



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO
DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E
INGENIERÍA

ÁREA ACADÉMICA DE INGENIERÍA

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN
SISTEMA INTERFEROMÉTRICO DE BAJO
COSTO PARA MEDICIÓN DE
PROPIEDADES FÍSICAS DE OBJETOS DE
FASE DELGADA

T E S I S
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
Doctor en Ciencias
P R E S E N T A :
M. en C. Luis García Lechuga

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Juan Carlos Seck Tuoh Mora

CO-DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Noel Ivan Toto Arellano



Mayo de 2014

Resumen

En este trabajo se presenta una técnica no invasiva para analizar estructuras transparentes como vidrios o acrílicos y superficies de interés para el sector industrial, para este fin se desarrolló e implementó un sensor interferométrico que usa técnicas de corrimiento de fase por polarización para obtener la información de las deformaciones en fase ocasionadas por el objeto transparente; el sistema presentado consiste de dos sensores acoplados: un sistema que genera dos haces con un divisor polarizante y un sistema $4-f$ con rejilla de difracción para generar n -réplicas de los haces incidentes. La rejilla de difracción genera $n/2$ -interferogramas sobre los cuales se puedan obtener los corrimientos de fase, a partir de los cuales se puede extraer la información de fase generada por el objeto de prueba lo que permitirá calcular las características de cada superficie. El sistema tiene la ventaja de producir dos haces con separaciones ajustables lo que permite usar cualquier tipo de elemento difractivo al alcance. Debido a la estabilidad del sistema este puede ser implementado en ambientes industriales para cuantificar la calidad de estructuras transparentes producidas en una línea de producción. Actualmente el proyecto de investigación está concluido; sin embargo, quedó abierto a las posibles aplicaciones que se le puedan dar a la técnica propuesta.

Abstract

This thesis presents a non-invasive technique to study transparent structures such as glass or acrylic and surfaces of interest to the industrial sector. For this purpose, it was developed and implemented an interferometric sensor which uses phase shifting techniques based on polarization to obtain the information of the phase distortions caused by the transparent objects. The presented system consists of two coupled sensors: a system that generates two beams with a polarizing beam splitter and a $4-f$ system with a diffractive grating to generate n -replicas of the incident beams. The diffractive grating can generate $n/2$ -interferograms, each one with a different phase shift. With these interferograms the characteristics of the surfaces can be calculated. The system has the advantage of generating two beams with adjustable separations allowing us to use any type of diffractive elements available. Due to the stability of the system it can be implemented in industrial environments which would allow to quantify the quality of transparent structures manufactured in a production line. Currently the research project is completed; however, it is open to be applied with technical purposes.

Contenido

1. Introducción	17
1.1. Onda Plana: Notación Compleja	17
1.1.1. Las Ecuaciones del Electromagnetismo Clásico	17
1.1.2. La Ecuación de Onda Electromagnética en el Vacío	23
1.2. Soluciones Armónicas: La Ecuación de Helmholtz	25
1.2.1. La Solución de Onda Plana: Relación entre \mathbf{E} y \mathbf{B}	27
1.3. La Energía de una Onda Plana Electromagnética: Vector de Pointing	30
1.4. Energía Promediada en el Tiempo: La Irradiancia	32
1.5. La Solución de la Onda Esférica	36
1.5.1. Aproximación de Fresnel a una Onda Esférica	38
1.6. Difracción de Fraunhofer y de Fresnel: Caso Unidimensional	40
1.7. Conclusiones	43
2. La Difracción de Campo Lejano y la Transformada de Fourier	45
2.1. La Difracción de Fraunhofer en una Dimensión	45
2.1.1. La Delta de Dirac en Sistemas Lineales Ópticos	49
2.1.2. El Teorema de Convolución	60
2.1.3. El Tren de Pulsos de Dirac	62
2.1.4. Rejilla de Ronchi	64
2.1.5. El Teorema del Muestreo	66
2.2. La Difracción De Fraunhofer en el Espacio de 3 Dimensiones: Introducción	69
2.2.1. Generalización del Argumento 1-D	69
2.2.2. Teorema de Fourier en 2-D	71
2.2.3. Ondas Difractadas Viajeras y Evanescentes	72

2.2.4.	Abertura Circular	74
2.3.	La Formación de Imágenes en 1-D	77
2.3.1.	La Función de Pupila	79
2.3.2.	Resolución de Una Rejilla Cosenoidal	80
2.3.3.	El Filtrado Espacial	82
2.4.	Derivación de la Imagen y Operaciones Relacionadas	86
2.4.1.	La Derivada y la Transformada de Fourier	86
2.4.2.	La Función de Transferencia Coherente	89
2.5.	Anchos de Funciones y de Transformadas de Fourier	93
2.5.1.	Anchura Equivalente	93
2.5.2.	Momentos de Orden n para una Función	94
2.5.3.	Contenido Energético, Centro de Gravedad y Valores Cuadráticos Medios	95
2.5.4.	Relación de Parseval	97
2.5.5.	Desigualdad de Schwarz	98
2.5.6.	Relaciones de Incertidumbre	99
2.6.	Conclusiones	102
3.	Interferometría Heterodina	103
3.1.	Interferometría de Corrimiento de Fase	107
3.1.1.	Método de Tres Corrimientos	108
3.1.2.	Método de Cuatro Corrimientos	109
3.2.	Interferometría por Paquete de Integración	110
3.2.1.	Caso de Cuatro Iteraciones con Corrimiento Lineal	111
3.3.	Algoritmo Simétrico de $(N + 1)$ Interferogramas	112
3.3.1.	Algoritmo Simétrico de 5-Interferogramas, Schwider-Hariharan $(4 + 1)$	112
3.3.2.	Algoritmo Simétrico de 7-Interferogramas $(6 + 1)$	113
3.3.3.	Algoritmo Simétrico de 9-Interferogramas $(8 + 1)$	113
3.4.	Conclusiones	114
4.	Interferometría de Corrimiento de Fase en una Sola Toma	115
4.1.	Modulación de Fase con Polarización	116
4.2.	Patrones de Interferencia Generados con Polarizadores y Placas Retardadoras	117
4.3.	Conclusiones	119

5. Interferometría con Rejilla y Malla de Amplitud	121
5.1. Rejilla de Amplitud	122
5.2. Mallas de Amplitud	123
5.3. Interferometria de Dos Haces	124
5.3.1. Constraste y Modulación de los Patrones de Interferencia	125
5.4. Conclusiones	129
6. Resultados Experimentales	130
6.1. Deformaciones Asociadas con los Cambios de Fase	130
6.1.1. Interferometría de Desplazamiento Lateral para Objeto Transparentes	131
6.1.2. Deformación Fuera de Plano de Muestras Transparentes	132
6.1.3. Espesor de Objetos Transparentes	134
6.2. Experimentos con Interferómetros de Dos Haces y Una Sola Captura de la Cámara	134
6.3. Resultados Obtenidos con 4 Corrimientos en Una Sola Toma .	135
6.4. Distribuciones Estáticas de Fase	138
6.5. Distribuciones Dinámicas de Fase	139
6.5.1. Análisis Comparativo de los Resultados Obtenidos . .	143
6.6. Análisis de Costos	143
6.7. Conclusiones	144
7. Conclusiones	147
7.1. Trabajo a Futuro	149

AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos a mis colegas y amigos.

Agradezco a todas las personas que me han apoyado en mi vida personal y profesional, espero continuar aportando lo mejor de mi persona en bien de todos los que me rodean.

A los doctores Juan Carlos Seck T. M. y Noel Ivan Toto-Arellano, porque bajo su dirección se pudo llevar a cabo la investigación presentada en este trabajo.

A todas las personas que han ayudado a mi desarrollo académico y personal: M. C. Gerardo Lara, Dra. Concepción Gómez, M. C. Xóchitl Hdez., Dr. Joselito, M. C. Miguel A. Téllez, M. C. Juan M. Miranda, M. C. Angelina González, M. C. German Reséndiz, M. C. Juan Carlos González Islas, Lic. Alma Moreno, Lic. Carmela Santos.

A mis Hermanos: Teresa, Consuelo, Margarita, Ma. De los Ángeles, Reymundo, Joel, Ismael.

Al Conacyt por la Beca Parcial para estudios de Doctorado como parte del proyecto AUTÓMATAS CELULARES REVERSIBLES: PROBLEMAS TEÓRICOS Y APLICACIONES EN INGENIERÍA por medio de la convocatoria *CB* – 2007 con clave 83554, responsable Técnico: Dr. Juan Carlos Seck Tuoh Mora. Numero de Becario: 15841.

GRACIAS

Dedico este trabajo de tesis a:

Mi Esposa Araceli por su paciencia y apoyo, por el tiempo robado a la familia.

Y a mis amados hijos.

Problemática

En el sector industrial la calidad de objetos transparentes como acrílicos, vidrios, lentes, espejos entre otros, debe ser medida con una precisión del orden de micrómetros y nanómetros es decir, que no tengan desviaciones o errores mayores de la longitud de onda; en otros sectores algunas muestras orgánicas microscópicas también deben ser cuantificadas, aún sin contar con microscopios de potencia, por lo que un problema de interés es medir las deformaciones de estas superficies u objetos respecto a una referencia o forma ideal. Un sensor interferométrico es un instrumento que permite el estudio de objetos transparentes debido a que puede detectar cambios de fase óptica, esta clase de mediciones no se pueden realizar con instrumentos convencionales tales como fotodetectores, cámaras CCDs entre otros; ya que los sensores interferométricos son capaces de medir pequeñas variaciones de la fase óptica generadas por un objeto de prueba (En 1932 Carl Frederick August Zernike desarrolló el microscopio de contraste de fase y se dedicó a la óptica física, por el método de contraste de fase y por el microscopio de contraste le concedieron el premio Nobel de Física en 1953). Actualmente se han desarrollado algunas técnicas y sensores interferométricos y fotónicos para medir la fase óptica tales como:

1. Sistemas y técnicas de corrimiento de fase por etapas (usado convencionalmente): utilizan elementos mecánicos como actuadores, espejos y piezoeléctricos para realizar corrimiento de fase en el interferograma.
2. Técnicas de transformada de Fourier que solo usan una o dos imágenes pero requieren de cámaras de alta resolución y características especiales en los patrones de franjas, este método fue desarrollado por

Mitsuo Takeda Mutoh a principios de los años 80s.

3. Sistema y técnicas de corrimiento de fase simultáneo: desarrollados por la empresa 4D Technology y que permiten capturas 4-interferogramas con una captura de la cámara CCD usando una placa de micropolarizadores, los sistemas desarrollados por esta empresa requieren de paquetería computacional especial para suprimir vibraciones y los micropolarizadores son manufacturados por una empresa externa.

Es necesario desarrollar sistemas portables y de bajo costo que permitan mejorar o igualar lo que existe actualmente en el mercado para poder realizar aplicaciones industriales.

Justificación

La empresa 4D Technogy es líder mundial en el desarrollo y fabricación de sensores interferométricos para la medición de parámetros físicos en muestras por transmisión (transparentes) y por reflexión (especulares y difusas). Considerando que estos sistemas son demasiado costosos ya que usan componentes mecánicas u holográficas de manufacturas especial que elevan su costo.

Es necesario diseñar y desarrollar nueva tecnología de bajo costo para medir la calidad en la producción de objetos transparentes de uso industrial y con esto minimizar el costo final de productos de alta calidad tales como cámaras fotográficas, telescopios,escáneres, sistemas de visión artificial entre otros.

En este trabajo se presenta el diseño de un sistema interferométrico de bajo costo para mediciones no invasivas que permite estudiar aberraciones ópticas y estructuras transparentes como vidrios o acrílicos y superficies de interés para el sector industrial

Hipótesis

Empleando componentes ópticas y fotónicas de uso común y de bajo costo se puede diseñar y construir un sistema interferométrico que sirva como sensor para realizar mediciones no invasivas que permita estudiar estructuras transparentes, el cual puede ser portable e insensible ante vibraciones externas.

Objetivos de la Tesis

OBJETIVO GENERAL

Desarrollar un sistema interferométrico de bajo costo para la medición de propiedades físicas de objetos de fase usando las técnicas de corrimiento de fase, capaz de realizar los corrimientos necesarios en una sola toma.

OBJETIVOS PARTICULARES

1. Diseñar un sistema que sea estable ante vibraciones del entorno de trabajo.
2. Generar n-corrimientos de fase necesarios para obtener la fase óptica en una captura de la cámara.
3. Realizar mediciones de fase en 3D de muestras transparentes de interés desarrollando un sensor interferométrico de corrimiento de fase.
4. Mediciones de eventos dinámicos (4D).
5. Reducir el costo del sensor usando componentes ópticas y fotónicas de uso común.

Contexto del Trabajo

La investigación que se presenta está basado en técnicas interferométricas de corrimiento de fase, analizando las ventajas de usar un interferómetro de dos haces de bajo costo con rejilla de amplitud y modulación en polarización para el estudio de objetos de transparentes estáticos y dinámicos de interés en los sectores productivos, esto se logra obteniendo los corrimientos de fase necesarios en una sola toma. En primera instancia se analizan las características de difracción de las rejillas de amplitud y los efectos que generan en los patrones de interferencia en un interferómetro de dos haces.

Los corrimientos de fase necesarios se generan operando polarizadores lineales sobre cada patrón de interferencia generado en el plano imagen del sistema. La adición de la rejilla de difracción y de la luz polarizada circularmente nos permitió diseñar un sistema dinámico y flexible de corrimiento de fase y que además es un sistema estable mecánicamente.

Actualmente el proyecto de investigación está concluido; sin embargo quedó abierto a las posibles aplicaciones que se le puedan dar al sistema óptico desarrollado.

Contenido de la Tesis

El contenido de la tesis está distribuido en 7 capítulos a lo largo de los cuales, se desarrollan los fundamentos que se aplicaron hasta llegar a los resultados de las simulaciones y los experimentos. La nomenclatura de figuras y ecuaciones es conforme al capítulo que las contenga. Las citas bibliográficas referenciadas entre paréntesis cuadrados se listan al final de la Tesis.

CAPÍTULO 1. Se establecen los conceptos fundamentales sobre Teoría electromagnética para comprender los parámetros medibles con frentes de ondas de referencia conocidos en pruebas interferométricas. Se incluyen además los conceptos introductorios de teoría de difracción de campo lejano (Fraunhofer) y de campo cercano (Fresnel).

CAPÍTULO 2. Se establecen los conceptos fundamentales sobre óptica física necesarios, como teoría de difracción y transformada de Fourier para comprender los pormenores de la técnica de corrimiento de fase simultáneo usando elementos difractivos.

CAPÍTULO 3. Se establecen los conceptos necesarios sobre interferometría y los métodos para procesar los patrones para extraer la información de la fase usando técnicas de corrimiento de fase por etapas.

CAPÍTULO 4. En este capítulo se incluye la teoría básica sobre modulación con polarización y rejillas de difracción y las ventajas experimentales que resultan de incluir estos elementos difractivos en el sistema que se está presentando. Se definen los parámetros involucrados así como su importancia para el desarrollo del sistema presentado. Se presentan además los resultados preliminares obtenidos.

CAPÍTULO 5. En este capítulo se presenta la forma en que se calculan parámetros físicos a partir del conocimiento de la fase óptica, lo que nos permitiría medir en este caso las deformaciones fuera de plano asociadas con la fase introducida por el objeto de prueba.

CAPÍTULO 6. Los resultados obtenidos con el sistema se extienden en este capítulo presentándose el caso de 4 corrimientos en una sola toma.

CAPÍTULO 7. Se presentan las conclusiones generales y los comentarios finales, así como algunas propuestas del trabajo a seguir.

APÉNDICES. Están enumerados en forma alfabética y se relacionan con algunos teoremas y resultados que se aplicaron.

Apéndice I. Se presentan los códigos bases que se utilizaron para procesar la información.

Apéndice II. Se presenta un esquema donde se muestra la arquitectura física y computacional del sistema que se está proponiendo.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Onda Plana: Notación Compleja

1.1.1. Las Ecuaciones del Electromagnetismo Clásico

LAS FORMAS INTEGRALES

A) Ley de Gauss

Suponiendo una superficie cerrada en la vecindad de una distribución de carga eléctrica ρ_v , el flujo de campo eléctrico \mathbf{E} a través de dicha superficie \mathbf{S} igual a la carga total q que contiene (Ver Fig. 1.1). Con unidades MKS racionalizadas y en el vacío:

$$\varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = q \equiv \iiint_V \rho_v dV, \quad (1.1)$$

donde V denota al volumen encerrado por la superficie \mathbf{S} . Ésta es la forma integral de la Ley de Gauss.

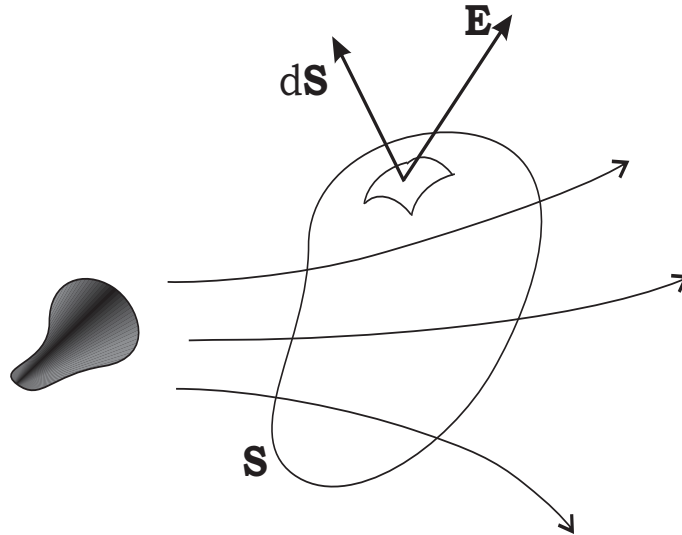


Figura 1.1: ley de Gauss.

B) Flujo Magnético

Análogamente al campo eléctrico, el flujo del campo magnético \mathbf{B} es una superficie cerrada, proporciona una medida de la carga. Como clásicamente la carga magnética se considera inexistente, se obtiene:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (1.2)$$

Comparando la ecuación (1.2) con la Ley de Gauss, se admite la imposibilidad de aislar una carga magnética dentro de una superficie cerrada.

C) Ley de Ampere

Una corriente eléctrica i da lugar a un campo magnético \mathbf{B} . El efecto se describe mediante la integral de línea (circulación) de \mathbf{B} a lo largo

de un circuito cerrado C (Ver Fig. 1.2) . En el vacío:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i. \quad (1.3)$$

En la ecuación (1.3) i puede ser la corriente descrita por la densidad de corriente \mathbf{J} , cruzando el área determinada por C . Sin embargo, aún si $\mathbf{J}=0$ debe existir otra contribución proveniente de campos eléctricos, como lo muestra en el caso de la carga de un condensador.

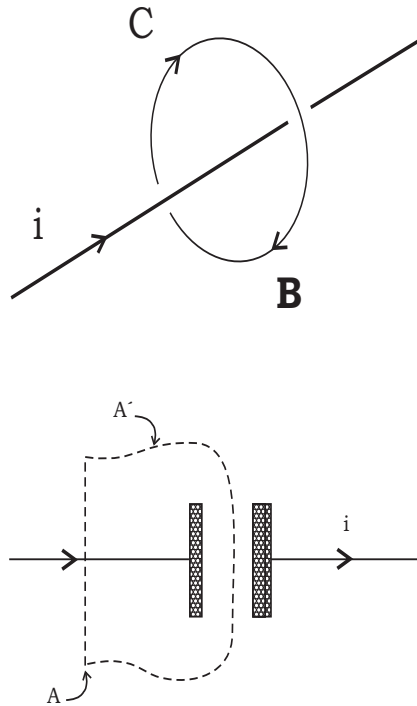


Figura 1.2: Ley de Ampere.

En la Fig. 1.4 definimos las áreas A y A' que se encuentran definidas por la misma curva C , pero a través de A' no hay corriente (transporte de portadores de carga). Debe existir otra contribución a la circulación del

campo \mathbf{B} . Ésta se conoce como corriente de desplazamiento y ocasiona que, en general, la circulación de \mathbf{B} se escriba considerando:

$$i = \iint_S \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.4)$$

D) Ley de inducción de Faraday

El hecho de que un flujo magnético $\Phi_{\mathbf{B}}$, dado por

$$\Phi_{\mathbf{B}} = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

variable en el tiempo origine un voltaje, se expresa en términos de la fuerza electromotriz (FEM) inducida, como:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \Phi_{\mathbf{B}}, \quad (1.5)$$

donde S es una superficie definida por C (Ver Fig. 1.4).

En las ecuaciones (1.1), (1.3) y (1.4) las constantes de permitividad ε_0 y de permeabilidad μ_0 son propias del vacío y asumen los valores escalares.

$$\varepsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^2 \text{ m}^{-2}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N S}^2 \text{ C}^{-2}.$$

LAS EXPRESIONES DIFERENCIALES

Las ecuaciones (1.1)–(1.5) son las formas integrales de las ecuaciones de Maxwell en el vacío: dos se refieren a flujos (1.1) y (1.2) y dos a

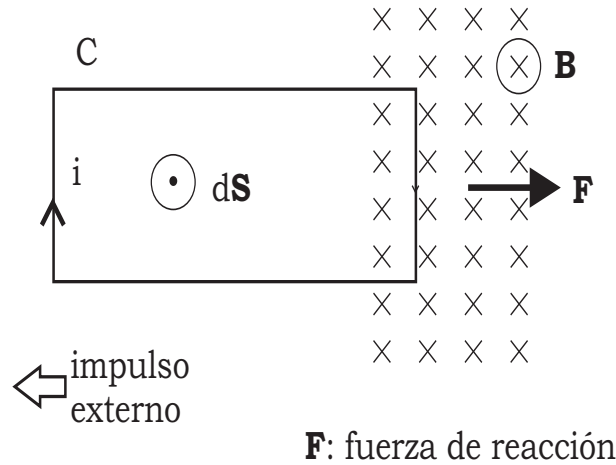


Figura 1.3: Ley de inducción de Faraday.

circulaciones (1.3)–(1.5). Dos teoremas integrales permiten expresar las ecuaciones (1.1)–(1.5) en forma diferencial. Considerando el campo vectorial \mathbf{A} (Ver Fig. 1.4), se tiene

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \quad (1.6)$$

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.7)$$

Con la aplicación de los teoremas integrales (Gauss y Stokes), las ecuaciones del electromagnetismo clásico se escriben como sigue:

A) Ley de Gauss

$$\varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \oint_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \int_V \rho_v dV,$$

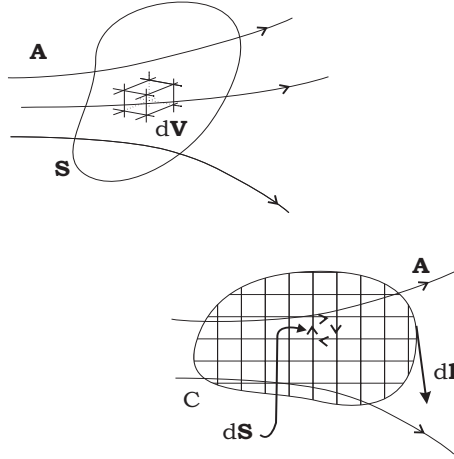


Figura 1.4: Flujo a través de una volumen y una superficie cerrada.

de modo que igualando integrandos sobre la base de la independencia en la elección de S , se obtiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_v / \epsilon_0. \quad (1.8)$$

B) Flujo Magnético

Análogamente al caso anterior, se obtiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.9)$$

C) Ley de Ampere

Usando la ecuación (1.7) en la ecuación (1.4), se tiene que:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S},$$

igualando integrandos resulta

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.10)$$

D) Ley de Faraday

Como en el caso anterior, pero basándose en la ecuación (1.5), resulta que

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Limitándose a cambios de \mathbf{B} , y no de S , puede introducirse al integrando el operador derivada, convirtiéndose en parcial. Tras igualar integrandos resulta la igualdad siguiente:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.11)$$

Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} resultan acoplados mutuamente por las ecuaciones (1.10) y la (1.11). El acoplamiento surge sólo cuando \mathbf{E} y \mathbf{B} varían en el tiempo, de lo contrario las ecuaciones resultantes son dos para \mathbf{E} independientes de otras dos para \mathbf{B} (electrostática y magnetostática).

1.1.2. La Ecuación de Onda Electromagnética en el Vacío

Para encontrar las soluciones de los campos, uno de ellos puede eliminarse. Para ello, tomando la ecuación (1.10) y aplicando el rotacional a sus dos miembros, se tiene primero que:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mu_0 \nabla \times \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} \\
&= \mu_0 \nabla \times \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\mathbf{B}}{\partial t} \right) \\
&= \mu_0 \nabla \times \mathbf{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2},
\end{aligned}$$

donde se pudo eliminar a \mathbf{E} mediante la ecuación (1.11). Por otra parte, puesto que:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$$

se encuentra que:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2};$$

pero $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (ec. (1.9)), de modo que:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \quad (1.12)$$

ecuación que puede simplificarse al caso de regiones sin corriente ($\mathbf{J}=0$), obteniéndose:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \quad (1.13)$$

que es una ecuación de onda clásica vectorial en 3 dimensiones para \mathbf{B} , y con velocidad de fase dada por:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \equiv c = 2,99792251 \times 10^5 \text{ km/s}. \quad (1.14)$$

Por otro lado empleando la misma identidad del rotacional aplicado a la ecuación (1.11), se tiene:

$$\begin{aligned}
 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\
 &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},
 \end{aligned}$$

igualdad que determina para el laplaciano de \mathbf{E} ,

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \mathbf{E} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \\
 &= \nabla(\rho_v / \varepsilon_0) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \tag{1.15}
 \end{aligned}$$

simplificándose al caso de regiones sin carga ($\rho_v = 0$) y sin corrientes ($\mathbf{J}=0$) a una ecuación similar a la ecuación (1.13), esto es:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{1.16}$$

1.2. Soluciones Armónicas: La Ecuación de Helmholtz

Puede procederse a la búsqueda de soluciones armónicas de la forma:

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_r(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \tag{1.17}$$

Eligiendo la expresión compleja en la favor de la trigonométrica real correspondiente. Esta puede obtenerse mediante:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re\{\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t)\} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}_r(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_r^*(\mathbf{r})e^{i\omega t} \right)$$

o también:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_c^*(\mathbf{r}, t)) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) + c.c.) \end{aligned}$$

donde *c.c.* denota al complejo conjugado del número complejo a la izquierda. Sustituyendo la ecuación (1.17) en la ecuación (1.16) de onda, se encuentra que:

$$e^{-i\omega t} \nabla^2 \mathbf{E}_r(\mathbf{r}) = \mu_0 \varepsilon_0 (-i\omega t)^2 \mathbf{E}_r(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = 0$$

donde se ha derivado dos veces a $\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t)$ respecto del tiempo para obtener el factor $(-i\omega t)^2$. Eliminando ahora a los factores de temporales comunes, se encuentra una ecuación para el factor espacial, la cual resulta ser:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_r(\mathbf{r}) + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}_r(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.18)$$

que es la llamada ecuación de Helmholtz. A la constante k definida a partir de:

$$\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \equiv k^2 = \omega^2 / c^2, \quad (1.19)$$

se le conoce como número de onda.

1.2.1. La Solución de Onda Plana: Relación entre \mathbf{E} y \mathbf{B}

En particular, una solución de la ecuación (1.18) de Helmholtz puede escribirse como:

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{0r}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad , \quad |\mathbf{k}| = k, \quad (1.20)$$

correspondiendo a una solución de la forma:

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0c}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-wt)} \quad (1.21)$$

que corresponde a soluciones de la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - wt + \phi), \quad (1.22)$$

donde:

$$\mathbf{E}_0 = \Re\{\mathbf{E}_{0c}\} = \Re\{\mathbf{E}_0 e^{i\phi}\} \quad (1.23)$$

\mathbf{E}_0, ϕ constantes.

