UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

TESIS

PROCESOS REFLEXIVOS EN PROFESORES DE MATEMATICAS DESDE LA PERSPECTIVA DE UN RESOLUTOR DE PROBLEMAS

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica

PRESENTA

Vianey Pérez Alamilla

Director (a)

Dr. Marcos Campos Nava

Codirector (a)

Dr. Fernando Barrera Mora

Comité tutorial

Dr. Marcos Campos Nava
Dr. Fernando Barrera Mora
Dr. Cutberto Rodríguez Álvarez
Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez

Mineral de la Reforma, Hgo., México. Septiembre 2023

Mineral de la Reforma, Hgo., a 28 de agosto de 2023

Número de control: ICBI-AAMyF/2291/2023
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

El Comité Tutorial de la tesis titulada **"Procesos reflexivos en profesores de matemáticas desde la perspectiva de un resolutor de problemas"**, realizada por la sustentante **Vianey Pérez Alamilla** con número de cuenta **467845** perteneciente a la **Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial

Dr. Marcos Campos Nava
Director

Dr. José Félix Fernando Barrera Mora
Co-director

Dr. Cutberto Rodríguez Álvarez
Miembro del comité

Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez
Miembro del comité

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Agradecimientos

A Dios

Por el milagro de la vida, por orientar mi camino y darme la fuerza necesaria para superar momentos difíciles.

A mis padres

Por ser mis pilares, por enseñarme a no rendirme a pesar de las adversidades, por su apoyo incondicional y por ser mis maestros en la escuela de la vida.

A mi familia

Por su apoyo expresado en paciencia, comprensión y solidaridad. Por motivarme, aconsejarme, por creer en mí, por ser mi estímulo para que me supere día con día, pero sobre todo, por el amor que siempre me han demostrado.

A mis directores de tesis

Al Doctor Marcos Campos Nava y al Doctor Fernando Barrera Mora, por impulsarme hacia el progreso a través de sus consejos, enseñanzas y apoyo. Por la acertada orientación y discusión crítica que permitió que este trabajo de investigación llegara a un buen término.

A mis revisores

Al Doctor Agustín Alfredo Torres Rodríguez y al Doctor Cutberto Rodríguez Álvarez por sus correcciones y aportaciones que sin duda enriquecieron este trabajo de investigación.

Resumen

En este trabajo se documentan y reportan características de los procesos reflexivos que muestran profesores de matemáticas de secundaria y bachillerato al resolver problemas con múltiples soluciones. En el estudio participaron 15 profesores pertenecientes al estado de Hidalgo, de los cuales 8 están inscritos en un posgrado de Matemáticas y su Didáctica, a quienes nombramos Grupo 1 y los restantes son profesores de secundaria de escuelas públicas, nombrados Grupo 2.

Como parte de la metodología, se organizó un curso introductorio a la resolución de problemas matemáticos cuya duración fue de 20 horas distribuidas en 5 días con una duración de cuatro horas diarias. En la última sesión del curso se llevó a cabo la actividad experimental en donde se obtuvieron los datos para su análisis. Los problemas que se plantearon en dicha actividad pertenecen a la formación de patrones numéricos y a la Geometría sintética.

El análisis de los datos se hizo bajo un enfoque cualitativo-descriptivo los cuales fueron validados mediante el método de triangulación y organizados los hallazgos en cuatro bloques: i) características al justificar resultados, ii) rasgos del trabajo colaborativo, iii) reflexiones mostradas sobre su experiencia como profesores y iv) resultados al trabajar en pequeños grupos.

Se muestran evidencias que los profesores inscritos en un posgrado en Matemáticas y su Didáctica exhiben un mejor desempeño al resolver problemas con múltiples soluciones que aquellos que no lo están. Esto sugiere que la actualización y formación de los profesores de matemáticas con un enfoque de resolución de problemas es importante para su desempeño docente y para fomentar los procesos reflexivos.

Abstract

In this work, characteristics of the reflective processes exhibited by secondary and high school mathematics teachers when solving problems with multiple solutions are documented and reported. In the study, a group of 15 teachers belonging to the State of Hidalgo participated, from those, eight are enrolled in a graduate program in Mathematics and its Didactics; these participants form Group 1, and the rest are high school teachers from public schools, and form Group 2.

As part of the research methodology, the participants attended an introductory course of mathematical problems solving, which lasted 20 hours distributed in five sessions of four hours each. In the last session, activities with the aim of collecting data were. The problems raised in said activity belong to the formation of numerical patterns and synthetic geometry.

