



---

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO  
DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**Control Basado en Energía y Estabilización para Sistemas Subactuados**

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

P R E S E N T A .  
JESÚS PATRICIO ORDAZ OLIVER

ASESOR DE TESIS  
DR. VIRGILIO LÓPEZ MORALES

# Agradecimientos

*Quiero antes que todo felicitar a todos aquellos amigos, compañeros y catedráticos que lograron aguantarme durante estos dos años de estudio de mi maestría.*

*Esté trabajo de tesis no se habría logrado sin el apoyo incondicional de mi familia, por lo cual se lo dedico de corazón a mis padres José Guadalupe y María Guadalupe, a mis hermanos Mario, Sandra, Xochitl y Guadalupe, por su amor y comprensión que me han dado durante toda mi existencia, ya que gracias a ellos he logrado muchos de mis propósitos y metas.*

*Quiero agradecer de manera muy especial a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, ya que en ella he realizado dos de los proyectos personales más importantes de mi vida los cuales son la realización de mis estudios profesionales de licenciatura y de posgrado. Así como también al CONACYT por el apoyo que me brindo durante mi posgrado.*

*También quiero agradecer a las personas que me ayudaron en el desarrollo de este trabajo, especialmente a Dr. Virgilio López Morales que me apoyo corrigiendo, revisando y comentando, mi investigación, así finalmente me permitió culminar este trabajo tesis, por brindándome apoyo, su ayuda lógica o teórica y su amistad, también quiero agradecer a Dr. Omar Arturo Domínguez Ramírez por brindándome apoyo, y amistad durante mi estancia en esta institución.*

*De manera especial quiero agradecer a todas las personas que de alguna manera han colaborado en mi formación tanto profesional como personal. Por lo tanto, no puedo dejar de agradecer a todas las personas que, con su experiencia, capacidad, me han enseñado a salir adelante en este complejo mundo, especialmente a todos mis amigos.*



# Notación

## Lista de símbolos matemáticos

En este texto se ocuparán los siguientes símbolos matemáticos.

$\mathbb{R}$	Espacio de los reales.
$\mathbb{R}^n$	Espacio Lineal de vectores de dimensión $n$ .
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Matriz con $n$ filas y $m$ columnas y elementos de $\mathbb{R}$ .
$I_n$	Matriz identidad de dimensión $n$ .
$N$	Numeros naturales.
$\mathbb{R}^+$	Campo de los reales positivos.
$\rightarrow$	Mapeo del dominio sobre el rango. También <i>Tiende a</i> .
$\mapsto$	Mapeo de dos elementos sobre la imagen.
$\ x\ $	Norma Euclideana de $x \in \mathbb{R}^n$ .
$\ A\ $	Con $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ : Se induce la norma 2.
$\forall$	Para todo.
$\exists$	Existe.
$\in$	Perteneciente a.
$\Rightarrow$	Implica.
$\Leftrightarrow$	Equivalente a, o sí y solo sí.
$\subset$	Subconjunto.
$C^\infty$	Función suave.
$q$	Vector generalizado de posición.
$\dot{q}$	Vector generalizado de velocidad $\left(\frac{dq}{dt}\right)$ .
$\ddot{q}$	Vector generalizado de aceleración $\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right)$ .

$u$	Vector generalizado de control o entradas de control.
$(\cdot)^{-1}$	Operador de función inversa.
$D(q)$	Matriz de inercia.
$C(q, \dot{q})$	Matriz de Coriolis y de fuerzas centrífugas.
$g(q)$	Matriz de fuerza gravitacional.
$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}$	Fricción.
$F(\dot{q})$	Disipación de Rayleigh.
$\tau$	Matriz de fuerzas de entrada.
$\mathcal{L}_{top}$	Energía en el punto de equilibrio superior.
$\mathcal{L}_{mid1}$	Energía en el punto de equilibrio medio 1.
$\mathcal{L}_{bot}$	Energía en el punto de equilibrio inferior.
$\mathcal{L}_{mid2}$	Energía en el punto de equilibrio medio 2.

## Lista de acrónimos

<b>nGdL</b>	n grados de libertad.
<b>gr</b>	grado relativo.
<b>EL</b>	Euler-Lagrange.
<b>LQR</b>	Regulador lineal cuadrático (Linear Quadratic Regulator).

## Lista de locuciones latinas

i.e	id est, <i>esto es</i> .
e.g.	exempli, <i>gratia por ejemplo</i> .

# Resumen

El enfoque en este proyecto de tesis es el diseño del control y la estabilización de sistemas electromecánicos subactuados de dos grados de libertad. Los sistemas subactuados tienen un menor número de entradas de control que de variables configuracionales. El control de sistemas subactuados es un campo de gran interés por su extensa aplicación, unos ejemplos, son los manipuladores, los vehículos marinos y los aeroespaciales. Otros ejemplos especiales de sistemas subactuados también incluyen al robot con brazo flexible, robots móviles, robots caminantes, robots con plataforma móvil, autos, robots tipo serpiente, robots gimnastas, aeronaves, naves espaciales, helicópteros, y los satélites. Basados en trabajos recientes, se puede asegurar que el control general de sistemas subactuados es todavía un problema abierto.

Algunos mecanismos de la vida real poseen propiedades de simetría cinética (i.e. *su energía cinética no depende de un conjunto de variables externas*) las cuales pueden ser aprovechadas para un enfoque de pasividad y energía de sistemas de control del tipo Euler-Lagrange como se presenta en este trabajo de tesis. En este trabajo de investigación, se muestra una alternativa para el control de sistemas subactuados, sobre la parte dinámica correspondiente al grado de libertad pasivo del sistema que puede ser controlado bajo ciertas condiciones las cuales están asociadas a la teoría de estabilidad de Lyapunov.

La necesidad del desarrollo de técnicas de control para sistemas subactuados surge de la gran variedad de sistemas prácticos existentes, los cuales involucran no solo su estabilización, sino también la solución de problemas de regulación y balanceo.

Los sistemas subactuados no solo son aquellos que se diseñan expresamente para su análisis, sino que también pueden presentarse debido a fallas de algún actuador. Lo anterior representa un gran riesgo en sistemas de control, y una de las soluciones posibles es la de equipar al sistema con redundancia en los actuadores, pero por cuestiones económicas no siempre es posible realizarlo y en consecuencia nace la idea del análisis del control y regulación de sistemas subactuados.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Notación</b>	<b>III</b>
Lista de Símbolos matemáticos . . . . .	III
Lista de Acrónimos . . . . .	IV
Lista de locuciones latinas . . . . .	IV
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Índice General</b>	<b>IX</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XI</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>XIV</b>
<b>1. Introducción.</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema. . . . .	1
1.2. Objetivos. . . . .	2
1.2.1. Objetivo general. . . . .	2
1.2.2. Objetivos específicos. . . . .	2
1.3. Justificación. . . . .	2
1.4. Estado del arte. . . . .	2
1.5. Organización de la tesis. . . . .	4
<b>2. Teoría de sistemas no lineales.</b>	<b>5</b>
2.1. Conceptos de estabilidad . . . . .	6
2.2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov (segundo método) . . . . .	8
2.3. Principio de invarianza de LaSalle. . . . .	13
2.4. Las ecuaciones de Euler-Lagrange. . . . .	16
2.4.1. Modelado de sistemas Euler-Lagrange. . . . .	16
2.4.2. Fuerzas externas. . . . .	19
2.4.3. Suposiciones y propiedades. . . . .	21
2.5. Síntesis de un controlador mediante el análisis de Lyapunov. . . . .	21
2.5.1. Esquema de control. . . . .	22
2.5.2. Prueba de estabilidad . . . . .	27



2.6. Conclusiones . . . . .	28
<b>3. Sistema subactuado pendubot.</b>	<b>29</b>
3.1. Descripción física. . . . .	29
3.2. Modelado matemático. . . . .	29
3.2.1. Modelo del sistema pendubot. . . . .	29
3.2.2. Energía cinética. . . . .	30
3.2.3. Energía potencial. . . . .	32
3.2.4. Lagrangiano del sistema pendubot. . . . .	33
3.2.5. Modelado con Euler-Lagrange (EL). . . . .	33
3.3. Puntos de equilibrio. . . . .	35
3.4. Pasividad del sistema. . . . .	37
3.5. Linealización. . . . .	39
3.6. Ley de control para el balanceo del pendubot . . . . .	42
3.6.1. Estabilización alrededor de la órbita homoclínica . . . . .	43
3.7. Simulación . . . . .	46
3.7.1. Simulación del balanceo del sistema. . . . .	46
3.7.2. Simulación del balanceo del sistema. . . . .	46
3.7.3. Esquema completo de control. . . . .	52
3.8. Aplicación del control a otros sistemas subactuados. . . . .	56
3.8.1. Sistema subactuado péndulo invertido. . . . .	56
3.8.2. Metodología aplicada al sistema péndulo de Furuta. . . . .	65
3.9. Conclusiones . . . . .	73
<b>4. Resultados con un pendubot físico.</b>	<b>75</b>
4.1. Descripción del sistema. . . . .	75
4.2. Elementos del sistema. . . . .	76
4.2.1. Tarjeta de conversión de digital a analógico. . . . .	76
4.2.2. Tarjeta lectora de codificadores. . . . .	77
4.2.3. Servopropulsor. . . . .	78
4.2.4. Codificador incremental. . . . .	79
4.3. Control del sistema. . . . .	81
4.4. Conclusiones . . . . .	91
<b>Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>93</b>
<b>. Bibliografía</b>	<b>95</b>
<b>Glosario</b>	<b>101</b>
<b>A. Pasividad y disipación.</b>	<b>107</b>
A.1. Pasividad. . . . .	108
A.2. Estabilidad interna . . . . .	111
A.3. Interconexión de sistemas Euler-Lagrange . . . . .	112
A.4. Propiedades de estabilidad. . . . .	114

---

A.4.1. Sistemas completamente amortiguados. . . . .	114
A.4.2. Sistemas subamortiguados. . . . .	115
<b>B. Linealización de sistemas Euler Lagrange</b>	<b>117</b>
B.1. Linealización de un sistema Euler Lagrange . . . . .	117
B.2. Propiedades de Sistemas Lineales de Control. . . . .	121
B.2.1. Controlabilidad de sistemas MIMO. . . . .	121
B.2.2. Observabilidad de sistemas MIMO. . . . .	121
B.2.3. Controlabilidad de de sistemas SISO . . . . .	122
B.2.4. Observabilidad de sistemas SISO. . . . .	123
<b>C. Publicaciones.</b>	<b>125</b>



# Índice de Tablas

3.1. Parámetros y variables del sistema Pendubot. . . . .	30
3.2. Parámetros matriciales del robot de los grados de libertad. . . . .	34
3.3. Ganancias del controlador (3.60), implementado en simulación numérica. . . . .	47
3.4. Parámetros y variables del sistema Péndulo Invertido. . . . .	57
3.5. Parámetros y variables del sistema Péndulo Furuta. . . . .	65
4.1. Dirección de puertos de la PC. . . . .	76
4.2. Parámetros y variables del sistema Pendubot físico. . . . .	81
4.3. Ganancias del controlador implementado de manera experimental. . . . .	81



# Índice de figuras

2.1. Concepto de estabilidad. . . . .	6
2.2. Interpretación gráfica de estabilidad. . . . .	7
2.3. Estabilidad asintótica del origen [9]. . . . .	7
2.4. Punto de equilibrio atractor. . . . .	8
2.5. Forma típica de una función definida positiva $V(x_1, x_2)$ . . . . .	9
2.6. Forma típica de una función definida positiva cuya geometría es complicada. . . . .	9
3.1. Sistema subactuado Pendubot. . . . .	31
3.2. Punto de equilibrio superior. . . . .	36
3.3. Punto de equilibrio medio 1. . . . .	36
3.4. Punto de equilibrio inferior. . . . .	37
3.5. Punto de equilibrio medio 2. . . . .	37
3.6. Estados del primer eslabón del sistema pendubot. . . . .	48
3.7. Estados del segundo eslabón del sistema pendubot. . . . .	49
3.8. Ley de control y función de energía. . . . .	50
3.9. Función de Lyapunov y plano fase. . . . .	51
3.10. Estados del primer eslabón del sistema pendubot controlado íntegramente. . . . .	53
3.11. Estados del segundo eslabón del sistema pendubot controlado íntegramente. . . . .	54
3.12. Ley de control y función de energía del pendubot con ley controlado integral. . . . .	55
3.13. Función de Lyapunov y plano fase. . . . .	56
3.14. Sistema subactuado Péndulo Invertido [1]. . . . .	57
3.15. Ley de control integral para el péndulo Invertido. . . . .	62
3.16. Ángulo del péndulo integral para el péndulo Invertido. . . . .	63
3.17. Posición del carro integral para el péndulo Invertido. . . . .	64
3.18. Sistema subactuado Péndulo Furuta [59]. . . . .	65
3.19. Ley de control integral para el péndulo Furuta. . . . .	71
3.20. Posición del brazo con ley de control integral para el péndulo Furuta. . . . .	72
3.21. Ángulo del péndulo con ley de control integral para el péndulo Furuta. . . . .	73
4.1. Fotografía del sistema subactuado Pendubot. . . . .	76
4.2. Tarjeta de conversión de digital a analógico. . . . .	77
4.3. Tarjeta lectora de codificadores. . . . .	77
4.4. Servopropulsor [4]. . . . .	78
4.5. Modo voltaje. . . . .	79

---

4.6. Modo corriente. . . . .	79
4.7. Modo velocidad. . . . .	79
4.8. Decodificador incremental óptico. . . . .	80
4.9. Señales de salida del decodificador. . . . .	80
4.10. Estados $q_1$ y $q_3$ del Pendubot experimental. . . . .	82
4.11. Estados $q_2$ y $q_4$ del Pendubot experimental. . . . .	83
4.12. Ley de control integral para el Pendubot experimental. . . . .	84
4.13. Estados $q_1$ y $q_3$ del Pendubot experimental con perturbaciones. . . . .	85
4.14. Estados $q_2$ y $q_4$ del Pendubot experimental con perturbaciones. . . . .	86
4.15. Ley de control integral para el Pendubot experimental con perturbaciones. . . . .	87
4.16. Estados $q_1$ y $q_3$ del Pendubot experimental con perturbaciones. . . . .	88
4.17. Estados $q_2$ y $q_4$ del Pendubot experimental con perturbaciones. . . . .	89
4.18. Ley de control integral para el Pendubot experimental con perturbaciones. . . . .	90
A.1. Interconexión en retroalimentación de dos sistemas Euler-Lagrange. . . . .	113

# Capítulo 1

## Introducción.

En años recientes, el interés por el estudio de sistemas subactuados ha aumentado. Estos sistemas se caracterizan por tener más grados de libertad que de actuadores (i.e. una o más entradas de control que de variables configuracionales). Los sistemas subactuados aparecen en una gran variedad de aplicaciones las cuales incluyen a robots, aeronaves, sistemas marinos, sistemas flexibles, sistemas móviles, etc. La propiedad de *subactuación* esta dada por alguna de las siguientes cuatro razones:

1. Dinámicas del sistema (e.g. aeronaves, vehículos espaciales, helicópteros, vehículos submarinos, etc.).
2. Por diseño, para reducción de costos (e.g. robots con brazos flexibles).
3. Falla en actuadores (e.g. en manipuladores o aeronaves).
4. Impuestos artificialmente para crear un grado más complejo en el control de los sistemas no lineales (e.g. Acrobot, Pendubot, Péndulo Invertido, Péndulo Rotatorio, Sistema TORA, etc.).

En este trabajo de tesis se presenta la alternativa de control para sistemas subactuados de dos grados de libertad, en la cual se involucra la teoría de Lyapunov, el concepto de energía, y la regulación lineal cuadrática. También, se hace una consideración a los sistemas de Euler-Lagrange, debido a las propiedades interesantes que presentan estos sistemas, en el diseño de la ley de control así como en el análisis de su estabilidad.

### 1.1. Planteamiento del problema.

En la vida real la presencia de fallas en sistemas robóticos es un problema muy grave, ya que un robot manipulador falla por el actuador o por sensor, demanda una ley de control en el sistema requiere de un gran esfuerzo electromecánico que puede no solo averiar la parte de potencia sino también la misma parte mecánica. Cuando una falla es detectada, el sistema debería cambiar su esquema de control, llevándolo a una configuración de seguridad. Para el caso de estudio de este trabajo de tesis, se han tomado en cuenta manipuladores de dos grados de libertad (2GDL) verticales, aunque la metodología aquí presentada puede ser aplicada a sistemas en general subactuados de 2GDL con un punto de equilibrio inestable que como se verá, existen una amplia variedad.



## 1.2. Objetivos.

### 1.2.1. Objetivo general.

Desarrollar una metodología de control para sistemas subactuados de dos grados de libertad verticales, basado en la Teoría de estabilidad de Lyapunov y en conceptos de energía del sistema.

### 1.2.2. Objetivos específicos.

- Analizar las diferentes estrategias de control empleadas para los sistemas subactuados.
- Obtener un esquema de control integral para el balanceo y la estabilización de estos sistemas.
- Implementar en simulación numérica la metodología en diferentes sistemas subactuados.
- Realizar la implementación física en un Pendubot del esquema de control propuesto.

## 1.3. Justificación.

En este proyecto se considera una clase típica de sistemas llamada sistemas Euler-Lagrange. Esto es debido a las propiedades inherentes a este tipo de sistemas que serán útiles, como se verá más adelante, tanto en el diseño de control como en el análisis de su estabilidad. Sin embargo, una subclase llamada sistemas subactuados es en particular muy interesante para análisis y diseño de algunas herramientas de control. Así la motivación para el desarrollo de una ley de control y estabilización para un sistema robótico Euler-Lagrange subactuado, es que a diferencia de sistemas completamente actuados, aquellos presentan problemas muy interesantes por sus dinámicas acopladas.

En la literatura existen varios esquemas de control para un sistema robótico subactuado de dos grados de libertad, sin embargo para sistemas subactuados, es difícil establecer una ley general para el balanceo y estabilización de sistemas subactuados en los que influye la fuerza gravitacional. Ejemplo de estos sistemas son el pendubot, el acrobot, el péndulo Furuta, el péndulo invertido, etc. Es debido a este problema que nace el interés de la realización de una metodología para la estabilización de estos sistemas en su punto de equilibrio inestable.

## 1.4. Estado del arte.

Las restricciones a las que son sometidos los sistemas subactuados como lo son las restricciones no holónomicas y holónomicas [10], hace que los sistemas subactuados sean realmente difíciles de controlar, en especial los sistemas subactuados impuestos artificialmente en los que se involucran fuerzas gravitacionales. Además, de la condición de Brockett [53, 55], la cual enuncia que es imposible diseñar una ley de control del tipo  $u = \tau x$  que estabilice al sistema en cualquier posición (i.e. es imposible de realizar el control del sistema tal que se estabilice al sistema en todo el espacio de trabajo). Debido a esto, no existe una teoría de control general para sistemas subactuados.

Las referencias bibliográficas pueden ser muy extensas y variadas, y en consecuencia en este trabajo sólo se harán mención de las que aportan resultados interesantes sobre los sistemas subactuados impuestos de manera artificial.

Los principales métodos de control aplicados a sistemas mecánicos impuestos artificialmente están basados en balancear al sistema a una posición deseada y conmutar para la estabilización del mismo a un controlador que es diseñado en su configuración lineal. Estas técnicas incluyen balanceo del sistema usando métodos basados en energía [54], linealización parcial [37, 38], o bien pseudolinealización usando funciones splines [62]. Sin embargo, los métodos basados en pasividad, a pesar de que son los más empleados en el balanceo a la posición superior del sistema, (región de atracción) esto no implica que se pueda estabilizar el sistema. Además, en [23] las condiciones iniciales del sistema tienen que ser las adecuadas para que el sistema presente cierta energía cinética y así poder balancearlo de tal manera que sea llevado a la región deseada.

Algunos autores consideran para el balance de un sistema subactuado hacia su posición inestable, el hacer inestable el punto de equilibrio globalmente atractor, lo cual implica algunos riesgos, es que la ley de control (en este caso resuelta por una desigualdad matricial (LMI) [67]), produzca una ley de control que en simulación numérica funciona, y lleva al sistema a su configuración inestable, pero en la implementación es realmente imposible de realizar, ya que la salida de control implica fuerzas de torque muy elevadas, y que ningún actuador soportaría. También, existe un grado de complejidad en la asignación de polos para este punto de equilibrio.

La realización de control por métodos heurísticos [48, 72] ha sido muy explotada para este tipo de sistemas, por lo que en la literatura existe una gran e interesante variedad para el control de sistemas subactuados, entre los que sobresale una técnica en la cual es necesaria la conmutación a un controlador que lo estabilice [72]. Sin embargo, el control no es apropiado para algunas de las condiciones iniciales en las que las velocidades de los eslabones no son nulas.

Otra forma de controlar a estos sistemas se reporta en [57], en donde la técnica de control propone una transformación global de coordenadas y reducir el orden del sistema. Así, se hace lo que es llamado un *abrupt swing up*, en el cual como en la mayoría de los controladores se conmuta a un controlador que estabiliza al sistema en su posición deseada.

De una manera más tradicional en [30], se hace uso del seguimiento de trayectorias para el sistema con la conjunción de técnicas de linealización entrada-salida y control predictivo, pero en dicho proyecto no se propone el llevar al sistema de una configuración arbitraria a la configuración deseada.

Otra técnica de control no lineal como el backstepping es muy complicada de realizar, dado que debido a que se diseñan sistemas virtuales y a la naturaleza de la matriz de fuerzas centrípetas y de coriolis, este método puede extenderse demasiado.

## 1.5. Organización de la tesis.

El presente trabajo de tesis está organizado en cuatro capítulos, las conclusiones generales, un glosario y dos apéndices los cuales se desarrollan de la siguiente manera:

En el primer capítulo se desarrolla una introducción en donde se presenta el planteamiento del problema, los objetivos planteados, la justificación del tema de tesis y el estado del arte.

En el segundo capítulo se hace referencia a las bases teóricas de sistemas no lineales, modelado de sistemas por metodología de Euler-Lagrange, propiedades y el desarrollo del esquema de control planteado para la solución del planteamiento del problema.

En el tercer capítulo se presenta el esquema de control propuesto por este trabajo de tesis para el sistema subactuado pendubot, péndulo invertido y péndulo rotatorio. En el cual se aborda la descripción física del sistema, el modelo matemático, la linealización del mismo, el diseño de una ley de control y estabilización del sistema propuesto, por medio de análisis de energía, pasividad y funciones de Lyapunov. También, se muestran las simulaciones del sistema obtenidas con la ley de control propuesta en este proyecto de investigación.

En el último capítulo se presentan los resultados obtenidos de manera experimental, los cuales fueron implementados en un pendubot físico, de la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del I.P.N (CINVESTAV).

Después se dan las conclusiones obtenidas sobre el proyecto realizado. Y un glosario de las palabras que no se trataron particularmente en el presente tema de tesis.

En el primer apéndice se dan los conceptos de pasividad y la teoría relacionada de este tema con sistemas modelados por la metodología de Euler-Lagrange.

En el segundo apéndice se aborda la linealización de los sistemas Euler-Lagrange, así como sus propiedades, las cuales son involucradas de manera directa para el análisis del sistema. Finalmente, en el apéndice *C* se mencionan los trabajos publicados a raíz del presente proyecto de tesis.

# Capítulo 2

## Teoría de sistemas no lineales.

Es difícil elaborar una teoría de control no lineal general, dado que cada tipo de sistema no lineal tiene sus propias características. Por lo tanto, las teorías para clases especializadas de sistemas son potencialmente más útiles en el análisis de sistemas no lineales. En este trabajo estudiamos una clase incluso bastante amplia, de sistemas llamada sistemas de Euler - Lagrange. Un sistema de Euler-Lagrange es un sistema dinámico que es descrito por un tipo de ecuaciones, presentadas en este capítulo. También se involucra una clase especial de sistemas Euler-Lagrange, llamados sistemas de Euler-Lagrange pasivos. La mayor parte de la teoría en este reporte está relacionada con esa clase de sistemas. Del mismo modo se da seguimiento a la teoría de estabilidad de Lyapunov, para el control de estos sistemas.

Este capítulo se presenta la teoría matemática fundamental para el análisis de sistemas Euler-Lagrange, y análisis de Lyapunov. Para una presentación más detallada, consulte [9], [23], [42] y [61].

Debido a que el sistema, propuesto en el presente proyecto de tesis, es no-lineal las ecuaciones descritas por el mismo pueden ser representadas de la forma siguiente:

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u \quad (2.1)$$

$$y = h(x) \quad (2.2)$$

Con  $x$ , definido en una variedad  $X$  del origen de  $\mathbb{R}^n$ ;  $f$  y  $g$  campos vectores en  $\mathbb{R}^n$  y  $h$  es  $C^\infty$  tal que  $f(0) = 0$ ,  $h(0) = 0$ .

El estudio de sistemas lineales se clasifica como variantes en el tiempo o invariantes en el tiempo. En el caso de sistemas no lineales se les denomina de forma general sistemas autónomos y no autónomos:

**Definición 2.1.** [43] *El sistema no lineal  $\dot{x} = f(x,t)$  es llamado autónomo, si  $f$  no depende explícitamente del tiempo  $t$ , i.e. si el sistema en ecuaciones de estado no puede ser escrito de la forma (2.1). De otra manera el sistema es denominado no autónomo.*

A continuación, se definirán algunos conceptos fundamentales para el estudio de sistemas no lineales, como son los puntos de equilibrio, los atractores, la estabilidad de un punto de equilibrio, etc.

## 2.1. Conceptos de estabilidad

A continuación se definirá el concepto de estabilidad para sistemas autónomos. Para una mejor comprensión de las siguientes secciones, se introduce una breve notación simplificada. Sea  $B_R$  una bola definida por  $\|x\| < R$  en el espacio de estado y  $S_R$  una esfera en sí, definida por  $\|x\| = R$ , donde  $x$  es una variedad del estado que satisface  $x \in X \subseteq M$  donde  $M$  es una vecindad de  $\mathbb{R}^n$ .

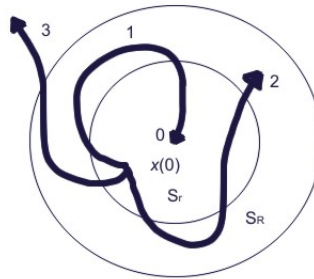


Figura 2.1: Concepto de estabilidad.

La Figura 2.1 hace una representación gráfica de la estabilidad y donde cada curva describe los siguientes casos.

La curva 1 indica estabilidad asintótica.

La curva 2 indica estabilidad marginal.

La curva 3 indica inestabilidad.

**Definición 2.2.** [27] *Un punto  $x = x^*$  en el espacio de estado es un punto de equilibrio de sistema descrito por (2.1), con  $u = 0$ , si se tiene la propiedad de que el estado inicial del estado  $x^*$ , permanece en  $x^*$  para todo tiempo  $t$ .*

**Definición 2.3.** [27] *El estado de equilibrio  $x = 0$  es llamado estable, en el sentido de Lyapunov, si, para cualquier  $R > 0$ , existe un  $r > 0$ , tal que si  $\|x(0)\| < r$ , entonces  $\|x(t)\| < R$  para todo  $t \geq 0$ . De otra forma el punto de equilibrio será inestable.*

Más formalmente, el estado define que el origen es estable dado que no buscamos la trayectoria de estado  $x(t)$  que lleva fuera de la bola de un radio específicamente arbitrario  $B_R$ , un valor  $r(R)$  puede ser encontrado tal que se inicie el estado desde el interior de la bola  $B_r$  en un tiempo cero, garantizaremos que el estado permanecerá dentro de la bola  $B_R$ .

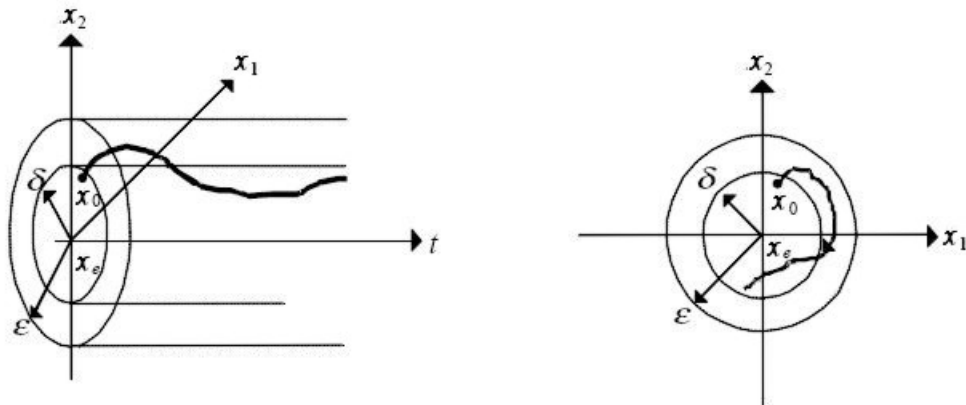


Figura 2.2: Interpretación gráfica de estabilidad.

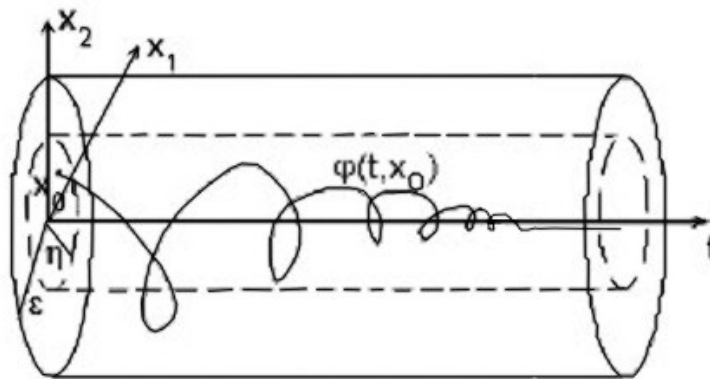


Figura 2.3: Estabilidad asintótica del origen [9].

**Definición 2.4.** [43] El punto de equilibrio  $x = 0$  de (2.1) es llamado *atractor* si existe un número  $\eta > 0$  que tiene la propiedad de que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

siempre que  $\|x(0)\| < \eta$ .

La bola  $B_\eta = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \eta\}$  es llamada un *dominio de atracción* del punto de equilibrio.

La estabilidad asintótica indica que en el equilibrio es estable, y que además, el estado iniciado cerca de cero, converge a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Un punto de equilibrio que es Lyapunov estable pero no es asintóticamente estable es llamado *marginalmente estable*.

**Definición 2.5.** [43] Un punto de equilibrio  $x = 0$  es *asintóticamente estable* si es estable, y si es *atractor*.

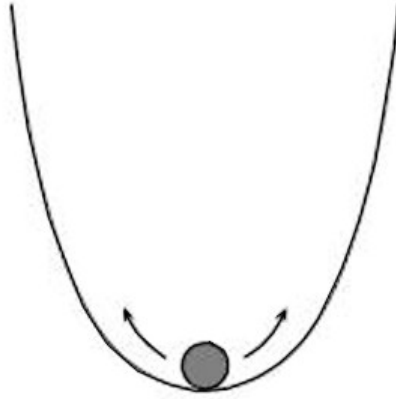


Figura 2.4: Punto de equilibrio atractor.

**Definición 2.6.** [43] *Un punto de equilibrio  $x = 0$  es exponencialmente estable si existen dos números estrictamente positivos  $\alpha \geq 1$  y  $\lambda > 0$  tal que*

$$\forall t > 0 \quad \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t} \quad (2.3)$$

*en alguna bola  $B_r$  alrededor del origen donde el parámetro  $\lambda$  se le llama tasa de convergencia exponencial.*

En otras palabras (2.3) indica que el vector de estados de un sistema exponencialmente estable tiene una tasa de convergencia mayor al origen que un sistema asintóticamente estable.

Las definiciones anteriores están dadas para estabilidad en sistema locales, la siguiente definición es válida para sistemas globales.

**Definición 2.7.** [43] *Si un punto de equilibrio es asintóticamente (o exponencialmente) estable, para cualquier condición inicial, el punto de equilibrio es llamado asintóticamente estable en la trayectoria. También podemos llamarlo globalmente asintóticamente estable.*

## 2.2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov (segundo método)

En esta sección se verá el estudio de la estabilidad en el sentido de Lyapunov de los sistemas descritos por (2.1) y (2.2) al usar la energía total de los mecanismos que satisfagan la función de Lyapunov. El método directo de Lyapunov formaliza la primera propiedad, por noción de funciones definidas positivas, y la segunda por formalización es llamada función de Lyapunov.

**Definición 2.8.** [27] *Una función escalar continua  $V(x)$  es llamada definida positiva localmente, si  $V(0) = 0$  y sobre una bola  $B_{R_0}$*

$$x \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0 \quad \forall x$$

*Si  $V(0) = 0$  y la propiedad anterior lleva al centro del espacio de estado, entonces  $V(x)$  es llamada globalmente definida positiva.*

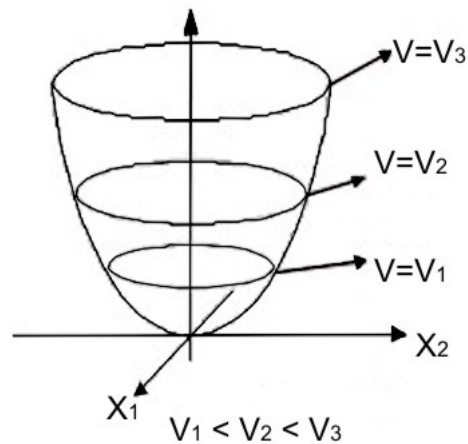


Figura 2.5: Forma típica de una función definida positiva  $V(x_1, x_2)$ .

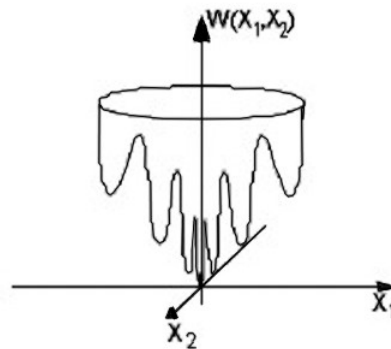


Figura 2.6: Forma típica de una función definida positiva cuya geometría es complicada.

La definición anterior implica que  $V$  tiene un mínimo único en el origen.

Con una pequeña variación de la Definición 2.8, se puede incluir funciones definidas negativas local y globalmente como se observa a continuación.

**Definición 2.9.** [43] Una función escalar continua  $V(x)$  es llamada una funcional definida negativa localmente, si  $-V(x)$  es definida positiva.

$$x \neq 0 \Rightarrow V(x) < 0$$

**Definición 2.10.** [43] Una función  $V(x)$  es semidefinida positiva si  $V(0) = 0$  y

$$x \neq 0 \Rightarrow V(x) \geq 0$$

Si  $V(0) = 0$  y la propiedad anterior lleva al centro del espacio de estado, entonces  $V(x)$  es llamada una funcional semi definida positiva globalmente.



Si se denota con  $x$  el estado del sistema (2.1), una función escalar  $V(x)$  representa actualmente una función implícita del tiempo  $t$ . Asumiendo que  $V(x)$  es diferenciable, procedemos a usar la regla de la cadena.

$$\dot{V}\Big|_{(2.1)} = \frac{dV(x)}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial v}{\partial x} f(x) \quad (2.4)$$

**Definición 2.11.** [43] Si en una bola  $B_{R_0}$ , la función  $V(x)$  es definida positiva y tiene derivadas parciales continuas, y si su derivada a lo largo de la trayectoria del sistema (2.1) es semi definida negativa, entonces  $V(x)$  es llamada función de Lyapunov para el sistema (2.1).

Una función de Lyapunov puede ser dada en una simple interpretación geométrica. En la Figura 2.5, el valor del punto  $V(x_1, x_2)$  es visto en un punto hacia abajo del cono.

El término *Local* en un punto de equilibrio es de particular interés ya que tiene propiedades de estabilidad en una vecindad del punto y usualmente involucra una función definida positiva localmente.

**Teorema 2.1. Teorema principal de Lyapunov.** [32] Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$ . Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$  tal que

- $V(0) = 0$
- $V(x) > 0$  para  $x \in D - 0$
- 

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = [D_f V](x) \leq 0,$$

para todo  $x \in D$ .

Entonces  $x = 0$  es estable.

*Demostración.* Considere cualquier  $\epsilon > 0$  y considere la bola

$$B_r = \{x \in \mathcal{R}^n : \|x\| < r\} \subset D,$$

donde  $r \in (0, \epsilon]$ .

Sea  $\beta \in (0, \alpha]$  donde

$$\alpha = \max_{\|x\|=r} V(x),$$

y defina

$$\Omega_\beta = \{x \in B_r : V(x) \leq \beta\} \subset B_r.$$

Elija  $x(0) \in \Omega_\beta$  y sea  $x(t)$  cualquier solución de  $\dot{x} = f(x)$ . Por hipótesis  $[D_f V](x(t)) \leq 0$  lo cual indica que

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta,$$

para todo  $t \geq 0$ . Esto indica que el conjunto  $\Omega_\beta$  es invariante bajo  $f$ .

Ahora entonces, existe un  $\delta > 0$  tal que

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) < \beta$$

lo cual implica que

$$B_\delta = \{x \mid \|x\| < \delta\} \subset \Omega_\beta \subset B_r.$$

Así

$$\begin{aligned} \text{si } x(0) \in B_\delta &\Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \\ &\Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \quad \forall t \geq 0 \\ &\Rightarrow x(t) \in B_r \quad \forall t \geq 0 \\ &\Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \epsilon \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

lo cual implica estabilidad de Lyapunov. □

**Teorema 2.2. (Estabilidad local).** [27] Si en una bola  $B_{R_0}$  existe una función escalar  $V(x)$  con la primer derivada parcial continua tal que

- $V(x)$  es definida positiva (localmente en  $B_{R_0}$ ).
- $\dot{V}(x)$  es definida seminegativa (localmente en  $B_{R_0}$ ).

Entonces el punto de equilibrio es estable. Si actualmente la derivada  $\dot{V}(x)$  es definida negativa localmente en  $B_{R_0}$ , entonces es asintóticamente localmente estable.

Una condición adicional para  $V$  es que tiene que satisfacer el no tener un radio acotado, porque indica que  $V(x) \rightarrow \infty$  cuando  $\|x\| \rightarrow \infty$  (en otras palabras  $x$  tiende a infinito en cualquier dirección). De aquí se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.3. (Estabilidad global).** [27] Suponga que existe una función escalar  $V$  del estado  $x$ , con la primer derivada parcial continua tal que

- $V(x)$  es definida positiva.
- $\dot{V}(x)$  es definida negativa .
- $V(x) \rightarrow \infty$  cuando  $\|x\| \rightarrow \infty$ .

entonces el equilibrio en el origen es globalmente asintóticamente estable.

De estos resultados se puede concluir que pueden existir muchas funciones de Lyapunov para el mismo sistema. Lo anterior indica que si  $V$  es una función de Lyapunov para un sistema dado, i.e.

$$V_1 = \rho V^\alpha$$

donde  $\rho$  es una constante estrictamente positiva y  $\alpha > 1$  es cualquier escalar, no necesariamente es entero, entonces  $V_1$  también es una función de Lyapunov.

**Teorema 2.4. (Estabilidad asintótica).** [32] Bajo la hipótesis del Teorema 2.1,  $\dot{V}(x) < 0$  en  $D - \{0\}$  implica que  $x = 0$  es asintóticamente estable.

*Demostración.* Dado  $V(x(t))$  como una función no decreciente, esto implica

$$V(x(t)) \rightarrow c \geq 0,$$

cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Si  $c \geq 0$  entonces existe un  $d > 0$  tal que  $B_d \subset \Omega_c$ . Ahora sea

$$-\gamma = \max_{\|x\| \geq d} \dot{V}(x) < 0.$$

Entonces observe que

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau \\ &= V(x(0)) - \gamma t \end{aligned}$$

para un  $t$  grande, esto debe ser negativo, lo cual contradice el hecho de que  $V \geq 0$ . Por lo tanto  $c$  puede ser cero.  $\square$

**Definición 2.12.** [32] Dada una sucesión creciente  $T$ , decimos que  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función tipo Lyapunov si

- $\dot{V}(x, t) \leq 0$  para  $t \in (t_k, t_{k+1})$
- $V$  no decrece monótonamente en  $E(T)$ , donde  $E(t)$  es el conjunto de todos los puntos de la sucesión  $T$ .

**Lema 2.1.** [32] Considere la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} = -g(x),$$

donde  $g$  es localmente Lipschitz,  $g(0) = 0$  y  $xg(x) > 0$ . Claramente  $x = 0$  es un punto de equilibrio. Considere una función candidata de Lyapunov a

$$V(x) = \int_0^x g(y) dy.$$

Observe que  $V \in C^1$ ,  $V(0) = 0$ , y  $V(x) > 0$  para  $x \neq 0$ . Así todo lo que se necesita verificar es la derivada direccional de  $V$ ,

$$D_g V = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} [-g(x)] = -g^2(x) < 0,$$

para todo  $x \in D - \{0\}$ . Este tipo de sistema es asintóticamente estable.

### 2.3. Principio de invarianza de LaSalle.

La estabilidad de Lyapunov es una propiedad local de los puntos de equilibrio. Si sabemos que  $\|x\| < \delta$  implica  $\|x(t)\| < \epsilon$  para cualquier  $\epsilon$  y  $t \geq 0$ , entonces podemos pensar en una bola  $B_\delta$  centrada en el punto de equilibrio como una base de atracción (BOA por sus siglas en inglés) para el punto de equilibrio.

De aquí surge una pregunta, que indica bajo que condiciones será una base de atracción un espacio de estado entero.

La idea básica es encontrada por la prueba original: retomando que  $r > 0$  tal que  $B_r \subset D$ . Para esto se elige encontrar

$$\beta = \min_{\|x\|=r} V(x)$$

Obteniendo el conjunto invariante

$$\Omega = \{x \in B_r \mid \|V(x)\| \leq \beta\}$$

Entonces elija  $B_\delta \subset \Omega_\beta$ . Si  $\delta$  puede hacerse arbitrariamente grande cuando  $r \rightarrow \infty$ , entonces se puede concluir la estabilidad global.

**Definición 2.13.** [32] Sea  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $V(x) \rightarrow \infty$  cuando  $\|x\| \rightarrow \infty$ , entonces  $V$  es llamada como radialmente no acotada.

Los siguientes teoremas muestran que una  $V$  radialmente no acotada es suficiente para la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio

**Teorema 2.5. (Barbashin-Krasovskii).** [32] Sea  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$  radialmente no acotada tal que  $V(0) = 0$ ,  $V(x) > 0$  cuando  $x \neq 0$  y  $\dot{V}(x) < 0$ . Entonces  $x = 0$  es globalmente asintóticamente estable.

**Teorema 2.6. (Chataev).** [32] Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$ . Sea  $V$  una función  $C^1$  tal que  $V(0) = 0$ . Para todo  $\epsilon > 0$  suponga que existe  $x_0 \in B_\epsilon$ , tal que  $V(x_0) > 0$ . Si existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $\dot{V}(x) > 0$  para  $x$  en el conjunto,

$$\mathcal{U} = \{x \mid \|x\| \leq r, V(x) > 0\},$$

entonces  $x$  es inestable.

*Demostración.*  $x_0$  es interior de  $\mathcal{U}$  y de  $V(x_0) = a > 0$ . Así, la trayectoria que inicia en  $x(0) = x_0$ , debe dirigirse a  $\mathcal{U}$ .

Note que esta trayectoria no puede cruzar la superficie

$$\{x \mid V(x) = 0\},$$

porque  $V(x_0) = a > 0$ . Así, puede ir dentro de la superficie

$$\{x \mid \|x\| = r\},$$

y entonces existe un  $\epsilon > 0$  tal que para algún  $x(0)$  arbitrariamente cerrado en el punto de equilibrio, no podemos permanecer dentro de  $\epsilon$ . Por lo tanto el punto de equilibrio es inestable.  $\square$

**Definición 2.14.** [32] Sea  $x$  la solución de  $\dot{x} = f(x)$ . Un punto  $p$  es un punto límite positivo de  $x$  si existe una sucesión  $\{t_n\}$  donde  $t_n \rightarrow \infty$  tal que  $x(t_n) \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Definición 2.15.** [32] El conjunto límite  $w$  (conjunto límite positivo) de  $x$  es el conjunto de todos los puntos positivos de  $x$ .

**Definición 2.16.** [32] Un conjunto  $M$  es llamado invariante respecto a  $f$  ( $f$  invariante) si  $x(0) \in M$  implica  $x(t) \in M$  para todo  $t \geq 0$ .

**Definición 2.17.** [32] Se dice que  $M$  es un atractor para  $x$ , si cuando  $t \rightarrow \infty$  y cualquier  $\epsilon > 0$  existe un  $T > 0$  tal que

$$\exists x_m \in M \quad \|x(t) - x_m\| < \epsilon$$

para todo  $t > T$ .

El siguiente teorema establece la fuerza del principio de invarianza.

**Teorema 2.7.** [32] Si  $x$  es la solución de  $\dot{x} = f(x)$  que es acotada y direcciona  $D$  para todo  $t \geq 0$ , entonces el conjunto límite  $w$  de  $x$ ,  $L^+$ , es no vacío, compacto, invariante, y atractor.

*Demostración.* la prueba se dará para cada caso por separado.

- No vacío: Dado que  $x(t)$  es acotado y consiste de un número infinito de puntos, el teorema de Weierstrass demuestra que tiene un punto límite.
- Acotado: Dado que  $x$  es acotado en  $D$ , este punto límite es acotado y también  $L^+$  es acotado.
- Compacto: Se ha probado que  $L^+$  es cerrado y entonces el conjunto compacto tiene la forma del Teorema de Heine-Borel. Sea  $\{y_i\}$  una sucesión en  $L^+$  tal que  $y_i \rightarrow y$ . Dado un  $y_i \in L^+$  para cada  $i$ , entonces  $\{t_{ij}\}$  es una sucesión tal que  $x(t_{ij}) \rightarrow y_i$ . Así se construye una sucesión  $\tau_i$ , eligiendo  $\tau_i > t_{ij}$ , tal que  $\|x(\tau_i) - y_i\| < \frac{1}{i}$ . Así, para cualquier  $\epsilon > 0$  se puede encontrar un  $N_1$  y  $N_2$  tal que

$$\begin{aligned} \|x(\tau_i) - y_i\| &< \frac{\epsilon}{2} \quad \forall \quad i > N_1, \\ \|y_i - y\| &< \frac{\epsilon}{2} \quad \forall \quad i > N_2. \end{aligned}$$

Esto indica que

$$\|x(\tau_i) - y\| \leq \|x(\tau_i) - y_i\| + \|y_i - y\| = \epsilon > N_i$$

para todo  $i > \max(N_1, N_2)$ , lo cual indica que  $x(\tau_i) \rightarrow y$ . Así,  $y \in L^+$  y también  $L^+$  son cerrados.

- Invariante: Sea  $y \in L^+$  y también  $x = \phi(x, t)$  la solución de  $\dot{x} = f(x)$ , con  $x(0) = y$ . Dado  $y \in L^+$  como una trayectoria de  $x$  y la sucesión  $\{t_i\}$  tal que  $x(t_i) \rightarrow y$ . Así se nota que

$$\begin{aligned} \phi(t + t_i, x) &= \phi(t, \phi(t_i, x_0)) \\ &= \phi(t, x(t_i)) \end{aligned}$$

Por continuidad de  $x$ , se puede tomar el límite en  $i \rightarrow \infty$ . Así, se concluye que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \phi(t + t_i, x_0) = \phi(t, y),$$

lo cual implica que  $\phi(t, y) \in L^+$  para todo  $t > 0$  y  $L^+$  sea invariante.

- Atractor: Suponga que no es un atractor, entonces existe un  $\epsilon > 0$  y una sucesión  $\{t_i\}$ , tal que

$$\inf_{y \in L^+} \|x(t_i) - y\| > \epsilon$$

Dado que la sucesión es acotada (compacta), contiene una subsucesión convergente  $x(t'_i) \rightarrow x^*$  indicando que  $x^* \in L^+$ . Esto puede ayudar mientras  $x$  sea siempre menor que  $\epsilon$  en todo  $L^+$ , lo cual contradice la suposición inicial.

□

Con base en las anteriores definiciones y teoremas, se puede ahora establecer de forma más clara el Teorema de invarianza de LaSalle.

**Teorema 2.8. (LaSalle).** [32] Sea  $\Omega \subset D$  un conjunto compacto positivamente invariante con respecto a  $\dot{x} = f(x)$ . Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$ , tal que,  $\dot{V} \leq 0$  en  $\Omega$ . Sea  $E$  el conjunto de todos los puntos en  $\Omega$  tal que  $\dot{V} = 0$ . Sea  $M$  el conjunto invariante más grande en  $E$ . Entonces toda solución iniciada en  $\Omega$  se aproxima a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Sea  $x$  la solución de  $\dot{x} = f(x)$  iniciada en  $\Omega$ . Dado que  $\dot{V} \leq 0$  en  $\Omega$ , se sabe que  $V(x(t))$  es no creciente y también es acotada, así que tiene un punto límite  $a$ .