Particularizando a la ecuación (1.10) con $\mathbf{J}=0$ al caso de un campo \mathbf{E} de la forma (1.21), se tiene por un lado:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= -i\omega \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}_r(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

mientras que por el otro lado, se observa lo siguiente si se supone a \mathbf{B} de la forma (1.21):

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{B}_x & \mathbf{B}_y & \mathbf{B}_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ ik_x & ik_y & ik_z \\ \mathbf{B}_x & \mathbf{B}_y & \mathbf{B}_z \end{vmatrix} = i\mathbf{k} \times \mathbf{B},\end{aligned}\quad (1.25)$$

donde se ha sustituido:

$$\frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow ik_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} \longrightarrow ik_y, \quad \frac{\partial}{\partial z} \longrightarrow ik_z$$

como consecuencia de la derivación espacial del factor (1.20). Así, considerando las ecuaciones (1.24) y (1.25), se obtiene que:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -i\omega\mu_0\varepsilon_0\mathbf{E} \quad (1.26)$$

que es una relación de triedro para una onda transversal electromagnética plana (regla de la mano derecha, ver Fig. 1.5) para \mathbf{E} , \mathbf{B} y \mathbf{k} . De la ecuación (1.26) se encuentra también que:

$$|\mathbf{k} \times \mathbf{B}| = kB = \omega\mu_0\varepsilon_0E, \quad E, B = |\mathbf{E}|, |\mathbf{B}|$$

por lo cual:

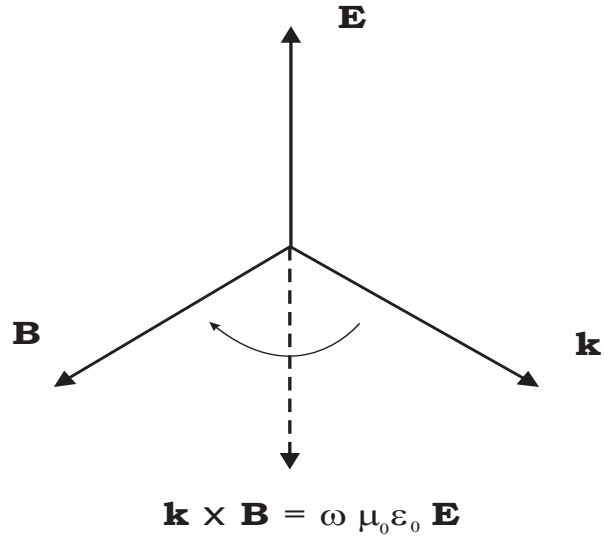


Figura 1.5: Regla de la mano derecha.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{w}{k} \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{c} \mathbf{E}, \end{aligned} \tag{1.27}$$

que determina las amplitudes de los campos mediada por c . Siendo real, \mathbf{B} y \mathbf{E} se hallan en fase. Además, \mathbf{B} debe tener la forma de las ecuaciones (1.27) y (1.21).

$$\mathbf{B}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_{0c} e^{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - wt)}, \quad |\mathbf{B}_{0c}| = \frac{1}{c} |\mathbf{E}_{0c}|. \tag{1.28}$$

1.3. La Energía de una Onda Plana Electromagnética: Vector de Pointing

La densidad de energía total electromagnética ω es:

$$\omega = \omega_e + \omega_m. \quad (1.29)$$

donde ω_e es la densidad de energía almacenada en el campo eléctrico y ω_m la correspondiente al campo magnético. Para el caso del vacío, con $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ y $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Y suponiendo campos complejos,

$$\omega_e = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \quad , \quad \omega_m = \frac{1}{2}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.30)$$

Para obtener relaciones que involucren a ω_e y ω_m a partir de las ecuaciones del electromagnetismo, conviene realizar las operaciones siguientes. Por un lado, multiplicando a la ecuación (1.11) por \mathbf{H} ,

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \omega_m \quad (1.31)$$

mientras que, por el otro, multiplicando a la ecuación (1.10) por \mathbf{E}

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right) \\ &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \omega_e \end{aligned} \quad (1.32)$$

combinando los resultados (1.31) y (1.32) con la ec. (1.29), se puede hallar que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\omega &= \frac{\partial}{\partial t}\omega_e + \frac{\partial}{\partial t}\omega_m = \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \\
&= \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \\
&= -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{J},
\end{aligned}$$

se ha echado mano de la igualdad:

$$\begin{aligned}
[\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})] &= \partial_i (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \partial_i \epsilon_{ijk} E_j H_k = \epsilon_{ijk} \partial_i E_j H_k \\
&= \epsilon_{ijk} (\mathbf{E} \cdot \partial_i H_k + H_k \partial_i E_j) \\
&= \epsilon_{ijk} \mathbf{E} \cdot \partial_i H_k + \epsilon_{ijk} H_k \partial_i E_j \\
&= -E_j \epsilon_{jik} \cdot \partial_i H_k + H_k \epsilon_{kij} \partial_i E_j \\
&= -E_j (\nabla \times \mathbf{H})_j + H_k (\nabla \times \mathbf{E})_k = -\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}
\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (1.33)$$

que para el caso de regiones no conteniendo corrientes ($\mathbf{J}=0$), se reduce a la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0, \quad (1.34)$$

donde se ha introducido al vector de Pointing \mathbf{S} como:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (1.35)$$

notando que, en el caso especial de una onda e.m. plana en el vacío,

$$\mathbf{S} = \mathbf{k}, \quad (1.36)$$

puesto que $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ y $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ resulta paralelo a \mathbf{k} por la regla del triedro a derecha (ec.(1.26)).

1.4. Energía Promediada en el Tiempo: La Irradiancia

Puesto que las frecuencias w en el visible son del orden de 10^{14} Hz, difícilmente un detector es capaz de resolver las oscilaciones, por lo que lo registrado viene a ser una potencia promediada durante un tiempo de detección τ en vez de detectarse la potencia instantánea. Típicamente, $2\tau \gg 2\pi/w$, por lo cual contiene muchas oscilaciones de $|\mathbf{S}| = S$, y puede aplicarse la relación:

$$\langle |\mathbf{S}| \rangle = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} dt |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \langle S \rangle, \quad \tau \rightarrow \infty,$$

para estimar tal promedio. Calculando a $\langle S \rangle$ con la ecuación (1.35) y las ecs. (1.21) y(1.28), se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle s \rangle &= \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \frac{dt}{4} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_c^*) \times (\mathbf{H}_c + \mathbf{H}_c^*) \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} dt (\mathbf{E}_c \times \mathbf{H}_c + \mathbf{E}_c \times \mathbf{H}_c^* + \mathbf{E}_c^* \times \mathbf{H}_c + \mathbf{E}_c^* \times \mathbf{H}_c^*) \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} dt \cdot 2\Re\{\mathbf{E}_c \times \mathbf{H}_c^*\} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} dt \Re\{\mathbf{E}_{0c} + \mathbf{H}_{0c}^*\} \\
&= \frac{1}{2} \Re\{\mathbf{E}_{0c} + \mathbf{H}_{0c}^*\} \tag{1.37}
\end{aligned}$$

Esta última relación puede particularizarse para una onda plana e.m. considerando la relación triédrica y el cociente de campos (ec. (1.27)).

Con ello, se puede comprobar que:

$$\begin{aligned}
\langle S \rangle &= \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{E}_{0c}| \frac{1}{c} |\mathbf{E}_{0c}^2| \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} E_{0c}^2 \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{0c}^2 \tag{1.38}
\end{aligned}$$

Pero considerando los promedios temporales de las densidades de energía, se tiene, en general:

$$\langle \omega \rangle = \langle \omega_e \rangle + \langle \omega_m \rangle$$

siendo en particular para una onda plana, que:

$$\begin{aligned}
\langle \omega_e \rangle &= \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \frac{dt}{8} (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_c^*) \cdot (\mathbf{E}_c + \mathbf{E}_c^*) \\
&= \frac{1}{2\tau} \frac{1}{8} \int_0^{2\tau} dt (\mathbf{E}_c^2 + \mathbf{E}_c^{*2} + 2\Re\{\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{E}_c^*\}) \\
&= \frac{1}{2\tau} \varepsilon_0 \int_0^{2\tau} \frac{dt}{4} E_{0c}^2 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_{0c}^2,
\end{aligned} \tag{1.39}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle \omega_m \rangle &= \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \frac{dt}{8} (\mathbf{H}_c + \mathbf{H}_c^*) \cdot (\mathbf{B}_c + \mathbf{B}_c^*) \\
&= \frac{1}{2\tau} \frac{1}{\mu_0} \int_0^{2\tau} \frac{dt}{4} \Re\{\mathbf{B}_{0c}^* \cdot \mathbf{B}_{0c}\} \\
&= \frac{1}{2\tau} \frac{1}{4\mu_0} \int_0^{2\tau} dt B_{0c}^2 = \frac{1}{4\mu_0} B_{0c}^2,
\end{aligned} \tag{1.40}$$

así, usando la ecuación (1.27), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle \omega_m \rangle &= \frac{1}{4\mu_0} \frac{1}{c^2} E_{0c}^2 \\
&= \varepsilon_0 \frac{E_{0c}^2}{4} = \langle \omega_e \rangle,
\end{aligned} \tag{1.41}$$

por lo cual:

$$\langle \omega \rangle = 2 \langle \omega_e \rangle = 2 \langle \omega_m \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{0c}^2. \tag{1.42}$$

Entonces, la ec. (1.38) y la (1.42),

$$\begin{aligned}
\langle S \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} 2 \langle \omega \rangle \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \langle \omega \rangle \\
&= c \langle \omega \rangle .
\end{aligned}
\tag{1.43}$$

Definiendo a la irradiancia como la potencia promedio incidente en una superficie (Ver Fig. 1.6), cuya normal es paralela a \mathbf{k} , en unidades de área, se tiene:

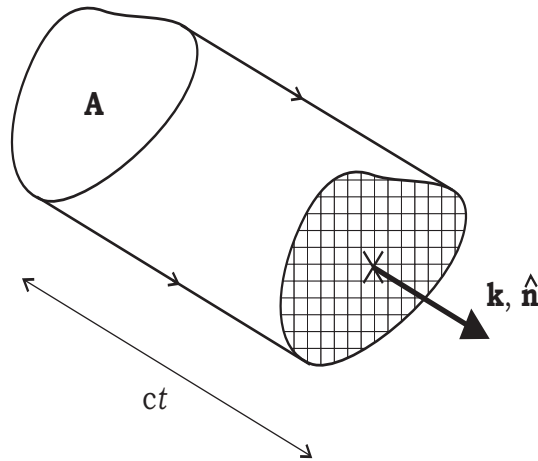


Figura 1.6: Potencia promedio incidente en una superficie.

$$\langle j \rangle = \frac{\langle \omega \rangle Act}{At} = c \langle \omega \rangle = \langle S \rangle,
\tag{1.44}$$

parámetro con unidades de watt/m². Note que:

$$\langle j \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_{0c}^2
\tag{1.45}$$

por lo cual, en unidades arbitrarias para suprimir el factor $\frac{1}{2}c\epsilon_0$, es costumbre escribir a la irradiancia I como:

$$I = E_{0c}^2. \quad (1.46)$$

Para una onda plana, la irradiancia es una constante.

1.5. La Solución de la Onda Esférica

Para soluciones cuya simetría favorezca la adopción de coordenadas esféricas, como se muestra en la Fig. 1.7, debe considerarse que el laplaciano asume la forma

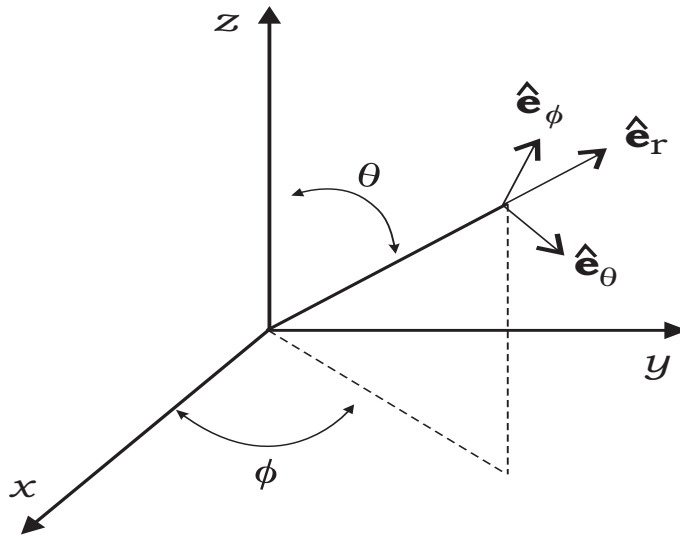


Figura 1.7: Coordenadas esféricas.

$$\nabla^2 f(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen} \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (1.47)$$

donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $\cos\theta = \frac{z}{r}$, $\tan\phi = \frac{y}{x}$. Considerando funciones $f(r, \theta, \phi) = f(r)$, ésto es, funciones dependientes de únicamente de r , se tiene que el laplaciano se simplifica a:

$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right). \quad (1.48)$$

Entonces, la ecuación de Helmholtz se reduce correspondientemente es:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + k^2 E_r = 0, \quad E_r = E_r(r),$$

o bién,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + k^2 r^2 E_r = 0; \quad (1.49)$$

pero,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) &= r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} E_r + 2r \frac{\partial E_r}{\partial r} \\ &= r \left(r \frac{\partial^2}{\partial r^2} E_r + 2 \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) \\ &= r \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r E_r) \right); \end{aligned} \quad (1.50)$$

puesto que:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r E_r) = r \frac{\partial E_r}{\partial r} + E_r.$$

y en consecuencia,

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rE_r) = r\frac{\partial^2 E_r}{\partial r^2} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} = r\frac{\partial^2 E_r}{\partial r^2} + 2\frac{\partial E_r}{\partial r}.$$

Entonces la ecuación de Helmholtz (1.49) se rescribe como:

$$r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rE_r) + k^2 r^2 E_r = 0$$

y dividiendo entre r , resulta la siguiente ecuación de Helmholtz,

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rE_r) + k^2(rE_r) = 0$$

Para ser satisfecha por rE_r . Considerando una onda plana para rE_r , se obtiene ahora que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr$ y

$$E_r(r) = \frac{1}{r}E_{0c}e^{ikr}$$

y al incluir el factor temporal, la solución para simetrías radiales resulta

$$E_r(r) = \frac{1}{r}E_{0c}e^{i(kr-wt)} \quad (1.51)$$

que se conoce como onda esférica. Nótese la atenuación $\frac{1}{r}$. Siendo $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - wt$ es una onda expansiva, mientras que si $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + wt$ es el argumento, es una onda consentrandose en un punto.

1.5.1. Aproximación de Fresnel a una Onda Esférica

Existe una aproximación importante para la ec. (1.51) para el caso en que la observación de la onda es esférica se realiza a una distancia

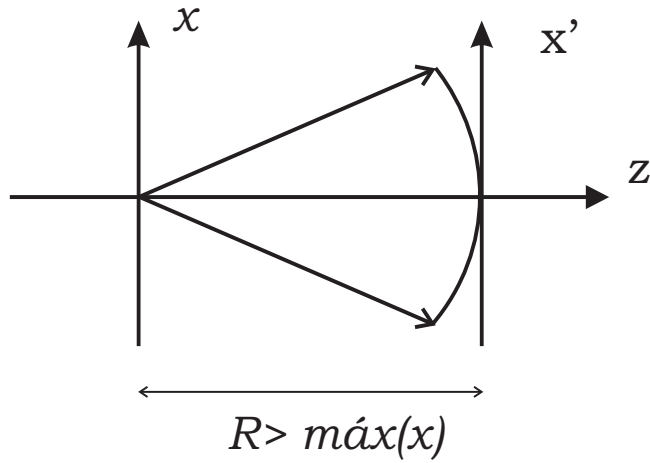


Figura 1.8: Aproximación de Fresnel a una Onda Esférica.

mucho mayor que $\lambda = 2\pi/k$ como sugiere la Fig. 1.8, donde $z \rightarrow \infty$. En tal caso,

$$\begin{aligned}
 kr &= k \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{1/2} \\
 &= kz \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right)^{1/2} \\
 &= kz \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{z^2} + \dots \right) \\
 &\approx \frac{2\pi z}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right)
 \end{aligned}$$

dentro de una región $x^2 + y^2 \ll z^2$. Entonces, de la ec. (1.51) y con $z = R$

$$E_r \approx \frac{1}{R} E_{0c} e^{ikR} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)} \quad (1.52)$$

y

$$E_c \approx \frac{1}{R} E_{0c} e^{ikR} e^{i\{\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2) - \omega t\}}, \quad (1.53)$$

que es la aproximación de Fresnel. El último factor exponencial de la ec. (1.52) se conoce como "factor de fase cuadrática". En la región de aproximación, se aproxima a un frente de onda esférico como uno parabólico.

1.6. Difracción de Fraunhofer y de Fresnel: Caso Unidimensional

La difracción es un fenómeno ondulatorio especialmente manifestado cuando un frente de onda es parcialmente obstaculizado por una pantalla o una transparencia. Puede pensarse que las ondas secundarias de Huygens cambian su relación de fase y su amplitud una vez que interactúan con el obstáculo. Algunas ondetas incluso resultan suprimidas por absorción. La consecuencia es que, la superposición de la nueva distribución de ondetas da paso a un nuevo frente de onda. Este nuevo frente de onda original, en general, máximos y mínimos. La Fig. 1.9 muestra una distribución de fuentes secundarias sobre el plano x . El campo total de la superposición de ondas secundarias se detecta en planos paralelos situados a distancias medidas sobre el eje z . La observación se supone realizada en regiones de dimensiones finitas. Si $z = R \gg \text{máx } u$, donde u es un eje paralelo a x , cada onda secundaria, de ser esférica, tiende a ser una onda plana. La inclinación de la onda

plana depende de la posición de la fuente secundaria sobre x .

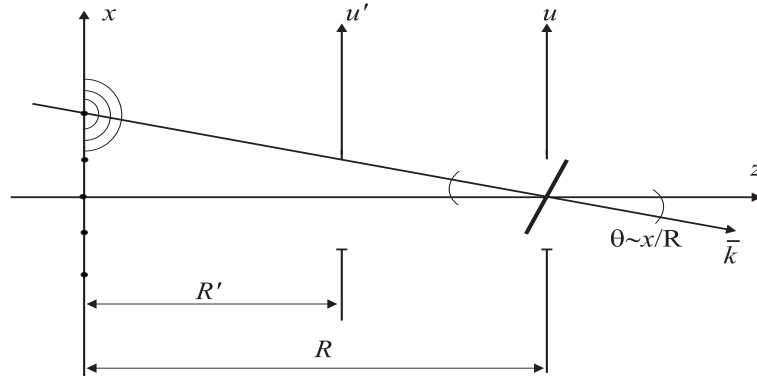


Figura 1.9: Difracción de Fraunhofer y de Fresnel: Caso Unidimensional.

Esta conversión de onda esférica a onda plana puede usarse para definir una región donde el campo total propagado resulte de la superposición de las ondas inclinadas aproximadamente por el ángulo x/R . El campo total define un patrón de difracción conocido como patrón de difracción de Fraunhofer o de campo lejano. El campo total entonces consta de la superposición de ondas planas de la forma

$$O(x)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (1.54)$$

con $O(x)$ la función que describa la distribución de fuentes secundarias o, equivalentemente al frente de onda en el plano x . Así mismo, por la aproximación paraxial,

$$\vec{k} = k(\text{sen}(\theta), 0, \text{cos}(\theta)) \approx k(-x/R, 0, 1) \quad (1.55)$$

por lo cual, para $\vec{r} = (u, 0, R)$, $\vec{k} \cdot \vec{r} = -kux/R + kR$.

Entonces, la contribución de una ondeta situada en x para el campo total es proporcional a:

$$O(x)e^{i2\pi\frac{ux}{\lambda R}}e^{ikR}e^{-i\omega t} \quad (1.56)$$

por lo que la contribución de todas las fuentes secundarias puede estimarse como:

$$a(u, t) \propto e^{ikR}e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i2\pi\frac{ux}{\lambda R}} \quad (1.57)$$

de modo que la irradiancia correspondiente es:

$$|a(u, t)|^2 \propto |\mathcal{FO}(x)|_{\mu=u/\lambda R}^2 \quad (1.58)$$

donde la integral se ha identificado como una transformada de Fourier:

$$\mathcal{FO}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i2\pi\frac{ux}{\lambda R}} \quad (1.59)$$

El patrón de difracción de campo lejano viene a ser proporcional al módulo cuadrado de la transformada de Fourier en la región de campo lejano. Para otro rango de distancias \acute{R} , con $\acute{R} < R$, se podrá usar una aproximación de Fresnel y ya no la de onda plana. El patrón de difracción correspondiente es conocido como patrón de Fresnel o patrón de difracción en la región de Fresnel. De acuerdo con las secciones anteriores, cada fuente secundaria contribuye con una onda esférica, a la distancia \acute{D} , de la forma de la ec. (1.53), con $\acute{u} = u - x$. Entonces, el factor de fase cuadrática puede expresarse como:

$$\exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda\acute{R}'}(u-x)^2\right\} \quad (1.60)$$

Así, de acuerdo a la ec 1.53, la contribución esférica tiene la forma espacial

$$\frac{O(x)}{R'} e^{ikR'} e^{\left\{i\frac{\pi}{\lambda R'}(u-x)^2\right\}} \quad (1.61)$$

por lo cual, el campo total de Fresnel resulta proporcional a la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\frac{\pi}{\lambda R'}(u-x)^2} \quad (1.62)$$

Esta integral puede reescribirse como sigue:

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{\lambda R'}u'^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx O(x) e^{i\frac{\pi}{\lambda R'}x^2} e^{-i2\pi u' \frac{x}{\lambda R'}} \\ = e^{\frac{i\pi u'^2}{\lambda R'}} \mathcal{FO}(x) e^{i\pi x^2 \lambda R'} \Big|_{\mu=x/\lambda R'} \end{aligned} \quad (1.63)$$

en donde se puede hallar otra transformación de Fourier describiendo otro rango de difracción. Un análisis riguroso proporciona resultados congruentes con las estimaciones presentadas definiendo las proporcionalidades y los rangos de validez. La apreciación de los efectos difractivos ocurre particularmente cuando las dimensiones del obstáculo son mayores que la longitud de onda λ , o del orden de magnitud.

1.7. Conclusiones

En este capítulo se establecieron los conceptos básicos relacionados con frentes de onda planos y esféricos utilizados para iluminar sistemas ópticos en interferometría, se asociaron las ecuaciones fundamentales sobre teoría electromagnética para comprender los parámetros medibles

con estos frentes de onda y se definió el concepto de irradiancia que servirá en capítulos posteriores para deducir el patrón de interferencia modulado por polarización. Se estudiaron los conceptos introductorios de teoría de difracción de campo lejano (Fraunhofer) y de campo cercano (Fresnel) que permitirán obtener los espectros de difracción de las rejillas de amplitud usadas en el sistema propuesto para generar las replicas de los interferogramas modulados por polarización.

Capítulo 2

La Difracción de Campo Lejano y la Transformada de Fourier

La difracción de campo lejano puede considerarse como un proceso de conversión de ondas esféricas en planas. Dicho proceso también puede realizarse con una lente delgada de focal positiva dentro de la aproximación paraxial. Es a través de dicha conversión que muchas características de la difracción de Fraunhofer pueden identificarse con las propiedades de transmisión de lentes. Estas se estudiarán en lo siguiente.

2.1. La Difracción de Fraunhofer en una Dimensión

La conversión de ondas esféricas en planas la proporciona una lente de focal positiva si la fuente de la onda esférica se halla en un plano focal (aproximación paraxial) como se observa en la Fig. 2.1., la conversión se logra en distancias finitas.

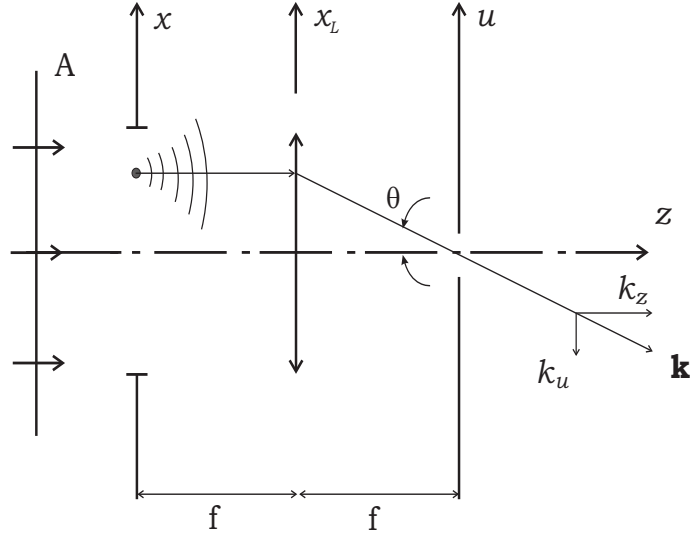


Figura 2.1: Sistema de formación de imágenes

Una pantalla con cierta transmitancia en amplitud descrita por $O(x)$ se encuentra totalmente en el plano focal anterior de una lente de longitud focal positiva f . Una fuente secundaria de Huygens originará una onda esférica sobre la lente y su amplitud puede expresarse como:

$$\frac{AO(x)}{f} e^{+ikf} e^{-\frac{i\pi}{\lambda z}(x_L^2)} \quad (2.1)$$

siendo A la amplitud de la onda plana incidente y x_L el plano de la lente delgada.

En la aproximación paraxial, la onda que emerge de la lente es una onda plana inclinada, con vector de onda dado por $\vec{k} = (k_u, 0, k_z)$, donde u es un eje paralelo al eje x . El módulo de \vec{k} , $k = |\vec{k}| = 2\pi/\lambda$, de modo que $\vec{k} = k(-\sin(\theta), 0, \cos(\theta))$ de acuerdo a la figura. La onda plana originada por la fuente secundaria situada en la posición x , puede escribirse como:

$$a(u, x) = \frac{AO(x)}{f} e^{+ikf} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.2)$$

habiendo considerado únicamente al factor espacial ya que, tras una detección cuadrática el factor armónico temporal se promedia en una constante multiplicativa (sec. 0.1.9). El campo de la onda plana puede considerarse en cualquier región en el lado derecho de la lente; pero es conveniente considerar el plano focal posterior. Entonces, el eje u se hace coincidir con el plano focal posterior, consiguiendo un esquema simétrico. Con esta elección, el vector de posición $\vec{r} = u\hat{e}_1 + z\hat{e}_3$, se simplifica aún más si se traslada el origen de z al plano focal posterior. Así, $\vec{r} = u\hat{e}_1$ y el producto punto $\vec{k} \cdot \vec{r}$ se reduce a $k_u u$. Como $k_u = k \text{sen}(\theta)$, su valor puede determinarse de la tangente de θ , cuyo valor es x/f . La contribución de la fuente secundaria sobre el plano focal posterior es:

$$\begin{aligned} a(u, x) &= \frac{AO(x)}{f} e^{ikf} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} \text{sen}\theta u} \\ &\approx \frac{AO(x)}{f} e^{ikf} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda f} u x} \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde se ha empleado la aproximación paraxial congruente $\tan\theta \approx \text{sen}\theta \approx \theta$.

La contribución al mismo plano de todas las fuentes secundarias es:

$$\begin{aligned} a(u) = \int_{-\infty}^{\infty} a(u, x) dx &= \frac{A}{f} e^{ikf} \int_{-\infty}^{\infty} O(x) e^{-i\frac{2\pi u x}{\lambda f}} \\ &= \frac{A}{f} e^{ikf} \mathcal{F}\{O(x)\}_{\frac{u}{\lambda f}} \\ &= \tilde{O}(\mu) \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde se a usado la siguiente notación,

$$\tilde{O}(\mu) \equiv \mathcal{F}\{O(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} O(x)e^{-i2\pi\mu x} dx \quad (2.5)$$

con $\mu = \frac{u}{\lambda f}$, que se denominará *frecuencia espacial*.

La aparición de la transformada de Fourier en esta situación siguiere su aplicación en las propiedades paraxiales de los sistemas ópticos. Las propiedades de la transformada de Fourier deben tener entonces una contraparte en el sistema óptico considerado. Una de estas propiedades proviene del teorema de Fourier, el cual establece la existencia de una transformada inversa de Fourier y su forma. La transformada inversa se escribe como:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{O}(\mu)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{O}(\mu)e^{i2\pi\mu x} d\mu. \quad (2.6)$$

siendo semejante a la transformada directa, básicamente cambiando sólo el signo del kernel de la transformación. La inversa cumple la propiedad siguiente:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{O(x)\}\} = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{O}(\mu)\} = O(u). \quad (2.7)$$

propiedad congruente con la elección del plano focal posterior como el eje sobre el cual calcular el campo total. Esto se visualiza si se imagina un espejo plano coincidiendo con el plano focal posterior. Aceptando que sobre él incida un campo dado por $\tilde{O}(u\lambda f)$, es ahora este campo quien se encuentra en el plano focal de la misma lente que transformó. La argumentación conduciendo a la ec. (2.4) es aplicable, con la salvedad del cambio de signo en θ por la hipotética reflexión especular. Uno puede concluir que, efectivamente, una integral muy similar a la de la

ec. (2.4) debe recuperar la distribución original $O(x)$, ya que el análisis geométrico correspondiente conduce a la formación de una imagen de $O(x)$, invertida. Una conclusión semejante no se obtendría al colocar un espejo en otro plano. Un análisis más detallado aclarará el anterior comentario. Otra argumentación más rigurosa (teoría escalar de difracción) justificará plenamente la elección del plano. El patrón de difracción de campo lejano (o de Fraunhofer) se identifica con la irradiancia respectiva del campo calculado como describe la ec. (2.4) Entonces, en unidades arbitrarias.

$$I(u) = |\mathcal{F}\{O(x)\}|^2. \quad (2.8)$$

coincidiendo con los resultados de la sec. 0.1.9.

