



Universidad Autónoma del Estado del Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería.

Área Académica de Matemáticas y Física

ANÁLISIS UNIDIMENSIONAL DEL SECTOR DE HIGGS DEL
MODELO ESTÁNDAR. CRITERIOS DE ESTABILIDAD Y
ALGUNAS IMPLICACIONES DE LA SIMETRÍA CUSTODIAL.

Tesis presentada al

Área de Física

como requisito parcial para la obtención del título de

LICENCIADO EN FÍSICA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

Tesis presentada por

Francisco Javier Morelos Medina

asesorado por

Dr. Jaime Hernández Sánchez

Dr. Roberto Noriega Papaqui

Pachuca Hgo. 2010

Dedicatorias

A mi madre la Sra. Rocio Medina Rivera y a mi gran madre la Sra. Rosa Rivera Hernández por su amor, motivación y apoyo incondicional, por darme la oportunidad de ser quien quiero y debo ser. A mi amada madre Rocio por su fortaleza para soportar tantas adversidades. A ti madre por ser la fuente de mis ilusiones y proyectos. Estoy eternamente agradecido por todo lo que has hecho y seguirás haciendo por mis hermanos y mi. **Te amo.**

A mi tío el Sr. Oscar Medina Rivera de quién he aprendido que no se necesita ser un padre biológico para ser padre. A ti tío Oscar por haberme abierto las puertas de tu casa cuando más lo necesitaba, muchísimas gracias. A mi tía Isa por todas la atenciones prestadas durante mi estancia en su casa haciendome sentir un miembro más de su familia.

A mis hermanos y primos por estar presentes a lo largo de toda mi vida les deseo mucho éxito en sus proyectos personales.

A mi padre el Sr. Francisco Morelos por confiar en mí, por su importante apoyo moral y motivacional a lo largo de mi andar.

A mi Familia por haber inculcado en mí valores y principios que son las mejores herramientas que tengo para conseguir el éxito.

A mis amigos con quienes he crecido y vivido experiencias sumamente gratificantes a lo largo de mi vida. A ustedes por que son parte fundamental de este su servidor, Mauri, Andrés, Israel, Juan Carlos, mi pequeña y hermosa Zulema, Eduardo, Jorge, Yair, Cesar, Alejandro han contribuido de manera muy especial y distinta en mi formación gracias por valiosa su amistad.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Roberto Noriega Papaqui y al Dr. Jaime Hernández Sánchez por la asesoría brindada para realizar esta tesis de licenciatura, sus enseñanzas, así como sus innumerables críticas, comentarios y sugerencias, fueron indispensables para llevar a cabo esta tesis. Agradezco por su amistad, sus motivaciones y paciencia.

Agradezco enormemente a mis formadores los Doctores José Antonio Santiago García, Fernando Donado Pérez, Pedro Miranda Romagnoli, Carlos Arturo Soto Campos, Rodrigo Delgadillo Blando por transmitirme un poco de su gran conocimiento en física, por ser mis impulsores a creer que todo se puede lograr con esfuerzo y dedicación, por sus sabios consejos en momentos tan difíciles para mí, por su valiosa e invaluable amistad, estoy en deuda con todos ustedes.

Agradezco a la Dra. Victoria Cerón Angeles y al M.en C. Ignacio Urquijo Islas por su análisis crítico y constructivo que permitió el enriquecimiento de este trabajo.

Agradezco a mis tíos Lety, Gabriel, José Luis[†], Claudia por confiar en mí y quererme como a un hijo.

Agradezco a Zulema por estar a mi lado siempre y en todo momento, eres parte fundamental de mí gracias por tu cariño, tu comprensión y por hacerme sentir querido.

Agradezco a mi manager y todo mi staff de colaboradores si ellos no soy nada.

Tres pasiones, simples, pero abrumadamente intensas, han gobernado mi vida: el ansia de amar, la búsqueda del conocimiento y una insoportable piedad por el sufrimiento de la humanidad. Estas tres pasiones, como grandes vendavales, me han llevado de acá para allá, por una ruta cambiante, sobre un profundo océano de angustia, hasta el borde mismo de la desesperación.

He buscado el amor, primero, porque origina en mí un éxtasis que hace estremecer todo mi cuerpo y que me hace hacer todo por amor, un éxtasis tan grande, que ha menudo hubiera sacrificado el resto de mi existencia por unas horas de este. Lo he buscado, en segundo lugar, porque alivia la soledad, esa terrible soledad que a veces se apoderaba de mí.

Con menos pasión he buscado el conocimiento, he deseado saber por qué brillan las estrellas. Y he tratado de comprender las virtuosas y apasionantes fuerzas de la naturaleza. Algo de esto he logrado, casi nada, aun tengo mucho que aprender y hacer.

El amor y el conocimiento, en la medida en que ambos eran posibles, me transportaban hacia el cielo. Pero siempre la piedad me hace volver a la tierra. Resuena en mi corazón el eco de gritos de dolor. Niños hambrientos, víctimas torturadas por opresores, ancianos desvalidos, carga odiosa para sus hijos, y todo un mundo de soledad, pobreza y dolor convierten en una burla lo que debería ser la existencia humana. Deseo ardientemente aliviar el mal, pero no puedo, y yo también sufro.

Esto ha sido mi vida. La he hallado digna de vivirse, y con gusto volvería a vivirla si se me ofreciese la oportunidad.

Francisco Javier Morelos

Índice general

1. Introducción	1
2. La Teoría Electrodébil del Modelo Estándar.	3
2.1. Los Sectores de la Teoría Electrodébil	3
2.1.1. Sector Fermiónico	3
2.1.2. Sector de Norma	4
2.2. Lagrangiano de Interacción	5
2.2.1. Lagrangiano del Sector Fermiónico	5
2.2.2. Lagrangiano del Sector de Norma	5
2.3. El problema de masa en el Lagrangiano de Interacción	6
3. El Potencial de Higgs	9
3.1. Mecanismo de Higgs	9
3.2. Potencial de Higgs	10
3.2.1. Análisis considerando sólo $\mu^2 \neq 0$	10
3.2.2. Análisis de las combinaciones entre los parámetros μ^2 y κ	11
3.2.3. Análisis de las combinaciones entre los parámetros μ^2 , κ y λ	13
3.3. Términos de Masa	18
3.3.1. Mecanismo de Higgs en una Teoría Abelianas	18
3.3.2. Mecanismo de Higgs de la Teoría Electrodébil	20
4. Simetría Custodial	25
4.1. El Parámetro ρ	25
4.2. La Simetría Custodial en el Potencial de Higgs	27
4.3. Lagrangiano del Sector de Higgs	29
5. Conclusiones y Perspectivas Futuras	31

Índice de figuras

3.1. Gráfica del potencial considerando solo el primer término, note que $V(\phi)$ es simétrico respecto a su eje.	11
3.2. Gráfica de $V(\phi)$ con los dos primeros términos. En los incisos a) y b), μ^2 es mayor que cero, mientras que en d) y e), μ^2 es menor que cero. En todos los incisos κ varía su valor.	12
3.3. Gráfica de $V(\phi)$ con los dos primeros términos. En los incisos g) y h) μ^2 es igual a cero, por lo tanto el potencial tiene puntos de inflexión.	13
3.4. Gráfica de $V(\phi)$ considerando $\kappa > 0$ y $\lambda < 0$, mientras que en el inciso a) $\mu^2 > 0$, en b) $\mu^2 = 0$ y c) $\mu^2 < 0$	14
3.5. Gráfica de $V(\phi)$ considerando $\kappa < 0$ y $\lambda < 0$, mientras que en el inciso d) $\mu^2 > 0$, en e) $\mu^2 = 0$ y f) $\mu^2 < 0$	15
3.6. Gráfica de $V(\phi)$ considerando $\kappa = 0$ y $\lambda < 0$, mientras que en el inciso g) $\mu^2 > 0$, en h) $\mu^2 = 0$ e i) $\mu^2 < 0$. Note que el potencial es simétrico con respecto a su eje.	16
3.7. Gráfica de $V(\phi)$ considerando $\kappa < 0$ y $\lambda < 0$, mientras que en el inciso d) $\mu^2 > 0$, en e) $\mu^2 = 0$ y f) $\mu^2 < 0$	17
3.8. Gráfica de $V(\phi)$ considerando $\kappa = 0$ y $\lambda > 0$, mientras que en el inciso m) $\mu^2 > 0$, en n) $\mu^2 = 0$ y o) $\mu^2 < 0$	23
3.9. Gráfica de $V(\phi)$ considerando $\kappa = 0$ y $\lambda > 0$, mientras que en el inciso p) $\mu^2 > 0$, en q) $\mu^2 = 0$ y s) $\mu^2 < 0$. Note que el potencial es simétrico respecto al eje.	23

Lista de símbolos

\mathcal{L}	Función Lagrangiana
D_μ	Derivada covariante
γ^μ	Matrices de Dirac
\mathcal{L}_H	Lagrangiano de Higgs
M	Didoblete
$V(\Phi)$	Potencial de Higgs
g_1, g_2	Constantes de acoplamiento para $U(1)$ y $SU(2)$
S	Acción
θ_w	Ángulo de Weinberg

Glosario

Bosón de Higgs	Partícula hipotética cuya existencia es predicha por el Modelo Estándar.
Campo de Higgs	Campo o campos de energía situados en lo que sería el vacío perfecto.
Cuanto	Magnitud física que es continua a nivel macroscópico, pero que se presenta discreta en el nivel microscópico de la naturaleza.
Electrodébil	Teoría que explica dentro de un mismo marco conceptual el electromagnetismo y la fuerza nuclear débil.
Teoría de norma	Conjunto de las teorías cuánticas de los campos relativistas que tienen la propiedad de ser invariantes respecto a un determinado grupo de transformaciones del espacio y del tiempo.
Simetría	Es algo que se puede realizar sobre un objeto tal que después de haber terminado, el objeto luce exactamente igual (Weyl).
Ruptura espontánea de simetría	Cuando el Hamiltoniano de un sistema es invariante bajo una operación de simetría, pero los estados de mínima no lo son, se dice que la simetría está espontáneamente rota, es decir, aplicando el operador de simetría a estos estados transforman en un diferente estado.

Capítulo 1

Introducción

En sus últimos años, cuando Einstein trabajaba en el Instituto de Estudios Avanzados en Princeton, se preocupó y dedicó enormemente por hallar un marco conceptual que englobara su teoría general de la relatividad con el electromagnetismo. Aunque falló en su intento, la línea de pensamiento por él marcada quedó impresa en la ciencia y muchos físicos después de Einstein buscaron teorías unificadas que englobaran a las fuerzas fundamentales de la naturaleza.

Así, la primera unificación con éxito se logró con la llamada teoría electrodébil [1], que unifica dos de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza: débiles y electromagnéticas [2]. Para lograr dicha unificación, los científicos extendieron el concepto de simetría para incluir transformaciones que varíen de punto a punto en el espacio; conocidas como teorías de norma. En este nuevo formalismo una simetría de norma requiere la existencia de campos que representen a las fuerzas de la naturaleza, donde las interacciones se dan como el intercambio de partículas [3].

Así, la teoría electrodébil es una teoría de norma basada en un grupo de simetría $SU(2)_L \times U(1)_L$. Esta teoría ha sido enormemente exitosa al describir las interacciones débiles y electromagnéticas entre los constituyentes más fundamentales de la materia, quarks y leptones. Las partículas mediadoras de las interacciones son los bosones de norma masivos W^\pm y Z para la fuerza débil, mientras que la interacción electromagnética ocurre a través del fotón γ . Sin embargo, incluir en el Lagrangiano de la teoría en forma explícita términos de masa para los bosones de norma débiles, así como para quarks y leptones, destruye la invariancia de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Una solución a este problema es incluir en la teoría un potencial generado por un campo escalar complejo doblete bajo el grupo $SU(2)_L$. Este campo adquiere un valor esperado no nulo en el estado de mínima energía que rompe la simetría electrodébil $SU(2)_L \times U(1)_Y$ a la simetría electromagnética $U(1)_Q$. Obteniendo del término cinético del campo escalar las masas para los bosones de norma (W^\pm , Z) y de las interacciones entre fermiones con este campo escalar las masas quarks y leptones.

