como al contraejemplo, para la estructuración de un pensamiento matemático.

El principal propósito es ver cómo manejan los contraejemplos en la refutación de afirmaciones que surgen en temas tratados en Cálculo, como el caso de que *"toda función continua es derivable"* o si una relación es una función, entre otras. Revisar libros permite mostrar la estructuración de los contraejemplos como sus justificaciones, para que los profesores que todavía usan una práctica educativa tradicional mediten sobre cómo realizan sus clases. Por otro lado, cómo los textos emplean a las conjeturas enfocándose al descubrimiento matemático, teorizado en parte por Lakatos[3] para la estructuración de un pensamiento científico, en donde se investigue sobre las fases hacia el desarrollo conjetural.

Los libros de texto analizados son:

Libro	**Autores**	**Año de Publicación**	**Aplicación**
Cálculo	Arizmendi, H., Carrillo, A., Lara, M.	1976	Sirve para contrastar con otros libros más usados y puede ser usado en nivel superior
Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas	Stewart, J.	2001	Utilizado para la formación de ingenieros
Cálculo Infinitesimal	Spivak, M.	2001	Libro que también se ocupa en el nivel superior, usualmente en Licenciaturas en Matemáticas

Listado de libros revisados en el capítulo VI.

Todos estos libros permiten examinar las aportaciones y limitaciones en el desarrollo del enfoque propuesto por Lakatos (descubrimiento matemático)[4], es decir una construcción de las nociones desarrolladas en esta disciplina por medio de

[3] Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.

[4] *Revisar sección 2.8.*

conjeturas y refutaciones. Es posible analizar otros libros pero sólo se limitará a tomar de estos textos algunos desarrollos enfocándose en esta dirección, observando si aparecen en forma implícita o explícita en la construcción de nociones matemáticas. Se remarca que el libro de Arizmendi a pesar de ser un libro del año 1976 se utilizó para observar si en efecto es ocupado a la conjetura y el contraejemplo en la estructuración de un pensamiento matemático apropiado.

El análisis de libros de textos permite un análisis preliminar de cómo se confeccionan las clases con la ayuda de material escrito, entonces este análisis se involucra dentro de la primera fase de la Ingeniería Didáctica. Aquí se muestra en forma directa como se utiliza la conjetura y el contraejemplo en el desarrollo de las nociones matemáticas en el aula.

Con todos estos elementos metodológicos los profesores pueden diseñar situaciones de aprendizaje que incorporen de una manera relevante a la conjetura y al contraejemplo, que repercutan en la estructuración de un pensamiento matemático en sus estudiantes. El análisis del ingeniero tiene por finalidad realzar la riqueza de los contenidos con un enfoque, que conlleve a la estructuración de un pensamiento matemático adecuado, principalmente como un descubrimiento científico.

La Ingeniería Didáctica apoya este trabajo en el desarrollo de análisis que se realiza en todos los capítulos, y que muestra las bondades y dificultades de la conjetura y el contraejemplo como recursos que pueden formar parte del proceso de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas en el contexto escolar en diferentes niveles educativos, los cuales han sido analizados como elementos que ocupa el matemático en su quehacer diario para el desarrollo de sus actividades.

Además, se hace una especie de confrontación de los análisis a priori y a posteriori que se observa en las Conclusiones, cuyo objetivo principal es la validación de la hipótesis de investigación referida a una adecuada estructuración de un pensamiento matemático en los estudiantes.

Capítulo IV

Análisis de la entrevista

La entrevista se presenta de la forma siguiente, aclarando que las respuestas presentadas en este capítulo son una reinterpretación de la transcripción completa que se aparece en el Anexo del trabajo. El propósito de esta entrevista es que sirva de apoyo a la Ingeniería Didáctica dando un análisis que muestren la relevancia de la conjetura y el contraejemplo en el contexto escolar, donde se rescaten o resalten aspectos que son difíciles de evidenciar por otros medios.

Dr. Rondero Guerrero (entrevistador ***R*** = Rondero)
Dr. Castillo Chávez (entrevistado ***C*** = Castillo)

4.1 Análisis de preguntas de la entrevista

***R*:** ¿Qué importancia les das a los contraejemplos en la construcción de tu tarea matemática?

> ***C:*** *Los contraejemplos tienen un aspecto más que todo formativo, ya que no generalizas arbitrariamente ningún resultado. Además, el matemático está más alerta de que ir de lo particular a lo general no es una tarea sencilla, a diferencia de un físico o un ingeniero.*
>
> **Análisis de la respuesta:** En investigaciones que se refieren al aspecto de la generalización es necesario hacer un razonamiento inductivo como sostienen Cañadas y Castro (2008), el cual imposibilita ir de una manera tan fácil a extraer resultados. Sin embargo, el proceso de la "generalización" es poco tratado en los cursos de Matemáticas que se han observado, ya que no se practica como parte de la estructuración de un pensamiento matemático.

***R*:** ¿El modo de trabajo de algunos colegas involucra de una u otra forma casi inevitablemente el manejo de los contraejemplos?

> ***C:*** *Dentro de la mayor parte de campos en otras áreas del conocimiento se trabajan con simulaciones, teniendo más fe en las mismas. Un matemático sabe que estas simulaciones que se construyen podrían ser una modelación de un caso particular, pero también se interesa por entender que tan robustas pueden ser las estructuras de las ecuaciones que aparecen. Aunque sostiene que*

podrían llegar a la misma respuesta, sólo con la diferencia en el trato a la generalización.

Análisis de la respuesta: La formación matemática incide en las modelaciones realizadas por el entrevistado, cuando no se toman a la ligera que los resultados pueden ser casos particulares del sistema complejo analizado. Además, debe existir una preocupación por la estructura de las ecuaciones, ¿qué tan robustas resultan para modelar el fenómeno estudiado? Pero en el proceso de aprendizaje de las Matemáticas, estos elementos aparecen en forma casi aislada o no aparecen imposibilitando el desarrollo de un pensamiento matemático en el aula por parte de los estudiantes.

***R*:** ¿Cómo un individuo transita de lo particular a lo general? ¿Es muy complicado?

C: *Ese tránsito algunas veces puede llegar a ser limitante. En el sentido, de que el trabajo como matemático aplicado lo lleva a un rigor científico tan obsesionado restringiendo lo que está estudiando, como el hecho de encontrar contraejemplos "espectaculares" que destruyen la conjetura. Por otro lado, se puede estar tan tranquilamente en otra área haciendo suposiciones, las cuales probablemente no funcionen para ese estudio porque su entrenamiento es diferente.*

Análisis de la respuesta: En ese sentido, Magee (2000) sostiene que *un científico empieza llevando a cabo experimentos destinados a hacer observaciones cuidadosamente controladas y sometidas a una meticulosa medición*. Es decir, el tránsito de lo particular a lo general es un proceso muy delicado; y sólo el constate entrenamiento permite que dicha actividad se logre, con una alta dosis de experiencia en los temas abordados.

***R*:** ¿Cómo ocupar un contraejemplo en el aula, sabiendo que existe y hay que estar construyéndolos para entender mejor los conceptos en Matemáticas?

C: *Existe la necesidad de preocuparse por el entrenamiento matemático que hay en el aula. Porque conlleva a traer un rigor científico necesario para no* *generalizar tan fácilmente como también reconocer regularidades. Además, la habilidad de distinguir lo general de lo particular, de lo que se puede generalizar y lo que no se puede y bajo qué condiciones; permite entender muchos modelos estudiados que sirven para simular varios fenómenos.*

Análisis de la respuesta: Se profundiza mas en el proceso de que generalizar una conjetura requiere de un entrenamiento constante. Además, se puede llegar al hecho que lo que se está intentado modelar es más general de lo que se pensaba; es decir, la estructura matemática encontrada puede simular otros fenómenos totalmente diferentes de los que se inicialmente se estaba haciendo. En ese sentido, Magee (2000) afirma que *cada científico intenta confirmar su hipótesis encontrando hechos que la respalden*, y lo cual muchas veces esos hechos permite modificar la conjetura original como sostiene Balacheff [1].

***R*:** ¿Qué pasa con la formación del estudiante cuando no se toman en cuenta o no se hace mención de los contraejemplos?

C: *Hay que tener cuidado con los contraejemplos. Porque muchas veces el contexto donde se construyen los contraejemplos con los alumnos es tan limitado, que en uno diferente ya no lo serian. Por ejemplo: el concepto límite en Cálculo se enseña en forma tan restrictiva y cuando se ocupa en sistemas dinámicos es modificado.*

Análisis de la respuesta: Se debe ahondar sobre el hecho que el contexto donde se presentan los contraejemplos puede ser un recurso que limite el entendimiento de los conceptos, ya que son a veces espacios muy restringidos. Sin embargo, los contraejemplos permiten observar donde los conceptos tiene validez. Pero recordando que hay que tener cuidado, porque los contraejemplos si no se estructuran bien, pueden llegar a confundir el entendimiento de un objeto matemático.

[1] Ver página 30.

***R*: **¿Es importante cuestionar los conceptos, aunque estemos con ciertas restricciones para que el contraejemplo le puede hacer pensar en otros aspectos?

> ***C:*** *Es importante el contexto, porque entender ¿qué es un contraejemplo?, te ayuda en la construcción de lo que se está haciendo que tan general realmente lo es, y se vuelve útil en la toma de decisiones en investigaciones.*
>
> **Análisis de la respuesta:** Los conceptos que se examinan en una investigación tienen un contexto donde cobran validez, y un contraejemplo permite en cierta forma entender si estos pueden ser más o menos genéricos de lo que se está estudiando. Un contraejemplo refuta una afirmación, pero no implica que la nueva construcción "conjetural" tenga carencias para poder ser generalizable.

***R*:** ¿Es importante en una clase de matemática que un profesor discuta con sus estudiantes, si a veces le dice a ellos que construyan contraejemplos y apoyarlos en esa dirección?

> ***C:*** *Para entender un concepto es necesario conocer donde el mismo tiene validez, y un contraejemplo puede permitir conocer la frontera del concepto. Por ejemplo, si se carecen de contraejemplos entonces la visión de lo que es una función integrable puede muy reducida o extremadamente equivocada.*
>
> **Análisis de la respuesta:** Todo concepto tiene un contexto donde tiene validez y los contraejemplos ayudan a entender cuando el mismo tiene sentido. Sin embargo, es necesario hacer trabajos en el aula en esa dirección que intenten hacer pensar más a los estudiantes, sobre los niveles de comprensión de los objetos matemáticos que se están estudiando.

***R*:** ¿Haces intervenir las conjeturas en tu trabajo profesional, qué tan frecuentemente?

> ***C:*** *Lo más importante dentro de la investigación en un trabajo aplicado es la construcción de conjeturas, porque se buscan ideas que cambien radicalmente la manera que los científicos u otras personas entienden lo que está pasando. Estas conjeturas se construyen a través de preguntas que intentan explicar lo*

que se espera que ocurra. Sin embargo, estas conjeturas pueden ser no genéricas entonces estas hipótesis cumplen otras condiciones. Existen varias explicaciones porque se presenta un lado hipotético diferente al que se construyó originalmente. Entonces se tiene que diseñar experimentos que permitan diferenciar, si lo que la gente pensaba es cierto o lo que genera el modelo o las restricciones que hay son más posibles.

Análisis de la respuesta: Es interesante, el juego de las conjeturas construidas con preguntas que se formulan, las cuales tratan de modelar fenómenos y se buscan experimentos que argumenten su validación. Esos ensayos permiten observar cuando las conjeturas son generalizables o no lo son, asimismo entender las posibles restricciones que surgen para limitar su contexto. Lastimosamente, las prácticas docentes observadas muestran poca disposición de hacer este tipo de juego en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

***R*:** ¿Una conjetura puede llegar hasta romper un paradigma establecido?

C: *Una conjetura con suficientes evidencias como era el caso de la concepción de Darwin sobre la evolución del hombre, fue capaz de destruir todas las posibles explicaciones presentadas en el momento y la gente ha tratado de buscar si es la más efectiva para explicar esta teoría.*

Análisis de la respuesta: Dentro de la historia de la humanidad se han presentado muchas formas de pensar que han quedado como paradigmas por *lapsus* de tiempo muy grandes, pero gracias a las conjeturas propuestas con buenos argumentos lógicos por grandes pensadores se han refutado dichos paradigmas. En el aula ocurre algo similar cuando los estudiantes validan sus respuestas con pensamientos mal estructurados en vías de su adquisición, y existe la necesidad que el profesor utilice contraejemplos que muestren sus concepciones erróneas.

***R*:** ¿Qué elementos le permite elaborar una conjetura a un científico con un sustento y un potencial de desarrollo?

> ***C:*** *Construir conjeturas no es algo fácil pero el mismo involucra la simplicidad de la Matemática; es decir, cómo hacer un modelo que tenga lo mínimo necesario pero no menos y que pueda contestar por lo menos una de las preguntas planteadas. Una vez que se tiene el modelo se puede decidir si eso genera conjeturas basadas en la pregunta planteada, y así es como se logran crear estructuras matemáticas que pueden generalizarse.*
>
> **Análisis de la respuesta:** Una de las cosas sorprendentes de las Matemáticas es la capacidad de utilizarla para explicar fenómenos tan complejos de la naturaleza en una forma sencilla. Lo importante de la conjetura como una estructura matemática construida, es responder al menos una de las preguntas planteadas en la investigación con argumentos lógicos y congruentes validándola como una noción metamatemática[2] dentro proceso de aprendizaje. Porque involucra aspectos necesarios dentro del descubrimiento matemático que posibilita la construcción de un pensamiento científico.

***R*:** ¿Cuando alguien elabora una conjetura y la va desarrollando, en qué momento la abandona o sigue empujándola?

> ***C:*** *Una parte importante dentro del desarrollo matemático es la construcción de conjeturas, pero no se debe quedar sólo en ese nivel. Es necesario también dentro del trabajo escoger cuáles explican mejor el fenómeno estudiado dándole el sustento requerido y desechar las otras que no lo tengan.*
>
> **Análisis de la respuesta:** Las tareas de explorar, formular preguntas, hacer conjeturas, reorganizarlas o desecharlas son importantes y sirven de utilidad en el aprendizaje de las Matemáticas como sostiene Saenz (2001). El quehacer científico de un matemático requiere de un entrenamiento que involucra en parte estos procesos antes señalados.