2.1.1. La Delta de Dirac en Sistemas Lineales Ópticos

La delta de Dirac es una distribución que puede caracterizarse de forma pragmática con las siguientes propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (2.9)$$

normalización y desplazamiento

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad (2.10)$$

La importancia de esta distribución dentro de la teoría de Fourier se ve al considerar el teorema de Fourier; esto es, considerando a la igualdad (2.7). Para verlo se tiene con las definiciones previas (2.4 y 2.7):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-\infty} = \{\mathcal{F}\{O(x)\}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \mathcal{F}\{O(x)\} e^{i2\pi x\mu} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} dx' O(x') e^{-i2\pi x'\mu} e^{i2\pi x\mu} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' O(x') \int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{-i2\pi(x'-x)\mu},
\end{aligned}$$

La segunda integral es una de la forma:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{-i2\pi x\mu} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{-i2\pi x\mu} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-i2\pi x\mu}}{-i2\pi x} \right|_{-a}^a \\
&= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}2\pi ax}{2\pi x} = \lim_{a \rightarrow \infty} a \frac{\text{sen}2\pi ax}{2\pi ax}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

que es una distribución con las propiedades de $\delta(x)$. En la secuencia de la figura $a_0 < a_1 < a_2$, la gráfica se estrecha y su altura aumenta cuando a se incrementa. Identificando entonces a la integral en cuestión de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{-i2\pi(x'-x)\mu} = \delta(x' - x) \tag{2.12}$$

se concluye que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}O(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' O(x' - x) \\
&= O(x)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

por la propiedad (2.10). Gracias a ella, el teorema de Fourier se cumple.

FUENTE PUNTUAL

Una fuente puntual situada en la posición $x = x_0$ se puede representar con $\delta(x - x_0)$, ya que su transformada de Fourier es una onda plana de inclinación constante x_0 . Esto se verifica así:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\delta(x - x_0)\} &= \int_{-inf ty}^{inf ty} dx \delta(x - x_0) e^{-i2\pi\mu x} \\ &= e^{-i2\pi\mu x_0}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

y su representación gráfica se muestra a continuación en la Fig. 2.2.

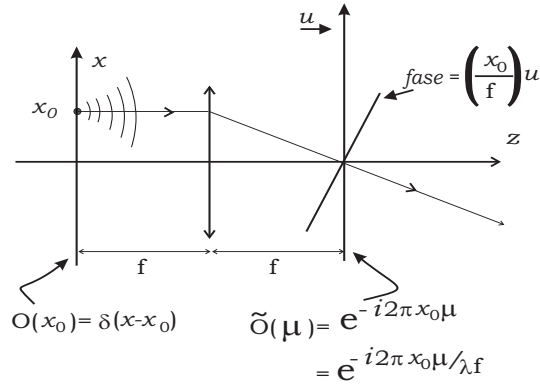


Figura 2.2: Fuente puntual situada en una posición $x = x_0$

EL EXPERIMENTO DE YOUNG EN CAMPO LEJANO

Dos aberturas, o dos fuentes coherentes, situadas en las posiciones $x = \pm x_0$, son representadas por dos deltas de Dirac desplazadas (Ver Fig. 2.3.)

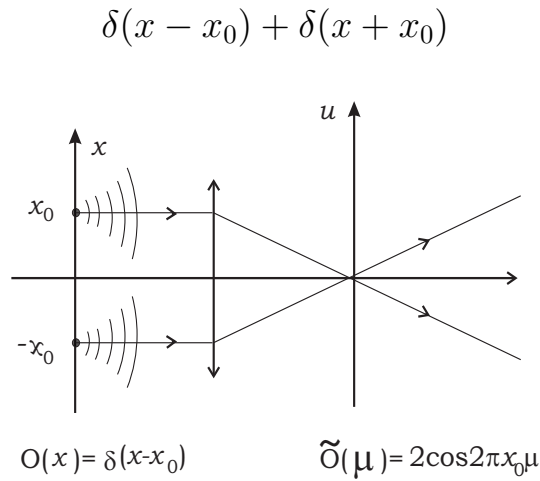


Figura 2.3: Experimento de Young de campo lejano

Entonces:

$$\begin{aligned}
 \tilde{O}(\mu) = \mathcal{F}\{O(x)\} &= \mathcal{F}\{\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)\} \\
 &= \mathcal{F}\{\delta(x - x_0)\} + \mathcal{F}\{\delta(x + x_0)\} \quad (\text{linealidad}) \\
 &= e^{-i2\pi\mu x_0} + e^{+i2\pi\mu x_0} \\
 &= 2\cos[2\pi x_0 \mu].
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

El resultado anterior proporciona la irradiancia $I(\mu)$ siguiente:

$$I(\mu) = 4\cos^2[2\pi x_0 \mu], \tag{2.16}$$

que es el conocido patrón de interferencia de Young. En el espacio de μ , el patrón se describe como:

$$\begin{aligned}
I(\mu) &= 4\cos^2[2\pi x_0 u/\lambda f] \\
&= 2(1 + \cos[4\pi x_0 u/\lambda f]),
\end{aligned}
\tag{2.17}$$

de donde se ve que la frecuencia espacial del patrón es:

$$\sigma_u = \frac{2x_0}{f\lambda},
\tag{2.18}$$

que corresponde a la interferencia de dos ondas planas (polarización perpendicular, \perp o s) de número de onda, es decir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= k(-\text{sen}\theta, 0, \text{cos}\theta) \\
\mathbf{k}_2 &= k(\text{sen}\theta, 0, \text{cos}\theta).
\end{aligned}$$

Estos vectores definen un vector de onda \mathbf{K} del patrón como:

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 = 2k\text{sen}\theta(1, 0, 0);
\tag{2.19}$$

mientras que el patrón $I(\mathbf{r})$ resulta:

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{r}) &= |e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + e^{+i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}| \\
&= 1 + 1 + 2\Re\{e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + e^{+i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}\} \\
&= 2(1 + \cos[(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}]) \\
&= 2(1 + \cos[\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}]) \\
&= 2\left(1 + 2\cos^2\left[\frac{1}{2}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})\right] - 1\right) \\
&= 4\cos^2\left[\frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}{2}\right].
\end{aligned}
\tag{2.20}$$

Comparando este resultado con la ec. (2.17), se tiene, con $\mathbf{r} = u\hat{\mathbf{e}}_1$,

$$\frac{K}{2} = \frac{2\pi x_0}{\lambda f}$$

lo cual corresponde con la aproximación $K \approx 2kx_0/f$; y $\Lambda = \frac{\lambda f}{2x_0} = 1/\sigma_u$.

ABERTURA RECTANGULAR

En una dimensión, una abertura rectangular puede caracterizarse por la función $rect(x)$ (Ver Fig. 2.4) definida como:

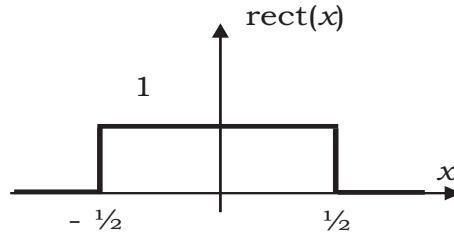


Figura 2.4: Abertura rectangular

$$rect(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1/2 \\ 0 & \text{si } |x| > 1/2 \end{cases}$$

Para determinar el patrón de difracción de campo lejano, o de Fraunhofer, se procede a calcular la transformada de Fourier de la función de transmitancia $O(x) = rect(x)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{O}(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \text{rect}(x) e^{-i2\pi\mu x} \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} dx e^{-i2\pi\mu x} \\
&= \frac{1}{-i2\pi\mu} e^{-i2\pi\mu x} \Big|_{-1/2}^{1/2} = -\frac{1}{i2\pi\mu} \left(e^{-i2\pi\mu} - e^{i2\pi\mu} \right) \\
&= \frac{\text{sen}[\pi\mu]}{\pi\mu} = \text{senc}[\mu], \tag{2.21}
\end{aligned}$$

donde la función “seno cociente” se define así:

$$\begin{aligned}
\text{senc}[\mu] &= \frac{1}{\pi\mu} \text{sen}\pi\mu \quad \text{si } \mu \neq 0 \\
&= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\mu} \text{sen } \pi\mu = 1 \quad \text{si } \mu = 0. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

En la Fig. 2.5. se nota que los ceros de $\text{senc}[\mu]$ son los del $\text{sen}[\pi\mu]$ a excepción de $\mu = 0$. El patrón de difracción de Fraunhofer resulta:

$$\begin{aligned}
I(\mu) &= \text{senc}^2[\mu] \\
&= \text{senc}^2 \left[\frac{u}{\lambda f} \right], \tag{2.23}
\end{aligned}$$

que consta de un máximo central y otros máximos locales entre irradiancias de valor cero.

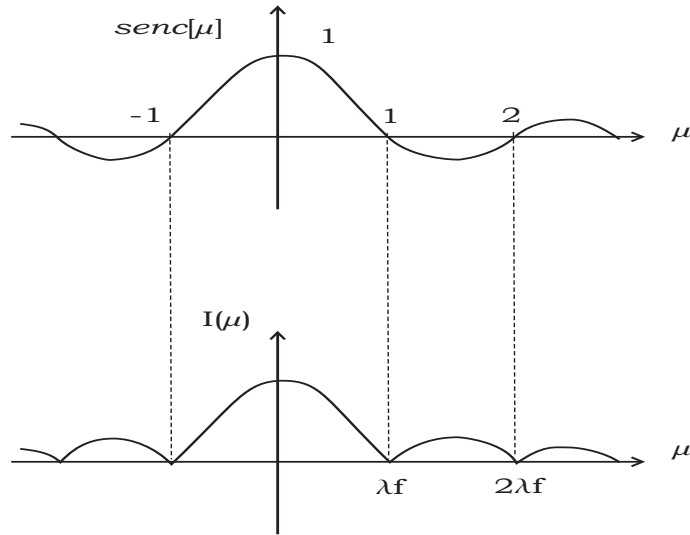


Figura 2.5: Gráfica de la Intensidad y de la función seno cociente

PROPIEDAD DE ESCALAMIENTO

Si se tiene una abertura con función de transmitancia dada por $O(ax)$, su transformada de fourier es, usando $x' = ax$,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{O(ax)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx O(ax) e^{-i2\pi\mu x} = \int_{-\infty}^{\infty} dx' O(x') \frac{1}{|a|} e^{-i2\pi\mu x'/a} \\
 &= \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\{O(x)\}_{\mu=\mu/a} = \frac{1}{|a|} O(\mu/a). \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

El empleo de $|a|$ es consecuencia del cambio de variables realizado. Si $a > 0$, por ejemplo, la igualdad es inmediata. Pero si $a < 0$, la diferencial es negativa y puede escribirse como $-dx'/|a|$ con $dx' < 0$. La variable $x' < 0$ si $x > 0$ y $x' > 0$ si $x < 0$, por lo cual los límites de integración cambian de $\int_{-\infty}^{\infty} dx$ a $\int_{\infty}^{-\infty} -dx'/|a| = \int_{-\infty}^{\infty} dx'/|a|$. Por

otro lado, $x'/a > 0$ en ambos casos. Puesto que la variable del objeto se está escalando mediante el factor de escala a , la propiedad se conoce como escalamiento. Un ejemplo lo ofrece el objeto con transmitancia unitaria de ancho a , i.e.,

$$O(ax) = \text{rect}(x/a_\omega), \quad a = 1/a_\omega \quad (2.25)$$

donde el escalamiento se utiliza para expresar un ancho de abertura variable a_ω . Entonces

$$\tilde{O}(\mu) = a_\omega \text{senc}[a_\omega \mu], \quad (2.26)$$

Cuya gráfica puede inspeccionarse en la Fig. 2.6. Se ve que los mínimos de irradiancia:

$$I(u) = a_\omega^2 \text{senc}^2[a_\omega u/\lambda f] \quad (2.27)$$

ocurre cuando:

$$u_n = n \frac{\lambda f}{a_\omega}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.28)$$

y coincide con las consecuencias de la ec. (2.23) con $a_\omega=1$.

Al disminuir el ancho de la abertura, $a_\omega \rightarrow 0$ y las posiciones de los mínimos de irradiancia se alejan del origen. La altura del máximo central de difracción disminuye porque pasa menor cantidad de amplitud. Por el contrario, si $a_\omega \rightarrow \infty$, los mínimos se acercan al origen y el máximo central aumenta de valor. Cuando $a_\omega \rightarrow 0$, $O(x) \rightarrow \delta(x)$ y $\tilde{O}(\mu) \rightarrow 1$ si $a_\omega \rightarrow \infty$, $O(x) \rightarrow 1$ y $\tilde{O}(\mu) \rightarrow \delta(\mu)$.

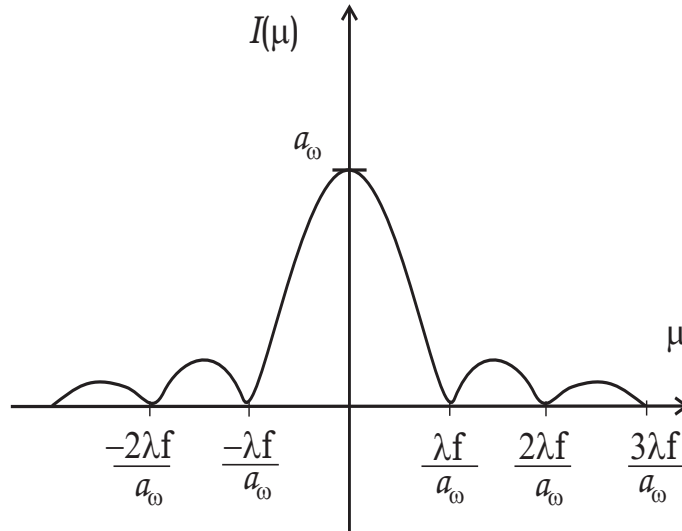


Figura 2.6: Espectro de una abertura rectangular

EXPERIMENTO DE YOUNG CON RENDIJAS DE ANCHO FINITO

Si en las posiciones $x = \pm x_0$ existen dos rendijas iguales a la del caso anterior, pero desplazadas como las dos fuentes puntuales, la transmitancia del objeto se representa como:

$$O(x) = \text{rect}([x - x_0]/a_\omega) + \text{rect}([x + x_0]/a_\omega) \quad (2.29)$$

Dado que las dos rejillas son como la del caso D, pero desplazadas, puede discutirse el efecto de desplazar un objeto del origen. En general, si $\tilde{O}(x) = \mathcal{F}\{O(x)\}$,

$$\begin{aligned}
\tilde{O}'(\mu) &= \mathcal{F}\{O(x - x_0)\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx O(x - x_0) e^{-i2\pi\mu x} \quad , \quad x' = x - x_0 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' O(x') e^{-i2\pi\mu(x'+x_0)} \\
&= e^{-i2\pi\mu x_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx' O(x') e^{-i2\pi\mu x'} \\
&= e^{-i2\pi\mu x_0} \mathcal{F}\{O(x)\} = e^{-i2\pi\mu x_0} \tilde{O}(\mu), \tag{2.30}
\end{aligned}$$

estableciendo el efecto del desplazamiento del objeto como una introducción de un factor de fase en el mismo espectro de Fourier $\tilde{O}(\mu)$. El resultado se conoce como Teorema del desplazamiento. Empleando el teorema de desplazamiento para el caso de las dos rendijas, se tiene:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\{rect([x - x_0]/a_\omega) + rect([x + x_0]/a_\omega)\} = \\
&= \mathcal{F}\{rect([x - x_0]/a_\omega)\} + \mathcal{F}\{rect([x + x_0]/a_\omega)\} \\
&= e^{-i2\pi\mu x_0} \mathcal{F}\{rect[x/a_\omega]\} + e^{+i2\pi\mu x_0} \mathcal{F}\{rect[x/a_\omega]\} \\
&= (e^{-i2\pi\mu x_0} + e^{+i2\pi\mu x_0}) \mathcal{F}\{rect[x/a_\omega]\} \\
&= 2\cos[2\pi\mu x_0] a_\omega \text{senc}[a_\omega\mu] \\
&= 2a_\omega \cos[2\pi\mu x_0] \text{senc}[a_\omega\mu], \tag{2.31}
\end{aligned}$$

resultando un patrón de interferencia de Young modulado por la transformada de la abertura. La situación tiene al caso B si $a_\omega \rightarrow 0$ porque $\mathcal{F}\{rect[x/a_\omega]\} \rightarrow \delta(x)$ ($a_\omega \text{senc}[a_\omega\mu] \rightarrow 1$).

La Fig. 2.7 muestra que existe la posibilidad de encontrar un patrón con ceros de irradiancia adicionales a los determinados por la función

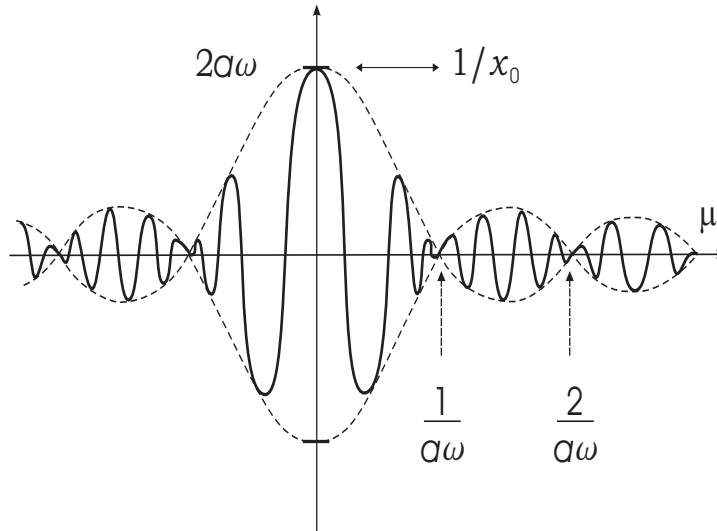


Figura 2.7: Espectro de dos rejillas de ancho finito

coseno. Así mismo, algunos máximos del coseno pueden coincidir con los ceros de la transformada de la abertura, presentándose el caso de máximos de interferencia, o sea, si $n\lambda f/a_\omega = m\lambda f/x_0$, de modo:

$$\frac{n}{a_\omega} = \frac{m}{x_0}, \quad (2.32)$$

(con m y n , enteros) es la condición del índice extraviado de orden m . El análisis de Fourier ha determinado un origen más completo del experimento de Young, porque incorpora el ancho de las rendijas.

2.1.2. El Teorema de Convolución

Se define a la convolución de dos funciones como:

$$\begin{aligned}
O(x)\tilde{O}'(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tilde{O}(\xi) O'(x - \xi) \tilde{O}(\mu) * \tilde{O}'(\mu) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tilde{O}(\xi) \tilde{O}'(\mu - \xi), \quad (2.33)
\end{aligned}$$

denotando la operación como un producto con el símbolo $*$. Puede definirse en cualquier espacio como se indicó; pero se buscará la transformada de Fourier inversa de la convolución realizada en el plano de frecuencias con el propósito de relacionar la operación con el sistema óptico. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{O}(\mu) * \tilde{O}'(\mu)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu [\tilde{O}(\mu) * \tilde{O}'(\mu)] e^{i2\pi\mu x} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tilde{O}(\xi) \tilde{O}'(\mu - \xi) \right] e^{i2\pi\mu x} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tilde{O}(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \tilde{O}'(\mu - \xi) e^{i2\pi\mu x}, \quad \mu' = \mu - \xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tilde{O}(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} d\mu' \tilde{O}'(\mu') e^{i2\pi(\mu'+\xi)x} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tilde{O}(\xi) e^{i2\pi\xi x} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu' \tilde{O}'(\mu') e^{i2\pi\mu' x} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tilde{O}(\xi) e^{i2\pi\xi x} \cdot O'(x) \\
&= O(x) \cdot O'(x). \quad (2.34)
\end{aligned}$$

El resultado indica que la transformada de Fourier de un producto de funciones resulta ser la convolución de sus transformadas, porque aplicando la transformada de Fourier en ambos miembros de la ec. (2.34), resulta:

$$\mathcal{F}\{O(x)O'(x)\} = \tilde{O}(\mu) * \tilde{O}(\mu). \quad (2.35)$$

Puesto que el producto de dos transparencias se corresponde con su superposición o concatenación física, el patrón de Fraunhofer respectivo es la convolución de los patrones individuales. Nótese también que puede verificarse que:

$$\mathcal{F}\{O(x) * O'(x)\} = \tilde{O}(\mu) \cdot \tilde{O}(\mu). \quad (2.36)$$

de acuerdo al principio de reversibilidad. Así mismo, la convolución es conmutativa. Puede verse que la imagen registrada linealmente impresa por un objeto en movimiento rectilíneo uniforme, se representa como la convolución de la imagen estática con una función rectangular.

2.1.3. El Tren de Pulsos de Dirac

Una rejilla de difracción ideal puede representarse por un tren de pulsos. Una serie de fuentes puntuales con igual separación x_0 y simétricamente centradas respecto al origen, puede representarse como una serie de deltas de Dirac tal como:

$$O(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - nx_0) = \frac{1}{x_0} \Pi(x/x_0) \quad (2.37)$$

habiendo usado la función "sha" dada por:

$$\Pi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - n) \quad (2.38)$$

donde la propiedad de escalamiento $\delta(x - /x_0) = |x_0| \epsilon(x)$, se ha empleado (como puede verificarse por cambio de variable*).

La transformada de la serie resulta ser:

$$\begin{aligned}
 \tilde{O}(\mu) &= \mathcal{F}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - nx_0)\right\} \\
 &= \sum_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\delta(x - nx_0)\} \\
 &= \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi nx_0\mu}.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Por el teorema de desplazamiento. Note que la serie final es una serie de Fourier con $\omega = 2\pi x_0$, $T = 1/x_0$ y $t = \mu$ (Apéndice A). Entonces $\tilde{O}(\mu)$ es periódica con período $1/x_0$; pero con $C_n = 1$ para todo valor de n . Reconociendo que Note que esta serie puede considerarse como una serie de Fourier escrita en forma compleja y con coeficientes:

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = 1. \tag{2.40}$$

Resultan las condiciones:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{-T/2} dtg(t)\cos[2\pi nt/T] \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{-T/2} dtg(t)\sen[2\pi nt/T]
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

satisfechas por $\tilde{O}(t) = T\delta(t)$ dentro del intervalo $[-T/2, T/2]$. En todo espacio, se obtiene la repetición periódica, que es:

$$\tilde{O}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} T \delta(t - nT) \longrightarrow \tilde{O}(\mu) = \frac{1}{x_0} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{x_0}\right) \quad (2.42)$$

Entonces, se establecen las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - nx_0)\right\} &= \frac{1}{x_0} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\mu - n/x_0) \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\mu x_0 - n) = \Pi(\mu x_0) \end{aligned} \quad (2.43)$$

o bien:

$$\mathcal{F}\Pi(x/x_0) = |x_0| \Pi(\mu x_0) \quad (2.44)$$

en acuerdo al teorema de escalamiento. Este es un caso en donde $\tilde{\mu}$ es de la misma forma que $O(x)$ ($x_0 = 1$), aunque en general los períodos sean inversamente proporcionales.

2.1.4. Rejilla de Ronchi

Las propiedades de convolución y peinen de Dirac permiten las representaciones de funciones periódicas. Para ver cómo puede ser esto, considerese primero la convolución de una función $O'(x)$ con una distribución $\delta(x - x_0)$, o sea,

$$\begin{aligned} O'(x) * \delta(x - x_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi O'(\xi) \delta(x - x_0 - \xi) \\ &= O'(x - x_0), \end{aligned} \quad (2.45)$$

lo cual significa que la convolución de una función con una delta centrada en x_0 , tiene el efecto de centrar dicha función sobre el mismo punto x_0 . Una función periódica de perfil de celda unitaria rectangular, se conoce en óptica como rejilla de Ronchi. Su gráfica se muestra en la Fig. 2.8. con sus parámetros de onda a_ω y período espacial x_0 .

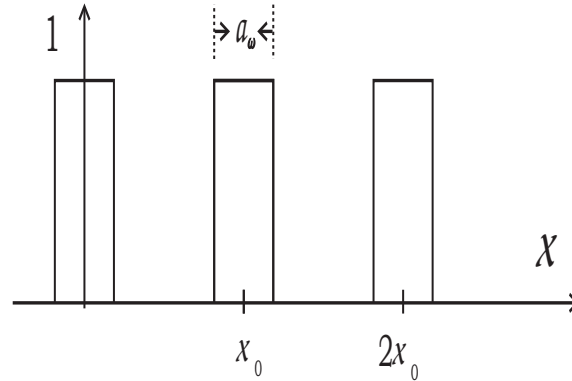


Figura 2.8: Rejilla de Ronchi

La función entonces se puede escribir como:

$$O(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{[x - nx_0]}{a_\omega}\right); \quad (2.46)$$

pero, considerando la propiedad de convolución con $\delta(x - nx_0)$, se obtiene en forma equivalente que una rejilla de Ronchi es:

$$O(x) = \text{rect}\left(\frac{1}{a_\omega}\right) * \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - nx_0). \quad (2.47)$$

Con esta expresión, el teorema de convolución puede usarse para encontrar $\tilde{O}(\mu)$; ésto es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{O(x)\} &= \mathcal{F}\left\{rect(x/a_\omega) * \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - nx_0)\right\} \\
&= \mathcal{F}\{rect(x/a_\omega)\} \mathcal{F}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - nx_0)\right\} \\
&= x_0^{-1} a_\omega sinc[a_\omega \mu] \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\mu - n/x_0), \quad (2.48)
\end{aligned}$$

lo cual resulta ser un peine de Dirac modulado por la transformada de Fourier del perfil de la rejilla. Nótese también que si sucede la condición:

$$\frac{m}{x_0} = \frac{n}{a_\omega}, \quad (2.49)$$

se tendrá el fenómeno de órdenes extraviados. La irradiancia resulta ser:

$$I(\mu) = a_\omega^2 sinc^2[a_\omega \mu] \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\mu - n/x_0). \quad (2.50)$$

2.1.5. El Teorema del Muestreo

Cuando se obtiene información cuantitativa de algún objeto $O(x)$, sólo se adquiere de determinados puntos. Tal información “discretizada” se conoce como muestras, y se dice que una imagen o señal “se muestrea”, obteniendo un conjunto de valores $O_S(x)$ en nuestro caso. Si el muestreo de $O(x)$ se realiza en intervalos iguales, entonces:

$$O_S(x) = O(x) \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - nx_0), \quad (2.51)$$

de modo que $\tilde{O}_S(\mu) \equiv \mathcal{F}\{O_S(x)\}$ viene a ser, por el teorema de convolución,

$$\begin{aligned} \tilde{O}_S(\mu) &= \tilde{O}(\mu) * \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\mu - n/x_0) \cdot x_0^{-1} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{O}(\mu) * \delta(\mu - nx_0) \cdot x_0^{-1} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} x_0^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tilde{O}(\xi) \delta(\mu - n/x_0 - \xi) \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} x_0^{-1} \tilde{O}(\mu - n/x_0), \end{aligned} \quad (2.52)$$

lo cual indica que el espectro $O(\mu)$ del objeto sin muestrear $O(x)$ se repite periódicamente, apareciendo una réplica en $\mu = n/x_0$ y, se construye así una función periódica.

En el caso en que $O(\mu)$ sea prácticamente cero para $|\mu| \geq B_0$, los órdenes repetidos no se sobrelapan cuando:

$$2B_0 < 1/x_0, \quad (2.53)$$

de modo que con el conocimiento de sólo un orden, convenientemente separado de todos los demás, permite la construcción de todo el objeto por transformación inversa. La ec.(2.53) es la base del Teorema de

Muestreo (o de Whitaker-Shannon, o de Nyquist), quien establece con ella la mínima distancia de muestreo en función del ancho de banda B_0 del objeto por muestrear.