The data analysis was done under a qualitative-descriptive approach, which were validated through the triangulation method and organized the findings into four blocks: i) characteristics when justifying results, ii) features of collaborative work, iii) reflections shown on their experience as teachers and iv) results when working in small groups.

Evidence is shown that teachers enrolled in a graduate program Mathematics and its Didactics exhibit better performance when solving problems with multiple solutions than those who are not. This suggests that the updating and training of mathematics teachers with a problem-solving approach is important for their teaching performance and to foster reflective processes.

Índice

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Introducción

Lograr que los profesores aprendan matemáticas con entendimiento a través de la resolución de problemas se ha convertido en un reto. Esta forma de aprender aporta elementos como identificar la información, examinar casos particulares, observar patrones, formular conjeturas y justificarlas; lo que permite el desarrollo del pensamiento matemático. Diversos estudios (Odafe, V. 2008., Hsieh, P. H. & Chen, N. S. 2012; Ghanizadeh, A. 2017) han reportado que una de las habilidades del pensamiento que se puede utilizar en la resolución de problemas matemáticos es el pensamiento reflexivo ya que éste permite un mayor rendimiento académico y un mejor control durante el proceso de solución.

Dewey (1933), considera que el pensamiento reflexivo es una forma particular de resolución de problemas que implica un orden cuidadoso de las ideas para dar solución a un problema, permitiendo al profesor explorar y mejorar la toma de decisiones, involucrando tres actitudes básicas: i) mente abierta, ii) con todo el corazón y iii) responsabilidad; dando lugar a un examen de actitudes, creencias, valores y prácticas de enseñanza para reformular, modificar o innovar situaciones de aprendizaje. Por su parte, Schön (1983) construye su propuesta del aprendizaje reflexivo y es quien introduce el término práctica reflexiva. Esta idea surgió al preguntarse cómo era el proceso cognitivo de los profesionales mientras ejercían su función, ya que para él en la mayoría de esos grupos la práctica reflexiva tiene un papel importante, adoptándose este elemento también en la formación docente, convirtiéndose en un rasgo determinante de su profesionalización. Por esa razón el pensamiento reflexivo se ha vuelto un elemento importante en educación, especialmente en la formación profesional de los docentes (Ambrose, R. 2004) y en la resolución de problemas.

Según Kholid et al. (2020), el pensamiento reflexivo es visto como una actividad extremadamente activa y rigurosa debido a que un individuo emplea la actitud y el conocimiento para la toma de decisiones. La actitud consiste en sinceridad, franqueza, mentalidad abierta, responsabilidad y preparación. En cuanto al conocimiento, éste puede ser visto como la capacidad de un individuo para relacionar conceptos (Hill, H. et al. 2008), en otras palabras, el pensamiento reflexivo ayuda a resolver problemas complejos, a identificar conceptos, hechos, fórmulas y teorías relevantes para su solución. Además, el pensamiento reflexivo también implica el proceso de analizar, comparar, sintetizar, aclarar y elegir lo que se va hacer (NTCM, 2000).

Haciendo un análisis de trabajos en función al término problema, varios estudios reportan que una buena cantidad de estudiantes y profesores tienen un concepto de problema de tipo tradicional; es decir lo relacionan con ejercicios y necesitan dominar algoritmos para tener seguridad al momento de emplearlos y resolver correctamente el problema. Según García (2009), se ha acostumbrado a los estudiantes a identificar como sinónimos a los términos problemas y ejercicios, por lo que la forma de actuar para resolverlos es intentar buscar en su memoria un ejercicio similar y, si pasados unos minutos no lo encuentran, piden ayuda al profesor debido a que suelen dar demasiada importancia a la rapidez con la que se realizan los cálculos y están acostumbrados a que los problemas tengan una única solución. Con una concepción estrecha del profesor sobre lo que representa un problema en matemáticas, es viable que prevalezca la mecanización, los algoritmos y los procedimientos en su forma de enseñar repitiéndose este patrón con sus estudiantes.