El conjunto límite  $w$ ,  $L^+$ , de  $x$  esta  $\Omega$ , dado que  $\Omega$  es cerrado. Así para cualquier  $p \in L^+$  existe una sucesión  $\{t_n\}$ , tal que,  $x(t_n) \rightarrow p$  y

$$V(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = a,$$

lo cual indica que  $V(x) = a$  en  $L^+$ .

Dado que  $L^+$  es invariante (por el teorema anterior) se sabe que  $\dot{V}(x) = 0$  en  $L^+$  lo cual implica que

$$L^+ \subset M \subset E \subset \Omega.$$

Además se sabe por el Teorema anterior, que  $L^+$  es atractor, lo que implica que  $x \rightarrow L^+$  o que  $x \rightarrow M$ . □

El siguiente Colorario es una aplicación del principio de invarianza, que es obtenido por la solución trivial  $x = 0$ , la cual es el mayor conjunto invariante en  $E$ .

**Corolario 2.1.** [32] Sea  $x = 0$  el punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$ . Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida positiva  $C^1$  en  $D$ , y que conteniendo a  $x = 0$  tal que  $\dot{V} \leq 0$  en  $D$ . Sea

$$S = \{x \in D | \dot{V} = 0\}.$$

Ahora suponga que la solución no esta en  $S$ , ya que es la solución trivial. Entonces la solución es asintóticamente estable.

*Observación 1.* Observe que al quitar la restricción de que  $\dot{V}$  es definida negativa, todavía se asegura la estabilidad, y esto es por el costo de valorar la naturaleza no atractora de  $S$ .

Ahora bien, el enfoque de este tema de tesis es orientado a robots de 2GdL, por lo que es necesario conocer su descripción. El modelado de robots puede ser descrito por diferentes técnicas de modelado, como lo es el modelo dinámico, el modelo cinemático directo de aceleración, el modelo cinemático directo de posición, el modelo cinemático directo de velocidad, el modelo cinemático inverso de aceleración, el modelo cinemático inverso de posición y el modelo cinemático inverso de velocidad.

Para nuestro caso de estudio modelaremos al sistema con el modelo dinámico, para esto requerimos introducir a un tipo de sistemas no lineales específico, el cual es representado por ciertas ecuaciones llamadas ecuaciones de Euler-Lagrange.

## 2.4. Las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Las ecuaciones Euler-Lagrange originalmente fueron usadas para describir la dinámica de sistemas mecánicos. Pueden ser demostradas por su equivalente en la segunda ley de Newton. La ventaja de la formulación de Euler-Lagrange es que la forma de estas ecuaciones es invariable. Las ecuaciones de Euler-Lagrange también pueden ser usadas para describir la dinámica de otros sistemas físicos, como sistemas eléctricos.

El modelado de sistemas con varios parámetros pueden ser dados por dos aproximaciones básicas, las cuales son usadas comúnmente en la actualidad: la derivación de la ecuación de movimiento usando ley la de Newton, o la aplicación de principios de variación al seleccionar funciones de energía. De hecho, para sistemas puramente mecánicos o eléctricos se usa la segunda Ley de Newton y Ley de Kirchhoff, respectivamente. El método de modelado por Euler-Lagrange es muy fácil de aplicar para un sistema híbrido<sup>1</sup> de los mencionados anteriormente. En este caso, las fuerzas que interactuar pueden obtenerse el método de desplazamiento arbitrario y de conservación de la energía.

### 2.4.1. Modelado de sistemas Euler-Lagrange.

La metodología de modelado de sistemas de Euler-Lagrange puede ser utilizada para el modelado de un robot. Para determinar las ecuaciones de Euler-Lagrange en una situación específica, uno tiene que constituir el Lagrangiano del sistema, que es la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial.

Las ecuaciones Euler-Lagrange tienen algunas propiedades muy importantes que pueden ser explotadas al diseñar y analizar los algoritmos de control por retroalimentación. Entre estos límites explícitos está la matriz de inercia, linealidad en los parámetros de inercia, y propiedades de pasividad, etc.

El diseño de un modelo vía aproximación por variación hace el uso de las funciones de energía en términos de conjuntos de variables generalizadas (típicamente posiciones y cargas para el sistema mecánico y eléctrico, respectivamente), este procedimiento hace una introducción de la función

---

<sup>1</sup> e.g. teniendo una parte mecánica y otra eléctrica.

Lagrangiano. Las ecuaciones de movimiento son derivadas, principalmente de dinámicas analíticas, particularmente del principio de Hamilton, el cual describe el movimiento de los estados del sistema a través de las trayectorias que minimizan la integral del Lagrangiano.

Uno de los orígenes de las ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas mecánicos es detallado a continuación.

### Modelo dinámico

Las etapas para el modelado dinámico de robots manipuladores por Euler-Lagrange consiste de los siguientes pasos [9]:

1. Cálculo de la energía cinética:  $K(q(t), \dot{q}(t))$ .
2. Cálculo de la energía potencial:  $u(q(t))$ .
3. Cálculo de Lagrangiano:  $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$ .
4. Desarrollo de las ecuaciones de Euler-Lagrange; para obtener

$$\varepsilon(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) + u(q(t)), \quad (2.5)$$

donde  $\varepsilon$  es la suma total de las energías, las energías cinéticas  $\mathbf{K}$  y las energías potenciales  $\mathbf{u}$ , y  $q(t) = [q_1(t) \ \dots \ q_n(t)]^T$ , que corresponde a un vector de coordenadas generalizadas.

El Lagrangiano  $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$  de un robot manipulador es la diferencia entre su energía cinética  $K$  y su energía potencial  $\mathbf{u}$  de tal forma que:

$$\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - u(q(t)), \quad (2.6)$$

Considerando a  $\mathbf{u}$  como fuerzas conservativas, como lo es la fuerza de gravedad y fuerzas de resorte. Las ecuaciones del movimiento de Euler-Lagrange vienen dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}(t))}{\partial q(t)} = \tau - b\dot{q}(t), \quad (2.7)$$

o de forma equivalente

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i - b\dot{q}_i,$$

con  $i$  representado la  $i$ -ésima articulación  $i = 1, \dots, n$  donde  $\tau_i$  son fuerzas y pares ejercidos (por accionadores) en cada articulación como fuerzas no conservativas, siendo  $b$  el coeficiente de fricción viscosa y  $n = \text{grados de libertad}$ .



Por otro lado, la energía cinética de un cuerpo en movimiento está dada por

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad (2.8)$$

donde  $n$  es el número de coordenadas generalizadas,  $m_i$  es la masa del  $i$ -ésimo cuerpo en movimiento y  $v_i$  es la  $i$ -ésima velocidad operacional.

Así que la energía cinética asociada a un dispositivo mecánico articulado puede definirse como:

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q},$$

donde  $D(q)$  es una matriz  $n \times n$  simétrica definida positiva denominada matriz de inercia. La energía potencial  $u(q)$  no tiene una forma específica como en el caso de energía cinética, pero se sabe que depende del vector de posiciones articulares  $q$ , situación que describe la altura del centro de masas con relación al plano de trabajo.

El Lagrangiano  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ , dado por la ecuación (2.6) en este caso es:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} - u(q) \quad (2.9)$$

De esta forma la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \right] + \frac{\partial u(q)}{\partial q} = \tau - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(\dot{q}),$$

los términos del lado derecho de la ecuación anterior son fuerzas externas, por lo tanto puede verificarse que:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \right] = D(q) \dot{q},$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \right] \right] = D(q) \ddot{q} + \dot{D}(q) \dot{q},$$

cuya forma genérica es:

$$D(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(\dot{q}). \quad (2.10)$$

Nótese que de (2.10) es una ecuación diferencial vectorial no lineal en el estado  $\begin{bmatrix} q^T & \dot{q}^T \end{bmatrix}^T$ , donde

$$C(q, \dot{q}) \dot{q} = \dot{D}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T D(q) \dot{q}], \quad (2.11)$$

$$g(q) = \frac{\partial u(q)}{\partial q} \quad (2.12)$$

y  $C(q, \dot{q}) \dot{q}$  es un vector de  $n \times 1$  llamado vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $g(q)$  es un vector de  $n \times 1$  de fuerzas o de pares gravitacionales y  $\tau$  es un vector de  $n \times 1$  llamado vector de fuerzas

externas, siendo generalmente los pares y fuerzas aplicadas por los actuadores en las articulaciones.

La matriz  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  puede no ser única, pero el vector  $g$  sí lo es y  $C$  define el mapeo  $C : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ . Una manera de obtener  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  es a través de los coeficientes o símbolos de Christoffel  $c_{ijk}(q)$  definidos como:

$$c_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left[ \frac{dD_{kj}(q)}{dq_i} + \frac{dD_{ki}(q)}{dq_j} + \frac{dD_{ij}(q)}{dq_k} \right],$$

donde  $D_{ij}(q)$  denota el  $ij$ -ésimo elemento de la matriz de inercia  $D(q)$ . En efecto, el  $kj$ -ésimo elemento  $C_{kj}(q, \dot{q})$  de la matriz  $C(q, \dot{q})$  puede obtenerse de la siguiente manera:

$$C_{kj}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{1jk}(q) \\ c_{2jk}(q) \\ \vdots \\ c_{njk}(q) \end{bmatrix}^T,$$

Usando una factorización especial describimos el sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange puede ser representado de forma equivalente a

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(\dot{q}) = \tau \quad (2.13)$$

donde  $\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(\dot{q})$  es llamada comúnmente como fuerza disipativa.

**Lema 2.2.** [61] Con  $D$  y  $C$  de la ecuación (2.13) tenemos que  $\dot{q}^T \dot{D}\dot{q} - 2\dot{q}^T (C(q, \dot{q})\dot{q}) = 0$ .

*Demostración.* Si calculamos

$$\dot{D}_{ij} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial x^k} \dot{q}^k$$

Entonces del cálculo usando la definición de  $C$  se puede verificar que

$$\dot{q}^T \dot{D}\dot{q} - 2\dot{q}^T (C(q, \dot{q})\dot{q}) = \left( \frac{\partial D_{jk}}{\partial x^i} \dot{q}^k - \frac{\partial D_{ik}}{\partial x^j} \dot{q}^k \right) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

dado que el resultado entre paréntesis es simétrico con respecto a los índices  $i$  y  $j$ , se cumple el resultado, enunciado en el Lema 2.2.  $\square$

### 2.4.2. Fuerzas externas.

Existen tres tipos de fuerzas externas que influyen en un sistema Euler-Lagrange las cuales son: Fuerza de control de entrada, fuerzas disipativas, y fuerzas de interacción del sistema con su medio ambiente (perturbaciones).

Se supone que la fuerza de control en un sistema lineal puede ser descrita como  $Mu$  y por lo tanto,  $M$  es una matriz constante y  $u$  es el vector de control, es decir un vector que contiene todas las

señales de control.

Las fuerzas disipativas, siempre son de la forma  $-\partial F(\dot{q})/\partial \dot{q}$ , donde  $F(\dot{q})$  es llamada como de disipación de Rayleigh, que por definición satisface

$$\dot{q}^T \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(\dot{q}) \geq 0.$$

Usando estas tres fuerzas, las fuerzas externas pueden ser escritas de la forma

$$Q = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} + Q_\zeta + Mu,$$

donde  $Q_\zeta$  denota las fuerzas de perturbación.

**Definición 2.18.** [61] *Un sistema con ecuaciones Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) - \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(\dot{q}) = Mu + Q_\zeta$$

*esta caracterizada por los parámetros Euler-Lagrange*

$$K(q, \dot{q}), U(q), F(\dot{q}), M, Q_\zeta$$

*Si un parámetro es igual a cero, entonces usualmente se omite algún parámetro. por ejemplo, si  $Q_\zeta = 0$  el conjunto paramétrico es*

$$K(q, \dot{q}), U(q), F(\dot{q}), M.$$

**Definición 2.19. Sistema Euler-Lagrange completamente actuado:** [61] *si el número de entradas de control  $n_u$  es igual al número de grados de libertad  $n$ , el sistema es llamado completamente actuado, esto es,  $n = n_u$ . Si  $n > n_u$ , el sistema es llamado subactuado.*

**Definición 2.20. Amortiguamiento de sistemas Euler-Lagrange:** [61] *el sistema es definido como completamente amortiguado, si la función de Rayleigh  $\dot{q}^T \partial F(\dot{q})/\partial \dot{q}$  es definida positiva, esto es, que satisface*

$$\dot{q}^T \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(\dot{q}) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \dot{q}_i^2$$

*con  $\alpha_i > 0$ ,  $\forall i \in 1, \dots, n$ . Si  $\exists i \in 1, \dots, n : \alpha_i = 0$ , el sistema es llamado como subamortiguado.*

**Observación 2. Función de disipación cuadrática:** [61] *En muchos casos se supone que la función de disipación de Rayleigh es una función cuadrática de la forma*

$$F(\dot{q}) \equiv \frac{1}{2} \dot{q}^T R \dot{q}$$

donde la matriz  $R$  es no negativa, simétrica y diagonal. Si el sistema es completamente amortiguado, la matriz es definida positiva y el sistema es subamortiguado, esto es semidefinida positiva pero no definida positiva (de la Definición 2.20). La propiedad cuadrática de  $F$  indica que  $F(0) = 0$ .

### 2.4.3. Suposiciones y propiedades.

Para el desarrollo de este tema se proponen las siguientes suposiciones y propiedades:

**Proposición 2.1.** [42] *El sistema (2.13) puede ser parametrizado de la forma*

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(\dot{q}) = \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q})^T \theta \quad (2.14)$$

donde  $\theta \in \mathbb{R}^p$  es un vector de parámetros constantes y  $\Phi(q, \dot{q}, \ddot{q})^T \in \mathbb{R}^{q \times n}$  es la matriz de regresión.

**Suposición 2.1** [61] La matriz de inercia  $D(q)$  es definida positiva  $\forall x, x^T D(q)x > 0$  y simétrica  $D(q) = D(q)^T$ , y también tiene una cota inferior y superior, i.e. satisface la desigualdad

$$d_m I < D(q) < d_M I \quad (2.15)$$

donde  $d_m$  y  $d_M$  son constantes positivas.

**Suposición 2.2** [61] La función de energía potencial  $u(q)$  es radialmente acotada, globalmente definida positiva y tiene un mínimo único en  $q = \bar{q}$ . También asumimos que  $u(q)$  no tiene ningún otro punto crítico, por lo que  $q = \bar{q}$  es la única solución de  $\partial u / \partial q = 0$ .

**Suposición 2.3** [61] Existe alguna constante positiva  $k_g$  y  $k_v$  tal que

$$k_g \geq \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \left\| \frac{\partial^2 u(q)}{\partial q^2} \right\| \quad (2.16)$$

$$k_v \geq \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \left\| \frac{\partial u(q)}{\partial q} \right\| \quad (2.17)$$

**Proposición 2.2.** [61] *La matriz  $C(x, y)$  es acotada en  $x$  y lineal en  $y$ , entonces  $\forall z \in \mathbb{R}^n$*

$$C(x, y)z = C(x, z)y \quad (2.18)$$

$$\|C(x, y)\| \leq k_c \|y\|, \quad k_c > 0 \quad (2.19)$$

de hecho (2.18) es una consecuencia de la definición de  $C(q, \dot{q})$ . También las desigualdades (2.16) y (2.17) son una definición de los símbolos de Christoffel.

Una vez que se ha comprendido la teoría anterior, ahora se puede realizar una conexión con la teoría de control para el desarrollo de un algoritmo de control como se presenta a continuación.

## 2.5. Síntesis de un controlador mediante el análisis de Lyapunov.

Como se mencionó anteriormente, el control más común en sistemas subactuados implementados de forma artificial, esta basado en propiedades pasivas de los sistemas. Sin embargo, estas técnicas

tienen algunas deficiencias en la realización, por lo que solo nos enfocaremos en sistemas de dos grados de libertad tipo vertical, y en particular con los modelado de sistemas por medio de la técnica de Euler-Lagrange revisados en el presente capítulo y el apéndice A. Los sistemas robóticos Euler-Lagrange tienen algunas propiedades que explotaremos para el diseño de la ley de control, como son los resultados a través de (2.13), el Lema (2.2), la Suposición (2.1), y las Definiciones (A.3), (A.4), (A.5), principalmente.

### 2.5.1. Esquema de control.

Para el caso de estudio en cuestión, como se mencionó anteriormente, se tomarán los sistemas subactuados de dos grados de libertad tipo verticales. Siguiendo la configuración clásica de un robot descritos por (2.10), se pueden sintetizar las dinámicas para un sistema de dos grados de libertad de la forma siguiente:

$$D(q) = \begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) \\ d_{21}(q) & d_{22}(q) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

*Observación 3.* Las fuerzas disipativas se han omitido debido a que estas no influyen directamente en propiedades pasivas del sistema, e incluso las fricciones inducen pasividad.

Debido a que el sistema propuesto en este tema es un sistema subactuado, entonces las ecuaciones anteriores pueden ser descritas como sigue:

$$D(q)(\ddot{q}_{act}, \ddot{q}_{act}) + C(q, \dot{q})(\dot{q}_{act}, \dot{q}_{noact}) + g(q) = \tau \quad (2.24)$$

donde

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{act} \\ \tau_{noact} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

donde el término *act* indica la variable actuada y el término *noact* indica la variable no actuada.

La energía total de un sistema está dada por la ecuación (2.6) y está deberá de ser evaluada en el punto de equilibrio al que se desea llevar al sistema. Así, se obtiene la energía deseada del sistema ( $\mathcal{L}_{eq}$ ), donde el subíndice *eq* indica que es evaluado en el punto de equilibrio deseado, por lo que la ecuación de energía tiene las siguientes características:

$$K(q(t), \dot{q}(t)) = 0, \quad (2.26)$$

y

$$u(q(t)) = u(q_{eq}). \quad (2.27)$$

De esta manera, se puede apreciar que para llevar al sistema al punto de equilibrio deseado, es necesario introducir la serie de condiciones siguientes:

$$\mathbf{C1)} \quad \dot{q}_{eq} = 0.$$

$$\mathbf{C2)} \quad \mathcal{L}(q_{eq}, \dot{q}_{eq}) = \mathcal{L}_{eq}.$$

donde se observa que si  $\mathcal{L}(q, \dot{q}) \neq \mathcal{L}_{eq}$  entonces  $\dot{q}_{noact}^2 > 0$ . Dado que el objetivo del control es llevar al sistema a las condiciones  $\dot{q}_{act} = 0$ ,  $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \mathcal{L}_{eq}$  y  $\tilde{q}_{act} = q_{act} - q_{eq}$ , se agrega una tercera condición

$$\mathbf{C3)} \quad q_{act} + q_{noact} + cte = 0.$$

Así,  $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \mathcal{L}_{eq} = 0$ , resulta en una trayectoria, la cual es conocida como *orbita homoclínica*<sup>2</sup> la cual depende de las dinámicas de cada sistema en particular.

Del apéndice A, se usarán algunas propiedades de la pasividad para realizar una retroalimentación equivalente. Así, se involucra una función de almacenamiento de la forma  $V(x)$  para el diseño de la ley de control. Por lo que se propone una función candidata de Lyapunov de la forma siguiente:

$$V(q, \dot{q}) = \frac{k_E}{2} \tilde{\mathcal{L}}(q, \dot{q})^2 + \frac{k_D}{2} \dot{q}_{act}^2 + \frac{k_P}{2} \tilde{q}_{act}^2 + \frac{k_L}{2} \tilde{q}_{noact}^2 \quad (2.28)$$

donde las constantes  $k_E$ ,  $k_D$ ,  $k_P$  y  $k_L$  son estrictamente positivas, para que (2.28) sea semidefinida positiva. Del modelo directo de un manipulador se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_{act} \\ q_{noact} \\ \dot{q}_{act} \\ \dot{q}_{noact} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{act} \\ \dot{q}_{noact} \\ D(q)^{-1} [\tau - C(q, \dot{q})(\dot{q}_{act}, \dot{q}_{noact}) - g(q)] \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

se puede descomponer al sistema de tal manera que la variable actuada quede de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_{act} \\ \ddot{q}_{noact} \end{bmatrix} = \frac{Adj(D(q))}{\Delta} \left( \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} - C(q, \dot{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_{act} \\ \dot{q}_{noact} \end{bmatrix} - g(q) \right), \quad (2.30)$$

Así la variable  $\ddot{q}_{act}$  se escribe como:

$$\ddot{q}_{act} = \frac{f(q, \dot{q}) + u(q)\tau}{\Delta}, \quad (2.31)$$

donde  $\Delta = \det(D(q))$ .

<sup>2</sup> Una trayectoria de un sistema dinámico que tiende a un mismo conjunto invariante (punto de equilibrio, punto de un plano, orbita periódica, etc.) cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Debido a que  $V(q, \dot{q})$  es una función definida positiva, lo siguiente es verificar si es una función de Lyapunov, por lo que se calculará  $\dot{V}(q, \dot{q})$ , de la forma lo siguiente:

$$\dot{V}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \partial V(q, \dot{q}) / \partial q_{act} \\ \partial V(q, \dot{q}) / \partial q_{noact} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Debido a que para que  $V(q, \dot{q})$  sea una función de Lyapunov, tiene que cumplir con  $\dot{V}(q, \dot{q}) \leq 0$ , por lo que se propone que  $\dot{V}(q, \dot{q}) = \partial V(q, \dot{q}) / \partial q_{act} + \partial V(q, \dot{q}) / \partial q_{noact}$ , i.e.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= k_E \tilde{\mathcal{L}} \dot{\mathcal{L}} + k_D \ddot{q}_{act} \dot{q}_{act} + k_P \dot{q}_{act} \tilde{q}_{act} + k_L \dot{q}_{act} \tilde{q}_{noact} + k_L \dot{q}_{noact} \tilde{q}_{noact} \\ &= k_E \tilde{\mathcal{L}} \dot{q}_{act} \tau + k_D \ddot{q}_{act} \dot{q}_{act} + k_P \dot{q}_{act} \tilde{q}_{act} + k_L \dot{q}_{act} \tilde{q}_{noact} + k_L \dot{q}_{noact} \tilde{q}_{noact} \\ &= \dot{q}_{act} \left( k_E \tilde{\mathcal{L}} \tau + k_D \ddot{q}_{act} + k_P \tilde{q}_{act} + k_L \tilde{q}_{noact} \right) + k_L \dot{q}_{noact} \tilde{q}_{noact} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Así, una vez obtenido  $\dot{V}(q, \dot{q})$ , y sustituyendo a  $\dot{\mathcal{L}}$  por su equivalente en propiedad pasiva, i.e.  $\dot{\mathcal{L}} = \dot{q}_{act} \tau$ , se obtiene la representación de la función (2.33) de la forma siguiente:

$$\dot{V} = \dot{q}_{act} \left\{ \tau \left( k_E \tilde{\mathcal{L}} + \frac{k_D u(q)}{\Delta} \right) + \frac{k_D f(q, \dot{q})}{\Delta} + k_P \tilde{q}_{act} + k_L \tilde{q}_{noact} \right\} + \dot{q}_{noact} \tilde{q}_{noact} \quad (2.34)$$

Dado que la función  $\dot{V}(q, \dot{q})$  necesariamente tiene que ser una función semidefinida negativa, se propone lo siguiente:

$$\dot{V} = -(\dot{q}_{act} + \dot{q}_{noact})^2 \quad (2.35)$$

Así forzando a la función candidata se puede lograr que sea una función de Lyapunov.

Al desarrollar (2.35), se le puede dividir en dos ecuaciones de la forma siguiente:

$$\dot{V}_1 = -\dot{q}_{act}^2 + 2\dot{q}_{act}\dot{q}_{noact} \leq 0, \quad (2.36)$$

y

$$\dot{V}_2 = -\dot{q}_{noact}^2 \leq 0 \quad (2.37)$$

De esta manera, de (2.34), (2.36) y (2.37) se obtiene que:

$$-\dot{q}_{act}^2 - 2\dot{q}_{act}\dot{q}_{noact} = \dot{q}_{act} \left( k_E \tilde{\mathcal{L}} \tau + k_D \ddot{q}_{act} + k_P \tilde{q}_{act} + k_L \tilde{q}_{noact} \right) \quad (2.38)$$

y

$$-\dot{q}_{noact}^2 = k_L \tilde{q}_{noact} \dot{q}_{noact}, \quad (2.39)$$

Así, la ley de control puede tomar la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tau \left( k_E \tilde{\mathcal{L}} + \frac{k_D u(q)}{\Delta} \right) + \frac{k_D f(q, \dot{q})}{\Delta} + k_P \tilde{q}_{act} + k_L \tilde{q}_{noact} \\ = -\dot{q}_{act} - 2\dot{q}_{noact}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Obviamente la ley de control (2.40) pueden presentar singularidades, que se puede evitar si

$$k_E \tilde{\mathcal{L}} + \frac{k_D g(q, \dot{q})}{\Delta} \neq 0 \quad (2.41)$$

De la ecuación de la energía (2.6) se puede observar que  $\tilde{\mathcal{L}} \geq -2\mathcal{L}_{eq}$ . Así, en (2.40) se mantiene bien definida si lo siguiente se satisface:

$$\frac{k_D u(q)}{\text{máx}(\Delta)} \geq 2k_E (\mathcal{L}_{eq}). \quad (2.42)$$

Obteniendo de esta forma cota inferior para  $K_D/K_E$ :

$$\frac{k_D}{k_E} > \frac{2u(q) (\mathcal{L}_{eq})}{\text{máx}(\Delta)}. \quad (2.43)$$

Cuando se hace el uso de la ley de control (2.40) el sistema subactuado puede establecerse alrededor de cualquiera de sus puntos de equilibrio. Para evitar cualquier punto singular diferente del punto deseado se necesita que

$$\left| \tilde{\mathcal{L}} \right| < \text{mín} (|\mathcal{L}_{eq} - \mathcal{L}_1|, |\mathcal{L}_{eq} - \mathcal{L}_2|, \dots) = c \quad (2.44)$$

Dado que  $V$  no es una función creciente, se puede llevar (2.44) a (2.36) si las condiciones iniciales son tales que

$$V(0) < K_E \frac{c^2}{2} \quad (2.45)$$

donde cada sistema en particular, define una región de atracción. Por lo que la ley de control puede ser escrita como:

$$\tau = \frac{-\frac{k_D f(q, \dot{q})}{\Delta} - k_P \tilde{q}_{act} - k_L \tilde{q}_{noact} - \dot{q}_{act} - 2\dot{q}_{noact}}{\left\{ k_E \tilde{\mathcal{L}} + \frac{k_D u(q)}{\Delta} \right\}}$$

Al desarrollar la anterior ecuación se obtiene el siguiente resultado

$$\tau = \frac{-k_D f(q, \dot{q}) - (q_{act} - 2\dot{q}_{noact} + k_P \tilde{q}_{act} + k_L \tilde{q}_{noact}) \Delta}{k_E \tilde{\mathcal{L}} \Delta + k_D u(q)}. \quad (2.46)$$

Como se puede notar de la ecuación (2.46), hace que el primer término de (2.36) sea una función semidefinida negativa, pero no a la función (2.36) en si, por lo que se define lo siguiente:

$$\dot{V}_2 \leq \dot{V}_1 \leq 0 \quad (2.47)$$

i.e.,

$$\dot{V}_2 \leq \tau \quad (2.48)$$



donde  $\tau = \alpha + \beta$ , por lo que el sistema queda representado de la siguiente manera

$$\alpha = -\dot{q}_{noact} - k_L q_{noact} \quad (2.49)$$

y

$$\beta = \frac{-k_D f(q, \dot{q}) - (q_{act} - 2\dot{q}_{noact} + k_p \tilde{q}_{act} + k_L \tilde{q}_{noact})\Delta}{k_E \tilde{\mathcal{L}}\Delta + k_D u(q)} \quad (2.50)$$

Finalmente, se llega a una ley de control general de la forma:

$$\tau = \alpha + \beta = \frac{-k_D f(q, \dot{q}) - (q_{act} - 2\dot{q}_{noact} + k_p \tilde{q}_{act} + k_L \tilde{q}_{noact})\Delta}{k_E \tilde{\mathcal{L}}\Delta + k_D u(q)} - \dot{q}_{noact} - k_L q_{noact} \quad (2.51)$$

La cual puede ser implementada en general para sistemas subactuados de dos grados de libertad. Observe que la ley de control sintetizada en (2.51) es una ley generalizada para llevar al sistema subactuado a una posición de equilibrio (dada a través de  $\mathcal{L}_{eq}$ ), la cual es elegida por el usuario. Si esta posición de equilibrio es inestable, con esta ley de control, se asegura que las condiciones C1), C2) y C3) se verifican y en consecuencia los estados en el atractor inestable están acotados. Lo anterior será de gran utilidad para realizar en esta vecindad, la conmutación hacia otra ley de control, dada por un método lineal.

La ecuación (2.51) resulta en el siguiente teorema para el análisis de estabilidad.

**Teorema 2.9.** *Considere el sistema (2.30) y tome la función candidata de Lyapunov (2.28) donde  $k_E$ ,  $k_P$ ,  $k_D$  y  $k_L$  como constantes estrictamente definidas positivas y que cumple con las condiciones (2.43) y (2.44). Entonces la solución del sistema con la ley de control en lazo cerrado (2.51) converge a un conjunto invariante  $M$  dado por la orbita homoclínica en el intervalo  $q_{act} - cte = \varepsilon$ , donde  $|\varepsilon| < \varepsilon^*$  y  $\varepsilon^*$  es arbitrariamente pequeño.*

El algoritmo de control presentado en esta sección puede ser resumido de la siguiente manera:

1. Establecer la propiedad de pasividad para el sistema subactuado particular.
2. Evaluar la energía del sistema en el punto de equilibrio deseado.
3. Introducir condiciones para balancear al sistema a su configuración deseada.

**C1)**  $\dot{q}_{eq} = 0$

**C2)**  $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{L}_{eq}$ .

**C3)**  $q_1 + q_2 + cte = 0$ .

4. Estabilización de la orbita homoclínica.
5. Con las condiciones de balanceo, proponer una función candidata de Lyapunov de la forma:

$$V(q, \dot{q}) = \frac{k_E}{2} \tilde{\mathcal{L}}(q, \dot{q})^2 + \frac{k_D}{2} \dot{q}_{act}^2 + \frac{k_P}{2} \tilde{q}_{act}^2 + \frac{k_L}{2} \tilde{q}_{noact}^2 \quad (2.52)$$

6. Forzar la función candidata de Lyapunov a una función de Lyapunov de la forma:

$$\dot{V} = -(\dot{q}_{act} + \dot{q}_{noact})^2 \quad (2.53)$$

7. Con ayuda de la propiedad de pasividad y el modelo directo, establecer la ley de control.

$$\tau = \alpha + \beta = \frac{-k_D f(q, \dot{q}) - (q_{act} - 2\dot{q}_{noact} + k_p \tilde{q}_{act} + k_L \tilde{q}_{noact})\Delta}{k_E \tilde{\mathcal{L}}\Delta + k_D u(q)} - \dot{q}_{noact} - k_L q_{noact} \quad (2.54)$$

8. Una vez alcanzando la órbita homoclínica se debe diseñar un controlador que estabilice al sistema de manera asintótica, para el caso de estudio de este tema de tesis se propone diseñar un controlador LQR.
9. Al término del desarrollo de los pasos anteriores del algoritmo se propone hacer una conmutación de controles, esto es con el fin de que cuando el sistema alcance una región de atracción hacia el punto de equilibrio deseado, el sistema deberá cambiar a un controlador que lo estabilice, así de este modo se resuelva el problema de balance y estabilización.

### 2.5.2. Prueba de estabilidad

La prueba del Teorema 2.9 está basada en el Teorema de Invarianza de LaSalle (ver Teorema 2.8).

*Demostración.* A fin de aplicar el Teorema de Invarianza de LaSalle, se requiere definir un conjunto compacto (cerrado y acotado)  $\Omega$  con la propiedad de que toda solución del sistema (2.30) que inicia en  $\Omega$  permanezca en  $\Omega$  para todo  $t \leq T$ .

Dado que  $V(q, \dot{q})$  en (2.28) no es una función creciente, (ver (2.35)), entonces  $q_{act}$ ,  $\dot{q}_{act}$ ,  $q_{noact}$  y  $\dot{q}_{noact}$  son acotados.

De aquí suponga que si las dinámicas contienen los siguientes términos,  $\cos q_{noact}$ ,  $\sen q_{noact}$ ,  $\cos q_{act}$ ,  $\sen q_{act}$ ,  $\cos(q_{act} + q_{noact})$ ,  $\sen(q_{act} + q_{noact})$  también son funciones acotadas, y se puede definir el estado  $z$  del sistema en lazo cerrado como la composición dada de  $q_{act}$ ,  $\sen q_{act}$ ,  $\sen(q_{act} + q_{noact})$ ,  $\dot{q}_{act}$ ,  $\cos q_{noact}$ ,  $\sen q_{noact}$  y  $\dot{q}_{noact}$ .

Por lo tanto, la solución del sistema en lazo cerrado  $\dot{z} = F(z)$  permanece dentro de un conjunto compacto  $\Omega$  que es definido por el valor del estado inicial.

Sea  $\Gamma$  el conjunto de todos los puntos en  $\Omega$  tal que  $\dot{V}(z) = 0$ .

Sea  $M$  el conjunto invariante más grande en  $\Gamma$ .

El Teorema de LaSalle enuncia que toda solución iniciada en  $\Omega$  se aproxima a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Lo cual implica que del conjunto  $\Gamma$  (ver (2.35)), si  $\dot{V} = 0$  y  $\dot{q}_{act} + \dot{q}_{noact} = 0$ , implica que  $q_{act} + q_{noact}$  y  $V$  son constantes. Dado que el sistema va hacia las condiciones  $C1)$ ,  $C2)$  y  $C3)$ , entonces el conjunto invariante más grande  $M$  está dado por la órbita homoclínica en el intervalo  $q_{act} - cte = \varepsilon$ ,  $q_{act} + q_{noact} + cte = \varepsilon$ , donde  $|\varepsilon| < \varepsilon^*$  y  $\varepsilon^*$  es arbitrariamente pequeño, entonces toda solución converge al conjunto invariante  $M$ , por lo tanto la trayectoria del sistema converge a la órbita homoclínica.  $\square$

## 2.6. Conclusiones

En este capítulo se vió como un sistema no lineal modelado por la metodología de Euler-Lagrange, y el cual presenta la propiedad de subactuación, puede ser estabilizado en cierta región, en este caso es una órbita homoclínica, lo cual representa una alternativa para el balanceo de este tipo de sistemas a un punto de equilibrio inestable del mismo. Esto es posible de realizar por la intervención de funciones de Lyapunov, estas funciones son una interesante alternativa para el control de sistemas de manera general, aunque en este proyecto de tesis solo lo enfocamos en sistemas subactuados, la metodología diseñada puede ser aplicada a sistemas completamente actuados.

También podemos decir que la ley de control es una buena opción para llevar a un sistema subactuado de 2GDL a una región cercana a cualquiera de sus puntos de equilibrio inestables, Así de esta manera se puede decir con seguridad que el problema de balanceo para sistemas subactuados de 2GDL esta resuelto con la aplicación de la metodología propuesta en este proyecto de tesis, y debido a que un sistema puede ser estabilizado por medio de controladores lineales,<sup>3</sup> por lo que también se puede decir que el problema de balancear y estabilizar sistemas subactuados de 2GDL en una configuración inestable es resuelto (para sistemas subactuados diseñados de manera artificial).

---

<sup>3</sup> e.g. por medio de un controlador LQR, por asignación de polos, etc.

# Capítulo 3

## Sistema subactuado pendubot.

### 3.1. Descripción física.

El sistema Pendubot es un sistema electro mecánico (o mecatrónico) que consiste en dos eslabones rígidos interconectados por articulaciones de revolución. El primer eslabón está accionado por un motor de CD y el segundo eslabón no está actuado. Así, el segundo eslabón puede ser controlado por el movimiento inducido por el primero. El sistema Pendubot es similar en esencia al sistema péndulo invertido. Sin embargo, la naturaleza de las dinámicas acopladas entre los dos cuerpos del Pendubot resultan en algunas propiedades interesantes.

De otra forma, el sistema Pendubot es un robot simple que consta de dos cuerpos rígidos. Por esto también, se puede decir que el sistema subactuado Pendubot es un sistema no lineal, ya que su propia dinámica lo muestra. El segundo eslabón se mueve libremente alrededor del primer primer enlace y el objetivo de control de este sistema es el de llevar al mecanismo a su punto de equilibrio inestable. El sistema Pendubot es un robot tipo subactuado con punto de referencia, donde se puede hacer el estudio de técnicas de control, como es el caso de la regulación.

### 3.2. Modelado matemático.

En esta sección se resumen los tópicos sobre el modelado de un brazo mecánico con dos grados de libertad, el cual es el prototipo de estudio de este proyecto de tesis.

El robot considerado puede verse en la Figura 3.1 el cual consiste en dos eslabones conectados a través de articulaciones rotacionales. El significado de las diversas constantes así como el valor numérico de las mismas están resumidos en la Tabla 3.1.

#### 3.2.1. Modelo del sistema pendubot.

El brazo manipulador está descrito por el diagrama de cuerpo libre que es representado en la Figura 3.1.

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Longitud eslabón 1	$l_1$	0.2032	$m$
Longitud eslabón 2	$l_2$	0.3841	$m$
Distancia al centro de masa (eslabón 1)	$l_{c1}$	0.1551	$m$
Distancia al centro de masa (eslabón 2)	$l_{c2}$	0.1635	$m$
Masa del eslabón 1	$m_1$	0.8293	$kg$
Masa del eslabón 2	$m_2$	0.3402	$kg$
Inercia eslabón 1 respecto al centro de masa	$I_1$	0.005	$Kg \cdot m^2$
Inercia eslabón 2 respecto al centro de masa	$I_2$	0.0043	$Kg \cdot m^2$
Aceleración de gravedad	$g$	9.81	$m/seg^2$

Tabla 3.1: Parámetros y variables del sistema Pendubot.

El brazo manipulador está formado por dos eslabones rígidos con las siguientes características asociadas a los ángulos.

- a)  $q_1$ : mide desde la posición vertical hacia arriba.
- b)  $q_2$ : mide la posición del brazo en la horizontal.

El vector de posiciones articulares  $q(t)$  se define como:

$$q(t) = [ q_1(t) \quad q_2(t) ]^T$$

La energía cinética  $K(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q})$  para este brazo puede descomponerse en dos partes donde  $K_1(q, \dot{q})$  y  $K_2(q, \dot{q})$  son energías cinéticas asociadas a las masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente.

### 3.2.2. Energía cinética.

El sistema se analiza como dos masas independientes, primero se procede a calcular la energía cinética del primer eslabón. En la Figura 3.1 se muestra su diagrama de cuerpo libre.

Las coordenadas del centro de masa del primer eslabón expresadas en el plano  $X - Y$  son:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_{c1} \cos(q_1), \\ y_1 &= l_{c1} \text{sen}(q_1), \end{aligned} \tag{3.1}$$

y las del segundo eslabón están dadas por

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2), \\ y_2 &= l_1 \text{sen}(q_1) + l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2). \end{aligned} \tag{3.2}$$

El vector de velocidad  $v_1$  del centro de masa del primer eslabón partiendo de (3.1) en consecuencia es:

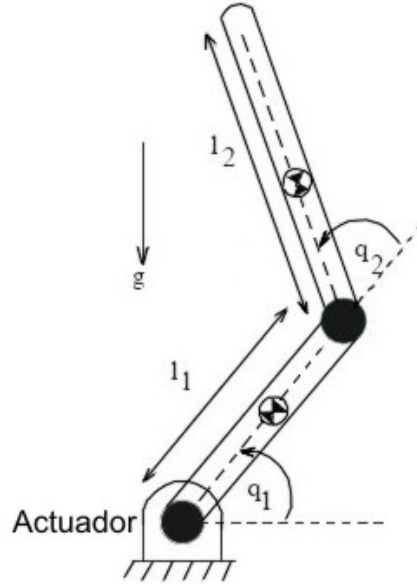


Figura 3.1: Sistema subactuado Pendubot.

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \text{cos}(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto la velocidad al cuadrado  $v_1^T v_1$  del centro de masa de dicho eslabón resulta en

$$v_1^T v_1 = \begin{bmatrix} l_{c1} \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 & l_{c1} \text{cos}(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \text{cos}(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix},$$

$$v_1^T v_1 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 [\text{sen}^2(q_1) + \text{cos}^2(q_1)].$$

Al tomar la identidad trigonométrica  $\text{cos}^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1$ , se obtiene, la velocidad al cuadrado  $v_1^T v_1$  del centro de masa la cual resulta ser:

$$v_1^T v_1 = l m_1^2 \dot{q}_1^2.$$

Finalmente, la energía cinética correspondiente al movimiento del primer eslabón se obtiene como:

$$K_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 v_1^T v_1 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 l m_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2. \quad (3.3)$$

Por otro lado, la velocidad del centro de masa del segundo eslabón expresada en el plano  $X - Y$  está dada por

$$v_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix},$$

y partiendo de (3.2) se obtiene

$$v_2 = \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 - l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}.$$

Finalmente, la velocidad al cuadrado respecto al centro de masa del segundo eslabón está dada por

$$v_2^T v_2 = \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 - l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 - l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}$$

$$v_2^T v_2 = [(l_1 \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2))^2 + (l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2))^2]$$

Al emplear las identidades trigonométricas

$$\cos(\theta)^2 + \text{sen}(\theta)^2 = 1$$

y

$$\text{sen}(\theta_1) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1) \cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_2),$$

se obtiene finalmente la velocidad al cuadrado  $v_2^T v_2$  del centro de masa del segundo eslabón:

$$v_2^T v_2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c1} [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + 2l_1 l_{c1} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2)$$

De esta forma la energía cinética de dicho eslabón es

$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2 + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2,$$

$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{m_2}{2} l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2. \quad (3.4)$$

### 3.2.3. Energía potencial.

De forma similar, la energía potencial puede descomponerse como la suma de dos partes:  $u(q) = u_1(q) + u_2(q)$  donde  $u_1(q)$  y  $u_2(q)$  son las energías potenciales asociadas a las masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. De donde se obtiene que:

$$u_1(q) = m_1 l_{c1} g \text{sen}(q_1), \quad (3.5)$$

y

$$u_2(q) = m_2 l_1 g \text{sen}(q_1) + m_2 l_{c2} g \text{sen}(q_1 + q_2). \quad (3.6)$$

### 3.2.4. Lagrangiano del sistema pendubot.

A partir de (2.6) y (2.7) se puede obtener el Lagrangiano del sistema:

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - u(q),$$

$$L(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}) - u_1(q) - u_2(q).$$

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m_1l_{c1}^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}l_{c2}^2[\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2]$$

$$+ m_2l_1l_{c2}[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2]\cos(q_2) + \frac{1}{2}I_2[\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2$$

$$- m_1l_{c1}g\sin(q_1) - m_2l_1g\sin(q_1) - m_2l_{c2}g\sin(q_1 + q_2),$$

De esta última ecuación pueden obtenerse las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = [m_1l_{c1}^2 + m_2l_1^2]\dot{q}_1 + m_2l_{c2}^2\dot{q}_1 + m_2l_{c2}^2\dot{q}_2 + 2m_2l_1l_{c2}\cos(q_2)\dot{q}_1$$

$$+ m_2l_1l_{c2}\cos(q_2)\dot{q}_2 + I_1\dot{q}_1 + I_2[\dot{q}_1 + \dot{q}_2],$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right] = [m_1l_{c1}^2 + m_2l_1^2 + m_2l_{c2}^2 + 2m_2l_1l_{c2}\cos(q_2)]\ddot{q}_1 + [m_2l_{c2}^2 + m_2l_1l_{c2}\cos(q_2)]\ddot{q}_2$$

$$- 2m_2l_1l_{c2}\sin(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 - m_2l_1l_{c2}\sin(q_2)\dot{q}_2^2 + I_1\ddot{q}_1 + I_2[\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2],$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -g[m_1l_{c1} + m_2l_1]\cos(q_1) - gm_2l_{c2}\cos(q_1 + q_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2l_{c2}^2\dot{q}_1 + m_2l_{c2}^2\dot{q}_2 + m_2l_1l_{c2}\cos(q_2)\dot{q}_1 + I[\dot{q}_1 + \dot{q}_2],$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right] = m_2l_{c2}^2\ddot{q}_1 + m_2l_{c2}^2\ddot{q}_2 + m_2l_1l_{c2}\cos(q_2)\ddot{q}_1$$

$$- m_2l_1l_{c2}\sin(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + I_2[\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2].$$

### 3.2.5. Modelado con Euler-Lagrange (EL).

Finalmente, de las ecuaciones dinámicas de **EL** que modelan un robot manipulador se obtienen las siguientes expresiones:

$$\tau_1 = [m_1l_{c1}^2 + m_2l_1^2 + m_2l_{c2}^2 + 2m_2l_1l_{c2}\cos(q_2)]\ddot{q}_1$$

$$+ [m_2l_{c2}^2 + m_2l_1l_{c2}\cos(q_2)]\ddot{q}_2 - 2m_2l_1l_{c2}\sin(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2$$

$$- m_2l_1l_{c2}\sin(q_2)\dot{q}_2^2 + I_1\ddot{q}_1 + I_2[\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] + g[m_1l_{c1} + m_2l_1]\cos(q_1)$$

$$+ gm_2l_{c2}\cos(q_1 + q_2),$$

y

$$\tau_2 = m_2l_{c2}^2\ddot{q}_1 + m_2l_{c2}^2\ddot{q}_2 + m_2l_1l_{c2}\cos(q_2)\ddot{q}_1$$

$$- m_2l_1l_{c2}\sin(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + I_2[\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] + m_2l_1l_{c2}\sin(q_2)[\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2]$$

$$+ gm_2l_{c2}\cos(q_1 + q_2).$$

Siendo  $\tau_1$  y  $\tau_2$  los pares que actúan sobre las uniones 1 y 2, si bien en el sistema Pendubot  $\tau_2 = 0$ , lo cual se realiza a continuación.



De manera que se puede escribir el modelo de la forma genérica, al definir:

$$\begin{aligned} D(q) &= \begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) \\ d_{21}(q) & d_{22}(q) \end{bmatrix}, \\ C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix}, \\ g(q) &= \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix}, \\ \tau &= \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Así, el modelado queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) \\ d_{21}(q) & d_{22}(q) \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix} = \tau \quad (3.7)$$

En la Tabla 3.2 se muestran los valores parametrizados.

Parámetro	Valor
$d_{11}(q)$	$m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2$
$d_{12}(q)$	$m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2$
$d_{21}(q)$	$m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2$
$d_{22}(q)$	$m_2 l_{c2}^2 + I_2$
$C_{11}(q, \dot{q})$	$-m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2$
$C_{12}(q, \dot{q})$	$-m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]$
$C_{21}(q, \dot{q})$	$m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_1$
$C_{22}(q, \dot{q})$	0
$g_1(q)$	$g [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] \text{sen}(q_1) + g m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2)$
$g_2(q)$	$g m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2)$

Tabla 3.2: Parámetros matriciales del robot de los grados de libertad.