2.2. La Difracción De Fraunhofer en el Espacio de 3 Dimensiones: Introducción

2.2.1. Generalización del Argumento 1-D

Cuando la abertura difractora se considere en dos dimensiones, se obtendría la gg. 2.9:

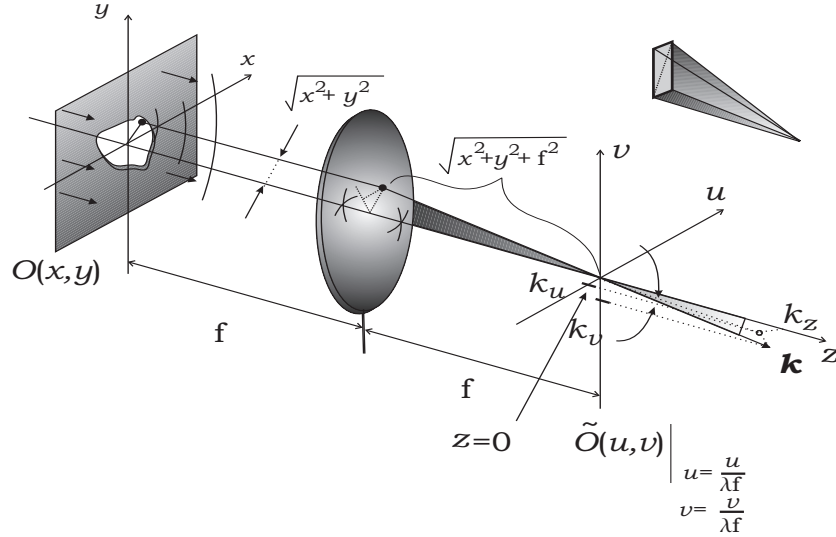


Figura 2.9: Difracción De Fraunhofer en el Espacio de 3 Dimensiones

Del esquema, puede deducirse que $\mathbf{k} = (k_u, k_v, k_z)$ también es:

$$\mathbf{k} = k \frac{(-x, -y, f)}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(-x, -y, f)}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}}, \quad (2.54)$$

de modo que en plano $z = 0$, con $\mathbf{r} = u\hat{\mathbf{e}}_1 + v\hat{\mathbf{e}}_2$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} &= -\frac{2\pi}{\lambda}(xu + yv) \frac{(1}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}} \\
&\approx -\frac{2\pi}{\lambda}(xu + yv)
\end{aligned} \tag{2.55}$$

cuando:

$$\frac{1}{f \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{f^2}\right)^{1/2}} \approx \frac{1}{f}. \tag{2.56}$$

En consecuencia, sin considerar factores de proporcionalidad de onda esférica, las contribuciones sobre el plano (u, v) provenientes de las ondas secundarias de Huygens en (x, y) es la superposición de ondas planas siguientes:

$$\begin{aligned}
O_{uv}(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy O(x, y) e^{-i2\pi(xu + yv)/\lambda f} \\
&= \tilde{O}(\mu, \nu) \Bigg|_{\substack{\mu = u/\lambda f \\ \nu = v/\lambda f}}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

donde se ha definido a la transformada bidimensional de Fourier como:

$$\mathcal{F}\{O(x, y)\} = \tilde{O}(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy O(x, y) e^{-i2\pi(xu + yv)}. \tag{2.58}$$

La transformada de Fourier inversa es:

$$\mathcal{F}^{-1}\{O(\mu, \nu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu d\nu \tilde{O}(\mu, \nu) e^{i2\pi(x\mu+y\nu)} \quad (2.59)$$

que cumple el Teorema de Fourier:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{O(x, y)\}\} = O(x, y), \quad (2.60)$$

2.2.2. Teorema de Fourier en 2-D

Considerando la generalización de δ a dos dimensiones, se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \delta(x, y) = 1 \quad (2.61)$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0); \quad (2.62)$$

con estas propiedades puede inspeccionarse el teorema de Fourier como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{O(x, y)\}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu d\nu \mathcal{F}\{O(x, y)\} e^{i2\pi(x\mu+y\nu)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' O(x', y') e^{-i2\pi(x'\mu+y'\nu)} e^{i2\pi(x\mu+y\nu)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' O(x', y') \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu d\nu e^{-i2\pi([x'-x]\mu+[y'-y]\nu)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' O(x', y') \delta(x' - x, y' - y) \\ &= O(x, y) \end{aligned} \quad (2.63)$$

lo cual representa la correspondiente generalización de la sec 2.1.1.

2.2.3. Ondas Difractadas Viajeras y Evanescentes

El vector de propagación \mathbf{k} puede estudiarse también en términos de los cosenos directores, donde cumplen:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad (2.64)$$

por lo cual:

$$\begin{aligned} \cos^2\gamma &= 1 - \cos^2\alpha + \cos^2\beta, \quad 0 \\ \cos \gamma &= \sqrt{1 - \cos^2\alpha + \cos^2\beta}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

de la igualdad anterior, si $\cos^2\alpha + \cos^2\beta < 1$, $\cos \gamma$ es real y \mathbf{k} tiene todas sus componentes reales, dando lugar a una onda viajera de la forma:

$$e^{-i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t]}.$$

con $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Sin embargo, cuando $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, γ alcanza los 90° , $k_z=0$ y las ondas difractadas viajan razantes a la pantalla difractora. Puede suceder también que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta > 1$, en cuyo caso, $\cos \gamma$ resulta ser imaginario puro. Esto corresponde a una atenuación (¡no debido a absorción alguna!) en dirección $\hat{\mathbf{e}}_3$ porque la exponencial resulta con un factor:

$$e^{-i|k_z|z} \quad (2.66)$$

Cómo pueden ser estos vectores de propagación, se sugiere en la Fig. 2.10, donde \mathbf{k}_R es la parte real del vector de propagación:

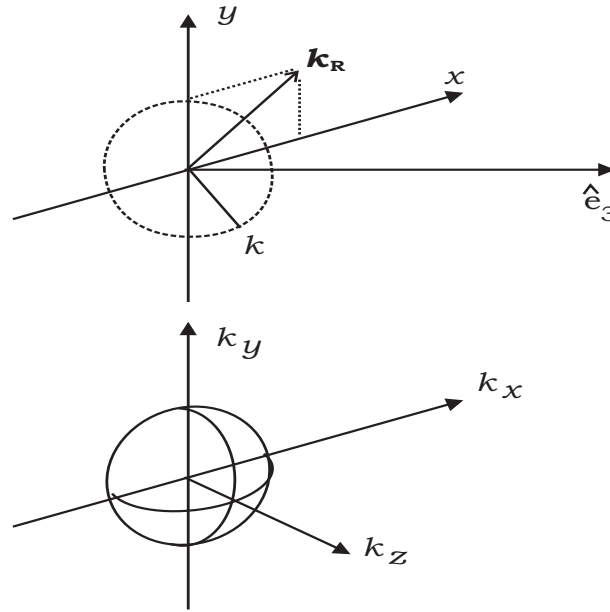


Figura 2.10: Vectores de propagación

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I \quad , \quad \mathbf{k}_R = (k_x, k_y, 0) \quad , \quad \mathbf{k}_I = (0, 0, k_z)$$

Los vectores $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ de módulo k son los que unen el origen con algún punto de la esfera de radio R . Éstos dan lugar a ondas viajeras que pueden detectarse a distancias z arbitrariamente grandes. Las ondas difractadas con componentes k_z imaginarias se llaman evanescentes. Tienen el mismo carácter que las ondas evanescentes generadas por refracción y pueden, igualmente convertirse en viajeras al refractarse en el medio de índice adecuado. Pueden, así mismo, detectarse a distancias cercanas a λ ($z \lesssim \lambda$ campo cercano). En tales casos, $|\mathbf{k}_R| > k$ y saldría de la esfera, manteniéndose, sin embargo, siempre sobre el plano

(k_x, k_y) .

2.2.4. Abertura Circular

Una abertura circular representa un problema para expresarse en coordenadas esféricas (polares). Si $\mathbf{g}(r, \theta) = \mathbf{g}_R(r)$, con:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} & ; & & x &= r \cos \theta \\ \theta &= \arctan(y/x) & ; & & y &= r \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.67)$$

la transformada de Fourier bidimensional $G(\mu, \nu)$ es:

$$\begin{aligned} G(\rho, \phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \mathbf{g}(r, \theta) e^{-i2\pi(x\mu + y\nu)} \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} J\left(\frac{x, y}{r, \theta}\right) dr d\theta \mathbf{g}(r, \theta) e^{-i2\pi r(\mu \cos \theta + \nu \sin \theta)} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr \mathbf{g}(r, \theta) e^{-i2\pi r(\mu \cos \theta + \nu \sin \theta)} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr r \mathbf{g}(r, \theta) e^{-i2\pi r \rho \cos(\theta - \phi)} \end{aligned} \quad (2.68)$$

donde

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2} & ; & & \mu &= \rho \cos \phi \\ \phi &= \arctan(\eta/\xi) & ; & & \nu &= \rho \sin \phi \end{aligned}$$

y el jacobiano es:

$$J\left(\frac{x, y}{r, \theta}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}. \quad (2.69)$$

lo cual se simplifica de la siguiente forma:

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-iacos(\theta-\phi)} \quad (2.70)$$

resulta que, para el caso $g(r, \theta) = \mathbf{g}_R(r)$,

$$\begin{aligned} G(\rho, \phi) &= \int_0^\infty dr \mathbf{g}_R(r) r \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i2\pi r \rho \cos(\theta-\phi)} \\ &= 2\pi \int_0^\infty dr r \mathbf{g}_R(r) J_0(2\pi r \rho) = G_R(\rho), \end{aligned} \quad (2.71)$$

conocida como la transformación de Hankel de orden cero, por 2π , valuada en $2\pi\rho$. La transformada inversa de Hankel de orden cero es tal que:

$$\mathbf{g}_R(r) = 2\pi \int_0^\infty \rho G_R(\rho) J_0(2\pi r \rho) d\rho. \quad (2.72)$$

En las relaciones anteriores, $J_0(a)$ es el valor de la función de Bessel de orden cero en el punto a . Particularizando la ecuación (2.71) al caso de que:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_R(r) &= \text{circ}(r/R), \quad \text{con} \\ \text{circ}(r/R) &= \begin{cases} 1 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \end{aligned}$$

Su transformada $G_R(\rho)$ es:

$$G_R(\rho) = 2\pi \int_0^R dr r J_0(2\pi r \rho), \quad (2.73)$$

siendo \mathfrak{X} la cinhca “ $2h$ ”,

$$\int_0^{\mathfrak{X}} dr' r' J_0(ar') = \frac{\mathfrak{X}}{a} J_1(a\mathfrak{X}),$$

con $J_1(\mathfrak{X})$ denotando a la función de Bessel de orden uno, se obtiene con $r' = r$, $\mathfrak{X} = R$ y $a = 2\pi\rho$

$$\begin{aligned} G_R(\rho) &= 2\pi \int_0^{2\pi} dr r J_0(2\pi r \rho) \\ &= 2\pi \frac{R}{2\pi\rho} J_1(2\pi\rho R) \\ &= 2\pi R^2 \frac{J_1(2\pi R\rho)}{2\pi R\rho}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

La irradiancia correspondiente $I(\rho)$ es,

$$I(\rho) = (2\pi R^2)^2 \left| \frac{J_1(2\pi R\rho)}{2\pi R\rho} \right|^2, \quad (2.75)$$

que se conoce como patrón de difracción de Airy. Una sección transversal del patrón de Airy se muestra a continuación. El radio del primer mínimo es

$$\xi = 1,22$$

La transformada de Hankel de orden l es denotada como:

$$\mathcal{H}_l\{g_R(r)\}_{2\pi\rho} = \int_0^\infty dr \, r g_R(r) J_l(2\pi r \rho) \quad (2.76)$$

A la función:

$$\frac{J_1(\pi x)}{2x} \quad (2.77)$$

se le conoce también como *jinc* x . La transformada inversa de Hankel es, por cierto,

$$\mathcal{H}_l^{-1}\{G_R(\rho)\} = - \int_0^\infty d\rho \, \rho G_R(\rho) J_l(2\pi \rho r). \quad (2.78)$$

2.3. La Formación de Imágenes en 1-D

Por simplificación, se retornará al caso unidimensional a fin de inspeccionar el efecto de colocar dos lentes de focal positiva en forma consecutiva, como se muestra en la Fig. 2.11.

la primera lente, L_1 , realiza la operación:

$$O(\mu) = \mathcal{F}\{O(x)\} \quad , \quad \mu = u/\lambda f \quad (2.79)$$

mientras que la segunda lente, L_2 , transforma la distribución que encuentra en su plano focal posterior; ésto es:

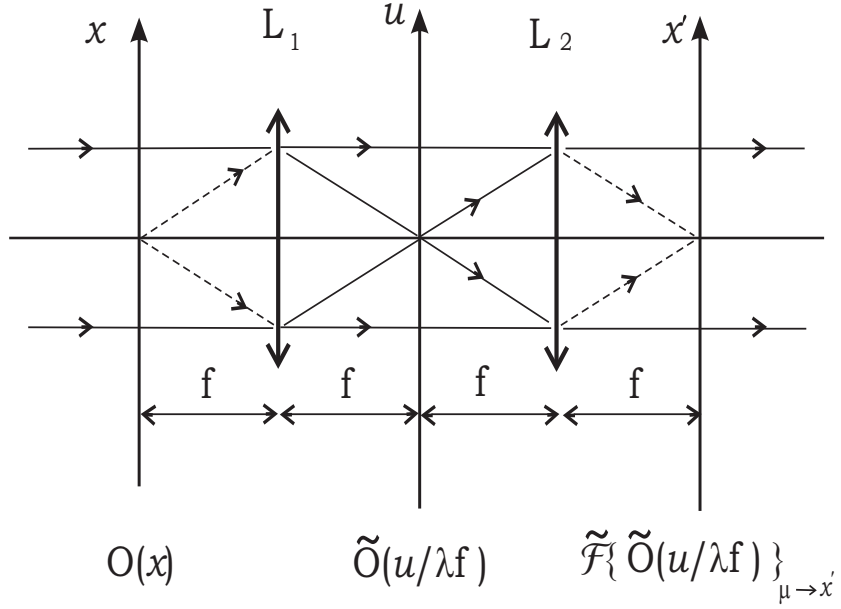


Figura 2.11: Sistema de formación de imágenes en 1-D

$$\begin{aligned}
 O'(x') &= \mathcal{F}_{\mu \rightarrow x'} \{ \tilde{O}(\mu) \} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \tilde{O}(\mu) e^{-i2\pi\mu x'} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx O(x) e^{-i2\pi\mu x} \right] e^{-i2\pi\mu x'} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx O(x) \int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{-i2\pi\mu(x+x')} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx O(x) \delta(x+x') = O(-x') \quad (2.80)
 \end{aligned}$$

De manera que en el plano x' se recupera la función $O(x)$. Es una consecuencia de la propiedad de las transformadas,

$$\mathcal{F}\mathcal{F}\{O(x)\} = O(-x) \quad (2.81)$$

que prácticamente se demostró en la ecuación (2.80). Como se ha reproducido $O(x)$ sobre el plano- x' , que es igual al x , se dice que se ha formado la imagen de $O(x)$ en x' . Nótese que el esquema está de acuerdo con la óptica geométrica paraxial.

Las trazas continuas en la figura denotan un sistema telecéntrico, puesto que entra un haz con objeto en ∞ y su imagen se halla en ∞ . El trazo discontinuo muestra como el sistema forma la imagen del punto $x = 0$, sobre el punto $x' = 0$.

2.3.1. La Función de Pupila

Con el sistema telecéntrico (dos lentes en serie), se tiene un sistema óptico formador de imágenes del cual se conoce un plano intermedio donde se redistribuye la información de la distribución del objeto. Cuando el sistema de adjunta de manera que los efectos más importantes ocurran en el plano u , entonces el sistema puede describirse concentrando la atención en ese plano (Ver Fig. 2.12).

Uno de estos efectos es el corte ocasionado por el tamaño de las lentes en los frentes. Si la limitación del sistema está en el plano u , puede pensarse entonces que $\tilde{O}(\mu) = \mathcal{F}\{O(x)\}$ resulta cortado, p.e., por una función $P(\mu) = \text{rect}(\mu/\mu_0)$, siendo $\mu = \mu_0$ el ancho de la pupila, tal como se esquematiza. Aquí, $\mu_0 = 2R/\lambda f$, siendo R el ancho de la pupila en unidades de u . La imagen modificada por el corte, resulta ser:

$$O'(x') = \mathcal{F}\{P(\mu)\tilde{O}(\mu)\} \quad (2.82)$$

$P(\mu)$ recibe el nombre de función de pupila y generalmente, es cero después de determinado valor absoluto de μ , Puede adoptar también valores complejos .

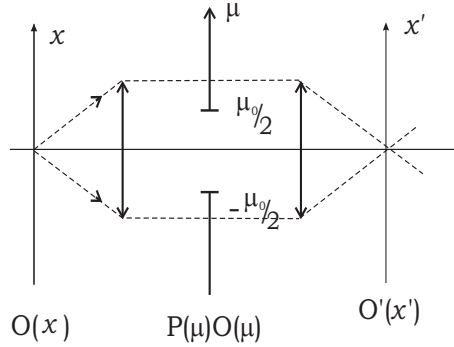


Figura 2.12: Función de puplia

2.3.2. Resolución de Una Rejilla Cosenoidal

Si se tiene en el plano objeto una rejilla de la forma:

$$O(x) = 1 + \cos[2\pi\sigma x] \quad (2.83)$$

en el plano frecuencial se tendrá:

$$\tilde{O}(\mu) = \delta(\mu) + \frac{1}{2}[\delta(\mu - \sigma) + \delta(\mu + \sigma)] \quad (2.84)$$

Si $P(\mu) = \text{rect}(\mu/\mu_0)$, la condición para formar la imagen de $O(x)$ en el plano x' , es que $2\sigma \leq \mu_0$. Si $2\sigma = \mu_0$, la rejilla es justamente resuelta. Pero si $2\sigma > \mu_0$, la rejilla no podrá ser ya resuelta por el sistema. Sin embargo, si la rejilla se ilumina por una onda inclinada respecto al eje óptico, dada por:

$$e^{-i2\pi\alpha x} \quad (2.85)$$

con $\alpha \leq \mu_0/2$, se tendrá entonces que, después de cruzar la rejilla, la amplitud resultará

$$e^{-i2\pi ax} O(x) = e^{-i2\pi\alpha} (1 + \cos[2\pi\sigma x]) \quad (2.86)$$

Por tanto en el plano frecuencial o de Fourier,

$$\mathcal{F}\{e^{-i2\pi\alpha x} + e^{-i2\pi\alpha x} \cos[2\pi\sigma x]\} = \delta(\mu - \alpha) + \frac{1}{2}[\delta(\mu - \sigma - \alpha) + \delta(\mu + \sigma - \alpha)] \quad (2.87)$$

Así, si $\alpha = \mu_0/2$, aunque $\sigma > \mu_0/2$ (pero $\sigma \leq \mu_0$ aún) entonces tendrán cábida el orden junto con un orden de difracción dentro de la pupila, revelando la presencia de *algo* en el plano objeto. Por ello, aparentemente con iluminación inclinada se mejora la resolución del sistema. En el caso particular donde $a = \mu_0/2$ y $\sigma = \mu_0$, de la ec. (2.84) se tiene:

$$\tilde{O}'(\mu) = \delta(\mu - \mu_0/2) + \frac{1}{2}\delta(\mu + \mu_0/2) \quad (2.88)$$

de donde:

$$\begin{aligned} O'(x') &= \mathcal{F}\{O'(x')\} \\ &= e^{-i2\pi\mu_0 x'} + e^{i2\pi\mu_0 x'} \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} I'(x') &= (1 + 1/4) + \frac{2}{2} \Re e^{i2\pi\mu_0 x'} \\ &= 5/4 + \cos[2\pi\mu_0 x'] \end{aligned} \quad (2.89)$$

Comparando esta imagen con el objeto original, dado por la ec. (2.83) con $\sigma = \mu_0$ como se ha supuesto, se encuentra que la alteración suprime varios términos, donde, por la ec. (2.83), en el objeto resultan ser:

$$\begin{aligned}
 I(x) &= |O(x)|^2 = \left| 1 + \frac{1}{2}(e^{i2\pi\sigma x} + e^{-i2\pi\sigma x}) \right|^2 \\
 &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2\Re e^{i2\pi\sigma x} + 2\Re e^{-i2\pi\sigma x} + 2\Re e^{i4\pi\sigma x} \\
 &= \frac{3}{2} + 4\cos[2\pi\sigma x] + 2\cos[4\pi\sigma x] \tag{2.90}
 \end{aligned}$$

La técnica de iluminación inclinada forma parte de las llamadas técnicas Shlieren (estrías). Otro caso es la navaja de Foucault.

2.3.3. El Filtrado Espacial

De la ec. (2.82), se tiene que la pupila $P(\mu)$ puede alterar el espectro del objeto, modificando así la imagen $O'(x')$ en el plano imagen. Se consideran dos ejemplos de aplicación de ésta técnica, conocida como filtraje (o filtrado) espacial.

FILTRO MODAL

La salida de un láser en su modo transversal más bajo, TEM_{00} , tiene una sección radial gaussiana. Por una variedad de razones, en la práctica esta gaussiana va acompañada de variaciones estadísticas de alta frecuencia, las cuales pueden considerarse como ruido aditivo: en gráficas.

Puesto que la transformada de Fouries de una gaussiana es otra gaussiana de ancho inversamente proporcional al de la primera, porque la

transformada de Fourier de una gaussiana con ruido aditivo resulta ser tal como se esquematiza (Fig. 2.13). Entonces, obstruyendo las frecuencias altas con un diafragma de radio del orden del semiancho de la gaussiana limpia, el ruido puede suprimirse.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\sigma^2} e^{-i2\pi x\mu} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\sigma^2 - i2\pi x\mu - \pi^2 \mu^2 \sigma^2 + \pi^2 \mu^2 \sigma^2} dx \\
 &= e^{-\pi^2 \mu^2 \sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[x/\sigma + i2\pi\mu\sigma]^2} dx \\
 &= \sigma\sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \mu^2 \sigma^2}
 \end{aligned}$$

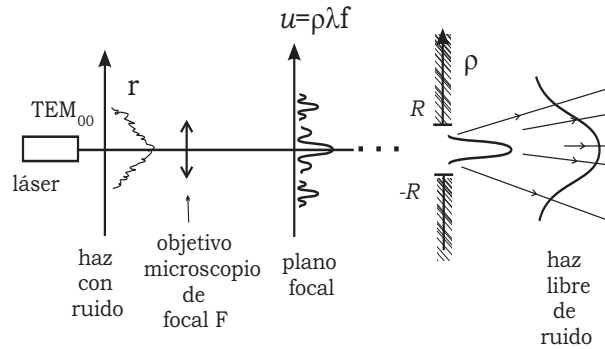


Figura 2.13: Transformada de Fourier de una gaussiana con ruido aditivo

La difracción de potencia que cruza el diafragma de diámetro $D = 2R$ es, con F/a focal del objetivo,

$$\frac{P(D)}{\text{Pot. Total}} = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi \sigma D}{\lambda F} \right)^2}$$

y la mínima frecuencia de ruido transmitida por el diafragma (agujero o “pinhole”) es:

$$d = 2F\lambda/D$$

Por lo cual, se recomienda $D = 2R = \lambda F/\sigma$. Considerando la sec. 2.2.4, el diámetro $2R$ de un diafragma abarcando justamente el primer lóbulo del patrón de Airy, es $1,22\lambda f/\sigma$. Si $f/\sigma \approx 300/N$,

$$D = 300\lambda/N$$

LA TÉCNICA DEL CORTE DE LA FASE

Si se coloca sobre el plano x un objeto sin absorción (totalmente transparente), puede expresarse como:

$$O(x) = e^{i2\pi\phi(x)} \quad (2.91)$$

siendo $\phi(x)$ una función real. Tal objeto se conoce como objeto de fase. Su correspondiente irradiancia,

$$I_0(x) = |O(x)|^2 = 1 \quad (2.92)$$

consiste en un campo uniformemente iluminado, por lo cual, la distribución $\phi(x)$ no es detectable.

Un caso especial ocurre cuando $|\phi(x)| < 1$ y $|\phi(x)|^2 \ll 1$, que deriva en el tipo de objetos transparentes conocidos como objetos de fase delgada, admiten la aproximación:

$$e^{i2\pi\phi(x)} \approx 1 + i2\pi\phi(x) \quad (2.93)$$

De acuerdo a la expresión anterior, los objetos de fase delgada constan de una luz de fondo uniforme superpuesta con variaciones $\phi(x)$ manteniendo una relación de fase de $\pi/2$ ($i = e^{i\pi/2}$). La iradiancia correspondiente resulta:

$$\begin{aligned} |1 + i2\pi\phi(x)|^2 &= 1 + 4\pi^2|\phi(x)|^2 + 2\Re\{i2\pi\phi(x)\} \\ &\approx 1 \end{aligned} \quad (2.94)$$

ésto significa que tal relación de fase no puede proporcionar un término de interferencia entre luz de fondo y variaciones $\phi(x)$. Aunque los dos términos se encuentran superpuestos sobre el plano del objeto, en el plano de las frecuencias se pueden separar porque la luz de fondo se concentraría en un punto, mientras que las variaciones se distribuirían en todo el plano. Colocando entonces un retardador de fase apropiado que afecte una región pequeña alrededor de origen frecuencial, puede alterarse la fase para obtener un término de interferencia que revele las variaciones $\phi(x)$. Primero, suponiendo un retardador sin ancho apreciable, puede proponerse la función de pupila.

$$P(\mu) = 1 - \delta(\mu) \pm i\delta(\mu) \quad (2.95)$$

según retarde (+) o adelante (-). Aplicando el filtro al espectro del objeto (ec.(2.93)), resulta el siguiente espectro modificado

$$\begin{aligned} O'(\mu) &= P(\mu)O(\mu) \\ &= [1 - \delta(\mu) \pm i\delta(\mu)][\delta(\mu) + i2\pi\tilde{\phi}(\mu)] \\ &= \delta(\mu) + i2\pi\tilde{\phi}(\mu) - \delta^2(\mu) - i2\pi\delta(\mu)\tilde{\phi}(\mu) \pm i\delta^2(\mu) \mp 2\pi\delta(\mu)\tilde{\phi}(\mu) \\ &= \mp 2\pi\delta(\mu)\tilde{\phi}(0) + i[\pm\delta(\mu) + 2\pi\tilde{\phi}(\mu) - 2\pi\delta(\mu)\tilde{\phi}(0)] \end{aligned} \quad (2.96)$$

donde $\tilde{\phi} = \mathcal{F}\{\phi(x)\}$, $\delta^2(\mu) = \delta(\mu)$, y $\delta(\mu)\tilde{\phi}(\mu) = \delta(\mu)\tilde{\phi}(0)$. Entonces, en el plano imagen x' :

$$\begin{aligned} O'(x') &= \mathcal{F}\{O'(\mu)\} \\ &= \mp 2\pi\tilde{\phi}(0) + i[\pm 1 + 2\pi\phi(-x') - 2\pi\tilde{\phi}(0)] \end{aligned} \quad (2.97)$$

teniendo que la amplitud promedio $\bar{\phi} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi(x)$ aparece aportando contribuciones constantes. La irradiancia en la imagen resulta ser:

$$\begin{aligned} I'_0(x') &= |O'(x')|^2 = 4\pi^2\tilde{\phi}^2(0) + |1 \pm 2\pi[\phi(-x') - \bar{\phi}]|^2 \\ &\cong 1 + 4\pi^2|\phi(-x') - \bar{\phi}|^2 \pm 4\pi\Re\{\phi(-x') - \bar{\phi}\} \\ &\approx 1 \pm 4\pi[\phi(-x') - \bar{\phi}] \end{aligned} \quad (2.98)$$

Al usar el signo $+$ (retraso), se tiene constrañte positivo; con signo $-$ (adelanto), se tiene constrañte negativo. La técnica se conoce como de constrañte de fase y contribuye un ejemplo de la modulación del orden cero.