---

[2] Revisar sección 2.10.

R**:** Dentro del proceso de aprendizaje de las Matemáticas ¿qué pasa en el caso de las conjeturas?

> ***C:*** *La conjetura puede estar basada en modelos que no son genéricos porque se llegan a ciertas conclusiones con estructuras estables y cualquier variación de estas va a dar un resultado totalmente diferente. Sin embargo, esto depende de que tan robusto sea lo que se hace entonces el entendimiento de los contraejemplos es muy importante y se construyen modelos porque no se puede tener fe en lo que estás haciendo.*
>
> **Análisis de la respuesta:** La preocupación que se tiene en la estructuración de conjeturas radica en modelos que muchas veces no son generalizables, y es necesario que para las estructuras de esos modelos se encuentren posibles contraejemplos, que permitan desechar esas conjeturas cimentadas sobre supuestos incongruentes. Hay que recordar que en el proceso de conjeturar debe haber fases que posibiliten llegar a generalizar la afirmación inicial.

4.2 Análisis global de la entrevista

Se puede apreciar el papel que toma la conjetura y el contraejemplo en la práctica educativa del entrevistado como en la estructuración de los modelos matemáticos desarrollados en sus investigaciones biológicas sobre enfermedades epidémicas[3]. La formación matemática y su entrenamiento constante le permiten dar explicaciones que sirven para entender la importancia de estas nociones metamatemáticas como parte del descubrimiento matemático que requiere en sus trabajos.

Por un lado, muestra a la conjetura como un proceso delicado que posibilita la construcción de nuevas nociones, teoremas o la modificación de teorías en el campo de estudio; y se apoya del contraejemplo como un eje modificador de posibles generalizaciones difíciles de efectuar. Es decir, presenta un juego entre la conjetura y el contraejemplo para la construcción y validación de nuevas concepciones en la ciencia.

[3] Trabajos mostrados en el Seminario de Matemática Aplicada (Enero, 2009).

La conjetura es un recurso matemático cuya estructuración en su mayor parte requiere encontrar una regularidad, recordando que siempre es necesario distinguir cuando una idea puede ser generalizable. Sin embargo, el contraejemplo permite que no se conjeture en forma precipitada sin un buen fundamento lógico-matemático, ya que se puede encontrar inconsistencias en los desarrollos propuestos.

La entrevista se realiza con un experto porque permite mostrar dos facetas, primero como investigador al manifestar su experiencia con la conjetura y el contraejemplo caracterizándolas dentro de su quehacer matemático. Segundo dentro del ámbito educativo al incluir esos recursos, que sirven mostrar características de un objeto que no son sencillas de comprender con una simple definición en el aula, exponiendo aspectos que no deben dejarse por fuera para la compresión del mismo como el contexto.

Es valioso hacer notar que el entrevistado les da una posición importante dentro del descubrimiento matemático tanto a la conjetura como al contraejemplo, que posibilita la estructuración o evolución de un pensamiento matemático requerido para el desarrollo de nuevas inquietudes en la Ciencia.

Capítulo V

Análisis de la prueba diagnóstica

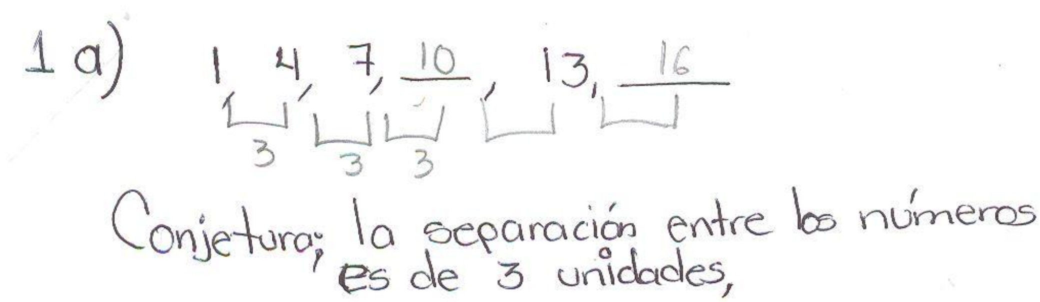
El estudio diagnóstico se les aplicó a profesores en activo en los niveles educativos medio superior y superior. Además, son estudiantes del segundo semestre de la Maestría en Ciencias Matemáticas y su Didáctica de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, los cuales no han recibido ningún tipo de instrucción sobre la conjetura y el contraejemplo por parte de la persona que se los aplicó. Dentro de las indicaciones de la prueba se le dan definiciones generales sobre la conjetura y el contraejemplo.

En este análisis se observan características relevantes que se desprenden de los resultados obtenidos en los reactivos sobre la conjetura y el contraejemplo, que muestran en parte cómo se estructuran esos elementos enmarcando dicho análisis como una de las fases de la Ingeniería Didáctica para el trabajo.

5.1. Análisis de los reactivos relacionados a las conjeturas

- En la primera actividad de las conjeturas se requirió que encontraran los números faltantes en la secuencia numérica 1, 4, 7, ____, 13, ____

  Conseguir una relación que sigue los números en este inciso fue “sencillo”, ya que los profesores reconocieron que puede ser una *progresión aritmética* pero no lo mencionaron. Sin embargo, solo la mitad dieron explicaciones sobre sus respuestas como es el caso del Profesor 1.



Justificación presentada por el Profesor 1 que indica la regularidad encontrada.

Se observa una escasa capacidad de argumentación por parte de la mayoría de los profesores, los cuales presentaron respuestas en un lenguaje matemático con pobres explicaciones dentro de su discurso textual donde se limitan a no mencionar el descubrimiento un patrón referido a una razón aritmética. Si los profesores carecen de estos elementos en su práctica educativa, es complicado que sus alumnos puedan comenzar a *argumentar* en el aula sobre sus respuestas.

Por otro lado, hay que tener claro que no es la única solución porque se puede estar en otros contextos como cuando se trabaja con un polinomio de Lagrange ($\mathcal{L}(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3)$) donde se tienen los tres primeros términos de una secuencia numérica), es decir, una función polinomial de grado *n* que se ajuste a la secuencia de números. Si se asigna al cuarto término el 10 entonces se puede construir un polinomio de Lagrange de quinto grado, donde la sexta posición puede tomar cualquier valor. Por ejemplo, si el sexto término es 20 se construye:

$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{17}{6}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{182}{15}x - 6$, (con $\mathcal{L}(1) = 1$, $\mathcal{L}(2) = 4$, …, $\mathcal{L}(9) = 249$) que dan la secuencia de números 1, 4, 7, 10, 13, 20, 43, 106, 249, … diferente a la obtenida en la progresión aritmética.

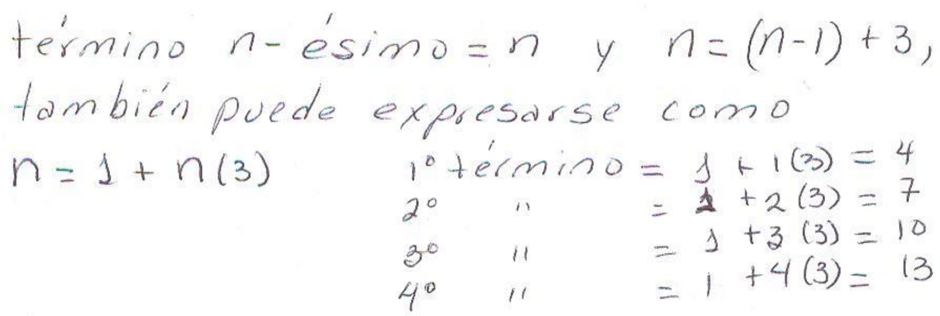
- En la segunda actividad de la primera parte debían construir una sucesión de números con la relación encontrada en el reactivo a.

  La actividad no fue complicada para los Profesores y lograron hacer la secuencia de números pedidas. Aquí se encontró que no existió en la mayoría de los docentes una preocupación en la explicación de sus construcciones, que implica en cierto modo una expresión del puro "dominio operativo".

- En el reactivo c. se les pidió encontrar el *n*-ésimo término de la secuencia de números 1, 4, 7, __, 13, __

  En esta tarea de hallar el *n*-ésimo término de la secuencia se presentó una notoria debilidad en la búsqueda de un patrón numérico, al faltar un plan que muestra en parte la estructuración de la conjetura porque ni siquiera identifican cómo se construyen los términos (primer término, segundo término, etc.). Solamente el

Profesor 4 tuvo un acercamiento mejor estructurado al proceso de generalización y los demás no justifican sus respuestas.



término n-ésimo $= n$ y $n = (n-1) + 3$,
también puede expresarse como
$n = 1 + n(3)$ 1° término $= 1 + 1(3) = 4$
2° " $= 1 + 2(3) = 7$
3° " $= 1 + 3(3) = 10$
4° " $= 1 + 4(3) = 13$

En esta respuesta a simple inspección existe una confusión en las notaciones usadas por el Profesor 4 que impiden entender lo que representa "n".

Una notación adecuada sería a_n para indicar el n-ésimo término de la progresión aritmética. Pero en esta respuesta hay que tener presente como se construye el primer término es $1 + 0(3) = 1$, el segundo término $1 + 1(3) = 4$ y así sucesivamente hasta llegar a conjeturar sobre la forma que sigue el n-ésimo término como $a_n = 1 + (n - 1)(3)$ donde $n = 1, 2, 3, \ldots$

Dentro de la estructuración de una conjetura es necesario el proceso de generalización, el cual se ha estudiado por diversos autores en Matemática Educativa (Cañadas y Castro, 2008; Bergqvist, 2005; entre otros) que han obtenido resultados que reflejan un limitado desarrollo hacia un pensamiento inductivo en los alumnos. No hay una práctica educativa frecuente "en los cursos examinados", que posibilite el tránsito de lo particular a lo general necesario para la estructuración de un pensamiento matemático.

- En el inciso d. se les solicita encontrar la suma de los primeros *n* términos de la secuencia de números 1, 4, 7, __, 13, __

  Solamente 1 de los 4 profesores intentó buscar una generalidad con casos particulares pero no siguió más procesos necesarios en el desarrollo de un pensamiento inductivo-matemático. La tercera imagen (siguiente página) muestra como el Profesor 2 lleva una exploración para buscar una regularidad con la construcción de casos, la cual se considera una etapa crucial de experimentación al mantenerse en un pensamiento numérico, pero no identifica patrones en las sumas obtenidas o los sumandos encontrados (términos de la progresión aritmética).

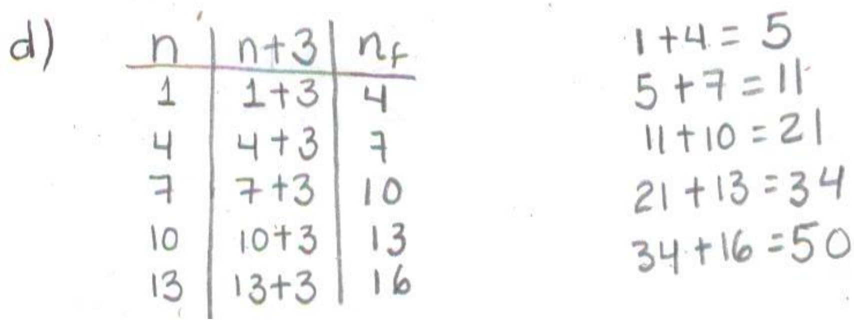
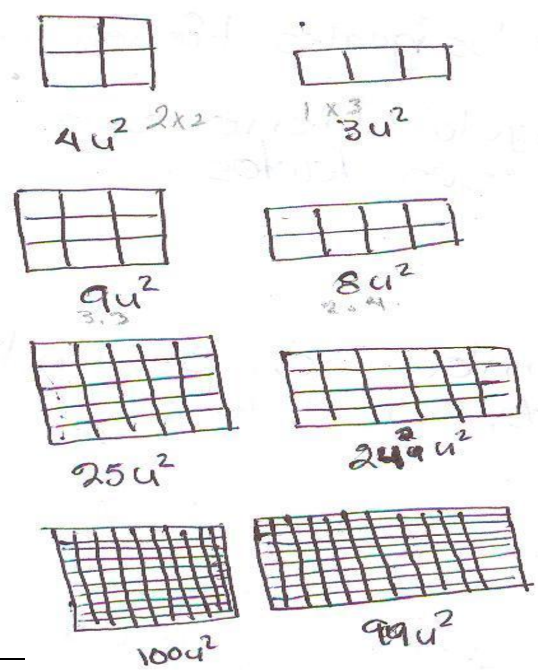


Imagen 3: El Profesor 2 intenta buscar una generalidad pero finalmente solo presenta esta idea

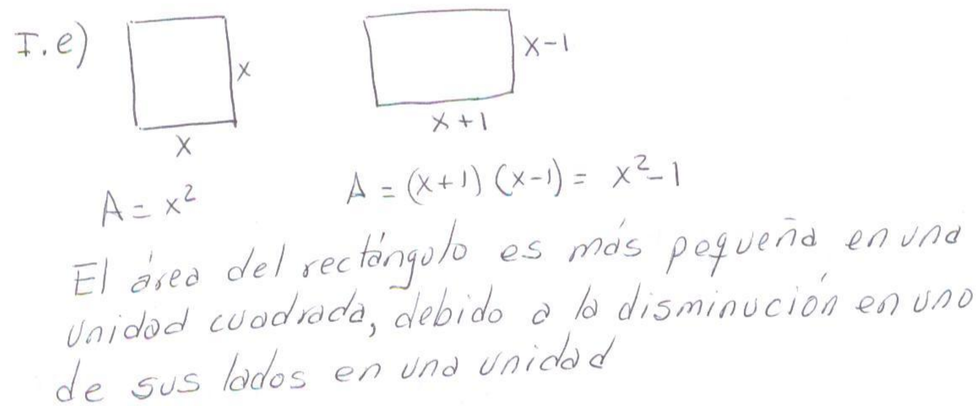
- En el problema de un cuadrado y un rectángulo específico se les pide que comparen sus áreas para ver alguna relación.