Como remanente de este proceso, queda una partícula escalar física neutra cuya masa podría ser del orden de (250 GeV); esta partícula es llamada bosón de Higgs (H^0). La masa de este bosón es el único parámetro desconocido del sector escalar de la teoría electrodébil. Esta partícula hasta la fecha ha sido elusiva a los detectores, se espera sea encontrada experimentalmente en el Large Hadron Collider (LHC) ó en el Next Linear Collider (NLC).

Al sector de la teoría electrodébil que emerge de agregar este nuevo campo escalar se le conoce como sector de Higgs cuyo potencial tiene la forma:

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (1.1)$$

si ϕ transforma como doblete de $SU(2)_L$. Cuestiones como ¿quién genera el potencial de Higgs?, ¿cómo se genera este potencial? son hoy en día preguntas abiertas en la física de partículas. Como primer paso encaminado a dar una correcta solución a las preguntas planteadas es conocer y analizar las simetrías y propiedades del potencial de Higgs. Naciendo así este trabajo de tesis, cuyo objetivo es encontrar la forma del potencial dado en Ec. 1.1, considerando que éste es una

función continua de un campo escalar ϕ que transforma como singlete bajo un grupo de norma dado. Haciendo un análisis de estabilidad y usando una simetría global que presenta el Modelo Estándar encontraremos finalmente la forma explícita de este potencial.

Este trabajo está estructurado en dos partes.

En la primera se considera que el potencial de Higgs es una función continua de la variable real ϕ , se estudia la estabilidad con mínimos globales y se analizan todas las posibles formas de este potencial.

En la segunda, se hace un breve estudio de la simetría custodial, la cual podría explicar la elección final del potencial de Higgs.

El presente trabajo de tesis se organiza de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se presenta de manera breve la teoría electrodébil y se describen los sectores que la componen. Además, se estudia el grupo de simetría de la teoría electrodébil y el problema que existe en este modelo con los términos de masa para las partículas de la teoría.

En el capítulo 3 se describe el mecanismo de Higgs y se hace un estudio completo del potencial de Higgs con la finalidad de obtener la forma explícita de éste, donde se consideran criterios de estabilidad. Dada la forma explícita del potencial de Higgs se ejemplifica la generación de masas para las partículas de la teoría a través de la ruptura de la simetría.

En el capítulo 4 se explica que cuando la simetría de norma de la teoría electrodébil es rota, existe una simetría que protege la relación de las masas entre los bosones de norma W^\pm y Z , ésta es llamada simetría custodial. Finalmente se escribe un Lagrangiano para el sector Higgs en términos de una representación donde sea manifiesta la simetría custodial.

El capítulo 5 se reserva para las conclusiones y algunas perspectivas del trabajo de tesis.

Capítulo 2

La Teoría Electrodébil del Modelo Estándar.

En el presente capítulo se discute la teoría electrodébil del Modelo Estándar. Se presenta de manera breve el sector fermiónico y el sector de norma, así como los números cuánticos Q , T_3 e Y correspondientes. También se estudia el grupo de simetría de la teoría. Se realizan preguntas que resaltan los puntos más importantes que existen en estos sectores y la motivación que existe para estudiarlos.

2.1. Los Sectores de la Teoría Electrodébil

La teoría electrodébil es una Teoría Cuántica de Campo (TCC) que describe las interacciones electromagnéticas y débiles de quarks y leptones, los cuales son las componentes más fundamentales de la materia descubiertos a la fecha. Las fuerzas electromagnéticas y débiles son introducidas como interacciones de norma [4]. En esta teoría se definen dos sectores: el sector fermiónico y el sector bosónico vectorial de norma.

2.1.1. Sector Fermiónico

En la teoría electrodébil la materia¹ está descrita por campos fermiónicos organizados en tres generaciones, como se muestra en el Cuadro 2.1. Puesto que los procesos débiles violan paridad [5], es decir, distinguen entre componentes izquierdas y derechas de los campos fermiónicos, cada componente será expresada de acuerdo al siguiente esquema:

Las componentes izquierdas están representados por dobletes que transforman bajo el grupo $SU(2)_L$. Cada generación esta formada por dos sabores de quarks (u^i, d^i) el índice i indica la carga de color y dos leptones (neutrino y leptón correspondiente).

Las componentes derechas se transforman como singletes² bajo $SU(2)_L$.

Se definen los números cuánticos Q , T_3 e Y , donde Q es la carga eléctrica, T_3 es la componente tres de isospín débil e Y es la hipercarga la cual se define en términos de T_3 y Q , como

$$Y = 2Q - 2T_3. \tag{2.1}$$

Para los fermiones de la teoría, estos números cuánticos se muestran en el Cuadro 2.2 .

¹Entendiéndose por materia a las componentes fundamentales que la constituyen, es decir, quarks y leptones, éstos se caracterizan por tener espín 1/2, además obedecen la estadística de Fermi por lo que son catalogados como

CAPÍTULO 2. LA TEORÍA ELECTRODÉBIL DEL MODELO ESTÁNDAR.
2.1. LOS SECTORES DE LA TEORÍA ELECTRODÉBIL

Notación	Primera generación	Segunda generación	Tercera generación	Carga eléctrica
$L = \begin{pmatrix} N \\ E \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$R = E_R$	e^-_R	μ^-_R	τ^-_R	-1
$Q = \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c^i \\ s^i \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t^i \\ b^i \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
$R_u = U_R$	u^i_R	c^i_R	t^i_R	2/3
$R_d = D_R$	d^i_R	s^i_R	b^i_R	-1/3

Cuadro 2.1: Generaciones de fermiones de la teoría electrodébil.

Número Cuántico	U_R	U_L	D_R	D_L	N_L	E_R	E_L
Y	4/3	1/3	-2/3	1/3	-1	-2	-1
T_3	0	1/2	0	-1/2	1/2	0	-1/2
Q	2/3	2/3	-1/3	-1/3	0	-1	-1

Cuadro 2.2: Números cuánticos asociados a los fermiones de la teoría electrodébil.

Aunque hemos definido a todos los constituyentes fundamentales de la materia y sus números cuánticos respectivos, en el presente trabajo de tesis se va a tratar solamente el modelo de leptones propuesto por Weinberg [6], ya que nuestro objetivo principal es analizar la posible forma del potencial de Higgs y por lo tanto sólo se ejemplificará el funcionamiento del mecanismo de Higgs para el sector bosónico y la primer generación de leptones del sector fermiónico.

2.1.2. Sector de Norma

Por otra parte, los bosones³ mediadores de las interacciones entre las componentes fundamentales de la materia son descritos por campos de norma. En la teoría electrodébil, las interacciones electromagnéticas y débiles se describen usando los siguientes campos:

Un campo vectorial de norma B_μ , el cual transforma bajo el grupo de norma $U(1)_Y$ cuyo generador de grupo es la hipercarga Y .

Y tres campos vectoriales de norma W_μ^a que transforman bajo el grupo de norma $SU(2)_L$, cuyos generadores de grupo T_a (con $a = 1, 2, 3$) son escritos en términos de las matrices de Pauli como:

$$T^a = \frac{1}{2}\tau^a; \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

con relaciones de conmutación dadas por

$$[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc}T_c \quad \text{e} \quad [Y, Y] = 0, \quad (2.3)$$

donde ϵ^{abc} son los símbolos de Levi-Civita totalmente antisimétricos en sus índices.

fermiones.

²A lo largo de esta revisión, se supone que los neutrinos, no tienen masa y sólo aparecen sus componentes izquierdas.

³Éstos se caracterizan por tener espín 1, además de obedecer la estadística de Bose.

2.2. Lagrangiano de Interacción

Una vez puntualizados los sectores que componen la teoría electrodébil, lo siguiente es escribir el Lagrangiano de interacción entre leptones y bosones de norma, el cual debe ser invariante bajo transformaciones del grupo de simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$.

2.2.1. Lagrangiano del Sector Fermiónico

El Lagrangiano que describe el término cinético para leptones está dado por:

$$\mathcal{L}_F = \sum_{m=1}^3 (\bar{L}_m i\gamma^\mu D_\mu^l L_m + \bar{R}_m i\gamma^\mu D_\mu^r R_m), \quad (2.4)$$

donde el subíndice m indica la generación de leptones a considerar y D_μ^l y D_μ^r son las derivadas covariantes dadas por

$$\begin{aligned} D_\mu^l &= \partial_\mu - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu - ig_2 T_a W_\mu^a \\ D_\mu^r &= \partial_\mu - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde g_2 y g_1 son las constantes de acoplamiento de los grupos $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$, respectivamente. Note que la derivada covariante conduce a términos de interacción entre los campos de tipo

$$\textit{leptón} - \textit{campo de norma} - \textit{leptón}.$$

A estas interacciones entre los bosones de norma y fermiones se les conoce como corrientes cargadas, en el caso de los acoplamientos de W^\pm , y corrientes neutras, en el caso de los acoplamientos del Z y del γ [7].

2.2.2. Lagrangiano del Sector de Norma

Por otra parte, el Lagrangiano que describe el término cinético para los campos de norma así como sus autointeracciones es

$$\mathcal{L}_N = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

donde $W_{\mu\nu}^a$ y $B_{\mu\nu}$ son los tensores antisimétricos de intensidad de campo definidos como:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \epsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Finalmente, el Lagrangiano que describe las interacciones entre leptones y campos de norma está dado por la suma de las Ecs 2.4 y 2.6

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_F \\ &= -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \sum_{m=1}^3 (\bar{L}_m i\gamma^\mu D_\mu^l L_m + \bar{R}_m i\gamma^\mu D_\mu^r R_m). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Este Lagrangiano es invariante bajo las transformaciones simultáneas

$$\begin{aligned} L_m &\rightarrow L'_m = e^{i\alpha_a(x)T^a + i\beta(x)Y} L_m, & R_m &\rightarrow R'_m = e^{i\beta(x)Y} R_m, \\ W_\mu^a &\rightarrow W_\mu'^a = W_\mu^a - \frac{1}{g_2} \partial_\mu \alpha^a(x) - \epsilon_{abc} \alpha^b(x) W_\mu^c, & B_\mu &\rightarrow B'_\mu = B_\mu - \frac{1}{g_1} \partial_\mu \beta(x), \end{aligned} \quad (2.9)$$

CAPÍTULO 2. LA TEORÍA ELECTRODÉBIL DEL MODELO ESTÁNDAR.
2.3. EL PROBLEMA DE MASA EN EL LAGRANGIANO DE INTERACCIÓN

es decir, tiene una simetría de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$. No obstante cabe mencionar que en este Lagrangiano (Ec. 2.8), no se incluyen términos de masa para los campos de la teoría, lo que es inconsistente con la evidencia experimental [8], pues de ésta se sabe que los bosones de norma mediadores de la interacción débil y leptones son entes masivos cuyos valores son $M_W = 80,424 \pm 0,038$ GeV y $m_e = 0,5 \pm 0,0021$ MeV (por citar un ejemplo). Esto conlleva a realizar las siguientes preguntas:

- ¿Porqué no aparecen términos de masa en el Lagrangiano de la Ec. 2.8?
- ¿Tiene una relevancia particular estos términos para haber sido omitidos?

2.3. El problema de masa en el Lagrangiano de Interacción

Para contestar estas preguntas. Consideremos el Lagrangiano del campo electromagnético [9] dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor antisimétrico de intensidad de campo. Este tensor contiene toda la información referente a los campos eléctricos y campos magnéticos y está dado por

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu.$$

El Lagrangiano de la Ec. 2.10 es invariante bajo la transformación de norma

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x)$$

es decir, tiene una simetría de norma Abelian U(1). Cuando es agregado un término de masa al Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M_A^2 A_\mu A^\mu. \quad (2.11)$$

Corroborandose la invariancia de norma del Lagrangiano (Ec. 2.11)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M_A^2 A'_\mu A'^\mu \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M_A^2 [A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x)] [A^\mu - \frac{1}{e}\partial^\mu\Lambda(x)] \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M_A^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{e}A_\mu\partial^\mu\Lambda(x) + \frac{1}{2}e^{-2}\partial_\mu\Lambda(x)\partial^\mu\Lambda(x) \neq \mathcal{L}, \end{aligned}$$

Se observa que este Lagrangiano ya no es invariante de norma y esto trae como consecuencia la no conservación de una cantidad física fundamental para la teoría electromagnética, esta es, la carga eléctrica [10]. Análogamente, puede probarse que un término de masa para una teoría basada en un grupo de simetría $SU(N)$ [11], también estropea la invariancia de norma de ésta. Por lo que agregar términos de masa para los campos de norma en el Lagrangiano de la Ec. 2.8 estaría de igual forma violando la invariancia de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Adicionalmente, si se incluyen explícitamente términos de masa para los leptones en el Lagrangiano de la Ec. 2.8, se tiene (para el electrón)

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} &= -m_e\bar{e}e = -m_e\bar{e}(P_L + P_R)e \\ &= -m_e(\bar{e}P_L^2e + \bar{e}P_R^2e) = -m_e(\bar{e}P_L e_L + \bar{e}P_R e_R) \\ &= -m_e(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R), \end{aligned} \quad (2.12)$$

CAPÍTULO 2. LA TEORÍA ELECTRODÉBIL DEL MODELO ESTÁNDAR.
2.3. EL PROBLEMA DE MASA EN EL LAGRANGIANO DE INTERACCIÓN

donde P_L y P_R son los proyectores izquierdo y derecho respectivamente. Observe que la Ec. 2.12 no es invariante bajo la transformación de norma $SU(2)_L$ ya que e_L es una componente de un doblete de $SU(2)_L$, mientras e_R es un singlete bajo ese grupo.