2.4. Derivación de la Imagen y Operaciones Relacionadas

2.4.1. La Derivada y la Transformada de Fourier

Considérese la operación de derivación, respecto de x , aplicada a una función objeto $O(x)$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}O(x) &= \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \tilde{O}(\mu) e^{i2|\mu|x} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \tilde{O}(\mu) \frac{\partial}{\partial x} e^{i2\pi\mu x} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \tilde{O}(\mu) (i2\pi\mu) e^{i2\pi\mu x} \tag{2.99}
\end{aligned}$$

así, tomando $i2\pi\mu\tilde{O}(\mu) = \tilde{O}_D(\mu)$, se concluye que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dx}O(x)\right\} &= \tilde{O}_D(\mu) \\
&= i2\pi\mu\tilde{O}(\mu) \tag{2.100}
\end{aligned}$$

Análogamente, puede verificarse que

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n}{dx^n}O(x)\right\} = (i2\pi\mu)^n \tilde{O}(\mu) \tag{2.101}$$

que es la base para técnicas de solución de ecuaciones diferenciales mediante transformadas de Fourier y polinomios de μ .

subsection APLICACIÓN EN OBJETOS DE FASE

La derivación puede efectuarse al tener un filtro con transmitancia:

$$P(\mu) = \alpha_d \mu \tag{2.102}$$

lo cual proporcionaría un espectro modificado:

$$\tilde{O}'(\mu) = a_d \frac{1}{i2\pi} i2\pi\mu \tilde{O}(\mu) \quad (2.103)$$

que tomará una imagen:

$$\tilde{O}'(x') = \frac{a_d}{i2\pi} \left[\frac{d}{dx} O(x') \right] \quad (2.104)$$

Puesto que el valor de la derivada es alto en los cambios bruscos, es de esperarse un énfasis en los bordes del objeto (dirección x). Por otro lado, la derivación también puede usarse para visualizar objetos fase como se describe:

$$e^{i2\pi\phi(x)}$$

Su derivada es:

$$O'(x') = \frac{a_d}{i2\pi} \frac{dO(x')}{dx'} = a_d \frac{i2\pi}{i2\pi} \frac{d}{dx} \phi(x') e^{i2\pi\phi(x')} \quad (2.105)$$

por lo cual, la irradiancia correspondiente es:

$$I(x') = a_d \left| \frac{d}{dx'} \phi(x') \right|^2 \neq 1 \quad (2.106)$$

Ésto revela la existencia de variaciones, de las cuales se obtiene la derivada. En principio la $\phi(x')$ podría recuperarse de:

$$\int \sqrt{I} dx' \longrightarrow \phi \quad (2.107)$$

2.4.2. La Función de Transferencia Coherente

Como se indica en la ec. (??); la imagen formada por un sistema telecéntrico puede escribirse como:

$$\begin{aligned} O'(x) &= \mathcal{F}\{P(\mu)\tilde{O}(\mu)\} \\ &= \mathcal{F}\{P(\mu)\} * \mathcal{F}\{\tilde{O}(\mu)\} \\ &= h(x) * O(x) \end{aligned} \tag{2.108}$$

$$\tag{2.109}$$

donde se ha usado el teorema de convolución y se ha definido a:

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1}\{P(\mu)\} \tag{2.110}$$

como una función característica del sistema formado de imágenes, conocidas como respuesta impulso coherente del sistema.

A la función de pupila también se le conoce como función de transferencias coherente. El apelativo usado para designar a $h(x)$ proviene del siguiente hecho.

Si $O(x) = \delta(x - x_0)$, su imagen será, de acuerdo a la ecuación (2.108),

$$\begin{aligned} O'(x) &= h(x) * \delta(x - x_0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi h(\xi)\delta(x - x_0 - \xi) \\ &= h(x - x_0). \end{aligned} \tag{2.111}$$

Que no es más que la respuesta impulso centrada en la posición de la imagen geométrica del objeto.

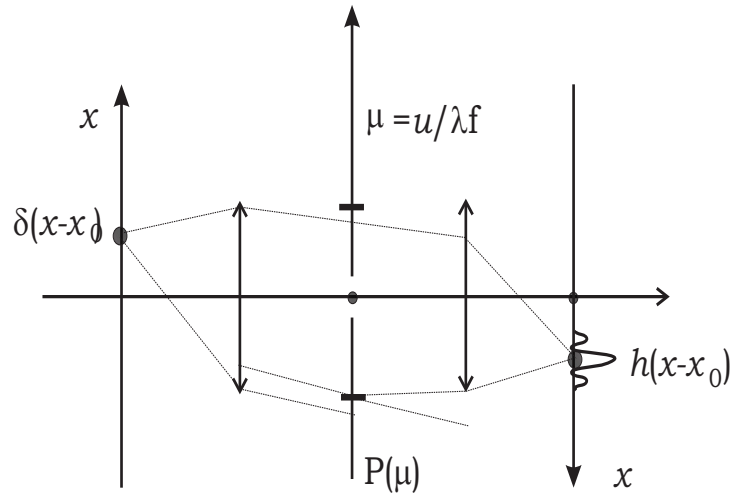


Figura 2.14: Formación de imágenes

Así, la formación de una imagen puede verse como la formación de una replica del objeto, sustituyendo cada punto por una respuesta impulso (Fig. 2.14). Se puede intuir que la imagen será más fiel al objeto en la medida en que $h(x)$ se aproxime a una $\delta(x)$. Claramente, el fenómeno de difracción impide alcanzar la igualdad.

1. LA RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA ÓPTICO

La función respuesta a un impulso, o función de esparcimiento de punto $h(x)$, impone un límite a la capacidad de un sistema óptico, para separar dos fuentes puntuales. Considérese a las imágenes de dos fuentes puntuales, en irradiancia, formadas por un sistema óptico con función de transferencia coherente $P(\xi) = \text{rect}(\xi)$.

Si las fuentes se hallan en las posiciones $x = x_1$ y $x = x_2$ respectivamente, y si tienen igual amplitud, sus imágenes serían como se muestra en la Fig. 2.15. En ella se esquematiza la situación especial en que el

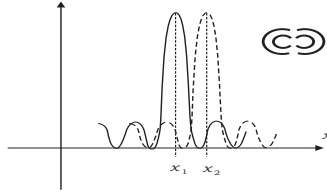


Figura 2.15: Resolución de un sistema óptico para dos fuentes cercanas

mínimo de una mancha de difracción coincide con el máximo de la otra mancha. Esta situación especial se considera el límite, o la distancia de separación $\Delta x = x_2 - x_1$ mínima para distinguir dos puntos. Distancias de separación Δx menores harán que dos puntos se confundan en uno. La distancia mínima Δx_{min} será entonces la separación entre el máximo central y el primer mínimo de la función $senc[a_\omega x / \lambda f]$. Esto conduce a que $\Delta x = \lambda f / a_\omega$, con a_ω el ancho de la pupila. Para el caso de apertura circular, de acuerdo con la sec. 2.2.4. $2R \frac{\Delta x}{\lambda f} = 1,22$; así:

$$\Delta x_{min} = 1,22 \lambda f / D = 1,22 \lambda f_\# \quad (2.112)$$

Con $D = 2R$ el diámetro de la pupila. El criterio de resolución descrito tiene motivaciones emanadas de observaciones astronómicas y se conoce como criterio de Rayleigh.

2. SISTEMAS EQUIVALENTES

En general de la ecuación (2.111) la irradiancia en la imagen es:

$$I'(x) = |h(x) * O(x)|^2, \quad (2.113)$$

expresión válida para cualquier sistema formado de imágenes isoplanático ($h(x, x'') = h(x, x'')$, x'' coordenada imagen) y lineal. Esta propiedad

la poseen también los sistemas que no sean telecéntricos. Puede aplicarse a una sola lente con posiciones conjugadas. En este caso, puede definirse un sistema $4f$ telecéntrico equivalente. Habría que introducir cierta escala, como se muestra en la Fig. 2.16.

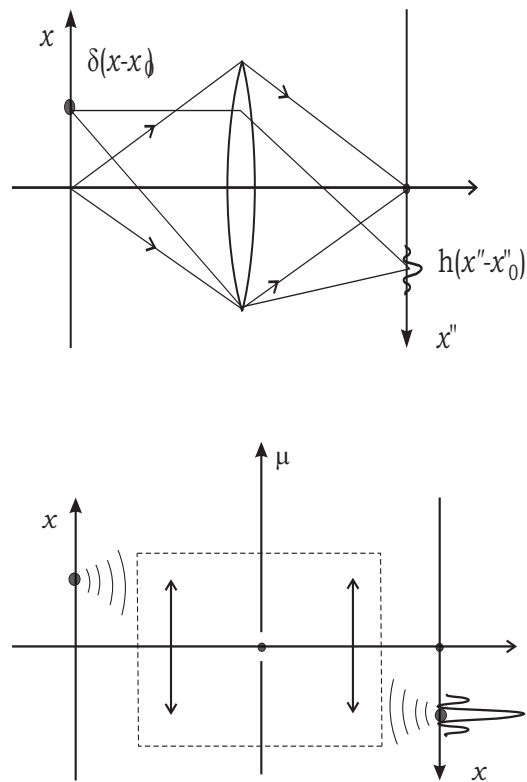


Figura 2.16: Sistemas equivalentes

2.5. Anchos de Funciones y de Transformadas de Fourier

Es conveniente contar con procedimientos que permitan conocer la localización de una función y la de su transformada. Por ejemplo, algunos sistemas ópticos pueden sufrir de efectos aleatorios determinantes de movimiento azarosos de la respuesta impulso correspondiente. También es deseable conocer la extensión de una función en cualquiera de los espacios. El efecto observado en previos ejemplos y consiste en relaciones inversamente proporcionales entre anchos de objeto y de su transformada de Fourier puede analizarse. Por otra parte, algunas cantidades invariantes, como la energía o potencia total, son derivables en términos de anchuras apropiadamente definidas. Finalmente se requieren de criterios de acotación de integrales para la discusión de algunas propiedades relacionadas con la localización de las funciones, por lo cual se abordará la llamada desigualdad de Schwartz en estas secciones.

2.5.1. Anchura Equivalente

Una cantidad que refleja de una anchura de una función $O(x)$ puede definirse, para $O(0) \neq 0$, como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx O(x)/O(0), \quad (2.114)$$

la cual puede asociarse con un rectángulo de altura $O(0)$ e igual área que la definida por $O(x)$. Puede verse que se cumple la propiedad:

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx O(x)}{O(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx O(x) e^{-i2\pi\mu x} \Big|_{\mu=0}}{\int_{-\infty}^{\infty} d\mu \tilde{O}(\mu) e^{+i2\pi\mu x} \Big|_{x=0}} = \frac{\tilde{O}(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} d\mu \tilde{O}(\mu)}, \quad (2.115)$$

lo cual relaciona inversamente a los anchos equivalentes de $O(x)$ y $\tilde{O}(\mu)$.

2.5.2. Momentos de Orden n para una Función

La integral en el numerador de la ec. (2.114) es el momento de orden cero, un caso especial de la expresión (n=0):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^n O(x) = \frac{\tilde{f}^{(n)}(0)}{(-i2\pi)^n}, \quad (2.116)$$

donde $\tilde{f}^{(n)}(\mu) = d^n/d\mu^n \tilde{f}(\mu)$. El momento cero equivale al promedio de la función $O(x)$ y su valor es $\tilde{f}(0)$. El primer momento normalizado por el momento cero, se conoce como centroide y se denota por $\langle x \rangle$. Entonces,

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx x O(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx O(x)}, \quad (2.117)$$

que puede reescribirse como:

$$\langle x \rangle = \tilde{O}'(0) / [i2\pi\tilde{O}(0)], \quad (2.118)$$

siendo $\tilde{O}'(\mu) = d/d\mu \tilde{O}(\mu)$. La normalización es válida para $\tilde{O}(0) \neq 0$.

2.5.3. Contenido Energético, Centro de Gravedad y Valores Cuadráticos Medios

Como se ha visto en secciones anteriores, las funciones $O(x)$ representan amplitudes de campo eléctrico y, puesto que pueden asumir valores negativos (en general complejos), de las definiciones de las secciones precedentes. Los correspondientes módulos cuadrados no poseen ese problema y se encuentran relacionados con la potencia promedio. Por esa razón, es útil definir las siguientes cantidades; el contenido energético es el momento de orden cero de $|O(x)|^2$, es denotado como:

$$\|O\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx O(x)O^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx |O(x)|^2; \quad (2.119)$$

el centro de gravedad del área bajo $|O(x)|^2$ es el centroide de $|O(x)|^2$, o sea,

$$\bar{x} = \frac{1}{\|O\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx x |O(x)|^2; \quad (2.120)$$

el valor cuadrático medio $\langle x^2 \rangle$, que se toma como medida del ancho también, es el momento segundo normalizado, ésto es:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 O(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx O(x)} = -\frac{\tilde{O}''(0)}{4\pi^2 \tilde{O}(0)}, \quad (2.121)$$

definición que aplicada a funciones no centradas en el origen de x , conduce a la varianza:

$$\begin{aligned}
\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\
&= -\frac{\tilde{O}''(0)}{4\pi\tilde{O}(0)} + \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{\tilde{O}'(0)}{\tilde{O}(0)} \right]^2. \quad (2.122)
\end{aligned}$$

La varianza de $|O(x)|^2$ es conocida también como dispersión de la señal y se escribe como $(\Delta x)^2$. Así,

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{\|O\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (x - \bar{x})^2 |O(x)|^2. \quad (2.123)$$

En el espacio de las frecuencias proceden las respectivas definiciones, y son:

$$\|\tilde{O}\|^2 = \frac{1}{\|\tilde{O}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu |\tilde{O}(\mu)|^2, \quad (2.124)$$

$$\bar{\mu} = \frac{1}{\|\tilde{O}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \mu |\tilde{O}(\mu)|^2, \quad (2.125)$$

$$\langle \mu^2 \rangle = \frac{1}{\|\tilde{O}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \mu^2 |\tilde{O}(\mu)|^2, \quad (2.126)$$

$$\langle (\mu - \langle \mu \rangle)^2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle - \langle \mu \rangle^2, \quad (2.127)$$

$$(\Delta \mu)^2 = \frac{1}{\|\tilde{O}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu (\mu - \bar{\mu})^2 |\tilde{O}(\mu)|^2. \quad (2.128)$$

2.5.4. Relación de Parseval

Una cantidad invariante ante transformada de Fourier puede hallarse considerando primero a la integral siguiente:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dx O_1(x)O_2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx O_1(x)O_2(x)e^{-i2\pi\mu x} \Big|_{\mu=0} \\
 &= \mathcal{F}\{O_1(x)O_2(x)\}_{\mu=0} \\
 &= \tilde{O}(\mu) * \tilde{O}_2(\mu) \Big|_{\mu=0} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tilde{O}_1(\xi)\tilde{O}_2(\mu - \xi) \Big|_{\mu=0} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tilde{O}_1(\xi)\tilde{O}_2(-\xi)
 \end{aligned} \tag{2.129}$$

lo que indica que dos operaciones, cada una realizada en planos diferentes, objeto y frecuencia, proporcionan idéntico resultado. Nótese que el valor de la operación relevante nuevamente es en $\mu = 0$, tal como en subsecciones anteriores. Para considerar potencias se observa el caso en que $O_1(x) = O(x)$ y $O_2(x) = O^*(x)$. La ecuación 2.129 se reduce a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |O(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tilde{O}(\xi)\tilde{O}^*(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu |\tilde{O}(\mu)|^2, \tag{2.130}$$

donde se empleó $\mathcal{F}\{O^*(x)\} = \tilde{O}^*(-\mu)$ y $\mu \rightarrow \xi$. El resultado puede escribirse como:

$$\|O\|^2 = \|\tilde{O}\|^2, \tag{2.131}$$

y se conoce como igualdad de Parseval. Usualmente, se interpreta como la identidad de contenidos energéticos en pleno objeto y frecuencial.

2.5.5. Desigualdad de Schwarz

Supóngase ahora una función $S_\omega(\epsilon)$ dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx [f_1(x) + \epsilon f_2(x)]^2, \quad (2.132)$$

entonces,

$$S_\omega(\epsilon) = a_S \epsilon^2 + b_S \epsilon + c_S \quad (2.133)$$

con,

$$a_S = \int_{-\infty}^{\infty} dx f_2^2(x), \quad b_S = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx f_1(x) f_2(x), \quad c_S = \int_{-\infty}^{\infty} dx f_1^2(x). \quad (2.134)$$

Si $f_1(x)$, $f_2(x)$ y ϵ se limitan a asumir sólo valores reales, $S_\omega(\epsilon) > 0$ excluyendo el caso $f_1(x) \propto f_2(x)$ para toda x . Para que la condición se garantice, el discriminante debe cumplir:

$$b_S^2 - 4a_S c_S \leq 0,$$

o bien,

$$a_S c_S \geq \frac{1}{4} b_S^2. \quad (2.135)$$

Sustituyendo las integrales correspondientes, se obtiene la llamada desigualdad de Schwarz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f_2^2(x) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx f_1^2(x) \geq \frac{1}{4} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx f_1(x) f_2(x) \right]^2. \quad (2.136)$$

2.5.6. Relaciones de Incertidumbre

Las relaciones de la función objeto y su transformada de Fourier han aparecido como inversamente proporcionales en ejemplos anteriores. Para mostrar que es una propiedad muy general, pueden emplearse las varianzas, ecs (2.123) y (2.128). Antes de analizar el comportamiento de Δx y $\Delta \mu$, conviene notar algunas propiedades concernientes a desplazamientos de funciones objeto y a funciones reales.

DESPLAZAMIENTO Y CONTENIDO ENERGÉTICO

Si una función objeto $O(x)$ sufre un desplazamiento a un punto x_0 , se tiene una función $O_0(x) = O(x - x_0)$. Entonces,

$$\|O_0\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |O_0(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |O(x-x_0)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx' |O(x')|^2 = \|O\|^2,$$

donde $x' = x - x_0$. Los contenidos energéticos no dependen de la posición del objeto (o del sistema coordinado transformado por traslación). En correspondencia las transformadas respectivas cumplen $\tilde{O}_0(\mu) = \exp[-i2\pi\mu x_0]\tilde{O}(\mu)$ (sec. ??); entonces,

$$|\tilde{O}_0(\mu)|^2 = |\tilde{O}(\mu)|^2$$

y el contenido energético también independiente de desplazamiento alguno en el objeto. Esto se halla en concordancia también con la igualdad de Parseval, ec. (2.131).

FUNCIONES REALES Y ANCHURAS

Puesto que las funciones $f(x) = |O(x)|^2$ involucrados en los contenidos energéticos son reales. Se tiene que $\tilde{f}(\mu)$ es una función hermitiana. Examinando la ec. (??) con $O_{AH} = f_{AH}$ y $O_H = f_H$, para este caso las partes imaginarias se anulan y puede verificarse que:

$$|\tilde{f}(\mu)|^2 = [\Re\{\tilde{f}(\mu)\}]^2 + [\Im\{\tilde{f}(\mu)\}]^2 = |\tilde{f}(-\mu)|^2, \quad (2.137)$$

razón por la cual los momentos impares de $|\tilde{O}(\mu)|^2 = |\tilde{f}(\mu)|$ se anulan. Como una consecuencia particular, se tiene que:

$$\bar{\mu} = 0, \quad (2.138)$$

y por tanto,

$$(\Delta\mu)^2 = \frac{1}{\|\tilde{O}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \mu^2 |\tilde{O}(\mu)|^2. \quad (2.139)$$

Adicionalmente, el momento segundo normalizado correspondiente a una función desplazamiento en el plano objeto está dado por la misma ec. (2.139).

RELACIONES DE INCERTIDUMBRE

Se considera al producto $(\Delta x)^2(\Delta\mu)^2$ usando las definiciones de las ecuaciones (2.123) y (2.128). Refiriéndose a los contenidos energéticos, puede adoptarse la simplificación de la ec.(2.139). Así,

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2(\Delta\mu)^2 &= \frac{1}{\|O\|^2} \frac{1}{\|\tilde{O}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (x - \bar{x})^2 |O(x)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \mu^2 |\tilde{O}(\mu)|^2 \\ &= \frac{1}{\|O\|^4} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 |O(x)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \mu^2 |\tilde{O}(\mu)|^2, \end{aligned} \quad (2.140)$$

donde se ha tomado $\bar{x} = 0$ (o bien, se ha usado la traslación $x' = x - \bar{x}$ para $O(x)$). Por otra parte, por la igualdad de Parseval y la ec.(2.100),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx |O'(x)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu | -i2\pi\mu\tilde{O}(\mu) |^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu 4\pi^2\mu^2 |\tilde{O}(\mu)|^2, \end{aligned} \quad (2.141)$$

de donde, por substitución del segundo factor en la ec.(2.140),

$$(\Delta x)^2(\Delta\mu)^2 = \frac{1}{\|O\|^4} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 |O(x)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx |O'(x)|^2. \quad (2.142)$$

Por la desigualdad de Schwarz,

$$(\Delta x)^2(\Delta\mu)^2 \geq \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\|O\|^4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 f(x) f'(x) \right)^2.$$

Pero,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx x f(x) f'(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} [dx f'(x)] x f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} df(x) x f(x) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx [x f'(x) + f(x)] f(x), \end{aligned}$$

de donde,

$$\int_{-\infty}^{\infty} df(x) x f(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx f^2(x) = -\frac{1}{2} \|f\|^2,$$

por lo cual,

$$(\Delta x)^2(\Delta \mu)^2 \geq \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\|f\|^2} \left| \frac{1}{4} \|f\|^2 \right|^2 = \frac{1}{16\pi^2},$$

o bien:

$$\Delta x \Delta \mu \geq 1/4\pi.$$

Esta relación confirma la relación inversa entre anchos de funciones objeto y su transformada de Fourier.

2.6. Conclusiones

Se establecieron los conceptos sobre óptica física necesarios, formación de imágenes en 1-D, teoría de difracción y transformada de Fourier unidimensional y bidimensional, para comprender los pormenores de la técnica de corrimiento de fase simultáneo usando elementos difractivos. Para analizar las rejillas de amplitud se modelan como rejillas de Ronchi de perfil rectangular lo que simplifica su tratamiento matemático y permite concluir que los coeficientes de Fourier del espectro de la rejilla modularan en amplitud las replicas de los interferogramas.

Capítulo 3

Interferometría Heterodina

Los fundamentos de las mediciones interferométricas fueron establecidas principalmente por Albert A. Michelson en las últimas décadas del siglo XIX; la interferencia de la luz se fundamenta en la superposición de dos o más haces luminosos que satisfagan las condiciones necesarias de amplitud y fase para permitir la detección de un patrón de interferencia o interferograma. Este patrón se percibe como una serie de regiones claras y oscuras distribuidas sobre un plano de observación $I(x', y')$. La relación entre los valores de las fases relativas entre las ondas determinan si el área es brillante u oscura (un máximo o mínimo). Dado que dichas regiones adoptan la forma de bandas o franjas se habla de patrones de franjas. Uno de los problemas esenciales de la interferometría, consiste en determinar la distribución de fase entre los haces sobre la base de un patrón de franjas de interferencia, esto es, fundándose en las variaciones de la irradiancia a lo largo y ancho del campo de observación. La manera en que se modifica un patrón de interferencia dando paso a otro diferente, permite conocer también la evolución de la distribución de fase. Aunque mediante la interferometría se busca por lo general, determinar las propiedades ópticas del medio transmisor de los

haces que interfieren, el conocimiento relativo de la distribución de la fase no se limita a esto y proporciona, generalmente información diversa que depende de las circunstancias particulares en las que se realicen las mediciones por lo que éstas mediciones de fase se pueden asociar con parámetros físicos del sistema u objeto bajo estudio.

La determinación inteferométrica de diferencias de fase entre dos frentes de ondas luminosas, puede proporcionar la distribución de fase de uno de los frentes de ondas cuando se conoce la del segundo (haz de referencia). La precisión de una descripción semejante ha estado restringida a algunas fracciones de longitud de la onda empleada. Esto se debe a que la información de la fase debe extraerse de una distribución espacial de irradiancias que no solo es afectada por la fase misma sino también por los cambios de amplitud que cada uno de los frentes de ondas posean en el espacio. Por otro lado que la fase sea particularmente confiable a partir de máximos y mínimos del patrón de interferencia, favorece una estrategia de muestreo, en la cual los puntos de medición resultan separados en intervalos iguales de valores de fase. Estos inconvenientes se pueden superar si se introduce una fase adicional en las ondas que interfieren de manera que module el patrón de interferencia en forma conveniente para su procesamiento posterior. La modulación del patrón puede ser temporal o espacial. La modulación espacial da lugar a los métodos de procesamiento asociados con el nombre de Fourier y fundamentados en el filtraje alrededor de alguno de los órdenes de difracción del patrón modulado. De esta manera la fase introducida actúa como una frecuencia portadora espacial [1]. La modulación temporal del patrón de franjas puede conseguirse introduciendo un pequeño corrimiento de la frecuencia de uno de los dos haces. La modulación resulta entonces sinusoidal en cualquier punto del patrón y vibra con una frecuencia igual a las diferencias de frecuencias introducida entre los haces [2]. La irradiancia sobre un punto fijo del patrón varía temporalmente

con una fase determinada por la diferencia de fase entre los haces sobre ese mismo punto. De ese modo, una diferencia de fase óptica puede aparecer como una diferencia de fase entre dos señales eléctricas siempre que se conviertan los cambios de irradiancia en señales eléctricas de manera proporcional. Este procedimiento permite medir la fase en cualquier posición dentro del patrón de franjas con una precisión mayor que $2\pi/1000$ radianes [3] y se conoce como detección heterodina [4] o interferometría heterodina en contraposición a la interferometría estática, que no modula al patrón de franjas en modo alguno. El corrimiento del patrón de franjas puede realizarse también en forma discreta con algunas ventajas, tales como un tiempo reducido de procesamiento y el uso de un microprocesador [5]. Puesto que los cambios en irradiancia del patrón de franjas son causados por tres cantidades desconocidas, se establece un sistema de ecuaciones con tres incógnitas por lo que el número mínimo necesario de corrimientos discretos de fase es tres [6]. Los valores de los tres corrimientos se calculan con las formulas de tangente inversas [7], para reducir el error en el cálculo introducido por el piezoeléctrico es conveniente introducir cuatro y cinco corrimientos [7,8].

La precisión correspondiente a la determinación de las diferencias de fase entre dos frentes de onda, puede mejorarse incorporando una fase f adicional apropiada en una de las ondas que interfieren. La Fig. 3.1 ilustra esta técnica. El arreglo es un interferómetro de Twyman-Green, uno de cuyos espejos permanece fijo (estando eventualmente junto a otro de referencia, para producir un patrón adicional y evaluar el corrimiento efectivo del transductor al tiempo que se lee el principal [9]), mientras que el otro se encuentra montado sobre un apilamiento piezoeléctrico. El espejo sufrirá entonces translaciones acordes con el voltaje aplicado, produciendo corrimientos de fase de la onda que ahí se refleja, suponiendo un desplazamiento lineal en el espejo como respuesta a

un voltaje aplicado dado, cuando el voltaje se incrementa linealmente con el tiempo, la irradiancia sobre un punto del plano de observación varía sinusoidalmente. Esta modulación particular, junto con la correspondiente detección de los cambios de irradiancia, recibe el nombre de interferometría heterodina. Cuando el voltaje aplicado es sinusoidal y de pequeña amplitud, se obtiene lo que en la literatura se conoce como la técnica de amarre de fase.

Si el voltaje aplicado se incrementa por intervalos, las franjas del patrón se desplazan también por etapas. Al tener un cierto número n de intervalos, se produce un número igual de patrones de interferencia. Sobre un punto fijo del plano de observación, y mediante los n valores distintos de la irradiancia, correspondientes a cada patrón, puede definirse un sistema lineal de ecuaciones, con auxilio del valor del corrimiento inducido de fase respectivo. En este sistema de ecuaciones, las incógnitas son además de la fase, los cambios espaciales de las amplitudes de cada onda que interfiere (o, equivalentemente, la irradiancia promedio del patrón y la modulación de las franjas). Este método se conoce como de corrimiento de fase.

Alternativamente, en el método de paquete de integración (*integrated bucket*) la detección se realiza continuamente por intervalos para construir un sistema lineal de ecuaciones similar al método anterior. La diferencia fundamental entre los métodos heterodinios y cuasi heterodinios consiste en la tendencia de estos últimos a un procesamiento esencialmente numérico. Ya que las diferencias son pequeñas algunos esquemas pueden realizarse tanto en versiones heterodinias como en cuasi heterodinias adoptando ligeros cambios.

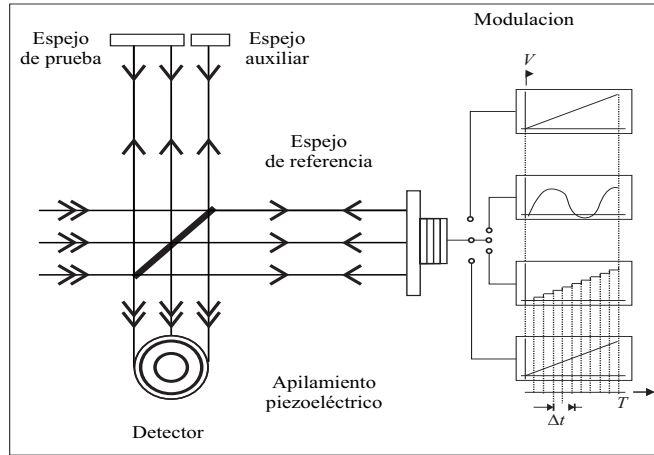


Figura 3.1: interferómetro de dos caminos con modulador piezoeléctrico.