Este problema geométrico permitió un acercamiento a una solución del problema debido a la relación encontrada entre su representación gráfica con la forma algebraica, porque la visualización[1] juega papel importante como sostiene Cunnigham citado en Castro y Puig (1997) *aumentando la intuición y a la vez proporciona al sujeto mayor capacidad de entendimiento*. La imagen a continuación exhibe la revisión de casos particulares realizada por el Profesor 1 con la ayuda de la visualización, pero falla en el proceso inductivo para estructurar la conjetura correcta.



[1] Referido al pensamiento visual para describir los aspectos del pensamiento matemático que están basados o se pueden expresar en términos de imágenes mentales. (Castro y Puig, 1997).

Por otro lado, el trabajo realizado por el Profesor 4 muestra que este tipo de exploración geométrica-algebraica presenta una relación estrecha, la cual le permite transitar de un pensamiento geométrico a un pensamiento algebraico para llegar a una solución. Sin embargo, este proceso de abstracción debe ser fomentado en la formación de los estudiantes que permiten cambiar sus pensamientos ingenuos erróneos.



Tránsito de un pensamiento geométrico hacia un pensamiento algebraico presentado por el Profesor 4

- En la última actividad de la primera parte se les pide que usen los productos notables para calcular el producto.

La partición del número decimal permite resolver el problema usando los productos notables (suma de dos cantidades al cuadrado, diferencia de dos cantidades al cuadrado, etc.); sin embargo, este trabajo sólo lo ejecutaron dos de los diagnosticados y el Profesor 3 realizó un cambio de representación a fraccional para aplicar después las operaciones requeridas.

$$\left(1-\frac{3}{100}\right)^2 = 1-\frac{6}{100}+\frac{9}{10^4} = 1-\frac{591}{10^4} = \overbrace{1-0.0591}^{0.9409}$$

La respuesta colocada del Profesor 3 con la ayuda de las fracciones posibilita otra forma de llegar al uso de los productos notables.

Dentro de la primera parte dedicada a las conjeturas se observa que los docentes en su mayor parte no son capaces de justificar sus respuestas, al parecer carecen de un discurso lógico-argumentativo que sirva de explicaciones. Además, se propone a los profesores que construyan conjeturas, pero sólo en la mitad de las actividades llegaron a "respuestas adecuadas".

En general, los profesores sólo llegan a etapas preliminares a la generalización que no posibilitan elaborar conjeturas coherentes (proceso de inducción), ya que no encuentran patrones numéricos, ni geométricos u otros que permitan la estructuración de la misma. Dentro de las prácticas educativas, es fundamental fomentar la construcción de conjeturas que permita estructurar el pensamiento matemático de los estudiantes, lo cual sostiene la NCTM.[2]

5.2. Análisis de los reactivos relacionados a los contraejemplos

En la segunda parte se propone a los profesores que refuten con argumentos a las afirmaciones, las cuales se enlistan a continuación:

a) Todos los polígonos con ángulos iguales tiene lados iguales.

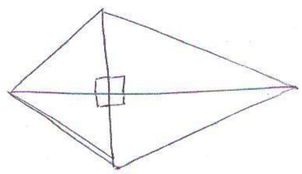
Sólo dos de los profesores lograron el objetivo porque algunos confundieron el propósito del enunciado buscando excepciones a su comprensión. Entonces es necesario entender las afirmaciones para después buscar darle alguna posible solución; y que como sostiene Polya (1965) con sus estrategias propuestas a seguir donde el primer paso es *comprender el problema*, para evitar en cierta forma presentar respuestas sin sentido.

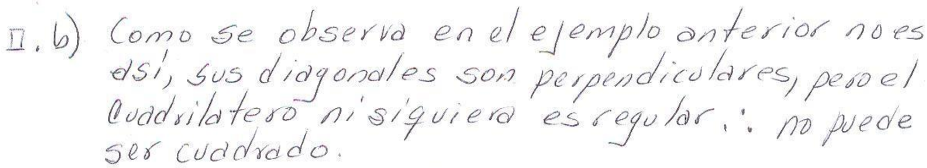
Sin embargo, uno de los dos profesores que refutó el enunciado al mostrar el caso del *rectángulo*, explica las características inherentes de ese cuadrilátero como una figura con ángulos de 90 grados y lados no necesariamente iguales. El otro profesor sólo dibujó un rectángulo pero no estructuró un argumento explicativo que justificará la invalidez de la aseveración.

[2] NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Virginia: Nathional Council of Teachers of Mathematics.

b) Los cuadriláteros cuyas diagonales son perpendiculares entre sí son cuadrados.

En este enunciado la mayoría de los profesores presentaron respuestas enfocándose en figuras geométricas que niegan su validez como es el caso del *rombo*. El Profesor 4 dibujó un polígono en forma de *papalote* que ayuda a refutar la afirmación dada donde se observan algunas de las propiedades del cuadrilátero, las cuales se muestra en la siguiente imagen con su argumentación propuesta. Sin embargo, en la construcción de su contraejemplo, falta una mayor consistencia en la estructuración de sus explicaciones que den pie a la confirmación de su respuesta.



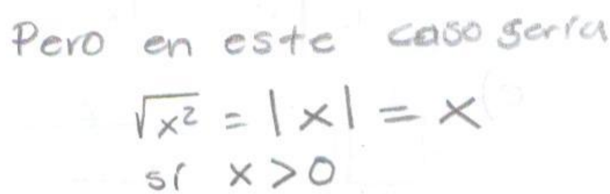


II. b) Como se observa en el ejemplo anterior no es así, sus diagonales son perpendiculares, pero el Cuadrilatero ni siquiera es regular ∴ no puede ser cuadrado.

Se aprecia como el profesor describe su justificación que refuta el enunciado

c) $\sqrt{x^2} = x$

Algunos profesores presentaron casos específicos como cuando $x = -5$ que refutan la proposición ubicándose en un contexto numérico principalmente; pero no expresaron en sus respuestas las argumentaciones necesarias como el simple hecho de decir que: si <u>no</u> se cumple $\sqrt{x^2} = x$ en particular $x = -5$ entonces se puede concluir que tal afirmación es inválida para todo $x \in \mathbb{R}$. Por otro lado, el Profesor 2 mostró donde tenía validez el enunciado, para $x \in \mathbb{R}$ como se aprecia a continuación.



Pero en este caso sería

$$\sqrt{x^2} = |x| = x$$

si $x > 0$

En este caso donde $\sqrt{x^2} = |x|$ que representa la función conocida como *valor absoluto* el Profesor 2 no completó la relación que $\sqrt{x^2} = -x$ si $x < 0$, la cual es la condición donde pierde validez la afirmación $\sqrt{x^2} = x$. Además, se observa que el Profesor 2 muestra una modificación de la "conjetura" propuesta, como menciona Balacheff (1990)[3] sobre la construcción de contraejemplos.

En muchos enunciados es importante observar si existen contextos específicos donde se cumplen esas afirmaciones que posibiliten mostrar su validez, la cual permite entender el significado del objeto matemático. Lo anterior muestra que en ocasiones cuando hay un pobre discurso dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje sobre la compresión del "contexto de una afirmación", imposibilita hacer un análisis crítico de los objetos matemáticos o las definiciones dadas.

d) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

En esta pregunta los profesores presentaron casos específicos donde no se cumple el enunciado, enfocándose principalmente en un pensamiento numérico, dejando por fuera las explicaciones que justifican que con al menos un caso se refuta la validez de $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$. El Profesor 1 presentó el siguiente caso particular pero no ocupa adecuadamente la "negación de la igualdad" $\neq$, al parecer existe cierto "prejuicio" a lo negativo.

$$
\begin{gathered}
(a+b)^2 = a^2 + b^2 = \\
(5+3)^2 = 5^2 + 3^2 \\
8^2 = 25 + 9 \\
64 \neq = 34
\end{gathered}
$$

Dentro de la estructuración de un contraejemplo el uso de la notación *distinto de* "$\neq$" toma un papel importante porque muestra cuando una igualdad pierde su validez, lo cual posibilita a problematizar ¿cuándo no se cumple la relación de equivalencia?

Por otro lado, esta afirmación lo categoriza Rico (1995) como un error que frecuentemente se observa en el aprendizaje del álgebra cuando los estudiantes

[3] Revisar sobre construcción de contraejemplos en la página 30.

trabajan con productos notables; y el empleo de contraejemplos permite entender en parte porque no es adecuada esa respuesta.

e) *Los múltiplos de 2 y de 3 son múltiplos de 12.*

En este enunciado sólo un profesor intentó presentar una respuesta pero no logró estructurar la idea terminando por confundir las características propias de un múltiplo. Entonces entender cuándo un número es múltiplo, es un aspecto necesario para construir un contraejemplo en esta afirmación, el cual debe ser sustentado en parte sobre aspectos de cómo se escriben los múltiplos de un número de 2, 3 y 12. Por lo cual, se puede observar que se les dificultó al menos mostrar casos particulares para refutarán que "*cualquier múltiplo de 2 y de 3 es también múltiplo de 12''* como lo son 6, 18, 30, 42.

f) *La diferencia de los cuadrados de dos enteros positivos consecutivos es siempre un número par.*

La última actividad de la segunda parte presento mayor dificultad, ya que algunos no lograron la interpretación con un lenguaje algebraico correcto. Solamente el Profesor 4 justificó su respuesta construyendo los números consecutivos y la diferencia de cuadrados, lo cual le sirve para realizar una demostración "formal" que refuta la afirmación por medio de un contraejemplo global[4]; y además presentó un caso particular que reafirma en parte su prueba hecha.

2 números consecutivos son

n y $n+1$

la diferencia de los cuadrados es

$(n+1)^2 - n^2$

$\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{n^2} = 2n+1$ el cual es impar siempre

porque al multiplicarlo por 2 lo convierte en par, pero al sumarle 1 lo hace impar

3 y 2

$3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$ - impar

[4] Ver página 32

Con la demostración realizada por el Profesor 4 se muestra que la negación del enunciado dado es siempre válido: *La diferencia de los cuadrados de dos enteros positivos consecutivos es siempre un número impar,* el cual pasa a convertirse en un teorema con todos los procesos lógico-algebraicos expuestos. Sin embargo, estas condiciones *no necesariamente* se cumplen siempre, los cuales posibiliten por medio del contraejemplo la validez de la negación del enunciado. Por ejemplo, *Los múltiplos de 2 y de 3 son múltiplos de 12* su negación que es *Los múltiplos de 2 y de 3 no son múltiplos de 12* no se cumple siempre porque el mismo 12 es un contraejemplo.

5.3. Análisis global

A lo máximo en tres de las construcciones de contraejemplos y sus justificaciones, respecto a las afirmaciones dadas en la segunda parte tiene una estructura lógica adecuada. En general, se observa que algunos profesores carecen de argumentos para explicar sus respuestas, o bien no saben cómo refutar afirmaciones en Matemáticas, o no pueden estructurar un contraejemplo en todos los problemas propuestos apareciendo en forma restringida o superficial, porque en parte desconocen las propiedades invariantes de cada objeto de estudio.

Entonces es importante entender qué es un producto notable o el valor absoluto de un número o las figuras geométricas no es solamente aprenderse de memoria su significado, involucra otros aspectos que una simple definición no lo muestra. En ese sentido, se debe resaltar el hecho de ¿cuándo realmente hay una comprensión de los objetos matemáticos?, el cual en cierta forma elementos como la conjetura y el contraejemplo posibilitan problematizar sobre lo que se cree "saber" y lo que se "desconoce".

Se puede observar que las limitadas argumentaciones de los profesores sobre los reactivos de la prueba diagnóstica se pueden reflejar en sus prácticas educativas, como el caso de un discurso pobre en sus clases debido al desconocimiento o falta de uso de la conjetura y el contraejemplo.

Capítulo VI

Análisis de libros textos de Matemáticas

Al realizar el análisis de textos matemáticos se tomó como muestra libros de Cálculo, los cuales se pueden emplear en niveles educativos superiores; para examinar si en estos textos se usa a la conjetura y el contraejemplo en el desarrollo de un pensamiento matemático avanzado de los estudiantes, similar al que realiza un matemático en su quehacer científico.

Además, con este análisis se observa si en la confección de los textos en mención, se presenta tanto a la conjetura como al contraejemplo para mostrar características relevantes de los objetos de estudio desarrollados en cursos de Cálculo.

Todo el análisis de libros de textos posibilita en parte el estudio mostrado en la metodología basada en la Ingeniería Didáctica con la idea fundamental del descubrimiento matemático.

6.1 Sobre la relación de orden

En el apartado de Arizmendi et al. (1976) se habla sobre la relación de orden se tratan las propiedades inherentes de los números reales, en la misma se presentan demostraciones formales y solamente se muestra un contraejemplo, específicamente el Ejemplo 4.

Como dice a continuación:

$$5 \leq 3. \quad \textit{Esto es falso dado que } 5 > 3 \textit{ y } 5 \neq 3$$

Aquí se presenta la construcción de un contraejemplo relacionado sobre la propiedad de orden establecida en los números reales. Sin embargo, por el contexto donde se trabaja no se dan explicaciones que permite entender otra forma de la invalidez del enunciado. Además, algunas argumentaciones en los libros de Cálculo suelen ser muy breves, dejando por fuera aspectos incompresibles a simple inspección, y menos si los estudiantes carecen una conceptualización matemática que lo sustente. Se observa que los autores no intentan explicar que este es un contraejemplo global que refuta la aseveración.

6.2 Acerca de máximos y mínimos de un conjunto

En el que respecta a lo relacionado sobre máximos y mínimos, en la página 41 de Arizmendi et al. (1976) se presentan ejemplos en un intervalo cerrado o colecciones de números comparables, entre otros donde se observan estos objetos matemáticos.