Así, la incorporación de términos de masa para leptones y bosones de norma en el Lagrangiano de interacción (Ec. 2.8) conduce a una violación manifiesta de la simetría de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Obteniendo una teoría carente de sentido, esto conlleva a realizar la siguiente pregunta que fue todo un misterio por revelar hasta a mediados de los años sesenta.

¿Existe alguna forma de generar términos de masa para las partículas de la teoría sin violar la invariancia de norma del Lagrangiano?

La respuesta es: **Sí**, es posible introducir los términos de masa sin violar la invariancia de norma por medio del llamado **mecanismo de Higgs**, el cual se presenta en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

El Potencial de Higgs

En este capítulo se estudia el potencial de Higgs a través de la variación de los parámetros correspondientes. Se ejemplifica como funciona el mecanismo de Higgs para una teoría abeliana $U(1)$, así como para la teoría electrodébil. Se obtienen los términos de masa para los bosones de norma W^\pm y Z . Para los leptones se ejemplifica con la masa del electrón.

3.1. Mecanismo de Higgs

El mecanismo de Higgs es un método que genera términos de masa a través de la *ruptura espontánea de la simetría*¹ (RES) sin afectar la invarianza de norma de una teoría, fue propuesto en 1964 por los físicos belgas Robert Brout y Francois Englert [13], e independientemente por el físico inglés Peter Higgs [12].

La idea fundamental de este mecanismo consiste en introducir un nuevo sector a la teoría electrodébil que se le conoce como sector escalar, el cual agrega un campo escalar a la teoría descrito por el siguiente Lagrangiano

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - V(\varphi), \quad (3.1)$$

donde la dimensión² de este Lagrangiano debe ser tal que cuando se integre sobre todo el espacio-tiempo genere un escalar llamado *acción*, dado por

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi),$$

de manera que su dimensión en unidades de energía debe ser igual a cuatro. Si se analiza el primer término de la Ec. 3.1 se observa que la derivada $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ tiene dimensión igual a uno. Cuando ésta actúa sobre el campo escalar $\varphi(x^\mu)$, cuya dimensión también es uno, conlleva a que la expresión $(\partial_\mu \varphi)$ tenga dimensión igual a dos y cuando ésta contrae con $(\partial^\mu \varphi)$, la dimensión total del término cinético es igual a cuatro.

Así $V(\varphi)$, es el potencial más general posible permitido por la teoría y debe tener dimensión en energía igual a cuatro. Además, para que dicho potencial tenga relevancia física, matemáticamente debe ser estable con mínimos globales a toda escala energética.

Tomando en cuenta lo anterior procedemos a encontrar la forma explícita de este potencial.

¹(RES) ocurre cuando los estados de mínima energía (el vacío) de una teoría adquieren un valor esperando distinto de cero.

²Entendiéndose por dimensión al exponente de las unidades de medición de una cantidad física. A lo largo de esta revisión se eligen unidades donde $\hbar = c = 1$, y por lo tanto $[\text{longitud}] = [\text{tiempo}] = [\text{energía}]^{-1} = [\text{masa}]^{-1}$.

3.2. Potencial de Higgs

Para extender la estructura del potencial de Higgs, estudiaremos el potencial de la manera más sencilla considerando que este es una función continua de variable real φ y por tanto puede expandirse en serie de Taylor alrededor de un punto φ_0 , esto es:

$$V(\varphi) = V(\varphi_0) + (\varphi - \varphi_0) \left(\frac{dV}{d\varphi} \right)_{\varphi_0} + \frac{1}{2!} (\varphi - \varphi_0)^2 \left(\frac{d^2V}{d\varphi^2} \right)_{\varphi_0} + \frac{1}{3!} (\varphi - \varphi_0)^3 \left(\frac{d^3V}{d\varphi^3} \right)_{\varphi_0} + \frac{1}{4!} (\varphi - \varphi_0)^4 \left(\frac{d^4V}{d\varphi^4} \right)_{\varphi_0}, \quad (3.2)$$

donde se ha expandido hasta cuarto orden, ya que ésta es la configuración mínima en el campo φ con dimensión en energía igual a cuatro. Si el campo es redefinido como $\phi = \varphi - \varphi_0$, el potencial se escribe como:

$$V(\phi) = V_0 + \left(\frac{dV}{d\phi} \right)_0 \phi + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2V}{d\phi^2} \right)_0 \phi^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3V}{d\phi^3} \right)_0 \phi^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{d^4V}{d\phi^4} \right)_0 \phi^4.$$

El término cinético no se ve afectado por esta redefinición, por lo que el Lagrangiano de la Ec. 3.1 sigue siendo esencialmente el mismo. El subíndice 0 indica que la cantidad debe ser evaluada en $\phi = 0$.

El término V_0 es simplemente una constante que puede ser definida igual a cero, sin pérdida de generalidad, quedando $V(\phi)$ como

$$V(\phi) = \left(\frac{dV}{d\phi} \right)_0 \phi + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2V}{d\phi^2} \right)_0 \phi^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3V}{d\phi^3} \right)_0 \phi^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{d^4V}{d\phi^4} \right)_0 \phi^4. \quad (3.3)$$

El análisis de estabilidad de este potencial se llevará a cabo a través del estudio de sus puntos de equilibrio. Entendiéndose como estabilidad a la condición de que cualquier punto descrito sobre el potencial tienda a un estado de mínima energía.

Como es sabido, en estos puntos la primera derivada del potencial es igual a cero, por lo que el primer término de la Ec. 3.3 se anula [14]. Para saber si estos puntos son de equilibrio estable o inestable³ se debe evocar a la segunda derivada.

La Ec. 3.3 se reescribe como

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2!} \phi^2 + \frac{\kappa}{3!} \phi^3 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (3.4)$$

donde

$$\mu^2 = \left(\frac{d^2V}{d\phi^2} \right)_0, \quad \kappa = \left(\frac{d^3V}{d\phi^3} \right)_0, \quad \lambda = \left(\frac{d^4V}{d\phi^4} \right)_0,$$

parámetros cuya dimensión es dos para μ^2 , uno para κ y adimensional para λ . El estudio del potencial es lo más general posible y no haremos suposiciones al respecto, así que cada parámetro $\lambda_i = \{\mu^2, \kappa, \lambda\}$ podrá ser $\lambda_i > 0$, $\lambda_i < 0$ ó $\lambda_i = 0$. Nuestro estudio consistirá en analizar todas las posibles combinaciones para las cuales, los parámetro λ_i mantiene un potencial estable con mínimos globales.

3.2.1. Análisis considerando sólo $\mu^2 \neq 0$

Considerando a los parámetros $\kappa = \lambda = 0$ se tiene que el potencial es:

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2!} \phi^2,$$

así que, por inspección del parámetro μ^2 se determinan dos casos:

³Punto de equilibrio inestable: si un sistema sufre un desplazamiento de su posición de equilibrio éste se alejará indefinidamente. Punto de equilibrio estable, la respuesta del sistema frente a perturbaciones del punto de equilibrio es volver u oscilar alrededor del punto de equilibrio.

- a) Si $\mu^2 > 0$ el punto de equilibrio es estable, por tanto el potencial tiene un mínimo global en $\phi = 0$.
- b) Cuando $\mu^2 < 0$ el punto de equilibrio es inestable y el potencial tiene un máximo global en $\phi = 0$,

estas situaciones se muestran en la Fig. 3.1.

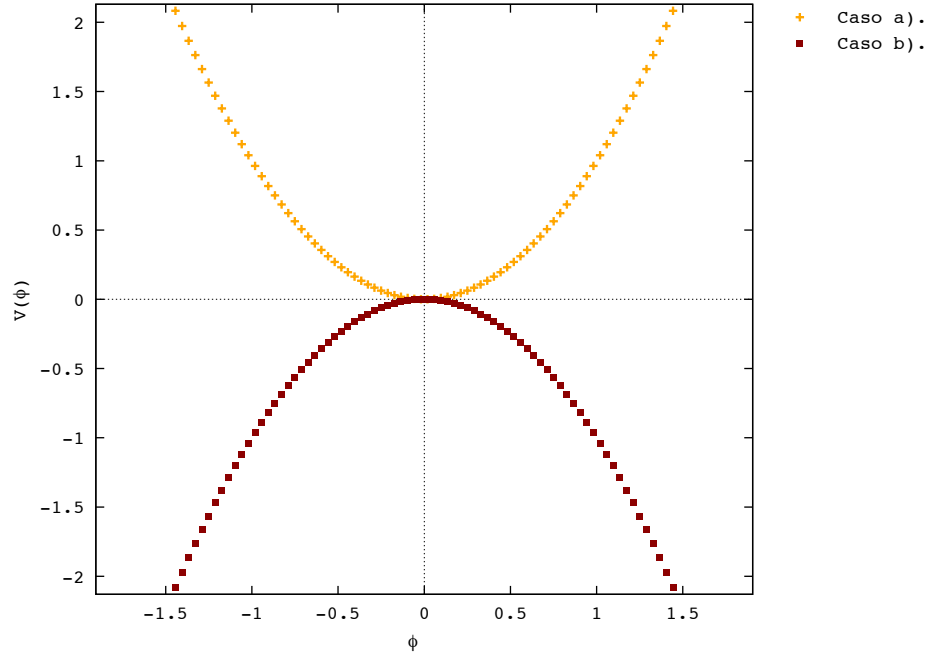


FIGURA 3.1: Gráfica del potencial considerando solo el primer término, note que $V(\phi)$ es simétrico respecto a su eje.

El potencial en el inciso a) muestra estabilidad, mientras que el inciso b) es totalmente inestable, veamos que ocurre cuando es agregado el siguiente término.

3.2.2. Análisis de las combinaciones entre los parámetros μ^2 y κ

Cuando es agregado el segundo parámetro al potencial, es decir, $\kappa \neq 0$ se tiene que

$$V(\phi) = \frac{1}{2!}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{3!}\kappa\phi^3,$$

los puntos de equilibrio son $\phi = 0$ y $\phi = -2\mu^2/\kappa$.

Las posibles combinaciones de los parámetros μ^2 y κ nos dan los siguientes resultados:

- a) $\mu^2 > 0$ y $\kappa > 0$ el potencial tiene un punto de equilibrio estable en $\phi = 0$ el cual corresponde a un mínimo local. En tanto a $\phi = -2\mu^2/\kappa$ se tiene un punto de equilibrio inestable donde el potencial posee un máximo local.
- b) $\mu^2 > 0$ y $\kappa < 0$ al igual que en el inciso anterior, el potencial tiene el punto de equilibrio estable en $\phi = 0$ que corresponde a un mínimo local. El punto de equilibrio inestable está en $\phi = -2\mu^2/\kappa$ y corresponde a un máximo local.

- c) $\mu^2 > 0$ y $\kappa = 0$ este caso fue analizado en la subsección anterior en el inciso a).
- d) $\mu^2 < 0$ y $\kappa > 0$ caso contrario al presentado en los incisos a) y b), el potencial ahora tiene un punto de equilibrio estable en $\phi = -2\mu^2/\kappa$, correspondiente a un mínimo local. Mientras que el punto de equilibrio inestable se encuentra en $\phi = 0$ donde el potencial tiene un máximo local.
- e) $\mu^2 < 0$ y $\kappa < 0$ la situación es análoga a la presentada en el inciso anterior d).
- f) $\mu^2 < 0$ y $\kappa = 0$ el potencial fue analizado en la subsección anterior en el inciso b).