Observe que la existencia de la matriz  $D^{-1}(q)$  se asegura debido a que  $D(q)$  es una matriz definida positiva, lo cual permite expresar el modelo dinámico de un robot de  $n - \text{grados}$  de libertad en términos del vector de estado  $\begin{bmatrix} q^T & \dot{q}^T \end{bmatrix}^T$  de la forma siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ D(q)^{-1} [\tau(t) - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q)] \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Entonces las variables de estado adecuadas para describir el modelo dinámico del sistema son las posiciones  $q_1$  y  $q_2$  y las velocidades  $\dot{q}_1$  y  $\dot{q}_2$ . En términos de estas variables de estado, el modelo

dinámico de un robot de 2GDL puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ D(q)^{-1} [\tau(t) - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q)] \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Para obtener del modelo matemático del Pendubot, considere

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y dado el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 & , & \quad \dot{x}_1 = x_3 \\ x_2 &= q_2 & , & \quad \dot{x}_2 = x_4 \\ x_3 &= \dot{q}_1 & , & \quad \dot{x}_3 = \ddot{q}_1 \\ x_4 &= \dot{q}_2 & , & \quad \dot{x}_4 = \ddot{q}_2 \end{aligned}$$

al desarrollar (3.8), se obtiene

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2(x_2)} \left[ \begin{aligned} &\theta_2\theta_3 \text{sen}(x_2)(x_3 + x_4)^2 + \theta_3^2 \cos(x_2) \text{sen}(x_2)x_3^2 - \theta_2\theta_4 g \cos(x_1) \\ &+ g\theta_3\theta_5 \cos(x_2) \cos(x_1 + x_2) + \theta_2\tau_1 \end{aligned} \right], \quad (3.10)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2(x_2)} \left[ \begin{aligned} &-\theta_3(\theta_2 + \theta_3 \cos(x_2)) \text{sen}(x_2)(x_3 + x_4)^2 - \theta_3(\theta_1 + \theta_3 \cos(x_2)) \text{sen}(x_2)x_3^2 \\ &+ (\theta_2 + \theta_3 \cos(x_2))(\theta_4 g \cos(x_1) - \tau_1) - (\theta_1 + \theta_3 \cos(x_2))\theta_5 g \cos(x_1 + x_2) \end{aligned} \right]. \quad (3.11)$$

Así, se puede representar el sistema de la forma (3.9), en donde se introdujo las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} \theta_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\ \theta_2 &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ \theta_3 &= m_2 l_1 l_{c2} \\ \theta_4 &= m_1 l_{c1} + m_2 l_1 \\ \theta_5 &= m_2 l_{c2} \end{cases} \quad (3.12)$$

Para el diseño de control de estos sistemas se ha omitido las fricciones, estos 5 parámetros son suficientes para el caso de estudio propuesto en este trabajo de tesis ya que las fuerzas disipativas no influyen en el diseño del controlador, ya que estas no afectan directamente la propiedad de pasividad, esto se debe a la definición de los coeficientes de Raleigh.

### 3.3. Puntos de equilibrio.

El robot planar de dos eslabones con el vector de fuerzas externas  $\tau \equiv 0$  en la formulación de Euler Lagrange cuenta con cuatro puntos de equilibrio como se puede apreciar en las Figuras 3.2 a 3.5.

Existen tres puntos de equilibrio inestables y uno estable, el mismo que es globalmente atractor y que corresponde a la Figura 3.4.

Los puntos de equilibrio, al evaluar (3.7) con  $[\tau_1 \ \tau_2]^T \equiv 0$  son obtenidos en las siguientes posiciones,  $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = ((\pi/2), 0, 0, 0)$  y  $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (-(\pi/2), \pi, 0, 0)$  los cuales son los puntos de equilibrio inestables y hay un punto de equilibrio estable situado en  $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (-(\pi/2), 0, 0, 0)$  respectivamente. La energía total  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$  para cada una de los cuatro puntos de equilibrio a continuación.

*Posición superior.*

$$\mathcal{L}((\pi/2), 0, 0, 0) = \mathcal{L}_{Top} = (\theta_4 + \theta_5)g \quad (3.13)$$

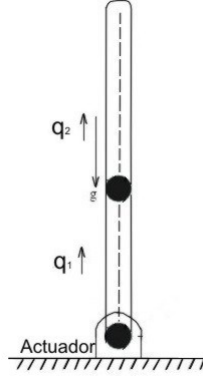


Figura 3.2: Punto de equilibrio superior.

*Posición media 1:*

$$\mathcal{L}(-(\pi/2), \pi, 0, 0) = \mathcal{L}_{mid1} = (-\theta_4 + \theta_5)g \quad (3.14)$$

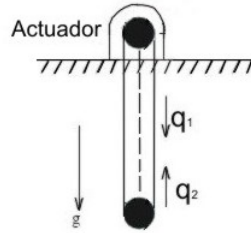


Figura 3.3: Punto de equilibrio medio 1.

*Posición inferior.*

$$\mathcal{L}(-(\pi/2), 0, 0, 0) = \mathcal{L}_{bot} = -(\theta_4 + \theta_5)g \quad (3.15)$$

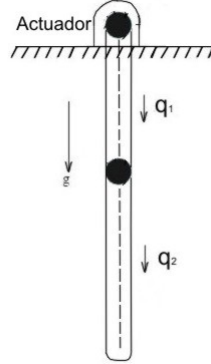


Figura 3.4: Punto de equilibrio inferior.

*Posición media 2:*

$$\mathcal{L}((\pi/2), \pi, 0, 0) = \mathcal{L}_{mid2} = (\theta_4 - \theta_5)g \quad (3.16)$$

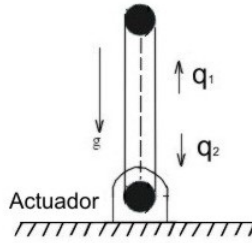


Figura 3.5: Punto de equilibrio medio 2.

### 3.4. Pasividad del sistema.

El sistema subactuado Pendubot, presenta algunas propiedades derivadas del modelado del mismo, de las cuales se mencionan algunas a continuación.

De la matriz de inercia

$$D(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 \end{bmatrix},$$

se observa que cuenta con la propiedad de ser una matriz simétrica, y además

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \theta_1\theta_2 + 2\theta_3\cos q_2 \\
&= m_1l_{c1}^2 + m_2l_1^2 + I_1 + m_2l_{c2}^2 + I_2 + 2m_2l_1l_{c2}\cos q_2 \\
&\geq m_1l_{c1}^2 + m_2l_1^2 + I_1 + m_2l_{c2}^2 + I_2 - 2m_2l_1l_{c2} \\
&\geq m_1l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2(l_1 - l_{c2})^2 > 0,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

y también

$$\begin{aligned}
\det(D(q)) &= \theta_1\theta_2 - 2\theta_3^2\cos^2 q_2 \\
&= (m_1l_{c1}^2 + I_1)(m_2l_{c2}^2 + I_2) \\
&\quad + m_2l_1^2I_2 + m_2^2l_1^2l_{c2}^2\sin^2 q_2 > 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Por lo tanto  $D(q)$  es definida positiva  $\forall q$ ,  $q^T D(q)x > 0$ . Además, se tiene que la matriz de fuerzas centrífugas y de coriolis

$$C(q, \dot{q}) = \theta_3 \text{sen}(q_2) \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ -\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

es una matriz anti-simétrica. De aquí se puede decir que

$$\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}) = \theta_3 \text{sen } q_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.19}$$

propiedad importante del sistema, la cual puede ser usada para establecer la característica de pasividad del sistema. La cual resultará a partir de la siguiente ecuación:

$$z^T \left( \dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right) z = 0 \quad \forall \quad z, \tag{3.20}$$

Observe también que la energía potencial del pendubot puede ser definida como  $u(q) = \theta_4 g \text{sen}(q_1) + \theta_5 g \text{sen}(q_1 + q_2)$ . Donde  $u$  se relaciona con  $g(q)$  de la siguiente manera

$$g(q) = \frac{\partial u}{\partial q} = \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos(q_1) + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la energía total del pendubot está dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} + u(q), \tag{3.21}$$

y por tanto, de (3.7), los parámetros dados por la Tabla 3.1, y de (3.20), se obtiene el siguiente resultado

$$\dot{\mathcal{L}} = \dot{q}^T D(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{D}(q) \dot{q} + \dot{q}g(q), \tag{3.22}$$

que al desarrollar se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{L}} &= \dot{q}^T (-C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) + \tau) + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{D}(q) \dot{q} + \dot{q}g(q) \\
&= \dot{q}^T \tau
\end{aligned}$$

Así, de esta ecuación y al aplicar el Lema 2.2, se obtiene

$$\dot{\mathcal{L}} = \dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} - \dot{q}^T g(q) + \dot{q}^T \tau + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{D}(q) \dot{q} + \dot{q}^T g(q),$$

donde

$$-\dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{D}(q) \dot{q} = \dot{q}^T \dot{D}(q) \dot{q} - 2\dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} = 0,$$

que resulta en

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad \dot{q}^T = [ \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 ] \quad y \quad \dot{\mathcal{L}} = \dot{q}_1^T \tau. \quad (3.23)$$

Dado que el caso de estudio actual es el sistema Pendubot, se tiene la restricción sobre el segundo actuador, i.e.

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, de (3.23) se tiene que

$$\dot{\mathcal{L}} = \dot{q}_1 \tau. \quad (3.24)$$

Integrando ambos lados de la ecuación anterior, se obtiene

$$\int_0^t \dot{q}_1 \tau = \mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(0), \quad (3.25)$$

lo cual al tomar en cuenta la definición de un sistema pasivo (A.7), se observa que dicha definición se verifica si se toma a  $\tau_1$  como entrada, y a  $\dot{q}_1$  como la una salida del sistema.

### 3.5. Linealización.

Debido a que se requiere controlar el sistema en su punto de equilibrio inestable<sup>1</sup> se requiere un análisis del sistema en esta posición. A través de la linealización del sistema, se puede saber si el sistema es controlable y observable alrededor de esta región. Para el cálculo detallado consulte el Apéndice B.

---

<sup>1</sup> i.e. Posición superior: ecuación (3.13).

La linealización del sistema pendubot en ese punto de equilibrio resulta en la siguiente ecuación lineal:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(\theta_2\theta_4 - \theta_3\theta_5)g}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & -\frac{\theta_3\theta_5g}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & 0 & 0 \\ \frac{\theta_5g(\theta_1 + \theta_3) - \theta_4g(\theta_2 + \theta_3)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & \frac{\theta_5g(\theta_1 + \theta_3)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\theta_2}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \\ \frac{\theta_2 - \theta_3}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \end{bmatrix} \tau_2 \quad (3.26)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

De (3.26) y (3.27), se obtienen las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$ , que tiene de la forma siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(\theta_2\theta_4 - \theta_3\theta_5)g}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & -\frac{\theta_3\theta_5g}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & 0 & 0 \\ \frac{\theta_5g(\theta_1 + \theta_3) - \theta_4g(\theta_2 + \theta_3)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & \frac{\theta_5g(\theta_1 + \theta_3)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\theta_2}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \\ \frac{-\theta_2 - \theta_3}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Al utilizar (B.9), (3.28) y (3.29) obtenemos el siguiente resultado,

$$AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\theta_2}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \\ \frac{-\theta_2 - \theta_3}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{g(\theta_4\theta_2^2 + \theta_5\theta_3^2)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \\ -\frac{g(\theta_4\theta_2^2 + \theta_2\theta_3\theta_4 + \theta_1\theta_3\theta_5 + \theta_5\theta_3^2)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \end{bmatrix}$$

$$A^3B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{g(\theta_4\theta_2^2 + \theta_5\theta_3^2)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \\ -\frac{g(\theta_4\theta_2^2 + \theta_2\theta_3\theta_4 + \theta_1\theta_3\theta_5 + \theta_5\theta_3^2)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \end{bmatrix}$$

Para saber si el sistema es controlable<sup>2</sup> se obtiene el determinante, dado por:

$$\det(B|AB|A^2B|A^3B|), \quad (3.30)$$

con lo cual se obtiene lo siguiente:

$$\det(B|AB|A^2B|A^3B|) = \frac{g^2\theta_3^2\theta_5^2}{(\theta_1\theta_2 - \theta_3^2)^4} \quad \forall \theta_3, \theta_5 \neq 0.$$

Así, se concluye que el sistema es controlable alrededor del punto de equilibrio inestable ya que el rango de la matriz de controlabilidad es completo. Por lo tanto, para este sistema linealizado se puede proponer una ley de control por retroalimentación definida por  $\tau_1 = -K^T q$  con un vector de ganancias  $K$  tal que mantenga el sistema en dicho punto de equilibrio.

A continuación se verifica si el sistema es observable. Con ayuda de la definición (B.6) y de las ecuaciones (3.28) y (3.31), se probará si el sistema es observable.

Para ello se tienen los siguientes vectores para la matriz de Observabilidad.

$$C = [ 1 \ 0 \ 0 \ 0 ], \quad (3.31)$$

$$CA = [ 0 \ 0 \ 1 \ 0 ],$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} \frac{-(\theta_2 + \theta_3)\theta_4 g + (\theta_1 + \theta_3)\theta_5 g}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & \frac{(\theta_1 + \theta_3)\theta_5 g}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$CA^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-(\theta_2 + \theta_3)\theta_4 g + (\theta_1 + \theta_3)\theta_5 g}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & \frac{(\theta_1 + \theta_3)\theta_5 g}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \end{bmatrix}.$$

Conformando la matriz de observabilidad y obteniendo su determinante, i.e.

$$\det \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

se obtiene el siguiente resultado

<sup>2</sup> para mayor información sobre propiedades de controlabilidad cite [6]



$$\det \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = \frac{-((- \theta_2 - \theta_3)\theta_4 g + (\theta_1 + \theta_3)\theta_5 g)^2}{(\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2)^2}.$$

Por lo que al evaluar en el punto de equilibrio inestable, se concluye que el sistema en su configuración  $\mathcal{L}_{l_1}$  es también observable.

### 3.6. Ley de control para el balanceo del pendubot

La energía de un robot planar de dos grados de libertad está dada por (2.6), que para el caso del pendubot es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2)) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \theta_2 \dot{q}_2^2 + (\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \theta_4 g \text{sen}(q_1) + \theta_5 g \text{sen}(q_1 + q_2) \quad (3.33)$$

y al evaluar la energía en el punto de equilibrio deseado i.e.  $[\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2] = [\pi/2, 0, 0, 0]$  se obtiene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(0)) 0 + \frac{1}{2} \theta_2 0 + (\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) 0 + \theta_4 g \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) + \theta_5 g \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right).$$

Reduciendo términos se obtiene que la energía del sistema en esta posición es la del punto de equilibrio  $\mathcal{L}_{Top}$  (3.13), donde  $\mathcal{L}_{Top}$  nos indica la energía del sistema en el punto de equilibrio de interés, que obviamente es la energía potencial del sistema.

Por lo tanto en el punto de equilibrio se tiene

$$\begin{aligned} K(q(t), \dot{q}(t)) &= 0 \\ u(q(t)) &= \theta_4 g + \theta_5 g \end{aligned}$$

y de la energía total del robot (3.21), se sabe que el sistema subactuado pendubot es pasivo.

De esta manera, a simple vista se observa de (3.22) y (3.24), que para obtener una ley de control del pendubot es necesario que se cumplan con las siguientes condiciones:

**C1)**  $\dot{q}_1 = 0$

**C2)**  $\mathcal{L}(q, \dot{q}) \approx (\theta_4 + \theta_5)g.$

Entonces la energía del robot está dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 + \theta_4 g \text{sen } q_1 + \theta_5 g \text{sen}(q_1 + q_2) = \theta_4 g + \theta_5 g \quad (3.34)$$

Así, se aprecia que si  $q_1 \neq \pi/2$  entonces  $\dot{q}_2^2 > 0$ , y nuestro objetivo es llevar el sistema al punto de equilibrio por lo que se introducen las siguientes condiciones  $\tilde{q}_1 \approx q_1 - \pi/2$ ,  $\dot{q}_1 = 0$  y  $\tilde{\mathcal{L}}_{Top} = \theta_4 g + \theta_5 g$  y entonces se puede agregar una condición más

**C3)**  $q_1 + q_2 \approx \frac{\pi}{2}$

Así, de (3.34), resulta en

$$\mathcal{L}_{Top} = \theta_4 g + \theta_5 g = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2)) \dot{q}_2^2 + (\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) \dot{q}_2 + \theta_4 g \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \theta_5 g \sin(q_1 + q_2)$$

y reduciendo términos

$$\theta_4 g = \frac{1}{2} \theta_2 \dot{q}_2^2 + \theta_4 g \sin\left(q_1 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Al simplificar esta ecuación y aplicar la identidad trigonométrica  $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$  se obtiene el siguiente resultado

$$\frac{1}{2} \theta_2 \dot{q}_2^2 = \theta_4 g (\cos(q_2) + g). \quad (3.35)$$

La ecuación anterior define una trayectoria muy particular que corresponde a una órbita homoclínica.<sup>3</sup> Esto indica que la posición angular del segundo eslabón (link 2) se mueve en sentido horario o anti-horario, hasta alcanzar el punto de equilibrio en la posición  $(q_2, \dot{q}_2) = (0, 0)$ , la cual puede extenderse hasta  $\infty$ . Así, nuestro objetivo puede llegar a la órbita (3.35) para que  $q_1 \approx \frac{\pi}{2}$ , al mismo tiempo que  $q_1 + q_2 \approx \frac{\pi}{2}$ . Una vez alcanzada la órbita descrita por la ecuación (3.35), se puede asegurar que se ha resuelto el problema de balancear al sistema hasta el punto de equilibrio inestable, que es la configuración  $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ , y entonces el sistema puede ser eventualmente conmutado a un controlador lineal, el cual garantice la estabilidad asintótica local para el punto de equilibrio.

### 3.6.1. Estabilización alrededor de la órbita homoclínica

Basándonos en las propiedades de pasividad (Teorema A.3) para retroalimentación equivalente, esta nos sugiere el uso de una función de almacenamiento  $V(x)$  para el diseño de control. Así, considere  $\tilde{q}_1 = (q_1 - \frac{\pi}{2})$ ,  $\tilde{q}_2 = q_1 + q_2 - \frac{\pi}{2}$  y  $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \mathcal{L}_{Top}$ , en otras palabras  $\tilde{q}_2 = \tilde{q}_1 + q_2$ , y dado que se desea llevar a cero  $\tilde{q}_1$ ,  $\tilde{q}_2$  y  $\tilde{\mathcal{L}}$ . Entonces se propone una función candidata de Lyapunov de la siguiente forma.

$$V(q, \dot{q}) = \frac{K_E}{2} \tilde{\mathcal{L}}(q, \dot{q})^2 + \frac{K_D}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{K_P}{2} \tilde{q}_1^2 + \frac{K_L}{2} \tilde{q}_2^2 \quad (3.36)$$

donde  $K_E, K_D, K_P$  y  $K_L$  son constantes estrictamente positivas, y ya que hemos calculado anteriormente  $\tilde{q}_1 = x_3$  (de (3.10)) y sin hacer el cambio de variable para no calcular con demasiados términos, se hace la siguiente sustitución

$$f(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \left[ \begin{array}{l} \theta_2 \theta_3 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \theta_3^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - \theta_2 \theta_4 g \cos(q_1) \\ + g \theta_3 \theta_5 \cos(q_2) \cos(q_1 + q_2) \end{array} \right], \quad (3.37)$$

<sup>3</sup> i.e Una trayectoria de un sistema dinámico que tiende a un mismo conjunto invariante (Punto de equilibrio, punto de un plano, órbita periódica, etc.) cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

$$\Delta = \theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2, \quad (3.38)$$

y se obtiene

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{\Delta} [f(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) + \theta_2 \tau_1]. \quad (3.39)$$

Dado que  $V(q, \dot{q})$  (de (3.36)) es una función semidefinida positiva, al diferenciarla para ver si efectivamente es una función candidata de Lyapunov apropiada para este sistema, se obtiene:

$$\dot{V} = k_E \tilde{\mathcal{L}} \dot{\mathcal{L}} + k_D \ddot{q}_1 \dot{q}_1 + k_P \dot{q}_1 \tilde{q}_1 + k_L \dot{q}_1 \tilde{q}_2 + k_L \dot{q}_2 \tilde{q}_2, \quad (3.40)$$

Sustituyendo  $\dot{\mathcal{L}} = \tau_1 \dot{q}_1$  para el caso del pendubot:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= k_E \tilde{\mathcal{L}} \dot{q}_1 \tau_1 + k_D \ddot{q}_1 \dot{q}_1 + k_P \dot{q}_1 \tilde{q}_1 + k_L \dot{q}_1 \tilde{q}_2 + k_L \dot{q}_2 \tilde{q}_2 \\ &= \dot{q}_1 \left( k_E \tilde{\mathcal{L}} \tau_1 + k_D \ddot{q}_1 + k_P \tilde{q}_1 + k_L \tilde{q}_2 \right) + k_L \dot{q}_2 \tilde{q}_2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Introduciendo (3.37) en (3.41) resulta en

$$\dot{V} = \dot{q}_1 \left\{ \tau_1 \left( k_E \tilde{\mathcal{L}} + \frac{K_D \theta_2}{\Delta} \right) + \frac{K_D f(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)}{\Delta} + k_P \tilde{q}_1 + k_L \tilde{q}_2 \right\} + \dot{q}_2 \tilde{q}_2. \quad (3.42)$$

Debido a que se necesita que la derivada de  $V$  sea semidefinida negativa, se propone lo siguiente

$$\dot{V} = -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \leq 0 \quad (3.43)$$

Al reducirla se puede dividir en dos ecuaciones, de tal manera que se obtenga

$$\dot{V}_1 = -\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \leq 0. \quad (3.44)$$

y

$$\dot{V}_2 = -\dot{q}_2^2 \leq 0. \quad (3.45)$$

Así, de (3.42), (3.44) y (3.45), se obtiene:

$$-\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 = \dot{q}_1 \left( k_E \tilde{\mathcal{L}} \tau_1 + k_D \ddot{q}_1 + k_P \tilde{q}_1 + k_L \tilde{q}_2 \right) \quad (3.46)$$

y

$$-\dot{q}_2^2 = k_L \tilde{q}_2 \dot{q}_2 \quad (3.47)$$

De esta forma se propone una ley de control tal que

$$\tau_1 \left\{ K_E \tilde{\mathcal{L}} + \frac{K_D \theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} \right\} + \frac{K_D f(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} + K_P \tilde{q}_1 = -\dot{q}_1 - 2\dot{q}_2 \quad (3.48)$$

La cual lleva a

$$\dot{V}_1 = -\ddot{q}_1 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (3.49)$$

Obviamente la ley de control (3.48) puede presentar singularidades, si no se asegura que

$$K_E \tilde{\mathcal{L}} + \frac{K_D \theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} \neq 0 \quad (3.50)$$

De la ecuación de la energía (2.6) se observa que  $\tilde{\mathcal{L}} \geq -2(\theta_4 g + \theta_5 g)$ . Así (3.50) se mantiene si la siguiente desigualdad es satisfecha

$$\frac{K_D \theta_2}{\text{máx}(\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2)} \geq 2K_E (\theta_4 + \theta_5) g \quad (3.51)$$

Obteniendo una cota inferior para  $K_D/K_E$

$$\frac{K_D}{K_E} > \frac{2\theta_2 (\theta_4 + \theta_5) g}{\text{máx}(\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2)} \quad (3.52)$$

Cuando se hace uso de la ley de control (3.48) el pendubot puede establecerse alrededor de cualquiera de sus cuatro puntos de equilibrio. Para evitar cualquier punto singular diferente de (3.42) se necesita que

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\mathcal{L}} \right| &< \min(|\mathcal{L}_{Top} - \mathcal{L}_{mid}|, |\mathcal{L}_{Top} - \mathcal{L}_{l1}|, |\mathcal{L}_{Top} - \mathcal{L}_{l2}|) \\ &= \min(2\theta_4 g, 2\theta_5 g) = c \end{aligned} \quad (3.53)$$

Dado que  $V$  no es una función creciente, se puede llevar (3.53) a (3.49) si las condiciones iniciales son tales que

$$V(0) < K_E \frac{c^2}{2} \quad (3.54)$$

donde (2.45) define una región de atracción, con esta condición la ley de control puede ser escrita como

$$\tau_1 = \frac{-\frac{K_D f(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} - K_P \tilde{q}_1 - K_L \tilde{q}_2 - \dot{q}_1 - 2\dot{q}_2}{\left\{ K_E \tilde{\mathcal{L}} + \frac{K_D \theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2} \right\}}$$

al desarrollar esta ecuación se obtiene el siguiente resultado

$$\tau_1 = \frac{-k_D F(q, \dot{q}) - (q_1 - 2\dot{q}_2 + k_p \tilde{q}_1 + k_L \tilde{q}_2) \Delta}{k_E \tilde{\mathcal{L}} \Delta + k_D \theta_2}. \quad (3.55)$$

Como se observa (3.55), define a (3.44) como una función semidefinida negativa, pero no a la función (3.45), por lo que se define lo siguiente:

$$\dot{V}_2 \leq \dot{V}_1 \leq 0 \quad (3.56)$$

De (3.44) y (3.46) se sabe

$$\dot{V}_2 = -\dot{q}_2 - K_L \tilde{q}_2$$

y debido a que  $\tau_1$  hace a la función  $\dot{V}_1$  semidefinida negativa, se propone lo siguiente:

$$\dot{V}_2 \leq \tau_1 \quad (3.57)$$

donde  $\tau_1 = \alpha + \beta v$ , por lo que el sistema queda representado de la siguiente manera

$$\alpha = -\dot{q}_2 - K_L \tilde{q}_2 \quad (3.58)$$

y

$$\beta = \frac{-k_D F(q, \dot{q}) - (q_1 - 2\dot{q}_2 + k_p \tilde{q}_1 + k_L \tilde{q}_2) \Delta}{k_E \tilde{\mathcal{L}} \Delta + k_D \theta_2}. \quad (3.59)$$

Así, se asegura que (3.45) se cumpla, y por lo tanto (3.56) también es verificada. De esta forma el sistema cuenta con una función candidata de Lyapunov apropiada para llevar al sistema a la órbita (3.35).

Por lo tanto la ley de control final tiene la siguiente forma:

$$\tau_1 = \alpha + \beta v = \frac{-k_D F(q, \dot{q}) - (q_1 - 2\dot{q}_2 + k_p \tilde{q}_1 + k_L \tilde{q}_2) \Delta}{k_E \tilde{\mathcal{L}} \Delta + k_D \theta_2} v - \dot{q}_2 - K_L \tilde{q}_2. \quad (3.60)$$

## 3.7. Simulación

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en simulación numérica para la ley de control basada en energía y la estabilización del sistema en su configuración lineal, así como la conjunción de estas leyes de control, que se conmutan por una función que intercambia las leyes de control que se proveen al sistema para asegurar la estabilización en su punto de equilibrio inestable.

### 3.7.1. Simulación del balanceo del sistema.

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en simulación numérica para la ley de control basada en energía y la estabilización del sistema en su configuración lineal, así como la conjunción de estas leyes de control, que se conmutan por una función que intercambia las leyes de control que se proveen al sistema para asegurar la estabilización en su punto de equilibrio inestable.

### 3.7.2. Simulación del balanceo del sistema.

A continuación se muestran los resultados de la simulación numérica de la ley de control basada en energía para el sistema pendubot. Para esta simulación se utilizan las siguientes condiciones iniciales.

*Condición inicial: Posición inferior:*

$$\begin{pmatrix} q_1(0) & = & \frac{\pi}{2} \\ q_2(0) & = & 0 \\ \dot{q}_1(0) & = & 0 \\ \dot{q}_2(0) & = & 0 \end{pmatrix}$$

En la sección anterior se diseñó una ley de control para el sistema subactuado pendubot, de manera que el sistema presente la forma de un sistema interconectado en retroalimentación. En la ley de control (3.60) se dan una serie de ganancias ( $K_E$ ,  $K_P$ ,  $K_D$  y  $K_L$ ), las cuales deben ser estrictamente definidas positivas, para que el sistema cumpla con la condición (3.36), por lo que en la simulación numérica del sistema se proponen las ganancias dadas por la Tabla 3.3.

Constante	Valor
$K_E$	30
$K_D$	35
$K_P$	45
$K_L$	31

Tabla 3.3: Ganancias del controlador (3.60), implementado en simulación numérica.

En las Figuras (3.6) y (3.7) se observa como los estados del sistema se mantienen dentro de la orbita homoclínica descrita por (3.35). En (3.8) se observa el perfil de la ley de control.

En la Figura (3.9) se puede ver como la energía del sistema trata de mantenerse en la energía de referencia descrita por  $\mathcal{L}_{Top}$ . En la Figura 3.9 podemos ver que la función candidata de Lyapunov, como ya se había previsto anteriormente, es semidefinida positiva.

Debido a que la ley de control (3.60) no estabiliza al sistema en el punto de equilibrio  $\mathcal{L}_{Top}$ , como ya se había mencionado anteriormente, es necesario de diseñar una ley de control que estabilice al sistema, por lo que se propone el esquema completo, el cual contempla una ley de control lineal (LQR) a la cual se conmutará en una vecindad del punto de equilibrio deseado.

En el controlador (LQR) lo que se desea es encontrar los valores óptimos de  $K$  para la estabilización asintótica del sistema de manera global en el punto de equilibrio superior, el controlador LQR es considerado en este tema de tesis por las ventaja de que es un controlador óptimo y no es necesario de asignar polos, con el simple hecho de proponer una matriz  $Q$  que sea no negativa y una  $R$  que sea estrictamente positiva, el controlador LQR nos garantiza estabilidad asintótica.

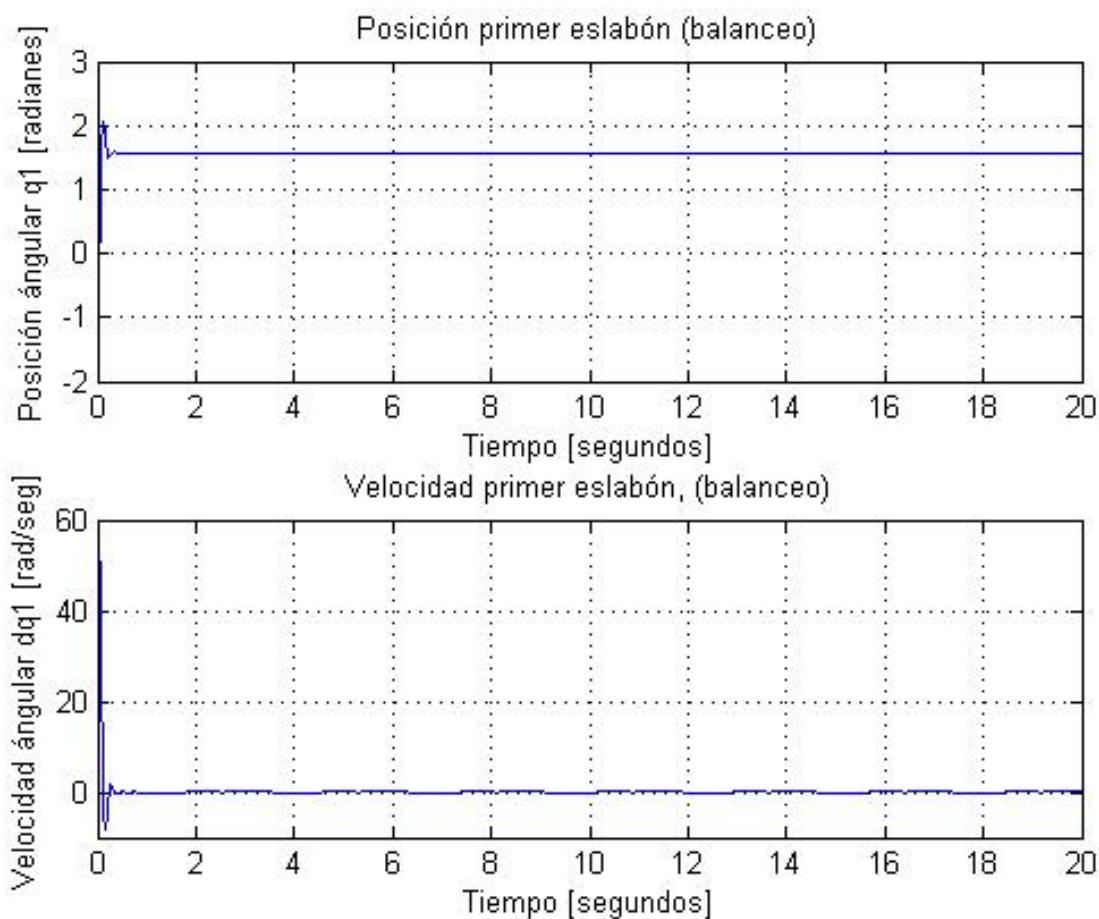


Figura 3.6: Estados del primer eslabón del sistema pendubot.

En la Figura 3.6 se observa como el estado  $q_1$  y  $\dot{q}_1$  tratan de llegar a su referencia, en este caso  $q_1 \approx \pi/2$  y  $\dot{q}_1 \approx 0$  dada por una de las condiciones previamente impuestas en el algoritmo de control.

En este caso la simulación numérica, el controlador lleva al sistema exactamente a  $q_1 = \pi/2$  y  $\dot{q}_1 = 0$ , lo cual indica que la órbita homoclínica está en los estados  $q_2$  y  $\dot{q}_2$  como se ve en la siguiente figura.

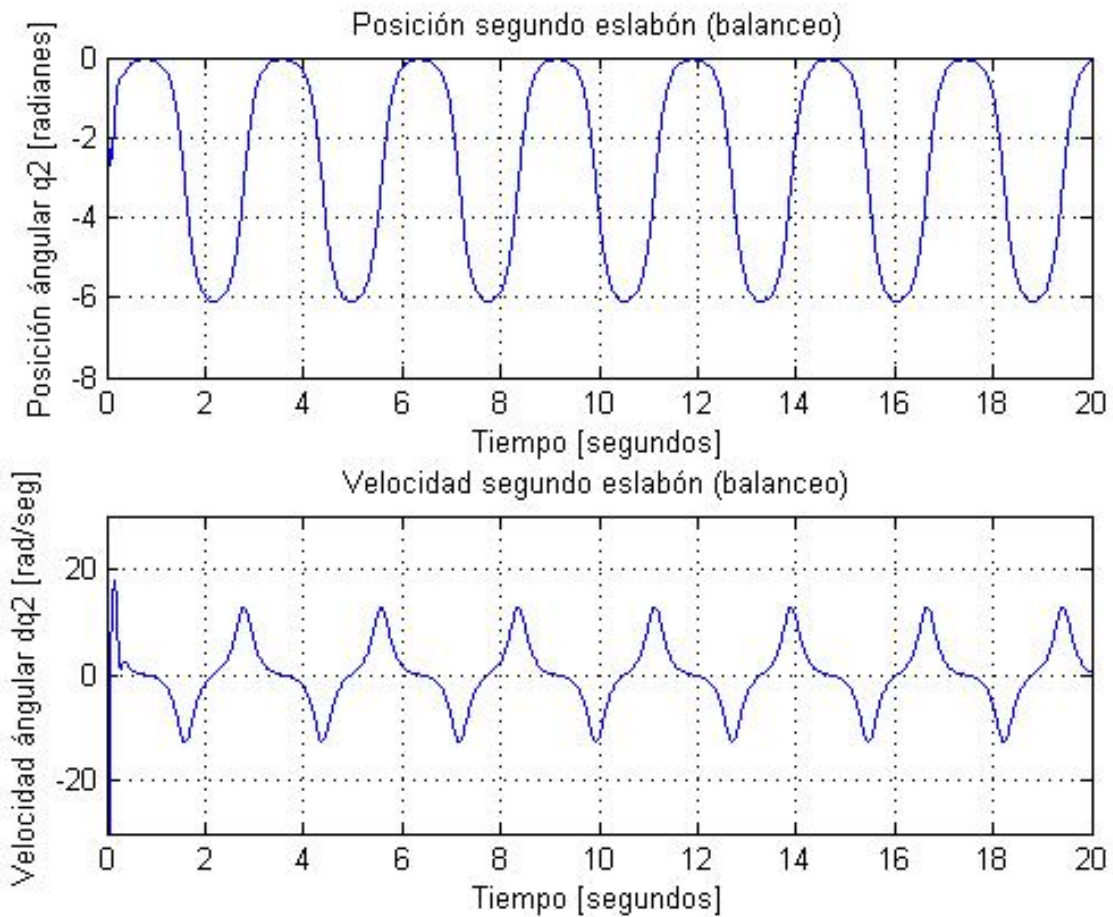


Figura 3.7: Estados del segundo eslabón del sistema pendubot.

A la vez en la Figura 3.7 se nota como los estados  $q_2$  y  $\dot{q}_2$  se aproximan a su referencia, i.e.  $q \approx 0$  y  $\dot{q}_2 \approx 0$ , de esta manera se puede observar que al aproximarse el sistema a sus referencias, este trata de mantenerse en la región de la órbita homoclínica.

Viendo detenidamente la salida del estado  $q_2$  en un intervalo de tiempo, el sistema presenta características de periodicidad, lo cual refleja que la órbita homoclínica se está desarrollando en el estado  $q_2$  y  $\dot{q}_2$  como previamente se diseñó en (3.35).



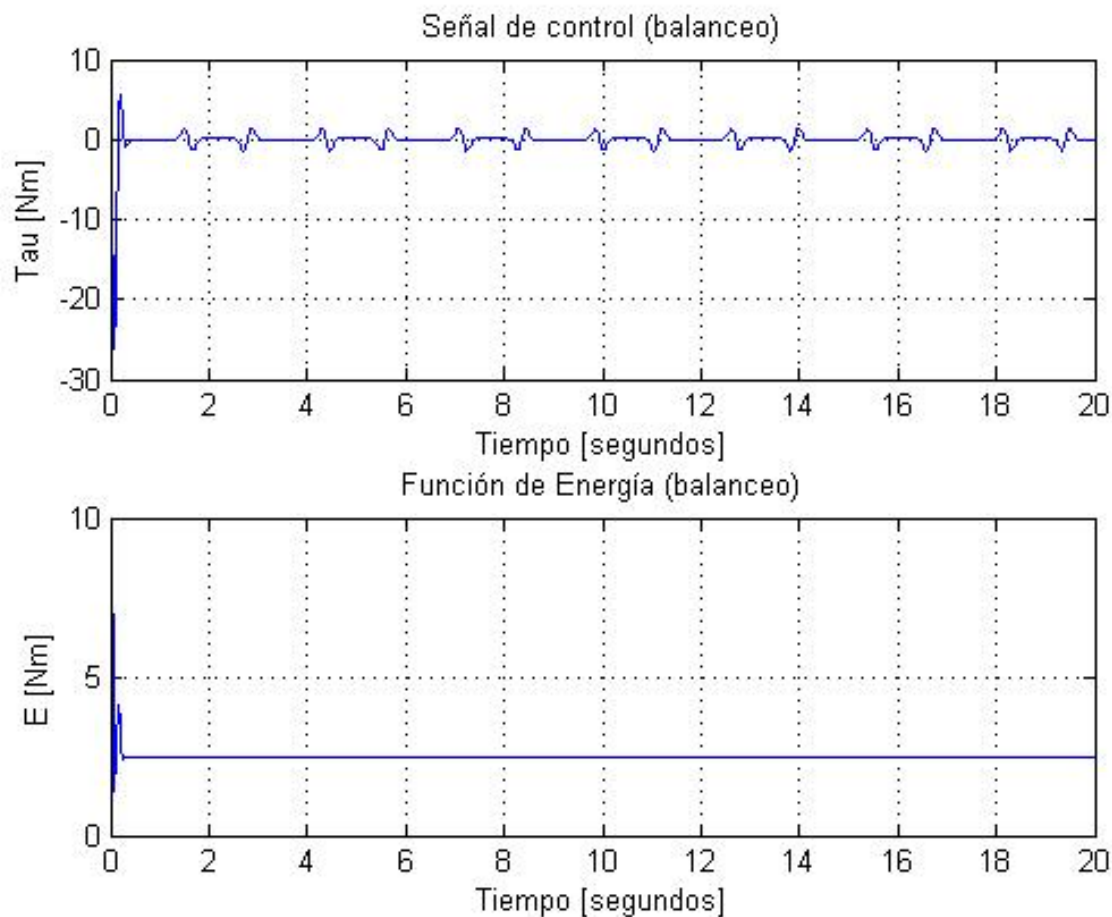


Figura 3.8: Ley de control y función de energía.

Así, el sistema se mantiene en una vecindad apropiada de la energía deseada, por lo que la condición **C2)** se cumple, como se puede apreciar en la Figura 3.8. En la Figura 3.8 se puede ver el comportamiento de la ley de control, así como también el desempeño de la función de energía del sistema.

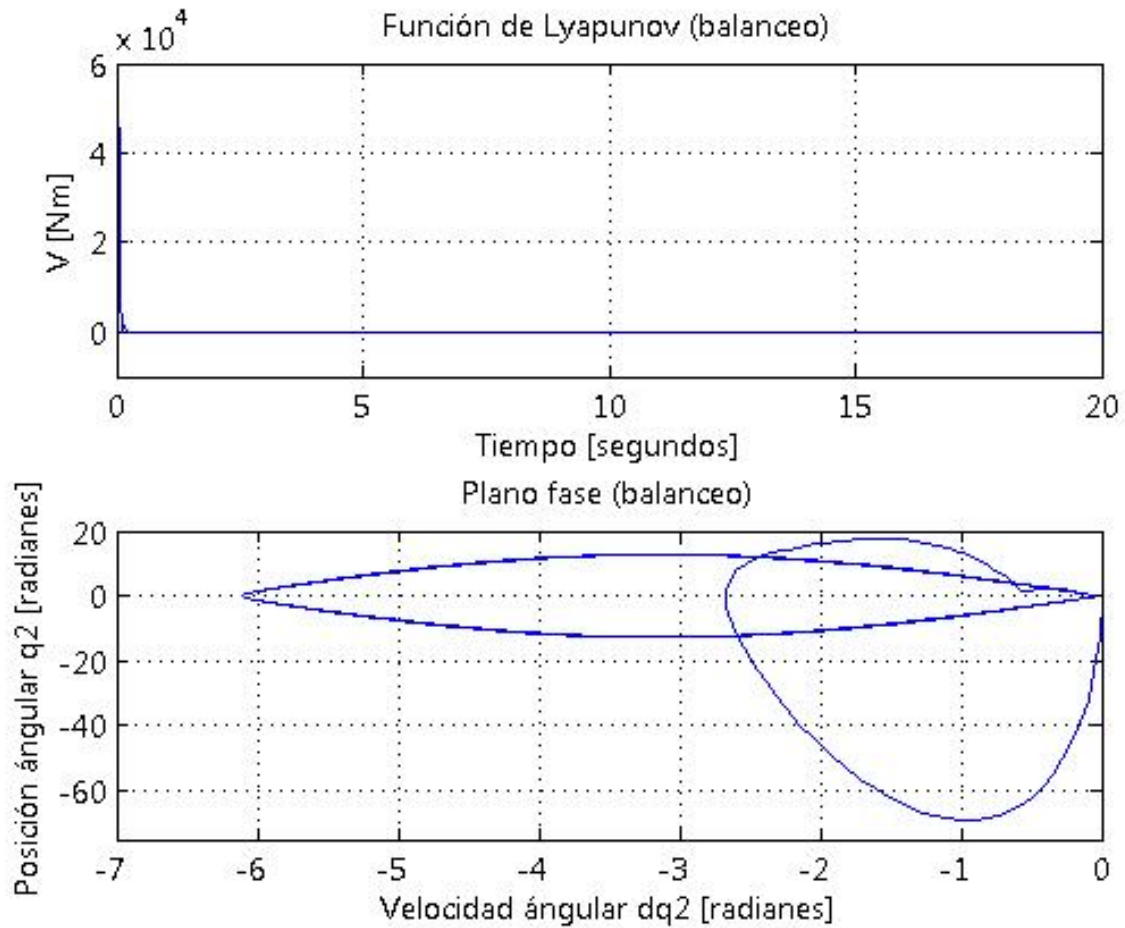


Figura 3.9: Función de Lyapunov y plano fase.

En la Figura 3.9 se muestra como la función candidata de Lyapunov es mayor a cero, y de esta manera como ya se había previsto en el diseño de la ley de control, se cumple con (3.36), también podemos ver como la función de energía trata de llegar al valor propuesto por la energía del sistema en la posición superior, así como también como se comporta el plano fase del sistema, que en este caso representa el comportamiento de la órbita homoclínica del sistema. Esta órbita es representada por (3.35) propuesta en el diseño de la ley de control, esta órbita fue obtenida en la estabilización alrededor de la órbita homoclínica.

### 3.7.3. Esquema completo de control.

Una vez que se lleva al sistema a la órbita dada por (3.35), se conmuta a una ley de control que estabilice al sistema en su configuración inestable. Para esto se ha propuesto un control LQR con las siguientes características.

$$Q = \begin{matrix} R = 2.5 \\ \begin{bmatrix} 1000 & -500 & 0 & 0 \\ -500 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & -500 \\ 0 & 0 & -500 & 1000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Al hacer el cálculo, se obtienen las siguientes ganancias que deben emplearse en la vecindad del punto de equilibrio para la ley de control lineal  $u = K^T x$ :

$$K = [ -696.3386 \quad -666.2143 \quad -138.8293 \quad -92.2485 ].$$

Con esta ganancia se asegura que el sistema sea asintóticamente localmente estable en la configuración antes mencionada.

Al declarar una función de conmutación, se debe buscar una región de atracción del controlador LQR para que cuando el sistema esté cerca de esta región de atracción, el control cambie a dicho esquema. Para esto se propone la siguiente función de conmutación:

$$|(q_1 - \frac{\pi}{2})| < \rho_1 \quad y \quad |(\frac{\pi}{2} - (q_1 + q_2))| < \rho_2, \quad \rho_1 \quad \rho_2 > 0. \quad (3.61)$$

En las Figuras 3.10, y 3.11 se puede observar, a diferencia de las Figuras 3.6 y 3.7, como el sistema se estabiliza en el punto de equilibrio deseado  $\mathcal{L}_{Top}$ . En la Figura 3.11 se observa la evolución de su respectiva ley de control y como está al cambiar de controlador converge al punto de equilibrio inestable.

En la Figura 3.13 se puede ver la energía total del sistema que converge a la función de energía total del sistema en el punto de equilibrio inestable (i.e.  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_{Top}$ ). En la Figura 3.13 se puede ver el perfil de la función candidata de Lyapunov.

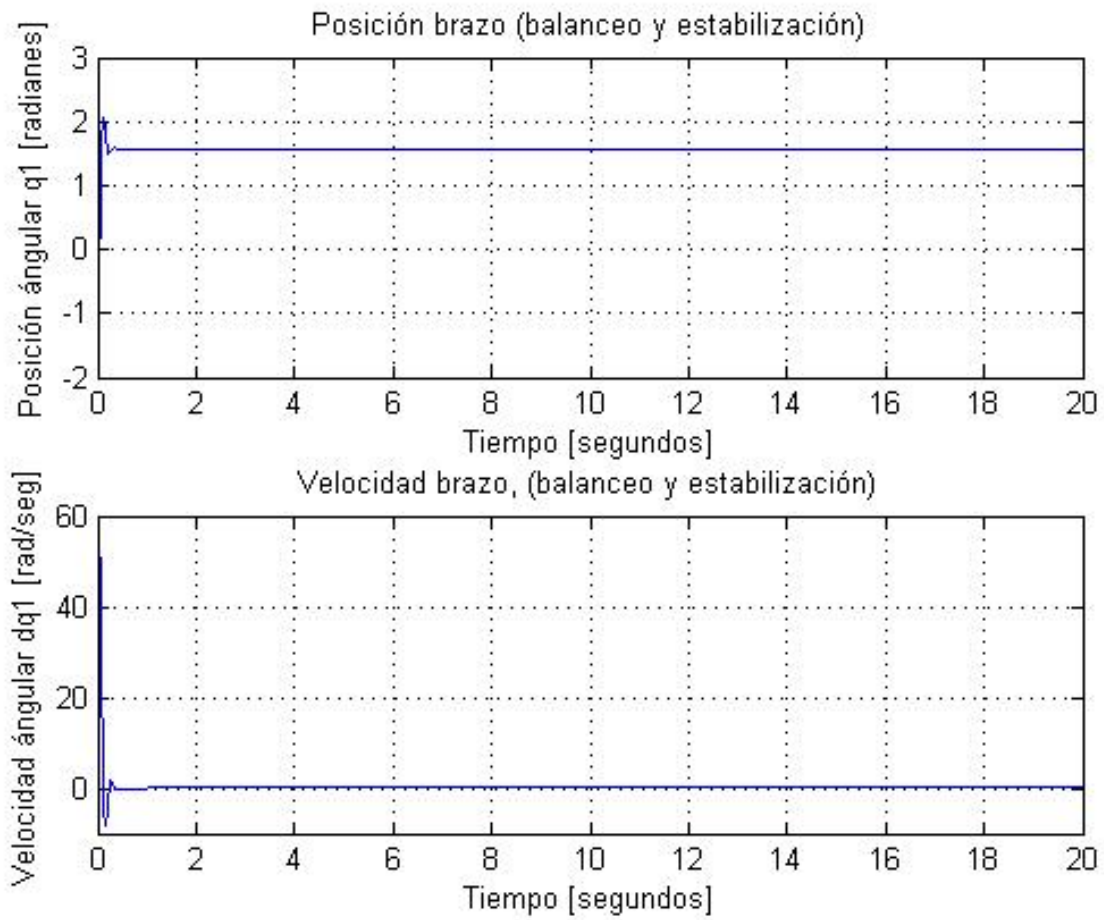


Figura 3.10: Estados del primer eslabón del sistema pendubot controlado íntegramente.

En la Figura 3.10 se puede apreciar, al igual que en la Figura 3.6, como el sistema llega a las condiciones planteadas anteriormente,  $q_1 = \pi/2$  y  $\dot{q}_1 = 0$  para poder llegar a la órbita homoclínica descrita por (3.35).