Alfaro y Barrantes (2008), en su estudio relacionado con la forma en que perciben los problemas matemáticos y su resolución tanto profesores como estudiantes, reportan que para identificar esa percepción brindaron a los participantes cinco posibles definiciones de la palabra problema y debían ser clasificados de 0 a 4, donde 4 representa la definición que más se acerca a la visión de cada uno de ellos y 0 la que más se aleja. Sus resultados mostraron que los profesores y estudiantes en su mayoría piensan que se debe resolver un problema en 15 minutos o menos incitando a pensar que no dediquen más de 15 minutos. Posiblemente ambos grupos estén pensando que resolver problemas consiste principalmente en solucionar ejercicios que usualmente se emplean en clase y en libros de texto, con la finalidad de reforzar los conceptos estudiados. Ante estos hallazgos, es de esperarse que tanto profesores como estudiantes muestren dificultad durante el proceso de resolución de problemas, debido a que sus creencias sobre aprender matemáticas y resolver problemas, se limitan a emplear únicamente algoritmos y fórmulas y, en este sentido, su pensamiento matemático puede resultar limitado. De acuerdo con Barrera, et. al. (2021), una forma en la que se puede desarrollar el pensamiento matemático es a través de la invención y resolución de problemas. Cuando alguien se enfrenta a la tarea de resolver problemas, pasa por varios procesos que son fundamentales. En primer lugar, se ve obligado a pensar, a comprender y a analizar la situación problemática; posteriormente examina los datos relevantes para que, a partir de ahí, empiece a manipular distintas estrategias de resolución que le permitan obtener la solución al problema. Bajo este enfoque, el profesor identifica los conocimientos que posee sobre la disciplina, pone atención a las dificultades que se enfrenta y sobre todo busca distintas rutas de solución.

Es fundamental que el profesor realice una reflexión exhaustiva y profunda en cada uno de los problemas que le permita adquirir, en palabras de diferentes autores, lo que se identifica en educación matemática como un aprendizaje con entendimiento y comprenda la importancia que tiene resolver problemas de manera constante para el beneficio de su desempeño docente. Por lo anteriormente expuesto, este trabajo tiene la finalidad de examinar los procesos del pensamiento reflexivo de 8 profesores de matemáticas de nivel medio superior, que están inscritos en un posgrado de Matemáticas y su Didáctica y a quienes se nombraron Grupo 1. Así también intervienen en este estudio 7 profesores de matemáticas de nivel secundaria pertenecientes a la Zona 01 de Secundarias Técnicas, nombrados Grupo 2, ambos grupos pertenecientes al estado de Hidalgo. Dichos procesos se analizan desde la perspectiva de un resolutor de problemas, a través del ciclo básico para la construcción del aprendizaje matemático con entendimiento (Barrera y Reyes, 2016) y de las categorías en la resolución de problemas (Shoenfeld, 1985). Los hallazgos reportados incluyen variaciones ya que el ritmo al que se profundiza la reflexión depende del propio conocimiento disciplinar, de los antecedentes personales, de las creencias que tienen sobre la disciplina y su aprendizaje, de los contextos de experiencia y de la forma en cómo comunican sus ideas.

1.2 . Revisión de la literatura

En este apartado se mencionan algunas contribuciones relevantes en relación con la reflexión del profesor desde la perspectiva de un resolutor de problemas. En años recientes, este tema ha atraído la atención de los investigadores, sin embargo, los hallazgos reportados han sido de diferente naturaleza y fortaleza. Por tal motivo, revisar la literatura permite conocer los estudios realizados desde diferentes enfoques, los sustentos teóricos, la metodología, los instrumentos empleados y los hallazgos; todo esto con la finalidad de justificar la importancia que tiene caracterizar estos procesos reflexivos cuando se adquiere un aprendizaje con entendimiento.

Un estudio reciente de Kholid et al. (2022) realizado a 104 estudiantes futuros profesores de matemáticas, cuyo objetivo fue determinar los niveles de jerarquía del pensamiento reflexivo en la resolución de problemas, emplearon un enfoque cualitativo y exploratorio donde utilizaron pruebas con problemas de geometría analítica, entrevistas y hojas de observación. Los hallazgos muestran cuatro jerarquías de niveles de pensamiento reflexivo: a) comprensión profunda, es decir, comprenden en profundidad el significado de la información, de las preguntas y cómo resolver el problema; b) relación entre conceptos, en este nivel los estudiantes conectan y usan conceptos matemáticos para resolver los problemas; c) cometer errores y estar dispuesto a corregirlos, un pensador reflexivo está dispuesto a superar los errores y la confusión hasta que el problema ha sido resuelto. Por último; d) estar convencido de la respuesta, en este nivel surge la creencia en las propias respuestas y se muestran optimistas sobre la validez de sus soluciones. Los investigadores observaron que, a mayor nivel de pensamiento reflexivo, hay un menor número de participantes que lo alcanzan.