Todas estas situaciones son presentadas en las gráficas de $V(\phi)$ en la Fig. 3.2.

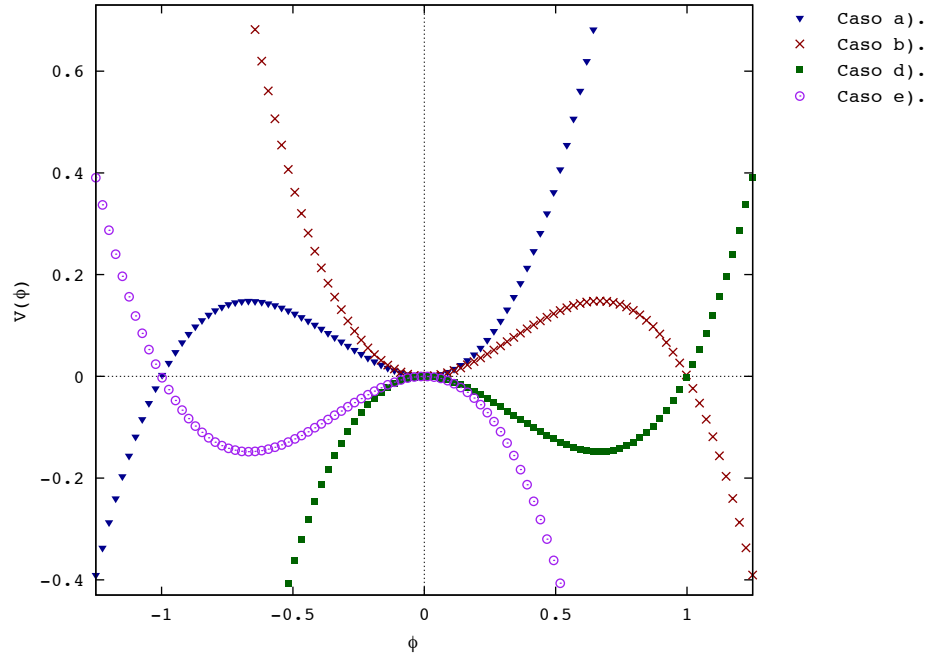


FIGURA 3.2: Gráfica de $V(\phi)$ con los dos primeros términos. En los incisos a) y b), μ^2 es mayor que cero, mientras que en d) y e), μ^2 es menor que cero. En todos los incisos κ varía su valor.

Ahora bien si,

- g) $\mu^2 = 0$ y $\kappa > 0$ el potencial tiene un punto de inflexión en $\phi = 0$, es decir, un punto donde el potencial no tiene máximo ni mínimo.
- h) $\mu^2 = 0$ y $\kappa < 0$ este caso es idéntico al discutido en el inciso anterior g).

Las gráficas de ambas situaciones son mostradas en la Fig. 3.3.

Los casos presentados en los incisos a), b), d), e) y f) el potencial es totalmente inestable, esto porque no existen mínimos globales. Para los incisos g) y h) matemáticamente el potencial no es estable ni inestable debido a la existencia de puntos de inflexión. Sin embargo, la estabilidad consiste en que la naturaleza tiende a un estado mínimo de energía, así que en ese sentido los incisos g) y h) también son inestables. Por lo que todos estos incisos se excluyen de manera inmediata para ser la posible forma del potencial. Mientras que el inciso c) $V(\phi)$ muestra estabilidad. Veamos que sucede cuando es agregado el tercer término.

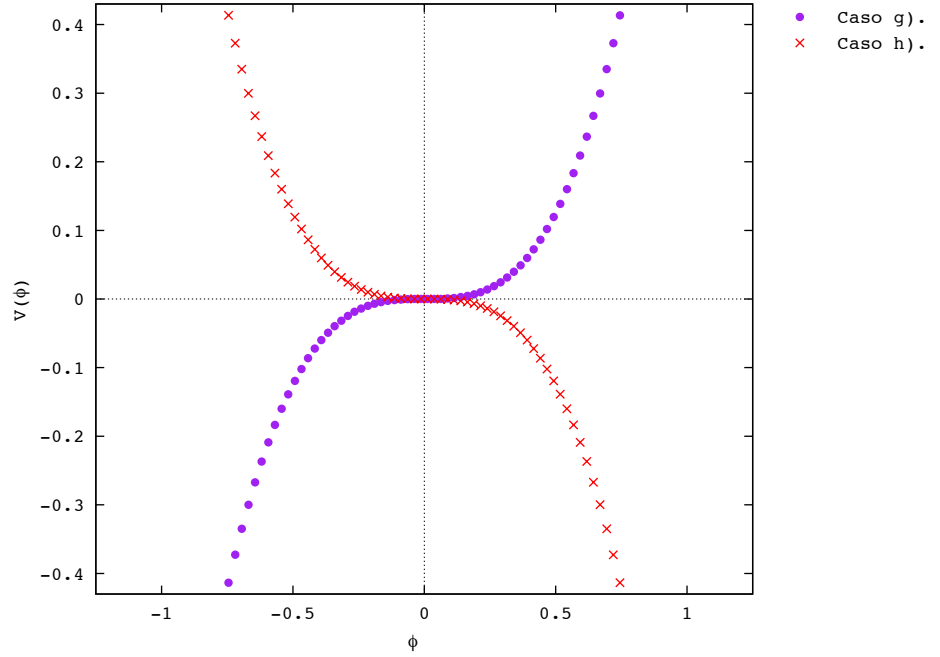


FIGURA 3.3: Gráfica de $V(\phi)$ con los dos primeros términos. En los incisos g) y h) μ^2 es igual a cero, por lo tanto el potencial tiene puntos de inflexión.

3.2.3. Análisis de las combinaciones entre los parámetros μ^2 , κ y λ

Cuando es agregado el tercer y último parámetro $\lambda \neq 0$ el potencial es

$$V(\phi) = \frac{1}{2!}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{3!}\kappa\phi^3 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4,$$

los puntos de equilibrio son $\phi = 0$ y $\phi = \left(-3\kappa \pm \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2}\right)/2\lambda$ respectivamente.

La diversidad de combinaciones en los parámetros es extensa, no obstante se analizarán dieciocho de los veintisiete posibles casos, esto debido a que los nueve restantes se hacen considerando λ igual a cero, lo cual se ha presentado en subsecciones previas.

Para realizar el análisis de $V(\phi)$, se considera primeramente que λ es menor que cero [incisos a) - i)], para posteriormente hacer el análisis con λ mayor a cero. Dicho lo anterior

- a) Si $\mu^2 > 0$ y $\kappa > 0$ el potencial tiene dos puntos de equilibrio inestable, uno en $\phi = \left(-3\kappa + \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2}\right)/2\lambda$ que corresponde a un máximo local y el segundo en $\phi = \left(-3\kappa - \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2}\right)/2\lambda$ corresponde a un máximo global. Además, posee un punto de equilibrio estable en $\phi = 0$ correspondiente a un mínimo local en éste.
- b) Cuando $\mu^2 = 0$ y $\kappa > 0$ el potencial tiene dos puntos, en $\phi = -3\kappa/\lambda$ se tiene un máximo local y en $\phi = 0$ un punto de inflexión.
- c) En $\mu^2 < 0$ y $\kappa > 0$ el potencial tiene un punto de equilibrio estable en $\phi = \left(-3\kappa - \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2}\right)/2\lambda$ el cual corresponde a un mínimo local. Mientras que los

puntos de equilibrio inestable son dos, el primer punto se encuentran en $\phi = \left(-3\kappa + \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2}\right)/2\lambda$ y el segundo en $\phi = 0$ que compiten a un máximo global y un máximo local respectivamente.

La gráficas de estos potenciales son mostradas en la Fig. 3.4.

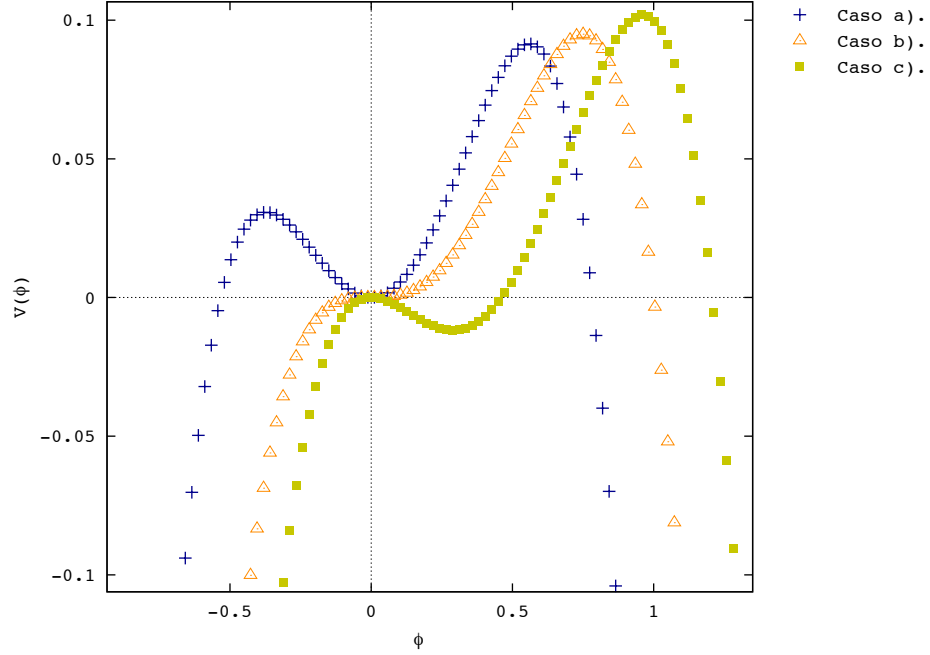


FIGURA 3.4: Gráfica de $V(\phi)$ considerando $\kappa > 0$ y $\lambda < 0$, mientras que en el inciso a) $\mu^2 > 0$, en b) $\mu^2 = 0$ y c) $\mu^2 < 0$.

Ahora bien, si

- d) $\mu^2 > 0$ y $\kappa < 0$ este caso es análogo gráficamente al presentado en el inciso a), sólo que en esta ocasión se tiene el máximo local en $\phi = \left(-3\kappa + \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2}\right)/2\lambda$ y el máximo global en $\phi = \left(-3\kappa - \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2}\right)/2\lambda$, mientras que el mínimo local sigue en $\phi = 0$.
- e) Cuando $\mu^2 = 0$ y $\kappa < 0$ la situación es análoga gráficamente a la presentada en el inciso b).
- f) Si $\mu^2 < 0$ y $\kappa < 0$ el potencial tiene dos puntos de equilibrio inestable en $\phi = \left(-3\kappa - \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2}\right)/2\lambda$ y $\phi = 0$, donde se encuentra un máximo global y un máximo local respectivamente. Además, hay un punto de equilibrio estable en $\phi = \left(-3\kappa + \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2}\right)/2\lambda$ cuyo mínimo es local.

Los casos presentados en estos incisos son ilustrados en la Fig. 3.5.

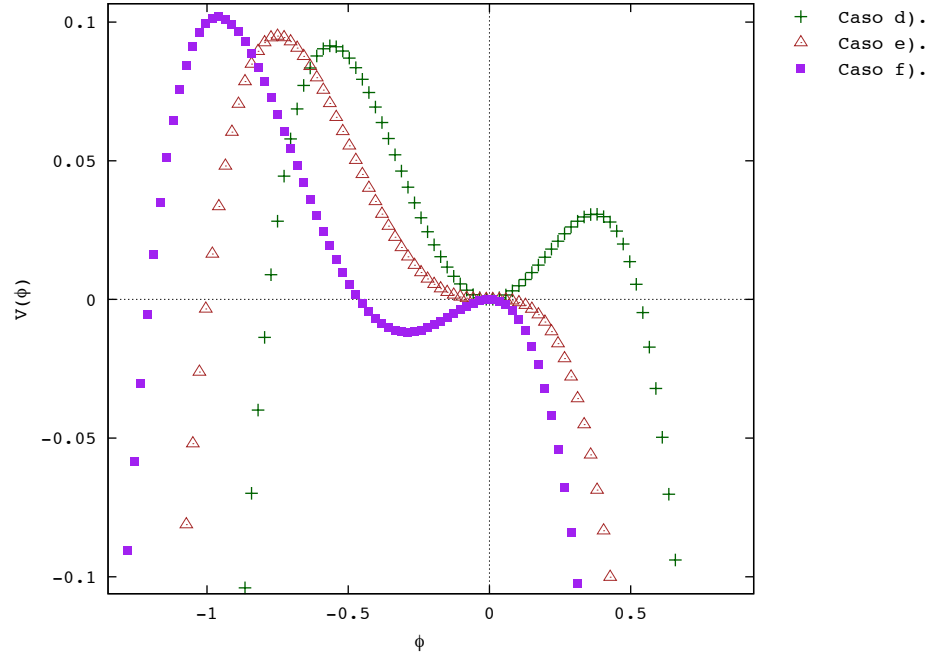


FIGURA 3.5: Gráfica de $V(\phi)$ considerando $\kappa < 0$ y $\lambda < 0$, mientras que el inciso d) $\mu^2 > 0$, en e) $\mu^2 = 0$ y f) $\mu^2 < 0$.