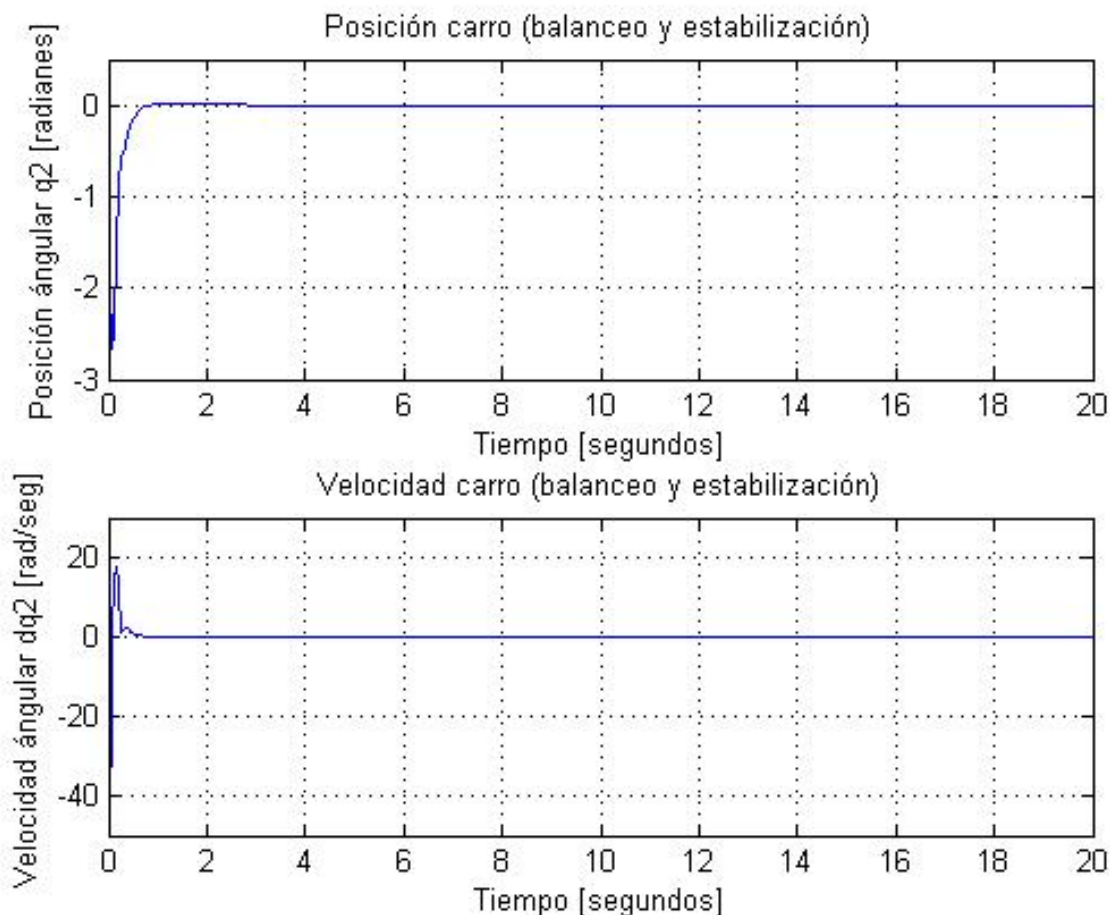


Figura 3.11: Estados del segundo eslabón del sistema pendubot controlado íntegramente.

En la Figura 3.11 se observa como los estados  $q_2$  y  $\dot{q}_2$  la entrar a la órbita homoclínica convergen a la solución del problema planteado en este proyecto de tesis, y una vez alcanzando estos estados una región de atracción, conmutamos a un controlador LQR para estabilizarlo, y claramente esta figura nos indica que la estabilización del sistema es alcanzada en un tiempo aproximado a 10 segundos.

En la Figura 3.12 se observa el comportamiento de la ley de control, así como la energía del sistema.

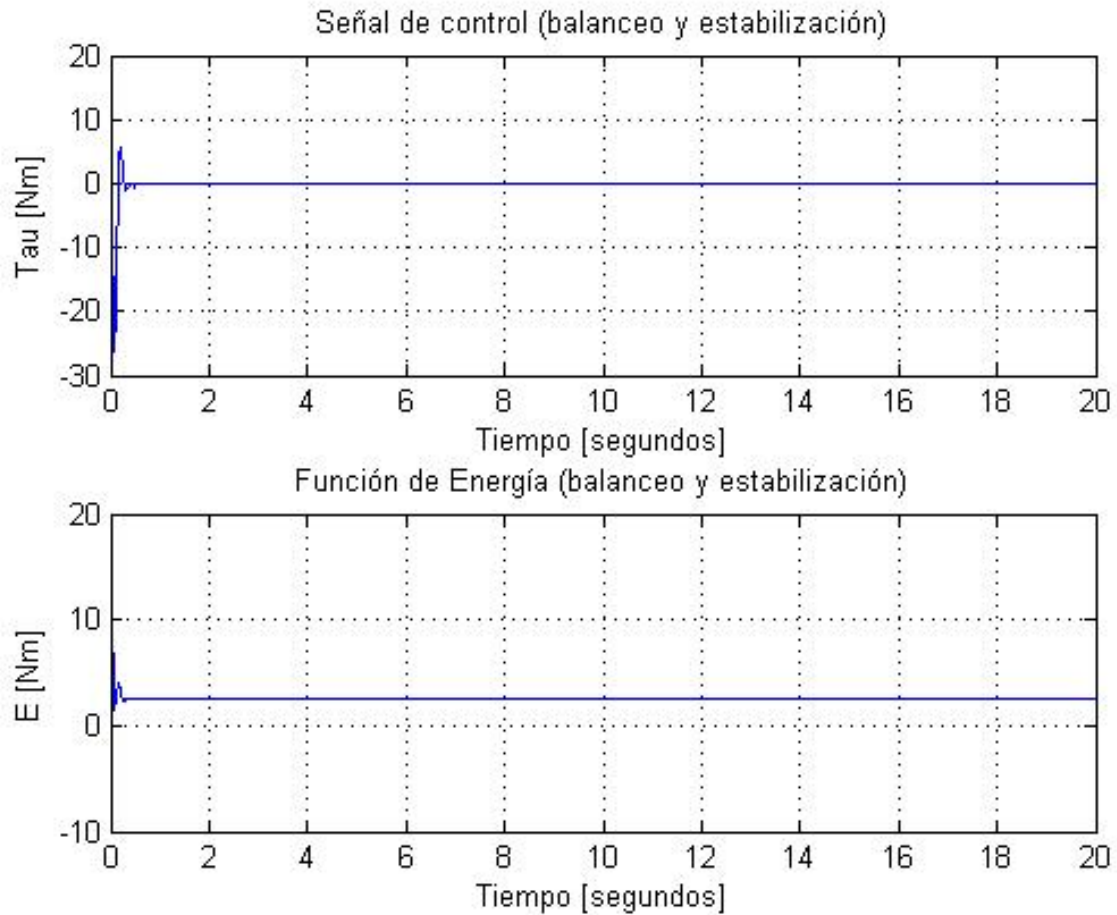


Figura 3.12: Ley de control y función de energía del pendubot con ley controlado integral.

Como se puede ver en la Figura 3.12, una vez estabilizado el sistema la ley de control esta no demanda fuerza de torque alguna, eso es debido a que la ley de control para estabilización del sistema es un regulador<sup>4</sup> en este caso como se mencionó anteriormente aplicamos un LQR. También podemos ver como la función de energía llega al valor propuesto por la energía del sistema en la posición superior.

---

<sup>4</sup> i.e. llevar la señal de error a cero.

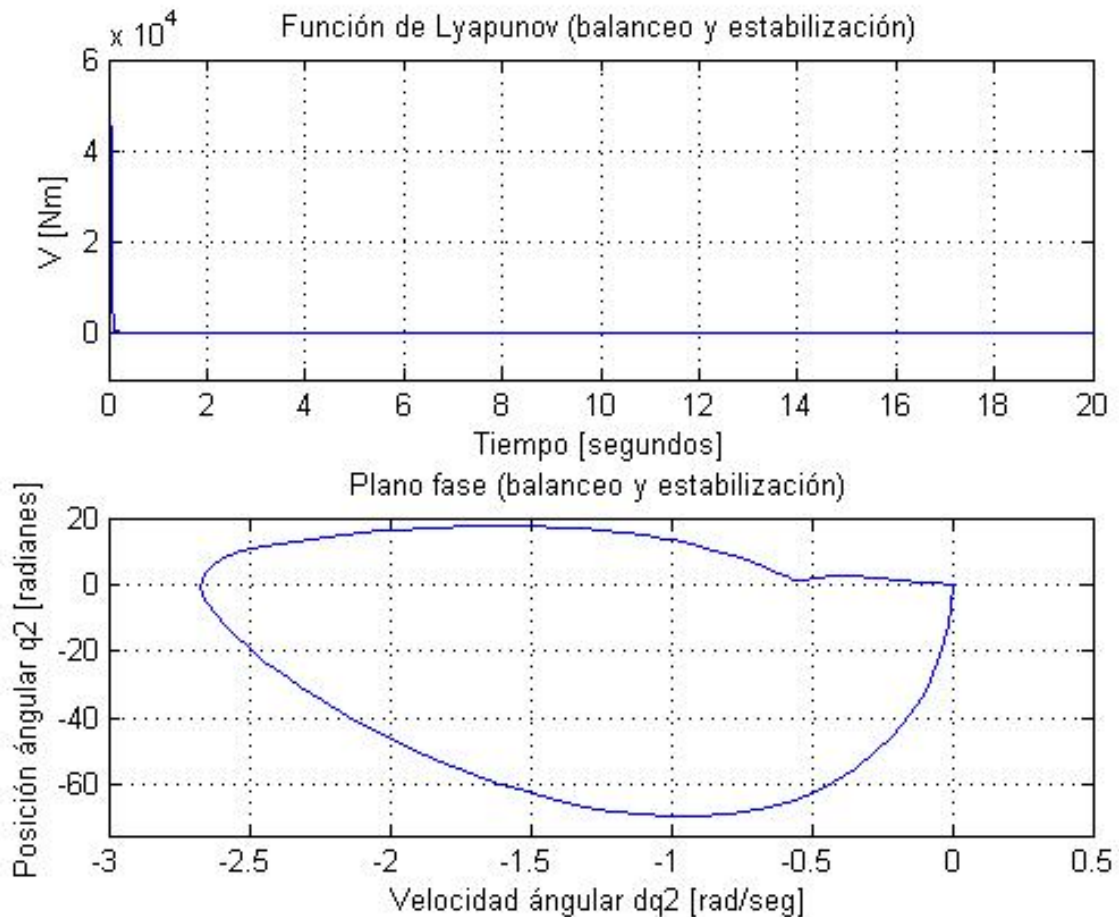


Figura 3.13: Función de Lyapunov y plano fase.

En la Figura 3.13 se muestra como la función candidata de Lyapunov es mayor a cero, y de esta manera como ya se había previsto en el diseño de la ley de control, se cumple con (3.36), también se ve como el plano fase del sistema converge a la solución del problema.

### 3.8. Aplicación del control a otros sistemas subactuados.

Con el fin de ilustrar el potencial de la metodología propuesta, se aplicó esta misma metodología a dos sistemas electro-mecánicos subactuados conocidos como el Péndulo Invertido y el Péndulo de Furuta.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en simulación numérica.

#### 3.8.1. Sistema subactuado péndulo invertido.

El sistema péndulo invertido es uno de los sistemas subactuados, que son implementados de forma artificial. Son bastante comunes en laboratorios para el estudio de técnicas de control no lineales.

El sistema péndulo invertido es un sistema electromecánico, el cual consta de un péndulo montado en un carro. El carro es el sistema actuado mientras que el péndulo rota libremente al rededor de su punto de apoyo (ver Figura 3.14).

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Distancia al centro de masa del eslabón	$l$	0.6	$m$
Masa del eslabón	$m$	0.23	$Kg$
Masa del carro	$M$	0.52	$kg$
Inercia eslabón respecto al centro de masa	$I$	0.007	$Kg \cdot m^2$
Aceleración de gravedad	$g$	9.81	$m/seg^2$

Tabla 3.4: Parámetros y variables del sistema Péndulo Invertido.

### Modelado matemático.

El sistema péndulo invertido, Figura 3.14 es un sistema electromecánico de segundo orden, de dos grados de libertad, donde el carro es único que cuenta con actuador. Así el péndulo puede ser controlado por el accionamiento del carro.

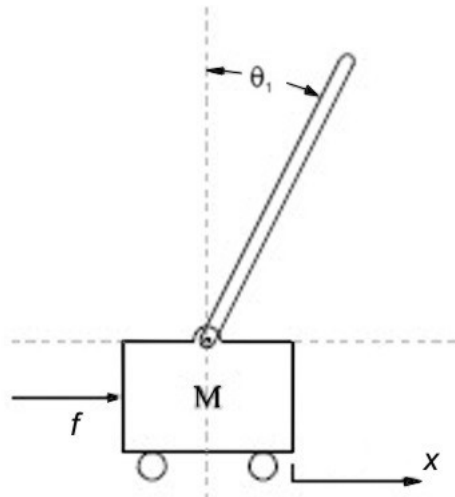


Figura 3.14: Sistema subactuado Péndulo Invertido [1].

El modelo matemático del manipulador descrito en diagrama de cuerpo libre por la Figura 3.14, puede ser obtenido por la segunda ley de Newton y por la metodología de Euler-Lagrange. Para el modelo del sistema se considera una suposición estándar, i.e. sin fricciones, ni fuerzas disipativas. El péndulo es asociado con las siguientes variables operacionales:

- a)  $x$ : mide la distancia del centro de masa del carro de su posición actual.
- b)  $\theta$ : mide el ángulo del péndulo de la posición vertical.



El vector de posiciones articulares  $q(t)$  se define como:

$$q(t) = [ x(t) \quad \theta(t) ]^T$$

La energía cinética  $K(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q})$  para este brazo puede descomponerse en dos partes donde  $K_1(q, \dot{q})$  y  $K_2(q, \dot{q})$  son energías cinéticas asociadas a las masas  $m$  y  $M$  respectivamente.

### Ecuaciones de Euler-Lagrange.

Primero se presenta la energía cinética y potencial, las cuales son usadas para el cálculo del Lagrangiano.

La energía cinética del carro es:

$$K_1 = M \frac{\dot{x}^2}{2}, \quad (3.62)$$

y la energía cinética del péndulo es:

$$K_2 = m \frac{\dot{x}_G^2}{2} + m \frac{\dot{y}_G^2}{2} + I m \frac{\dot{\theta}^2}{2}, \quad (3.63)$$

donde  $x_g = x + l \sin \theta$  y  $y_g = l \cos \theta$ . Así la energía potencial del sistema está dada por

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + ml \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{2} (I + ml^2) \dot{\theta}^2. \quad (3.64)$$

La energía potencial es  $u = mlg(\cos \theta - 1)$ . Así el Lagrangiano está dado por (2.6), de donde se obtiene:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + ml \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{2} (I + ml^2) \dot{\theta}^2 - mgl (\cos \theta - 1). \quad (3.65)$$

Usando la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange (2.7), donde  $q = (q_1, q_2)^T = (x, \theta)^T$  representan las variables configuracionales, y  $\tau = (\tau_1, \tau_2)^T = (f, 0)^T$  denota las fuerzas aplicadas de torque. Así desarrollando (2.7), se obtiene:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = (M + m) \dot{x} + ml \dot{\theta} \cos \theta,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml \dot{x} + (I + ml^2) \dot{\theta},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mgl \sin \theta - ml \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta.$$

Debido a que el momento de inercia es muy pequeño, decimos que este es despreciable. Así, el sistema puede ser representado en (2.10), como:

$$D(q) = \begin{bmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & ml^2 \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -ml \operatorname{sen} \theta \dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -m \lg \operatorname{sen} \theta \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

por propiedades de los sistemas Euler-Lagrange, sabemos que  $D(q)$  es simétrica y definida positiva.

$$\det(D(q)) = (M + m) ml^2 - m^2 l^2 \cos^2 \theta > 0 \quad (3.69)$$

del Lema 2.2 se puede verificar lo siguiente:

$$\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & ml \operatorname{sen} \theta \dot{\theta} \\ -ml \operatorname{sen} \theta \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

que es una matriz antisimétrica por lo que el Lema 2.2 queda demostrado para este sistema. De (2.13) y del Lema 2.2, se sabe que:

$$\dot{\mathcal{L}} = \dot{q}^T \tau \quad (3.71)$$

también se tiene que

$$\dot{q}^T = [ \dot{x} \quad \dot{\theta} ] \quad y \quad \tau = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

por lo que se obtiene:

$$\dot{\mathcal{L}} = \dot{x} f \quad (3.73)$$

Al Integrar (3.73), resulta en

$$\int_0^t \dot{x} f dt = \mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(0) \geq -2m \lg - \mathcal{L}(0) \quad (3.74)$$

De la definición de un sistema Euler-Lagrange pasivo, se puede verificar que tomando a la entrada de control  $f$  como la entrada al sistema, y a  $\dot{x}$  como su salida, entonces el sistema es pasivo.

Se observa que para  $f = 0$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$ , el sistema tiene dos puntos de equilibrio, respecto al péndulo, en las siguientes configuraciones.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta} \end{pmatrix} &= (*, 0, 0, 0), \\ \begin{pmatrix} x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta} \end{pmatrix} &= (*, \pi, 0, 0), \end{aligned} \quad (3.75)$$

donde el primero, es el punto de equilibrio inestable, y el segundo es el punto de equilibrio estable.

**Ley de control de balanceo del péndulo Invertido.**

Siguiendo con la metodología de diseño de control del Capítulo 3, se obtiene lo siguiente:

$$K(q, \dot{q}) = 0, \quad (3.76)$$

y

$$u(q) = -mgl(\cos \theta - 1). \quad (3.77)$$

Al evaluar la ecuación de energía en el punto de equilibrio inestable, resulta en:

$$\frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2 = mlg(\cos \theta - 1), \quad (3.78)$$

donde esta última, define una trayectoria la cual es la orbita homoclínica.

**Estabilización alrededor de la orbita homoclínica.**

De las propiedades de pasividad para retroalimentación equivalente, se puede hacer uso de una función de almacenamiento  $V(x)$  para el diseño de control. Por lo que se consideran las siguientes variables, de acuerdo al Capítulo 4,  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\theta$  y  $\mathcal{L}$ , y lo deseado es llevar a cero a estas variables.

Entonces se prosigue con la función candidata de Lyapunov propuesta en (2.28) de la forma siguiente:

$$V(q, \dot{q}) = \frac{k_E}{2}L(q, \dot{q})^2 + \frac{k_D}{2}\dot{x}^2 + \frac{k_P}{2}x^2 + \frac{k_L}{2}\tilde{\theta}^2, \quad (3.79)$$

donde  $\tilde{\theta}$  es la condición **C3**), de tal forma que  $\tilde{\theta} = \theta + x$ . Del modelo dinámico (2.29), se obtiene lo siguiente:

$$f(q, \dot{q}) = m\text{sen}\theta \left( l\dot{\theta}^2 - g \cos \theta \right), \quad (3.80)$$

y

$$\Delta = (M + m\text{sen}^2\theta). \quad (3.81)$$

Así, siguiendo con el algoritmo de (2.34) y (2.35), se puede definir a (2.36) y (2.37) de la siguiente manera.

$$\dot{V} = -\left(\dot{x} + \dot{\theta}\right)^2, \quad (3.82)$$

$$\dot{V}_1 = -\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{\theta} \leq 0, \quad (3.83)$$

y

$$\dot{V}_2 = -\dot{\theta}^2 \leq 0. \quad (3.84)$$

Así, el algoritmo de control, al desarrollar (2.38), (2.39), (2.40), (2.41), (2.43) y (2.50), se llega a una ley de control como se muestra a continuación.

$$\tau = \frac{-k_D f(q, \dot{q}) - \Delta \left( k_L \ddot{\theta} + \dot{x} + 2\dot{\theta} + k_P x \right)}{\underbrace{k_E L \Delta + k_D}_{\beta}} \underbrace{-\dot{\theta} - k_L \theta}_{\alpha}. \quad (3.85)$$

De esta manera con la implementación de (3.85), se asegura que el sistema entre en la región de atracción.

### Linealización del sistema.

Nuevamente cuando el sistema es llevado a su configuración inestable es necesario conmutar a un controlador LQR para estabilizarlo, por lo que el sistema tiene que ser linealizado y verificarse también si el punto de equilibrio configuración inestable del sistema es controlable.

Del modelo dinámico del sistema lo obtiene lo siguiente:

$$\ddot{x} = \frac{1}{M + m \operatorname{sen}^2 \theta} [m \operatorname{sen} \theta (l \theta^2 - g \cos \theta) + f], \quad (3.86)$$

y

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{l(M + m \operatorname{sen}^2 \theta)} [-ml \theta^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + (M + m) g \operatorname{sen} \theta - f \cos \theta]. \quad (3.87)$$

Linealizando el sistema alrededor del punto de equilibrio inestable se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)g}{lM} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{lM} \end{bmatrix} f, \quad (3.88)$$

y de la configuración  $\dot{q} = Aq + Bf$ , para la controlabilidad del sistema, se obtiene lo siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{lM} \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{lM} \end{bmatrix}, \quad A^2B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mg}{M^2 l} \\ -\frac{(M+m)g}{l^2 M^2} \end{bmatrix},$$

y

$$A^3B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mg}{M^2 l} \\ -\frac{(M+m)g}{l^2 M^2} \end{bmatrix}.$$

Debido a que  $\det(B | AB | A^2B | A^3B) \neq 0$ , se concluye que la linealización del sistema es controlable ya que la matriz de controlabilidad es de el rango completo. Por lo tanto, se puede decir que para el sistema linealizado se puede proponer una ley de control por retroalimentación definida por  $\tau_1 = -K^T q$  con un vector de ganancias apropiado  $K$  tal que mantenga en el sistema en el punto de equilibrio inestable.

### Simulación.

A fin de ilustrar el comportamiento del sistema bajo la acción de control por balanceo, se ilustraran los resultados de la ley de control (3.85), implicando en ella la conmutación de la ley de control (3.61) para su estabilización. Al sistema controlado al aplicar los parámetros de la Tabla 3.4 se obtienen los siguientes resultados.

Las condiciones iniciales en las que el sistema fue implementado en la simulación numérica son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} x(0) = 0.5 \\ \theta(0) = \pi \\ \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{pmatrix}$$

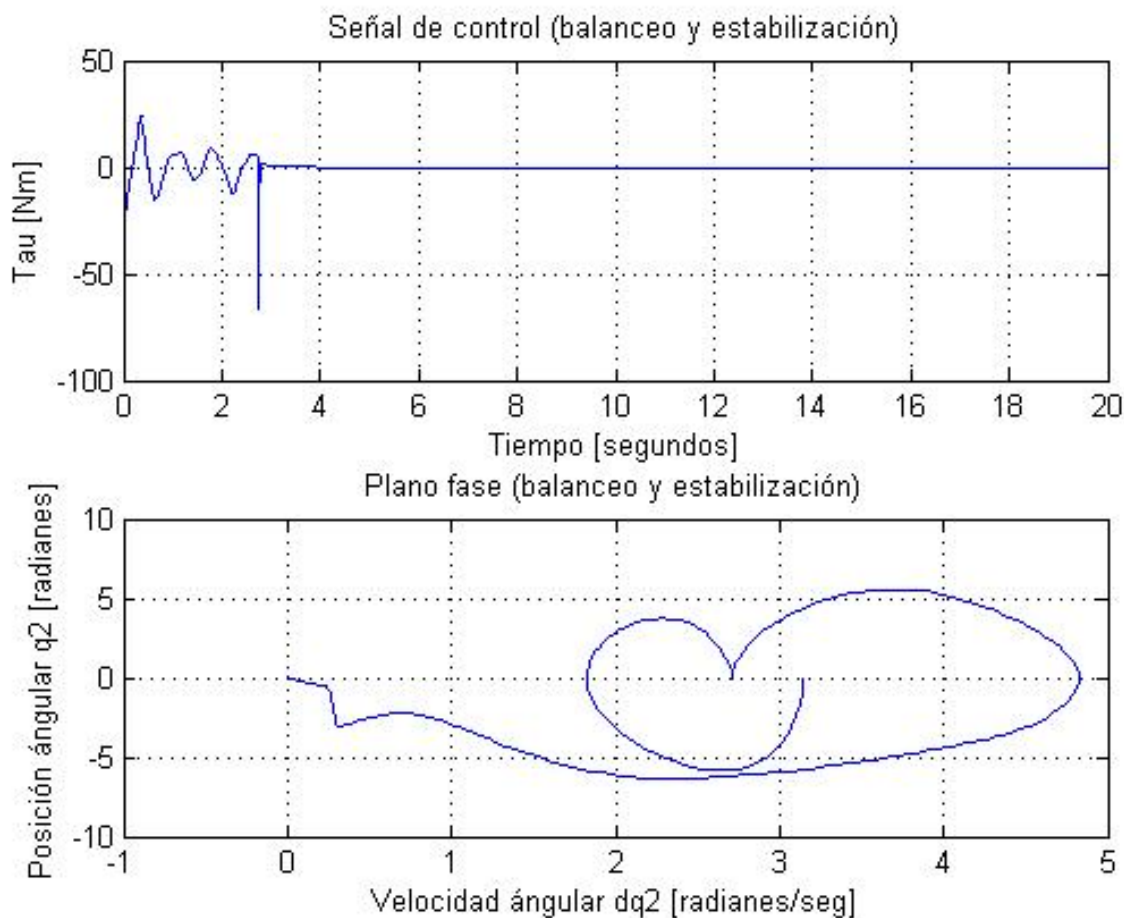


Figura 3.15: Ley de control integral para el péndulo Invertido.

En la Figura 3.15 se observa el comportamiento de la ley de control integral para el sistema péndulo Invertido, así como el plano fase el cual representa a la órbita homoclínica descrita por (3.78).

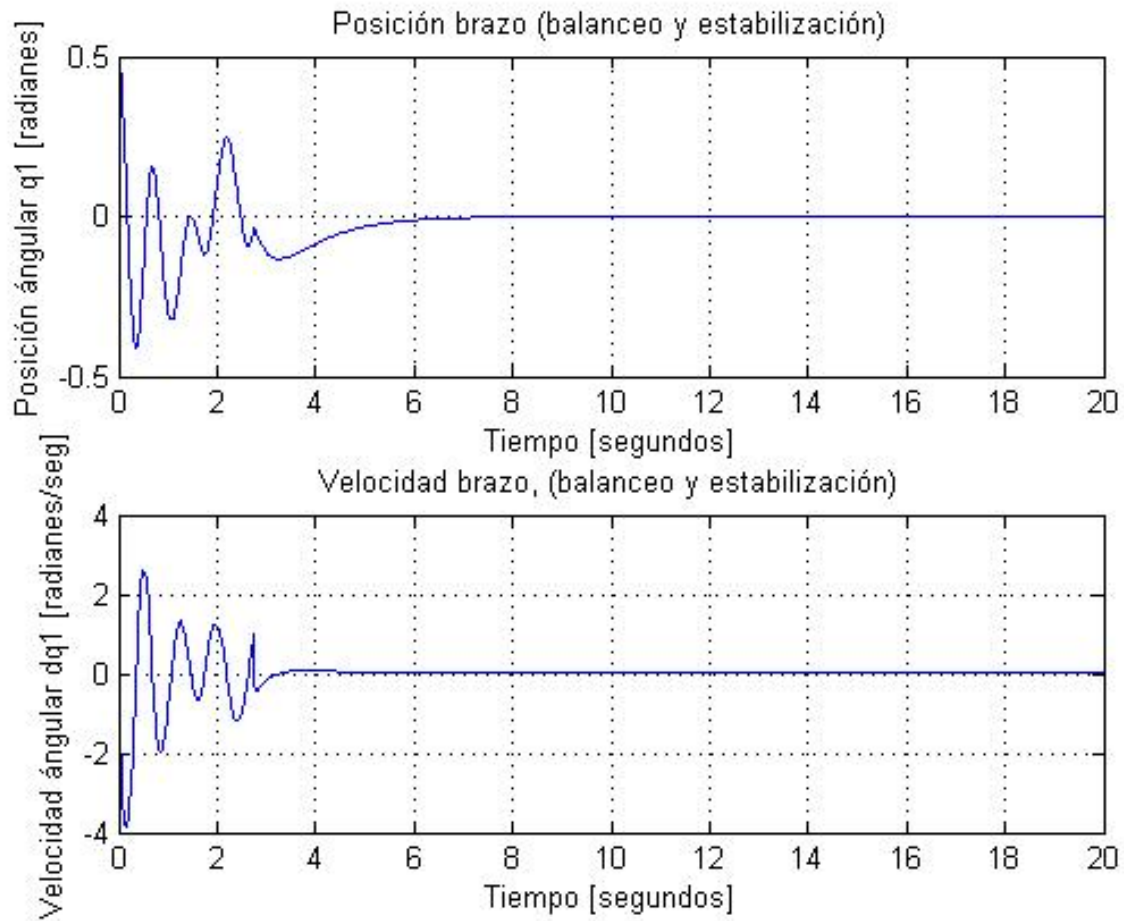


Figura 3.16: Ángulo del péndulo integral para el péndulo Invertido.

En la Figura 3.16 se observa el comportamiento de los estados del sistema  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  y como estos después de entrar en la región de atracción y conmuta a un controlador LQR para la estabilización en un tiempo menor a 4 segundos.

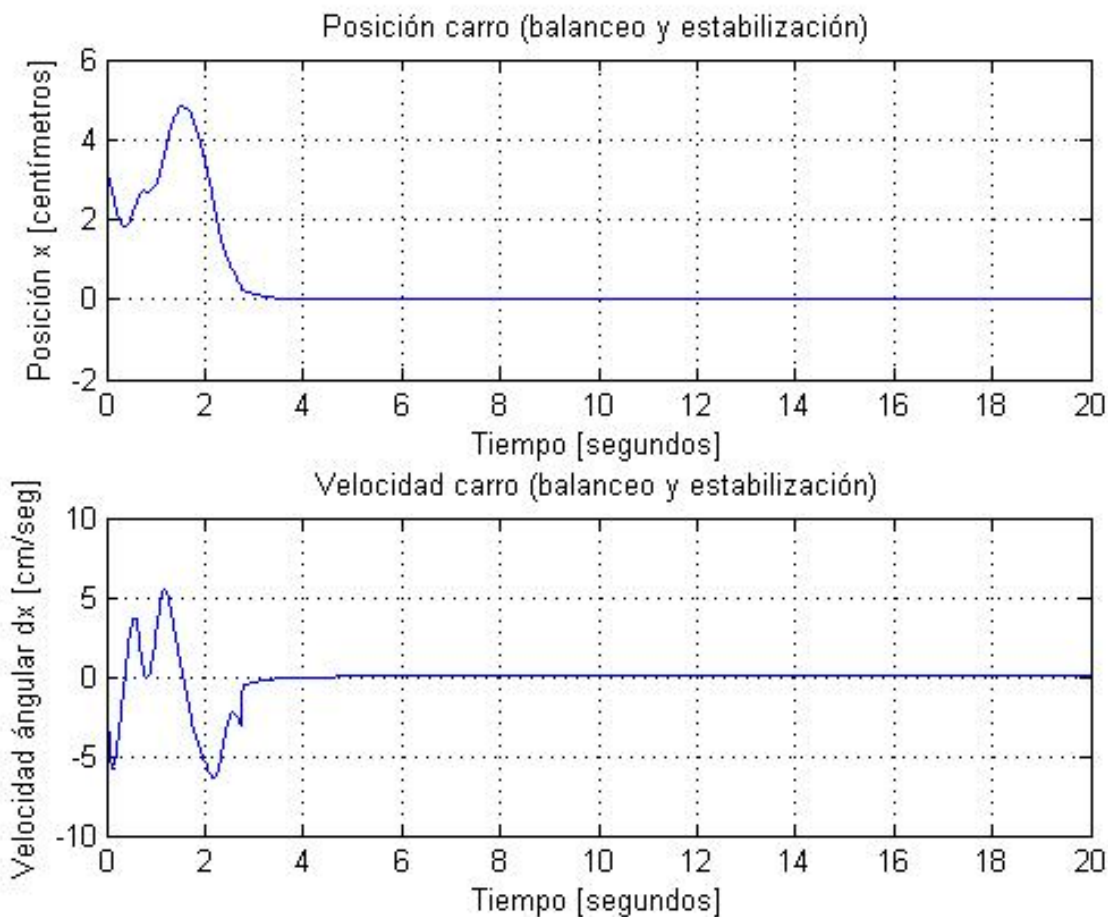


Figura 3.17: Posición del carro integral para el péndulo Invertido.

En la Figura 3.17 se observa como los estados  $x$  y  $\dot{x}$  los cuales corresponden a la posición del carro convergen a cero en un tiempo menor a 4 segundos. Como se puede observar en las figuras anteriores, el sistema péndulo invertido bajo la acción de control, propuesta en este tema de tesis, logra llevar a sistema a su configuración inestable desde una configuración la cual es un otro punto de equilibrio.

### 3.8.2. Metodología aplicada al sistema péndulo de Furuta.

El sistema Péndulo Furuta o péndulo rotatorio fue creado por el Dr. K. Furuta del Instituto de Tecnología de Tokio, el cual es un sistema subactuado de dos grados de libertad ambos rotacionales llamados brazo y péndulo. El movimiento del brazo (primer grado de libertad) se realiza en un plano horizontal girando alrededor de un eje perpendicular al plano, mientras que el péndulo se encuentra colocado en un extremo del brazo y su eje de giro es colineal al eje axial del brazo y su movimiento se realiza en un plano perpendicular al de este último.

El sistema Péndulo Furuta, al igual que el sistema Péndulo Invertido es un sistema subactuado implementado de manera artificial, pero a diferencia del péndulo invertido, este sistema se traslada de manera rotatoria el cual es descrito por la Figura 3.18 y los parámetros del sistema son descritos en la Tabla 3.5.

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Distancia al centro de masa del péndulo	$l_2$	0.6	$m$
Masa del péndulo	$m_2$	0.23	$Kg$
Longitud del brazo	$L_0$	0.25	$m$
Inercia del brazo	$I_1$	0.007	$Kg \cdot m^2$
Inercia respecto al centro de masa del péndulo	$I_2$	0.007	$Kg \cdot m^2$
Aceleración de la gravedad	$g$	9.81	$m/seg^2$

Tabla 3.5: Parámetros y variables del sistema Péndulo Furuta.

#### Modelado matemático.

El sistema péndulo Furuta, Figura 3.18 es un sistema electromecánico de segundo orden, de dos grados de libertad, el cual consta de un brazo el cual rota alrededor de su eje (parte actuada), y un péndulo el cual puede ser controlado por medio del movimiento del brazo rotatorio.

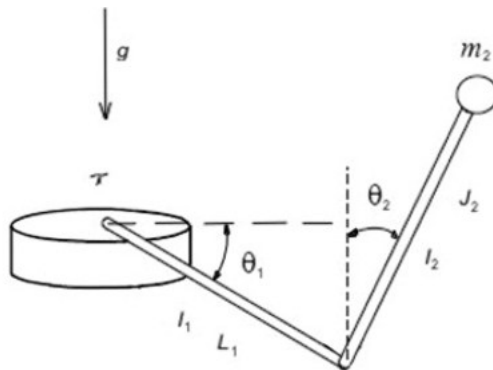


Figura 3.18: Sistema subactuado Péndulo Furuta [59].



El modelo matemático del sistema puede ser obtenido del diagrama de cuerpo libre mediante la segunda ley de Newton o por metodología de Euler Lagrange, para nuestro caso de estudio se desarrolla por medio de la metodología de Euler Lagrange. El péndulo está asociado con las siguientes variables operacionales:

- a)  $\theta_1$ : mide el ángulo de rotación del brazo.
- b)  $\theta_2$ : mide el ángulo de posición del péndulo respecto a la vertical.

El vector de posiciones articulares  $q(t)$  se define como:

$$q(t) = [ \theta_1(t) \quad \theta_2(t) ]^T$$

La energía cinética  $K(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q})$  para este brazo puede descomponerse en dos partes donde  $K_1(q, \dot{q})$  y  $K_2(q, \dot{q})$  son energías cinéticas asociadas con el brazo rotatorio y el péndulo respectivamente.

### Ecuaciones de Euler-Lagrange.

Para este caso de estudio, primero se presenta la energía cinética del sistema, para proseguir con el calculo del Lagrangiano.

La energía cinética del brazo es:

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2, \quad (3.89)$$

y la energía potencial del péndulo es:

$$K_2 = \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[ \left\{ \frac{d}{dt} (L_1 \text{sen} \theta_1 + l_2 \text{sen} \theta_2 \cos \theta_1) \right\}^2 + \left\{ \frac{d}{dt} (L_1 \cos \theta_1 - l_2 \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_1) \right\}^2 + \left\{ \frac{d}{dt} (l_1 \cos \theta_2) \right\}^2 \right], \quad (3.90)$$

donde el primer término corresponde a la energía cinética de la velocidad angular del péndulo mientras el segundo término corresponde a la velocidad tangencial del péndulo, respectivamente. Después de unos simples cálculos,  $K_2$  se reduce a:

$$K_2 = \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \text{sen}^2 \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 L_1 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2. \quad (3.91)$$

Debido a que el brazo está en el plano horizontal, este no tiene energía potencial. Por lo que la energía potencial del sistema es representada por la energía potencial del péndulo, la cual está dada por:

$$u_2 = m_2 l_2 g (\cos \theta_2 - 1) \quad (3.92)$$

Así, el Lagrangiano está dado por (2.6), que resulta en:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \text{sen}^2 \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 L_1 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g (\cos \theta_2 - 1). \quad (3.93)$$

Al usar la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange (2.7), donde  $q = (q_1, q_2)^T = (\theta_1, \theta_2)^T$  representan las variables configuracionales, y  $\tau = (\tau_1, \tau_2)^T = (\tau, 0)^T$  denota las fuerzas aplicadas de torque. Así, al desarrollar (2.7), se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = \left[ I_1 + m_2 (L_1^2 + l_2^2 \text{sen}^2 \theta_2) \dot{\theta}_1 + m_2 l_2 L_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \right],$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2 L_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 + [J_2 + m_2 l_2^2] \dot{\theta}_2,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = m_2 l_2^2 \text{sen} \theta_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 L_1 \text{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_2 g \text{sen} \theta_2.$$

Debido a que el sistema puede ser representado como (2.10), se simplifica como:

$$D(q) = \begin{bmatrix} I_1 + m_2 (L_1^2 + l_2^2 \text{sen}^2 \theta_2) & m_2 l_2 L_1 \cos \theta_2 \\ m_2 l_2 L_1 \cos \theta_2 & J_2 + m_2 l_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.94)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \text{sen} (2\theta_2) \dot{\theta}_2 & \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \text{sen} (2\theta_2) \dot{\theta}_1 - m_2 l_2 L_1 \text{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ -\frac{1}{2} m_2 l_2^2 \text{sen} (2\theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.95)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 l_2 g \text{sen} \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (3.96)$$

Dada las propiedades de los sistemas Euler-Lagrange, se sabe que  $D(q)$  es simétrica y definida positiva, ya que

$$\begin{aligned} \det(D(q)) &= (I_1 + m_2 (L_1^2 + l_2^2 \text{sen}^2 \theta_2)) (J_2 + m_2 l_2^2) + (m_2 l_2 L_1 \cos \theta_2)^2 \\ &= (I_1 + m_2 l_2^2 \text{sen}^2 \theta_2) (J_2 + m_2 l_2^2) + J_2 m_2 L_1^2 + (m_2 l_2 L_1 \cos \theta_2)^2, \end{aligned} \quad (3.97)$$

Debido a que

$$I_1 + m_2 (L_1^2 + l_2^2 \text{sen}^2 \theta_2) \geq I_1 + m_2 L_1^2 > 0,$$

de (3.97) se determina que:

$$\det(D(q)) > 0.$$

Del Lema 2.2 se obtiene lo siguiente:

$$\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}) = m_2 l_2 \left( l_2 \text{sen}(2\theta_2) \dot{\theta}_1 - L_1 \text{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2 \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.98)$$

que es una matriz antisimétrica. Por lo que el Lema 2.2 queda demostrado para este sistema.

De (2.13) y del Lema 2.2, se tiene que:

$$\dot{\mathcal{L}} = \dot{q}^T \tau. \quad (3.99)$$

También se sabe que

$$\dot{q}^T = [ \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 ] \quad y \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.100)$$

por lo que se obtiene:

$$\dot{\mathcal{L}} = \dot{\theta}_1 \tau. \quad (3.101)$$

Integrando (3.101), se obtiene

$$\int_0^t \dot{\theta}_1 \tau dt = \mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(0) \geq -2m l g - \mathcal{L}(0). \quad (3.102)$$

De la definición de un sistema Euler-Lagrange pasivo, se puede verificar que tomando a la entrada de control  $\tau$  como la entrada al sistema, y como su salida a  $\dot{\theta}_1$  entonces el sistema es pasivo.

Para definir los puntos de equilibrio del sistema es necesario hacer que  $\tau \equiv 0$  y en un intervalo  $\theta_1 \in [0, 2\pi]$ , el sistema péndulo Furuta, tiene dos puntos de equilibrio respecto al péndulo, en las siguientes configuraciones:

$$\begin{aligned} \left( \theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 \right) &= (*, 0, 0, 0) \\ \left( \theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 \right) &= (*, \pi, 0, 0) \end{aligned} \quad (3.103)$$

donde el primero es un punto de equilibrio inestable, mientras el segundo es un punto de equilibrio estable.

### Ley de control de balanceo del péndulo de Furuta.

Siguiendo con la metodología de diseño de control del Capítulo 3, se obtiene lo siguiente:

$$K(q, \dot{q}) = 0, \quad (3.104)$$

y

$$u(q) = -m_2 l_2 g. \quad (3.105)$$

Al evaluar la ecuación de energía en el punto de equilibrio inestable, resulta en:

$$\dot{\theta}_2^2 (J_2 + m_2 l_2^2) = m_2 l_2 g (2 - \cos \theta_2), \quad (3.106)$$

donde esta última, define una trayectoria la cual es la orbita homoclínica.

### Estabilización alrededor de la órbita homoclínica.

Basados en propiedades de pasividad para retroalimentación equivalente, podemos hacer uso de una función de almacenamiento  $V(x)$  para el diseño de control. Por lo que se consideran las siguientes variables, de acuerdo al Capítulo 4,  $\theta_1$ ,  $\dot{\theta}_1$ ,  $\theta_2$  y  $\mathcal{L}$ , y lo deseado es llevar a cero a estas variables.

Entonces se prosigue al diseño de la función candidata de Lyapunov como en (2.28), de la forma siguiente:

$$V(q, \dot{q}) = \frac{k_E}{2} L(q, \dot{q})^2 + \frac{k_D}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{k_P}{2} \theta_1^2 + \frac{k_L}{2} \tilde{\theta}_2^2, \quad (3.107)$$

donde  $\tilde{\theta}_2$  es la condición **C3**), de tal forma que  $\tilde{\theta}_2 = \theta_2 + \theta_1$ . Del modelo dinámico (2.29), se obtiene lo siguiente:

$$f(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -(J_2 + m_2 l_2^2) m_2 l_2^2 \text{sen}(2\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ -\frac{1}{2} m_2^2 l_2^3 L_1 \cos \theta_2 \text{sen}(2\theta_2) \dot{\theta}_1^2 + (J_2 + m_2 l_2^2) m_2 l_2 L_1 \text{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ -m_2^2 l_2^2 L_1 g \cos \theta_2 \text{sen} \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (3.108)$$

y

$$\Delta = (I_1 + m_2 (L_1^2 + l_2^2 \text{sen}^2 \theta_2)) (J_2 + m_2 l_2^2) + (m_2 l_2 L_1 \cos \theta_2)^2. \quad (3.109)$$

Así, siguiendo con el algoritmo de (2.34) y (2.35), se puede definir a (2.36) y (2.37) de la siguiente manera.

$$\dot{V} = -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2, \quad (3.110)$$

$$\dot{V}_1 = -\dot{\theta}_1^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \leq 0, \quad (3.111)$$

y

$$\dot{V}_2 = -\dot{\theta}_2^2 \leq 0. \quad (3.112)$$

Así, el algoritmo de control, al desarrollar (2.38), (2.39), (2.40), (2.41), (2.43) y (2.50), se obtiene una ley de control como se muestra a continuación.

$$\tau = \frac{-\left(\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2 + k_P \theta_1 + k_D \tilde{\theta}_2\right) \Delta - k_D f(q, \dot{q})}{\underbrace{k_E L \Delta + (J_2 + m_2 l_2^2) k_D}_{\beta}} \underbrace{-\dot{\theta}_2 - k_L \tilde{\theta}_2}_{\alpha}. \quad (3.113)$$

De esta manera con la implementación de (3.112), se asegura que el sistema entre en la región de atracción.

### Linealización del sistema.

Cuando el sistema es llevado a su configuración inestable será necesario de conmutar a un controlador LQR para estabilizarlo, por lo que el sistema tiene que ser linealizado y verificar si la

configuración inestable del sistema es controlable.

Del modelo dinámico del sistema se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 = \frac{1}{\Delta} & \left[ -(J_2 + m_2 l_2^2) m_2 l_2^2 \text{sen}(2\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right. \\ & - \frac{1}{2} m_2^2 l_2^3 L_1 \cos \theta_2 \text{sen}(2\theta_2) \dot{\theta}_1^2 + (J_2 + m_2 l_2^2) m_2 l_2 L_1 \text{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ & \left. - m_2^2 l_2^2 L_1 g \cos \theta_2 \text{sen} \theta_2 + (J_2 + m_2 l_2^2) \tau \right], \end{aligned} \quad (3.114)$$

y

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2 = \frac{1}{\Delta} & \left[ -m_2^2 l_2^2 L_1^2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + (I_1 + m_2 L_1^2 + l_2^2 \text{sen}^2 \theta_2) m_2 l_2 g \text{sen} \theta_2 \right. \\ & \left. + m_2 l_2^2 \text{sen}(2\theta_2) \dot{\theta}_1 \left[ m_2 l_2 L_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} (I_1 + m_2 L_1^2 + l_2^2 \text{sen}^2 \theta_2) \dot{\theta}_1 - (m_2 l_2 L_1 \cos \theta_2) \tau \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Linealizando el sistema alrededor del punto de equilibrio inestable se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-m_2^2 l_2^2 L_1 g}{I_1 (J_2 + m_2 l_2^2) + J_2 m_2 L_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(I_1 + m_2 l_2^2) m_2 l_2^2}{I_1 (J_2 + m_2 l_2^2) + J_2 m_2 L_1^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{J_2 + m_2 l_2^2}{I_1 (J_2 + m_2 l_2^2) + J_2 m_2 L_1^2} \\ \frac{-m_2 l_2 L_1}{I_1 (J_2 + m_2 l_2^2) + J_2 m_2 L_1^2} \end{bmatrix} \tau, \quad (3.116)$$

y de la configuración  $\dot{q} = Aq + B\tau$ , para la controlabilidad del sistema, se obtiene:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{J_2 + m_2 l_2^2}{I_1 (J_2 + m_2 l_2^2) + J_2 m_2 L_1^2} \\ \frac{-m_2 l_2 L_1}{I_1 (J_2 + m_2 l_2^2) + J_2 m_2 L_1^2} \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} \frac{J_2 + m_2 l_2^2}{I_1 (J_2 + m_2 l_2^2) + J_2 m_2 L_1^2} \\ \frac{-m_2 l_2 L_1}{I_1 (J_2 + m_2 l_2^2) + J_2 m_2 L_1^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y

$$A^2 B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_2^3 l_2^3 L_1^2 g}{I_1 (J_2 + m_2 l_2^2) + J_2 m_2 L_1^2} \\ \frac{-m_2^2 l_2^2 L_1 g (I_1 + m_2 L_1^2)}{I_1 (J_2 + m_2 l_2^2) + J_2 m_2 L_1^2} \end{bmatrix}, \quad A^3 B = \begin{bmatrix} \frac{m_2^3 l_2^3 L_1^2 g}{I_1 (J_2 + m_2 l_2^2) + J_2 m_2 L_1^2} \\ \frac{-m_2^2 l_2^2 L_1 g (I_1 + m_2 L_1^2)}{I_1 (J_2 + m_2 l_2^2) + J_2 m_2 L_1^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Debido a que  $\det(B | AB | A^2 B | A^3 B) \neq 0$ , se concluye que la linealización del sistema es controlable ya que la matriz de controlabilidad es de rango completo. Por lo tanto, se puede decir que para el sistema linealizado se puede proponer una ley de control por retroalimentación definida por  $\tau_1 = -K^T q$  con un vector de ganancias apropiado  $K$  que mantenga en el sistema en el punto de equilibrio.