Además, se presenta el intervalo abierto (0, 1) donde no hay un máximo, y en la respuesta dada sólo se dice que *no existe elemento máximo en ese conjunto*. El autor no intenta mostrar alguna razón que justifique su respuesta, dejando por descubierto la falta de un análisis más profundo sobre ese tema.

En este ejercicio ni siquiera se presentan posibles respuestas o preguntarse: ¿qué es un máximo?, ¿qué es una cota superior?, ¿si el supremo pertenece a (0,1)? ó ¿qué pasa si existe un máximo? Algunas de estas preguntas se pueden entender con la ayuda de contraejemplos llegando a la conclusión que no existe el máximo.

Al suponer que el máximo es 0.999 se puede realizar la siguiente operación

$$\frac{0.999+1}{2} = 0.9995$$

Se tiene que el número 0.9995 es más grande que 0.999 pero menor que 1.
De la misma manera, se obtiene que 0.99975 es más grande que 0.9995 pero menor que 1.

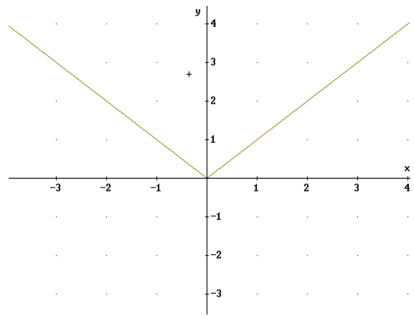
Con este desarrollo en forma iterativa siempre es posible encontrar un número b mayor que a, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < 1$, ya que en los reales se cumple la propiedad: dados dos números reales a, b siempre es posible encontrar el número real $\frac{a+b}{2}$. Con lo cual, se puede concluir que no existe un máximo en (0, 1) porque el conjunto no está acotado superiormente.

6.3 Un contraejemplo muy particular

Un contraejemplo muy particular usado en Arizmendi et al. (1976), así como en Stewart (2001, p.168), entre otros libros es lo que respecta al enunciado *toda función continua en x_0 es derivable en x_0*.

En estos dos textos se presenta la función $f(x) = |x|$
y se pregunta de manera similar si en efecto ¿es derivable en 0?

Esta función llamada *valor absoluto* que se muestra a continuación, se utiliza como un caso que muestra que el enunciado anterior no se cumple. Es decir, puede haber funciones continuas en un punto determinado más no derivables en el mismo.



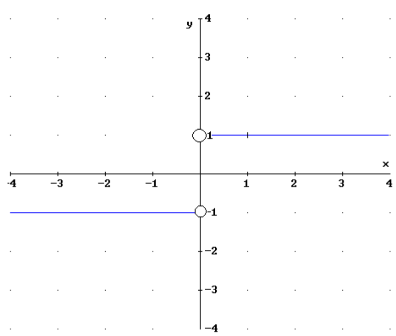
$f(\mathrm{x}) = |x|$

En Stewart (2001) se menciona lo siguiente:

Calculamos los límites por la izquierda y por la derecha por separado….

Puesto que son diferentes, $f'(0)$ *no existe. Por lo tanto,* f *es diferenciable en toda x, excepto en 0.*

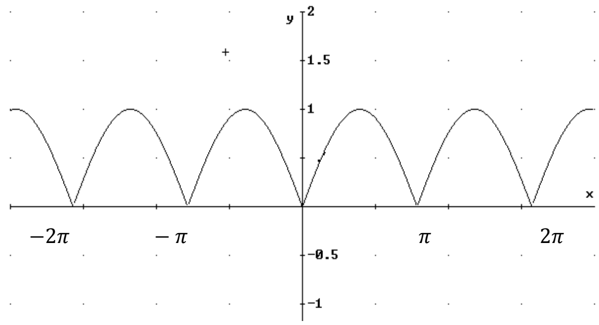
Ambos textos presentan la gráfica de la función derivada (siguiente gráfica), la cual se obtiene una vez realizado los cálculos correspondientes de las derivadas laterales por la izquierda y por la derecha, las cuales sirven para ver que no existe $f'(0)$.



Gráfica de f'

Stewart (2001) muestra que con la ayuda de la gráfica f' se visualiza que no es derivable en $x_0 = 0$. Sin embargo, en el caso de Arizmendi et al. (1976) se deja de una manera implícita a este contraejemplo sobre la relación diferenciabilidad - continuidad.

Se pueden construir otras funciones continuas que muestran más de un punto no diferenciable como es la siguiente con su respectiva gráfica: $f(x) = |senx|$



Gráfica de $f(x) = |senx|$

Entonces $f(x) = \begin{cases} sen(x), & si\ \ 2\pi(k) < x \leq \pi + 2\pi(k) \\ -sen(x), & si\ \ \pi + 2\pi(k) < x \leq 2\pi + 2\pi(k) \end{cases}$; con $k \in \mathbb{Z}$

Para verificar que una función es derivable en un punto x_0 se puede evaluar sus derivadas laterales por la izquierda y por la derecha, las cuales deben coincidir. Al calcular la derivada lateral por la izquierda con $x_0 = \pi$ se tiene:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{sen(\pi+h) - sen(\pi)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{sen(\pi)\cos(h) + \cos(\pi)sen(h) - sen(\pi)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{sen(\pi)(\cos(h)-1) + \cos(\pi)sen(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{sen(\pi)(\cos(h)-1)}{h} + \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos(\pi)sen(h)}{h}$$

$$= sen(\pi)\lim_{h\to 0^-} \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(\pi)\lim_{h\to 0^-} \frac{sen(h)}{h} = sen(\pi)(0) + \cos(\pi)\,(1) = -1$$ [1]

De manera análoga, se calcula la derivada lateral por la derecha para $x_0 = \pi$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{sen(\pi+h) + sen(\pi)}{h} = -\cos(\pi) = 1$$

Así, se tiene que $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}$. Luego, no es posible calcular $f'(\pi)$. En general, se tiene que $f'(k\pi)$ no existe para $k \in \mathbb{Z}$. Como se observa en la gráfica hay un conjunto numerable de puntos no diferenciables, aunque la función es continua en todos sus puntos.

[1] Para los propósitos del trabajo se tomarán como verdaderas las relaciones siguientes: $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$ y $\lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h} = 1$

Una vez analizado el contraejemplo $y = |x|$ en Arizmendi et al. (1976) y Stewart (2001), se presenta la demostración formal del inverso: *Toda función derivable en* x_0 *es continua en* x_0. Pero en ninguno de los libros se muestran casos particulares donde se observa una regularidad, simplemente hacen la demostración. Es decir, no se intenta ver si existe algún proceso que permita generalizar tal aseveración.

6.4 Sobre números

El capítulo titulado Distintas Clases de Números en Spivak (2001) se observa en la página 34 ciertas características de los números reales. En uno de sus párrafos se tiene la siguiente expresión:

> …*No queremos suponer que todas las ecuaciones tienen soluciones, ya que esto es falso (ningún número real x satisface por ejemplo* $x^2 + 1 = 0$. *De hecho este camino de investigación no conduce a nada.*

Sin embargo, no se presentan ejemplos que muestren que en realidad siempre $x^2 > 0$. Para cualquier número real $x \neq 0$. Se evita presentar un contraejemplo adecuado que muestra que la solución de esa ecuación no es un número real, y se percibe una escasa capacidad de argumentar sobre este tema en específico como desarrollo "recordatorio" o aclaratorio del mismo.

6.5 Sobre sucesiones

En lo que respecta a esta sección en Arizmendi et al. (1976), todo se muestra de una manera muy similar. Se presenta un ejemplo y no se intenta buscar alguna regularidad en la sucesión, después se da la "fórmula" que sigue cada sucesión. ¿Dónde queda la acción de conjeturar?

Al parecer es muy sencillo conseguir el enésimo término de la secuencia numérica propuesta pero ¿Qué pasa cuando no se puede encontrar tan "fácilmente" la relación?

Solo afirman lo siguiente en la página 266:

Ciertas sucesiones se definen inductivamente. Esto significa que a partir de un cierto natural, cada término de la sucesión está definido en función de los que anteceden.

Sin embargo, con el trabajo mostrado en parte del marco teórico conceptual, en la prueba diagnóstica como en el análisis de la entrevista se observa que este proceso de inducción no es tan sencillo como lo muestran en el párrafo anterior. En ese sentido, los estudiantes deben ser entrenados en esa dirección posibilitándolos a la estructuración de un pensamiento matemático, es decir, que puedan empezar a generalizar sus desarrollos matemáticos como parte de un descubrimiento científico.

6.6 Sobre funciones

En Spivak (2001, p. 60) se introduce a la definición de función como sigue:

Se presenta una función $f(x)$ para extraer las características relevantes de la misma como se indica a continuación: *Podemos imaginarnos una tabla que reúna toda la información que se pueda desear acerca de la función* $f(x) = x^2$…

De la tabla construida se dice: …*En lugar de una disposición en dos columnas podemos considerar varios pares de números.*

$$(1, 1), (-1, 1), (2, 4) \ldots$$

…*Parece que queramos decir que una función podría ser definida como una colección de pares de números… Si consideramos la colección*

$$f = \{(1, 7), (3, 7), (2, 5), (1, 8), (8, 4)\}$$

…Pero es imposible decir que $f(1) = 7$ *ó* $f(1) = 8$. *En otras palabras, una función no puede definirse como una colección cualquiera de pares de números; debemos excluir la posibilidad que ha surgido en este caso.*

Con todo ese desarrollo se muestra en parte un proceso de conjeturar sobre la definición más adecuada para una función, descartando aspectos que no permiten su construcción haciéndose preguntas como ¿cuándo una colección de pares de números es una función? Sin embargo, se hace hincapié que sólo se muestra el caso discreto para estructurar la definición formal de función, sin decir que es posible usar un caso continuo que aporta otros aspectos difíciles de evidenciar. Además, no se menciona abiertamente que una condición necesaria poder definir *función* es la unicidad de la imagen.

Se puede señalar que esta forma de construcción debe ser rescatada no solo en este objeto de estudio, ya que los textos de Matemáticas con un enfoque tradicional presentan definiciones obviando sus características invariables, que puedan ayudar a estructurar la noción estudiada de otra manera.

6.7 De funciones muy similares

Arizmendi et al. (1976, p. 79) presenta dos funciones muy similares:

$$g(x) = \frac{x^2-4}{x+2} \qquad\qquad h(x) = x - 2$$

Se aclara que no son las mismas funciones ya que sus dominios son distintos, pero dejan de explicar que $g(x)$ sólo es posible evaluarla cuando $x_0 \neq -2$. En general, se presenta un contraejemplo mostrando el "poder" del mismo al refutar afirmaciones que son posibles encontrar como pensamientos ingenuos en el desarrollo de objetos matemáticos; pero se deja de explicar a detalle los propósitos para lo cual el contraejemplo ha sido rescatado en el libro apareciendo de una forma implícita.

En la dirección del problema anterior se muestra los ejemplos 1 y 2 en la página 123 del mismo libro, como sigue:

$$f(t) = \frac{t^2-1}{t-1} \qquad\qquad h(t) = t + 1$$

Se presentan las gráficas de ambas funciones, donde se muestra su diferencia. Pero el propósito principal de estos ejemplos es remarcar que puede haber funciones que no están definidas en un punto, aunque exista el límite en el mismo. En este caso en particular cuando $x_0 = 1$.

$f(t)$ sería un contraejemplo de la afirmación *"toda función $f(x)$ con límite en x_0 es continua en x_0"*. Pero se deja de resaltar el hecho que esta afirmación es el inverso del teorema: *"toda función $f(x)$ continua en x_0 tiene límite en x_0"*. En el desarrollo cursos de las Matemáticas es importante destacar cuando hay implicaciones que se cumplen; y también cuando no las hay, construyendo contraejemplos donde se vea su invalidez.

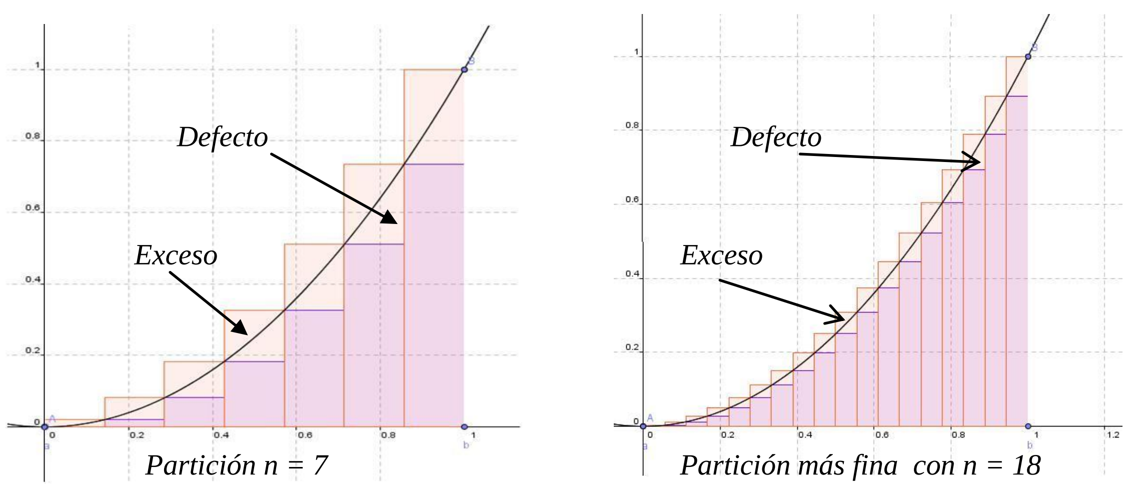
6.8 De la integral definida

A partir del capítulo 10 de Arizmendi et al. (1976) se presenta lo relacionado a Integración. Se muestra una construcción ubicándose primero en el área de círculo con la ayuda de método de exhausión de Arquímedes y Eudoxio, ligándolo después con áreas bajo la curva usando las sumas de Riemann. Sin embargo, no surgen preguntas de cómo seguir de un proceso a otro, todo aparece de forma muy natural, ya que se evita ver cuáles fueron las dudas en el desarrollo conceptual de estos temas.