- g) Si $\mu^2 > 0$ y $\kappa = 0$ el potencial tiene dos máximos y ambos son globales en $\phi = \pm\sqrt{-6\mu^2/\lambda}$. El punto de equilibrio estable se encuentra en $\phi = 0$ donde se tiene un mínimo local.
- h) Cuando $\mu^2 = 0$ y $\kappa = 0$ se tiene un punto de equilibrio inestable en $\phi = 0$ donde hay un máximo global.
- i) Elegiendo $\mu^2 < 0$ y $\kappa = 0$ el potencial tiene un punto de equilibrio inestable en $\phi = 0$ el cual corresponde a un máximo global.

Estas situaciones son presentadas en la siguiente Fig. 3.6

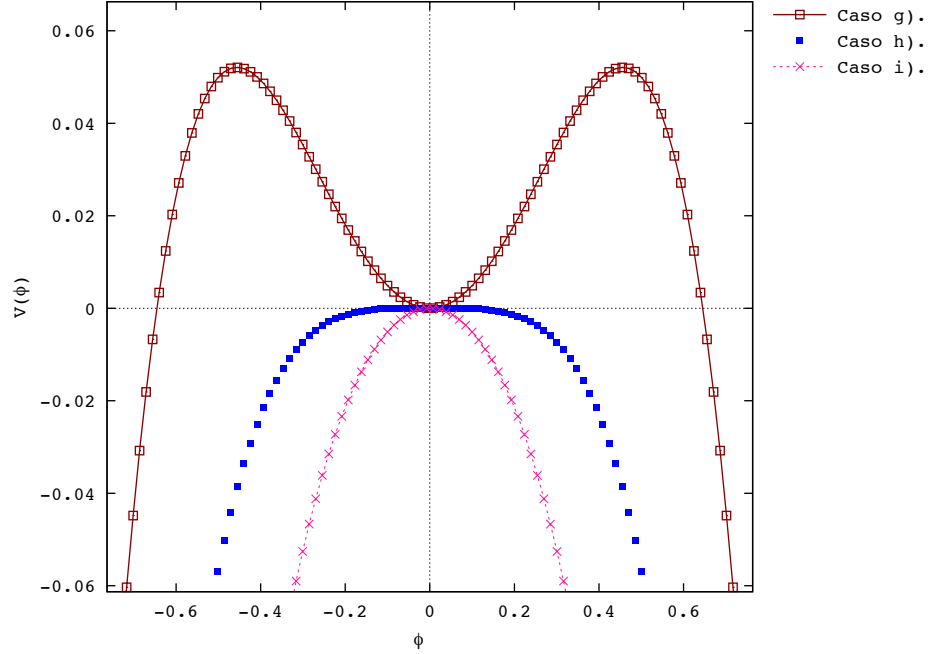


FIGURA 3.6: Gráfica de $V(\phi)$ considerando $\kappa = 0$ y $\lambda < 0$, mientras que el inciso g) $\mu^2 > 0$, en h) $\mu^2 = 0$ e i) $\mu^2 < 0$. Note que el potencial es simétrico con respecto a su eje.

Note que la elección del parámetro λ juega un papel importante en la estabilidad del potencial, ya que en todos los incisos hasta este momento presentados el potencial muestra inestabilidad, pues no existe ningún mínimo global. Esto lleva a concluir que, por estabilidad del potencial el parámetro λ debe ser mayor a cero. De ahora en adelante se tendrá en cuenta esta consideración.

Continuando con el análisis:

- j) Si ahora se elige $\mu^2 > 0$ y $\kappa > 0$ el potencial tiene un mínimo global en el punto $\phi = \left(-3\kappa + \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2} \right) / 2\lambda$ y un mínimo local en $\phi = 0$. El equilibrio inestable se encuentra en $\phi = \left(-3\kappa + \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2} \right) / 2\lambda$ por tanto se tiene un máximo local.
- k) Cuando $\mu^2 = 0$ y $\kappa > 0$ la situación es semejante a la vista en los incisos b) y e).
- l) Si $\mu^2 < 0$ y $\kappa > 0$ se tiene un mínimo global en el punto de equilibrio $\phi = \left(-3\kappa - \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2} \right) / 2\lambda$, un máximo local en $\phi = 0$ y un mínimo local en $\phi = \left(-3\kappa + \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2} \right) / 2\lambda$.

Estos casos son ilustrados en la Fig. 3.7.

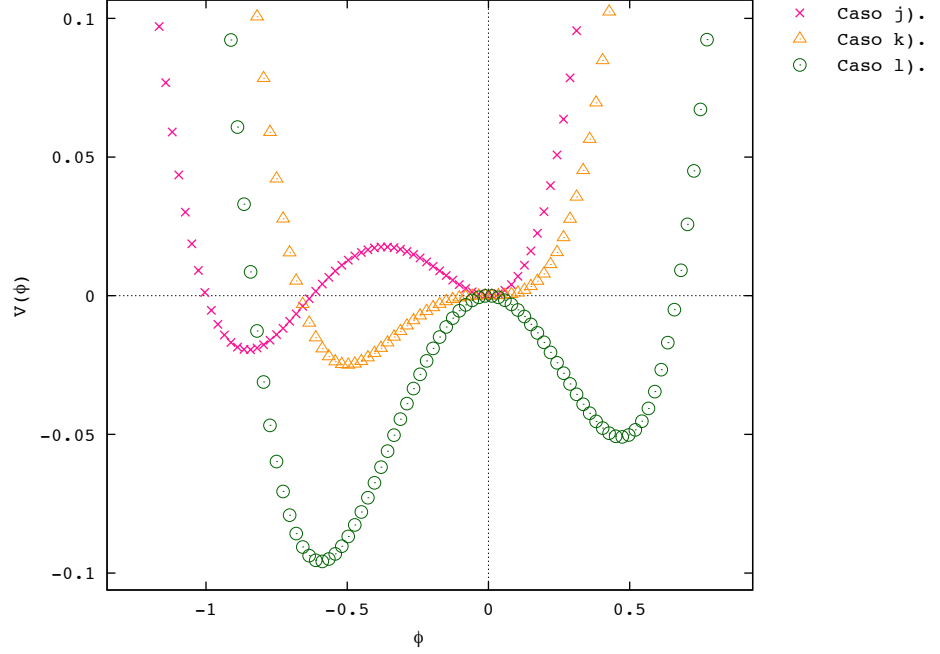


FIGURA 3.7: Gráfica de $V(\phi)$ considerando $\kappa < 0$ y $\lambda < 0$, mientras que el inciso d) $\mu^2 > 0$, en e) $\mu^2 = 0$ y f) μ^2 .

- m) Para $\mu^2 > 0$ y $\kappa < 0$ el potencial tiene dos puntos de equilibrio estable uno en $\phi = \frac{-3\kappa + \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2}}{2\lambda}$ con un mínimo global y en $\phi = 0$ con un mínimo local. El punto de equilibrio inestable está en $\phi = \frac{-3\kappa - \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2}}{2\lambda}$ con un máximo local.
- n) Si $\mu^2 = 0$ y $\kappa < 0$ ha sido comentado en los incisos b), e) y k).
- o) Cuando $\mu^2 < 0$ y $\kappa < 0$ se tienen dos puntos de equilibrio estable uno en $\phi = \frac{-3\kappa + \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2}}{2\lambda}$ con un mínimo global y en $\phi = \frac{-3\kappa - \sqrt{9\kappa^2 - 24\lambda\mu^2}}{2\lambda}$ con un mínimo local. El punto de equilibrio inestable está en $\phi = 0$ con un máximo local. Todas estas situaciones son presentadas en la Fig. 3.8.
- p) Si $\mu^2 > 0$ y $\kappa = 0$ el punto de equilibrio es $\phi = 0$ que es estable con mínimo global en éste.
- q) Eligiendo $\mu^2 = 0$ y $\kappa = 0$ el punto de equilibrio es $\phi = 0$, como en el inciso p) es estable con mínimo global.
- s) Cuando elegimos $\mu^2 < 0$ y $\kappa = 0$ el potencial tiene dos puntos de equilibrio estable en $\phi = \pm\sqrt{-6\mu^2/\lambda}$ de manera se tienen dos mínimos, éstos son globales. El máximo es local y se encuentra en $\phi = 0$. La Fig. 3.9 muestra esta situación.

Se han analizado todos los posibles casos que determinan bajo que condiciones en los parámetros λ_i , el potencial es estable con mínimos globales llegando a la siguiente conclusión:

De los potenciales analizados que muestran estabilidad destaca el presentado en el inciso s) por las siguientes razones

Ambos mínimos del potencial son globales, de hecho es el único caso en que presenta esta situación véase Fig. 3.9 .

El potencial es simétrico con respecto a su eje, lo cual como se ha visto sucede cuando el parámetro κ es elegido cero.

Tomando en cuenta estas observaciones es como se llega a que la forma del potencial es

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2!}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \quad (3.5)$$

Este resultado puede generalizarse para funciones analíticas cuya representación del potencial de Higgs se expresa como la suma de los campos, esto es

$$V(\phi) = \sum_i^n \left[\frac{\mu^2}{2!}\phi_i\phi_i + \frac{\lambda}{4!}(\phi_i\phi_i)^2 \right], \quad (3.6)$$

Cabe notar que potenciales con la forma dada en los incisos [j) - o)], muestran estabilidad y por lo tanto deben ser considerados. Una característica importante es que todos contienen el término cúbico $\kappa\phi^3$. Como se mostrará en el siguiente capítulo, la presencia de un término cúbico en el potencial de Higgs viola una simetría global llamada simetría custodial.

En lo que sigue, se considera que el potencial de Higgs es de la forma dada en la Ec. 3.5, así que, veamos como es que funciona el Mecanismo de Higgs para generar los términos de masa.

3.3. Términos de Masa

3.3.1. Mecanismo de Higgs en una Teoría Abelianiana

Para ejemplificar como funciona el Mecanismo de Higgs consideremos en primer lugar una teoría de norma Abelianiana $U(1)$ constituida por un campo escalar complejo $\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ y un campo de norma A^μ , descrita por el siguiente Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - V(\phi) \quad (3.7)$$

donde $D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$ es la derivada covariante y $V(\phi)$ el potencial escalar dado por

$$V(\phi) = \mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2 = \frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2.$$

Además, este Lagrangiano es invariante bajo las transformaciones de norma

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{ie\beta(x)}\phi, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\beta(x). \quad (3.8)$$

El espectro de partículas que describe el Lagrangiano (Ec. 3.7) depende del signo del parámetro μ^2 , esto es:

- i) Cuando $\mu^2 > 0$, el mínimo del potencial sucede en $\langle\phi\rangle_0 = 0$ y al expandir los campos alrededor de este mínimo se tiene el siguiente espectro de partículas e interacciones:
 - * Un campo de norma A_μ sin masa (el cual en la teoría electromagnética se asocia con el fotón).
 - * Un campo escalar ϕ con masa igual a μ .
 - * Autointeracciones del campo escalar, provenientes del potencial escalar. Interacciones entre el campo de norma A_μ y del campo escalar ϕ , provenientes de la deriva covariante cuando ésta actúa sobre el campo escalar ϕ .

Este potencial es innecesario ya que no arregla nada físicamente, es decir, no genera términos de masa para la teoría.