**Simulación.**

Nuevamente se ilustra el comportamiento del sistema bajo la acción de control por balanceo. Aquí se dan los resultados de la ley de control (3.85), implicando en ella la conmutación de la ley de control (3.61) para su estabilización. El sistema con los parámetros de la Tabla 3.4 se obtiene los siguientes resultados.

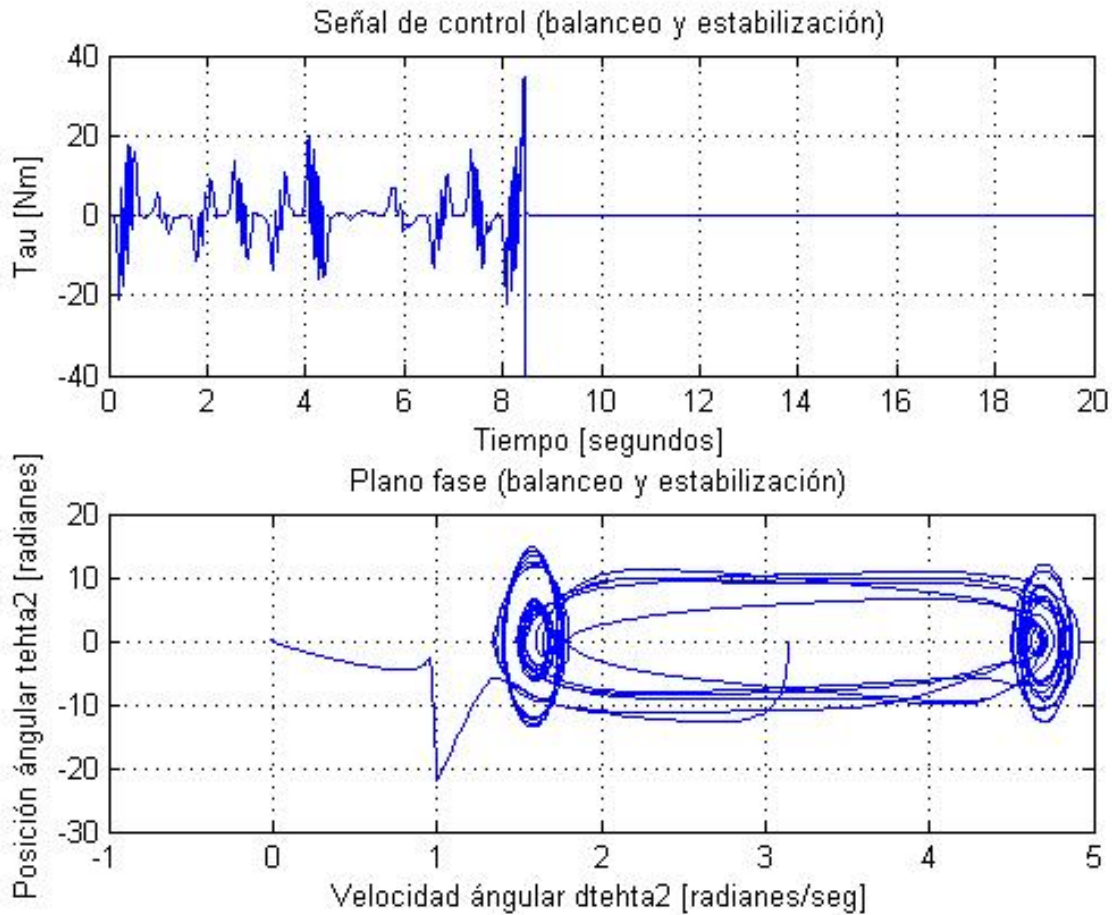


Figura 3.19: Ley de control integral para el péndulo Furuta.

En la Figura 3.19 se observa el comportamiento de la ley de control integral para el sistema péndulo Invertido, así como el plano fase el cual representa a la órbita homoclínica descrita por (3.106).

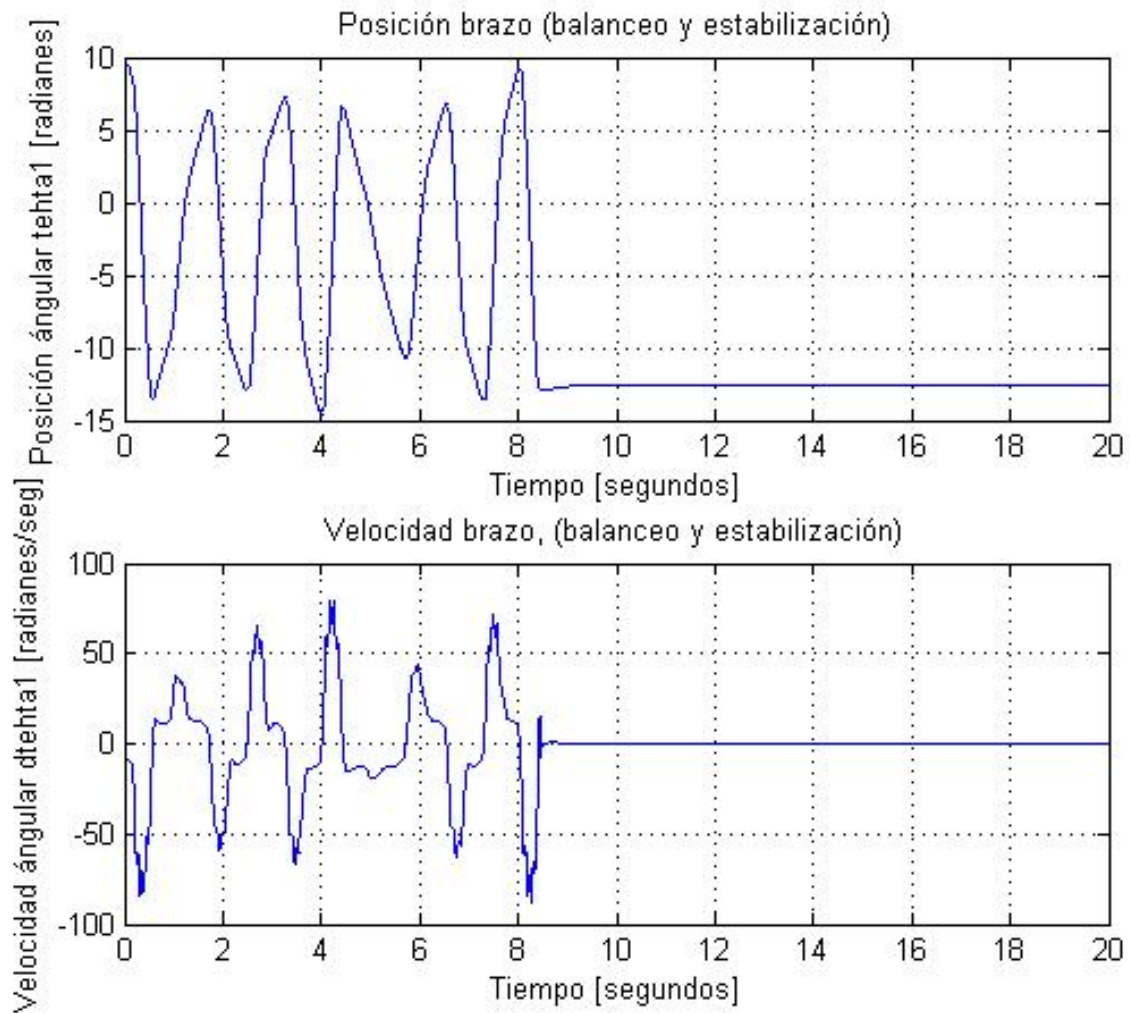


Figura 3.20: Posición del brazo con ley de control integral para el péndulo Furuta.

En la Figura 3.20 se observa el comportamiento de los estados del sistema  $\theta_1$  y  $\dot{\theta}_1$ , los cuales corresponden al brazo del sistema péndulo de Furuta, y como estos después de entrar en la región de atracción y conmutar a un controlador LQR se estabilizan en un tiempo menor a 10 segundos.

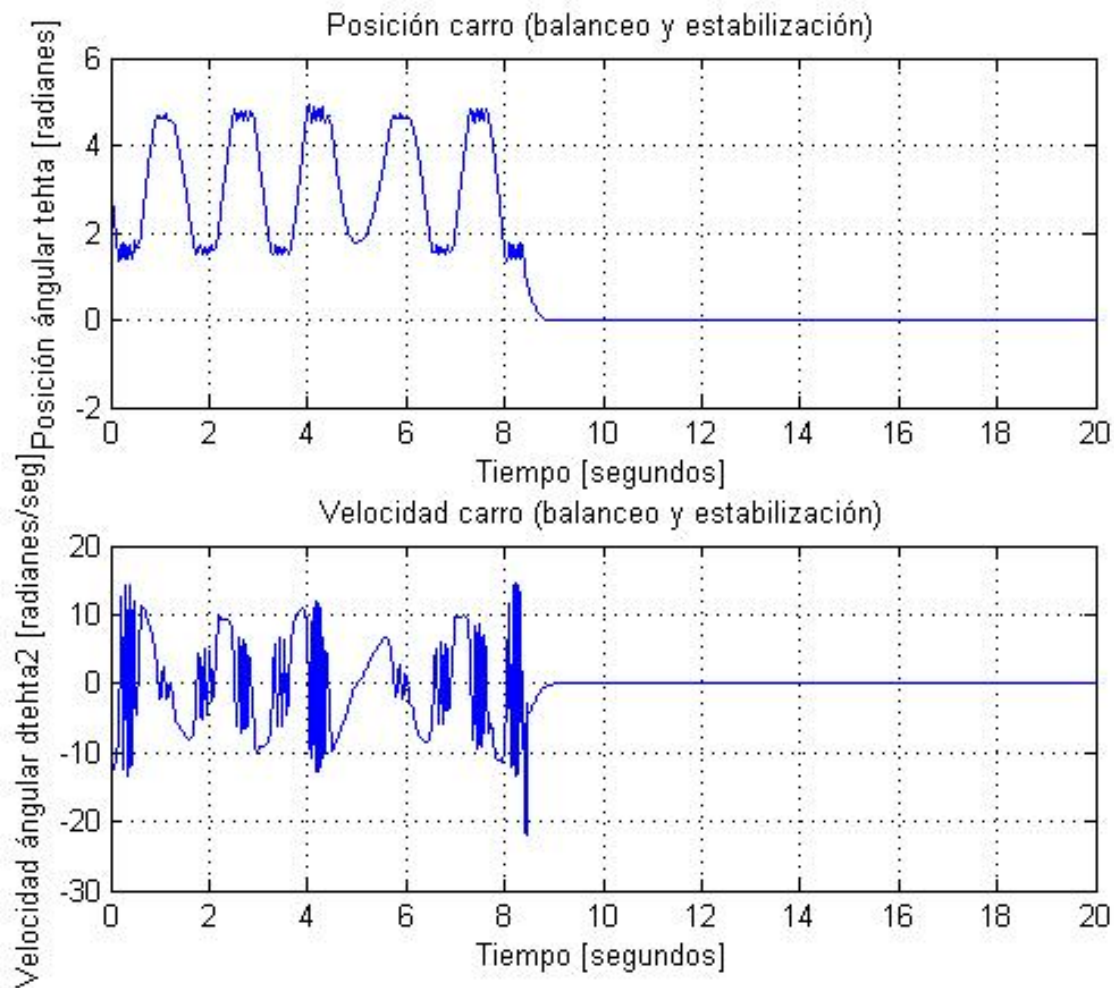


Figura 3.21: Ángulo del péndulo con ley de control integral para el péndulo Furuta.

En la Figura 3.21 se observa como los estados  $\theta_2$  y  $\dot{\theta}_2$  los cuales corresponden a la posición del péndulo convergen a cero en un tiempo menor a 10 segundos.

### 3.9. Conclusiones

Del desarrollo de una ley de control general para sistemas subactuados de 2GdL se obtienen las leyes de control propuestas para los sistemas pendubot, péndulo Invertido y péndulo de Furuta o rotatorio, las cuales alcanzan uno de los objetivos específicos planteados en este tema de tesis.

También del desarrollo de los controladores para los sistemas empleados en esta sección, se puede decir que la órbita homoclínica de los sistemas de 2GdL es descrita de manera general por las dinámicas de los estados no actuados, también podemos confirmar lo que se mencionó en el capítulo anterior, que con esta metodología diseñada en el capítulo anterior para el problema de balancear y estabilizar sistemas subactuados de 2GDL en una configuración inestable es resuelto (para siste-



mas subactuados diseñados de manera artificial). Por lo que la aportación más importante de este trabajo de tesis, es la obtención de una metodología general para balancear y estabilizar sistemas subactuados de 2GdL diseñados de manera artificial.

# Capítulo 4

## Resultados con un pendubot físico.

En este capítulo se presentan los resultados experimentales obtenidos del presente proyecto de tesis, los cuales están basados en un sistema subactuado Pendubot real, de la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del I.P.N (CINVESTAV).

### 4.1. Descripción del sistema.

En la Figura 4.1 se observa el manipulador subactuado en el que fue implementada la ley de control integral de balanceo y estabilización el cual es descrito por los parámetros de la Tabla 4.2.

El Pendubot consiste de dos eslabones de aluminio rígido; el primer eslabón está directamente acoplado al eje del motor de imán permanente de 90 voltios de C.D., que se encuentra montado sobre la mesa. El motor tiene acoplado un codificador óptico en su eje (sensor de posición). El diseño permite que ambos eslabones giren  $360^\circ$ . El eslabón 2 está acoplado al extremo del eslabón 1. En la unión 2 está montado el codificador 2.

El control del Pendubot se realiza mediante una computadora personal, que contiene una tarjeta de conversión de digital a analógico y una tarjeta lectora de codificadores. El motor de CD es controlado por medio de un servopropulsor que es la interfaz entre la computadora y el motor, la computadora envía una señal de voltaje de baja potencia a través de la tarjeta de conversión de digital a analógico y el servopropulsor convierte esta señal en una corriente de alta potencia que es proporcional al torque del motor.

El sistema pendubot también cuenta con una fuente de potencia que es la que suministra la corriente al motor de C.D. Además el Pendubot cuenta con un botón de seguridad para deshabilitar la corriente suministrada al motor.

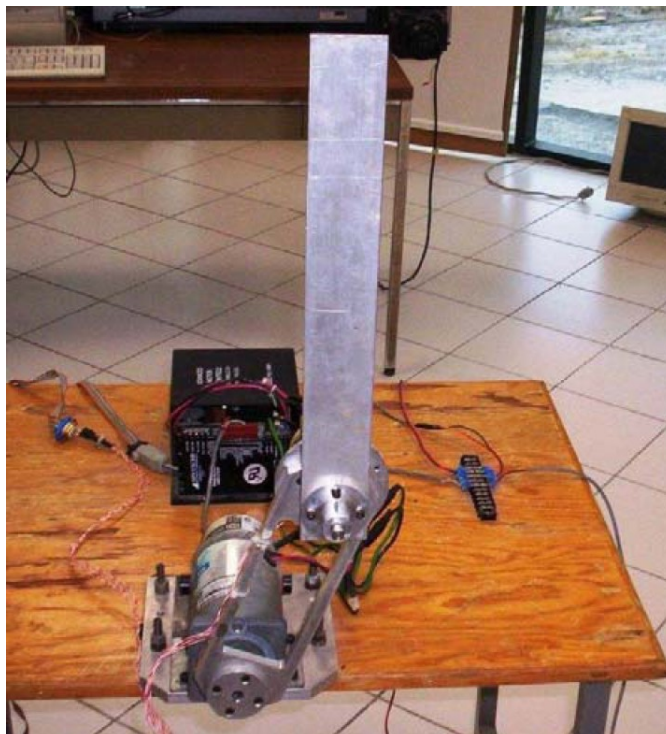


Figura 4.1: Fotografía del sistema subactuado Pendubot.

## 4.2. Elementos del sistema.

### 4.2.1. Tarjeta de conversión de digital a analógico.

La tarjeta de conversión de digital a analógico de la compañía American Scientific Instrument Corp. contiene dos salidas analógicas de  $\pm 10$  volts con una resolución de 12 bits (canal 1 y canal 2), los cuales están localizados en la siguiente dirección de puertos de la computadora.

Dirección	Puerto
300H	Parte baja Canal 1
301H	Parte alta Canal 1
302H	Parte baja Canal 2
303H	Parte alta Canal 2

Tabla 4.1: Dirección de puertos de la PC.

Para el sistema Pendubot solo es utilizado el canal 0, ya que solo cuenta con un solo motor, los canales 1 y 2 están disponibles en un DB25 hembra.

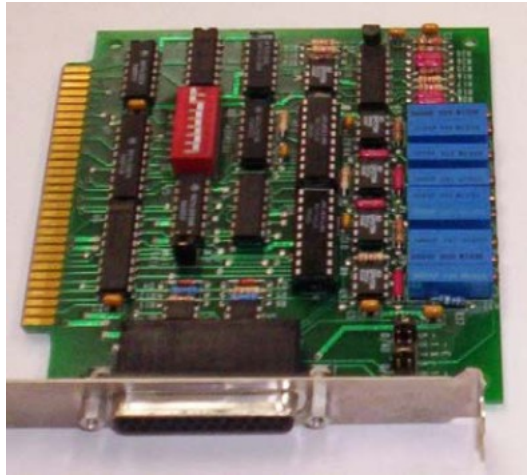


Figura 4.2: Tarjeta de conversión de digital a analógico.

#### 4.2.2. Tarjeta lectora de codificadores.

La tarjeta lectora de codificadores PC7166 de la compañía U.S. Digital Corp. tiene la función de leer los pulsos que envían los codificadores, está diseñada para conectar cuatro codificadores, la dirección base para obtener la cuenta de los codificadores es la 240 Hexadecimal.

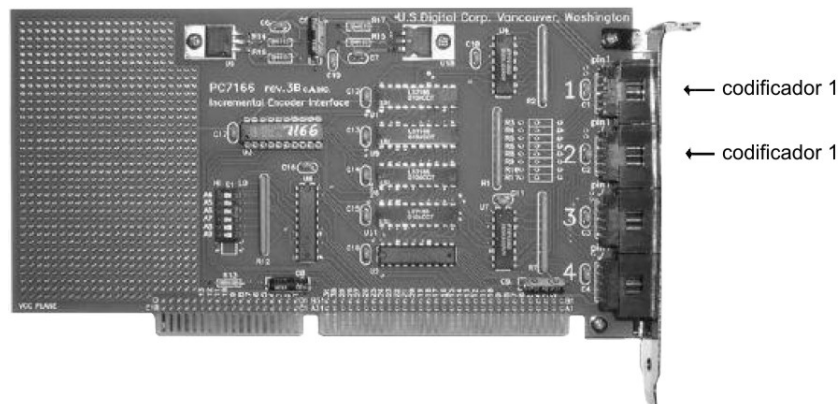


Figura 4.3: Tarjeta lectora de codificadores.

Los codificadores envían 1024 pulsos por revolución, pero en la tarjeta son multiplicados por 4 dando una resolución de 4096 pulsos por cada 360 grados. Estos codificadores junto con la tarjeta lectora son los encargados de sensar los ángulos de los eslabones 1 y 2, para ser aplicados al algoritmo de control y calcular una ley de control que será enviada al motor de CD.

La tarjeta electrónica trae consigo un programa de prueba llamado PC7166.EXE el cual checa si hay comunicación entre la computadora y la tarjeta, además de la funcionalidad de los codificadores.

### 4.2.3. Servopropulsor.

El servopropulsor marca ADVANCED de la compañía Advanced Motion Controls, es utilizado para proveer la potencia de entrada a los motores del sistema electromecánico, es decir, el dispositivo amplifica el voltaje de entrada de baja potencia a un voltaje o corriente de alta potencia por medio de modulación del ancho del pulso (PWM), Figura 4.4.

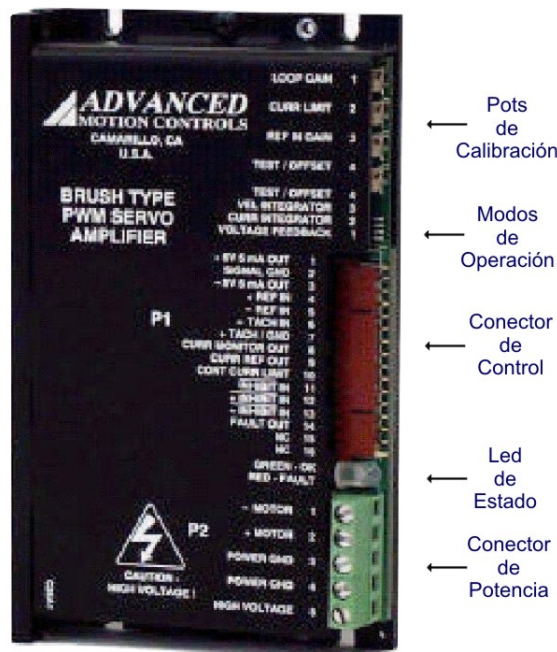


Figura 4.4: Servopropulsor [4].

El servopropulsor está diseñado para trabajar en diferentes modos de operación, de los cuales los más utilizados son:

1. *El modo voltaje* que proporciona un voltaje en la terminales del motor proporcional al voltaje de entrada del dispositivo (Figura 4.5).
2. *El modo corriente* que proporciona una corriente de armadura proporcional al voltaje de entrada del dispositivo (Figura 4.6).
3. *El modo velocidad* en el cual la velocidad angular del motor es proporcional al voltaje de entrada del dispositivo (Figura 4.7).

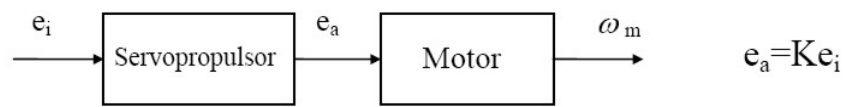


Figura 4.5: Modo voltaje.

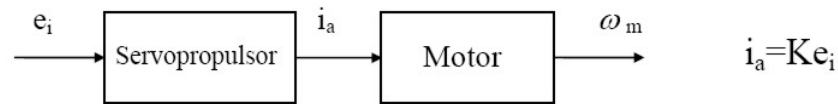


Figura 4.6: Modo corriente.

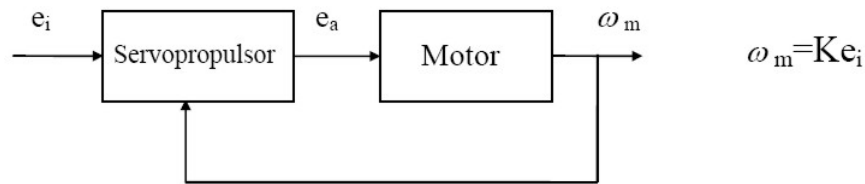


Figura 4.7: Modo velocidad.

Para el sistema Pendubot es utilizado el *modo corriente o Torque* ya que en el modelo matemático el torque representa la fuerza de entrada al sistema. El servopropulsor dispone de una terminal llamada *inhibit* (inhibir) para habilitar ó deshabilitar la corriente o voltaje del motor. En esta terminal y tierra está conectado el interruptor de seguridad normalmente cerrado que mantendrá la terminal *inhibit* conectada a tierra ocasionando que el motor esté sin corriente y al presionar el botón el motor está listo para producir un torque. El servopropulsor cuenta con un LED indicador del estado de este dispositivo. Cuando el LED está en color rojo el servopropulsor deshabilita el motor, que puede ser ocasionado por la terminal *inhibit*, por un sobrecalentamiento del dispositivo ó por un mal funcionamiento. La luz verde indica una operación normal.

#### 4.2.4. Codificador incremental.

Los codificadores incrementales se encuentran con frecuencia en sistemas de control modernos para convertir desplazamiento lineal ó rotatorio en un código digital o señales de pulsos. Los codificadores incrementales proveen un pulso por cada incremento de resolución. Los codificadores incrementales están disponibles en las formas lineales y rotatorias. Un codificador incremental típico rotativo tiene cuatro partes básicas: una fuente de luz, un disco giratorio, una mascara estacionaria y un detector, como se presenta en la Figura 4.8. El disco tiene sectores opacos y transparentes distribuidos en forma alterna. Un par de estos sectores representa un periodo incremental. La máscara se usa para dejar pasar o bloquear la luz entre la fuente de luz y el foto detector localizado detrás de la mascara.

Las formas de onda de las salidas de los detectores son generalmente de tipo triangular o senoidal, en función de la resolución requerida. Las señales de onda cuadrada compatibles con lógica digital se obtienen al utilizar un amplificador lineal seguido por un comparador. Para detectar la dirección



Figura 4.8: Decodificador incremental óptico.

se necesita un codificador de dos canales con dos juegos de pulsos de salida (canal A y canal B). Cuando la fase de los dos trenes de pulsos es de  $90^\circ$  eléctricos, se dice que las dos señales están en cuadratura, como se muestra en la Figura 4.9. Las señales definen únicamente transiciones de 0 a 1 o de 1 a 0 con respecto a la dirección de rotación del disco codificador, de esta forma se puede construir el circuito lógico de detección de la dirección para decodificar dichas señales. En la Figura 4.9 se observa que para un movimiento en sentido de las manecillas del reloj, los pulsos del canal A están adelantados  $90^\circ$  con respecto a los pulsos del canal B, y para movimientos en sentido contrario a las manecillas del reloj el canal A está atrasado  $90^\circ$  con respecto al canal B.

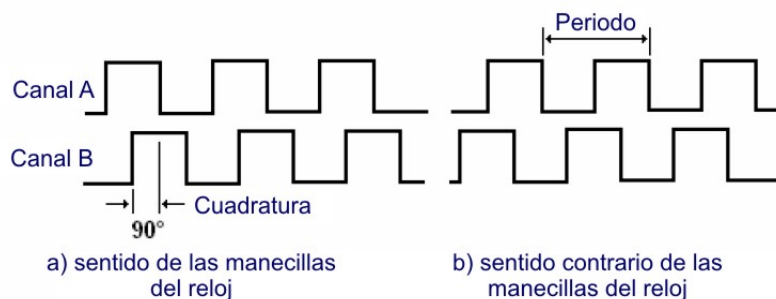


Figura 4.9: Señales de salida del decodificador.

Los codificadores del Pendubot tienen una resolución de  $1024 \times 4$  pulsos por revolución, es decir, que el codificador envía un pulso cada  $0.00024^\circ$  de giro, la frecuencia de la señal cuadrada es proporcional a la velocidad angular del eslabón 1 ó 2.

### 4.3. Control del sistema.

La Tabla 4.2 muestra los parámetros del sistema Pendubot físico en el que se realizaron las pruebas experimentales.

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Longitud eslabón 1	$l_1$	0.2032	$m$
Longitud eslabón 2	$l_2$	0.3841	$m$
Distancia al centro de masa (eslabón 1)	$l_{c1}$	0.1551	$m$
Distancia al centro de masa (eslabón 2)	$l_{c2}$	0.1635	$m$
Masa del eslabón 1	$m_1$	0.8293	$kg$
Masa del eslabón 2	$m_2$	0.3402	$kg$
Inercia eslabón 1 respecto al centro de masa	$I_1$	0.005	$Kg \cdot m^2$
Inercia eslabón 2 respecto al centro de masa	$I_2$	0.0043	$Kg \cdot m^2$
Constante de fricción (eslabón 1)	$v_1$	0.00545	$Kg/s$
Constante de fricción (eslabón 2)	$v_2$	0.00047	$Kg/s$
Aceleración de gravedad	$g$	9.81	$m/seg^2$

Tabla 4.2: Parámetros y variables del sistema Pendubot físico.

La ley de control integral, i.e. ley de control para balanceo y estabilización, descrita por (3.60) fue acondicionada con las siguientes ganancias en el sistema físico:

Constante	Valor
$K_P$	0.72
$K_D$	0.93
$K_E$	0.65
$K_L$	1.01

Tabla 4.3: Ganancias del controlador implementado de manera experimental.

Las Figuras 4.10, 4.11 y 4.12 muestran el comportamiento del sistema de manera experimental, el cual fue iniciado en las condiciones iniciales siguientes:

$$\begin{pmatrix} q_1(0) = 180^0 \\ q_2(0) = 0^0 \\ \dot{q}_1(0) = 0 \\ \dot{q}_2(0) = 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$



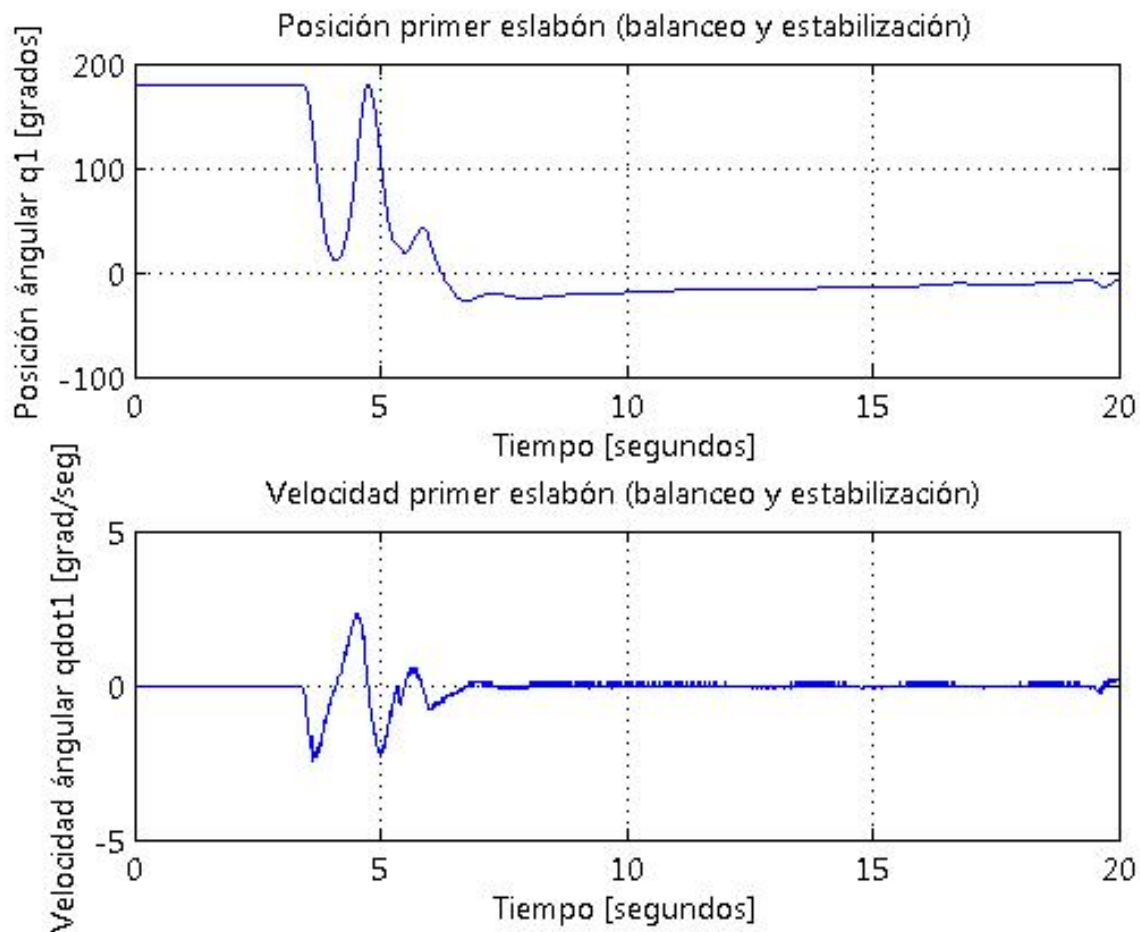
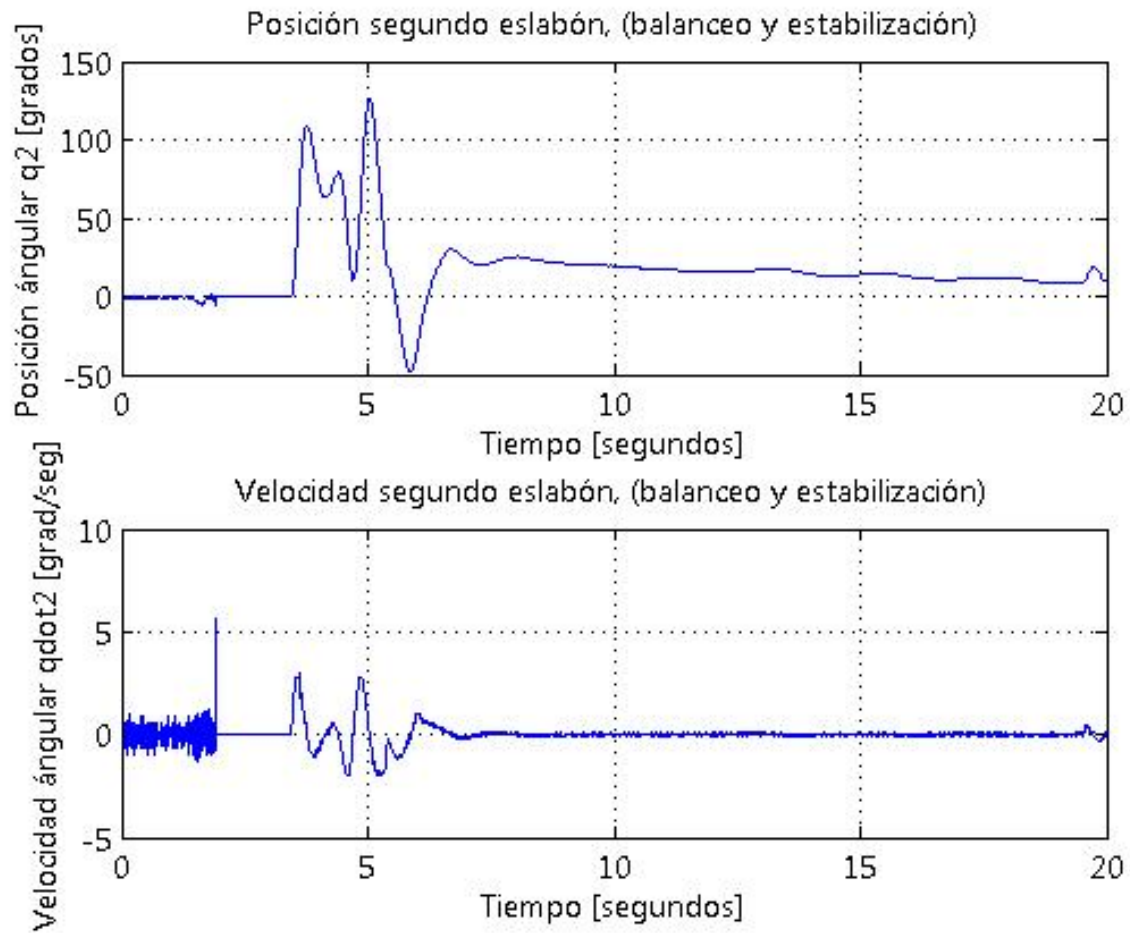


Figura 4.10: Estados  $q_1$  y  $q_3$  del Pendubot experimental.

En la Figura 4.10 se puede apreciar el comportamiento del primer eslabón, el cual se observa como la posición angular y su velocidad angular llegan aproximadamente a cero, lo cual implica que el primer eslabón está en una posición vertical. En la Figura 4.11 se aprecia el comportamiento del segundo eslabón, el cual es llevado a una posición angular y velocidad angular aproximada a cero respecto al primer eslabón, lo cual implica que esta en la posición superior.

Figura 4.11: Estados  $q_2$  y  $q_4$  del Pendubot experimental.

Como se puede observar en las Figuras 4.10 y 4.11, el controlador integral realiza una buena acción de control para balancear en una primera fase al sistema Pendubot, a las condiciones iniciales 4.1, a un valor cercano a la posición vertical superior en ambos eslabones y estabilizar en una segunda fase a un valor cercano a el punto de equilibrio inestable. Observe que la suma de ambas posiciones angulares es cero.

También se hace notar que la acción de control es llevada a cabo en un tiempo aproximado de 3.7 segundos, esto es por cuestiones de seguridad.

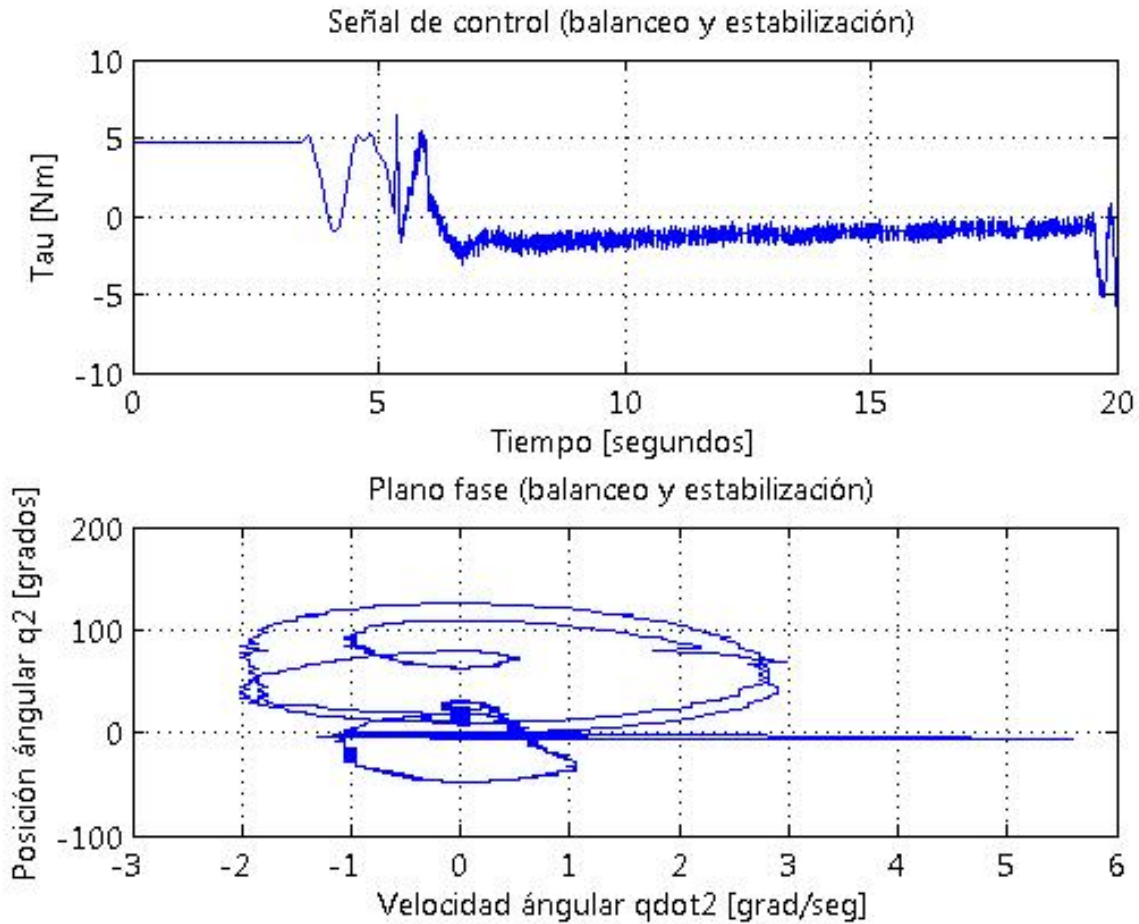


Figura 4.12: Ley de control integral para el Pendubot experimental.

En la Figura 4.12 se puede apreciar como la acción de control no sobrepasa los límites de torque del sistema, estos están definidos por una función de saturación equivalente a  $\pm 9.5 Nm$ . También se puede ver el comportamiento del plano fase respecto al segundo eslabón, en el cual se aprecia como converge el estado a su posición deseada.

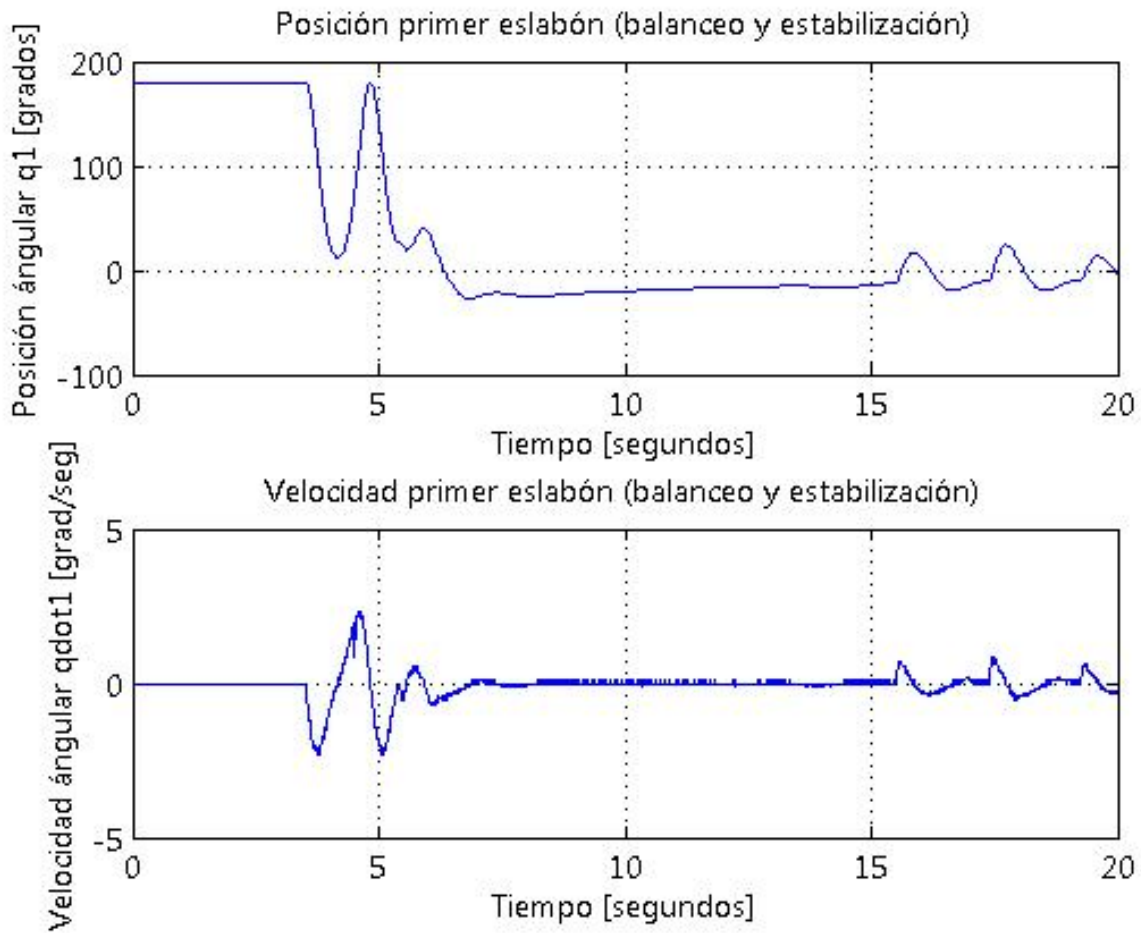


Figura 4.13: Estados  $q_1$  y  $q_3$  del Pendubot experimental con perturbaciones.

La Figura 4.13 muestra el balanceo y la estabilización del sistema, y una vez estabilizado se perturba al sistema de los estados  $q_1$  y  $q_3$ , ambos correspondientes al primer eslabón del sistema. Como se observa en esta figura, la acción de control para estabilizar al sistema (LQR) no tiene problemas ante perturbaciones ya que lo logra estabilizar de una forma adecuada.

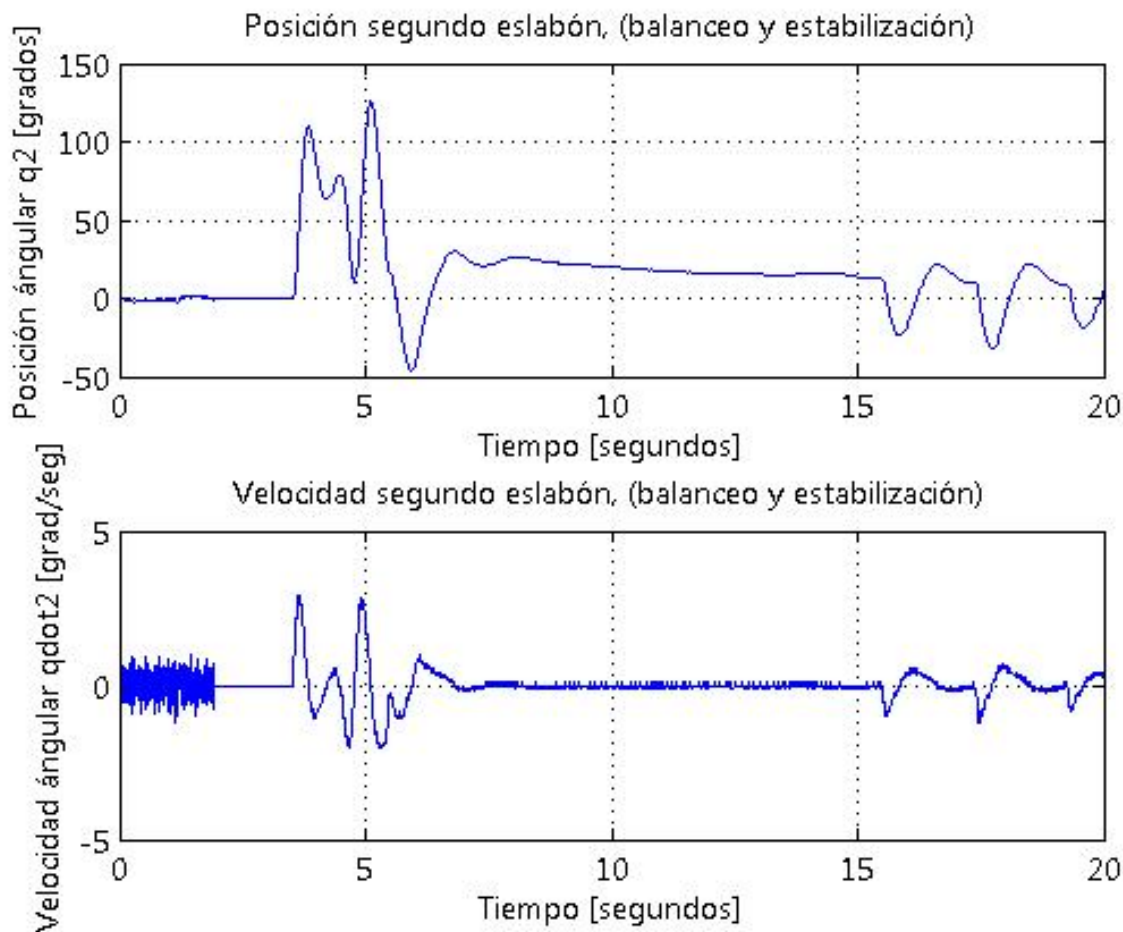


Figura 4.14: Estados  $q_2$  y  $q_4$  del Pendubot experimental con perturbaciones.

La Figura 4.14 muestra el balanceo y la estabilización del sistema, y una vez estabilizado se perturba al sistema de los estados  $q_2$  y  $q_4$ , ambos correspondientes al segundo eslabón del sistema. Como se mencionó anteriormente en esta figura se observa como la acción de control para estabilizar al sistema (LQR) no tiene problemas ante perturbaciones ya que lo logra estabilizar de una forma adecuada.