3.1. Interferometría de Corrimiento de Fase

Sabemos que en la intensidad de un patrón de interferencia existen tres cantidades desconocidas (a , m y $\Delta\phi$). Para calcular la fase es necesario tener al menos tres intensidades con los mismos tres parámetros desconocidos para poder calcular la fase. Mediante la introducción de corrimientos conocidos en la fase de uno de haces, se obtienen tres interferogramas independientes, lo que implica tener tres ecuaciones con tres incógnitas y tres parámetros conocidos (las fases) por punto. Si,

$$I_i = a\{1 + m\cos(\Delta\phi + f_i)\} \quad (3.1)$$

con $i = 1, 2, 3$. Si los valores de f_i son $0^\circ, 120^\circ$ y -120° , se tendrá para un punto en particular:

$$\begin{aligned}
I_1 &= a\{1 + m\cos\Delta\phi\} \\
I_2 &= a\{1 - (m/2)\cos\Delta\phi - (m\sqrt{3}/2)\sen\Delta\phi\} \\
I_3 &= a\{1 - (m/2)\cos\Delta\phi + (m\sqrt{3}/2)\sen\Delta\phi\}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

resolviendo para $\Delta\phi$ tenemos que:

$$\tan\Delta\phi = \frac{\sqrt{3}(I_3 - I_2)}{2I_1 - I_2 - I_3}. \tag{3.3}$$

Basta emplear la función tangente inversa para determinar $\Delta\phi$ módulo π .

3.1.1. Método de Tres Corrimientos

Al recorrer la fase en la Ec. 1.1 por tres valores de f_i con $i = 1, 2, 3$, se puede mostrar que la fase $\Delta\phi$ módulo π está dada por:

$$\tan\Delta\phi = \frac{(I_3 - I_2)\cos f_1 + (I_1 - I_3)\cos f_2 + (I_2 - I_1)\cos f_3}{(I_3 - I_2)\sen f_1 + (I_1 - I_3)\sen f_2 + (I_2 - I_1)\sen f_3} \tag{3.4}$$

Donde se verifica la ec. (3.3) como un caso particular. Sustituyendo $\Delta\phi$ en la ec. (3.1), la fase puede determinarse módulo 2π . La fase total se evalúa mediante la continuidad de la función fase bajo la suposición de que varía en menos de π entre valores adyacentes [10,11]. Este procedimiento se extiende a más de tres corrimientos (n), con $f_i = 2\pi(i-1)/n$, hallándose en la Ref. [12] la expresión correspondiente. Las fórmulas

que proporcionan $\Delta\phi$ se conocen como de arco tangente. El muestreo de fase requiere de un intervalo constante entre 0 y 2π debido a que es equivalente al análisis de Transformada discreta de Fourier [13]. El método de Carré no necesariamente se hace entre 0 y 2π , aunque los intervalos deben ser idénticos. El método de Grivenkamp no requiere de intervalos igualmente espaciados, aunque cada corrimiento de fase debe medirse [10]. El error involucrado en los métodos de intervalos diferentes se ha estudiado en la Ref. [13]

3.1.2. Método de Cuatro Corrimientos

Existen dos problemas básicos en el método de tres corrimientos relacionados con la exactitud de los mismos. Por una parte, se desconoce la sensibilidad del aplanamiento piezoeléctrico que controla la posición del espejo con el que se producen tales corrimientos. Por otra, la respuesta del apilamiento varia a lo largo de su diámetro con lo que se puede tener una inclinación resultando en un corrimiento de fase variable a lo largo de la pupila. Estos problemas pueden superarse usando un algoritmo que evalúe implícitamente los corrimientos reales en cada punto y los utilice para calcular los valores de la diferencia de fase original entre los haces. La forma más simple de tal algoritmo, requiere de cuatro mediciones de intensidad en cada punto correspondiente a $n = 4$. Si los corrimientos se realizan a intervalos iguales de modo que se alcancen los valores -3α , $-\alpha$, α , 3α , se obtiene [5]:

$$\tan^2(\alpha) = \frac{3I_2 - 3I_3 - I_1 + I_4}{I_1 - I_2 - I_3 + I_4} \quad (3.5)$$

$$\tan^2(\Delta\phi) = \frac{(3I_2 - 3I_3 - I_1 + I_4)(I_1 + I_2 - I_3 - I_4)}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)^2} \quad (3.6)$$

conocidas como las fórmulas de Carré. En este caso no se necesita un muestreo de 0 a 2π , aunque el intervalo debe ser aún constante [14]. El algoritmo puede disminuir el error ocasionado cuando n no es un entero [8], aunque también se pueden promediar dos mediciones en las cuales la diferencia de fase inicial entre las dos es aproximadamente 90° [10].

3.2. Interferometría por Paquete de Integración

Con el propósito de reducir el tiempo empleado en el corrimiento de fase por pasos para la adquisición de datos, se ha sugerido el empleo de un desplazamiento lineal continuo de fase durante un intervalo T dentro del que se realizan n mediciones de intensidad a lo largo de intervalos $\Delta t = T/n$. La intensidad registrada durante el i -ésimo intervalo Δt_i está expresada por la ec. (3.6) en el caso de un corrimiento de fase en forma de rampa. Cuando se incluye un término cuadrático para representar no linealidades del espejo de referencia del tipo:

$$f'(t) = \phi_0 + \frac{2\pi ct}{T} + \frac{2\pi dt^2}{T^2} \quad (3.7)$$

donde ϕ_0 es la fase inicial, c es la constante de calibración y d describe la no linealidad, la intensidad resulta ser:

$$I_{(i)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{(i-1)\Delta t}^{(i)\Delta t} dt a \left[1 + m \cos \left(\phi_0 + \frac{2\pi ct}{T} + \frac{2\pi dt^2}{T^2} \right) \right] \quad (3.8)$$

expresión que puede calcularse empleando las integrales de Fresnel o bien, si $d \ll 1$, sus expresiones asintóticas [8]. Cuando $f'(t)$ es sinusoidal, las dimensiones involucran a las funciones de Bessel [10]. Las fases se calculan con las fórmulas de arco tangente o las de Carré empleando los n valores de intensidad.

3.2.1. Caso de Cuatro Iteraciones con Corrimiento Lineal

Para el caso de cuatro iteraciones se puede usar la formula de arco tangente:

$$\Delta\phi = \tan^{-1} \frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} \quad (3.9)$$

Sustituyendo en esta fórmula los valores de intensidad a que da lugar la integral de la ec.(3.8), se obtiene una fase $\Delta\phi$ que difiere de la inicial ϕ_0 . Variando el valor inicial de ϕ_0 entre 0° y 360° se obtiene el error $\Delta\phi - \phi_0$. Dicho error tiene características periódicas como frecuencia doble de las franjas de interferencia [8]. Por ello puede reducirse promediando los resultados que tengan una diferencia de fase aproximadamente de 90° . Esto implica trabajar con dos conjuntos de cuatro mediciones de intensidad cada uno y tales que la fase inicial del primer conjunto difiera de 90° de la fase inicial correspondiente al segundo. La técnica del promedio es válida tanto para las fórmulas de arco tangente como para las de Carré cuando la no linealidad este presente. Esto no ocurre para el caso de $n = 3$. Con $n = 4$, la técnica del promedio de dos grupos de mediciones con las fórmulas de arco tangente puede arrojar un error tan pequeño como las de Carré. Por eso resulta de interés la determinación del coeficiente cuadrático [8]. Desde el punto de vista del

error los métodos de corrimiento de fase y de paquete de integración no presentan una diferencia significativa.

3.3. Algoritmo Simétrico de $(N + 1)$ Interferogramas

Una expresión para extraer la fase teniendo $(N + 1)$ patrones de interferencia con un corrimiento de fase uniforme es la siguiente

$$\tan\phi = - \left(\frac{\sum_{i=1}^n I_i \sin(\alpha_i)}{\sum_{i=1}^n I_i \cos(\alpha_i)} \right) \quad (3.10)$$

donde $\alpha_i = 2\pi(i - 1)/N$

esta expresión es válida para todos los algoritmos con n corrimientos igualmente y uniformemente espaciados, el primer patrón tiene un corrimiento cero y está centrado en el origen, el último patrón tiene un corrimiento $n = N + 1$ que equivale a obtener una fase de 2π [13].

3.3.1. Algoritmo Simétrico de 5-Interferogramas, Schwider-Hariharan $(4 + 1)$

Este algoritmo fue descrito por Schwider et al. (1983) y posteriormente por Hariharan en 1987, retomando la ec. (3.10), si los corrimientos son de 90° , se obtendrá el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
I_1 &= a + b\cos(\Delta\phi) \\
I_2 &= a + b\cos(\Delta\phi + 90^\circ) \\
I_3 &= a + b\cos(\Delta\phi + 180^\circ) \\
I_4 &= a + b\cos(\Delta\phi + 270^\circ) \\
I_5 &= a + b\cos(\Delta\phi + 360^\circ)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

resolviendo para $\Delta\phi$ obtenemos que:

$$\Delta\phi = \tan^{-1} \left(-\frac{I_2 - I_4}{\frac{1}{2}I_1 - I_3 + \frac{1}{2}I_5} \right) \tag{3.12}$$

3.3.2. Algoritmo Simétrico de 7-Interferogramas (6 + 1)

Este algoritmo fue descrito por Larkin en 1992. En este caso los corrimientos de fase se llevan a cabo en pasos de 60° a partir de la referencia de la misma manera que en el caso de seis corrimientos obtenemos un sistema de 7 ecuaciones, de las cuales se deriva la siguiente solución para la fase:

$$\Delta\phi = \tan^{-1} \left(-\sqrt{3} \frac{I_2 + I_3 - I_5 - I_6}{I_1 + I_2 - I_3 - 2I_4 - I_5 + I_6 + I_7} \right) \tag{3.13}$$

3.3.3. Algoritmo Simétrico de 9-Interferogramas (8 + 1)

De la misma forma se puede derivar una expresión para la fase usando $N = 8$, lo que da $n = (8 + 1)$ pasos de 45° cada uno a partir de la ec.

(3.10). De la misma forma se puede derivar una expresión para la fase usando $N = 8$, lo que da $n = (8+1)$ pasos de 45° cada uno a partir de la ec. (3.10). Los métodos de $N + 1$ interferogramas son de especial interés cuando el modulador de fase es un piezoeléctrico, ya que el último paso implica una máxima elongación en el apilamiento piezoeléctrico que controla el espejo. Esto requiere que el desplazamiento piezoeléctrico sea lineal en este rango. Sin embargo para cuando el desplazamiento se haga con modulación de polarización, el último corrimiento significa el reposicionamiento del polarizador lineal en el plano de detección a su posición inicial. El error entonces es de esperar sea menor en el segundo caso. Los métodos de $N + 1$ interferogramas se eligieron por la facilidad que presentan para ilustrar casos de más de cuatro interferogramas. Otros métodos de más de cuatro interferogramas de diferente tipo a los aquí abordados podrán desarrollarse similarmente.

3.4. Conclusiones

En este capítulo se establecieron los conceptos necesarios sobre interferometría y los métodos para procesar los patrones para extraer la información de la fase usando técnicas de corrimiento de fase por etapas.

Los métodos de corrimientos de fase comunes fueron expuestos así como los algoritmos conocidos con el propósito de mostrar que la selección del método de cuatro pasos para procesar la información es el adecuado para nuestra investigación, ya que se reduce a obtener cuatro imágenes experimentalmente en una sola captura de la cámara.

Capítulo 4

Interferometría de Corrimiento de Fase en una Sola Toma

La interferometría de corrimiento de fase es una técnica confiable para extraer la información de la fase de los interferogramas [15]. Esta técnica se basa en un sistema de ecuaciones lineales que utilice al menos tres diversos interferogramas obtenidos de la misma distribución de la fase [16]. Para obtener estos interferogramas, se tienen que introducir ciertos desplazamientos de fase entre el frente de onda desconocido y la onda de referencia.

Como se ha visto, para obtener N interferogramas, $N - 1$ corrimientos deben ser realizados. Para el caso de distribuciones estáticas de fase, se pueden obtener $N = 4$ interferogramas, haciendo cuatro tomas secuenciales. Sin embargo, cuando una distribución de la fase que varía en el tiempo debe ser extraída, se necesita una técnica conveniente capaz de conseguir los cuatro interferogramas con los corrimientos necesarios en una sola toma. Algunos acercamientos para realizar esta tarea se han demostrado ya. Uno de ellos es un método de corrimiento espacial de fase generado con un elemento holográfico, usado para medir las defor-

maciones transitorias con interferometría electrónica de moteado (ESPI por sus siglas en ingles) [17-18]. Para pruebas ópticas también se han usado arreglos de moduladores polarizantes bajo polarización circular, como se muestra en la Fig. 4.1 [19].

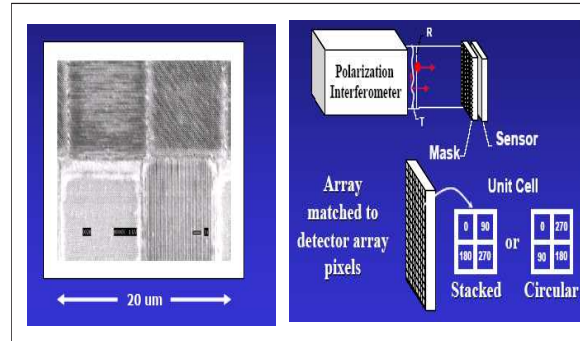


Figura 4.1: Micro polarizadores usados para generar cuatro corrimientos en una sola toma.

Sin embargo, aunque estos métodos son versátiles, algunos de ellos necesitan componentes especiales y/o de difícil fabricación [19], como el mostrado en la Fig. 1.2. La mayoría de estos métodos mencionados realizan los corrimientos de fase por medios ópticos, así que una ventaja de estos sistemas resulta ser su estabilidad mecánica [20]. En la mayoría de los casos se busca obtener varios patrones sobre los cuales se puedan generar corrimientos de fase por métodos simples y conocidos.

4.1. Modulación de Fase con Polarización

Como es bien conocido cuando usamos polarizaciones circulares cruzadas se puede modular al patrón de interferencia manipulando polarizadores lineales. Esta característica se incluirá en el sistema que se está probando, por lo que se necesita generar polarización circular.

Es conveniente usar placas retardadoras de $\lambda/4$ y diseñadas para la longitud de onda del láser usado. Sin embargo, se pueden usar placas retardadoras no diseñadas para operar con la longitud de onda del láser empleado, ya que, como se mostrará más adelante, se pueden obtener los mismos resultados haciendo las correcciones de posición angular del filtro adecuadas.

4.2. Patrones de Interferencia Generados con Polarizadores y Placas Retardadoras

En general, podemos calcular los corrimientos de fase producidos por la superposición de dos campos con un estado de polarización elíptico. De esta manera, si dos campos cuyos vectores de Jones están descritos de la siguiente manera:

$$\vec{J}_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha'} \end{pmatrix}, \vec{J}_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\alpha'} \end{pmatrix} e^{-i\phi(x,y)} \quad (4.1)$$

Se tienen dos vectores representando los estados de polarización de dos haces después de pasar por placas retardadoras que introducen un retardo en fase igual a $\pm\alpha'$. Cada haz entra a la respectiva placa con una polarización lineal a $\pm 45^\circ$ con respecto a el eje rápido de la placa retardadora. Los índices L y R denotan polarización a izquierda y derecha respectivamente, por lo que los vectores rotan en direcciones opuestas. En el camino de uno de los haces se ha colocado una distribución de fase $\phi(x, y)$. Cuando el campo de interferencia es observado colocando un polarizador lineal con su eje de transmisión a un ángulo ψ , tendremos,

$$\vec{J}' = J_l^\psi \vec{J}_L \cdot q, \vec{J}'' = J_l^\psi \vec{J}_R \cdot r \quad (4.2)$$

donde q y r son coeficientes arbitrarios, \vec{J}' , \vec{J}'' son los estados de polarización emergentes después de colocar el último polarizador. Si definimos la matriz de transmisión del polarizador lineal \vec{J}_ψ^l como:

$$\vec{J}_\psi^l = \begin{pmatrix} \cos^2\psi & \text{sen}\psi\cos\psi \\ \text{sen}\psi\cos\psi & \text{sen}^2\psi \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

se puede demostrar que el patrón de interferencia resultante se escribe como:

$$\begin{aligned} |\vec{J}_T|^2 &= |\vec{J}' + \vec{J}''|^2 \\ &= q^2 |\cos\psi + e^{i\alpha'} \text{sen}\psi|^2 + r^2 |\cos\psi + e^{-i\alpha'} \text{sen}\psi|^2 + \\ &\quad 2\text{Re}\{qr[\cos\psi + e^{-i\alpha'} \text{sen}\psi][\cos\psi + e^{i\alpha'} \text{sen}\psi]e^{\phi(x,y)}\} \\ &= (q^2 + r^2)1 + \text{sen}2\psi\cos\alpha' + (2qr)A(\psi, \alpha')\cos[\xi(\psi, \alpha') - \phi(x, y)] \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde:

$$\begin{aligned} A(\psi, \alpha') &= [1 + \text{sen}(2\psi)\cos(\alpha')] \\ \xi(\psi, \alpha') &= \tan^{-1} \left[\frac{\text{sen}2\psi\text{sen}\alpha' + \text{sen}^2\psi\text{sen}2\alpha'}{\cos^2\psi + \text{sen}^2\psi\cos2\alpha' + \text{sen}2\psi\cos\alpha'} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

El caso ideal (retardo exacto) sería para un valor de $\alpha' = \pi/2$. Cuando se da este caso se encuentra que $\xi(\psi, \alpha') = 2\psi$, $A(\psi, \alpha') = 1$. Con este resultado, la ec. (4.4) se reduce a:

$$|\vec{J}_T|^2 = 1 + \cos[2\psi - \phi(x, y)], \quad (4.6)$$

la cual es la expresión conocida para corrimiento de fase generada con polarizadores lineales (modulación de polarización). Ya que convencionalmente se usa el algoritmo de cuatro corrimientos, al variar el ángulo de polarización en la ecuación adecuadamente, se obtendrán i -patrones con los corrimientos de fase que se necesiten. De esta manera, podemos reescribir este resultado como:

$$|\vec{J}_i|^2 = 1 + \cos[2\psi_i - \phi(x, y)], \quad (4.7)$$

con $i = 1..4$. Con ello la fase relativa puede ser calculada como [5]:

$$\tan\phi = \frac{|\vec{J}_1|^2 - |\vec{J}_3|^2}{|\vec{J}_2|^2 - |\vec{J}_4|^2} \quad (4.8)$$

donde $|\vec{J}_1|^2$, $|\vec{J}_2|^2$, $|\vec{J}_3|^2$ y $|\vec{J}_4|^2$ son las intensidades medidas para cada valor de ψ dados por $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \pi/4$, $\psi_3 = \pi/2$ y $\psi_4 = 3\pi/4$.

4.3. Conclusiones

El modelo matemático que permite realizar corrimientos de fase por polarización fue presentando en este capítulo, donde se mostro que usando polarizadores y placas retardadoras de cuarto de onda se generan estados de polarización ortogonales, los cuales al interferir y ser analizados

por un polarizador generan un patrón de interferencia modulado por polarización.

Al colocar un polarizador a un ángulo conocido se generan corrimientos de fase conocidos; esto permite establecer los ángulos de cada polarizador para generar cuatro corrimientos relativos de $\pi/2$.

Capítulo 5

Interferometría con Rejilla y Malla de Amplitud

Es este capítulo se revisan las bases de los métodos de interferencia usando rejillas y mallas como filtro espacial. En otras palabras se consideran sistemas $4f$ con función de pupila formada por una rejilla de fase o una malla de fase. En particular, se considerará tener dos haces en el plano objeto. Este procedimiento permite la interferencia entre órdenes vecinos y forma un interferómetro de trayectoria común de gran estabilidad mecánica. El corrimiento de fase entre los distintos interferogramas obtenidos en el plano imagen puede hacerse tanto por corrimiento de elementos periódico como por modulación en polarización. Puesto que el segundo método puede hacerse independientemente en cada patrón es el que permite obtener los interferogramas referidos en una sola toma. Por ello, se considerara esta alternativa. En este capítulo se desarrollan las propiedades de Fourier de rejillas y malla de amplitud. A partir de estas propiedades, se podrán describir los sistemas interferométricos que las utilicen como filtro espacial (o, equivalentemente, como función de pupila).

5.1. Rejilla de Amplitud

En el caso unidimensional las rejillas de amplitud pueden modelarse como una función periodica definida como:

$$G(\mu) = \text{rect} \left[\frac{\mu}{a_w} \right] \otimes \sum_{-\infty}^{\infty} \delta \left[\frac{\mu - n \cdot x_0}{a_w} \right] \quad (5.1)$$

$$G(\mu) = \sum_{-\infty}^{\infty} \text{rect} \left[\frac{\mu - n \cdot x_0}{a_w} \right]$$

donde x_0 es el periodo de la rejilla, a_w es el ancho de banda de la rejilla de amplitud y \otimes denota la operación de convolución y $\delta(\mu)$ de la función delta de Dirac, la transformada de Fourier de la ec. (5.1) es:

$$\tilde{G}(x) = \frac{a_w}{x_0} \text{sinc}(a_w x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(x - \frac{n}{x_0} \right) \quad (5.2)$$

$$\tilde{G}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \delta \left(x - \frac{n}{x_0} \right).$$

con C_n los coeficientes de Fourier, esta expresión muestra que el espectro de difracción de la rejilla de fase esta modulado por la amplitud de los órdenes de difracción.

5.2. Mallas de Amplitud

Podemos generar una malla multiplicando dos rejillas de amplitud en sus ejes de transmisión ortogonales. Si se considera una rejilla con su eje de transmisión a lo largo de μ y la segunda a 90° a lo largo del eje ν , la rejilla bidimensional o malla que resulta se puede definir de la siguiente manera:

$$G(\mu, \nu) = \sum_{-\infty}^{\infty} \text{rect} \left[\frac{\mu - n \cdot x_0}{a_w} \right] \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \text{rect} \left[\frac{\nu - m \cdot y_0}{b_w} \right] \quad G(\mu, \nu) = G(\mu)G(\nu) \quad (5.3)$$

donde las frecuencias respectivas de cada rejilla tomadas a lo largo de sus ejes respectivos son m y n , y $a_w = b_w = X_0$, donde n y m son las componentes a lo largo de cada eje, x_0 y y_0 son los periodos respectivos a lo largo de los ejes "x" y "y"; a_w y b_w es el ancho en la banda a lo largo de cada dirección. Considerando rejillas de igual número de componentes y con el mismo periodo es decir $x_0 = y_0 = x_1$ y $a_w = b_w = a_{w1}$, dadas las conocidas propiedades de la transformada de Fourier, el espectro de difracción de la malla será:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x, y) &= \tilde{G}(x) \cdot \tilde{G}(y) \quad (5.4) \\ &= \frac{a_w}{x_0} \text{sinc}(a_w x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(x - \frac{n}{x_0} \right) \cdot \frac{b_w}{y_0} \text{sinc}(b_w y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left(y - \frac{m}{y_0} \right) \\ \tilde{G}(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \delta \left(x - \frac{n}{x_1} \right) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \cdot \delta \left(y - \frac{m}{x_1} \right). \end{aligned}$$

En este caso, la modulación de la rejilla de amplitud sobre el patrón de interferencia estará dado por los coeficientes C_n , C_m y cada réplica del patrón de interferencia estará centrada alrededor de su correspondiente orden de difracción.

5.3. Interferometría de Dos Haces

El sistema óptico diseñado para obtener n -interferogramas de manera simultánea para el estudio de los perfiles de fase se muestra en la Fig. 5.1, consta de un sistema con divisor polarizante que genera dos haces acoplado a un sistema $4-f$ con rejilla de amplitud en el plano de frecuencias, esta configuración permite variar la separación δx entre los haces variando la inclinación relativa de los espejos M y M' y genera hasta 12 interferogramas con corrimientos de fase independientes.

El sistema es iluminado con un láser (He-Ne) que opera a una longitud de onda 632 nm y que se polariza a 45° después de pasar por el filtro polarizante P_0 , el divisor polarizante o PBS por sus siglas en inglés, permite generar en la salida del primer sistema dos haces con polarizaciones lineales ortogonales iguales (a 45°). Para generar polarizaciones circulares cruzadas se colocan placas retardadores Q_1 and Q_2 frente a los haces A y B a los ángulos de 0° y 90° respectivamente. La muestra transparente será colocada en la trayectoria A y B será tomado como el haz de referencia.

Se hace notar que se está trabajando con la convención que establece que la primera lente transformadora realiza transformada de Fourier directa y la segunda lente transformadora realiza la transformada de Fourier inversa. Se recuerda que esta convención permite utilizar las mismas coordenadas (x, y) tanto para el plano objeto como para el plano imagen, sin olvidar considerar la inversión en el plano imagen.

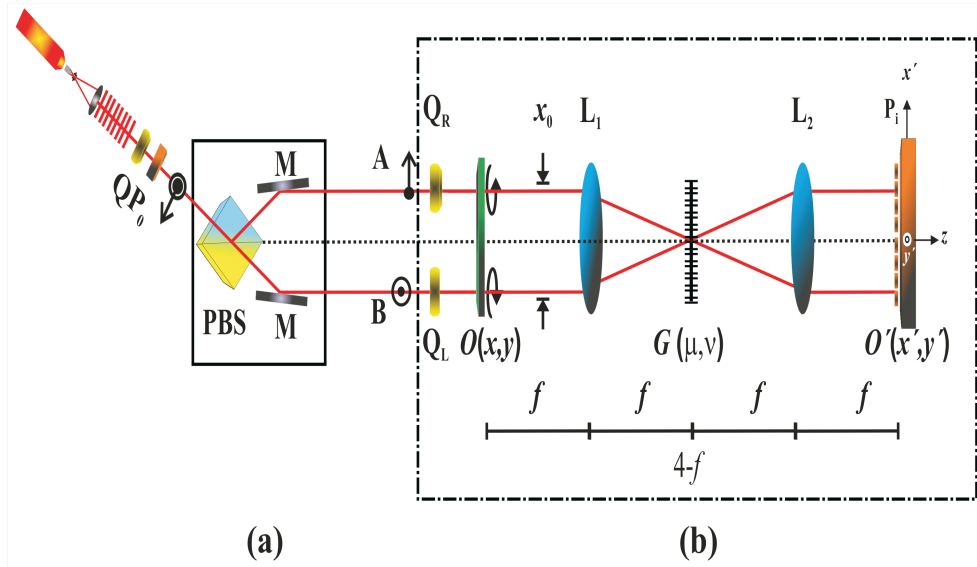


Figura 5.1: TWPGI con elemento de fase periódico. Se muestra la geometría de las ventanas **A** y **B** y la disposición general de los filtros de polarización lineal P_i .

De esta manera no se requiere acarrear constantemente con un signo negativo [9].