En lo que respecta a la suma de Riemann se consigue el área que se forma entre la curva de la función $y = x^2$ y el eje x, en la cual se muestra un desarrollo para obtener la integral definida con la ayuda de rectángulos inscritos o circunscritos en el área.

¿Por qué no realizar casos particulares donde se observe que a medida que aumenta la partición en el intervalo $[a, b]$ se acerca más al área?

Se muestran explicaciones sin tomar en cuenta los casos particulares (ver gráficas de casos particulares a continuación), lo cual sirve como proceso de inducción por medio de una partición más "fina", y se observa que los excesos y defectos en la gráfica van "desapareciendo.



Polígonos inscritos y circunscritos en el área que se forma entre x^2 y el eje x

En el libro se presenta un desarrollo algorítmico donde al final se obtiene que: $\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$

Donde los excesos son las estimaciones superiores y los defectos las estimaciones inferiores del área bajo la curva, que se requieren como indispensables para el desarrollo de una partición que tienda al infinito, lo cual describe en parte la sumatoria desarrollada por Riemann.

Sin embargo, en Stewart (2001, pp. 368-369) si se muestra una relación entre las estimaciones, primero cuando la partición es de 4 en el intervalo:

$$0.21875 < A < 0.46875$$

A es el área entre la curva y el eje *x*

Después, presentan cuando la partición es más fina que la anterior, es decir de 8,

$$0.2734375 < A < 0.3984375$$

Stewart (2001) menciona lo siguiente: *Podríamos obtener mejores estimaciones al incrementar el número de franjas*[2]. *En la tabla se muestran los resultados de cálculos semejantes (con una computadora).* Donde se explora cuando la partición es 10, 20, 30, 50, 100, 1000. Presentando al final que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$$

Se muestra en parte la construcción de la sumatoria, donde a medida que va creciendo la partición se va acercando al valor de *A*. Dentro de la construcción de una conjetura es necesario ver elementos como estos, los cuales pueden ser explotados en los cursos de Cálculo para que los alumnos transiten de aspectos informales a formales, comprendiendo en este caso el papel que juega la sumatoria de Riemann.

Aproximaciones con computadora

n	L_n	R_n
10	0.285	0.385
20	0.30875	0.35875
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234	0.3434
100	0.32835	0.33835
1000	0.3328335	0.3338335

L_n: indica las estimaciones inferiores.

R_n: indica las estimaciones superiores.

Más adelante, se muestra que todo ese desarrollo lo llevan a la construcción de la definición de la integral en Stewart (2001, p. 379).

[2] Entiéndase por franjas como la partición del intervalo.

Se puede notar que hay libros como Stewart que introducen las nociones como en este caso la *integral definida* con la ayuda de un pensamiento inductivo, el cual es necesario no dejarlo fuera de las clases porque este permite la estructuración hacia las llamadas sumas de Riemann. Donde se percibe una articulación de saberes (Rondero, 2005) como la *aproximación* cuando se acerca al valor del área bajo la curva con la ayuda de particiones cada vez más finas y la *optimización* cuando se emplea la integración dando como resultado el área bajo la curva. Sin embargo, no se debe desatender a las conjeturas y los contraejemplos en el proceso de aprendizaje mostrando sus fortalezas como una parte especial en el desarrollo de este pensamiento matemático.

6.9 Sobre logaritmos

En Arizmendi et al. (1976, p. 247) se construye una tabla de valores, la cual se obtiene de la definición siguiente:

$$log_{10} x = y, \ si \ 10^y = x$$

Aquí se puede inducir que el dominio de la función es todos los x mayores que 0. Aunque allí simplemente no se explica a detalle el pensamiento inductivo realizado, simplemente con la tabla se induce que cualquier valor que tome x es siempre positivo. No se hace preguntas como ¿qué pasa si x es negativo es posible encontrar un valor para y en la relación $10^y = x$?

Mas adelante, en el libro de texto con respecto a la función logaritmo natural $y = \ln x$ se presenta el *Teorema 8.3.* como sigue:

La función $ln\, x$ es uno a uno de los reales positivos a todo $\mathbb{R}$ es decir, tenemos:

i. *Si $0 < x < y$, entonces $ln\, x < ln\, y$*
ii. *Dado $y \in \mathbb{R}$ existe $x > 0$ tal que $ln\, x = y$*

En la segunda parte de la demostración del *Teorema 8.3.* se trabaja en otro contexto sin mostrar la relación estrecha entre las funciones $\ln x$ y e^x, lo cual de manera análoga a la página 247 se puede encontrar que x debe ser estrictamente mayor que 0. En este proceso demostrativo realizado en el libro, es difícil observar alguna correlación con elementos conceptuales que pueden ser complemento para tal resolución. Es importante remarcar que en los cursos de Cálculo cada vez que sea posible se hagan procesos de inducción, los cuales permitan construir "conjeturas" que más tarde se puedan convertir en teoremas.

6.10 Sobre el límite de una función en un punto

En Spivak (2001) específicamente en la página 115 en el tema abordado sobre límites se presenta la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & si \ \ x < 0 \\ 1, & si \ \ x > 0 \end{cases}$$

Spivak expone lo siguiente:

Si a > 0, entonces f tiende hacia 1 cerca de a; en efecto, para asegurar que $|f(x) - 1| < \varepsilon$ *basta ciertamente exigir que* $|x - a| < a$, *puesto que implica*

$$-a < x - a \quad ó \quad 0 < x$$

de modo que $f(x) = 1$. *Análogamente, si b < 0, entonces f tiende hacia* -1 *cerca de b: para asegurar que* $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$ *basta exigir que* $|x - b| < -b$. *Finalmente, como puede comprobar el lector, f no tiende cerca de 0 a ningún número.*

Se puede notar de inicio que la notación usada puede llegar a confundir porque no hay estructuración apropiada. Además, el autor no le aclara al lector que en efecto que esta función puede servir de contraejemplo si se tiene la idea que cualquiera función tiene siempre limite en un punto x_0, y que más adelante sirve para mostrar también como contraejemplo a la afirmación que cualquiera función es continua en el punto x_0. Parte de lo anterior se deja de manera muy implícita para aquellas personas que empiezan a trabajar por primera vez sobre este tema de límite, en vez decirlo inmediatamente para aclarar posibles pensamientos ingenuos que se construyen en el desarrollo de un pensamiento matemático avanzado.

6.11 Respecto a reglas de derivación

En el capítulo 3 de Stewart (2001) sobre la regla de la potencia, específicamente en las páginas 183 – 184 se muestra los siguientes desarrollos, primero de acuerdo a lo explicado: *…en la sección 2.8 (ejercicios 17 y 18), encontramos que*

$$\boxed{2} \qquad \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Para n = 4, encontramos la derivada de $f(x) = x^4$*, como sigue:*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = \cdots$$

$$= \lim_{h\to 0}(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3$$

Por tanto,

$$\boxed{3} \qquad \frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Si se comparan las ecuaciones … (2) y (3) vemos surgir un modelo. Parece razonable presumir que, cuando n es un entero positivo, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$*. Esto resulta cierto.*

Se puede notar que en este trabajo realizado por el autor hay detrás un desarrollo que se percibe como parte de un pensamiento inductivo, el cual es necesario dentro de la estructuración de conjeturas. Con este ejemplo existe la posibilidad de revisar casos particulares que permitan la construcción de “fórmulas”, lo cual es mejor que darle una “receta preparada” a los estudiantes. Entonces cada vez construya una noción o una fórmula se está posibilitando que se pueda estructurar un pensamiento matemático.

Pero se puede preguntar ¿qué pasa si *n* ya no es un entero? ¿Se puede encontrar un patrón a seguir? ¿Es más difícil encontrar una regularidad o llevará la misma idea que los enteros? Todas estas preguntas y otras pueden surgir dentro del proceso de conjeturar y que deben ser explotadas en el aula por el docente.

6.12 Análisis global

En forma general, la conjetura aparece de una manera muy vaga en los desarrollos de los contenidos mostrados en estos libros de textos, el trabajo con este recurso matemático sólo le interesa la construcción de algunos objetos matemáticos relacionados con conceptos previos del estudiante como el caso de la integral definida, la noción de función, noción de función inversa (Spivak, 2001), la regla de derivación. La mayoría de sus desarrollos se muestran en una sola dirección, imposibilitándolos a conectarlo con los anteriores. El propósito del pensamiento inductivo es construir los conocimientos que generen conjeturas para luego demostrarlas, sin embargo, estos aspectos sobre descubrimiento matemático no emergen de forma espontánea en el aula y menos si los profesores no los utilizan en sus prácticas educativas.

Sobre los contraejemplos se presentan la mayor parte de las veces con pocas justificaciones, donde el lector necesita ser capaz de comprender lo que se desea realzar del objeto matemático estudiado. Por lo general, los contraejemplos intentan mostrar características que no se cumplen en una afirmación; estos libros posibilitan que aquellos que los analizan no se creen ideas equivocadas sobre el alcance de una noción matemática como el caso de pensar que toda relación es una función o toda función continua en x_0 es derivable en x_0, entre otras.

Cuando la conjetura y el contraejemplo se muestran en los libros de textos analizados; generalmente no se indica que se están utilizando los mismos, es decir se presentan de manera implícita como parte de la estructuración de un pensamiento matemático, para lograr el desarrollo y entendimiento de objetos estudiados.

En ese sentido, la mayor parte de las veces los autores muestran sus desarrollos como un proceso acabado sin mencionar los desarrollos que permitieron su descubrimiento matemático, en todo eso surge acciones de conjeturar y refutar necesarias en el procesos de aprendizaje de la ciencia.

Conclusiones

En esta sección del trabajo de investigación se presentan las reflexiones finales que muestran elementos importantes y son agrupadas en los siguientes aspectos:

Sobre el pensamiento ingenuo y el pensamiento matemático

Todos los individuos tienen pensamientos inmediatos que en un momento pueden ser ingenuos, los cuales no se modifican tan fácilmente porque las estructuras conceptuales donde subyacen necesitan ser "sacudidas". Es necesario cambiar esos pensamientos con la ayuda de contraejemplos, que el profesor puede incorporar en el escenario didáctico para dotar a los estudiantes de elementos conceptuales que le permitan reforzar con argumentos coherentes la instalación de un pensamiento matemático.

El contraejemplo es un elemento que se puede usar en el quehacer educativo matemático, permitiendo cambiar los pensamientos ingenuos de los estudiantes, específicamente sus percepciones inadecuadas que causan una limitación para la compresión de un concepto matemático, lo que se convierte en un obstáculo cognitivo que imposibilita avanzar en la estructuración de un pensamiento matemático.

En el proceso investigativo se reafirmó que el desarrollo del pensamiento matemático es uno de los ejes principales al que se requiere poner atención dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas, ya que sin su adecuada instalación los estudiantes difícilmente pueden tener un desempeño matemático competente.

En el aprendizaje de las matemáticas aparecen y se interrelacionan diversos tipos de pensamiento como el numérico, el geométrico, el algebraico y el variacional, entre otros, los cuales permiten que se estructure un pensamiento científico por medio de la articulación de los saberes matemáticos.

El pensamiento matemático no se estructura de manera sencilla en los estudiantes, y como muestra de ello están los bajos resultados en las evaluaciones nacionales e internacionales, que miden las habilidades matemáticas y donde se percibe que los pensamientos ingenuos de los estudiantes son difíciles de erradicar y en muchas ocasiones imposibilitan cambiar sus estructuras conceptuales por otras más amplias.

Sobre la conjetura y el contraejemplo

La Historia de las Matemáticas pone de manifiesto los papeles que juegan tanto la conjetura como el contraejemplo dentro del descubrimiento matemático y se expresan hechos relevantes que contribuyen a la formación de esta Ciencia, específicamente en la estructuración de una entidad con nociones, objetos de estudio y teorías, entre otros elementos propios de la misma.

En el acercamiento presentado por este trabajo de investigación, a la conjetura y al contraejemplo se les considera nociones metamatemáticas, es decir son aquellas que funcionan como organizadoras de otras nociones en Matemáticas lo que a su vez posibilita la reorientación de los cursos hacia el descubrimiento matemático, al tratar de estructurar un pensamiento científico en los estudiantes.

El quehacer científico ha mostrado que los objetos matemáticos no aparecen en forma espontánea, de lo expuesto en el desarrollo de esta investigación la conjetura y el contraejemplo permiten darles forma y sustento, así como su ubicación dentro de la propia Ciencia. Es pues necesario promover una metodología con un enfoque constructivista basada en la estructuración de conjeturas e intentado, cuando fuese necesario, refutarlas con la ayuda de contraejemplos.

El proceso de conjeturar es un aspecto que debe ser tomado en cuenta como parte del pensar matemáticamente, pero éste debe ser fomentado por el profesor dado que el desarrollo de un pensamiento inductivo lleva a la generalización de ideas. La estructuración de una conjetura no es algo fácil de conseguir, por lo cual se requiere que los estudiantes practiquen en esa dirección.

Cuando los estudiantes incorporan en la construcción de sus pensamientos matemáticos a la conjetura y el contraejemplo, su formación puede estar mejor fundamentada para ser críticos, analíticos, deductivos e inductivos, entre otros aspectos, todos ellos son necesarios para la comprensión de las Matemáticas y otras ciencias.

Sobre la prueba diagnóstica y la entrevista

La relación de "distinto de" $(\neq)$, es un signo en Matemáticas que no es usado frecuentemente en su didáctica. En la prueba diagnóstica realizada, no es empleado por los profesores que la realizaron. Esta simbología se debe incluir más en las prácticas educativas para remarcar cuándo no se cumple una identidad o una igualdad y poder así refutar a través de contraejemplos o la elaboración de complementos como puede ser el caso de desigualdades.