En la Figura 4.15 se puede ver como la acción de control frente perturbaciones no demanda demasiado torque de salida. Así como el comportamiento del plano fase respecto al segundo eslabón se mantiene en una región cercana al punto de equilibrio superior. Por lo que podemos decir que el

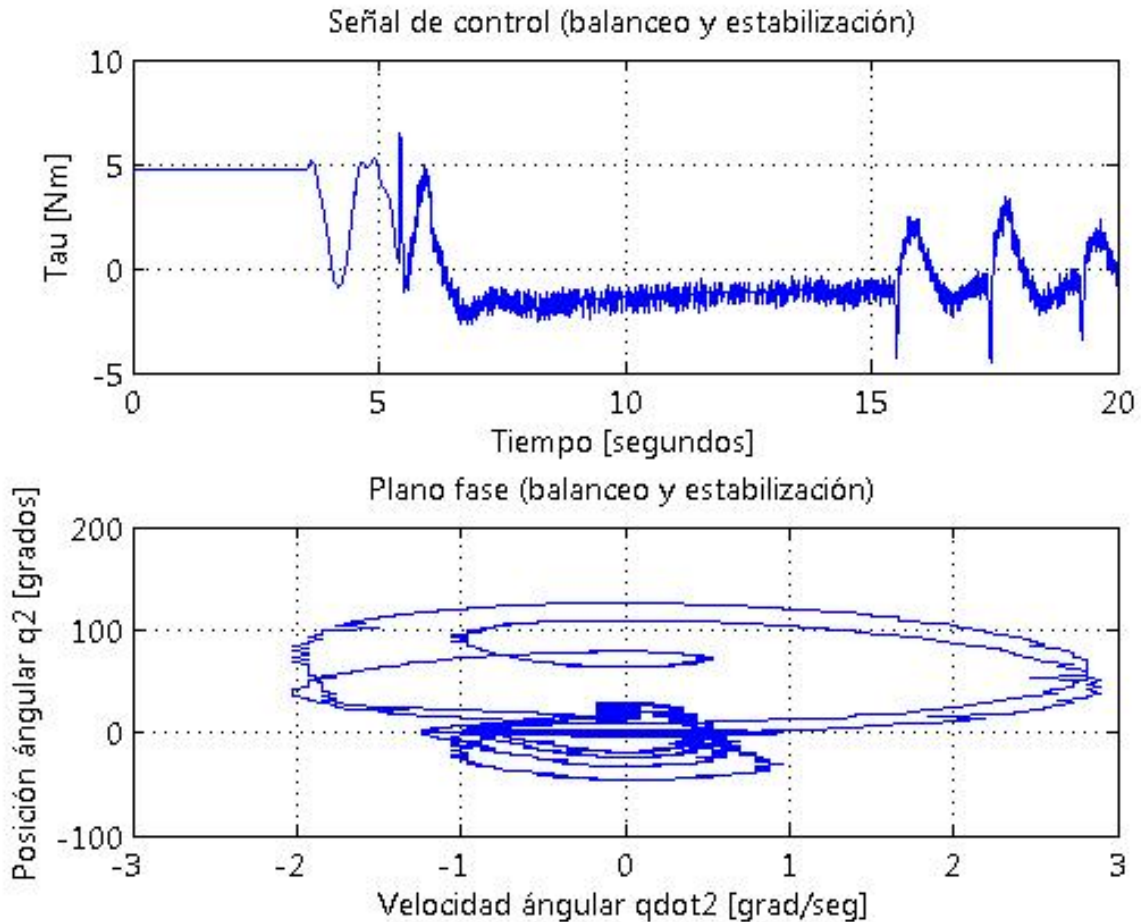


Figura 4.15: Ley de control integral para el Pendubot experimental con perturbaciones.

controlador LQR es una buena opción para la solución del problema de estabilización de manera experimental.

En las Figuras 4.16, 4.17 y 4.18, se inicia al sistema de control con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{pmatrix} q_1(0) = 0^\circ \pm \varepsilon \\ q_2(0) = 180^\circ \pm \varepsilon \\ \dot{q}_1(0) = \pm \varepsilon \\ \dot{q}_2(0) = \pm \varepsilon \end{pmatrix}$$

donde  $\varepsilon$  es un valor pequeño. Así como se ha mencionado anteriormente, esta técnica de control no

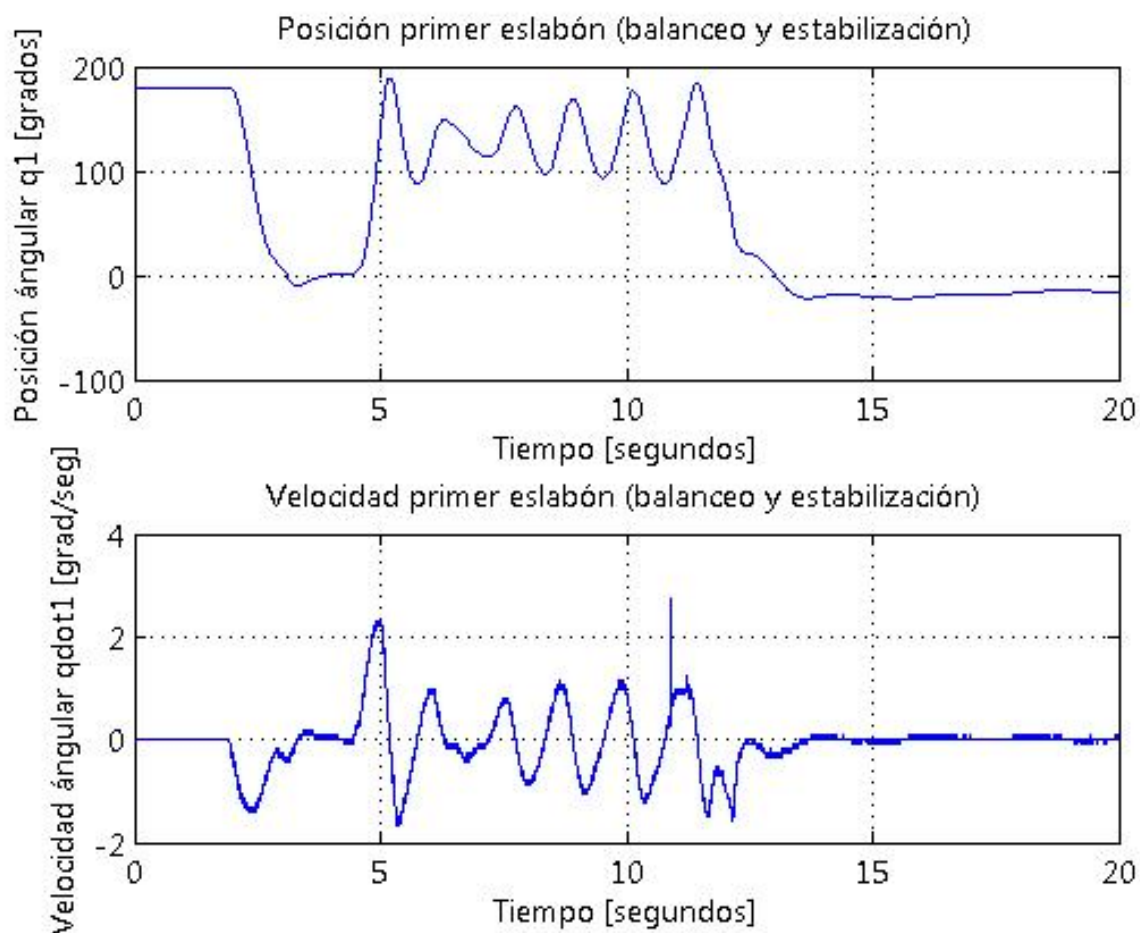


Figura 4.16: Estados  $q_1$  y  $q_3$  del Pendubot experimental con perturbaciones.

solo funciona para llevar al sistema de la configuración inferior y frente a perturbaciones, sino que también es una buena opción de control iniciando al sistema es cualquiera de las otras configuraciones inestables, i.e.  $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \neq (180^\circ, 0^\circ, 0^0, 0^0)$ .

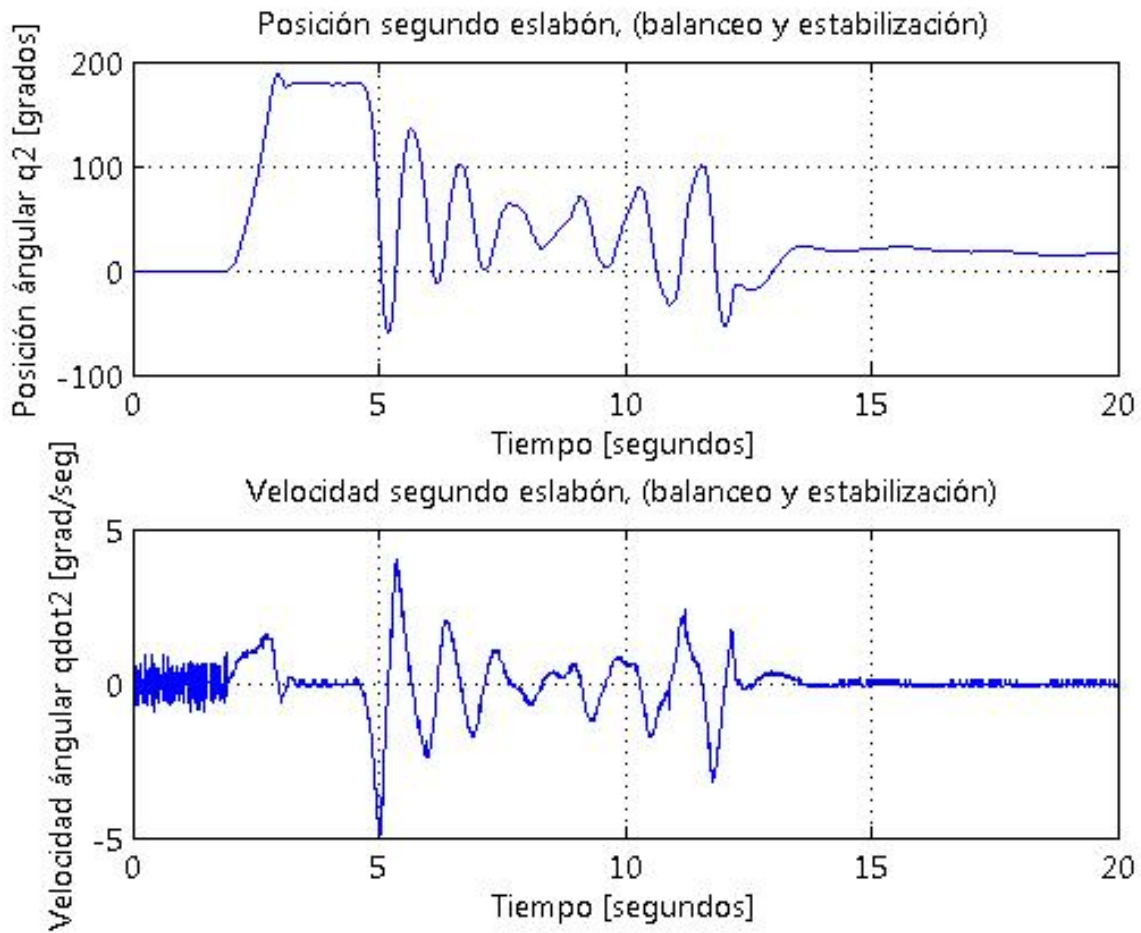


Figura 4.17: Estados  $q_2$  y  $q_4$  del Pendubot experimental con perturbaciones.

En las Figuras 4.16 y 4.17 se observa como el sistema logra alcanzar su posición vertical en ambos eslabones, así como también se aprecia que las velocidades  $q_3$  y  $q_4$  son relativamente pequeñas. Al igual que en los otros resultados experimentales, en la Figura 4.18 se aprecia que la ley de control no demanda demasiado torque de salida. Así como el plano fase del segundo eslabón está en una región de convergencia.



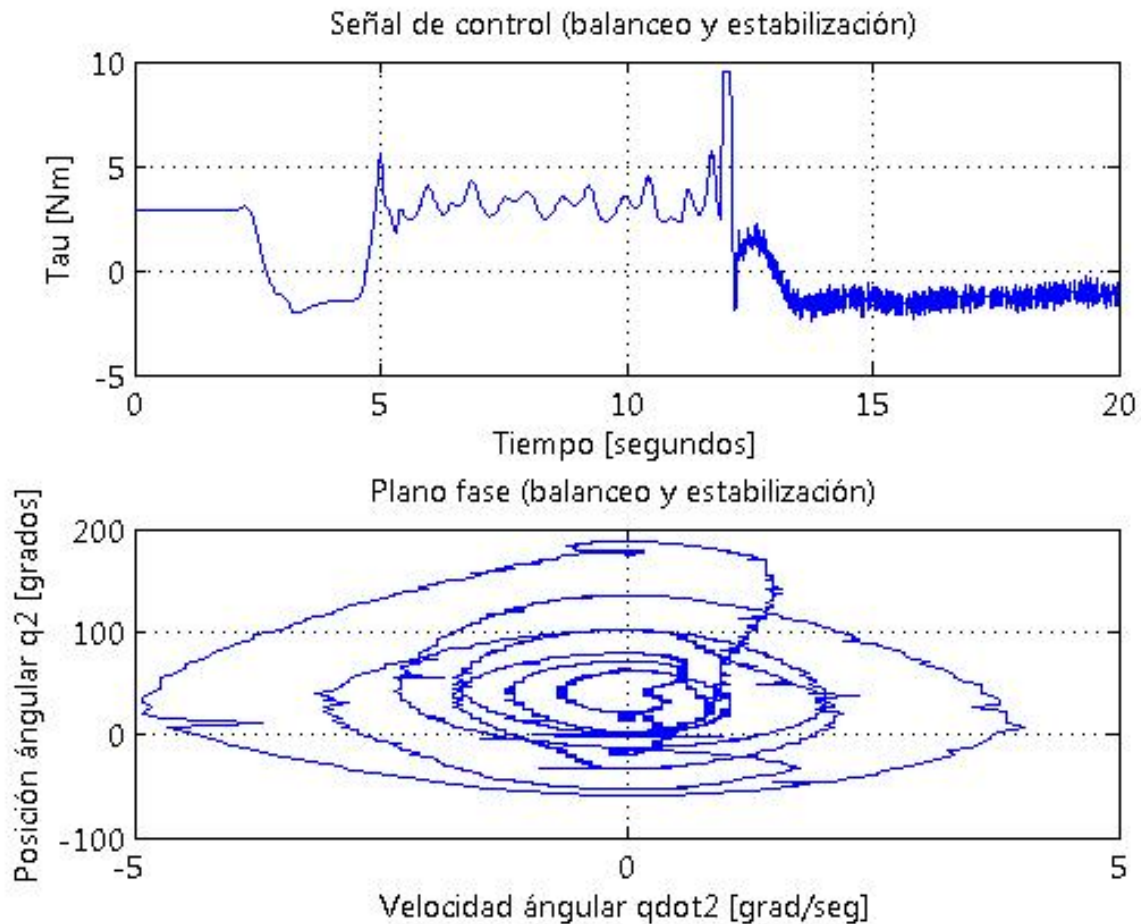


Figura 4.18: Ley de control integral para el Pendubot experimental con perturbaciones.

Es necesario mencionar que el brazo manipulador físico está formado por dos eslabones rígidos con las siguientes características asociadas a los ángulos.

- a)  $q_1$ : mide desde la posición vertical hacia abajo.
- b)  $q_2$ : mide la posición del brazo en la horizontal.

También se hace mención que la estabilización del sistema con el controlador LQR fue sintonizada de tal manera que el sistema sea asintóticamente estable, debido a que si le daba prioridad a los estados de la velocidad angular, el sistema tendía a vibrar y por consiguiente el sistema se salía de la región de atracción, así que al control que estabiliza se le dio prioridad a las posiciones de los eslabones, de tal manera que las ganancias del controlador quedaron de la siguiente forma:

$$R = 2.5$$
$$Q = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Con las ganancias de la matriz  $K$  de la siguiente manera:

$$K = [ -58.8019 \quad -58.2007 \quad -12.0533 \quad -7.9339 ]$$

Así, se obtuvieron los resultados experimentales mostrados en las figuras anteriores, y se puede decir que el sistema es llevado a su punto de equilibrio inestable, desde cualquier configuración como se puede ver en las Figuras 4.16, 4.17 y 4.18 en donde el sistema es iniciado en un punto de equilibrio inestable, diferente al que se desea alcanzar.

Es pertinente mencionar en la aplicación de la ley de control de manera experimental, que el torque de salida esta acotado en un rango de  $\pm 9.5 \text{ Nm}$ , esto es por cuestiones de seguridad en el actuador. En consecuencia el sistema responde de esa manera a la conmutación de controles, y de igual manera las variables guardadas solamente llegan a un límite de  $20 \text{ seg}$ , debido al tiempo de muestreo de  $5 \text{ m} \cdot \text{seg}$  y a que la computadora en la que el sistema opera no tiene demasiada memoria disponible. Por lo anterior si se trataba de guardar más datos la memoria se desbordaba provocando errores en el programa de control.

## 4.4. Conclusiones

Como en el capítulo anterior en los resultados experimentales se puede concluir que la ley de control integral para balancear y estabilizar a un sistema subactuado de 2GdL descrita en el presente proyecto de tesis es una excelente opción para la solución del problema de llevar a un sistema subactuado diseñado de manera artificial a una configuración inestable.



# Conclusiones y trabajos futuros

A través del análisis de las diferentes simulaciones se introdujeron diferentes variantes en las leyes de control y ganancias que juegan un papel importante en la síntesis de un esquema de control apropiado para el balanceo y estabilización del sistema no lineal subactuado de dos grados de libertad.

## Conclusiones.

En este proyecto de tesis se desarrollaron técnicas de control para el balanceo y estabilización de los sistemas Pendubot, Péndulo Invertido y Péndulo de Furuta, las cuales a nivel simulación presentaron resultados muy alentadores, de los cuales se puede extraer a las siguientes conclusiones.

En el diseño de la ley de control (3.60), se hace que el sistema alcance el punto de equilibrio inestable, pero como el sistema es enviado dentro de una órbita homoclínica el sistema podría estabilizarse cuando  $t \rightarrow \infty$ , por lo que se propone que cuando el sistema alcance una región de atracción, se propone un cambio a una ley de control que estabilice al sistema de manera local. Así, la ley de control conmuta de un controlador no lineal a uno lineal, para así poder estabilizar al sistema en un tiempo menor. De esto, de la ley de control (3.60) propuesta, se logra la velocidad del segundo eslabón este acotada por la función (3.57), lo que implica que las dinámicas del sistema sean las apropiadas para que la función de conmutación (3.61) funcione, y así la ley de control lineal pueda estabilizar al sistema. Esta es la primera contribución sobresaliente de este trabajo de tesis, ya que al implementar otros esquemas de control para el balanceo se pudo observar que las velocidades y posiciones de *entrada* a la región de atracción del LQR eran tales que no era posible conmutar al LQR de forma que la ley de control lineal funcionara bien con dichas condiciones iniciales. Esto es debido a que el sistema Pendubot (y cualquier sistema de 2GDL subactuado) al entrar a su órbita homoclínica tiende a seguir las velocidades dadas por (3.35), la cual depende de dichas condiciones iniciales. Estas condiciones apropiadas fueron posibles de obtener al asegurar por (3.36) que  $q_1 \approx \pi/2$  al mismo tiempo que  $\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \approx \pi/2$  que a conocimiento del autor no se había propuesto anteriormente. La síntesis de este control es actualmente objeto de una evaluación en la revista Ingeniería y Tecnología de la UNAM [28].

## Trabajos futuros.

Se propone realizar algún método para la optimización de las ganancias de la ley de control de balanceo, ya que estas no son las óptimas para que el sistema conmute al controlador lineal, y así suavizar la conmutación de la ley de control y de esta manera evitar un torque como lo muestra la figura de la ley de control (3.11).

Debido a que en este tema solo se abordaron sistemas de dos grados de libertad como trabajos futuros se pretende ampliar la metodología para sistemas con grado de libertad mayor.

# Bibliografía

- [1] A. Benaskeur and A. Desbiens , *Application of adaptive backstepping to the stabilization of the inverted pendulum*, Département de Génie Électrique et Génie Informatique, Université Laval, Québec, 1998.
- [2] A. Jain, and G. Rodriguez, *An Analysis of the Kinematics and Dynamics of Underactuated Manipulators*, IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 9 No. 4, pp. 411-422, Aug. 1993.
- [3] Abhinandan Jain and Guillermo Rodriguez, *An Analysis of the Kinematics and Dynamics of Under-Actuated Manipulators*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 9, pp. 411-422, Aug. 1993.
- [4] ADVANCED, Advanced Motion Controls, *www.advancedcontrolsystems.com* .
- [5] Adriano Almeida Goncalvez Siqueira and Marco Henrique Terra, *Nonlinear and Markovian  $H_\infty$  Controls of Underactuated Manipulators*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 12, No. 6, Nobiembre 2004.
- [6] Alberto Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, N. Y. Inc., 1995.
- [7] Alberto Isidori, *Nonlinear Control Systems: An Introduction.*, 2nd Ed., Springer-Verlag, N. Y. Inc., 1999.
- [8] Alessandro De Luca, Stefano Panzieri Giovanni Ulivi, *Stable Inversion Control for Flexible Link Manipulators*, Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation Leuven, Belgium, May 1998.
- [9] Andrew D. Lewis, *Lagrangian Mechanics, Dynamics, and Control*, 2003.
- [10] Anthony M. Bloch, Jerrold E. Marsden, Dmitry V. Zenkov *Nonholonomic Dynamics*, Notices of the AMS, Volume 53, Number 3, March, 2005.
- [11] Anton Shiriaev, John W. Perram, and Carlos Canudas-de-Wit, *Constructive Tool for Orbital Stabilization of Underactuated Nonlinear Systems: Virtual Constraints Approach*, IEEE Transactions on Automatic Control, VOL. 50, NO. 8, Agosto 2005.
- [12] B.C. Kuo, *Sistemas de control automático*, Prentice-Hall, 1996.
- [13] C.C Chung and J. Hauser, *Nonlinear control of a swinging pendulum*; Automatica, Vol. 31, No. 6, pp. 851-862, 1995.

- 
- [14] David G. Luenberger, “*Optimization by vector space methods*”, Springer, 1995.
- [15] Eric van Walsum, *Direct and Inverse Kinematics of a Highly Parallel Manipulator*, M. E. Thesis, Dept. Department of Mechanical Engineering McGill University montreal, Québec, Canada, 1989.
- [16] F. Saito, T. Fukuda, and F. Arai, *Swing and Locomotion Control for Two-Link Brachiation Robot*, Proc. 1993 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 719-724, Atlanta, GA, 1993.
- [17] Frank L. Lewis, *Optimal Control*, School of Electrical Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta Georgia, John and Sons, New York.
- [18] G. Hu, W. E. Dixon, and C. Makkar, *Energy-Based Nonlinear Control of Underactuated Euler-Lagrange Systems Subject to Impacts*, Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005 Sevilla, España, Diciembre 12-15, 2005.
- [19] Gary Boone, *Efficient Reinforcement Learning: Model-based Acrobot Control*, Proceedings of the 1997 IEEE Interactional Conference on Robotics and Automation Albuquerque, New México - Abril 1997.
- [20] Gregory J. Toussaint, Tamer Basar, Francesco Bullo,  *$H_\infty$ -Optimal Tracking Control Techniques for Nonlinear Underactuated Systems*, IEEE Decision and Control Conference Sydney, Australia, Dec 2000.
- [21] Harry G. Kwatny, Leon Y. Bahar, and Arun K. Pasrija, *Energy-Like Lyapunov Functions for Power System Stability Analysis*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, VOL. CAS-32, NO. 11, Noviembre 1985.
- [22] Hirohiko Aria, Kazuo Tanie, and Susumu Tachi, *Dynamic Control of a manipulator with Passive Joints in Operational Space*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 9, No. 1, Febrero 1993.
- [23] Isabelle Fantoni, Rogelio Lozano, *Non-linear Control for Underactued Mechanical System*, Springer, 2002.
- [24] J. Denavit and R. S. Hartenberg, *A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices*, Journal, ASME Applied Mechanism Division, July 1955, Paper No. 215-221.
- [25] J. J. Craig, *Introduction to Robotics: mechanics and control*, Addison-Wesley, U. S. A., 1989.
- [26] James E. Bobrow and Garrett A. Sohl, *On the Reliable Computation of Optimal Motions for Underactuated Manipulators*, Department of Mechanical and Aerospace Engineering University of California, Irvine Irvine, CA 92697.
- [27] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.

- 
- [28] Jesús Patricio Ordaz Oliver and Virgilio López Morales *Control y estabilización basado en energía para un sistema subactuado* objeto de una evaluación en la revista Ingeniería y Tecnología de la UNAM.
- [29] Jesús Patricio Ordaz Oliver and Virgilio López Morales *Energy Based Control and Balancing Scheme for an Underactuated Robot*, 5<sup>TH</sup> International Symposium on Robotics and Automation 2006, San Miguel Regla Hidalgo, México, Agosto 25-28, 2006.
- [30] Kahina Guemghar. *On the use of input-output feedback linearization techniques for the control of nonminimum-phase systems*, Ph.D. Thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005.
- [31] Karl Johan Astrom and Bjorn Wittenmark, *Adaptive Control* Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [32] Khalil, H. *Nonlinear Systems*, Segunda edición. Prentice Hall, NJ, 1996
- [33] Khoi B. Ngo and Robert Mahony, *Passivity-based Control of Robot Manipulators Subject to Constraints*, Ara, 2005.
- [34] L. E. Ramos, B. Castillo-Toledo, J. Alvarez, *Nonlinear regulation of an underactuated system*, Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation Albuquerque, New Mexico, Abril 1997.
- [35] Lanka Udawatta, Keigo Watanabe, Kiyotaka Izumi, Kazuo Kiguchi, *Control of Underactuated Robot Manipulators Using Switching Computed Torque Method: GA Based Approach*, Department of Advanced Systems Control Engineering, Graduate School of Science and Engineering Saga University, 1 Honjomachi, Saga 840-8502, Japan 2003.
- [36] M. W. Spong, *Underactuated mechanical systems*. In B. Siciliano and K. P. Valavanis, editor, Control Problems in Robotics and Automation, Springer-Verlag, London, UK, 1997.
- [37] M. W. Spong, *The Control of Underactuated Mechanical Systems*, I Conferencia Internacional de Mecatrónica, México D.F., Enero 1994.
- [38] M. W. Spong, *The swing up control of the acrobot*, In IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Diego, CA., 1994.
- [39] M. W. Spong, *Modeling and Control of Elastic Joint Robots*, ASME J. Dyn. Systems, Meas. and Control, Vol. 109, pp 310-319, December, 1987.
- [40] M. W. Spong, Laurent Praly, *Control of Underactuated Mechanical Systems Using Switching and Saturation*, 1994.
- [41] M. W. Spong and D. J. Block. *The Pendubot: a mechatronic system for control research and education*. Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control, pages 555-556, New Orleans, Dec. 1995.
- [42] Mark W. Spong, M Vidyasagar *Robot Dynamics and Control*, John Wiley and Sons, 1989.



- 
- [43] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, Secon Edition, Prntice-Hall, inc A Simon and Schuster Company, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [44] Mahmut Reyhanoglu, Arjan van der Schaft, N. Harris McClamroch, Fellow, and Ilya Kolmanovsky, *Dynamics and Control of a Class of Underactuated Mechanical Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, VOL. 44, NO. 9, Septiembre 1999.
- [45] Mehrdad Ghandhari, Göran Andersson, and Ian A. Hiskens, *Control Lyapunov Functions for Controllable Series Devices*, IEEE Transactions on Power Systems, VOL. 16, NO. 4, Noviembre 2001.
- [46] Mehrdad Moallem, *Control and Design of Flexible-Link Manipulators*, Ph. D Tesis, Concordia University Montral, Québec, Canada, 1996.
- [47] Miguel A. Pérez García, Juan C. Álvarez Antón, Juan C. Campo Rodríguez, Fco. Javier Ferrero Martín, Gustavo J. Grillo Ortega, *Instrumentación Electrónica*, International Thomson Editores Spain, 2004. Canada, 1996.
- [48] O. Begovich, Edgar N. Sanchez and Marcos Maldonado, *Takagi-Sugeno Fuzzy Scheme for Real-Time Trayectory tracking of an Underactuated Robot*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 10, No. 1, Enero 2002.
- [49] Orhan C. MER, Tamer BASAR, *Lyapunov-Based Stability Analysis for REM Congestion Control*, Proceeding of the 2004 American Control Conference Boston. Massachusetts June 30 -July 2,2004.
- [50] Paul G. Grossimon, Enrique Barbieri, Sergey Drakunov, *Sliding Mode Control of an Inverted Pendulum*, IEEE, 1996.
- [51] P. V. Kokotović, M.Krstić, and I. Kanellakopoulos, *Backstepping to Passivity: Recursive Design of Adaptive Systems*, Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 3276-3280, Tucson, AZ, Dec. 1992.
- [52] R. J. Schilling, *Fundamentals of robots analysis and control*, Prentice Hall, 1990.
- [53] R. J. Stern, *Brockett's condition for stabilization in the state constrained case*, CMR-2839, Montreal Quebec, Canada, March 2002.
- [54] R. Lozano and I. Fantoni, *Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit*, System and Control Letters, Vol. 40, No. 3, pp. 197-204, 2002.
- [55] R. W. Brockett, *Asymptotic stability and feedback stabilization*, in R. W. Brockett, R. S. Millmann, and H. J. Sussmann, Eds., *Differential geometric control theory*, Progress in Mathematics 27 (1983), pp. 181-191.
- [56] Rafael Kelly, Victor Santibáñez, *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*, Prentice Hall, 2003.

- 
- [57] Reza Olfati-Saber, *Nonlinear Control Underactuated Mechanical System with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*, Ph. D Tesis, California Institute of Technology, 2002.
- [58] Reza Olfati-Saber, *Nonlinear Control and reduction of Underactuated Systems with Symmetry II: Underactuated Shape Variables Case*, Control and Dynamical Systems 107-81, California Institute of Technology.
- [59] Reza Olfati-Saber, *Fixed Point Controllers and Stabilization of the Cart-pole System and the Rotating Pendulum*, Control and Dynamical Systems 107-81, California Institute of Technology.
- [60] Rolf Johansson, *Quadratic Optimization of Motion Coordination and Control*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 35, No. 11, Noviembre 1990.
- [61] Romeo Ortega, Antonio Loría, Per Johan Nicklasson, and Hebertt Sira-Ramírez, *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*, Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications, Spriger, 1998.
- [62] S. A. Bortoff, *Pseudolinearization using Spline Functions with Application to the Acrobot*, Ph.D. Thesis, Dept. of Electrical and Computer Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1992.
- [63] Sergey G. Nersesov and Wassim M. Haddad, *On the Stability and Control of Nonlinear Systems via Vector Lyapunov Functions*, 43<sup>rd</sup> IEEE Conference on Decision and Control December 14 – 17, 2004 Atlantis, Paradise Island, Bahamas.
- [64] Shankar Sastry, *Nonlinear Systems Analysis, Stability, and Control*, Springer, 1999.
- [65] Sontag, E. D. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems, second edition, number 6 in Texts in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1998.
- [66] Tetsuya Iwasaki and Go Shibata, *LPV System Analysis via Quadratic Separator for Uncertain Implicit Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, VOL. 46, NO. 8, AUGUST 2001.
- [67] T. Kobayashi, T. Komine, S. Suzuki, M. Iwase and K. Furuta, *Swing-up and Balancing Control of Acrobot*, SINCE 2002, Osaka.
- [68] Thomas Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, 1980.
- [69] The Johns Hopkins University Department of Electrical and Computer Engineering, *The Linear Quadratic Regulator*, Control Systems Design, Spring 2000.
- [70] Wei Zhong and Helmut Röck, *Energy and Passivity Based Control of the Double Inverted Pendulum on a cart*, Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications, Septiembre 5-7, 2001, Mexico.
- [71] Xiao Qing Ma, *Fuzzy Control for an Under-actuated Robotic Manipulator: Pendubot*, M. S. Thesis, Concordia University, Montreal, Quebec, Canada, Agosto 2001.

- 
- [72] Xiao Qing Ma and Chun-Yi Shu, *Theory and Implementation of Fuzzy Control Scheme for Pendubot*, Triennial World Congress, Barcelona, España 2002.
- [73] Zhongmin Wang, YangQuan Chen, Ning Fang, *Minimum-Time Swing-up of A Rotary Inverted Pendulum by Iterative Impulsive Control*, Proceeding of the 2004 American Control Conference Boston, Massachusetts Junio 30 - Julio 2, 2004.

# Glosario

El presente glosario no pretende ser un diccionario de la investigación realizada en este tema de tesis, simplemente reúne las palabras de las cuales no se han tratado particularmente en el presente trabajo.

**Actuado:** [42] las ecuaciones diferenciales generales en un conjunto de coordenadas tienen a siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} = u_a F_i^a, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Donde al par  $(\mathcal{L}, F)$  como el *sistema de control Lagrange*. Para simplificar esto, suponga que el subespacio de  $T_q Q$  es generado por  $T^1(t, v_q), \dots, T^m(t, v_q)$ , es independiente de  $q$ . Si para cada  $(t, v_q) \in \mathbb{R} \times TQ$ , se cumple con

$$\text{span}_{\mathbb{R}} \{F^1(t, v_q), \dots, F^m(t, v_q)\} = T_q Q \quad (3)$$

entonces se dice que el sistema es completamente actuado. En general, los problemas acordes con el control de sistemas completamente actuados son comparativamente sencillos.

**Campo vector:** [14] un campo vector  $f$  en  $U$  es un mapeo suave que asigna a cada punto  $p \in U$  un vector  $f_p$  de  $\mathbb{R}_n$ . El conjunto de todo los campos vectores en  $U$  se denota por  $V(U)$ .

**Codificación:** [47] es representar biunívocamente mediante varios dígitos los diferentes estados o niveles finitos de un cuantificador.

**Codificador de pulsos:** [47] bajo este nombre o el anglosajón, encoder, se incluyen un buen número de sistemas que proporcionan una salida digital que informa sobre la posición de un determinado eje. A pesar de que un aspecto exterior e, incluso, su comportamiento pueda ser muy parecido, se puede encontrar con sistemas muy diversos y de tecnologías diferentes.

**Conjunto Ortonormal:** [14] sea  $(X, \langle, \rangle)$  un espacio pre-Hilbert. Sea  $A \subset X$ ,  $A \neq \emptyset$ . Se dice que  $A$  es ortonormal si  $A$  es ortogonal y además se tiene que  $\|x\| = 1$  para cada  $x \in A$ .

**Convergencia:** [14] en un espacio vectorial lineal normado, una secuencia infinita de vectores  $\{x_n\}$  se dice que converge a  $x$  si la secuencia de números reales  $\{\|x - x_n\|\}$  converge a cero. Escribimos  $x_n \rightarrow x$ .

**Convertidor digital a analógico:** [47] la conversión digital a analógica es un procedimiento a través del cual un código de entrada  $\varphi$  es transformado en una señal de tensión o de corriente unipolar o bipolar de salida mediante una correspondencia entre  $2^n$  combinaciones binarias posibles de entrada y  $2^n$  tensiones (o de corrientes) discretas de salida, obtenidas a partir de una frecuencia de tensión o de corriente. En términos de tensión y de corriente puede expresarse como:

$$V_0 = \sum_{i=0}^{n-1} V_{pondi} \cdot dp_i$$

donde  $dp \in [0, 1]$ .

$$I_0 = \sum_{i=0}^{n-1} I_{pondi} \cdot dp_i$$

donde  $dp \in [0, 1]$ .

Este proceso consiste en hacer una ponderación de cada bit del código N y sumar el resultado de todas las ponderaciones multiplicadas por el valor del bit asociado a cada una. De esto se deriva que la salida ( $V_0$  o  $I_0$ ) es única para cada código de entrada I. La salida de un convertidor digital a analógico de un número finito de código de entrada no es una señal analógica, sino discreta, digital.

**Derivada de Lie:** [6] sea  $f$  un campo vector suave en  $U$  y  $\lambda$  una función real valuada en  $U$ . Entonces la **derivada de LIE** de  $\lambda$  a lo largo de  $f$  es una función  $L_f\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$(L_f\lambda)(p) = (f(p))(\lambda)$$

i.e.  $(L_f\lambda)(p)$  es el valor en  $\lambda$  del vector tangente  $f(p)$  en  $p$ . En coordenadas locales, si  $f$  es de la forma  $f = \sum_{i=1}^m f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , entonces se tiene

$$(L_f\lambda)(p) = \sum_{i=1}^m f_i(p) \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right) (p)$$

**Elemento Ortonormal:** [14] sea  $(X, \langle, \rangle)$  un espacio pre-Hilbert. Se dice que un elemento  $x \in X$  es ortonormal si  $\|x\| = 1$ .

**Eslabón:** [42] estos son típicamente rotatorios (de revolución) o lineales (prismático): un eslabón de revolución es una conexión entre enlaces y tiene una rotación relativa entre ambos enlaces. Un eslabón prismático tiene un movimiento relativamente lineal entre los dos enlaces.

**Espacio Banach:** [14] un espacio vectorial lineal normado  $X$  es completo si cada secuencia de Cauchy de  $X$  tiene un límite en  $X$ . Un espacio vectorial lineal normado completo se le llama espacio de Banach.

**Espacio de Hilbert:** [14] un espacio con producto interno completo se llama espacio de Hilbert.

**Espacio de trabajo:** [42] el  $WS$  (i.e. *Espacio de trabajo o por sus siglas en inglés Work Space*) de un manipulador es el volumen total barrido producido por el efector final cuando el manipulador ejecuta todos los movimientos posibles. El espacio de trabajo es restringida por la geometría del manipulador así como las restricciones mecánicas sobre las articulaciones. Por ejemplo, una articulación de revolución puede ser limitada a menos de  $360^\circ$  del movimiento de espacio de accesible.

**Espacio Tangente:** [14] el espacio tangente a  $U$  en  $p$ , escrito  $T_pU$ , es el conjunto de todos los vectores tangentes en  $p$ .

**Función suave:** [14] sea  $f : U \rightarrow$  una función. El valor de  $f$  en  $q = (q_1, \dots, q_n)$  se denota  $f(q) = f(q_1, \dots, q_n)$ . La función se dice que es una función de clase  $C^\infty$  (o simplemente función suave) si sus derivadas parciales de cualquier orden con respecto a  $q_1, \dots, q_n$  existen y son continuas.

**Funcional:** [14] una transformación de un espacio vectorial  $X$  en los reales (o complejos) es una funcional en  $x$ .

**Grado de libertad:** [9] este está definido por el número de coordenadas  $n$  menos el número de restricciones  $m$ , i.e.  $n - m$ .

También el número de grados de libertad es de un sistema mecánico es dado por la relación de *Chebyshev-Kutzback-Gruhler* [15] dada a continuación.

$$nGDL = 6(E - 1) - 5A \quad (4)$$

Donde  $E$  indica el número de eslabones y  $A$  el número de articulaciones.

**Holónomicas:** [10] el término holónomicas simplemente significa que la relación diferencial entre las coordenadas de posición puede ser integrada para dar lugar a una nueva ecuación algebraica entre las coordenadas.

**Linealmente independiente:** [14] un vector  $x$  se dice linealmente dependiente de un conjunto  $S$  de vectores, si  $x$  puede ser expresado como una combinación lineal de  $S$ .

**Mapeo suave:** [14] un mapeo  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una colección  $(\phi_1(q), \dots, \phi_m(q))$   $\therefore$  de funciones  $\phi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ . El mapeo  $\Phi$  es  $C^\infty$  si todas las funciones  $\phi_i$  son  $C^\infty$ .

**Matriz no negativa:** [68] también conocida como matriz definida positiva. La matriz  $A$  es *semidefinida positiva* si (la forma cuadrática)  $x^T A x \geq 0, \forall x$ . Si la desigualdad se cumple solo cuando  $x \equiv 0$ , entonces decimos que  $A$  es definida positiva. Notar que, cuando  $2x^T A x = x^t(A + A^T)x + x^T(A - A^T)x = x^T(A + A^T)x$ , es usualmente se asume que  $A$  es simétrica.

**Matriz simétrica:** [68] una matriz es simétrica, si se puede demostrar que  $A = A^T$ , es decir el elemento  $ij$ -ésimo de la matriz  $A$  es igual a el elemento  $ji$ -ésimo de la misma.

**Modelo cinemático directo de aceleración:** [56] describe la relación entre la velocidad articular  $\dot{q}$  y la aceleración de la orientación  $\ddot{x}$  del dispositivo terminal de un robot, i.e.

$$\ddot{x} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q}$$

Que es la relación directa de aceleración.

**Modelo cinemático directo de posición:** [56] describe la relación entre la posición articular  $q$  y la orientación  $x$  del dispositivo terminal de un robot, i.e.

$$x = f(q)$$

Que es la relación directa de posición.

**Modelo cinemático directo de velocidad:** [56] describe la relación entre la velocidad articular  $\dot{q}$  y la velocidad de la orientación  $\dot{x}$  del dispositivo terminal de un robot, i.e.

$$\dot{x} = J\dot{q}$$

Que es la relación directa de velocidad.

**Modelo cinemático inverso de aceleración:** [56] consiste justamente en la relación inversa del modelo cinemático directo de aceleración, es decir, es la relación entre la aceleración cartesiana  $\ddot{x}$  y la velocidad articular  $\dot{q}$ , i.e.

$$\ddot{q} = J^{-1}(\ddot{x} - \dot{J}\dot{x})$$

Que es la relación inversa de aceleración.

**Modelo cinemático inverso de posición:** [56] consiste justamente en la relación inversa del modelo cinemático directo, es decir, es la relación entre la posición cartesiana  $x$  y la posición articular  $q$ , i.e.

$$q = f^{-1}(x)$$

Que es la relación inversa de posición.

**Modelo cinemático inverso de velocidad:** [56] consiste justamente en la relación inversa del modelo cinemático directo de velocidad, es decir, es la relación entre la velocidad cartesiana  $\dot{x}$  y la velocidad articular  $\dot{q}$ , i.e.

$$\dot{q} = J^{-1}\dot{x}$$

Que es la relación inversa de velocidad.

**Paréntesis de Lie:** [6] sean  $f$  y  $g$  dos campos vectores suaves en  $U$ , definiendo un nuevo campo vector llamado los **Paréntesis de Lie**  $[f, g]$  por

$$([f, g](p))(\lambda) = f(g(\lambda)) - g(f(\lambda)) = L_f L_g \lambda - L_g L_f \lambda$$

En otras palabras,  $[f, g](p)$  toma  $\lambda$  y lo transforma en el número real  $L_f L_g \lambda - L_g L_f \lambda$ .

**Plano fase:** [27] es un método gráfico para el estudio de sistemas no lineales de segundo orden. La idea básica es de resolver la ecuación diferencial y graficar el primer estado *primer derivada* contra el segundo *segunda derivada*.

**Restricción:** [9] el término restricción es utilizado por la interconexión de los elementos restringe a las coordenadas y las obliga a comportarse de cierta manera.

**Restricción holónomicas:** [10] si las ecuaciones de restricción involucra únicamente relaciones entre coordenadas, reciben el nombre de restricción holónomicas.

**Restricción no holónomicas:** [10] si las ecuaciones de restricción involucran relaciones no integrables entre coordenadas diferenciales, recibirán el nombre de restricción no holónomicas.

**Robot:** Un robot es un manipulador multiprogramable diseñado para mover material, herramientas, partes o dispositivos especializado a través de movimientos programados para realizar una gran variedad de tareas (definición dada por Robot Institute of America (**RIA**)).

**Secuencia de Cauchy:** [14] una secuencia  $\{x_n\}$  en un espacio normado se dice de Cauchy si  $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$  cuando  $n, m \rightarrow \infty$ , i.e. dado un  $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ .



**Subactuado:** [2] estos presentan la propiedad de tener un menor número de entradas de control que de variables configuracionales.

**Subconjunto acotado:** [14] Sea  $F$  un subconjunto de  $X$ . Se dice que  $F$  es acotado si existe un  $M > 0$  tal que

$$x \in F \Rightarrow \|x\| \leq M$$

**Subconjunto compacto:** [14] sea  $F$  un subconjunto de  $X$ . Se dice que  $F$  es compacto siempre que  $X_n \in F$ , existe una subsucesión convergente de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  cuyo límite esta en  $F$ .

**Subespacio:** [14] sea  $M \neq 0$ ,  $M \subset X$ , subconjunto es llamado un subespacio de  $X$  si  $\forall x, y \in M$  y  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  implica que  $\alpha x + \beta y \in M$ .

**Subespacio generado:** [14] sea  $S \subset X$  (subconjunto), entonces:

$$\begin{aligned} [s] &:= \{x \in X : x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_i x_i\} \\ x_j &\in S; \alpha_j \in \mathbb{R} \\ j &= 1, 2, \dots, i; i \in N \end{aligned}$$

se llama subespacio generado por  $S$ .

**Subvariedad suave de dimensión  $k$ :** [14] un subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  es llamado una subvariedad suave de dimensión  $k$  ( $k < n$ ) de  $\mathbb{R}^n$  si posee las siguientes propiedades: para cada  $x_0 \in M$  existe un conjunto abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  que contiene a  $x_0$  y a funciones suaves  $\phi_{k+1}, \dots, \phi_n$  tal que:

- i)  $\{d\phi_i, i = k + 1, \dots, n\}$  es un conjunto linealmente independiente de vectores renglón para todo  $x \in U$ , y
- ii)  $U \cap M = \{x \in U : \phi_i = 0 \text{ para } i = k + 1, \dots, n\}$ .

**Sucesión:** [14] una sucesión de un espacio normado  $X$  es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos, y se escribe  $x_n = f(n)$ .

**Variedad lineal:** [14] la traslación de un subespacio  $M$  de  $X$  se dice una variedad lineal si:

$$\mathcal{L} \equiv x_0 + M := \{\mathcal{V} \in X : \mathcal{V} = x_0 + M; x \in M\}$$

**Vector Tangente:** [14] un vector tangente  $v$  en  $p$  es un mapeo  $v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$  con las siguientes propiedades:

- i) Linealidad
- ii) Cumple con la regla de Leibnitz.

# Apéndice A

## Pasividad y disipación.

Para definir las medidas de las magnitudes y la energía en  $n$  dimensiones y función real valuada, las definiciones matemáticas de espacios medibles, las normas, y los productos escalares son requeridos. Aquí se presentan sus definiciones fundamentales.

**Definición A.1. Espacios  $L_2$  y  $L_{2e}$**  Sea  $\Xi$  un conjunto de todas las funciones  $n$  dimensional real valuadas en el tiempo:  $f(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Entonces, el espacio  $L_2$  esta definido como;

$$L_2 \equiv \left\{ x \in \Xi : \|f\|^2 \equiv \int_0^\infty \|f\|^2 dt < \infty \right\}$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma Euclideana.  $L_2$  define un espacio vectorial lineal normado completo (espacio Banach) sobre un número real con norma  $\|\cdot\|_2$ . El espacio  $L_2$  también tiene un producto escalar, y en consecuencia es un espacio de Hilbert.

Ahora, define un truncamiento de  $f(t)$  como

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & , \quad 0 \leq t < T \\ 0 & , \quad t \geq T \end{cases}$$

Estas funciones de truncamiento definen una extensión de los espacios  $L_2$  a  $L_{2e}$  como

$$L_{2e} \equiv \left\{ x \in \Xi : \|f\|^2 \equiv \int_0^T \|f\|^2 dt < \infty, \forall T \right\}$$

tenemos que  $L_2 \subset L_{2e}$  porque  $L_{2e}$  contiene señales de la norma  $L_2$  cuando  $t \rightarrow \infty$  [61].

**Definición A.2. Producto escalar** El producto escalar de  $L_2$  y  $L_{2e}$  esta definido como

$$\langle u|y \rangle \equiv \int_0^\infty u(t)^T y(t) dt$$

y

$$\langle u|y \rangle_T \equiv \int_0^T u(t)^T y(t) dt,$$

respectivamente, donde  $y(t)$  y  $u(t)$  son funciones  $c^\infty$  [61].

## A.1. Pasividad.

Los sistemas pasivos son una clase de sistemas dinámicos en que se produce un intercambio de energía con el ambiente de la planta. Un sistema pasivo no puede producir más energía que la proporcionada, por la diferencia que produce la disipación de energía.

Considerando el sistema no lineal descrito por la ecuación diferencial (A.1)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde,  $x \in \mathbb{R}^n$  es la variable de estado,  $y \in \mathbb{R}^m$  que es la salida,  $f$  es un espacio vectorial  $c^\infty$ , la función  $h$  es un mapeo  $c^\infty$ .

Dado que es sistema dinámico, (A.1) puede ser estabilizable a través de algunos métodos de control, se puede encontrar una función  $c^\infty$   $g$  y una entrada  $u \in \mathbb{R}^m$  para tener un sistema de la forma (A.2).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x) \cdot u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{A.2}$$

donde se hace la suposición de que el campo vector  $f$  se llevará a un punto de equilibrio. De forma general se supone que el punto de equilibrio esta en  $x = 0$ . Si el punto de equilibrio no esta en  $x = 0$ , podemos hacer un cambio de coordenadas para llevar el punto de equilibrio a  $x = 0$ .