- ii) Ahora bien, cuando $\mu^2 < 0$, el campo escalar ϕ adquiere un valor esperado en el estado de mínima energía diferente de cero

$$\langle \phi \rangle_0 \equiv \langle 0 | \phi | 0 \rangle = \pm \left(-\frac{\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2} = v, \quad (3.9)$$

y el campo ϕ es expandido alrededor de éste se tiene que

$$\phi \rightarrow \langle \phi \rangle_0 + \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \phi_1 + i\phi_2). \quad (3.10)$$

Cuando el Lagrangiano de la Ec. 3.7 se escribe en términos de la expansión (Ec. 3.10) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D^\mu \phi)^* (D_\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi_1 \partial_\mu \phi_1 - 2\mu^2 \phi_1^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu \phi_2 \partial_\mu \phi_2 + ev A_\mu \partial^\mu \phi_2 + \text{Int}(\phi_1, \phi_2, A_\mu). \end{aligned} \quad (3.11)$$

El espectro de partículas que describe el Lagrangiano de la Ec. 3.11 es:

- * Un campo de norma A_μ con $M_A = ev$.
- * Un campo escalar ϕ_1 con $M_{\phi_1}^2 = -2\mu^2$.
- * Un campo escalar ϕ_2 sin masa (bosón de Goldstone⁴) [20].
- * Interacciones entre los campos ϕ_1 , ϕ_2 y el campo de norma A_μ , así como sus autointeracciones correspondientes.

Podemos encontrar una transformación particular de norma la cual elimine al bosón Goldstone del Lagrangiano (Ec. 3.11) haciendo uso de las transformaciones presentadas en la Ec. 3.8 de la siguiente forma

$$\phi = e^{i\phi_2/v} \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \phi_1) \quad \text{y} \quad A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{ev} \partial_\mu \phi_2. \quad (3.12)$$

La clave esta en notar que, si uno expande la exponencial que aparecen en la Ec. 3.12 a primer orden se obtiene que

$$\phi = e^{i\phi_1/v} \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \phi_1) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \phi_1 + i\phi_2). \quad (3.13)$$

Así, mediante el uso de la norma el Lagrangiano se escribe como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + 2\mu^2 \phi_1^2) + -\lambda v \phi_1^3 - \frac{1}{4} \lambda \phi_1^4 + \frac{1}{2} e^2 A_\mu \phi_1 A^\mu \phi_1, \quad (3.14)$$

como puede observarse todos los términos referentes al campo ϕ_2 desaparecen del Lagrangiano, debido a la elección de esta norma, la cual es llamada norma unitaria. Finalmente el espectro de partículas es:

- * Un campo de norma A_μ con $M_A = ev$.
- * Un campo escalar ϕ_1 con $M_{\phi_1}^2 = -2\mu^2$.
- * Interacciones entre los campo ϕ_1 y A_μ .

⁴Bosón escalar sin masa

Es instructivo contar los grados de libertad (gdl) de la teoría. Antes de elegir el vev diferente de cero, se tienen cuatro grados de libertad en la teoría, esto es, dos gdl para el campo escalar complejo y otros dos gdl para el campo de norma sin masa. Después de elegir el vev diferente de cero, el bosón de norma (con dos gdl) se convirtió en un ente masivo (es decir, con tres gdl) y solo hay un campo escalar con un gdl, para un total de cuatro gdl.

Este es el mecanismo de Higgs que permite generar término de masa para los bosones de norma.

3.3.2. Mecanismo de Higgs de la Teoría Electrodébil

Ahora veamos como funciona el mecanismo de Higgs en la teoría electrodébil. Para hacer esto se consideran cuatro campos escalares reales agrupados en un doblete escalar complejo dado por

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \phi^+ &= (\phi_2 + i\phi_1)/\sqrt{2} \\ \phi^0 &= (\phi_4 + i\phi_3)/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

con hipercarga $Y_\Phi = +1$, además la carga eléctrica es $Q(\phi^+) = +1$ y $Q(\phi^0) = 0$. El Lagrangiano invariante bajo transformaciones de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$ es

$$\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi), \quad (3.16)$$

donde D_μ es la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{1}{2}g_1 B_\mu Y - ig_2 W_\mu^a T_a,$$

y el potencial de Higgs está dado por

$$\begin{aligned} V(\Phi) &= \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) + \frac{1}{4}\lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2)^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Cuando el parámetro $\mu^2 < 0$, la componente neutral del doblete escalar Φ adquiere un valor esperado en el vacío diferente de cero, esto es

$$\langle \Phi \rangle_0 \equiv \langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Realizando el mismo proceso que en la sección anterior, es decir:

Se expande el doblete escalar alrededor del mínimo $\langle \Phi \rangle_0$,

$$\Phi = \Phi' + \langle \Phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_2 + i\phi_1 \\ v + H + i\phi_3 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

A primer orden en la exponencial la Ec. 3.19 se escribe como ($\alpha_a = \phi_a$ con $a = 1, 2, 3$):

$$\Phi = e^{i\alpha_a \tau^a / v} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H) \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Haciendo uso de la norma unitaria el doblete escalar

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

el término cinético $|D_\mu \Phi|^2 \equiv (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)$ del Lagrangiano (Ec. 3.16) se escribe como:

$$\begin{aligned} |D_\mu \Phi|^2 &= |(\partial_\mu - ig_2 W_\mu^a T_a - \frac{1}{2} ig_1 B_\mu Y) \Phi|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} \partial_\mu - \frac{1}{2} i(g_2 W_\mu^3 + g_1 B_\mu) & -\frac{1}{2} ig_2 (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ -\frac{1}{2} ig_2 (W_\mu^1 + iW_\mu^2) & \partial_\mu + \frac{1}{2} i(g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + \frac{1}{8} g_2^2 (v + H)^2 |W_\mu^1 + iW_\mu^2|^2 + \frac{1}{8} (v + H)^2 |g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu|^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Definiendo los bosones de norma W_μ^\pm , Z_μ y A_μ como:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad Z_\mu = \frac{-g_1 B_\mu + g_2 W_\mu^3}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad A_\mu = \frac{g_1 B_\mu + g_2 W_\mu^3}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (3.23)$$

Además, definiendo el coeficiente entre las constante de acoplamiento como $\tan \theta_w = g_1/g_2$, donde θ_w es llamado el ángulo de Weinberg. Se observa que los campos A_μ y Z_μ son ortogonales, es decir

$$\begin{aligned} A_\mu &= \sin \theta_w W_\mu^3 + \cos \theta_w B_\mu, \\ Z_\mu &= \cos \theta_w W_\mu^3 - \sin \theta_w B_\mu. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Finalmente de la Ec. 3.22 se agrupan los términos de masa para los bosones de norma:

$$\Delta \mathcal{L}_M = \frac{1}{2} M_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \quad (3.25)$$

Así, W_μ^\pm y Z_μ adquieren masa, mientras que A_μ permanece sin masa

$$M_W^2 = \frac{g_2^2}{4} v^2, \quad M_Z^2 = \frac{g_1^2 + g_2^2}{4} v^2 = \frac{M_W^2}{\cos^2 \theta_w}, \quad M_A^2 = 0. \quad (3.26)$$

Ahora bien, para generar las masas de los leptones, usamos Lagrangiano de Yukawa el cual para la primer generación ⁵ está dado por

$$\mathcal{L}_Y = -\lambda_e (\bar{L} \Phi R + \bar{R} \Phi^\dagger L). \quad (3.27)$$

Éste describe las interacciones entre el campo escalar, el electrón y el neutrino, donde los coeficientes λ_e son adimensionales y completamente arbitrarios, se les conoce con el nombre de constantes de Yukawa.

Así, cuando es elegido el vev de Φ , el electrón adquieren masa de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y &= -\lambda_e [\bar{L} \Phi R + \bar{R} \Phi^\dagger L] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_e \left[(\bar{N}_L \quad \bar{E}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} E_R + \bar{E}_R (0 \quad \bar{\nu} + H) \begin{pmatrix} N_L \\ E_L \end{pmatrix} \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_e (v + H) [\bar{E}_L E_R + \bar{E}_R E_L] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_e v \bar{E} E - \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_e \bar{E} H E. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Así, la masa para el electrón está dada por

$$m_e = -\frac{\lambda_e}{\sqrt{2}} v. \quad (3.29)$$

⁵Se muestra solo la primera generación de leptones, para ejemplificar como funciona el mecanismo de Higgs, para el resto de las generaciones ver [15]

CAPÍTULO 3. EL POTENCIAL DE HIGGS

3.3. TÉRMINOS DE MASA

De esta manera, hemos generado la masa de los bosones de norma y el electrón, todo esto preservando la simetría de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$. No obstante, el precio a pagar es la introducción al modelo de una partícula escalar física H , que no desaparece la cual es llamada *bosón de Higgs*. Esta partícula aún no ha sido descubierta, aunque en el LHC ó NLC , podría ser confirmada su existencia y la teoría electrodébil se completaría.

Un punto importante a resaltar es la relación obtenida entre las masas de los bosones de norma Z y W^\pm ,

$$\frac{M_W^2}{\cos^2 \theta_w} = M_Z^2. \quad (3.30)$$

La Ec. 3.30 nos da información muy importante del sector de Higgs, puesto que experimentalmente se satisface esta relación hasta con un rango de error muy pequeño del orden de 10^{-3} [8]. Esta relación viene de una propiedad más fundamental del ME, de la invariancia del campo escalar bajo la simetría global $SU(2)$, conocida como simetría custodial tema del siguiente capítulo.

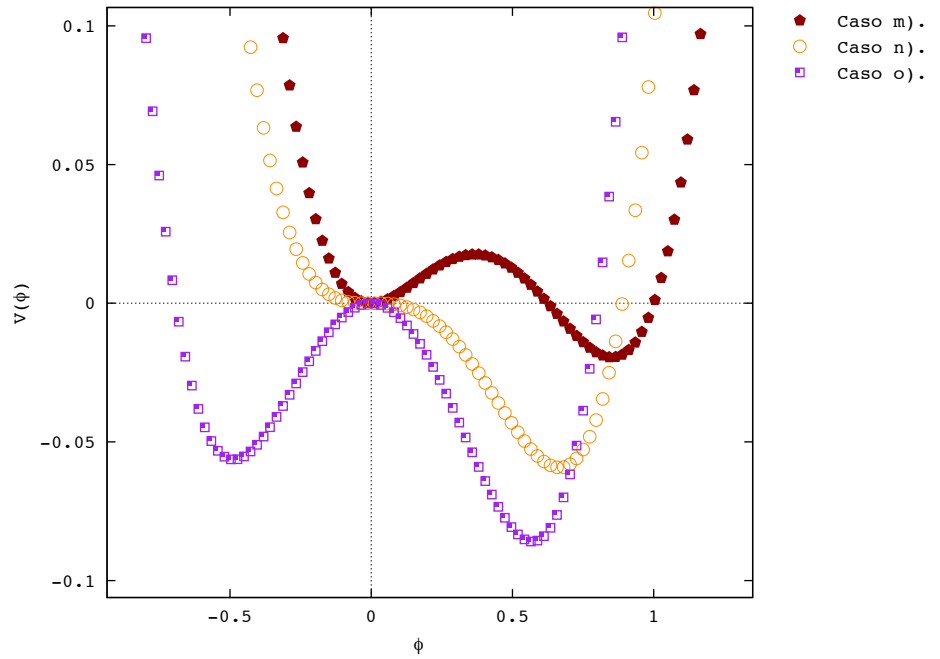


FIGURA 3.8: Gráfica de $V(\phi)$ considerando $\kappa = 0$ y $\lambda > 0$, mientras que el inciso m) $\mu^2 > 0$, en n) $\mu^2 = 0$ y o) $\mu^2 < 0$.