En la entrevista realizada a un profesor-investigador, se confirma la importancia de la conjetura y el contraejemplo en los desarrollos de modelos matemáticos, así como de la relevancia en su práctica educativa para la comprensión de los objetos matemáticos estudiados en el aula. Además, revela su interés porque sus alumnos construyan sus conjeturas, pero les muestra contraejemplos para evidenciarles que no se puede generalizar tan fácilmente.

Sobre los libros de textos

Hay una resistencia de los autores de libros y los profesores a incorporar a la conjetura y el contraejemplo, quizás porque no se le da la importancia adecuada en el aprendizaje de las Matemáticas, así como la construcción de los conocimientos matemáticos. Es decir, los objetos matemáticos aparecen en el aula y en los textos como algo dado, y poco se reflexiona acerca de su aparición o de las condiciones que lo propiciaron.

Una creencia matemática es que un teorema se sabe cuándo se ha demostrado. No hay un entendimiento claramente significativo sobre la importancia de los elementos que intervienen en el mismo. Por otra parte, poco se fomenta el proceso de conjeturar, para llevar el análisis a un nivel diferente, mostrando en parte la validez o invalidez del nuevo enunciado propuesto. Los libros presentan el teorema y su demostración, pero muchas veces no se revisan casos particulares ni se observan otros aspectos que pueden surgir al momento de construir una conjetura.

Del análisis de los libros de textos, se desprende que poco aparecen explícitamente las conjeturas y los contraejemplos, es decir, no se considera relevante ocupar estos recursos para reforzar el aprendizaje de los objetos matemáticos, lo cual permite un acercamiento diferente más acorde con las teorías constructivistas, donde en parte este proceso de construcción se ha reiterado como el descubrimiento matemático al que debe hacerse referencia en el aula.

Sobre la formación de profesores

Es recomendable formar a los profesores de Matemáticas acerca de la necesidad de entender cómo se puede hacer la construcción de los objetos matemáticos usando a la conjetura y al contraejemplo, para que posteriormente ellos hagan una transposición didáctica apropiada en sus aulas. Además, los profesores podrían aplicar estos procesos para que los estudiantes estructuren por sí solos un pensamiento matemático.

En el aula de clases tradicional es difícil que el docente indague un enunciado. Todo se da como algo acabado que imposibilita hacer preguntas que hagan reflexionar a los estudiantes cuándo una aseveración es o no cierta. Dando pie a validar o invalidar todas las ideas matemáticas que surjan en el proceso de aprendizaje.

La formación de profesores es algo que no debe dejar de atenderse y siempre se tiene que tomar en cuenta dentro de la Didáctica de las Matemáticas. Por lo cual, hay necesidad de trabajar para incidir en la prácticas de los docentes y poder formarlos en el uso de éstos y otros recursos didácticos que permitan ampliar su discurso argumentativo.

Sobre el descubrimiento matemático

El descubrimiento matemático se ha abordado como una metodología que debe incluirse en las prácticas educativas. Tal descubrimiento presenta una estrecha relación con la Mayéutica, en el sentido del juego que se establece entre el profesor y el estudiante para encontrar la “verdad”. Una verdad en Matemáticas requiere de una constante reevaluación cautelosa de sus fines, que en este caso se pretende cambiar los pensamientos ingenuos por otros mejor desarrollados para estructurar el pensamiento matemático.

El descubrimiento matemático además de usar el método de ensayo- error, requiere de de conjeturas que se adecuen al desarrollo de teórico, para lo cual, el empleo de contraejemplos puede permitir la reformulación de las mismas.

El trabajo muestra en distintos momentos, que el descubrimiento matemático puede emplearse en todos los niveles educativos, sólo es necesario hacer las adecuaciones necesarias para utilizar en forma correcta a la conjetura y al contraejemplo en la construcción de nociones matemáticas en el aula.

En general, es necesario realizar cambios urgentes en las prácticas educativas tradicionales donde se pueda incorporar a la conjetura y al contraejemplo, para que los profesores ayuden a sus estudiantes a cambiar sus pensamientos ingenuos hacia la estructuración de un pensamiento matemático adecuado. Así, los estudiantes pueden tener herramientas para ser en cierta forma competitivos, críticos y analíticos en una sociedad que maneja muchas de sus informaciones en un lenguaje matemático.

Es necesario profundizar en otros trabajos sobre cómo estructurar un pensamiento matemático en diferentes niveles educativos, ya que se requiere que los profesores incorporen en su práctica tales recursos estudiados en el aula.

Referencias bibliográficas

- Arizmendi, H., Carrillo, A. y Lara, M. (1976). *Cálculo.* México: Compañía Editorial Continental, S. A.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gomez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C.V.
- Bachelard, G. (1985). *La formación del espíritu científico*. México: Editorial Siglo XXI.
- Benítez, D. (2006). La utilización de Internet como apoyo en la investigación en matemática educativa. *Memorias del XIV Encuentro de Profesores de Matemáticas*, Área de Matemática Educativa, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 19-36.
- Bergqvist, T. (2005). How students verify conjectures: Teachers` Expectations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8,171-191.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de las Matemáticas. *Investigaciones en Didáctica de la Matemáticas*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? Primera Parte. *Enseñanza de las Matemáticas*, 8(3), 259-267.
- Canché, E. (2007). *Un estudio del currículo matemático en sistemas educativos de nivel medio, una visión retrospectiva.* Tesis de Licenciatura, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán.
- Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J.A., Rodríguez, R.A., Garza, A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.
- Calvo, C. (2001) *Un estudio sobre el papel de definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral.* Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, Universidad Autónoma de Barcelona.
- Cañadas, M. y Castro, E. (2008). Patrones, Generalización y Estrategias Inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el Problema de las Baldosas. *PNA*[1] , 2(3), 137-151.
- Castro, E. y Puig, L. (1997). Representaciones y Modelización. Análisis fenomenológico, en Rico, L. (coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza secundaria*. Barcelona: ICE/Horsori. pp. 61-122.
- Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 11, 19-57.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Editorial Aique.

[1] *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*

- De La Torre, A. (2003). El método socrático y el modelo de van Hiele. *Lecturas Matemáticas*, 24, 99–121. Medellín: Universidad de Antioquia. p. 102
- Delors, J. (1994). *Los cuatro pilares de la educación. La educación encierra un tesoro*. México: Ediciones UNESCO. pp. 91-103
- Gutiérrez, R. (1976). *Historia de las Doctrinas Filosóficas*. México: Editorial Esfinge S.A. de C. V. p. 39
- Harada, E. (2004). La filosofía de la ciencia de Lakatos. Periódico *Humanidades*, UNAM, México, Octubre-Noviembre.
- Knuth, E. y Sutherland, J. (2004). Student understanding of generality. *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Octubre, Toronto, 561-567.
- Larios, V. (2000). *Las Conjeturas en los procesos de Validación Matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática*. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Querétaro, México.
- Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.
- Magee, B. (2000). *Popper.* México: Colofón, S. A.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (2006). *PISA 2006. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos de la OCDE. Informe en Español.* Madrid: Secretaria General Técnica. p. 70
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Virginia: Nathional Council of Teachers of Mathematics.
- Piaget, J. (1981). *Psicología de la Inteligencia.* Buenos Aires: Psique
- Platón. (2003). *Diálogos. Volumen V: Parménides. Teeteto. Sofista. Político.* Madrid: Editorial Gredos.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.
- Pozo, J. (2003). *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Madrid: Ediciones Morata, S. L.
- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L. y Gómez, P. *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Rojano, T. y Butto, C. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, 16(001), 113-118.
- Rondero, C. (2005). Propuesta didáctica para la articulación de saberes matemáticos. En R. Cantoral, y cols. (Eds.), *Investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.* México: Ediciones Díaz de Santos, S. A.
- Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. (2008). Análisis y Clasificación de Errores cometidos por Alumnos de Secundaria en los Procesos de Sustitución Formal, Generalización y Modelización en Álgebra. *PNA*, 2(2), 61-74.

- Saenz, C. (2001). Sobre Conjeturas y Demostraciones en la Enseñanza de las Matemáticas. *Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Septiembre, Almería.
- Santos, L. M. (2007). *La Resolución de Problemas Matemáticos. Fundamentos Cognitivos.* México: Editorial Trillas.
- Sequera, E. (2007). *Creatividad y Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas para la Educación Primaria.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Universidad de Barcelona.
- Spivak, M. (2001). *Cálculo Infinitesimal.* Segunda Edición. Barcelona: Editorial Reverté, S. A.
- Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas.* México: Thomson Learning.
- UAEH [2] (2004). *Rediseño Curricular de la Maestría en Ciencias con Orientación en la Enseñanza de las Matemáticas y cambio de nombre del programa por el de Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica.* pp. 26-27.
- Villareal, M. (2003). Pensamiento matemático, cálculo diferencial y computadoras. *Educación Matemática*, 15 (001), 99-122.

Cibergrafía

- Bowman, B., Donovan, M. y Burns, M. (Eds.) (2000). *Numerical thinking, Eager to learn: Educating our preschoolers.* Washington, DC: National Academy Press. Traducción al español presentado en internet en la dirección electrónica http://normalista.ilce.edu.mx/normalista/r_n_plan_prog/preescolar/4_semestrepreescolar/program/lec2_pen_mat.pdf
- Clay Mathematics Institute. (Mayo, 2000) *The Millennium Problems.* Extraído el 20 de enero de 2009 en la dirección electrónica: http://www.claymath.org/millennium/
- Real Academia Española. *Diccionario de la Real Academia Española.* Disponible en la dirección electrónica http://www.rae.es/rae.html
- Secretaria de Educación de Colombia. (2005). *Pruebas Comprender de Matemáticas. Serie Cuadernos de Evaluación.* Bogotá: Cargraphics S.A. Colocado en la página *http://www.redacademica.edu.co/redacad/ export/ REDACADEMICA/ ddirectivos/ evaluacion/pruebas comprender/.../MATEMATICAS.pdf* Ultima fecha de acceso en la red 14 de enero de 2009
- Thorndike, E. (1911). *Animal intelligence.* New York: Macmillan. Recuperado de la dirección de internet http://psychclassics.asu.edu/Thorndike/Animal/

[2] Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Anexos

Transcripción de la Video-Entrevista realizada al Doctor Carlos Castillo Chávez

Participantes: Dr. Carlos Rondero Guerrero: **R** y Dr. Carlos Castillo Chávez: **C**

Nos encontramos en las instalaciones del Centro de Investigaciones de las Matemáticas y Física con el Dr. Carlos Castillo Chávez…

R: ¿Qué importancia le das a los contraejemplos en la construcción de tu tarea matemática?

C: La utilización de los contraejemplos tiene un aspecto más de formación, en el sentido de que no tiendes a generalizar arbitrariamente ningún tipo de descubrimiento. Sino que tratas de identificar las proposiciones que verdaderas. Al mismo tiempo cuando estás haciendo "cosas científicas", hay muchos factores que no se toman en consideración y muchas veces el estudio es muy restrictivo.

Pero es tu formación en matemática lo que te ayuda a traer rigor en las aplicaciones; la cual es una perspectiva muy diferente que le daría, por ejemplo, un físico o un ingeniero. No quiero decir que pudiéramos llegar a los mismos resultados, pero la formación y el tipo de razonamiento que se hace es muy diferente si eres matemático o si eres físico o si eres ingeniero. La razón tiene que ver es que uno siempre está consciente de que ir de lo particular a lo general tiene un cuidado tremendo. Entonces eso bueno en cierto sentido, pero restrictivo en otro.

R: ¿El modo de trabajar de algunos colegas también de una u otra forma involucra casi inevitablemente el manejo de los contraejemplos?

C: Es fundamental, pero no trato la idea de los contraejemplos específicos. Porque por ejemplo, es común trabajar en sistemas bastante complejos que realmente no se prestan al análisis. Es común para mucha gente que trabaja en matemática aplicada trabajar a través de simulaciones, entonces en otras áreas la tendencia es a tener más fe en las simulaciones. Si eres matemático sabes que no sería imposible que tuvieras viendo un caso específico.

Es interesante tratar también de entender las estructuras de las mismas ecuaciones, que tan robustas pueden ser las ecuaciones por sí mismas en estos casos todo lo consciente que está trabajando un caso tan particular del fenómeno; el cual estamos observando es totalmente no genérico.

Pero esa es la formación del matemático, específicamente en la utilización de contraejemplo con tantas aplicaciones, pero no están muy conscientes del uso de los contraejemplos en las matemáticas: en el análisis o en la topología o el algebra donde lo forman a uno de tal manera que hacer generalizaciones se vuelve un proceso muy delicado.

Entonces la investigación del matemático con formación en matemática en la ciencia es muy diferente a la formación de un físico o un ingeniero. Aunque podemos llegar a las mismas respuestas, pero uno está más consciente de la posibilidad de lo que uno está viendo en una computadora; de lo que uno está haciendo en la simulación, el análisis local puede ser muy particular.

R: ¿Cómo un individuo transita de lo particular a lo general? ¿Es muy complicado? Es un proceso del pensamiento que se va haciendo consciente y de alguna manera u otra se estructura en la mente del individuo para estar muy alerta en ese tránsito.

C: Creo que es útil, pero también es limitante porque por ejemplo: yo puedo estar preocupado si una función es integrable o no lo es, y obviamente hay contraejemplos que lo muestran. Pero puede llegar el momento que puedo estar tan obsesionado con el rigor que limito mucho lo que estoy haciendo; al mismo tiempo puedo estar en otra área y tranquilamente hago suposiciones que probablemente no van a funcionar porque mi entrenamiento es diferente. Entonces el entrenamiento del matemático te obliga a que traiga un cierto nivel de rigor, ese nivel se deriva de algunos contraejemplos espectaculares donde dices ¡*esto no se puede hacer*! Pero al mismo tiempo a veces te limita porque empiezas a preocuparte por muchas cosas, que haces que restringes lo que estás haciendo.

R: ¿Cómo ocupar un contraejemplo en el aula, sabiendo que existe y hay que estar construyéndolo para entender mejor los conceptos de Matemáticas?