Se destaca también el trabajo realizado por Muhammad et al. (2021) el cual consistió en un estudio realizado a futuros profesores de matemáticas en la resolución de problemas de geometría analítica, basado en aspectos de técnica, seguimiento, intuición y conceptualización. Dichos investigadores orientaron su estudio a la forma en cómo los individuos lidian con las confusiones que aparecen cuando se encuentran en una actividad de pensamiento reflexivo y cómo se esfuerzan por superarlas a través del conocimiento, la experiencia y sus habilidades para resolver problemas. Para ese análisis, emplearon categorías, las cuales consistieron en pensamiento reflexivo de aclaración, pensamiento reflexivo conectivo y pensamiento reflexivo productivo. Los resultados mostraron que los sujetos con la categoría de pensamiento reflexivo de aclaración, pensamiento reflexivo conectivo y pensamiento reflexivo productivo cumplieron los cuatro aspectos, aunque no todos los indicadores de cada aspecto. Por lo que, es necesaria una formación para desarrollar el pensamiento reflexivo de los futuros profesores de matemáticas.

Continuando con la revisión de la literatura, se encontró un trabajo de Syamsuddin (2020), en donde realizó una investigación cualitativa en la que hace una descripción relacionada con la resolución de problemas matemáticos, partiendo del comportamiento del sujeto y prestando atención a la taxonomía del pensamiento reflexivo (recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear). El sujeto es un estudiante de magisterio que tiene un estilo cognitivo de campo dependiente. Según Wilkin (1971) este estilo es un patrón mental encargado de percibir, organizar, procesar y recordar la información que nos llega a través de los sentidos y que se caracteriza por percibir los estímulos en su totalidad, sin atender a las diferentes partes que lo integran y necesitan instrucciones para llevar a cabo una tarea. En este estudio, se observa que el sujeto llega a los tres primeros niveles de esta taxonomía. En el primer nivel, tuvo la capacidad de reafirmar toda la información usando sus propias palabras y dando una explicación no secuencial; en el segundo nivel, encontró una estrategia para resolver problemas matemáticos buscando la palabra clave del problema para emplear sus conocimientos sobre la disciplina y tener la mejor manera de resolverlo. En el tercer nivel, el sujeto dio una idea de cómo el problema puede ayudar a una empresa a tener una estrategia para obtener mucha ganancia con poco costo de producción.

Revisando el trabajo de Hidayati, et al. (2020), realizado a 40 estudiantes del Departamento de Formación de Profesores de Enseñanza Primaria (PGSD): 20 de ellos de segundo semestre y el resto de sexto semestre. El interés fue describir las características a partir de los cuatro niveles del pensamiento combinatorio en la resolución de problemas matemáticos. De los 40 participantes, se eligieron cinco para ser entrevistados, ya que ellos habían llegado a los cuatro niveles. Los hallazgos muestran que existe un nivel más entre el segundo y el tercero, quedando en cinco los niveles de pensamiento combinatorio: i) investigar “algunos casos”, ii) verificar sistemáticamente los casos, iii) usar el orden de cálculo, iv) generar sistemáticamente todos los casos y v) cambiar el problema a otro problema combinatorio. En el nivel uno se identifica la posibilidad de que los estudiantes comprendan incorrectamente las preguntas, o viceversa, pueden responder las preguntas con procedimientos sistemáticos pero los resultados son menos precisos. El nivel dos consiste en realizar comprobaciones sistemáticas sobre la comprensión de los estudiantes del material combinado, además, interviene la capacidad de responder problemas sistemáticamente utilizando diagramas de árbol. En el tercer nivel los estudiantes pueden hacer cálculos como la suma y la multiplicación. En el nivel cuatro se generan todos los casos sobre la capacidad de calcular posibilidades sin esquemas, dibujos o diagramas. Por último, se llega al quinto nivel cuando se tiene la capacidad de calcular posibilidades con problemas complejos. Los investigadores recomiendan explorar más sobre la aplicación del nivel hallado, es decir de la aplicación del orden de cálculo.