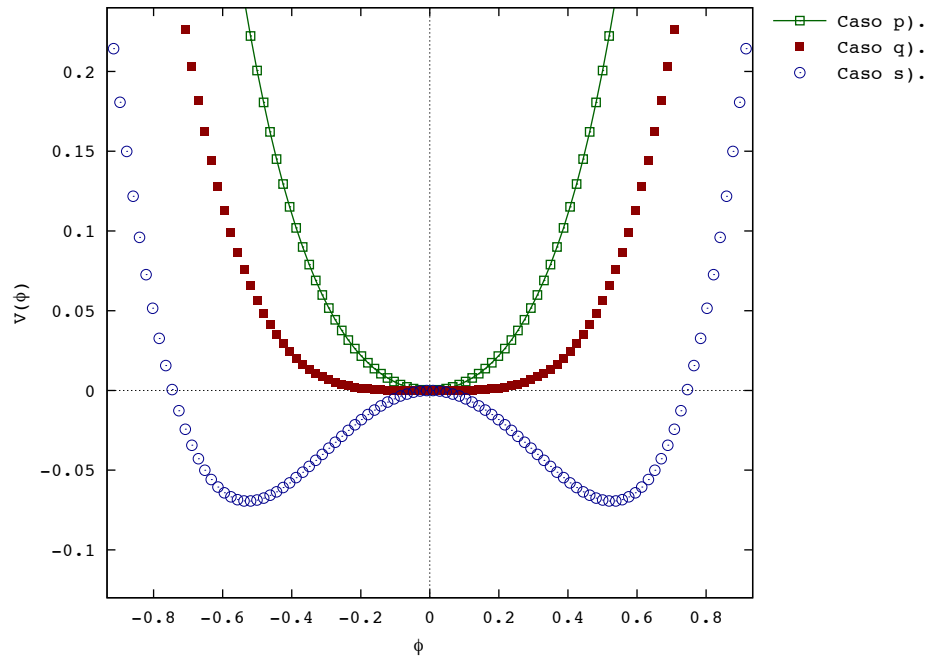


FIGURA 3.9: Gráfica de $V(\phi)$ considerando $\kappa = 0$ y $\lambda > 0$, mientras que el inciso p) $\mu^2 > 0$, en q) $\mu^2 = 0$ y s) $\mu^2 < 0$. Note que el potencial es simétrico respecto al eje.

Capítulo 4

Simetría Custodial

En esta parte del trabajo se presenta la definición del parámetro ρ del cual se desprende de manera natural el establecimiento de la simetría custodial, que protege la relación de masas entre los bosones de norma W^\pm y Z . Se analiza la simetría del potencial de Higgs antes y después de la ruptura de la simetría electrodébil. Mediante el uso de esta simetría global y se encuentra la forma explícita del potencial de Higgs. Finalmente, se definen cantidades matemáticas nuevas mediante las cuales se reescribe el Lagrangiano del sector de Higgs de la teoría electrodébil, presentandose así de forma manifiesta la simetría custodial.

4.1. El Parámetro ρ

El parámetro ρ se define como

$$\rho = \frac{M_W^2}{\cos^2 \theta_w M_Z^2}. \quad (4.1)$$

En la teoría electrodébil esta relación se obtiene de la Ec. 3.30 la cual nos da información muy importante del sector escalar ya que el parámetro ρ es exactamente igual a 1. Experimentalmente se ha encontrado que $M_Z = 91,1876 \pm 0,0021$ GeV, $M_W = 80,424 \pm 0,038$ GeV y $\sin^2 \theta_w = 0,23120 \pm 0,0015$ [8], siendo entonces $\rho = 1,01181 \pm 0,00284$, satisfecha hasta con un rango de error muy pequeño del orden de 1%, lo que implica una restricción para la nueva física más allá del ME [16, 17]. Esta relación viene de una propiedad más fundamental del ME, de la invariancia del campo escalar bajo una simetría global $SU(2)$. Veamos de donde proviene esta simetría, analizando detenidamente como surgen las masas para los bosones de norma.

Cuando el campo escalar Φ se expande alrededor del estado de mínima energía $\langle \Phi \rangle_0$, el término de energía cinética de la Ec. 3.22 se escribe como

$$|D_\mu(\Phi + \langle \Phi \rangle_0)|^2 = |(\partial_\mu + ig_2 W_\mu^a T_a + \frac{1}{2} ig_1 B_\mu Y)(\Phi + \langle \Phi \rangle_0)|^2. \quad (4.2)$$

Los términos de masa para los bosones de norma W y Z surgen de la expresión Ω

$$\Omega = |(ig_2 W_\mu^a T_a + \frac{1}{2} ig_1 B_\mu Y)\langle \Phi \rangle_0|^2, \quad (4.3)$$

Es conveniente reescribir la expresión 4.3 en términos de los bosones de norma definidos en la Ec.

3.23 de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\Omega &= \left| [ig_2(W_\mu^1 T_1 + W_\mu^2 T_2 + W_\mu^3 T_3) + \frac{1}{2}ig_1 B_\mu Y] \langle \Phi \rangle_0 \right|^2 \\
&= \left| \left[\frac{1}{2}ig_2(W_\mu^1 - iW_\mu^2)(T_1 + iT_2) + \frac{1}{2}ig_2(W_\mu^1 + iW_\mu^2)(T_1 - iT_2) + ig_2 W_\mu^3 T_3 + \frac{1}{2}ig_1 B_\mu Y \right] \langle \Phi \rangle_0 \right|^2 \\
&= \left| \left[\frac{ig_2}{\sqrt{2}} W_\mu^+ T^+ + \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W_\mu^- T^- + ig_2 W_\mu^3 T_3 + \frac{1}{2}ig_1 B_\mu Y \right] \langle \Phi \rangle_0 \right|^2.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde se han definido los operadores $T^\pm = (T_1 \pm iT_2)$. Cuando la simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ es rota, la simetría remanente $U(1)_Q$ es una simetría exacta, esto es, en el momento en que el generador del grupo $U(1)_Q$ (Q la carga eléctrica) actúa sobre el estado de mínima energía del campo escalar $\langle \Phi \rangle_0$ este se mantiene invariante, es decir,

$$\begin{aligned}
Q \langle \Phi \rangle_0 &= 0, \\
(T_3 + \frac{1}{2}Y) \langle \Phi \rangle_0 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Lo cual debe cumplirse siempre ya que trae como consecuencia la conservación de la carga eléctrica. Usando este hecho, la Ec. 4.4 se escribe como

$$\begin{aligned}
\Omega &= \left| \left[\frac{ig_2}{\sqrt{2}} W_\mu^+ T^+ + \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W_\mu^- T^- + i(g_2 W_\mu^3 - ig_1 B_\mu) T_3 \right] \langle \Phi \rangle_0 \right|^2 \\
&= \left| \left[\frac{ig_2}{\sqrt{2}} W_\mu^+ T^+ + \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W_\mu^- T^- + i\sqrt{g_2^2 + g_1^2} Z_\mu T_3 \right] \langle \Phi \rangle_0 \right|^2.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Una vez escrita la expresión en términos de los bosones de norma, se expande el cuadrado de la Ec. 4.6, obteniendo así los términos de masa para los bosones de norma W^\pm y Z

$$\left[g_2^2 W_\mu^+ W^{-\mu} (T^2 - (T_3)^2) + (g_2^2 + g_1^2) Z_\mu Z^\mu (T_3)^2 \right] \langle \Phi \rangle_0^2, \tag{4.7}$$

donde se ha hecho uso de la siguiente relación¹ $\frac{1}{2}(T^+ T^- + T^- T^+) = T^2 - (T_3)^2$. Cuando los operadores T^2 y T_3 actúan sobre el estado de mínima energía se obtiene

$$\frac{1}{2} \left[g_2^2 (t(t+1) - (t_3)^2) \langle \Phi \rangle_0^2 \right] W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} \left[2(g_1^2 + g_2^2) (t_3)^2 \langle \Phi \rangle_0^2 \right] Z_\mu Z^\mu \tag{4.8}$$

donde $t(t+1)$ y t_3 son los eigenvalores de los operadores T^2 y T_3 respectivamente. Finalmente las masas para los bosones de norma W y Z son

$$\begin{aligned}
M_W^2 &= g_2^2 [t(t+1) - (t_3)^2] \langle \Phi \rangle_0^2, \\
M_Z^2 &= 2(g_1^2 + g_2^2) (t_3)^2 \langle \Phi \rangle_0^2,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

respectivamente y en este contexto el parámetro ρ se escribe como

$$\rho = \frac{M_W^2}{C_W^2 M_Z^2} = \frac{t(t+1) - (t_3)^2}{2(t_3)^2}. \tag{4.10}$$

Como puede apreciarse, el parámetro ρ se encuentra escrito en términos de los eigenvalores de T^2 y T_3 ambos operadores del grupo $SU(2)$. Esto nos dice que ρ , es una cantidad escalar del grupo $SU(2)$ y por lo tanto es un invariante bajo transformaciones de éste, o sea, tiene una simetría la cual es llamada **simetría custodial**. Tomando en cuenta que ρ es igual a uno en la teoría electrodébil, uno obtiene las representaciones del campo escalar para las cuales la simetría custodial es exacta,

t	t_3	Representación
0	0	Singlete
1/2	1/2	Doblete

Cuadro 4.1: Representaciones del campo escalar para la cual la simetría custodial es exacta.

tales representaciones son mostrada en el Cuadro. 4.1. Sean omitido algunas de éstas porque no existe interpretación física para ellas [19].

Esta simetría debe ser manifiesta en el potencial de Higgs, puesto que los términos de masa para los bosones de norma son consecuencia directa de expandir el doblete de Higgs alrededor del estado de mínima energía. Por lo tanto, analicemos la simetría global del potencial de Higgs.

4.2. La Simetría Custodial en el Potencial de Higgs

Para conocer la simetría global del potencial de Higgs se consideran dos situaciones:

I. Después de la ruptura de la simetría electrodébil.

Cuando una de las componentes del doblete escalar Φ se fija para tener un valor de expectación en el vacío (vev) diferente de cero, se induce el rompimiento de la simetría electrodébil. En particular hemos elegido a ϕ_4 como dicha componente. Así el potencial de Higgs se escribe como

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (4.11)$$

$$= \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + (v + H)^2) + \frac{1}{4} \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + (v + H)^2).$$

A fin de conocer la simetría global de este potencial vamos a considerar que los campos escalares que no fueron fijados ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 son las coordenadas de un vector (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) y la transformación de coordenadas

$$\phi'_i = A_{ij} \phi_j \quad \text{con,} \quad \phi'_4 = \phi_4 \quad (4.12)$$

donde $(i, j = 1, 2, 3)$ y A_{ij} es una matriz de transformación. Esta transformación debe cumplir también con la siguiente constricción

$$\sum_i \phi_i'^2 = \sum_i \phi_i^2, \quad (4.13)$$

es decir, la transformación preserva norma euclidiana. Aplicando la transformación definida en Ec. 4.12 el potencial de Higgs toma la forma

$$V(\phi') = \frac{1}{2} \mu^2 [\phi_i'^t \phi_i' + (v + H)^2] + \frac{1}{4} \lambda [\phi_i'^t \phi_i' + (v + H)^2]^2$$

$$= \frac{1}{2} \mu^2 [(A_{ij} \phi_j)^t (A_{ik} \phi_k) + (v + H)^2] + \frac{1}{4} \lambda [(A_{ij} \phi_j)^t (A_{ik} \phi_k) + (v + H)^2]^2 \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{2} \mu^2 [\phi_j^t A_{ji} A_{ik} \phi_k + (v + H)^2] + \frac{1}{4} \lambda [\phi_j^t A_{ji} A_{ik} \phi_k + (v + H)^2]^2,$$

de aquí es claro que para que A_{ij} sea una transformación de simetría del potencial de Higgs necesariamente debe cumplirse que

$$A_{ji} A_{ik} = \delta_{jk}, \quad (4.15)$$

es decir que A debe ser una matriz ortogonal. Aquellas matrices que satisfacen la Ec. 4.15 tienen determinante $\det = \pm 1$. Adicionalmente queremos que las transformaciones preserven orientación.

¹Para más detalle del álgebra del grupo $SU(2)$ véase el Capítulo V de la referencia [18].

CAPÍTULO 4. SIMETRÍA CUSTODIAL
4.2. LA SIMETRÍA CUSTODIAL EN EL POTENCIAL DE HIGGS

Matrices con determinante igual a uno cumplen con estas condiciones. Matrices ortogonales con determinante igual a uno forman el grupo $SO(3)$. De esta manera estamos encontrando que el grupo de simetría global del potencial de Higgs después de haber roto la simetría electrodébil es $SO(3)$. La conexión de este grupo de simetría con la simetría custodial que aparece en la relación ρ está dado por el isomorfismo que existe entre los grupos $SO(3)$ y $SU(2)$ [21].

Quedando así manifiesta la simetría custodial en el potencial de Higgs.