C: La idea es ¿quién tiene formación matemática y quién no la tiene? Los matemáticos por tener esa formación ven el mundo de cierta manera. Hay gente como *John von Neumann* que podía pensar como el matemático más riguroso; pero otras veces como un físico haciendo cálculos y estimaciones ¡*eso es raro*! Entonces la idea de entrenar a gente es muy importante porque traes rigor pero al mismo tiempo te permite no solamente generalizar y reconocer generalizaciones; como es el caso del *modelo de Ross* sobre enfermedades transmitiditas por vectores donde se reconoció que esa estructura matemática era mucho más general de la aplicación que se había desarrollado. Además, se podía utilizar el mismo sistema referente para estudiar otro tipo de enfermedades de transmisión como: enfermedades de transmisión sexual, etc.

Entonces esa habilidad que tenemos de distinguir lo general de lo particular, de lo que se puede generalizar y lo que no se puede, y bajo qué condiciones; nos permite entender muchos de los modelos y métodos que utilizamos se puedan transportar para hacer otros problemas. Y no nos sorprende que la misma ecuación aparezca para estudiar cierto tipo de fenómeno y otro totalmente diferente.

R: ¿Qué pasa con la formación del estudiante, cuando no se toman en cuenta ni se hace mención de los contraejemplos?

C: Es una pregunta muy interesante, porque en cierto sentido se queda limitante pero parte del problema de ¿cómo enseñamos lo que parecen contraejemplos? Y en otro sentido a veces no lo son. Ya que muchas veces el contexto cuando estamos dando clases y lo que el estudiante conoce son limitados. Entonces creamos muchos contraejemplos que en otro contexto ya no lo serían; y en otro sentido, a veces hasta sería absoluto. Por ejemplo, el concepto de limite es el más importante en el Cálculo entonces una sucesión convergente es $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ y una sucesión no convergente es $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ porque oscila entre 1 y -1, el cual parece que fuera un contraejemplo en cierto sentido. Pero usar ese como contraejemplo y enfatizar en ese porque el contexto es tan limitante; el cual esencialmente restringe nuestro entendimiento del concepto de límite.

Porque si estamos viendo un proceso dinámico resulta que $(-1)^n$ es una solución periódica que pudiera ser estable. Y si se utiliza otra función como la composición de funciones resulta que tiene dos puntos fijos y que en ese sentido pudiera ser convergente.

Entonces es interesante porque de los contraejemplos que se dan en las clases de Matemáticas, están basados para contradecir ciertos conceptos dentro de cierto contexto. Pero para conceptos simples muchas veces el contraejemplo tiende a limitar el valor que tenemos del mismo. En este caso, el concepto de limite como se enseña dentro del Cálculo es extremadamente restrictivo. Porque muchas de las "cosas" que se estudia como límite en sistemas dinámicos resulta que en el contexto de Cálculo no existiría.

R: Cuestionar los conceptos aunque estemos con ciertas restricciones y que el contraejemplo los pueden hacer pensar en otros aspectos como la definición formal. De entrada no necesariamente los hace pensar en muchos de esos aspectos de restrictividad, si se puede decir así.

C: No, es más útil en unas áreas que conozco que en otras. Por ejemplo, los contraejemplos son muy importantes para entender probabilidad y procesos infinitos. Pero el contexto es muy importante y muchas veces entender ¿qué es un contraejemplo? es una cosa muy diferente; porque es parte de la formación de un matemático cuando el entendimiento se vuelve útil en tomar decisiones de nivel de investigaciones. Pero el hecho de que uno tiene esta formación, siempre está pensando que tan general es lo que estoy haciendo ¡*ese es el contexto*!

R: Pensarías si efectivamente es importante en una clase de matemática que un profesor discuta con sus estudiantes, si a veces le dice a ellos que construyan contraejemplos y apoyándolos en esa dirección

C: En cierto sentido es lo más importante porque te da maneras de decir si realmente estas entendiendo la definición. Ahora esta respuesta la estaba dando en un contexto de matemático aplicado. Como matemático puro, tu tesis doctoral puede ser un contraejemplo ¡*una construcción interesante*! Son contraejemplos muy impresionantes pero una manera de entender un concepto es saber diferenciar las fronteras donde este concepto es válido o no lo es. Pero si no se conocen y hay contraejemplos en el caso de ¿qué es una función integrable?, la visión de lo que es integrable puede ser extremadamente reducido o arbitrariamente equivocado.

R: ¿Haces también intervenir las conjeturas en tu trabajo profesional? ¿Qué tan frecuentemente?

C: Las conjeturas en las Matemáticas Aplicadas sobre todo cuando se quieren hacer trabajos teóricos ya sea físico-teórico o biológico-teórico son más o menos parecidos, y es casi lo más importante del trabajo aplicado.

En pocas palabras, se puede generar hipótesis que no se conocían si voy a utilizar modelos matemáticos y ecuaciones. Estudiar algo para explicar lo que todos ya entendían ¡*no sirve de nada*! Entonces la generación de hipótesis es casi fundamental. Estoy generando hipótesis, identificando conceptos o mecanismos que radicalmente van a cambiar la manera que los científicos o los demás entienden lo que está pasando y ¡*eso es casi fundamental*!

Esa generación requiere de dos procesos: número uno; por lo general, se empieza por una pregunta con una cierta idea de lo que va a pasar, que va a generar un modelo;

luego hace cierto tipo de análisis y tiene que conectarlo con lo que uno esperaba. Es algo sorprendente porque resulta que es no típico o no genérico o es totalmente diferente o no es importante; ya que se esperaba otra cosa entonces generas una hipótesis. Entonces lo que el modelo demuestra que bajo ciertas condiciones lo que estoy viendo no es posible. No quiere decir que lo que estoy viendo como modelo es imposible; es decir, hay varias posibles explicaciones o alternativas. Ahora estoy en el lado hipotético para lo que yo pensaba y mi modelo pensaba usar una hipótesis diferente; tengo que diseñar experimentos o estudios que me permiten diferenciar si lo que la gente pensaba es cierto o lo que genera mi modelo o las restricciones que tengo son mas posibles. Ese es el juego de la ciencia teórica.

R: ¿Una conjetura puede llegar a romper un paradigma establecido?

C: Constantemente. Hoy hable del VIH y los modelos del VIH ***(explicaciones presentadas en el Seminario de Matemática Aplicada)*** que tratan de explicar porque hay tanta diversidad y a veces hay gente sin VIH. Todos eran una serie de modelos matemáticos muy complicados como las teorías de superinfección entonces generamos sistemas dinámicos; y la explicación más sencilla es estudios de procesos. Así es la historia de la ciencia.

Cuando *Darwin* introdujo el concepto de evolución a través de la selección natural, no lo probó pero tenía evidencia. Lo que hizo fue que su argumento era tan lógico, poderoso e importante que en aquella época había cientos de teorías de proceso de evolución. El puro valor lógico y congruente de su exposición inmediatamente destruyó todas las explicaciones anteriores *¡sin tener evidencia de eso!* Después la gente ha ido tratando de buscar para ver si ese modelo es el más efectivo para explicar la teoría de la evolución.

R: ¿Qué elementos le permite elaborar una conjetura a un científico con un sustento y un potencial de desarrollo?

C: Lo que es muy útil es no tratar de decir a los científicos que impongan a los matemáticos que construyan un sistema matemático que sea tan complejo como el que tiene el cerebro *¡no se te olvide poner esto o aquello! ¡Eso no sirve!* La idea de las Matemáticas es más bien simplicidad ¿Cómo puedo construir un modelo que tiene lo mínimo necesario pero no menos? y ¿qué tipo de conjeturas puedo generar con este modelo? Entonces es un juego totalmente teórico donde uno trata de utilizar la sencillez y la calidad de la Matemática, *¡su simplicidad!* Construir un modelo que pueda contestar una pregunta y no que pueda contestar todas las preguntas. *¡Eso es la clave!*

Generalmente, en los libros de Matemáticas ese no es el mecanismo que se sigue se empieza por lo general. Pero nunca se ve la ciencia como función, no se quiere entender *¿por qué pasa esto?* Voy a construir un modelo para contestar esta pregunta y de allí puedo decidir si se generan conjeturas basadas en ella. Así es como la ciencia avanza, y puedo crear estructuras matemáticas que se pueden generalizar y entender.

R: ¿Los autores reconocidos como clásicos del Cálculo: Newton y Leibniz habrán estructurado cada uno por su cuenta sus conjeturas?

C: Sus visiones obviamente son totalmente diferentes. La visión de *Leibniz* del mundo es que estaba formado por partículas, la cual es diferente a la de *Newton*. Históricamente, la intimidad que tenía Newton con la Física ha sido de lo más extraordinario en el mundo; y Leibniz su parte filosófica, religiosa y geométrica fue diferente, lo cual tiene que ver mucho con eso.

R: ¿Cuándo alguien elabora una conjetura y la va desarrollando, en qué momento la abandona o sigue empujando su desarrollo? *¡Ese rompimiento resulta interesante!* Construyo, amplio y estructuro la conjetura; pero puede llegar un momento en que tengo que abandonarla y creo otra.

C: Desde el punto de vista de la matemática si es una conjetura importante se vuelve trascendental como el último teorema de Fermat: que generó más matemática por cientos de años. Pero en la ciencia eso es un poco diferente. Por ejemplo, hay gente que tiene sistema dinámico y sobre método de bifurcación para decir porque tenemos cinco dedos y no cuatro entonces se tiene que crear modelos matemáticos, *¡hacer suposiciones!*

Por ejemplo, muchos experimentos tienden a estudiar lo que llaman los "*monstruos*" porque hay ocasiones que alguien nace con deformidades *¡cuatro dedos!* Entonces se quiere utilizar los sistemas para tratar de entender porque la norma es un total de cinco dedos. Pero puede uno generar muchas posibilidades.

Entonces llega el momento en que generar conjeturas tras conjetura para explicar lo mismo ya no funcionan. Cambias de nivel y te preguntas de todas estas conjeturas ¿cuáles son las más posibles? *¡Aunque todas expliquen lo mismo en términos científicos!* ¿Cuáles podemos desechar y con cuáles seguimos? ¿Sobre cuáles construimos y con cuáles no construimos?

R: Por supuesto allí tiene que ver evidencias que se llegan a dar en una dirección o en otra.

Muchos de los teóricos tenían ese problema. *¡Propongo que esto se debe a eso!* Pero si la gente va a hacer experimentos, convenzo a los científicos de lo que es importante.

Puedo generar modelos matemáticos que generen muchas hipótesis pero si no están los mecanismos apropiados para eso, la gente puede decir ¡pues es interesante, explica lo que está pasando, pero realmente no sirve para explorar a otro nivel!

R: ¿Qué pasa con la aplicación enfocada al proceso de aprendizaje de las matemáticas en el caso de las conjeturas?

C: La conjetura generalmente la generas con una estructura básica. El contraejemplo pudiera ser por ejemplo, la situación donde la conjetura está basada en modelos que no son genéricos porque estas llegando a ciertas conclusiones cuando resulta que el modelo es no estructuralmente estable, y cualquier variación en su estructura va a dar un resultado totalmente diferente.

Entonces entender la estabilidad estructural de los modelos es muy importante porque en las ciencias biológicas o las sociales *¡no están las ecuaciones de Newton*! *¡No están las ecuaciones de esto!* Eso depende de que tan robusto sea lo que se está haciendo, entonces el entendimiento de los contraejemplos es muy importante. Quiere uno construir modelos y situaciones robustas porque no se puede tener fe en lo que se está haciendo.

C: Si pensamos nuevamente en un curso de Cálculo con estudiantes una Licenciatura. ¿Qué hacemos para que ellos se acostumbren a crear y estructurar conjeturas? Este es un camino con un pensamiento un poco más libre o menos restrictivo, de lo único que piensa el profesor o te dicen los libros. *¡Salirse un poco de lo habitual!*

R: El problema es que todo está muy digerido y ordenado, entonces la idea es de cubrir una de las cosas. Lo que haría es eliminar ciertos tópicos que se cubre y enfocarnos más en que los estudiantes piensen; por ejemplo, muchos temas que se enseñan en el Cálculo se pueden hacer con Maple. Entonces la pregunta es: ¿para qué aprender tantos métodos de integración cuando la primera función que quieres integrar, resulta de una aplicación que no la puedes integrar. Con lo cual, se tiene que aprender Métodos Numéricos.

Otra cosa es la secuencia de las clases; por decir, se tiene que empezar con los procesos de límites más sencillos a los más avanzados. *¡Eso es aburrido y artificial!*

Entonces, porque no empezar con límites que aparecen en situaciones más reales. Por ejemplo, cuando enseño Ecuaciones Diferenciales con el libro de Bolzer o Preemann empiezo con el último capítulo, de allí me voy con modelos no lineales y enseño como construir todo eso. Después les enseño que lo tienen que linealizar y resolverlo pero tiene que encontrar la exponencial *¡tienes que entender la exponencial!* Luego me voy al capítulo siete para ver sistemas porque veo sencillo. Porque si nunca ven el último capítulo entonces no se dan cuenta porque quieres estudiar la exponencial. De otra manera, estas construyendo y construyendo animación totalmente, y no sabes ¿para qué quieres eso?

R: Sólo la parte algorítmica. Es decir, unas con parte diferencial lineal con tales condiciones, otras no lineales bajo ciertas condiciones; sólo las resuelvo y ya.

C: Por ejemplo, cuando diseño el curso de Biología Matemática utilizo modelos no estructurales porque si empiezo con la ecuación física *!todo eso me aburre!*

Empiezo con modelos estructurales porque es importante para clasificar las poblaciones para entender esa situación. Luego los casos especiales como: ¿qué pasa si las tasas de mortalidad y fertilidad fueran independientes de la edad? Entonces operas con el *modelo malthusiano.*

Pero cuando estas estudiando modelos más sencillos en general lo que es importante van a ser otros modelos porque estoy interesado por ejemplo, en estudiar el impacto de políticas de vacunación y la edad de cuándo es importante que los vacunen.