**Definición A.3.** [61] *Un sistema no lineal de la forma de (A.2) es llamado pasivo si las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  existen, y tienen una constante real  $\beta$ , tal que  $\forall t \geq 0$*

$$\int_0^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau \geq \beta\tag{A.3}$$

o si tiene una constante  $\rho > 0$  y una constante real  $\beta$ , tal que  $\forall t \geq 0$

$$\int_0^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau + \beta \geq \int_0^t \rho \cdot y(\tau)^T y(\tau)d\tau.\tag{A.4}$$

**Definición A.4.** [61] *Un sistema no lineal de la forma (A.2) es llamado pasivo si existe una función no negativa  $V(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V(0) = 0$ , llamada función de almacenamiento, tal que  $\forall x \in X$ ,  $\forall t \geq 0$*

$$V(x) - V(x_0) \leq \int_0^t y^T(s)u(s)ds.\tag{A.5}$$

**Definición A.5.** [61] *Un sistema pasivo con función de almacenamiento  $V(x)$  es llamada estrictamente pasivo, si existe una función definida positiva  $S(x)$ , tal que  $\forall x \in X, \forall t \geq 0$*

$$V(x) - V(x_0) = \int_0^t y^T(s)u(s)ds - \int_0^t S(x(s)) ds. \quad (\text{A.6})$$

**Teorema A.1. Byrnes e Isidori:** [70] *Un sistema no lineal de la forma (A.2) con la propiedad de Kalman-Yakubovich-Popov es pasivo, con una función de almacenamiento  $V(x)$ . Consecuentemente, un sistema pasivo con una función de almacenamiento  $c^\infty$  y continua, cumple con la propiedad de Kalman-Yakubovich-Popov.*

**Teorema A.2. Byrnes e Isidori:** [70] *Suponga que un sistema no lineal es pasivo con una función de almacenamiento  $V(x)$  definida positiva y suponga que el sistema es localmente detectable en el estado-cero. Sea  $\varphi$  una función  $c^\infty$  tal que  $y^T \varphi(y) > 0$  y  $\varphi(0) = 0$  para cada  $y$  no cero.*

*El sistema en lazo cerrado, con la ley de control*

$$u(t) = -\varphi(y) \quad (\text{A.7})$$

*es asintóticamente estable en el punto de equilibrio  $x = 0$ .*

**Teorema A.3.** [7] *Suponemos que  $x = 0$  es el punto de equilibrio del sistema no lineal (A.2). El sistema (A.2) tiene  $\mathbf{gr} \{1, 1, \dots, 1\}$  en  $x = 0$  y si el sistema es de fase mínima, el sistema (A.2) puede ser llamado como retroalimentación equivalente a un sistema pasivo con la propiedad de función de almacenamiento  $V(x)$ .*

*Demostración.* Sea  $y = h(x)$  una nueva variable de estado y elegimos  $\eta = 0$ . El sistema (A.2) es representado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = c(\eta, y) + d(\eta, y)u \\ \dot{y} = b(\eta, y) + a(\eta, y)u \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

donde  $a(\eta, y)$  es no singular para todo  $(\eta, y)$  en  $(0, 0)$ .

Elegimos una nueva ley de retroalimentación

$$u = a(\eta, y)^{-1} [-b(\eta, y) + v] \quad (\text{A.9})$$

donde

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \theta(\eta, y) + \gamma(\eta, y)v \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Sea  $z = \eta - \gamma(\eta, 0)y$ , entonces

$$\begin{cases} \dot{z} = f^*(z) + p(z, y)y + \left( \sum_{i=1}^m q_i(z, y)y_i \right) \cdot v \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

donde  $p(z, y)$ ,  $q_i(z, y)$  son matrices.

Si el sistema (A.2) es de fase mínima, entonces existe una función definida positiva  $W^*(z)$ , con  $W^*(0) = 0$ , tal que  $L_{f^*}V(z) \leq 0$  para cada  $z \neq 0$ . Definiendo

$$M(z, y) = \begin{bmatrix} L_{q_1(z, y)}W^*(z) \\ \vdots \\ L_{q_n(z, y)}W^*(z) \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

donde  $M(0, y) = 0$ . La ley de control retroalimentada

$$v = [I + M(z, y)]^{-1} \left[ - (L_{p(z, y)}W^*(z))^T + w \right] \quad (\text{A.13})$$

está bien definida en una vecindad de  $(0, 0)$ . De otro modo tendremos

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \bar{f}(x, y) + \bar{g}(z, y)w \quad (\text{A.14})$$

Junto con la función positiva

$$V(z, y) = W^*(z) + \frac{1}{2}y^T y$$

esto es

$$L_{\bar{f}}V(z, y) + L_{\bar{g}}V(z, y)w = L_{f^*}W^*(z) + y^T w \quad (\text{A.15})$$

de otro modo

$$\begin{aligned} L_{\bar{f}}V(z, y) &= L_{f^*}W^*(z) \leq 0 \\ (L_{\bar{g}}V(z, y))^T &= y \end{aligned}$$

y el sistema (A.2) es un sistema pasivo. □

Las propiedades de disipación y pasividad son muy importantes en sistemas de Euler-Lagrange.

**Definición A.6. Disipación:** [61] *Un sistema Euler-Lagrange es disipativo con respecto a la entrada  $s(u, y)$ , si y solo si, existe una función de almacenamiento  $\mathcal{L}$  tal que*

$$\mathcal{L}(x(T)) \leq \mathcal{L}(x(0)) + \int_0^T s(u(t), y(t)) dt,$$

para todo  $u$ , todo  $T \geq 0$  y todo  $x_0$ .

**Definición A.7. Pasividad de sistemas Euler-Lagrange:** [61] *Un sistema es pasivo si este es disipativo con velocidad de entrada  $s(u, y) = u^T y$ . A causa de que la energía suministrada es mayor que la energía total  $\mathcal{L}$ , la propiedad de pasividad puede ser escrita como*

$$\langle u | G(u) \rangle \geq \mathcal{L}[q(T), \dot{q}(T)] - \mathcal{L}[q(0), \dot{q}(0)]$$

**Definición A.8. Salida Estrictamente Pasiva:** [61] *el sistema tiene salida estrictamente pasiva si es disipativo con velocidad de entrada  $s(u(t), y(t)) = u^T y - \alpha \|G(u)\|^2$ , donde  $\alpha > 0$ . Esto también puede ser escrito de la forma*

$$\langle u | G(u) \rangle \geq \alpha \|G(u)\|^2 + \mathcal{L}[q(T), \dot{q}(T)] - \mathcal{L}[q(0), \dot{q}(0)]$$

para cualquier  $\alpha > 0$ .

**Definición A.9. Operadores Pasivos:** [61] *Para un sistema Euler-Lagrange Pasivo con señal de entrada  $u$  y señal de salida  $G(u)$ , un operador pasivo puede ser definido como  $\Sigma : u \rightarrow G(u)$ .*

## A.2. Estabilidad interna

[61] En esta sección, se presentan algunas definiciones y propiedades que formalizan la propiedad de estabilidad interna.

**Definición A.10. Sistema Afín:** [61] *En esta sección se aborda una clase especial de sistemas llamados sistemas afín en la entrada. Un sistema es afín en la entrada  $u$  si*

$$\Sigma_a = \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, & x(0) = x(0) \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ y = h(x), \end{cases}$$

donde  $g(x)$  es una matriz  $n \times n$ .

**Definición A.11. Observabilidad y Detectabilidad:** [21] *Considere el sistema en espacio de estado anterior  $\Sigma_a$  con entrada  $u = 0$ .*

*El sistema es llamado estado-cero observable de la salida  $y(t)$  si para todo  $x(0)$  tenemos que  $y(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$ , y estado-cero detectable si  $y(t) \equiv 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \forall x(0)$ .*

**Proposición A.1.** *Asumimos las siguientes propiedades de  $\Sigma_a$*

1. *Salida estrictamente pasiva.*
2. *Estado-cero detectable.*
3.  $\mathcal{L}(0) = 0$ .
4.  $\mathcal{L}(0) > 0, \forall x \neq 0$ .
5.  $\mathcal{L}(x)$  *es radialmente acotada.*

*entonces  $x \equiv 0$  es Asintóticamente globalmente estable.*

*Demostración.* Considere el sistema en espacio de estado afín  $\Sigma_a$ . De la definición (A.6) sabemos que  $\Sigma_a$  es llamada disipativa respecto a la velocidad de entrada  $s(u, y)$  si existe una función  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , llamada función de almacenamiento, tal que

$$\mathcal{L}(x(t_1)) \leq \mathcal{L}(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(u(t), y(t)) dt,$$

Dividiendo esta desigualdad con  $t_1 - t_0$  y llevando  $t_1 \rightarrow t_0$  nos da

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} \leq s(u(t), y(t)).$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{d\mathcal{L}}{dx} \dot{x} = \mathcal{L}_x(x) \dot{x} \leq s(u(t), y(t)) \Leftrightarrow \\ \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \mathcal{L}_x(x) (f(x) + g(x)u) \leq s(u(t), y(t)), \forall x \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Sea  $x(t; x_0)$  la solución de  $\dot{x} = f(x)$  con condiciones iniciales  $x(0) = x_0$ , y asumimos que  $\Sigma$  tiene salida estrictamente pasiva  $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : s(u(t), y(t)) = u^T y - \varepsilon \|y\|^2$ , acorde con la Definición A.8.

De la segunda propiedad de  $\Sigma_a$  (estado-cero detectable) tenemos que  $u = 0$ . Entonces de la ecuación (A.16) se tiene que

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \mathcal{L}_x(x) f(x) \leq s(0, y) = -\varepsilon \|y\|^2 \leq 0. \quad (\text{A.17})$$

Es claro que la función  $\dot{\mathcal{L}}(x)$  esta acotada por la velocidad de entrada. También para un  $x_0$  arbitrario y existe un conjunto compacto  $\mathcal{B}$  tal que  $x(t; x_0) \in \mathcal{B} \forall t \geq 0$ . Entonces, se sigue del principio de invariancia de LaSalle que  $x(t; x_0)$  converge a un subconjunto más grande  $\Omega \subset x \in \mathbb{R}^n : \dot{\mathcal{L}}(x) = 0 \cap \mathcal{B}$  que es invariante para  $\dot{x} = f(x)$ .

Iniciando en  $x_0 = a \in \Omega$  y haciendo la siguiente observación.

$$a \in \Omega \Rightarrow a \in x \in \mathbb{R}^n : \dot{\mathcal{H}}(x) = 0 \Rightarrow \dot{\mathcal{L}}(x(t; a)) = 0$$

Es claro que  $s \in \mathcal{B} \Rightarrow \dot{\mathcal{L}}(x) \leq -\varepsilon \|y\|^2 \leq 0$ , acorde con (A.17). Esto implica que  $\dot{\mathcal{L}}(x) = 0 \Leftrightarrow -\varepsilon \|y\|^2 = 0 \Rightarrow y \equiv 0$ . Dado que  $\Sigma_a$  es estado-cero detectable entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \forall a \in \Omega$ , que indica que  $x \equiv 0$  es Localmente asintóticamente estable.

Si  $\mathcal{L}(x)$  es radialmente acotado entonces  $x \equiv 0$  es globalmente asintóticamente estable.  $\square$

### A.3. Interconexión de sistemas Euler-Lagrange

Cuando un controlador es introducido en un proceso, el sistema puede ser visto como una interconexión entre el proceso y el controlador. En esta sección, se verá que cuando dos sistemas pasivos Euler-Lagrange son conectados, el sistema resultante también es un sistema Euler-Lagrange pasivo. También se demostrará que la función de almacenamiento y disipación son obtenidas por la adición de sus funciones correspondientes para los dos sistemas. Esto es muy usado cuando se introducen controladores basados en pasividad.

**Proposición A.2. Sistemas Euler-Lagrange interconectados:** [21] Suponga que se tienen dos sistemas Euler-Lagrange

$$\sum_p : K_P(q_p, \dot{q}_p), u_p(q_p), F(\dot{q}_p), M_p$$

y

$$\sum_c : K_c(q_c, \dot{q}_c), u_c(q_c, q_p), F(\dot{q}_c)$$

Observe que el potencial  $u_c$  depende de  $q_c$  y  $q_p$ .

Introducimos una interconexión del sistema con

$$u = -\frac{\partial u_c(q_c, q_p)}{\partial q_p} \quad (\text{A.18})$$

donde  $u$  es la entrada del subsistema  $\Sigma_p$ , como lo muestra la Figura (A.1).

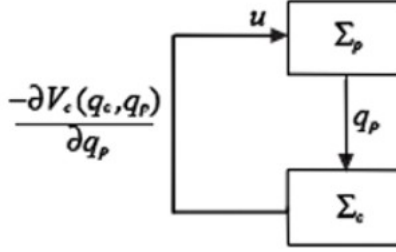


Figura A.1: Interconexión en retroalimentación de dos sistemas Euler-Lagrange.

Entonces el sistema Euler-Lagrange en lazo cerrado es el sistema

$$\sum : K(q, \dot{q}), u(q), F(\dot{q})$$

donde  $q \equiv [q_p^T, q_c^T]$ ,  $K(q, \dot{q}) = K_c(q_c, \dot{q}_c) + K_p(q_p, \dot{q}_p)$ ,  $u(q) = u_c(q_c, q_p) + u_p(q_p)$  y  $F = F_c(\dot{q}_c) + F_p(\dot{q}_p)$ .

*Demostración.* Suponga que la energía total del sistema interconectado es la suma de sus partes, i.e.  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_c$  y el total de disipación es la suma de  $F_p$  y  $F_c$ . Así que se tiene

$$\begin{aligned} K &= K_p(q_p, \dot{q}_p) + K_c(q_c, \dot{q}_c) \\ u &= u_p(q_p) + u_c(q_c, q_p) \\ F &= F_p(\dot{q}_p) + F_c(\dot{q}_c) \end{aligned}$$

Se debe de determinar la señal de acoplamiento, la señal de entrada  $u$  de  $\Sigma_p$ , así también, que el sistema interconectado es un sistema Euler-Lagrange, i.e. esto satisface

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K - u}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K - u}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0, q = [q_p, q_c]^T.$$

El primer término es una matriz de la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K - u}{\partial \dot{q}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K - u}{\partial \dot{q}_p} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K - u}{\partial \dot{q}_c} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_p}{\partial \dot{q}_p} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_c}{\partial \dot{q}_c} \right) \end{bmatrix}$$

El segundo término nos da



$$\left( \frac{\partial K - u}{\partial q} \right) = \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\partial K - u}{\partial q_p} \right) \\ \left( \frac{\partial K - u}{\partial q_c} \right) \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} u \\ 0 \end{array} \right],$$

donde  $u = -\partial u_c(q_c, q_p)/\partial q_p$

El tercer término evaluado es

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) = \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_p} \right) \\ \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_c} \right) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\partial F_p(\dot{q}_p)}{\partial \dot{q}_p} \right) \\ \left( \frac{\partial F_c(\dot{q}_c)}{\partial \dot{q}_c} \right) \end{array} \right]$$

Insertando los términos en la ecuación de Euler-Lagrange, se obtiene que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_p}{\partial \dot{q}_p} \right) - \frac{\partial K_p}{\partial q_p} + \frac{\partial F_p}{\partial \dot{q}_p} = -\frac{\partial u_p}{\partial q_p} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_c}{\partial \dot{q}_c} \right) - \frac{\partial K_c}{\partial q_c} + \frac{\partial F_c}{\partial \dot{q}_c} = -\frac{\partial u_c}{\partial q_c} \end{array} \right.$$

que son los dos sistemas Euler-Lagrange Interconectados □

## A.4. Propiedades de estabilidad.

Aquí se presentan algunas de las propiedades relacionadas con estabilidad de sistemas Euler-Lagrange no forzados, i.e.  $\tau \equiv 0$ . Para facilitar el estudio del tema, estudiaremos por separado la estabilidad para sistemas completamente amortiguados y subamortiguados.

### A.4.1. Sistemas completamente amortiguados.

Los sistemas completamente amortiguados presentan ciertas características de estabilidad que los sistemas subamortiguados no tienen. La siguiente propiedad puede ser usada para estabilidad de sistemas completamente amortiguados.

**Proposición A.3. Estabilidad globalmente asintótica para un sistema completamente amortiguado:** [21] *Suponemos que tenemos un sistema Euler-Lagrange completamente amortiguado con energía potencial  $u(q)$  que satisface la suposición (2.2). Esto implica que  $u(q)$  tiene un único punto de equilibrio en  $q = \bar{q}$  que es la solución de*

$$\frac{\partial u(q)}{\partial q} = 0.$$

*Si se cumple esta condición, el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable.*

*Demostración.* El sistema Euler-Lagrange con  $\tau = Q_\zeta = 0$  puede ser escrito como

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \frac{\partial u(q)}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}(\dot{q}) = 0. \quad (\text{A.19})$$

Insertando el punto  $[q, \dot{q}] = [\bar{q}, 0]$  en (A.19) se obtiene

$$\frac{\partial u(\bar{q})}{\partial q} = 0.$$

De la observación (2) se tiene que  $\partial F(\dot{q})/\partial \dot{q} = 0$  cuando  $\dot{q} = 0$ . El punto  $[q, \dot{q}] = [\bar{q}, 0]$  es globalmente asintóticamente estable, si satisface las propiedades de la proposición (A.1). Se sabe de la definición (A.8), que un sistema Euler-Lagrange completamente amortiguado es estrictamente pasivo en la salida con función de almacenamiento de la energía total  $\mathcal{L}$ . De la suposición que la energía potencial es acotada entonces decimos que la energía total también es acotada. Al hacer esto definido positivo, necesitamos agregar una constante positiva. Para probar estabilidad globalmente asintótica solo tenemos que recordar que la ecuación (A.19) es por lo menos en el estado-cero detectable (definición A.11). La propiedad del estado-cero observable puede ser demostrada al ajustar  $\dot{q} = 0$  en la ecuación (A.19). Esto implica que  $\partial V(q)/\partial q = 0$  tiene la solución  $q = \bar{q}$ .  $\square$

#### A.4.2. Sistemas subamortiguados.

Si el sistema no es completamente amortiguado, la estabilidad asintótica global puede ser descrita si la matriz de inercia  $D(q)$  tiene cierta estructura diagonal. Consideramos un sistema con amortiguamiento parcial, i.e. las coordenadas generalizadas  $q$  pueden ser particionadas en coordenadas amortiguadas  $q_c$  y en subamortiguadas  $q_p$ . Los subíndices  $c$  y  $p$  representan el controlador y el proceso, respectivamente. La razón es que el proceso puede ser considerado como un sistema subamortiguado y el controlador como un amortiguado.

**Proposición A.4. Estabilidad asintótica global:** [21] *Un punto de equilibrio  $(\dot{q}, q) = (0, \bar{q})$  de un sistema Euler-Lagrange subamortiguado con coordenadas particionadas  $q_c$  y  $q_p$  es globalmente asintóticamente estable si la función de energía potencial  $V(q)$  satisface la suposición 2.2 y si satisface las siguientes tres condiciones*

1. *La matriz de inercia puede ser escrita como 
$$\begin{bmatrix} D_p(q_p) & 0 \\ 0 & D_c(q_c) \end{bmatrix}$$*
2.  $\exists \alpha > 0 : \dot{q}^T \frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}_c} \geq \|\dot{q}_c\|^2.$
3. *Si  $q_c$  es constante y  $\partial V(q)/\partial q_c = 0$  entonces  $q_p$  también es constante.*

*Demostración.* De la Proposición A.3 se dice que el sistema con coordenadas completamente amortiguadas  $q_c$  tiene salida estrictamente pasiva. Ahora escribimos las ecuaciones de Euler-Lagrange como completamente amortiguadas de una ecuación subamortiguada como

$$D(q_c)\ddot{q}_c + C(q_c, \dot{q}_c)\dot{q}_c + \frac{\partial F(\dot{q}_c)}{\partial \dot{q}_c} + \frac{\partial V(q)}{\partial q_c} = 0. \quad (\text{A.20})$$

$$D(q_p)\ddot{q}_p + C(q_p, \dot{q}_p)\dot{q}_p + \frac{\partial V(q)}{\partial q_p} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Observar que  $V = u_c(q_c, q_p) + u_p(q_p)$ .

En la prueba de estabilidad, se verifican las condiciones de la Proposición A.1. Como en la Proposición A.3, se demuestra el mínimo estado-cero detectable con respecto a la salida  $\dot{q}_c$ , se sigue de la

Definición A.11, que  $\dot{q}_c = 0$ . Esto indica que  $q_c = \text{constante}$ , y si sustituimos esto en la ecuación (A.20) y usamos la condición 3 entonces  $q_p$  también es constante. El estado-cero detectable sigue del hecho que  $q = \bar{q}$  es un único punto de equilibrio global de la ecuación (A.20) y (A.21), ver Suposición 2.2.  $\square$

# Apéndice B

## Linealización de sistemas Euler Lagrange

Una de las principales cosas que se hace con una ecuación diferencial es la de observar los puntos de equilibrio y la linealización del sistema al rededor de algún punto de equilibrio. Esto es muy aplicado para sistemas del tipo Euler-Lagrange aquí veremos como la linealización de un sistema Euler-Lagrange cede a una estructura que es muy especial.

Otra razón de la linealización de un sistema Euler-Lagrange es analizar diferentes criterios de teoría de control para el sistema Forzado a un sistema Euler-Lagrange<sup>1</sup> como lo es Controlabilidad, Obsevabilidad, Detectabilidad, etc. Para mayor información consulte [12, 9].

### B.1. Linealización de un sistema Euler Lagrange

Cuando uno linealiza una ecuación diferencial el resultado es una ecuación diferencial lineal, en el caso de sistema Euler Lagrange sucede lo mismo y encontramos una Ecuación Diferencial Euler Lagrange Lineal.

El método que emplearemos es el de linealización por Lyapunov ya que es un método general y es consistente en el análisis de estabilidad local de sistemas no lineales.

considérese el sistema 2.1 y asumimos que  $f$  es  $C^\infty$ . Entonces las dinámicas del sistema pueden escribirse por una descomposición en series de Taylor como

$$\dot{x} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0} x + f_{h.o.t.}(x) \quad (\text{B.1})$$

donde  $f_{h.o.t}$  (*por sus siglas en inglés high order terms*) son los términos de orden superior de  $x$ .

---

<sup>1</sup> i.e. Un sistema Euler-Lagrange es de la forma  $\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} = 0$  y un sistema forzado Euler-Lagrange es de la forma  $\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i, i = 1, \dots, n$

Observando que la expansión anterior inicia directamente con los términos de primer orden con  $f(0) = 0$ , dado que 0 es el punto de equilibrio. Sea la matriz de constantes  $A$  denotando la matriz Jacobiana<sup>2</sup> de  $f$  respecto a  $x$  con  $x = 0$ .

$$A = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0}$$

entonces el sistema

$$\dot{x} = Ax \tag{B.2}$$

es llamado linealizado (o aproximación lineal) del sistema no lineal (2.1) original en un punto de equilibrio 0.

Se observa que simuladamente en un sistema no lineal no autónomo<sup>3</sup> con una entrada de control  $u$

$$\dot{x} = f(x, u)$$

tal que  $f(0, 0)$ , puede escribirse como

$$\dot{x} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x=0, u=0)} x + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{(x=0, u=0)} u + f_{h.o.t.}(x, u) \tag{B.3}$$

Teniendo  $A$  como una matriz Jacobiana de  $f$  respecto a  $x$  cuando  $(x = 0, u = 0)$ , y  $B$  una matriz de  $n \times m$  elementos de  $\partial f_i / \partial x_j$ , donde  $m$  es el número de entradas.

$$A = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x=0, u=0)} \quad B = \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{(x=0, u=0)}$$

entonces el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{B.4}$$

es la linealización (o aproximación lineal) del sistema no lineal original en  $(x = 0, u = 0)$ .

Después de la elección de una ley de control de la forma  $u = u(x)$  (con  $u(0) = 0$ ) transformando el sistema no autónomo original en un sistema en lazo cerrado autónomo, teniendo  $x(0) = 0$  como un punto de equilibrio, la aproximación lineal de la ley de control dada como

$$u = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} x = Gx$$

La dinámica en lazo cerrado puede ser aproximadamente linealizada como

$$\dot{x} = (A + BG)x$$

Para definir las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un sistema de Lagrange lineal, es provechoso tener un poco de notación.

<sup>2</sup> i.e. Una matriz de  $n \times n$  elementos de  $\partial f_i / \partial x_j$

<sup>3</sup> Ver (Definición 2.1).

**Definición B.1.** Sea  $V$  un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial. El mapeo  $A : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es bilineal si

$$A(u_1 + u_2, v_1 + v_2) = A(u_1, v_1) + A(u_1, v_2) + A(u_2, v_1) + A(u_2, v_2)$$

$\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$  y su notación es la siguiente

$$V \mapsto \mathbb{R}$$

Después de entender esta definición se puede mostrar otra definición respecto a sistemas Euler-Lagrange.

**Definición B.2.** Sea  $V$  un espacio  $n$  dimensional de un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial. Un sistema Lineal Euler Lagrange sobre  $V$  es la tripleta  $(M, C, g)$  donde  $M, C, g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  son un mapeo bilineal con  $M$  y  $g$  simétricos y  $C$  no simétrico. El Lagrangiano asociado con el sistema Euler Lagrange Lineal  $(M, C, g)$  es la función  $L : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$L(u, v) = \frac{1}{2}M(u, v) + \frac{1}{2}C(u, v) - \frac{1}{2}g(u, v)$$

La curva  $t \mapsto c(t) \in V$  es la solución del sistema Euler Lagrange Lineal  $(M, C, g)$  si  $c$  satisface la ecuación diferencial

$$M^b(\ddot{c}(t)) + C^b(\dot{c}(t)) + g^b(c(t)) = 0$$

Se nota que la solución para un sistema Euler Lagrange Lineal es muy diferente a la solución para una ecuación Euler lagrange. Siendo así el estado el resultado que hace la conexión. Dando como resultado la siguiente proposición.

**Proposición B.1.** Sea  $V$  un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial y sea  $(M, C, g)$  un sistema Lineal Euler Lagrange sobre  $V$ , con el Lagrangiano definido como  $L$  sobre  $V \times V \simeq T_p U$ . La curva  $t \mapsto c(t) \in V$  es la solución del sistema lineal Euler Lagrange  $(M, C, g)$  si y solo si es una solución de la ecuación Euler Lagrange para  $L$ .

*Demostración.* Se tiene

$$L(q, v) = \frac{1}{2}M(v, v) + \frac{1}{2}C(q, v) - \frac{1}{2}g(q, q)$$

Sea  $\{e_2, \dots, e_n\}$  una base para  $V$  con  $M_{ij}, C_{ij}$  y  $g_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , las matrices para  $M, C$ , y  $g$  en esta base. Obteniendo

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} = M_{ij} \ddot{q}^j + \frac{1}{2} C_{ji} \dot{q}^j - \frac{1}{2} C_{ij} \dot{q}^j - \frac{1}{2} g_{ij} q^j$$

$i = 1, \dots, n$

El resultado nos dice que  $C_{ji} = -C_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . □

En este caso  $M$  es invertible y se denota como  $M^{-1} : V^* \rightarrow V$ . También en este caso podemos escribir la ecuación son satisfechas para el sistema lineal Euler lagrange como el siguiente conjunto de primer orden de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} \circ g^b & -M^{-1} \circ C^b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix}$$

donde  $I$  es el mapeo identidad sobre  $V$ . Se tiene que  $M^{-1} \circ g^b$  y  $M^{-1} \circ C^b$  es una simple transformación lineal de  $V$ . Retomando conceptos de sistemas lineales de valores propios para nuestra transformación lineal  $A_{(M,C,g)} : V \times V \rightarrow V \times V$  representada por

$$A_{(M,C,g)} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} \circ g^b & -M^{-1} \circ C^b \end{bmatrix}$$

Obteniendo el siguiente resultado que caracteriza los valores propios.

**Proposición B.2.** *Sea  $(M, C, g)$  un sistema lineal Euler Lagrange sobre un espacio vectorial  $V$ , y suponemos que  $M^b$  es invertible. Si  $\lambda \in \text{Complejos}$  es un valor propio de  $A_{(M,C,g)}$  entonces*

(i)  $-\lambda$  es un valor propio de  $A_{(M,C,g)}$ ;

(ii)  $\bar{\lambda}$  es un valor propio de  $A_{(M,C,g)}$ ;

(iii)  $-\bar{\lambda}$  es un valor propio de  $A_{(M,C,g)}$ ;

*Después la multiplicidad de los valores propios  $\lambda, -\lambda, -\bar{\lambda}$  y  $-\bar{\lambda}$  son iguales.*

Una vez teniendo una idea de sistemas Euler Lagrange lineales procedemos enunciar el siguiente teorema sin dificultad alguna.

**Teorema B.1. (Método de Linealización de Lyapunov).**

- *Si el sistema linealizado es estrictamente estable (i.e. si para todo valor propio de  $A$  esta estrictamente del lado izquierdo del plano complejo), entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable (para el sistema no lineal actual).*

- *Si el sistema linealizado es inestable (i.e. si el mínimo valor propio de  $A$  esta estrictamente del lado derecho del plano complejo), entonces el punto de equilibrio es inestable (para el sistema no lineal).*

- *Si el sistema lineal es marginalmente estable (i.e. todo valor propio de  $A$  esta en el lado izquierdo del plano complejo, pero un mínimo de términos se encuentra sobre el eje imaginario), entonces uno puede concluir alguna forma de aproximación lineal (el punto de equilibrio puede ser estable, asintóticamente estable o inestable para el sistema no lineal).*

Como conclusión se puede decir que el método de linealización de Lyapunov se refiere a la estabilidad local de un sistema no lineal. Que es una manera de como un sistema lineal puede comportarse a su aproximación lineal.

## B.2. Propiedades de Sistemas Lineales de Control.

### B.2.1. Controlabilidad de sistemas MIMO.

Sea El sistema (B.4) dado que la controlabilidad es la relación de la interacción de las variables sobre los estados, es por esta razón que solo consideramos (B.4).

#### Definición B.3. Controlabilidad

La ecuación de estado o el par  $(A, B)$ , donde  $A$  es una matriz  $n \times n$   $B$  es una matriz  $n \times m$ , es controlable, si para cualquier estado inicial  $x(0) \equiv x_0$  y cualquier estado final  $x_f$  existe una entrada que pueda transferir  $x_0$  a  $x_f$  en un tiempo finito. De lo contrario el par  $(A, B)$  es no controlable.

Criterios de Controlabilidad.

1. El par  $(A, B)$ ,  $A_{n \times n}$  y  $B_{n \times m}$  es controlable.
2. La matriz de controlabilidad

$$C \equiv [ B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B ] \text{ tiene rango completo } n \quad (\text{B.5})$$

donde  $A_{n \times n}$  y  $B_{n \times m}$

3. La matriz

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad (\text{B.6})$$

es no singular  $\forall t > 0$

### B.2.2. Observabilidad de sistemas MIMO.

La observabilidad es la propiedad que indica la posibilidad de estimar los estados de un sistema a partir del conocimiento de sus entradas y salidas es el caso **MIMO**.

#### Definición B.4. Controlabilidad

Sea el sistema descrito por (B.4) o el par  $(A, C)$  donde  $A_{n \times n}$  y  $C_{n \times m}$ , es observable si para cualquier estado inicial  $x_0$  existe un tiempo finito  $t_f < 0$  tal que se puede determinar de forma única  $x(0)$  a partir de  $u(t)$  y  $y(t)$ .

Criterios de Observabilidad.



1. El par  $(A, C)$  donde  $A_{n \times n}$  y  $C_{n \times m}$  es Observable.
2. La matriz de observabilidad

$$O \equiv \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \text{ tiene rango completo } n \quad (\text{B.7})$$

donde  $A_{n \times n}$  y  $C_{n \times m}$

3. La matriz

$$W_o(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau \quad (\text{B.8})$$

es no singular  $\forall t > 0$ .

### B.2.3. Controlabilidad de de sistemas SISO

Sea El sistema (B.4) dado que la controlabilidad es la relación de la interacción de las variables sobre los estados, es por esta razón que solo consideramos (B.4).

#### Definición B.5. Controlabilidad

La ecuación de estado o el par  $(A, B)$  es controlable, si para cualquier estado inicial  $x(0) \equiv x_0$  y cualquier estado final  $x_f$  existe una entrada que pueda transferir  $x_0$  a  $x_f$  en un tiempo finito. De lo contrario el par  $(A, B)$  es no controlable.

Criterios de Controlabilidad.

1. El par  $(A, B)$  es controlable.
2. La matriz de controlabilidad

$$C \equiv [ B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B ] \text{ tiene rango completo } n \quad (\text{B.9})$$

3. La matriz

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A \tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad (\text{B.10})$$

es no singular  $\forall t > 0$ .

### B.2.4. Observabilidad de sistemas SISO.

La observabilidad es la propiedad que indica la posibilidad de estimar los estados de un sistema a partir del conocimiento de sus entradas y salidas.

#### Definición B.6. Controlabilidad

Sea el sistema descrito por (B.4) o el par  $(A, C)$  es observable si para cualquier estado inicial  $x_0$  existe un tiempo finito  $t_f < 0$  tal que se puede determinar de forma única  $x(0)$  a partir de  $u(t)$  y  $y(t)$ .

Criterios de Observabilidad.

1. El par  $(A, C)$  es Observable.
2. La matriz de observabilidad

$$O \equiv \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \text{ tiene rango completo } n \quad (\text{B.11})$$

3. La matriz

$$W_o(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau \quad (\text{B.12})$$

es no singular  $\forall t > 0$ .



# Apéndice C

## Publicaciones.

En el desarrollo de este proyecto de tesis se contribuyó con desarrollaron las siguientes publicaciones:

- *Energy Based Control and Balancing Scheme for an Underactuated Robot*, [29] presentado en 5<sup>TH</sup> INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ROBOTICS AND AUTOMATION 2006, SAN MIGUEL REGLA HIDALGO, MÉXICO, AUGUST 25-28, 2006. el cual es sometido actualmente por los editores del ISRA 06, al ser seleccionado como artículo original en " Intelligent Service Robotics" ISSN:1861-2776, springer Berlin Heidelberg.
- *CONTROL Y ESTABILIZACIÓN BASADO EN ENERGÍA PARA UN SISTEMA SUBACTUADO*, [28] sometido actualmente a evaluación en la revista Ingeniería y Tecnología de la UNAM.

Las publicaciones mencionadas anteriormente son anexadas a continuación.

# Energy Based Control and Balancing Scheme for an Underactuated Robot

Jesús Patricio Ordaz Oliver, and Virgilio López Morales.

**Abstract**— This paper proposes a novel control scheme for a well know underactuated two-link robot, called the pendubot. Controller achieves to swing, and to stabilize to its uppermost unstable equilibrium point, the second non-attracted link. The control law is designed and the convergence analysis is carried out based the on Lyapunov stability theory. Swinging control is based on an energy approach and the pendubot passivity properties. Then some conditions on the parameters in the control law such as the total energy of the pendubot which converges to the potential energy of its top upright position, are given. The stabilization around its unstable equilibrium point of the system is based on a LQR control scheme.

**Keywords**— Nonlinear systems, Lyapunov theory, energy based control, pendubot, underactuated systems.

## I. INTRODUCTION

The pendubot as shown in Fig. 1, is a benchmark system [1] for underactuated robot, consisting of a double pendulum with an actuator at only the first joint. Using the pendubot, one can mainly investigate the set-point regulation, including swinging up and balancing, as well as trajectories tracking. The pendubot has been studied as a typical example of underactuated mechanical systems see e.g. [1]-[8].

Nonlinear dynamics with motion constraints and rapidly chaining operating conditions sometimes make such control problems difficult. The rigid body mechanics of flight control or robot manipulator motion is often formulated with the general equation obtained from Lagrangian mechanics.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (1)$$

The position coordinates  $q \in R^n$  with associated velocities  $\dot{q}$  and accelerations  $\ddot{q}$  are controlled with the driving forces  $\tau \in R^n$ . The generalized moment of inertia  $M(q)$ , the coriolis, centripetal forces  $C(q, \dot{q})\dot{q}$ , and the gravitational forces  $G(q)$  all vary along the trajectories.

The swing up control problem for the pendubot is to swing the pendubot up to its upright position (top unstable equilibrium position) and balance it about the vertical.

For controlling nonlinear underactuated mechanical systems, [5] the problem can be divided into a swing up control

The work of Jesús Patricio Ordaz Oliver is partially supported by the CONACyT grant. The work of Virgilio López Morales is partially supported by the SEP-SEIC-PROMEP research project grant PROMEP - UAEH-PTC-1004 and ANUIES-SEP-CONACyT/ECOS-NORD, M02:M03.

Authors are at the Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Centro de Investigación en Tecnologías de Información y Sistemas Carr. Pachuca-Tulancingo, 42090; Km. 4.5, México. patoordazoliver@yahoo.com.mx, virgilio@uaeh.edu.mx

and a balance control strategy. In order to implement a swinging up controller, partial feedback linearization and passivity properties can be used. Once the system reach a state near from the unstable equilibrium position, an optimal linear quadratic (LQR) or pole placement controller is implemented, based on the linearized plant model. This method has been tested on many typical underactuated mechanical systems such as Acrobot, Pendubot, three-link underactuated manipulator and inertial wheel pendulum. Naturally, there are some conditions and intermediates under which the pendubot must be switched, found by trial error.

Combining Lyapunov theory with passivity properties and energy shaping, a nonlinear control for some underactuated systems have been designed by Fantoni and Lozano [3], where Lyapunov theory takes an important role in controller design and system convergence analysis. This methodology has been tested on many typical underactuated systems such that Acrobot [10], Pendubot [11], rotating pendulum, cart and pole system, inertial wheel pendulum [3], and other underactuated systems.

A drawback in [11] is that the control law proposed (only to swinging up the pendubot), enters system dynamics into a homoclinic orbit, making to difficult to switch on the linear controller which stabilize around the unstable equilibrium point.

Inspired by [10] and [11], we propose a novel and complete control scheme in order to swing-up and then to stabilize the pendubot around its unstable equilibrium point.

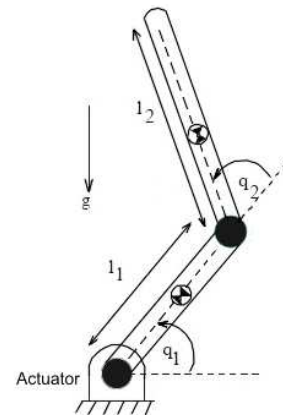


Fig. 1. Pendubot system.

In this paper, the prior energy based control results of [11] and [3] are generalized to the Pendubot.

In order to illustrate the performance our approach is

implemented on a numerical simulation benchmark.

## II. SYSTEM DYNAMICS

In Fig. 1 the two-link underactuated planar robot, called the pendubot where friction is neglected, is shown.

The model of the motion dynamics is a set of 2 rigid bodies connected and described by a set of generalized coordinates  $q \in R^2$ . The derivation of the motion equations is synthesized via (1). By applying the methods of the Lagrange theory, involving explicit expressions of kinetic energy  $\mathcal{F}$  and potential energy  $\mathcal{U}$ , the motion equation is derived as:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}(t))}{\partial q(t)} = \tau \quad (2)$$

where  $\mathcal{L} = \mathcal{F} - \mathcal{U}$ , and  $\tau$  denotes the externally applied torques and forces. The Lagrangian  $\mathcal{L}$  of mechanical motion in a space with a velocity-independent gravitation potential is

$$\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = \mathcal{F}(q(t), \dot{q}(t)) - \mathcal{U}(q(t)) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} - \mathcal{U}(q) \quad (3)$$

Where the angular positions are involved in  $q$ , and angular velocities in  $\dot{q}$ , and the accelerations is  $\ddot{q}$ .

In (1) we have that

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$D(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$C(q, \dot{q}) = \theta_3 \sin(q_2) \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ -\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos(q_1) + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (7)$$

where the following five parameter equations are introduced as follows:

$$\begin{cases} \theta_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\ \theta_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ \theta_3 = m_2 l_1 l_{c2} \\ \theta_4 = m_1 l_{c1} + m_2 l_1 \\ \theta_5 = m_2 l_{c2} \end{cases} \quad (8)$$

when  $\tau_1 \equiv 0$ , this underactuated robot is called an Acrobot, and it called a Pendubot whether  $\tau_2 \equiv 0$ .

Note that  $D(q)$  is symmetric. Moreover

$$\begin{aligned} d_{11} &= \theta_1 \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2 \\ &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 + m_2 l_{c2}^2 + I_2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos q_2 \\ &\geq m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 + m_2 l_{c2}^2 + I_2 - 2m_2 l_1 l_{c2} \\ &\geq m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 (l_1 - l_{c2})^2 > 0 \end{aligned} \quad (9)$$

and then

$$\begin{aligned} \det(D(q)) &= \theta_1 \theta_2 - 2\theta_3^2 \cos^2 q_2 \\ &= (m_1 l_{c1}^2 + I_1)(m_2 l_{c2}^2 + I_2) \\ &\quad + m_2 l_1^2 I_2 + m_2^2 l_1^2 l_{c2}^2 \sin^2 q_2 > 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Therefore  $D(q)$  is positive definite for all  $q$ . From (6) and (7) its follows that

$$\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}) = \theta_3 \sin q_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

which is a skew-symmetric matrix. An important property of skew-symmetric matrices which will be used in establishing the passivity property of the pendubot, is

$$z^T \left( \dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right) z = 0 \quad \forall \quad z \quad (12)$$

The potential energy of the pendubot can be defined as

$$\mathcal{U}(q) = \theta_4 \sin q_1 + \theta_5 \sin(q_1 + q_2) \quad (13)$$

Note that  $\mathcal{U}$  is related to  $g(q)$  as follows:

$$g(q) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos q_1 + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (14)$$

For the planar two-link with  $\tau \equiv 0$  in the Euler-Lagrange system note that (1) has four equilibrium points.  $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = ((\pi/2), 0, 0, 0)$  and  $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (-(\pi/2), \pi, 0, 0)$  are two unstable equilibrium points (respectively, top position and mid position). We wish to reach the top position.  $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = ((\pi/2), \pi, 0, 0)$  is an unstable equilibrium position that the want to avoid, and  $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (-(\pi/2), 0, 0, 0)$  is the stable equilibrium position that also we want to avoid. The total energy  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$  is different for each of the four equilibrium positions:

$$\mathcal{L}((\pi/2), 0, 0, 0) = \mathcal{L}_{Top} = (\theta_4 + \theta_5)g \quad (15)$$

Top positions for both links

$$\mathcal{L}(-(\pi/2), 0, 0, 0) = \mathcal{L}_{l_1} = -(\theta_4 + \theta_5)g \quad (16)$$

Low positions for both links

$$\mathcal{L}(-(\pi/2), \pi, 0, 0) = \mathcal{L}_{mid} = (-\theta_4 + \theta_5)g \quad (17)$$

Mid position: low for link 1 and up for link 2

$$\mathcal{L}((\pi/2), \pi, 0, 0) = \mathcal{L}_{l_2} = (\theta_4 - \theta_5)g \quad (18)$$

Position: up for link 1 and low for link 2.

The control objective is to stabilize the system around its top unstable equilibrium position.

## III. STABILIZING CONTROL LAW

### A. The homoclinic orbit

Let us first note in view of (3), (5) and (6), that for Euler-Lagrange properties

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} + \theta_4 g \sin q_1 + \theta_5 g \sin(q_1 + q_2) \\ &= \frac{1}{2} \theta_2 \dot{q}_2^2 + \theta_4 g \sin q_1 + \theta_5 g \sin(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (19)$$

and the following conditions are satisfied

$$\begin{aligned} c_1) \quad & \dot{q}_1 = 0 \\ c_2) \quad & \mathcal{L}(q, \dot{q}) = (\theta_4 + \theta_5)g \end{aligned}$$

then

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\theta_2\dot{q}_2^2 + \theta_4g \sin q_1 + \theta_5g \sin(q_1 + q_2) = \theta_4g + \theta_5g \quad (20)$$

From the above, it follows that if  $q_1 \neq \pi/2$  then  $\dot{q}_2^2 > 0$ . In addition to conditions  $c_1)$  and  $c_2)$  we also have condition  $c_3)$   $q_1 + q_2 \approx \frac{\pi}{2}$ , then (20) gives

$$\frac{1}{2}\theta_2\dot{q}_2^2 = \theta_4(\cos q_2 + g) \quad (21)$$

The above equation defines a very particular trajectory that corresponds to a homoclinic<sup>1</sup> orbit. This means that the link 2 angular position moves clockwise or counter-clockwise until it reaches the equilibrium position  $(q_2, \dot{q}_2) = (0, 0)$  which can arrive at the infinity. Thus, our objective can be reached if the system can be brought to the orbit (21) for  $\dot{q}_1 = 0$  and  $q_1 \approx \pi/2$  at the same time that  $q_1 + q_2 \approx \pi/2$ . Bringing the system to this homoclinic orbit solves the "swing up" problem. In order to balance at the top equilibrium configuration  $(\pi/2, 0, 0, 0)$ , the control must eventually be switched to a controller that guarantees (local) asymptotic stability of this equilibrium. Such a balancing controller can be designed using several method. In this case a LQR, which in fact provides local exponential stability of the equilibrium point. By assuring convergence to the above homoclinic orbit, we guarantee that the trajectory will enter the basing of attraction of any balancing controller.

### B. Stabilizing around the homoclinic orbit

The passivity property of the system suggest as the use of the total energy  $\mathcal{L}$  in (19) in the controller design. Let us consider  $\tilde{q}_1 = (q_1 - \pi/2)$ ,  $\tilde{q}_2 = q_1 + q_2 - \pi/2$ . In other words  $\tilde{q}_2 = \tilde{q}_1 + q_2$  and  $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \mathcal{L}_{Top}$ , we wish bring to zero  $\tilde{q}_1$ ,  $\tilde{q}_2$  and  $\tilde{\mathcal{L}}$ . We propose the following Lyapunov function candidate

$$V(q, \dot{q}) = \frac{k_E}{2}\tilde{\mathcal{L}}(q, \dot{q})^2 + \frac{k_D}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{k_P}{2}\tilde{q}_1^2 + \frac{k_L}{2}\tilde{q}_2^2 \quad (22)$$

where  $k_E$ ,  $k_D$ ,  $k_P$  and  $k_L$  are strictly positive constants to be defined later. Note that  $V(q, \dot{q})$  is a positive semi-definite function. Differentiating (19) we obtain

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}} &= \dot{q}^T D(q, \dot{q})\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{D}(q, \dot{q})\dot{q} + \dot{q}^T g(q) \\ &= \dot{q}^T (-C(q, \dot{q}) - q(q) + \tau) + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{D}(q, \dot{q})\dot{q} + \dot{q}^T g(q) \\ &= \dot{q}^T \tau \end{aligned} \quad (23)$$

where  $\tau = [\tau_1, 0]^T$  in the pendubot system, we obtain

$$\dot{\mathcal{L}} = \dot{q}^T \tau = \dot{q}_1 \tau_1 \quad (24)$$

<sup>1</sup>A **homoclinic orbit** is a trajectory of a dynamical system that tends to the same invariant set (equilibrium, fixed point, periodic orbit etc.) as time  $t \rightarrow +\infty$

Differentiating  $V$  and using the above equation (22), we obtain

$$\begin{aligned} \dot{V} &= k_E \tilde{\mathcal{L}} \dot{\mathcal{L}} + k_D \dot{q}_1 \dot{q}_1 + k_P \dot{q}_1 \tilde{q}_1 + k_L \dot{q}_1 \tilde{q}_2 + k_L \dot{q}_2 \tilde{q}_2 \\ &= k_E \tilde{\mathcal{L}} \dot{q}_1 \tau_1 + k_D \dot{q}_1 \dot{q}_1 + k_P \dot{q}_1 \tilde{q}_1 + k_L \dot{q}_1 \tilde{q}_2 + k_L \dot{q}_2 \tilde{q}_2 \quad (25) \\ &= \dot{q}_1 \left( k_E \tilde{\mathcal{L}} \tau_1 + k_D \dot{q}_1 + k_P \tilde{q}_1 + k_L \tilde{q}_2 \right) + k_L \dot{q}_2 \tilde{q}_2 \end{aligned}$$

which means that the system is passive, taking  $\tau$  as the input and  $q_1$  as the output.