II. Antes de la ruptura de la simetría electrodébil

Basta con analizar el potencial de Higgs presentado en la Ec. 3.17, el cual tiene la forma

$$\begin{aligned} V(\Phi) &= \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda \Phi^\dagger \Phi \\ &= \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) + \frac{1}{4} \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2)^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Al igual que el análisis hecho anteriormente, consideremos que los campos escalares son introducidos en términos de un vector de cuatro entradas en el potencial (Ec. 4.16), el cual bajo este contexto tendrá una simetría global $SO(4)$. Por lo tanto, la forma cuadrática $\Phi^\dagger \Phi = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2$ que aparece en Ec. 4.16 es invariante bajo la transformación

$$\phi_i \rightarrow \phi'_i = R_{ij} \phi_j, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

donde R_{ij} es una matriz de transformación que pertenece al grupo $SO(4)$. De esta manera, el grupo de simetría global del potencial de Higgs antes de la ruptura de la simetría electrodébil es $SO(4)$ ó equivalentemente $SU(2)_L \times SU(2)_R$ debido al isomorfismo que existe entre estos grupos [22].

En este punto es conveniente regresar a los pendientes del capítulo tres, como se recordará encontramos algunas formas en el potencial de Higgs [incisos j) - o)] las cuales muestran estabilidad. Todos estos potenciales tienen la forma

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^2 + \kappa \phi^3 + \lambda \phi^4, \quad (4.17)$$

si queremos que este potencial sea invariante bajo transformaciones del grupo $SO(4)$, basta con analizar el término cúbico de este, así que

$$\begin{aligned} \kappa \phi'_i \phi'_i \phi'_i &= \kappa R_{im} \phi_m \phi_j R_{ji} R_{ik} \phi_k \\ &= \kappa R_{im} \phi_m \phi_j \delta_{jk} \phi_k \\ &= \kappa R_{im} \phi_m \phi_j \phi_j \neq \kappa \phi_j \phi_j \phi_j. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Como puede observarse este término no preserva la simetría ante transformaciones del grupo $SO(4)$. Esto se debe a que el término cúbico no se puede expresar como una forma cuadrática como la vista en la Ec. 4.16. Por lo que términos cúbicos que aparecen en el potencial Higgs deben descartarse para preserva la simetría global de este. Concluyendo así que la única forma viable para el potencial de Higgs (con ρ igual a uno) es la definida en la Ec. 3.17, la cual es estable con mínimos globales a toda escala energética. ²

Por lo tanto, la simetría global del potencial de Higgs es:

Antes de la ruptura de simetría electrodébil el potencial es invariante bajo el grupo $SO(4) \sim SU(2)_L \times SU(2)_R$.

Después de la ruptura de la simetría electrodébil, la simetría global se reduce al grupo $SO(3) \sim SU(2)_{L+R}$ donde es manifiesta la simetría custodial.

²Sin embargo, correcciones radiativas pueden ser consideradas en operadores cúbicos.

4.3. Lagrangiano del Sector de Higgs

Es conveniente escribir el Lagrangiano del sector de Higgs de tal forma que la simetría custodial sea manifiesta, esto es, expresar al Lagrangiano en términos de objetos que transformen bajo el grupo $SU(2)_L \times SU(2)_R$, para ello se define:

$$M = (i\tau_2 \Phi^*, \Phi) = \begin{pmatrix} \phi^{0*} & \phi^+ \\ -\phi^- & \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

el cual es llamado bidoblete. La forma cuadrática $\Phi^\dagger \Phi$ ya conocida se puede escribir en términos del bidoblete a través de

$$\Phi^\dagger \Phi = \frac{1}{2} Tr(M^\dagger M), \quad (4.20)$$

donde Tr es la traza. Esta forma cuadrática es invariante bajo transformaciones

$$M \rightarrow M' = U_L M U_R^\dagger \quad U_{L,R} \equiv \exp(i\alpha_a T_{R,L}^a), \quad (4.21)$$

es decir, tiene una simetría $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Entonces el Lagrangiano escalar en términos de estos objetos se escribe como

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} Tr(D_\mu M^\dagger D^\mu M) + \frac{1}{2} \mu^2 Tr(M^\dagger M) - \frac{1}{4} \lambda [Tr(M^\dagger M)]^2 \quad (4.22)$$

que es invariante bajo el grupo $SU(2)_L \times SU(2)_R$. En el momento que se elije el valor de expectación del vacío, el Lagrangiano será sólo invariante bajo transformaciones $SU(2)_{L+R}$. Entonces el mecanismo de Higgs entra en juego desapareciendo los bosones de Goldstone del espectro de partículas y los bosones de norma Z_μ y W_μ^\pm adquieren masa como ya se ha visto.

Por otra parte, la extensión de la simetría custodial al Lagrangiano de Yukawa se hace suponiendo que los fermiones asignados a un doblete, tienen la misma masa. También, deben introducirse en el sector fermiónico (leptones) componentes derechas para los neutrinos a fin de poder escribir el lagrangiano en términos de los bidobletes. Teniendo en cuenta lo anterior, el Lagrangiano de Yukawa para la primera generación de leptones se escribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y &= -\lambda_f (\bar{L} M R + \bar{R} M^\dagger L) \\ &= -\frac{\lambda_f}{\sqrt{2}} \left[(\bar{N}_L, \bar{E}_L) \begin{pmatrix} \phi^{0*} & \phi^+ \\ -\phi^- & \phi^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_R \\ E_R \end{pmatrix} + (\bar{N}_R, \bar{E}_R) \begin{pmatrix} \phi^{0*} & \phi^+ \\ -\phi^- & \phi^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_L \\ E_L \end{pmatrix} \right], \end{aligned} \quad (4.23)$$

es invariante bajo transformaciones del grupo $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Después de la ruptura de la simetría electrodébil los fermiones adquieren masa y la simetría global es rota a $SU(2)_{L+R}$, es decir, la misma simetría custodial que el Lagrangiano del sector escalar. De manera que el Lagrangiano del sector Higgs en términos de la simetría custodial está dado por la suma de las Ecs. 4.22 y 4.23, a saber

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H &= \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_Y \\ &= \frac{1}{2} Tr(D_\mu M^\dagger D^\mu M) + \frac{1}{2} \mu^2 Tr(M^\dagger M) - \frac{1}{4} \lambda [Tr(M^\dagger M)]^2 - \lambda_f (\bar{L} M R + \bar{R} M^\dagger L) \end{aligned} \quad (4.24)$$

así reescribir el Lagrangiano del sector de Higgs de la teoría electrodébil en términos de la simetría custodial introduce masas para los neutrinos (en el caso de leptones).

Capítulo 5

Conclusiones y Perspectivas Futuras

A continuación enumeramos algunas conclusiones de nuestro trabajo:

1. Se ha analizado y encontrado la forma explícita del potencial de Higgs, considerando que el contenido de Higgs de la teoría está dado por un campo escalar singlete bajo un grupo de norma.
2. A través de la obtención de las masas de los bosones de norma W y Z se ha definido el parámetro ρ (que en la teoría electrodébil es igual a uno). Cuando la simetría electrodébil es rota, existe una simetría global que protege al parámetro ρ , esta simetría es llamada *simetría custodial*. A través del estudio de esta simetría términos cúbicos en el potencial de Higgs deben descartarse (a nivel de árbol).
3. Finalmente escribimos el Lagrangiano del sector de Higgs tal que la simetría custodial sea manifiesta.

Perspectivas futuras de nuestro trabajo:

1. El sector escalar o de Higgs del Modelo Estándar es el sector menos corroborado experimentalmente ya que no se ha detectado el bosón de Higgs. Sin embargo, la ausencia de prueba experimental nos permite extender este sector considerando más campos de Higgs, por ejemplo, incluir singletes, dobletes, tripletes, etc [24]. Los modelos que incluyen dobletes adicionales predicen escalares cargados cuya detección en futuros colisionadores constituye una clara evidencia de física más allá del Modelo Estándar [25, 26]. En particular la extensión más sencilla y natural del ME es el considerar un modelo con un doblete de Higgs y un singlete s , esto es:

$$V(\Phi, s) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 + \mu_s^2 s^* s + \lambda_s (s^* s)^2 + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)(s^* s).$$

El término cúbico del campo s no aparece en el potencial porque hemos impuesto que la simetría custodial sea exacta, es decir $\rho = 1$. Este tipo de modelos puede introducir procesos con cambio de sabor mediados por el nuevo campo escalar s que creen señales de nueva física dando origen a trabajos futuros de tesis.

2. Para finalizar, cabe mencionar que se pueden introducir términos en el potencial de Higgs que violen simetría custodial, tal es el caso de un término cúbico. Debiendo siempre cuidar que las desviaciones del parámetro ρ sean siempre menores que el error experimental. En tal caso la simetría custodial nos permite restringir el parámetro κ .

Bibliografía

- [1] A. Salam, *Proc. of the Eight Nobel Symposium*, Almquist and Wiksell, Stockholm, 1968; S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22**, 579 (1961); S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967);
- [2] Salam, Abdus and Ward, John Clive. Electromagnetic and weak interactions. *Phys. Lett.*, 13, 168-171, 1964.
- [3] Glashow, S. L. Partial Symmetries of Weak Interactions. *Nucl. Phys.*, 22, 579-588, 1961.
- [4] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, 96(1):191–195, Oct 1954.
- [5] Lee, T. D. and Yang, C. N. Question of Parity Conservation in Weak Interactions. *Phys. Rev.*, 104, 254–258, Oct 1959.
- [6] Steven Weinberg. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19(21):1264–1266, Nov 1967.
- [7] Roberto Noriega Papaqui *Lagrangianos efectivos y efectos de violación de sabor leptónico en el sector de Yukawa*, Tesis de Licenciatura Puebla, México, 2001.
- [8] Donald E. Groom Review of Particle Physics *The European Physical Journal.* , C15 ,2000.
- [9] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 3rd edition.
- [10] Lewis H. Ryder *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1996.
- [11] Michael E. Peskin and Dan V. Schroeder *An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics)*. Westview Press, Oct 1995.
- [12] Peter W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13(16):508–509, Oct 1964.
- [13] F. Englert and R. Brout. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 13(9):321–323, Aug 1964.
- [14] Michael Spivak *Cálculo Infinitesimal*. Reverté, 1996.
- [15] Djouadi, Abdelhak The Anatomy of electro-weak symmetry breaking. I: The Higgs boson in the standard model *Phys. Rept.*, 457, 2008 , hep-ph/0503172.
- [16] Jaime Hernández Sánchez *Procesos y decaimientos de bosones de Higgs a 1-loop para futuros colisionadores*, Tesis Doctoral Puebla, México, 2001.
- [17] S. Dawson, J.F. Gunion, H.E. Haber, and G. Kane, *The Higgs Hunter's Guide*, 2nd ed., *Frontiers in Physics* Vol. 80 (Addison-Wesley, Reading MA, 1990).
- [18] Nouredine Zettili *Quantum Mechanics Concepts and Applications*. Wiley. , 1st edition, 2001.

- [19] Logan Heather Erin, *Radiative corrections to the Zb anti-b vertex and constraints on extended Higgs sector*, 1999, hep-ph / 9906332
- [20] J. Goldstone, Nuovo Cimento, *Phys Rev Lett*, **19**, 154 (1961).
- [21] Howard Georgi *Lie Algebras in Particle Physics*. Westview Press, 2nd edition, 1999.
- [22] Ta-Pei Cheng *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Oxford University Press, 1st edition, 2000.
- [23] Dias, Alex G. and Montero, J. C. and Pleitez, V. , Closing the $SU(3)_L \times U(1)_X$ symmetry at electroweak scale, *Phys. Rev.*, D73, 2006, hep-ph/0605051".
- [24] Aranda, Alfredo and Hernandez-Sanchez, J. and Hung, P. Q., *Implications of the discovery of a Higgs triplet on electroweak right-handed neutrinos*, JHEP, 2008
- [25] Haber, Howard E., Higgs theory and phenomenology in the standard model and MSSM, 2002, hep-ph/0212136
- [26] Diaz-Cruz, J. L. and Hernandez-Sanchez, J. and Moretti, S. and Noriega-Papaqui, R. and Rosado, A. *Yukawa Textures and Charged Higgs Boson Phenomenology in the 2HDM-III* Phys. Rev.D79 , 2009