Mientras estudias vacunación en los modelos más simples, la gente dice: porque tiene sentido esto, vacunas a los de 80 años y a los de 70 años al mismo tiempo contra el sarampión. *¡Pues no tiene sentido!*

R: ¿Cuándo trabajas con los estudiantes los dejas sueltos con sus conjeturas? ¿Lo que quieran hacer?

C: Me gusta que los estudiantes creen su propio programa de investigación. Pero muchos profesores no quieren eso porque están creando competidores. Lo que me interesa es crear gente independiente por varias razones. Algunos serán académicos, otros se irán a la industria; pero el hecho de ser independientes es que ellos mismos puedan seleccionar sus problemas y buscar que tipo de matemática necesitan. Les da un entrenamiento increíble si van a trabajar en la industria: si tiene que resolver problemas o se a les da una gran flexibilidad y los capacita para comunicarse con gente de otras especialidades, que es algo que falla radicalmente dentro de los matemáticos. No podemos comunicarnos con gente de otras ciencias y viceversa. Entonces tenemos estudiantes que se vuelven autónomos y puede desarrollar lo que ellos quieren.

Prueba Diagnóstica

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Área Académica de Matemáticas y Física

Nombre: ______________________________

Imparte clase en: _______________________ Años de Servicio: _______

Secundaria ◯ Bachillerato ◯ Licenciatura ◯

Asignaturas que imparte: ____

La información proporcionada en este experimento se utilizará en un trabajo de investigación; por lo cual valoramos sus respuestas. Lea cuidadosamente los enunciados.

I. Conjetura. *(Una conjetura es una afirmación que parece razonable, la cual se forma por indicios y observaciones que se obtienen en la búsqueda de regularidades).*

Conjeture sobre cada uno de los siguientes enunciados. Argumente cada una de sus respuestas.

a) Se tiene la siguiente sucesión de números 1, 4, 7, ____, 13, ____
   ¿Cómo encuentra los números faltantes en los espacios indicados?
b) Una vez encontrada los números indicados del inciso anterior construya una secuencia con esa relación donde el primer número sea 4.
c) Encuentre el n-ésimo termino de la secuencia del inciso a.
d) Halle la suma de los primeros n términos de la secuencia del inciso a.
e) Compare el área de un cuadrado y el área de un rectángulo que se obtiene del mismo cuadrado pero disminuido en una unidad de un lado y aumentado en una unidad en el otro.
f) Usando productos notables, calcule $(0.97)^2$

II. Construya contraejemplos. *(Un contraejemplo es un ejemplo que no cumple la validez de un enunciado)*

Encuentre un contraejemplo que refute la validez de cada una de las siguientes afirmaciones. Argumente cada una de sus respuestas.

a) Todos los polígonos con ángulos iguales tiene lados iguales.
b) Los cuadriláteros cuyas diagonales son perpendiculares entre sí son cuadrados.
c) $\sqrt{x^2} = x$
d) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
e) Los múltiplos de 2 y de 3 son múltiplos de 12.
f) La diferencia de los cuadrados de dos enteros consecutivos es siempre un número par.

Respuestas dadas por el Profesor 1

1 a) 1, 4, 7, 10, 13, 16

$\underbrace{1,\ 4}_{3},\ \underbrace{4,\ 7}_{3},\ \underbrace{7,\ 10}_{3}$

Conjetura: la separación entre los números es de 3 unidades,

1 b) 4, 7, 10, 13, 16

Si 1 es el primer número y 4 el 2do con una diferencia de 3 unidades, ahora el primer número será el 4 por lo tanto la secuencia será como ya se indico

1 c) n-ésimo termino del inciso a

n
$1 = 2(1)+1 = 2+1 = 3$
$2 = 2n+1 = 2(2)-1$
$3 = 2(3)+1 = 5$

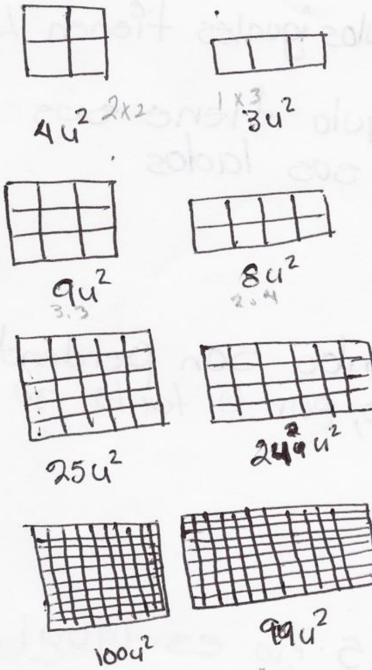
Si
$n=1 \quad 3n-2 = 3(1)-2 = 1$
$n=2 \quad 3(2)-2 = 4$
$n=3 \quad 3(3)-2 = 7$
$n=4 \quad 3(4)-2 = 10$
$n=5 \quad 3(5)-2 = 13$
$\vdots \quad 3(6)-2 = 16$

El n-ésimo número se puede ~~representar~~ calcular con:

$$3n-2$$

1 d) Hallé la suma n terminos.
De acuerdo un análisis no existe alguna forma de sumarlo pues no hay relación entre la suma de n-ésimo números

1e)



→ El área del cuadrado siempre sera una unidad cuadrada menos que el rectangulo

→ Los resultado o relaciones

4	3
9	8
16	15
25	24
⋮	
100	99

Por pares es decir:

4 y 3, 9 y 8, 16, 15 siempre es un par y un impar, además que siempre existen como factores el 2, y el 3 en cada área encontrada en las relaciones.

1 f) $(0.97)^2 = (0.9)^2$

$= (0.9 + 0.07)^2 = (0.9)^2 + 2(0.9)(0.07) + (0.07)^2$

$= 0.81 + 0.126 + 0.0049 = \underline{0.9409}$

Se utiliza el binomio al cuadrado: si la cantidad es 0.97 se puede separar como

$0.9 + 0.07 = 0.97$

2a) Todos los polígonos con ángulos iguales tienen Lados iguales

No es cierto; un rectángulo tiene sus ángulos iguales pero no sus lados

2b) Las diagonales de un rombo son perpendiculares y no es un cuadrado, por lo tanto no se cumple

2c) $\sqrt{x^2} = x$

$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ y 5 no es igual a -5

si $x = -5$

2d) $(a+b)^2 = a^2+b^2 =$

$(5+3)^2 = 5^2+3^2$

$8^2 = 25+9$

$64 \neq 34$

2e) 2 y 3 → 12

Respuestas dadas por el Profesor 2

I.- a) 1, 4, 7, 10, 13, 16 ①

Sumando $1+3=4$, $4+3=7$, $7+3=10$, $10+3=13$, $13+3=16$

b) $4+3=7$, $7+3=10$, $10+3=13$, $13+3=16$, $16+3=19$

Queda de la siguiente forma 7, 10, 13, 16, 19

c) n

$n+3$

d)

n	$n+3$	n_f
1	1+3	4
4	4+3	7
7	7+3	10
10	10+3	13
13	13+3	16

$1+4=5$

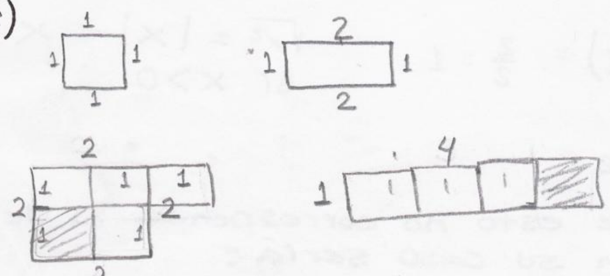
$5+7=11$

$11+10=21$

$21+13=34$

$34+16=50$

e)



Si fuese de esta forma no tendrían la misma área, porque formaríamos el rectángulo, pero sobraría el cuadro que no esta seleccionado.

Para tener la misma area él rectángulo necesitamos que aumente en dos unidades.

f)

$$\begin{array}{r} 0.97 \\ *\ 0.97 \\ \hline 0679 \\ 0873 \\ \hline 0.9409 \end{array}$$

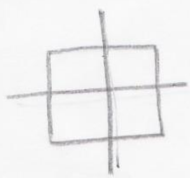
$x^2 - 0.9409$

$(x-0.97)(x+0.97)$

II a).- Sí hablamos de polígonos regulares, no siempre tienen lados iguales, lo que si tienen son angulos iguales de 90°

Si es un poligono irregular sabemos que la suma de sus angulos internos suman 90°

b)  Las diagonales son las que estan en el cuadrado no son perpendiculares lo que aquí formo son cuatro triángulos equilateros dentro del cuadrado.

 Estas son lineas perpendiculares al cuadrado y aque si formo 4 cuadrados.

c) $\sqrt{x^2} = x$

$(x^2)^{\frac{1}{2}} = x \quad 2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1$

Pero en este caso sería

$\sqrt{x^2} = |x| = x$

si $x > 0$

d) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

Me parece que esto no corresponde al desarrollo del binomio en su caso sería:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

e)

12	2
6	2
3	3
1	

f)

Respuestas dadas por el Profesor 3

I.

a) Sumando 3, es decir es $1+3=4$

$4+3=7$

$\vdots$

b)

4, 7, 10, ...

c)

$1+3=4$

$\vdots$

$n+3$

1	$n=1$
$1+3$	$n=2$
$(1+3)+3$	$n=3$
$[(1+3)+3]+3$	$n=4$

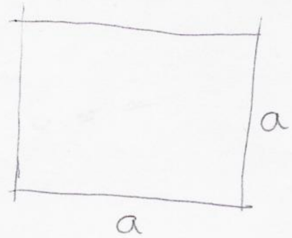
$\boxed{3(n-1)-1}$

d)

$$\cancel{n+3\frac{(n^2-n+2)}{2} = n+3\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$$

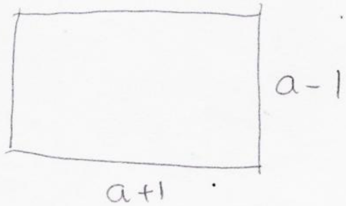
$$\boxed{n+\frac{3(n^2-n)}{2}}$$

e)



$\Delta = a^2$

Es menor en una unidad

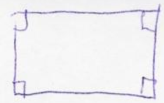


$\Delta = (a-1)(a+1) = a^2-1$

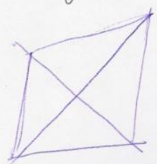
f) $\left(\frac{9}{10}+\frac{7}{100}\right)^2$ ó $\left(1-\frac{3}{100}\right)^2 = 1-\frac{6}{100}+\frac{9}{10^4} = 1-\frac{591}{10^4} = \overbrace{1-0.0591}^{0.9409}$

II.

a) Contraejemplo: el rectangulo



b) " : ~~El rombo~~, el paralelogramo



c)

Si $x = -5$

$x^2 = 25$

$\sqrt{25} = 5 \neq -5$

d)

$(5+1)^2 = 36$

pero

$(5)^2 + 1^2 = 26$

$\left.\right\} (a+b)^2 \neq a^2 + b^2$

e)

Sea $a = 2n$

$b = 2n+1$

$(2n)^2 - (2n+1)^2$

$(2n+2n+1)(2n-2n-1)$

$\underbrace{(4n+1)}_{\text{número impar}}(-1)$

Respuestas dadas por el Profesor 4

Respuestas

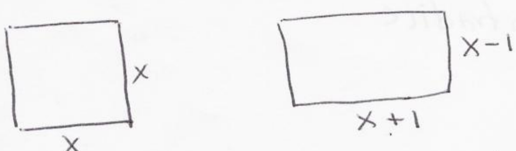
I. a) la distancia entre un número y el siguiente es 3, por lo tanto, solo se va sumando 3.

I. b) 4, 7, 10, 13,

I. c) término n-ésimo = n y n = (n-1) + 3,
también puede expresarse como
$n = 1 + n(3)$

1° término = $1 + 1(3) = 4$
2° " = $1 + 2(3) = 7$
3° " = $1 + 3(3) = 10$
4° " = $1 + 4(3) = 13$

I. e)



$A = x^2$ $\qquad$ $A = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$

El área del rectángulo es más pequeña en una unidad cuadrada, debido a la disminución en uno de sus lados en una unidad

I. f) $(0.97)^2 = .9409$

usando productos notables

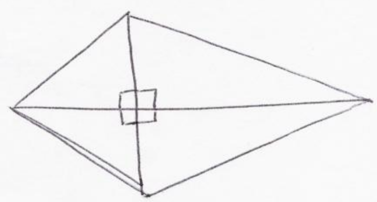
$(.9+.07)^2 = (.9)^2 + 2(.9)(.07) + (.07)^2$

$= .81 + .126 + .0049 = .9409$

$(1-.03)^2 = 1^2 - 2(1)(.03) + (.03)^2$

$1 - .06 + .0009 = .9409$

II. a) Los ángulos centrales de un polígono pueden ser iguales, sin embargo éste, no necesariamente es regular por ejemplo



II. b) Como se observa en el ejemplo anterior no es así, sus diagonales son perpendiculares, pero el Cuadrilatero ni siquiera es regular ∴ no puede ser cuadrado.

II. c) $\sqrt{(-x)^2} = -x$ — lo contradice

$(-x)^2 = x^2$

$\sqrt{x^2} = x$

II. d) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

Si

$a = 3$

$b = 2$

entonces $(3+2)^2 = 3^2 + 2^2$ ∴ No es correcto

$5^2 = 9 + 4$

$25 = 13$

II . e) múltiplo de 2 es 4, 6, 8, ...
multiplo de 3 es 6, 9, 12
multiplo de 12 es 24, 36, 48

existen múltiplos de 2 y 3 que son múltiplos de 12, porque 2 y 3 son números más pequeños que 12 y ∴ no pueden ser multiplos de un número más grande.

II. f) 2 números consecutivos son
n y $n+1$
la diferencia de los cuadrados es
$(n+1)^2 - n^2$
$\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{n^2} = 2n+1$ el cual es impar siempre
porque al multiplicarlo por 2 lo convierte en par, pero al sumarle 1 lo hace impar

3 y 2
$3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$ – impar