5.3.1. Contraste y Modulación de los Patrones de Interferencia

El uso de la dos haces en el plano objeto junto con la rejilla de difracción permite que el sistema genere réplicas de los haces que se van a encontrar centradas alrededor de cada orden de difracción de la rejilla (ver Fig. 5.2). Ya que las amplitudes de los patrones de difracción se asocian con las amplitudes de los coeficientes de Fourier C_n , cada patrón de franjas presentará diferentes modulaciones. Se pueden definir los dos haces del interferómetro de la siguiente manera:

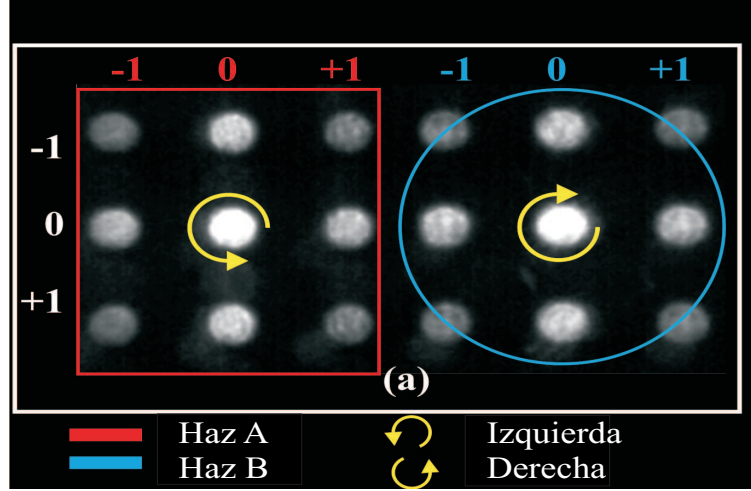


Figura 5.2: Réplicas de los haces A y B generados por la rejilla de difracción.

$$\vec{t}_1(x, y) = \vec{J}_L \cdot w \left(x + \frac{x_0}{2}, y \right) + \vec{J}_R \cdot w' \left(x - \frac{x_0}{2}, y \right). \quad (5.5)$$

donde x_0 es la separación entre centro y centro de cada haz. Por conveniencia se definirá un haz como una abertura rectangular dada por $w(x, y)$, la cual en términos de funciones *rect* queda como $w(x, y) = \text{rect}[x/a] \cdot \text{rect}[y/b]$. Se puede definir el segundo haz de manera similar agregando en la función que describe al objeto de fase de prueba, y queda como $w'(x, y) = w(x, y) \{ \exp[i\phi(x, y)] \}$, donde la función $\phi(x, y)$ describe la fase relativa del objeto. Colocando la rejilla de período espacial $d = \lambda f / X_0$ en el plano de frecuencias de Fourier, con su transmitancia definida por $G(\mu, \nu)$, la imagen formada por el sistema consiste, como ya se mencionó, de réplicas de cada ventana separadas una distancia X_0 . Estas imágenes formadas pueden obtenerse mediante la convolución (*) de $t_1(x, y)$ con la PSF (Point Spread Function, o respuesta impulso del sistema) del sistema, definida por $\tilde{G}(x, y)$. Esto se puede

ver a continuación:

$$\begin{aligned}
\vec{t}_{f1}(x, y) &= \frac{1}{2}\vec{I} \cdot \vec{t}_1(x, y) * \tilde{G}(x, y) \\
&= \frac{1}{2}\vec{I} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{J}_L C_n w\left(x + \frac{x_0}{2}, y\right) * \delta(x - nX_0, y) + \\
&\quad \frac{1}{2}\vec{I} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{J}_R C_{n-1} w'\left(x - \frac{x_0}{2}, y\right) * \delta(x - nX_0, y).
\end{aligned}$$

Donde \mathbf{I} es la matriz unitaria 2×2 . Se considerarán ahora las condiciones para interferencia entre órdenes de distintas sumatorias que sean primeros vecinos. Esto se obtiene sumando los términos n y $n-1$ (ambos centrados en cada uno de las réplicas de las ventanas $w(x - X_0[n-1/2], y)$). Ya que los centros de las réplicas de las ventanas coinciden con las posiciones de los órdenes de difracción respectivos, se tiene que $X_0 = x_0$. Esto simplifica el resultado anterior a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\vec{t}_{f1}(x, y) &= \frac{1}{2}\vec{I} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\vec{J}_L C_n w(x - x_0[n-1/2], y) \right] (5.6) \\
&\quad + \frac{1}{2}\vec{I} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\vec{J}_L C_n C_{n-1} e^{i\phi(x-x_0[n-1/2], y)} w(x - x_0[n-1/2], y) \right] \\
&= \frac{1}{2}\vec{I} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\vec{J}_L C_n + \vec{J}_R C_{n-1} e^{i\phi(x-x_0[n-1/2], y)} \right] w(x - x_0[n-1/2], y)
\end{aligned}$$

Considerando la superposición de los órdenes n y $n-1$ aislada espacialmente de los demás como se observa en la Fig. 5.3 se obtendrá un patrón de interferencia cuando se observe la amplitud anterior con un polarizador lineal inclinado al ángulo ψ y de la forma:

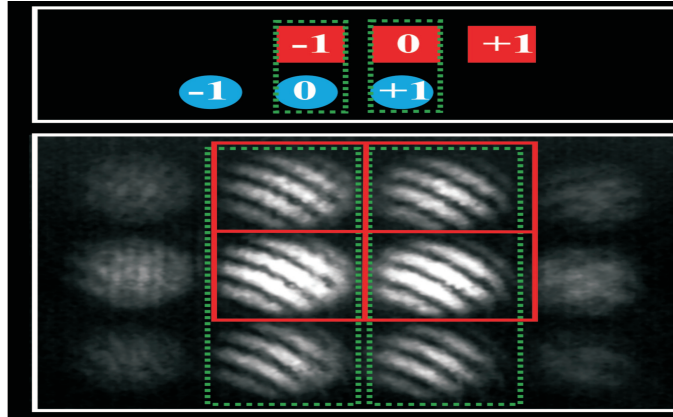


Figura 5.3: Réplicas de los patrones de interferencia generadas por la rejillas de amplitud.

$$A(\psi, \alpha') [C_n^2 + C_{n-1}^2 + 2C_n c_{n-1} \cos\{\xi(\psi, \alpha') - \phi(x_n, y)\}]$$

donde se han considerado los resultados de la sección 4.0.5, (x_n, y) son las coordenadas centradas en el orden de difracción n -ésimo.

En este caso la modulación m_q de cada patrón tiene la forma:

$$m_n = \frac{2c_n C_{n-1}}{C_n^2 + C_{n-1}^2}. \quad (5.7)$$

las imágenes de la Fig. 5.2 muestran las réplicas de los haces generadas por la rejilla de difracción, las réplicas generadas por el haz objeto que están encerradas en un rectángulo y las réplicas generadas por el haz de referencia en un círculo. En la fig. 5.3 se tiene el caso en que la separación entre los haces, permite que en las réplicas de las ventanas, se superpongan los órdenes: $[(-1,0), (0,+1)]$. En este caso cuando se superponen órdenes cercanos, se obtiene los patrones de interferencia

mostrados en la Fig. 5.3, en este caso, debido a que las amplitudes de los órdenes de difracción que se superponen tienen la misma fase, los patrones de interferencia generados son iguales. La función moduladora del espectro de las rejillas es una función *Sinc*, debido a ello para obtener la fase se deben seleccionar las réplicas de los órdenes de difracción que tengan la misma amplitud y modulación, ya que los algoritmos para procesar la fase que se utilizarán tienen esta limitante. Puede verse que los patrones de los extremos tienen bajo contraste, como ya se mencionó esto se debe a que las amplitudes de los órdenes decrecen de acuerdo a la función *Sinc*.

5.4. Conclusiones

En este capítulo se desarrollaron las propiedades de Fourier de rejillas y mallas de amplitud. A partir de estas propiedades, se podrán describir los sistemas interferométricos que las utilicen como filtro espacial (o, equivalentemente, como función de pupila). Se estudiaron las bases de los métodos de interferencia usando rejillas y mallas como filtro espacial. En otras palabras se consideran sistemas $4f$ con función de pupila formada por una rejilla de fase o una malla de fase. En particular, se considerara tener dos ventanas en el plano objeto. Este procedimiento permite la interferencia entre órdenes vecinos y forma un interferómetro de trayectoria común de gran estabilidad mecánica. El corrimiento de fase entre los distintos interferogramas obtenidos en el plano imagen puede hacerse tanto por corrimiento de elementos periódico como por modulación en polarización. Puesto que el segundo método puede hacerse independientemente en cada patrón es el que permite obtener los interferogramas referidos en una sola toma. Por ello, se considerara esta alternativa.

Capítulo 6

Resultados Experimentales

6.1. Deformaciones Asociadas con los Cambios de Fase

Las técnicas ópticas no destructivas y sus aplicaciones industriales han jugado un papel muy importante en los últimos años. Esto es debido a que se pueden hacer mediciones sin estar en contacto con los objetos a medir. En adición, es posible hacer la medición en campo completo y casi en tiempo real. Entre las técnicas ópticas no destructivas más importantes encontramos las interferométricas. El principio básico en que se fundamenta la interferometría es el uso de láseres para iluminar los objetos a medir. Cuando una superficie se ilumina con una fuente de láser aparece un campo conocido. Al analizar estas imágenes se encuentran los patrones de franjas indicativo de que se modificó el objeto, en estas técnicas los desplazamientos que se pueden medir van desde el orden de fracciones, hasta varias decenas de micras.

Una estructura expuesta a fuerzas externas se deforma y en consecuencia, se producen concentraciones de esfuerzo dentro y en su superficie.

Por lo tanto, deformaciones y esfuerzos están íntimamente relacionados, la detección de las deformaciones representa una parte vital para un completo análisis de esfuerzos en una estructura. A partir de las deformaciones y concentración de esfuerzos es posible determinar otras características mecánicas de los materiales que componen a las estructuras, estas pueden ser el módulo de Young, la razón de Poisson entre otros. En las pasadas décadas han aparecido diferentes métodos experimentales para estudiar la mecánica de fracturas y esfuerzos, las pruebas no destructivas han sido utilizadas ampliamente en los últimos años para detectar y cuantificar fracturas. Algunas técnicas no destructivas se han basado en desarrollos tecnológicos recientes y muchas otras con los métodos tradicionales como las de líquidos penetrantes, inspección magnética, corrientes circulantes, ultrasonidos y rayos x [1,2]. En este trabajo el sistema desarrollado permite medir deformaciones fuera de plano, a continuación se describen la forma en que se realizan estas mediciones.

6.1.1. Interferometría de Desplazamiento Lateral para Objetos Transparentes

Un objeto transparente se puede llamar como objeto de fase y puede ser representado como:

$$O(x, y) = e^{i2\pi\phi(x,y)} \quad (6.1)$$

donde $\phi(x, y)$ es una función real; este objeto es conocido como objeto de fase. Considerando que los dos haces que se superponen tienen polarizaciones circulares cruzadas; y que en uno de ellos se genera un desplazamiento lateral $x + \delta x$, se dice que se genera un *shear* y que

el haz de referencia y el haz objeto se autoreferencian, de manera que pueden describirse como:

$$\begin{aligned} O(x + \Delta x, y) &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot e^{i2\pi\phi(x+\Delta x,y)}, \\ O(x, y) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \cdot e^{i2\pi\phi(x,y)} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Ec.(6.2) representa estados de polarización circulares de los haces con un desplazamiento lateral (*lateralshear*) Δx . Cuando cada haz es observado a través de un polarizador lineal con su eje de transmisión al ángulo ψ , los nuevos estados de polarización son:

$$\begin{aligned} O'(x, y) &= P_\psi \cdot O(x + \Delta x, y), \\ O''(x, y) &= P_\psi \cdot O(x, y) \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde P_ψ es la matriz de un polarizador lineal con su eje de transmisión a un ángulo ψ . Cuando los dos campos interfieren el patrón de interferencia resultante puede describirse como :

$$I(x, y) = A_0 + A_1 \cos \left\{ 2\psi_i + \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x} \right\} \quad (6.4)$$

6.1.2. Deformación Fuera de Plano de Muestras Transparentes

Es bien conocido que cuando un objeto es iluminado por un haz colimado, la relación entre la diferencia de fase y el cambio en los vectores de desplazamiento[10-11] puede ser obtenido de:

$$\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x} = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\sin\theta \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + (1 + \cos\theta) \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right] \quad (6.5)$$

donde $u(x, y)$ y $w(x, y)$ son las componentes del desplazamiento en plano y fuera de plano respectivamente.

Los patrones de franjas contribuyen con la deformación con el término $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ y con la pendiente con el término $\frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$. En Toto- Arellano et al (2009) se demostró que en el caso de objetos transparentes, podemos considerar que es iluminado a un ángulo normal a la superficie de prueba, es decir que $\theta = 0^\circ$, en este caso los patrones de interferencia representan la derivada parcial en la dirección x , es decir $\frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$.

La distribución de fase definida en la sección 6.1 se puede relacionar con la deformación fuera de plano (o pendiente) con:

$$\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x} = \frac{4\pi}{\lambda} \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right] \quad (6.6)$$

con lo que se obtiene:

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \frac{\lambda}{4\pi} \left[\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x} \right] \quad (6.7)$$

Con este resultado se asocia el término de fase con una variable medible que en este caso es la son las deformación fuera de plano, que en el caso general se puede considerar como defectos sobre superficies si se considera una desviación respecto de un parámetro de referencia, o si se generan defectos sobre superficies planas por ejemplo.

6.1.3. Espesor de Objetos Transparentes

Cuando se obtiene el patrón de interferencia de una muestra inmersa en aire, la diferencia de fase es función del ángulo de refracción de la muestra y puede ser descrita como:

$$\phi(x, y) = 2 \cdot k \cdot n \cdot d \cdot \cos(\theta) \quad (6.8)$$

donde n es el índice de refracción de la muestra, d es el espesor, y θ es el ángulo de refracción de la muestra. En el caso de nuestras mediciones la muestra fue colocada en una cubeta con aceite de inmersión, para igualar los índices de refracción, esto hace que los haces se propaguen paralelos a través de la interfaz aire-muestra, por lo que en este caso en particular el valor para $\theta = 0$, sabemos que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, si el índice de refracción de la muestra es $n = 1,515$, la ec. (6.3) se reduce a:

$$\phi(x, y) = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot (1,510) \cdot d \quad (6.9)$$

con este resultado podemos asociar la fase con el espesor de la muestra d , con lo que la ecuación para el espesor será:

$$d = \frac{\lambda}{1,510 \cdot 4\pi} \cdot \phi(x, y) \quad (6.10)$$

6.2. Experimentos con Interferómetros de Dos Haces y Una Sola Captura de la Cámara

El sistema mostrado en la Fig. 6.1 es iluminado con un láser a 632 nm . Se probaron dos objetos de fase preparados por evaporación de (MgF₂)

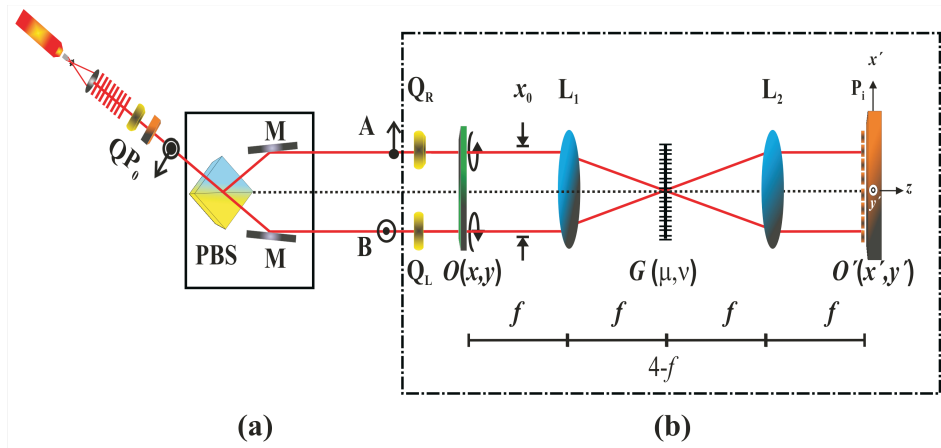


Figura 6.1: Arreglo experimental. Rejilla de Amplitud y Modulación en polarización.

sobre un sustrato: un disco de fase y un escalón de fase. Cada objeto fue probado por separado colocándolo en una ventana, los interferogramas mostrados en las Fig. 6.2 se obtuvieron después de este proceso. Para cada objeto se tomaron cuatro patrones de interferencia y se realizó el procesamiento convencional de extracción de fase, la columna de la derecha en la Fig. 6.2 muestra las fase obtenidas (en escala de grises). Como un ejemplo comparativo un corte transversal de las fases obtenidas muestran a continuación. Esto permite aproximar que la relación del valor de las fases del círculo/escalón debe ser aproximadamente 0.5 rad (Ver Fig. 6.3).

6.3. Resultados Obtenidos con 4 Corrimientos en Una Sola Toma

Se presentan los resultados experimentales obtenidos con el sistema propuesto, como ya se mencionó en secciones anteriores por simplicidad se

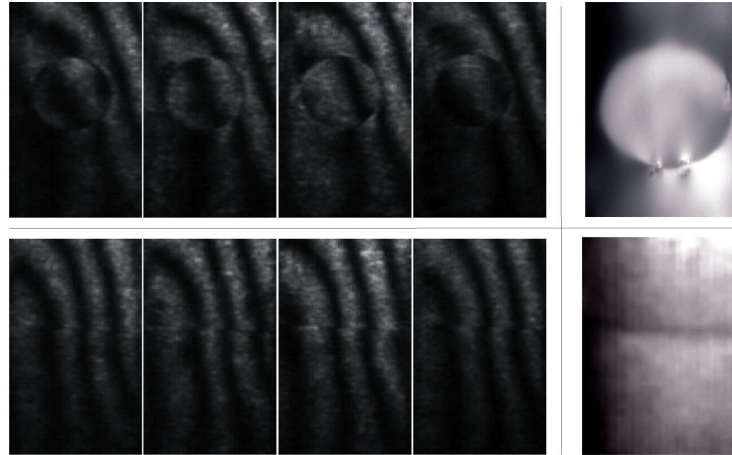


Figura 6.2: Fila superior: Circulo de fase. Cuatro interferogramas con corrimientos relativos de 90° y su fase desenvuelta. Fila inferior: Escalón de fase. Cuatro interferogramas con corrimientos relativos de 90° y su fase desenvuelta.

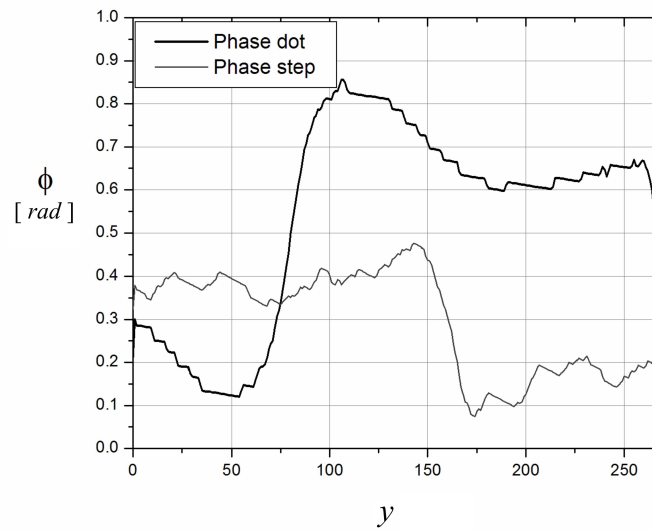


Figura 6.3: Fases desenvueltas calculadas. Corte transversal de los objetos de la Fig. 14. Factor de escala: 0.405 rad.

usaron solo 4 interferogramas para procesar la fase óptica programando la ec. (4.8). Se ha usado una cámara (CMOS) a color con 1280×1024 pixeles (la cámara usada debe ajustarse para capturar los 4 patrones de interferencia simultáneamente usando la máxima resolución). Debido a las pequeñas variaciones en el contraste y la luz de fondo cada patrón ha sido filtrado usando un filtro convencional pasa-bajas para remover ruido y para reducir las pequeñas variaciones entre las irradiancias y la modulación de las franjas cada interferogramas fue sujeto a un rescalamiento y a un proceso de normalización, estos procedimientos generan interferogramas con intensidades y modulaciones iguales lo que permite usar el algoritmo de 4 pasos para recuperar la fase óptica. En la Fig. 6.4 se muestra el prototipo experimental implementado en el Centro de Tecnologías Ópticas y Fotónicas de la Universidad Tecnológica de Tulancingo. Para procesar la fase se programo en Matlab la ec. (3.9) y para procesar la información se usaron los algoritmos de desenvolvimiento de fase en 2D (2D phase unwrapping algorithms, File ID: 22504) que son de acceso libre en la página de soporte de Matlab.



Figura 6.4: Prototipo experimental.

6.4. Distribuciones Estáticas de Fase

Los patrones obtenidos y sus respectivas fases se muestran a continuación en las Figs.6.5-6.7, cada patrón representa una toma estática de un objeto de fase. Cada interferograma fue sujeto a normalización. En la Fig. 6.5 se muestran los cuatro interferogramas con corrimientos de fase de 90° obtenidos en una sola captura de la cámara. En este caso, la muestra de prueba no se ha sometido a ninguna variación y solo se ha inclinado para mostrar la sensibilidad del sistema propuesto, en este caso se tiene un frente de onda con *tilt*.

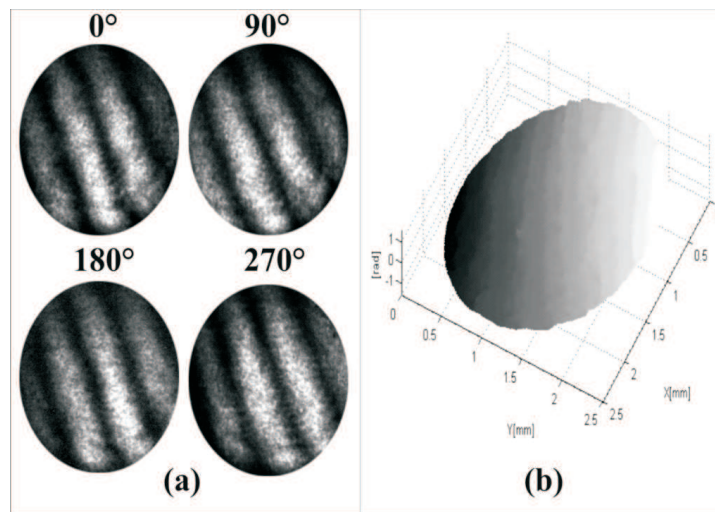


Figura 6.5: Frente de onda plano con una inclinación arbitraria. (a) Interferogramas capturados en una sola toma (b) Pendiente.

En la figura 6.6 se presenta una muestra de vidrio sobre la cual se generó un defecto con la punta de una aguja, el defecto en forma de un surco o canal en la superficie del vidrio se puede observar claramente en los patrones de interferencia, es decir las variaciones superficiales del objeto se observan claramente en la imagen (Ver Fig. 6.6 (a)). De acuerdo a la

teoría desarrollada, la deformación fuera de plano se presenta en la Fig. 6.6(b). Usando la ec. (6.10) se calculo el espesor del canal en 1mm. En la figura 6.7 se presentan los cambios en el índice de refracción generados por las variaciones en los campos de temperatura alrededor de la flama de una vela.

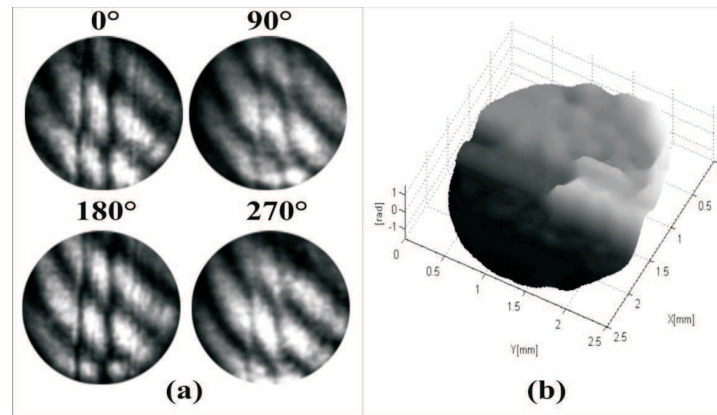


Figura 6.6: Portaobjetos de vidrio. (a) Interferogramas capturados en una sola toma (b) Deformación fuera de plano.

6.5. Distribuciones Dinámicas de Fase

La Fig 6.8 muestra tomas representativas de un objeto de fase en movimiento (aceite sobre portaobjeto) se puede apreciar cómo evolucionan las fase en el tiempo, con lo que se demuestra que el sistema propuesto tiene la capacidad de estudiar flujos de fase. el tiempo entre toma y toma es de 2 seg. En la Fig. 6.9 se presentan el resultado dinámico generado por el índice de refracción alrededor de la flama de una vela, en la imagen se puede observar las variaciones segundo a segundo obtenidas, un estudio posterior permitiría calcular los campos de tem-

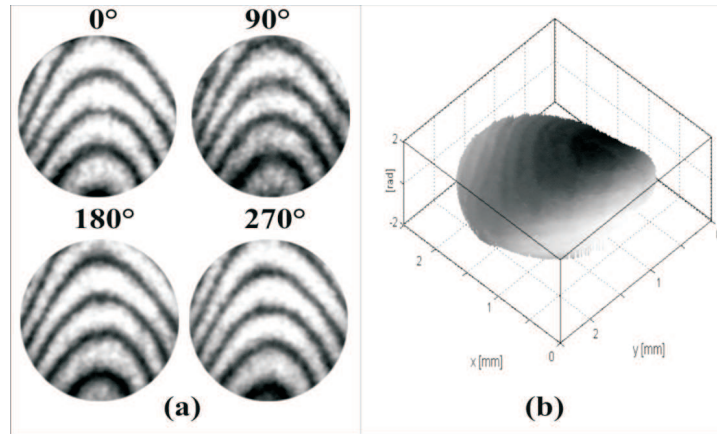


Figura 6.7: Flujo generado por la flama de una vela. (a) Interferogramas capturados en una sola toma (b) Deformacion fuera de plano

peraturas asociados a las deformaciones obtenidas en esta etapa de los resultados.

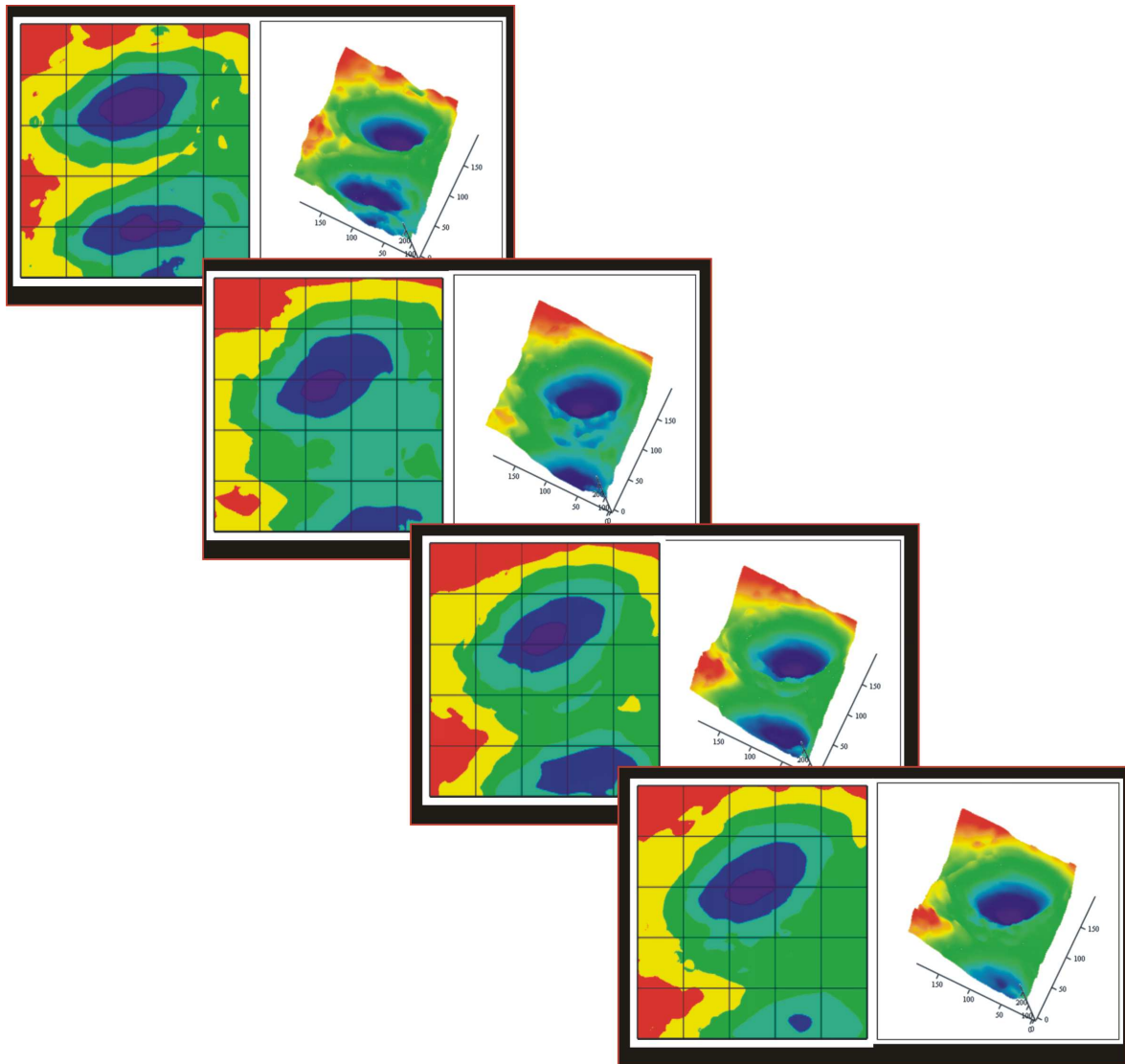


Figura 6.8: Interferometría dinámica. Evolución de las deformaciones asociadas a un flujo de aceite en un intervalo de tiempo arbitrario

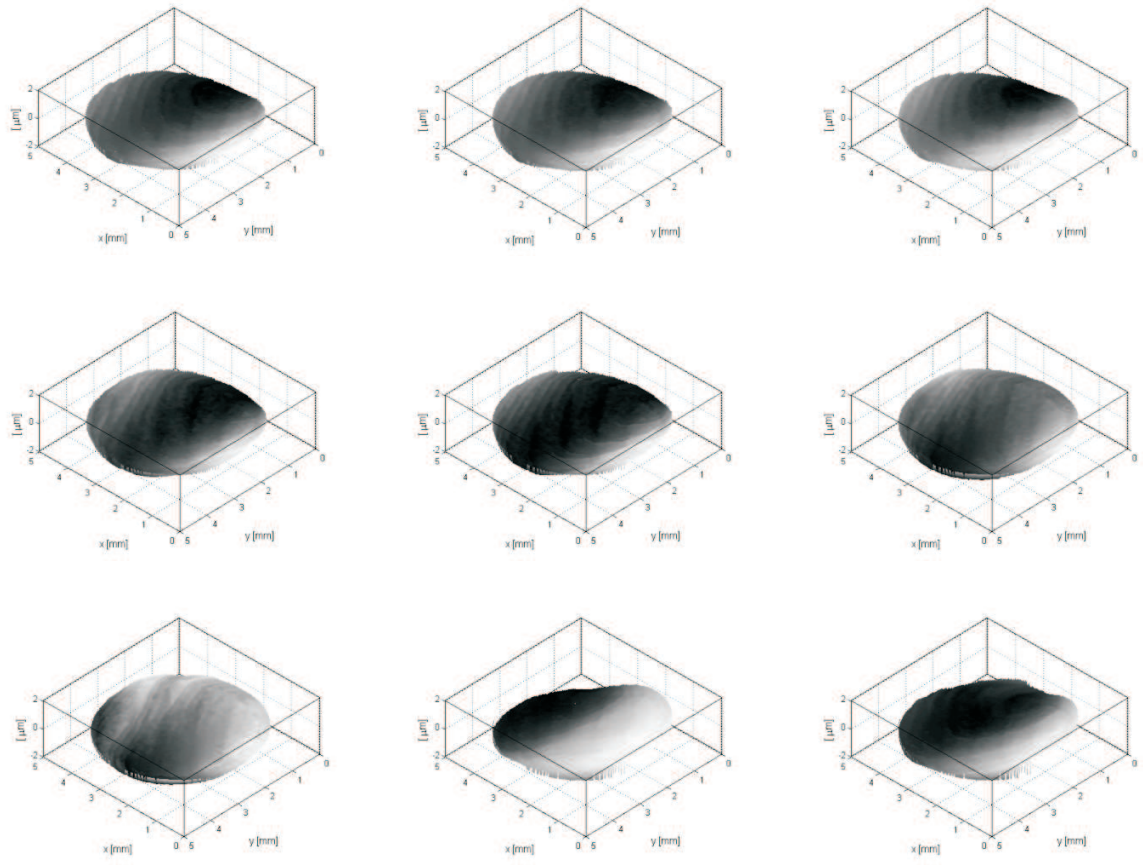


Figura 6.9: Interferometría dinámica. Evolución de los cambios de índice de refracción generados por una flama en un intervalo de tiempo arbitrario

6.5.1. Análisis Comparativo de los Resultados Obtenidos

En la Figura 6.10 se muestran algunos indicadores para comparar los resultados que se pueden obtener con el sistema propuesto. En todos los casos los sistemas pueden medir hasta $\lambda/100$, y la precisión de las mediciones estándares, para el caso particular del sistema implementado además de poder medir la fase funcionando como un interferómetro de dos haces, se pueden hacer mediciones *shearográficas* obteniendo ópticamente la derivada de la fase en la dirección del *shear* introducido, lo que permite calcular deformaciones fuera de plano. Los otros sistemas presentados en la tabla poseen elementos difractivos u holográficos que generan errores en los corrimientos de fase o en las modulaciones de las amplitudes de los interferogramas por lo que requieren de programación adicional para filtrar o suprimir las variaciones que se generan en cada imagen, en sistema desarrollado los errores por difracción son mínimos por lo que el sistema no requiere correcciones de esos errores. Este sistema además es insensible a vibraciones del entorno de trabajo u ambientales, lo que permite tener patrones de interferencia estables, ello es útil si el sistema se quiere implementar en ambientes industriales.