Let us now compute  $\tilde{q}_1$  from (1). The inverse of  $D(q)$  can be obtained from (5) and (10) and is given by

$$D^{-1}(q) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \theta_2 & -\theta_2 - \theta_3 \cos q_2 \\ -\theta_2 - \theta_3 \cos q_2 & \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

where  $\Delta = \det(D(q)) = \theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2$ . Therefore we have

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{D^{-1}(q)}{\Delta} \left( \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} - C(q, \dot{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} - g(q) \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \right) \quad (27)$$

Then term  $\ddot{q}_1$  can thus be written as

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{\Delta} \left[ \theta_2 \tau_1 + \theta_2 \theta_3 \sin q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \theta_3^2 \cos q_2 \sin q_2 \dot{q}_1^2 - \theta_2 \theta_4 g \cos q_1 + \theta_3 \theta_5 g \cos q_2 \cos(q_1 + q_2) \right] \quad (28)$$

To reduce the expressions, we will consider

$$F(q, \dot{q}) = \left[ \theta_2 \tau_1 + \theta_2 \theta_3 \sin q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \theta_3^2 \cos q_2 \sin q_2 \dot{q}_1^2 - \theta_2 \theta_4 g \cos q_1 + \theta_3 \theta_5 g \cos q_2 \cos(q_1 + q_2) \right]$$

thus

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{\Delta} [\theta_2 \tau_1 + F(q, \dot{q})] \quad (29)$$

introducing the above in (22) one has

$$\dot{V} = \dot{q}_1 \left\{ \tau_1 \left( k_E \tilde{\mathcal{L}} + \frac{K_D \theta_2}{\Delta} \right) + \frac{K_D F(q, \dot{q})}{\Delta} + k_P \tilde{q}_1 + k_L \tilde{q}_2 \right\} + \dot{q}_2 \tilde{q}_2 \quad (30)$$

which will lead to

$$\dot{V} = -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \leq 0 \quad (31)$$

where

$$-\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 = \dot{q}_1 \left( k_E \tilde{\mathcal{L}} \tau_1 + k_D \dot{q}_1 + k_P \tilde{q}_1 + k_L \tilde{q}_2 \right)$$

and

$$-\dot{q}_2^2 = k_L \tilde{q}_2 \dot{q}_2 \quad (32)$$

therefore

$$-\dot{q}_2^2 - k_L \dot{q}_2 \tilde{q}_2 \leq 0 \quad (33)$$

which will lead to

$$\dot{V}_1 = -\dot{q}_2^2 \leq 0 \quad (34)$$

And we propose a control law such that

$$\tau_1 \left( k_E \tilde{\mathcal{L}} + \frac{K_D \theta_2}{\Delta} \right) + \frac{K_D F(q, \dot{q})}{\Delta} + k_p \tilde{q}_1 + k_L \tilde{q}_2 = -\dot{q}_1 - 2\dot{q}_2. \quad (35)$$

which will lead to

$$\dot{V}_2 = -\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \leq 0. \quad (36)$$

Therefore

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leq 0 \quad (37)$$

The control law in (35) will have no singularities provided that

$$k_E \tilde{\mathcal{L}} + \frac{K_D \theta_2}{\Delta} \neq 0 \quad (38)$$

Note from (19) that  $\tilde{\mathcal{L}} \geq -2(\theta_4 + \theta_5)g$ . Thus, (38) always holds if following inequality is satisfied

$$\frac{K_D \theta_2}{\max(\Delta)} > 2k_E(\theta_4 + \theta_5)g \quad (39)$$

Former equation gives the following lower bound for  $k_D/k_E$

$$\frac{K_D}{k_E} > 2\theta_1(\theta_4 + \theta_5)g, \quad (40)$$

and this condition will be satisfied if for some  $\epsilon > 0$ ,

$$\left| \tilde{\mathcal{L}} \right| \leq \frac{K_D - \epsilon}{k_E \theta_1}.$$

Note that when using the control law (38), the pendulum can get stuck at any equilibrium point in (15). In order to avoid any singular points other than  $\mathcal{L}_{top}$ , we require

$$\left| \tilde{\mathcal{L}} \right| < \min(|\mathcal{L}_{Top} - \mathcal{L}_{mid}|, |\mathcal{L}_{Top} - \mathcal{L}_{l1}|, |\mathcal{L}_{Top} - \mathcal{L}_{l2}|) = \min(2\theta_4 g, 2\theta_5 g) = c \quad (41)$$

Taking also (35) into account, we require

$$\left| \tilde{\mathcal{L}} \right| < c = \min\left(2\theta_4 g, 2\theta_5 g, \frac{K_D - \epsilon}{k_E \theta_1}\right) \quad (42)$$

Since  $V$  is a non increasing function (see (31), (42)), it will hold if the initial conditions are such that

$$V(0) \leq \frac{c^2}{2}. \quad (43)$$

The above defines the region of attraction as will be shown in the next section.

Finally, with this condition, the control law can be written as

$$\tau_1 = \frac{-k_D F(q, \dot{q}) - (q_1 - 2\dot{q}_2 + k_p \tilde{q}_1 + k_L \tilde{q}_2)\Delta}{k_E \tilde{\mathcal{L}}\Delta + k_D \theta_2}. \quad (44)$$

#### IV. STABILITY ANALYSIS

The above equation result in the follow theorem for the stability analysis.

*Theorem 1:* Consider the pendubot system (1). Takin the Lyapunov function candidate (22) with strictly positive constants  $k_E$ ,  $k_D$ ,  $k_P$  and  $k_L$  and provided that the state initial condition (42) and (43) are satisfied, then the solution of the close loop system with the control law (44) converges to the invariant set  $M$  given by the homoclinic orbit (21) with the interval  $q_1 - \pi/2 = \epsilon$ , where  $|\epsilon| < \epsilon^*$  and  $\epsilon^*$  is arbitrary small.

This proof is based on LaSalle's invariance theorem (see [12]).

*Proof:* In order to apply LaSalle's theorem, we are required to define a compact (close and bounded) set  $\Omega$  with the property that every solution of the system (1) that start in  $\Omega$  remains in  $\Omega$  for all future time. Since  $V(q, \dot{q})$  in (22) is an non increasing function, (see (37)), then  $q_1$ ,  $\dot{q}_1$ ,  $q_2$  and  $\dot{q}_2$  are bounded. Since  $\cos q_2$ ,  $\sin q_2$ ,  $\cos q_1$ ,  $\sin q_1$ ,  $\cos(q_1 + q_2)$ ,  $\sin(q_1 + q_2)$  are bounded functions we can define the state  $z$  of the closed-loop system as being composed of  $q_1$ ,  $\sin q_1$ ,  $\sin(q_1 + q_2)$ ,  $\dot{q}_1$ ,  $\cos q_2$ ,  $\sin q_2$  and  $\dot{q}_2$ . Therefore, the solution of the closed-loop system  $\dot{z} = F(z)$  remains inside a compact set  $\Omega$  that is defined by the initial state values. Let  $\Gamma$  be the set of all points in  $\Omega$  such that  $\dot{V}(z) = 0$ . Let  $M$  be the largest invariant set in  $\Gamma$ . LaSalle's theorem ensures that every solution starting in  $\Omega$  approaches  $M$  as  $t \rightarrow \infty$ . Let us now compute the largest invariant set  $M$  in  $\Gamma$ .

In the set  $\Gamma$  (see (37)),  $\dot{V} = 0$  and  $\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0$ , which implies that  $q_1 + q_2$  and  $V$  are constants. Since that system goes to conditions  $c1$ ),  $c2$ ) and  $c3$ ), the largest invariant set  $M$  is given by the homoclinic orbit with the interval  $q_1 - \pi/2 = \epsilon$ ,  $q_1 + q_2 - \pi/2 = \epsilon$ , where  $|\epsilon| < \epsilon^*$  and  $\epsilon^*$  is arbitrary small then all solutions converge to the invariant set  $M$ , therefore the system trajectory belongs to the homoclinic orbit (21). ■

#### V. SIMULATION

In order to illustrate the performance of the proposed control law based on the system energy, we have performed some numerical simulations on MATLAB.

We considered the pendubot parameters as: the total mass of link 1  $m_1 = 1.9008$  m, the total mass of link 2  $m_2 = 0.7175$  m, the moment of inertia of link 1  $I_1 = 0.004$  Kg · m<sup>2</sup>, the moment of inertia of link 2  $I_2 = 0.005$  Kg · m<sup>2</sup>, the distance to center of mass of link 1  $l_{c1} = 0.185$  m, the distance to center of mass of link 2  $l_{c2} = 0.062$  m, the length of link 1  $m_1 = 0.2$  m, the length of link 2  $m_2 = 0.2$  m and the acceleration of gravity  $g = 9.81$  m/seg<sup>2</sup>.

We chose the gains  $k_P = 41$ ,  $k_D = 80$ ,  $k_E = 15.51$ ,  $k_L = 15.012$  and the  $Q$  and  $R$  gains

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 & -500 & 0 & 0 \\ -500 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & -500 \\ 0 & 0 & -500 & 1000 \end{bmatrix} \quad R = 2.5$$



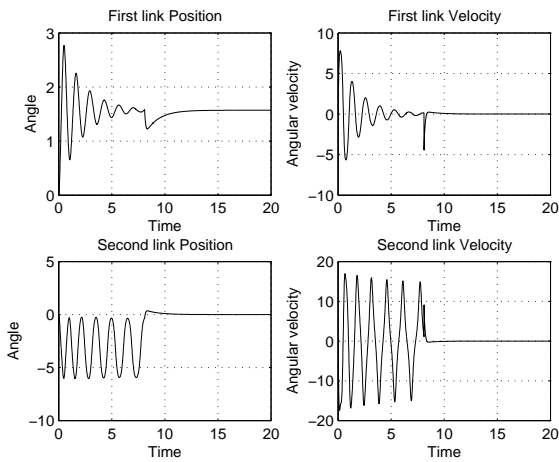


Fig. 2. States of the system.

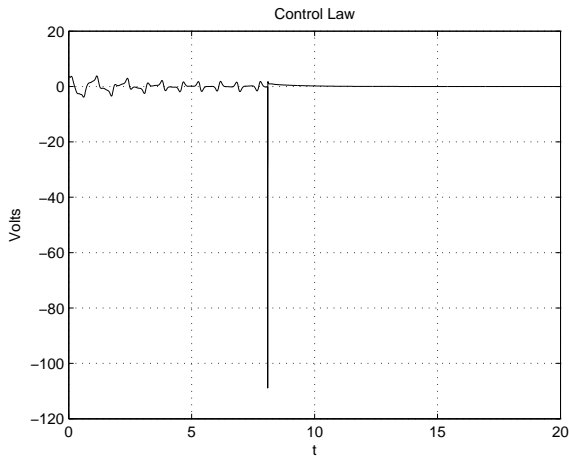


Fig. 3. Control Law.

By computing the LQR control law one obtains,

$$K = \begin{bmatrix} -696.3386 & -666.2143 & -138.8293 & -92.2485 \end{bmatrix}$$

The numerical simulation is performed with the following initial conditions:

$$\begin{aligned} q_1 &= 0, & \dot{q}_1 &= 0 \\ q_2 &= 0, & \dot{q}_2 &= 0 \end{aligned}$$

and the switching function is given by the following criteria:

$$\left| \left( q_1 - \frac{\pi}{2} \right) \right| < 0.35 \quad \text{and} \quad \left| \left( \frac{\pi}{2} - (q_1 + q_2) \right) \right| < 0.25 \quad (45)$$

which yields a suitable neighborhood of the origin.

Simulation shown that our control law brings the state of system near from the homoclinic orbit. Note that  $\mathcal{L}$  goes to zero, i.e. the energy  $\mathcal{L}$  goes to energy at the upright position ( $\mathcal{L}_{Top}$ ). The Lyapunov function  $V$  is always decreasing and converges to zero.

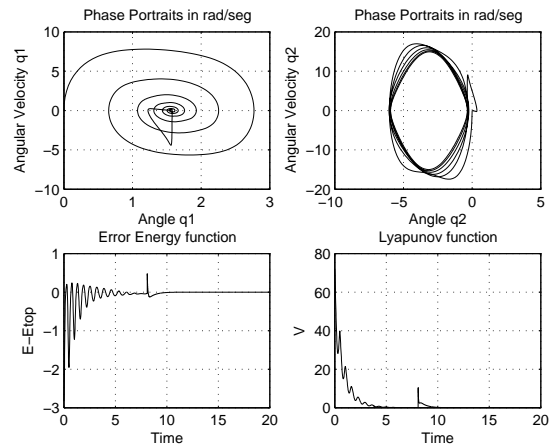


Fig. 4. Performance of the system and balancing.

## VI. CONCLUDING REMARKS

This paper propose a swing up control based on the total energy and a balancing control for the pendubot at the unstable position. Our results involve both the swing up control (total energy functions) and the switching criteria to apply a linear controller (LQR).

The main goal of this paper is to show that the complete scheme (Energy based - LQR control) achieves the stabilization of the pendubot around the unstable equilibrium point.

By applying different approaches ([2], [3], [7], [10]) it can't be implemented complete scheme, since the system dynamics enter the basin of attraction with non suitable state conditions to the linear controller.

Under a rather mild assumption on the initial conditions (depending on the pendubot parameters), this paper has proposed the conditions about the parameters in the control law such that the total energy  $\mathcal{L}$  of the pendubot converges to the potential energy of its  $\mathcal{L}_{top}$  position, with a suitable state conditions for the linear controller.

## REFERENCES

- [1] Reza Olfati-Saber, *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute Of Technology, February 2001.
- [2] Mark W. Spong and Daniel J. Block, *The Pendubot: A Mechatronic System for Control Research and Education*, in 34th IEEE Conf. Decision and Control 1995.
- [3] Isabelle Fantoni, Rogelio Lozano, "Non-linear Control for Underactuated Mechanical System", Springer, 2002.
- [4] R. Lozano and I. Fantoni, *Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit*, System and Control Letters, Vol. 40, No. 3, pp. 197-204, 2002.
- [5] M. W. Spong, *Underactuated mechanical systems*. In B. Siciliano and K. P. Valavanis, editor, Control Problems in Robotics and Automation, Springer-Verlag, London, UK, 1997.
- [6] A. Jain, and G. Rodriguez, *An Analysis of the Kinematics and Dynamics of Underactuated Manipulators*, IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 9 No. 4, pp. 411-422, Aug. 1993.
- [7] M. W. Spong, *The swing up control of the acrobot*, In IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Diego, CA., 1994.
- [8] M. W. Spong, *The Control of Underactuated Mechanical Systems*, I Conferencia Internacional de Mecatrónica, México D.F., Enero 1994.
- [9] D. J. Block, *Mechanical Design and control of the pendubot*, University of Illinois, Urbana-Champaign, IL, USA, 1996.

- [10] Masahiro Kaneda, *The Swing up Control for the Acrobot based on Energy Control Approach* Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada USA, December 2002.
- [11] Isabelle Fantoni, Rogelio Lozano and Mark W. Spong, *Energy Based Control of the Pendubot*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 45, No. 4, April 2000.
- [12] H. K. Khalil, *Non-linear Systems*, New York: MacMillan, 1992.
- [13] Mark W. Spong, M Vidyasagar “*Robot Dynamics and Control*”, John Wiley and Sons, 1989.
- [14] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems: An Introduction.*, 2nd Ed., Springer-Verlag, N. Y. Inc., 1999.
- [15] Romeo Ortega, Antonio Lora, Per Johan Nicklasson, and Hebertt Sira-Ramírez, *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*, Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications, Springer, 1998.
- [16] C.C Chung and J. Hauser, *Nonlinear control of a swinging pendulum*; Automatica, Vol. 31, No. 6, pp. 851-862, 1995.
- [17] F. Saito, T. Fukuda , and F. Arai , *Swing and Locomotion Control for Two-Link Brachiation Robot*, Proc. 1993 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 719-724, Atlanta, GA, 1993.
- [18] P. V. Kokotović, M.Krstić, and I. Kanellakopoulos, *Backstepping to Passivity: Recursive Design of Adaptive Systems*, Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 3276-3280, Tucson, AZ, Dec. 1992.
- [19] Frank L. Lewis, *Optimal Control*, School of Electrical Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta Georgia, John and Sons, New York.

# CONTROL Y ESTABILIZACIÓN BASADO EN ENERGÍA PARA UN SISTEMA SUBACTUADO

Jesús Patricio Ordaz Oliver\*, Virgilio López Morales\*\*

Centro de Investigación en Tecnologías de Información y Sistemas, ICBI-UAEH,  
Carr. Pachuca-Tulancingo km. 4.5, Ciudad Universitaria, C. P. 42084, HGO, México.

Tel: 01 (771) 7172196, 7172000, Ext. 6738 y 6734, Fax 01 (771) 7172109

\*[patoordazoliver@yahoo.com.mx](mailto:patoordazoliver@yahoo.com.mx), \*\*[virgilio@uaeh.edu.mx](mailto:virgilio@uaeh.edu.mx)

**Resumen:** En este trabajo se presenta la aplicación de una técnica para el control de sistemas mecánicos subactuados. La estrategia de control involucrada se basa en propiedades de pasividad, control basado en energía, teoría de Lyapunov, y control por regulación lineal cuadrática. También, se hace una consideración típica de sistemas de Euler-Lagrange, basada en las propiedades de este tipo de sistemas, para el diseño de la ley de control, así como del análisis de estabilidad. Una subclase llamada sistemas subactuados es en particular muy interesante para el análisis y el diseño de herramientas de control, y es por esto que se propone el desarrollo de una metodología para la síntesis de leyes de control y el análisis de estabilidad para un sistema robótico Euler-Lagrange subactuado.

**Palabras clave:** Sistemas Euler-Lagrange, Sistemas no lineales, Teoría de Lyapunov, Control basado en energía, Pendubot, Sistemas subactuados.

**Abstract:** In this paper, a novel control methodology applied to a subactuated mechanical system is proposed. The key idea involved is based on the passivity properties of this class of system, and then a control based on the system energy, the Lyapunov theory and a linear quadratic optimal control is synthesized. Since these Euler-Lagrange systems show passivity properties, a study case for the control and stability analysis for a subactuated system is figured out. Subactuated systems have some interesting dynamics in order to analyze and test different control schemes.

**Keywords:** Euler-Lagrange models, Nonlinear Systems, Lyapunov theory, Energy-based control, Pendubot, Subactuated systems.

## 1. Introducción.

El sistema Pendubot, Figura 1, es un sistema electro mecánico, no lineal, de segundo orden, que consiste en dos eslabones rígidos interconectados. El primer eslabón es actuado por un motor de corriente directa y el segundo eslabón no está actuado. El sistema Pendubot es similar en esencia al sistema doble péndulo invertido. Sin embargo, la naturaleza de las dinámicas acopladas entre los dos cuerpos del Pendubot, presenta algunas propiedades interesantes. Así, el segundo péndulo puede ser controlado por el movimiento dado por el

primero (pero esto nos da una serie de restricciones, las cuales son llamadas restricciones no holonómicas Cf. (Bloch et al, 2005)). Las restricciones no holonómicas de las que el sistema Pendubot posee, hacen que el diseño de una retro de estados del tipo  $u = \tau(x)$ , sea imposible de realizar, para controlar el sistema en todo el espacio de configuraciones admisibles. Lo anterior ha sido demostrado por Brockett, Cf. (Brockett, 1983), y por tanto, se propone el diseño de una ley de control que lleve al sistema a su punto de equilibrio inestable, por medio de la conmutación de controles, para balancear al sistema a su posición superior y un segundo control para estabilizarlo en esa posición.

Un análisis más detallado del sistema Pendubot, indica que el sistema en su configuración inestable, es controlable y observable (Cf. (Fantoni et al, 2002)). Por tanto se puede diseñar una ley de control para el balanceo del pendubot hacia esa posición, y enseguida conmutar a otro controlador que lo estabilice (Cf. (Spong et al, 1995)). El problema para llevar al sistema a esta configuración inestable, es el balanceo sin llevarlo a una configuración no controlable. Este problema puede ser dividido en dos partes. La ley de control diseñada y su análisis de convergencia, están basados en la teoría de estabilidad de Lyapunov (Sastry, 1999). El balanceo del sistema hacia su posición vertical está basado en un enfoque de análisis de energía del sistema (Ortega et al, 1998). La estabilización en el punto de equilibrio inestable está basada en el controlador cuadrático óptimo lineal.

## 2. Dinámicas del sistema.

El brazo manipulador está descrito por el diagrama de cuerpo libre (Figura 1), donde  $q_1$  es la posición angular del primer eslabón con respecto a la referencia, y  $q_2$  la posición angular con respecto al primer eslabón.

Las etapas para el modelado dinámico de robots manipuladores por la metodología bien conocida de Euler-Lagrange consisten en (Lewis, 2003) :

1. Cálculo de la energía cinética:  
 $k(q(t), \dot{q}(t))$
2. Cálculo de la energía potencial:  
 $u(q(t))$
3. Cálculo del Lagrangiano:  
 $L(q(t), \dot{q}(t))$
4. Desarrollo de las ecuaciones:

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau$$

Así, se puede obtener el modelo clásico de un robot, que es de la forma

$$(2.2) \quad D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + g(q) = \tau$$

donde  $q \in R^n$  está asociado a las coordenadas de posición,  $\dot{q} \in R^n$  está asociado a la velocidad angular,  $D(q)$  es la matriz de inercias,  $C(q, \dot{q})$  es la matriz de fuerzas centrípetas y de coriolis,  $g(q)$  es el vector de fuerzas gravitacionales y  $\tau \in R^n$  es el vector de fuerzas de entrada.

De las dinámicas del sistema sintetizadas de (2.1) y (2.2) se obtiene:

$$(2.3) \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$(2.4)$$

$$D(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$(2.5) \quad C(q, \dot{q})\dot{q} = \theta_3 \text{sen}(q_2) \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ -\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2.6)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos(q_1) + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

donde las ecuaciones paramétricas siguientes son introducidas

$$(2.7) \quad \begin{cases} \theta_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\ \theta_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ \theta_3 = m_2 l_1 l_{c2} \\ \theta_4 = m_1 l_{c1} + m_2 l_1 \\ \theta_5 = m_2 l_{c2} \end{cases}$$

En este caso  $\tau_2 \equiv 0$  ya que este sistema (Pendubot) el segundo eslabón no está actuado. De (2.3) y (2.7) se puede decir que  $D(q)$  es simétrica y en consecuencia

(2.8)

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \theta_1 \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2) \\
&= m_1 l c_1^2 + m_2 l_1^2 + I_1 + m_2 l c_2^2 + I_2 + 2m_2 l_1 l c_2 \cos(q_2) \\
&\geq m_1 l c_1^2 + m_2 l_1^2 + I_1 + m_2 l c_2^2 + I_2 - 2m_2 l_1 l c_2 \cos(q_2) \\
&\geq m_1 l c_1^2 + I_1 + I_2 + m_2 (l_1 - l c_2^2)^2 > 0
\end{aligned}$$

Además,

(2.9)

$$\begin{aligned}
\det(D(q)) &= \theta_1 \theta_2 - 2\theta_3^2 \cos^2(q_2) \\
&= (m_1 l c_1^2 + I_1)(m_2 l c_2^2 + I_2) + m_2 l_1^2 I_2 + m_2^2 l_1^2 l c_2^2 \sin^2(q_2)
\end{aligned}$$

Es decir,  $D(q)$  es definida positiva para todo  $q$ . De (2.5) y (2.6) se obtiene:

(2.10)

$$\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q}) = \theta_3 \sin(q_2) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

la cual es una matriz antisimétrica. Una propiedad de las matrices antisimétricas es que puede ser usada para establecer la siguiente propiedad del sistema:

(2.11)

$$z^T (\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})) z = 0, \quad \forall z$$

Observe también que la energía potencial del sistema está definida por  $P(q) = \theta_4 g \sin q_1 + \theta_5 g \sin(q_1 + q_2)$ , donde  $P$  se relaciona con  $g(q)$  de la siguiente manera:

(2.12)

$$g(q) = \frac{\partial P}{\partial q} = \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos q_1 + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

También, la energía total del sistema es descrita por

$$(2.13) \quad L = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} + P(q)$$

Por tanto, de (2.2) y (2.11) se obtiene:

(2.14)

$$\begin{aligned}
\dot{L} &= \dot{q}^T D(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{D}(q) \dot{q} + \dot{q}^T g(q) \\
&= \dot{q}^T (-C(q, \dot{q}) - g(q) + \tau) + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{D}(q) \dot{q} + \dot{q}^T g(q) \\
&= \dot{q}^T \tau
\end{aligned}$$

dado

(2.15)

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{q}^T = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2], \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad y \quad \dot{L} = \dot{q}^T \tau.$$

Integrando (2.14), se obtiene

$$(2.16) \quad \int_0^t \dot{q}_1 \tau_1 = L(t) - L(0).$$

De la definición de un sistema Euler-Lagrange pasivo, se puede verificar que tomando a  $\tau_1$  como la entrada al sistema, y como su salida a  $\dot{q}_1$ , entonces este sistema es pasivo.

De (2.2), se puede observar que el robot con un vector de entradas  $\tau \equiv 0$ , tiene 4 puntos de equilibrio, los cuales se encuentran en las siguientes configuraciones:

$$(2.17) \quad (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (\pi/2, 0, 0, 0),$$

Primer y segundo eslabón en la parte superior

$$(2.18) \quad (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (-\pi/2, 0, 0, 0)$$

Primer y segundo eslabón en la parte inferior

$$(2.19) \quad (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (\pi/2, \pi, 0, 0)$$

Primer eslabón en la parte superior y el segundo en la parte inferior.

$$(2.20) \quad (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (-\pi/2, \pi, 0, 0)$$

Primer eslabón en la parte inferior y el segundo en la parte superior.

De estos cuatro puntos de equilibrio, tenemos que 3 son inestables y uno es globalmente atractor. Para los mismos puntos de equilibrio

respectivamente se tienen las siguientes energías potenciales:

(2.21)

$$\begin{aligned} L(\pi/2, 0, 0, 0) &= L_{Top} = (\theta_4 + \theta_5)g, \\ L(-\pi/2, 0, 0, 0) &= L_{I1} = -(\theta_4 + \theta_5)g, \\ L(\pi/2, \pi, 0, 0) &= L_{I2} = (\theta_4 - \theta_5)g, \\ L(-\pi/2, \pi, 0, 0) &= L_{I1} = (-\theta_4 + \theta_5)g \end{aligned}$$

Dado que el objetivo del control es estabilizar al sistema en el punto de equilibrio inestable, su energía potencial está descrita por  $L_{Top} = (\theta_4 + \theta_5)g$ .

### 3. Ley de control para el balanceo del Pendubot.

La energía del robot planar de dos grados de libertad está dada por (3.1), que para este caso es:

(3.1)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2\dot{q}_2^2 + \\ &(\theta_2 + \theta_3 \cos q_2)q_1\dot{q}_2 + \theta_4 g \sin q_1 + \theta_5 g \sin(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

Al evaluar la energía en el punto de equilibrio deseado i.e.

$$(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (\pi/2, 0, 0, 0), \text{ se obtiene}$$

$$\begin{aligned} (3.2) \quad L &= \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos 0)0 + \frac{1}{2}\theta_2\dot{q}_2^2 + (\theta_2 + \theta_3 \cos 0)0 \\ &+ \theta_4 g \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \theta_5 g \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Reduciendo términos, se obtiene que la energía del sistema en esta posición será la del punto de equilibrio  $L_{Top}$ , donde  $L_{Top}$  nos indica la energía potencial del sistema en el punto de equilibrio de interés.

Por lo tanto en este punto de equilibrio se tiene:

$$k(q, \dot{q}) = 0,$$

$$u(q) = \theta_4 g + \theta_5 g$$

De esta manera, se observa que para obtener una ley de control para el pendubot es necesario que se cumplan con las siguientes condiciones:

$$c_1) \quad \dot{q}_1 = 0$$

$$c_2) \quad L(q, \dot{q}) = (\theta_4 + \theta_5)g$$

Así, se aprecia que si  $q_1 \neq \pi/2$  entonces  $\dot{q}_2^2 > 0$ . Dado que el objetivo es llevar el sistema al punto de equilibrio, se introducen las siguientes condiciones:  $\tilde{q}_1 \approx q_1 - \pi/2$ ,  $\tilde{q}_1 \approx 0$  y  $\tilde{L} \approx L - L_{Top}$ . Entonces se puede agregar la siguiente condición:

$$c_3) \quad q_1 + q_2 = \pi/2$$

Así,  $\tilde{L} \approx L - L_{Top}$  resulta en

$$(3.3) \quad \frac{1}{2}\theta_2\dot{q}_2^2 = \theta_4 g \sin\left(q_1 - \frac{\pi}{2}\right)$$

La ecuación anterior define una trayectoria muy particular que corresponde a una órbita homoclínica<sup>1</sup>. Esto indica que la posición angular del segundo eslabón se mueve en sentido horario o anti-horario, hasta alcanzar el punto de equilibrio en la posición  $(q_2, \dot{q}_2) = (0, 0)$ , la cual puede extenderse hasta  $\infty$ . Así nuestro objetivo planteado, con estas condiciones se puede llegar a la órbita (3.3) con  $q_1 \approx \pi/2$ , y al mismo tiempo  $q_1 + q_2 \approx \pi/2$ . Una vez alcanzada la órbita descrita por la ecuación (3.3), se habrá resuelto el problema de balancear al sistema hasta el punto de equilibrio inestable,

<sup>1</sup> trayectoria de un sistema dinámico que tiende a un conjunto invariante (punto de equilibrio, punto de un plano, órbita periódica, etc.) cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

entonces el sistema puede ser eventualmente conmutado a un controlador lineal, el cual nos garantice estabilidad asintótica local para este punto de equilibrio inestable.

### Estabilización alrededor de la órbita homoclínica.

Basados en las propiedades de pasividad por retroalimentación equivalente, esta nos sugiere el uso de una función de almacenamiento  $V(x)$  para el diseño del control. Así, considere  $\tilde{q}_1 = q_1 - \pi/2$ ,  $\tilde{q}_2 = q_1 - q_2 - \pi/2$  y  $\tilde{L} \approx L - L_{Top}$ . Es decir  $\tilde{q}_2 = \tilde{q}_1 - q_2$ , y se desea llevar a cero a  $\tilde{q}_1$ ,  $\tilde{q}_2$  y  $\tilde{L}$ . Entonces se propone una función candidata de Lyapunov

$$(3.4) \quad V(q, \dot{q}) = \frac{k_E}{2} \tilde{L}(q, \dot{q})^2 + \frac{k_D}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{k_P}{2} \tilde{q}_1^2 + \frac{k_L}{2} \tilde{q}_2^2$$

donde  $k_E$ ,  $k_D$ ,  $k_P$  y  $k_L$  como constantes estrictamente positivas. De la cinemática inversa del manipulador se tiene  $\ddot{q} = \frac{1}{\Delta} [f(q, \dot{q}) + \theta_2 \tau_1]$  donde

$$f(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \theta_2 \theta_3 \text{sen} q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \theta_3^2 \cos(q_2) \dot{q}_1^2 \\ -\theta_2 \theta_4 g \cos q_1 + \theta_3 \theta_5 g \cos q_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 q_2$$

Dado que  $V(q, \dot{q})$  dada por (3.4), es una función semidefinida positiva, a continuación se deriva para comprobar que sea efectivamente una función de Lyapunov apropiada para este sistema. Por tanto,

$$(3.5) \quad \dot{V} = k_E \tilde{L} \dot{L} + k_D \ddot{q}_1 \dot{q}_1 + k_P \dot{q}_1 \tilde{q}_1 + k_L \dot{q}_1 \tilde{q}_2 + k_L \dot{q}_2 \tilde{q}_2$$

Sustituyendo  $\dot{L} = \dot{q}_1 \tau_1$ , para el caso del pendubot se obtiene (3.6)

$$(3.6) \quad \dot{V} = q_1 \left\{ \tau_1 \left( k_E \tilde{L} + \frac{k_D \theta_2}{\Delta} \right) + \frac{k_D f(q, \dot{q})}{\Delta} + k_P \tilde{q}_1 \right\} + q_1 k_L \tilde{q}_2 + k_L q_2 \tilde{q}_2$$

Debido a que se necesita que la derivada de  $V$  sea semidefinida negativa, se propone

$$(3.7) \quad \dot{V} = -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \leq 0$$

Al desarrollar esta ecuación, se puede dividir en dos ecuaciones, de tal manera que

$$(3.8) \quad \dot{V}_1 = -\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \leq 0$$

y

$$(3.9) \quad \dot{V}_2 = -\dot{q}_2^2 \leq 0$$

Así, de (3.6), (3.8) y (3.9), se propone:

$$(3.10) \quad -\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 = \dot{q}_1 (k_E \tilde{L} \tau_1 + k_D \ddot{q}_1 + k_P \tilde{q}_1 + k_L \tilde{q}_2)$$

y

$$(3.11) \quad -\dot{q}_2^2 = k_L \dot{q}_2 \tilde{q}_2$$

Así, se puede obtener una ley de control tal que

$$(3.12) \quad -q_1 - 2\dot{q}_2 = \tau_1 \{ k_E \tilde{L} + k_D \theta_2 \} + k_D f(q, \dot{q}) + k_P \tilde{q}_1 + k_L \tilde{q}_2$$

La cual, lleva a (3.8). Obviamente la ley de control (3.12) puede presentar singularidades, con la siguiente excepción

$$(3.13) \quad k_E \tilde{L} + \frac{k_D \theta_2}{\Delta} \neq 0$$

Cuando se hace uso de la ley de control (3.12) el pendubot puede establecerse alrededor de cualquiera de los cuatro puntos de equilibrio. Por ello, para evitar cualquier punto singular diferente de (3.13) se necesita

$$(3.14) \quad |\tilde{L}| < \min(|L_{Top} - L_{mid}|, |L_{Top} - L_{I1}|, |L_{Top} - L_{I1}|) \\ = \min(2\theta_4 g, 2\theta_5 g) = c$$

Dado que  $V$  no es una función creciente, se puede llevar (3.14) a (3.8) si las condiciones iniciales son tales que

$$(3.15) \quad V(0) < k_E \frac{c^2}{2}$$

donde (3.15) define una región de atracción. Con esta condición la ley de control puede ser escrita como en (3.16):

$$(3.16) \quad \tau_1 = \frac{-k_D f(q, \dot{q}) - (q_1 - 2\dot{q}_2 + k_P \tilde{q}_1 + k_L \tilde{q}_2) \Delta}{k_E \tilde{L} \Delta + k_D \theta_2}$$

Observe que (3.16), hace a (3.8) una función semidefinida negativa, pero no a la función (3.9), por lo que se define lo siguiente.

$$(3.17) \quad \dot{V}_2 \leq \dot{V}_1 \leq 0.$$

De (3.8) y (3.11) se obtiene  $\dot{V}_2 = -\dot{q}_2 - k_L \tilde{q}_2$  y debido a que  $\tau_1$  hace a la función  $\dot{V}_1$  semidefinida negativa, se establece lo siguiente:

$$(3.18) \quad \dot{V}_2 \leq \tau,$$

donde  $\tau = \alpha + \beta$ . Por lo que el sistema queda representado de la siguiente manera

$$(3.19) \quad \alpha = -\dot{q}_2 - k_L \tilde{q}_2$$

y

(3.20)

$$\beta = \tau_1 = \frac{-k_D f(q, \dot{q}) - (q_1 - 2\dot{q}_2 + k_P \tilde{q}_1 + k_L \tilde{q}_2) \Delta}{k_E \tilde{L} \Delta + k_D \theta_2}$$

Así, se asegura que (3.8) se cumpla. Por tanto, (3.9) también se cumple y finalmente la función candidata de Lyapunov será apropiada para llevar al sistema a la órbita (3.3). Por tanto, la ley de control propuesta tiene la estructura mostrada en (3.21).

### Simulación numérica.

A continuación se ilustran los resultados en simulación numérica, de la ley de control propuesta basada en la energía del sistema Pendubot. Para esta simulación, se utilizan las siguientes condiciones iniciales:

$$(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \left( -\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0 \right)$$

primer y segundo eslabón en reposo inferior.

Dado que en la ley de control (3.21) se tomó en cuenta una serie de ganancias  $(k_E, k_D, k_L, k_P)$ , las cuales deben ser estrictamente definidas positivas, para que el sistema cumpla con la condición (3.4) (estrictamente positiva), se propuso las siguientes ganancias:

$$k_E = 2, \quad k_D = 1, \quad k_P = 2, \quad k_L = 1$$

De la Figura 2 a la Figura 4, se muestran los resultados obtenidos en simulación, al utilizar únicamente (3.21), el cual se hace cargo de llevar con condiciones convenientes, al sistema Pendubot, al punto de equilibrio inestable

$$\left( (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (\pi/2, 0, 0, 0) \right)^T.$$

Como es natural la ley de control (3.21) no estabiliza al sistema en el punto de equilibrio inestable. Para lograr estabilizar en ese punto es necesario diseñar una ley de control adicional.

---


$$(3.21) \quad \tau = \alpha + \beta = \frac{-k_D f(q, \dot{q}) - (q_1 - 2\dot{q}_2 + k_P \tilde{q}_1 + k_L \tilde{q}_2) \Delta}{k_E \tilde{L} \Delta + k_D \theta_2} - \dot{q}_2 - k_L \tilde{q}_2$$



Utilizando el modelo linealizado del sistema, se propone un Regulador Lineal Cuadrático con la siguiente función de optimización:

$$(3.22) \quad J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + R u^2) dt$$

donde  $Q$  y  $R$  son matrices simétricas definidas positivas. Estas matrices son usadas para el vector de ganancias siguiente,

$$(3.23) \quad K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4],$$

para obtener una ley de control de la forma  $u = -Kx$ . Con estas ganancias se asegura que el sistema será asintóticamente localmente estable en el punto de equilibrio deseado.

Una vez resueltos los dos controladores, lo siguiente es definir una función de conmutación para cuando el sistema esté cerca de una región de atracción definida previamente, y realizar así la conmutación al controlador LQR. Para esto se propone la siguiente función de conmutación:

$$(3.24) \quad \left| \left( q_1 - \frac{\pi}{2} \right) \right| < \rho \quad y \quad \left| \frac{\pi}{2} - (q_1 + q_2) \right| < \rho, \quad \rho > 0$$

Una vez implementado el esquema completo, se obtuvieron los resultados mostrados de la Figura 5 a la Figura 7.

#### 4. Conclusiones.

A través del diseño de una ley de control, se logra que un sistema electromecánico de 2 grados de libertad llamado Pendubot, alcance el punto de equilibrio inestable. Dado que el sistema presenta una órbita homoclínica, el sistema se estabiliza al proponer en una región de atracción, una ley de control que estabiliza al sistema de manera local. La ley de control completa

es una conmutación de un controlador no lineal a uno lineal. La ley de control (3.21) plantea que la velocidad del segundo eslabón está acotada por la función (3.18), lo cual implica que las dinámicas del sistema serán las apropiadas para que la función de conmutación (3.23) sea alcanzada de forma satisfactoria y así asegurar que al conmutar a la ley de control lineal, se pueda estabilizar al sistema.

#### Agradecimientos.

El trabajo de investigación, de Jesús Patricio Ordaz Oliver, ha sido parcialmente apoyado por una beca CONACYT.

El trabajo de investigación de Virgilio López Morales, ha sido parcialmente apoyado por fondos del proyecto SEP-SEIC-PROMEP numero PROMEP - UAEH-PTC-1004, fondos del proyecto ANUIES-SEP-CONACYT/ECOS-NORD, M02:M03, así como del proyecto UAEH-PAI-2006.

#### Referencias

(Brockett, 1983) R. W. Brockett, Asymptotic stability and feedback stabilization, in R. W. Brockett, R. S. Millmann, and H. J. Sussmann, Eds., Differential geometric control theory, Progress in Mathematics 27 (1983), pp. 181-191.

(Olfati-Saber, 2002) (Olfati-Saber, 2002) Reza Olfati-Saber, "Nonlinear Control Underactuated Mechanical System with Application to Robotics and Aerospace Vehicles", Ph. D Tesis, California Institute of Technology, 2002.

(Spong, 1997) M. W. Spong. "Underactuated mechanical systems". In B. Siciliano and K. P. Valavanis, editor, Control Problems in Robotics and Automation, Springer- Verlag, London, UK, 1997.

(Spong et al, 1995) M. W. Spong and D. J. Block. "The Pendubot: a mechatronic system for control research and education."

Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control, pages 555-556, New Orleans, Dec. 1995.

(Lewis, 2003) Andrew D. Lewis, "Lagrangian Mechanics, Dynamics, and Control", 2003.

(Isidori, 1995) Alberto Isidori, "Nonlinear Control Systems", Springer, 1995.

(Sastry, 1999) Shankar Sastry, "Nonlinear Systems Analysis, Stability, and Control", Springer, 1999.

(Spong et al, 1989) Mark W. Spong, M Vidyasagar "Robot Dynamics and Control", John Wiley and Sons, 1989.

(Fantoni et al, 2002) Isabelle Fantoni, Rogelio Lozano, "Non-linear Control for Underactuated Mechanical System", Springer, 2002.

(Ortega et al, 1998) Romeo Ortega, Antonio Loria, Per Johan, Nicklasson, and Hebertt Sira-Ramírez, "Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems", Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications, Springer, 1998.

(Bloch et al, 2005) Anthony M. Bloch, Jerrold E. Marsden, Dmitry V. Zenkov "Nonholonomic Dynamics", Notices of the AMS, Volume 53, Number 3, March, 2005.

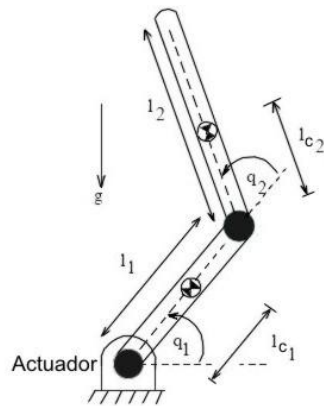


Figura 1. Sistema subactuado Pendubot.

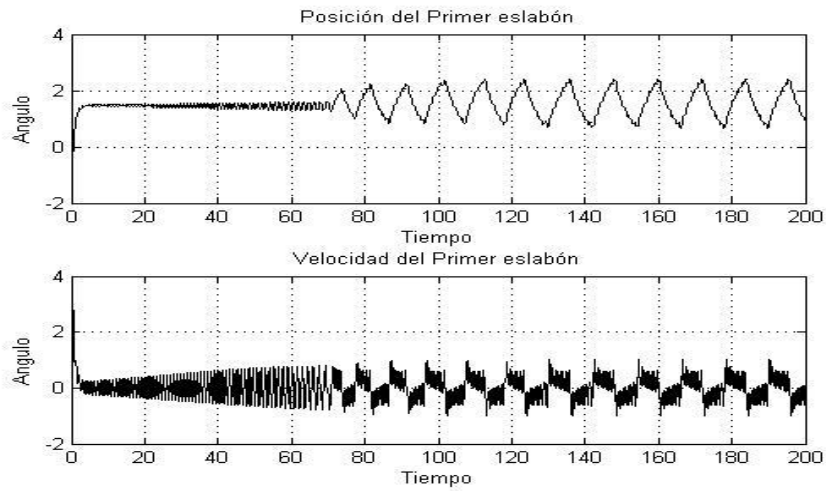


Figura 2. Estados del primer eslabón con ley de control (3.21).

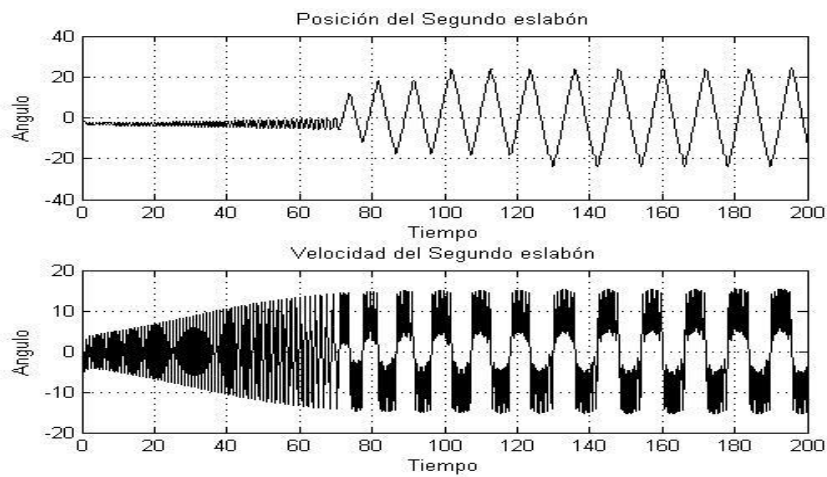


Figura 3. Estados del segundo eslabón con ley de control (3.21).

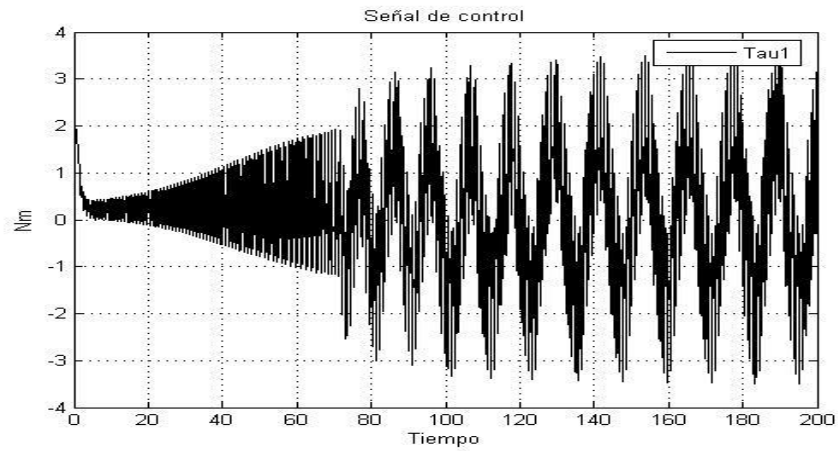


Figura 4. Ley de control (3.21).

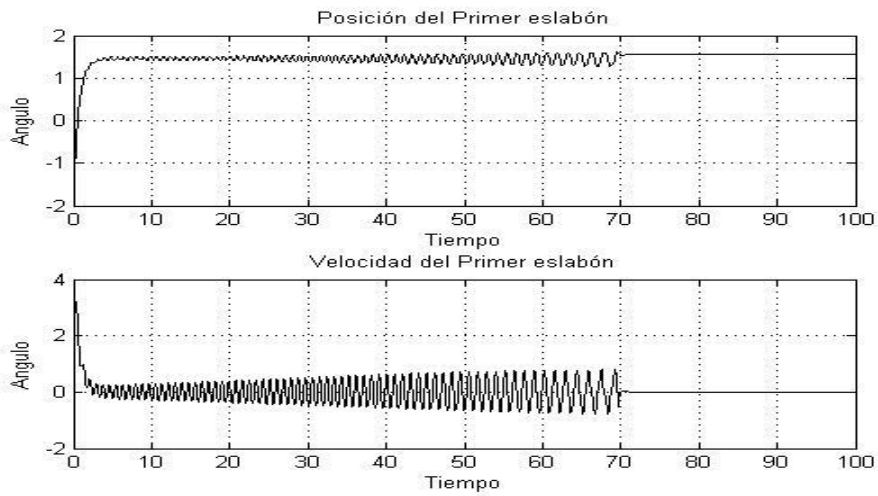


Figura 5. Estados del primer eslabón con ley de control completa.

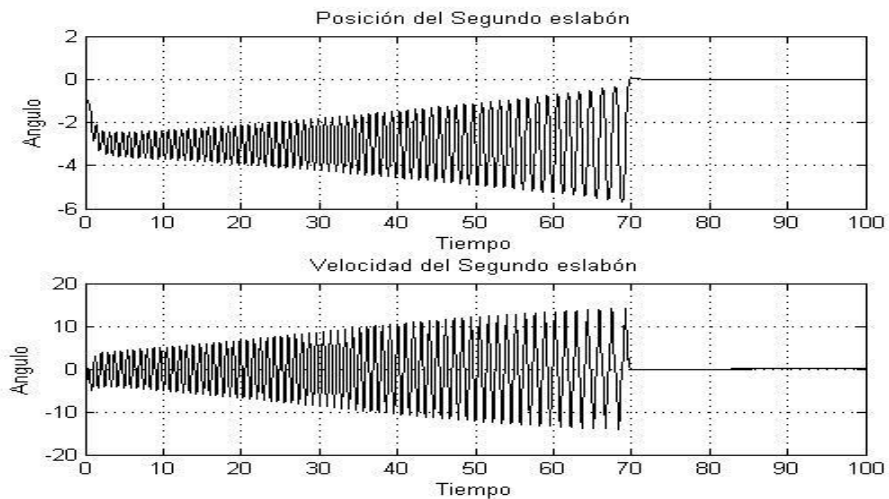


Figura 6. Estados del segundo eslabón con la ley de control completa.

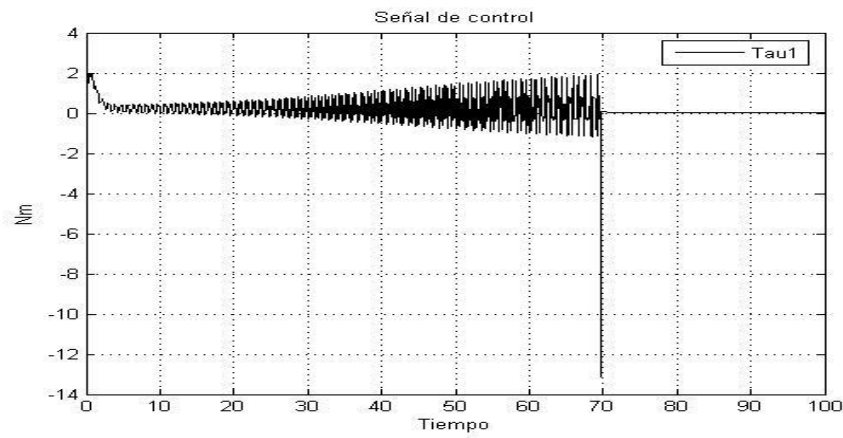


Figura 7. Ley de control completa.