6.6. Análisis de Costos

A continuación se hace un listado de los costos de cada componente usada en el prototipo implementado en el laboratorio, los costos mostrados ya incluyen gastos de importación y son entregados en el laboratorio.

Componentes	Cantidad	Costo Unitario	Total
Retardadores (QWP)	3	3,500.00	10,500.00
Placa Polarizadora	1	700.00	700.00
Espejos Planos	2	150.00	300.00
Lentes	2	300.00	600.00
Rejillas	2	7,000.00	14,000.00
kit Comp. Mecánicas	1	7,000.00	7,000.00
Cámara CMOS con Zoom	1	10,000.00	10,000.00
		TOTAL	43,100.00

El costo del prototipo es de 43,100,00 M.N.; sin embargo el diseño de las monturas y la programación, junto con el sistema computacional elevan el costos a 60,000,00 M.N, a pesar de ello el sistema completo cuesta menos que los desarrollados por empresas o grupos de investigación como se puede observar en la figura comparativa mostrada en la Fig. (6.11).

6.7. Conclusiones

En este capítulo se mostraron los resultados experimentales obtenidos con el interferómetro propuesto, la ventaja de obtener cuatro interferogramas en una sola toma, permitió analizar muestras estáticas como frentes de ondas y defectos en estructuras transparentes, pero además presenta la ventaja de permitir el estudio de objetos que varían en el tiempo, para esta investigación se analizo un flujo de aceite mostrándose las deformaciones superficiales que generaba al desplazarse por gravedad sobre la superficie de un portaobjetos y se pudo analizar la evolu-

ción de los cambios de índice de refracción generados alrededor de una flama en un intervalo de tiempo arbitrario.

Se mostro además el comparativo del sistema propuesto y se estableció que el costo de producción del prototipo es de 60,000 M.N, cuatro veces menor que el manufacturado por 4D Technology y las capacidades operativas son equivalentes a la de su competidor en la industria.

	Escala	Deformaciones fuera de plano	Campos difrámicos	Derivadas	Error	Escala de medición
Toto-Arellano	$\lambda/100$	No	Si	No	Estándar	Estándar
Rodríguez-Zurita	$\lambda/100$	No	Si	No	Estándar	Estándar
Wyant J. C.	$\lambda/100$	No	Si	No	Estándar	Estándar
García-Lechuga	$\lambda/100$	Si	Si	Si	Estándar	Estándar

Figura 6.10: Comparación de los resultados obtenidos con sistemas análogos.

	No. de componentes	Estabilidad mecánica	Micropolarizadores	Difracción	N-Interferogramas	Sensor CCD	Pequeñería espacial	Portabilidad	Costo aproximado
Toto-Arellano	16	Si	No	Si	12	Normal	No	No	80,000
Rodríguez-Zurita	12	Si	No	Si	12	Normal	No	No	120,000
Wyant J. C.	12	No	Si	Si	4	Alta resolución	Si	Si	250,000
García-Lechuga	10	Si	No	Si	16	Cámara web	No	Si	60,000

Figura 6.11: Comparación del sistema desarrollado con los sistemas existentes en el mercado o desarrollados por otros grupos de investigación

Capítulo 7

Conclusiones

Las técnicas interferométricas de corrimiento de fase para el análisis de muestras transparentes son muy utilizadas ya que eliminan el problema que tienen las técnicas basadas en transformada de Fourier, tales como imágenes conjugadas, el filtrado del orden cero, y permiten el análisis no destructivo de muestras transparentes[7-9], algunos autores han realizado aplicaciones en microscopía óptica[10-15], usado holografía digital para el estudio de muestras biológicas[15-19], se han propuesto aplicaciones en el área de metrología[18-28], y recientemente se han desarrollado técnicas de corrimiento de fase simultaneo usando interferometría en espiral[21].

Convencionalmente los corrimientos de fase se realizan por etapas esto limitaba el estudio de las muestras a objetos estáticos, algunos autores han propuesto el uso de cuatro CCDs combinadas con polarización para capturar cuatro interferogramas de manera simultánea, otros sistemas propuestos usan una CCD y un elemento óptico difractivo (DOE) y polarización[16-21], recientemente el uso de micropolarizadores permite la obtención de solo cuatro corrimientos de fase de manera simultánea, basados en los avances recientes en esta área, propusimos un sistema

interferométrico para generar n -interferogramas con modulaciones e intensidades comparables generados por la superposición de los órdenes de difracción generados por una rejilla de amplitud sobre los cuales se pueden generar corrimientos de fase independientes a través de polarizadores lineales colocados sobre cada interferograma, esto permite la generación cuatro, cinco y siete corrimientos de fase simultáneos, por simplicidad de los cálculos solo se usaron 4 interferogramas, la ventaja del sistema desarrollado para este propósito es que permiten el estudio en 4D (x, y, z, y) de muestras que varían en el tiempo.

Características del Sistema Desarrollado

1. Se pueden medir deformaciones fuera de plano y espesores de objetos transparentes.
2. Se puede encontrar la fase variable en el tiempo.
3. El sistema es mecánicamente muy estable.
4. Se obtienen n -patrones de franjas con corrimiento adaptable en una sola toma.
5. El costo del prototipo es de 60,000. 00 M.N. considerando el diseño completo de las monturas y el sistema de captura y procesamiento de la información.

Ventajas del Sistema Desarrollado

1. Es un interferómetro de trayectoria común de dos haces.

2. No se requieren micro-polarizadores para generar los corrimientos de fase.
3. Obtiene la derivada ópticamente.
4. La rejilla de amplitud es de bajo costo si se compara con rejillas de fase y micropolarizadores.

7.1. Trabajo a Futuro

A continuación se presenta un listado de las posibles aplicaciones y del trabajo que se tiene planteado desarrollar. Algunas de las propuestas surgieron como resultado de los comentarios y sugerencias de los árbitros que revisaron los artículos que se publicaron durante el desarrollo de este trabajo de tesis

1. Llevar a cabo un análisis cuantitativo de los errores: pixelización y aberraciones.
2. Implementar algunas aplicaciones para los sistemas desarrollados: en microscopia, pruebas ópticas, entre otros.
3. Iniciar otros estudios relacionados tales como medición de la fase geométrica como la interferometría con vórtices ópticos por mencionar alguna.
4. Aplicaciones de las técnicas desarrolladas en el análisis de objetos opacos.
5. Generar patentes de los sistemas desarrollados y caracterizados hasta el momento.

Bibliografía

- [1] M. Takeda, “Spatial-carrier fringe-pattern analysis and its applications to precision interferometry and profilometry: an overview”, *Industrial Metrology, Elsevier* (1990).
- [2] J.W. Wagner, “Heterodyne holographic Interferometry for high resolution 3-D sensing”, *preprint, The Johns Hopkins University, Center for Nondestructive Evaluation, Maryland Hall 102, 34th and Charles Streets, Baltimore, Maryland 21218, USA*.
- [3] R Dändliker, “ Heterodyne Holographic Interferometry ”, *Progress in Optics* **XVII**(1980).
- [4] S.F. Jacobs, “ Optical heterodyne (coherent) detection ”, *Am. J. of Phys.* **56**(1988).
- [5] P. Hariharan, B.F. Oreb, N. Brown, “ A digital phase-measurement system for real-time holographic interferometry ”, *Opt Commun.* **41**(1982).
- [6] J.H. Bruning, D.H. Herriott, J.E. Gallagher, D.P. Rosenfeld, A.D. White, D.J. Brangaccio “ Digital wavefront measuring interferometer for testing optical surfaces and lenses ”, *Appl. Opt.* **13**(1974).

- [7] P. Hariharan, et al., “ Digital phase-shifting interferometry: a simple error compensating phase calculation algorithm”, *Appl. Opt.***26**(1987).
- [8] C. Y.Y. Cheng, J.C. Wyant, “ Phase shifter calibration in phase-shifting interferometry”, *Appl. Opt.***24**(1985).
- [9] M. Born, E. Wolf, “Principles of Optics”, *Pergamon Press* (1975).
- [10] C. Ai, “ Phase measurement accuracy limitation in phase shifting interferometry ”, Ph.D. Dissertation, The University of Arizona, Optical Sciences Center, Tucson, Arizona 85721, USA(1987).
- [11] R. Thalmann, R. Dändliker, “ High resolution video-procesding for holographic interferometry applied to contouring and measuring deformations”, *SPIE ECOOSA*(1984).
- [12] K. Kinnstaetter, et al, “ Accuracy of phase shifting interferometry”, *Appl. Opt.***27**(1988).
- [13] N. Ohyama, S. Kinoshita, A. Cornejo-Rodriguez, T. Honda, J. Tsujiuchi “ Accuracy of phase determination with unequal reference phase shift”, *JOSA AA***5**(1988).
- [14] Malacara D., Servin m., Malacara Z. “ C.6 Phase detection algorithms”, in *Interferogram analysis for optical testing*(1998)pp 169-246.
- [15] J. E. Greivenkamp, J. H. Bruning, “C.14 Phase shifting interferometry”, in, *Optical Shop Testing* (1992), pp. 501-598.
- [16] J. Schwider, “Advanced evaluation techniques in interferometry”, in *Progress in Optics*, E. Wolf, eds, (North-Holland, 1990), pp. 271-359.

- [17] B. Barrientos-García, A. J. Moore, C. Pérez-López, L. Wang, and T. Tschudi, "Transient Deformation Measurement with Electronic Speckle Pattern Interferometry by Use of a Holographic Optical Element for Spatial Phase Stepping," *Appl. Opt.* **38**, 5944-5947 (1999).
- [18] B. Barrientos-García, A. J. Moore, C. Pérez-López, L. Wang, and T. Tschudi, "Spatial Phase-Stepped Interferometry Using a Holographic Optical Element," *Opt. Eng.* **38**, 2069-2074 (1999)
- [19] M. Novak, J. Millerd, N. Brock, M. North-Morris, J. Hayes, and J. Wyant, "Analysis of a micropolarizer array-based simultaneous phase-shifting interferometer," *Appl. Opt.* **44**, 6861-6868 (2005)
- [20] C. Meneses-Fabian, G. Rodríguez-Zurita, and V. Arrizón, "Common-path phase-shifting interferometer with binary grating," *Opt. Commun.* **264**, (2006)pp. 13-17
- [21] G. Rodríguez-Zurita, N.I. Toto-Arellano, C. Meneses-Fabian and J. Vázquez.Castillo, "One-shot phase-shifting interferometry: 5, 7, and 9 interferograms" ,*Opt. Letters* **33** (December 1, 2008).
- [22] M. V. Mantravadi, Lateral shearing interferometers, c.4 in *Optical Shop Testing*, 2nd ed., D. Malacara, ed. (Wiley, New York, 1992).
- [23] Malacara D., Radial shearing interferometers, c.5 in *Optical Shop Testing*, 2nd ed., D. Malacara, ed. (Wiley, New York, 1992).
- [24] T. Kreis, Digital Holographic Interference-Phase Measurement Using the Fourier-Transform Method, *J. Opt. Soc. Am.* **A 3**(1986), pp 847-855.

- [25] A. Cornejo-Rodriguez, Ronchi test, in Optical Shop Testing, c.9 in Optical Shop Testing, 2nd ed., D. Malacara, ed. (Wiley, New York, 1992).
- [26] D. Malacara, in Optical Shop Testing, c.5 in Optical Shop Testing, 2nd ed., D. Malacara, ed. (Wiley, New York, 1992).
- [27] J. C. Wyant, "White light extended source shearing interferometer," *Appl. Opt.* **13**, (1974) 200-202.
- [28] P. Hariharan, D. Sen, "Cyclic shearing interferometer," *J. Sci. Instrum.* **37**, (1960) 374.
- [29] R. F. Horton "Design of a white light radial shear interferometer for segmented mirror control," *Opt. Engineer.* **27** (1988) 1063-1066.
- [30] J. M. Geary Wavefront sensors, " c.IV in Adaptive Optics Engineering Handbook" (2000) pp 123-150.
- [31] D. Malacara, " Mathematical interpretation of radial shearing interferometers" *Appl. Opt.* **13** (1974)1781-1784.
- [32] D. Liu Y. Yang L. Wang Y. Zhuo, "Real-time diagnosis of transient pulse laser with high repetition by radial shearing interferometer" *Appl. Opt.* **46** (2007) 8305-8314.
- [33] M. P. Kothiyal C. Delisle "Shearing interferometer for phase shifting interferometry with polarization phase shifter" *Appl. Opt.* **24** (1985)4439-4442.
- [34] T. Shirai T. H. Barnes T. G. Haskell, "Adaptive wave-front correction by means of all-optical feedback interferometry" *Opt. Lett.* **25** (2000) 773-775.

- [35] T. Shirai T. H. Barnes T. G. Haskell, “Real-time restoration of a blurred image with a liquid-crystal adaptive optics system based on all-optical feedback interferometry” *Opt. Commun.* **118** (2001) 275-282.
- [36] J. M. Geary, “ Wavefront sensors, C.IV,” in Adaptive Optics Engineering Handbook (2001) 123-150.
- [37] R. A. Hutchin, “Combined shearing interferometer and Hartmann wavefront sensor,” **Pat. Num. 4518854** (1985).
- [38] C. Hernandez-Gomez J. L. Collier S. J. Hawkes C. N. Danson C. B. Edwards D. A. pepler I. N. Ross T. B. Winstone, “Wave-front control of a large-aperture laser system by use of a static phase corrector,” *Appl. Opt.* **39** (2000) 1954-1961.
- [39] P. Hariharan, D. Sen “Radial shearing interferometer,” *J. Sci. Instrum.* **38** (1961)428
- [40] Murty, M. V. R. K., “A compact radial shearing interferometer based on the law of reflection,” *Appl. Opt.* **3** (1964) 853
- [41] R. F. Horton, “Design of a white light radial shear interferometer for segmented mirror control,” *Opt. Engineer.* **27** (1988) 1063-1066
- [42] Murty, M. V. R. K., “Radial shearing interferometers using a laser source,” *Appl. Opt.* **12** (1973) 2765-2767
- [43] D. R. Kohler V. L. Gamiz, “Interferogram reduction for radial-shear and local-reference holographic interferograms ,” *Appl. Opt.* **25** (1986) 1650-1652
- [44] E. López-Lago R. de la Fuente, “Amplitude and phase reconstruction by radial shearing interferometry,” *Appl. Opt.* **47** (2008) 372-376

- [45] D. C. Ghiglia and M. D. Pritt, Two-Dimensional Phase Unwrapping: Theory, Algorithms and Software. New York: Wiley-Interscience, 1998

APÉNDICE 1

Algoritmos Usados en Interferometría de Corrimiento de Fase: Phase-Shifting Interferometry

Se describen algoritmos usados en interferometría de corrimiento de fase introduciendo los conceptos básicos y describiendo los métodos más usados en esta área del conocimiento. An algorithm for four-steps was derived above. We will now use the least squares approach to derive a four-step

algorithm. It will turn out to be the same algorithm derived above.

Clear[irradiance]

irradiance[n] := a0 + a1Cos[d[n]] + a2Sin[d[n]]

numberSteps = 4;

esquared = Sum[AHimeasured[i] - irradiance[i] L2, {i, 1, numberSteps}];

d0 = D[esquared, a0];

d1 = D[esquared, a1];

d2 = D[esquared, a2];

ans = Simplify[Solve[{d0 == 0, d1 == 0, d2 == 0}, Table[Bd[i] Hi - 1 Lp
number - Steps, measured[1] + imeasured[2] + imeasured[3] + imeasured[4] L,
H - imeasured[2] + imeasured[4] L, Himeasured[1] - imeasured[3] L
This is the same result as derived above.

We will now solve for the fringe contrast, gamma.
gamma = FullSimplif[.]

Algoritmo Completo

El algoritmo completo puede descargarse del siguiente enlace:

http : //fp.optics.arizona.edu/jcwyant/

Algoritmo para el Desarrollo de la Fase: Kreis Algorithm

function [R,brdf,scat,shad,w] = goa3D(f,x,y,thd,phd,n1,k1,n2,k2,nfrp,dstrb,br)

[R,brdf,scat,shad,w] = goa3D(f,x,y,thd,phd,n1,k1,n2,k2,nfrp,dstrb,br)

calculates the directional-hemispherical reflectance for light incident from a medium with complex refractive index $n1 + i*k1$ on a 2-d

rough surface $f(x,y)$ with index $n2 + i*k2$ with the angles of incidence thd (polar) and phd (azimuth) (both in degrees) using the geometric optics approximation (GOA) with $nfrp^2$ first reflection points. Beam radius is set through br parameter while beam energy distribution is

controlled via parameter $dstrb$ ('*gauss*' or '*uni*').

Input: f - surface height

x - surface point

y - surface point

thd - (global) angle of incidence in degrees

$n1$ - refractive index of medium 1

$k1$ - extinction coefficient of medium 1

$n2$ - refractive index of medium 2

$k2$ - extinction coefficient of medium 2

$nfrp$ - number of first reflection points (rays) along square side

$dstrb$ - beam energy distribution (type '*uni*' for uniform and '*gauss*' for gaussian)

br - beam radius

Output: R - directional-hemispherical reflectance
brdf - bidirectional reflection distribution function resolved into first,
second and higher order scattering
scat - mean number of scattering events per incident ray
shad - amount of shadowing (percentage)
w - percentage of rays removed due to warning signals given during the
simulation (indication of too few surface points)

Last updated: 2010-09-30 (David Bergström)

Algoritmo Completo

El algoritmo completo puede descargarse del siguiente enlace:

1. [http : //www.mysimlabs.com/surface_generation.html](http://www.mysimlabs.com/surface_generation.html)

2. [https : //docs.google.com/file/d/](https://docs.google.com/file/d/0B_agtNXaoRd6MDBlNjNjZGEtZDUwZS00ZTlhLTlhZTktOWExYTBhNzIyNW Nm/edit?hl=en$ _USpli=1)

[0B_agtNXaoRd6MDBlNjNjZGEtZDUwZS0](https://docs.google.com/file/d/0B_agtNXaoRd6MDBlNjNjZGEtZDUwZS00ZTlhLTlhZTktOWExYTBhNzIyNW Nm/edit?hl=en$ _USpli=1)

[0ZTlhLTlhZTktOWExYTBhNzIyNW Nm/edit?hl = en\\$ _USpli=1](https://docs.google.com/file/d/0B_agtNXaoRd6MDBlNjNjZGEtZDUwZS00ZTlhLTlhZTktOWExYTBhNzIyNW Nm/edit?hl=en$ _USpli=1)

I. Algoritmo para el Desarrollo de la Fase: Fast two-dimensional phase-unwrapping algorithm based on sorting by reliability following a nonconti- nuous path

This program is written by Munther Gdeisat and Miguel Arevallilo Hernández to program the two-dimensional unwrapper, by Miguel Arevallilo Hernandez, David R. Burton, Michael J. Lalor, and Munther A. Gdeisat published in the Applied Optics, Vol. 41, No. 35, pp. 7437, 2002.

This program is written on 15th August 2007

The wrapped phase map is floating point data type. Also, the unwrap-
ped phase map is floating point

```
include < malloc.h >
```

```
include " stdafx.h"
```

```
include < stdio.h >
```

```
include < stdlib.h >
```

```
include < string.h >
```

```
static float PI = 3.141592654;
```

```
static float TWOPI = 6.283185307;
```

```
pixel information
```

```
struct PIXEL
```

```
int x, x coordinate of the pixel
```

```
int y, y coordinate
```

```
int increment, No. of 2*pi to add to the pixel to unwrap it
```

```
int number-of-pixels-in-group, No. of pixels in the pixel-group
```



```

float value, value of the pixel
float reliability,
int group, group No.
int new-group,
struct PIXEL * head, pointer to the first pixel in the group in the linked list
struct PIXEL * last, pointer to the last pixel in the group
struct PIXEL * next, pointer to the next pixel in the group

```

the EDGE is the line that connects two pixels.

if we have S PIXELs, then we have S horizontal edges and S vertical edges

```

struct EDGE

```

```

float reliab; //reliabilty of the edge and it depends on the two pixels
PIXEL * pointer-1; //pointer to the first pixel
PIXEL * pointer-2; //pointer to the second pixel
int increment; //No. of 2*pi to add to one of the pixels to unwrap it with respect to the second

```

another version of Mixtogether but this function should only be use with the sort program

```

void Mix(EDGE * Pointer1, int * index1, int * index2, int size)

```

Algoritmo Completo

El algoritmo completo puede descargarse del siguiente enlace: [http :
//www.ljmu.ac.uk/GERI/CEORG_Docs/Miguel_2D_unwrapper.cpp](http://www.ljmu.ac.uk/GERI/CEORG_Docs/Miguel_2D_unwrapper.cpp)

II. Algoritmo para el Desenvolvimiento de la Fase: 2D Phase Unwrapping Algorithms

GoldsteinUnwrap2D implements 2D Goldstein branch cut phase unwrapping algorithm.

References:: 1. R. M. Goldstein, H. A. Zebken, and C. L. Werner, Satellite radar interferometry: Two-dimensional phase unwrapping, *Radio Sci.*, vol. 23, no. 4, pp. 713720, 1988. 2. D. C. Ghiglia and M. D. Pritt, *Two-Dimensional Phase Unwrapping: Theory, Algorithms and Software*. New York: Wiley-Interscience, 1998.

Inputs: 1. Complex image in .mat double format 2. Binary mask (optional) Outputs: 1. Unwrapped phase image 2. Phase quality map

This code can easily be extended for 3D phase unwrapping. Posted by Bruce Spottiswoode on 22 December 2008

Algoritmo Completo

El algoritmo completo puede descargarse del siguiente enlace:

[http : //www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/22504 – 2d-phase-unwrapping-algorithms/content/GoldsteinUnwrap2D.m](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/22504-2d-phase-unwrapping-algorithms/content/GoldsteinUnwrap2D.m)

Apéndice 2

Arquitectura Física y Computacional del Sensor Interferométrico

El sistema interferométrico genera una imagen de los patrones de interferencia, la cual se observa en una pantalla; la captura de las imágenes se realiza a través de una cámara USB Pixelink que tiene una interfaz de captura, la cual solo se usa para calibrar los parámetros de la cámara: como tiempo de exposición, RGB, saturación, entre otros (Ver Figura 7.1.), este procedimiento permite que las imágenes no tengan saturaciones o cambios de contraste o brillos que pudieran generar errores en las mediciones.



Figura 7.1: I. Etapa de captura de los interferogramas

Cuando la cámara está calibrada se ejecuta el programa en Matlab; el cual se usa para filtrar y procesar la fase óptica usando el algoritmo de cuatro interferogramas. En esta etapa, el programa genera una máscara circular para identificar los centros de cada patrón de interferencia (debido a que se tienen varios patrones de interferencia en una sola imagen), con ello se configura el programa para que asigne a cada patrón un número de acuerdo al corrimiento relativo que tiene. Luego se aplica un filtro pasa bajas para suprimir el ruido que pudieron tener los interferogramas.

Con las funciones de Matlab 2D-Wrapped y 2D-Unwrap se obtiene la fase óptica, en la Figura 7.2, abajo a la izquierda se muestra la fase envuelta, la cual se debe a la periodicidad de la función tangente; con la fase envuelta se obtiene la fase desenvuelta, en el programa se ha incluido una rutina para calcular la deformación fuera de plano o el espesor usando la teoría desarrollada en secciones anteriores, el resultado final se muestra abajo a la derecha de la Figura 7.2.

II. PROCESAMIENTO DE LAS IMÁGENES



Figura 7.2: II. Etapa de procesamiento de las imágenes y despliegue de la información

Publicaciones

Artículos Enviados

1. Luis García-Lechuga et al, "Phase profile analysis of transparent objects through the use of a two windows interferometer based on a one beam splitter configuration", *Optik*, enviado 2014. Manuscript Number: IJLEO-D-14-00494

Artículos Aceptados

1. Luis García-Lechuga et al, "Phase profile analysis of transparent objects through the use of a two windows interferometer based on a one beam splitter configuration", *Optik*, enviado 2014. Manuscript Number: IJLEO-D-14-00494
2. Luis García-Lechuga et al, "Phase profile analysis of phase objects through the use of a common path interferometer", *Optics and Photonics Congress (OPC)*, enviado 2014 ID: 1989051
3. B. López Ortiz, V. H. Flores Muñoz, N. I. Toto-Arellano, G. Rodríguez Zurita, A. Martínez García, J. M. Miranda Gómez, J. A. Martínez Domínguez and L. García Lechuga, Two-step phase shifting interferometry based in two coupled Sagnac interferometers, *Rev. Mex. Fis.* Aceptado (2014).

Artículos Publicados

1. N. Toto-Arellano, D. Serrano-García, L. García-Lechuga, J. M. Miranda Gómez, G. Resendiz López, and A. González Rosas, "Dynamic phase profile of a thin flame using a single-shot polarizing phase shifting interferometry, in Imaging and Applied Optics, OSA Technical Digest (online) (Optical Society of America), paper JTU4A.31 (2013).
2. Toto-Arellano, N.I.; Serrano-García, D.I.; Martínez García, A.; Rodríguez-Zurita, G.; Montes-Pérez, A.; Miranda-Gómez, J.M.; Reséndiz López, G.; González Rosas, A.; García-Lechuga, L.. Single shot phase shifting techniques for 4D radial slope measurements of transparent samples. *Revista Mexicana de Física*, 335-338 (2012).
3. N.I. Toto Arellano, D.I. Serrano García, A. Martínez García, G. Rodríguez Zurita, A. Montes Pérez, J.M. Miranda Gómez, G. Resendiz López, A. González Rosas, L. García Lechuga, G.A. Parra Escamilla, Measurement of the dynamic phase profile of transparent fluids, *Óptica pura y aplicada* 46(1) (2013).