En otra investigación publicada por Syamsuddin et al. (2020), se reporta una descripción de las habilidades de pensamiento reflexivo de los futuros maestros en la resolución de problemas matemáticos basados en la diferencia del estilo cognitivo. Los instrumentos utilizados consistieron en la prueba de estilo cognitivo GEFT (Test de Grupo de Figuras Enmascaradas), una tarea de resolución de problemas matemáticos que no es rutinaria y las pautas de entrevista basadas en el componente de pensamiento reflexivo. Los datos se recopilan de dos estudiantes, uno con estilo cognitivo dependiente y el otro con estilo cognitivo independiente. Los hallazgos de la investigación muestran que el sujeto con campo dependiente tiende a usar la experiencia para implementarla en la resolución de problemas matemáticos, pero no puede utilizar la nueva información contenida. Mientras que el sujeto con estilo independiente tiende a usar la experiencia para utilizar la nueva información contenida en el problema y construir la estrategia de resolución de problemas, siendo su pensamiento generativo reflexivo.

Kholid et al. (2020) realizaron un estudio con 21 estudiantes de matemáticas de segundo semestre de la Facultad de Formación y Educación de Profesores, en Indonesia. El objetivo fue clasificar el pensamiento reflexivo que se hace presente al momento de resolver una pregunta no rutinaria de geometría analítica mediante el uso de cuatro componentes: técnicas, monitoreo, conocimiento y conceptualización. El estudio utilizó un enfoque descriptivo-cualitativo en donde se describieron todos los hechos y como resultado hallaron tres clasificaciones del pensamiento reflexivo. La Clasificación I se refiere al método de prueba y error. La Clasificación II muestra que los sujetos necesitan ilustraciones para ganar confianza en la respuesta. Algunos sujetos que dependen de las ilustraciones fallan en la realización de abstracciones matemáticas. En la clasificación III los sujetos tienen buena capacidad para recordar y relacionar conceptos matemáticos. Las similitudes entre ellas consisten en percibir cómo entender lo que se pregunta y no suelen aplicar un principio eficiente, conocido como un componente técnico. También, vuelven a comprobar las etapas escritas y las respuestas, ya sea que sean correctas o no y no hacen un plan antes de resolver un problema, por lo tanto, solo se aplican unos pocos indicadores en el componente de seguimiento. Están listos para corregir si cometen un error, tienden a percibir cómo evitar cualquier dificultad, llamado conocimiento. Por último, la mayoría de los estudiantes no relacionan otro concepto con un problema de geometría analítica, denominado componente de conceptualización.

Veamos ahora otro trabajo de Syamsuddin (2017), el cual se realizó con una futura maestra que tiene un estilo cognitivo dependiente del campo, cuyo objetivo fue investigar la capacidad de pensamiento reflexivo de los futuros maestros para resolver problemas matemáticos. Para examinar los datos, la investigación empleó cuatro categorías principales que describen las actividades al usar el pensamiento reflexivo: (a) formulación y síntesis de la experiencia, (b) orden de la experiencia, (c) evaluación de la experiencia y (d) prueba de la solución seleccionada con base en la experiencia. Los resultados muestran que el sujeto de investigación leyó más de una vez el problema y para asegurarse de haberlo comprendido, lo replanteó con sus propias palabras y adaptó sus estrategias para desarrollar su solución y obtener la respuesta correcta. Por último, con base en su experiencia, el sujeto explicó que, para mejorar los errores en la operación o el procedimiento, se debe verificar los procedimientos y operaciones utilizadas.

Syamsuddin (2019), realizó una investigación cualitativa con un estudiante que se especializa en educación matemática en la Universidad Muhammadiyah de Makassar, cuyo objetivo fue describir la taxonomía del pensamiento reflexivo. Los resultados mostraron que el sujeto pasó por los seis niveles del pensamiento reflexivo, cuyas características son las siguientes:

i) recordar, el sujeto empleó el pensamiento reflexivo para formular el problema con sus propias palabras; ii) comprensión, el sujeto entendió lo que había hecho cuando dio las razones por las que la estrategia empleada fue la adecuada, facilitando así la solución al problema; iii) aplicar, el sujeto pensó en dos problemas de la vida cotidiana; en el campo económico, evitando la pérdida de una empresa y en el campo educativo, en el aprendizaje o asistencia en la formación de la Olimpiada para los estudiantes; iv) análisis, tuvo la capacidad de obtener un patrón que describe la relación entre las diversas soluciones encontradas y la relación entre las respuestas óptimas; v) evaluar, el sujeto verificó lo que había hecho con el empleo de fórmulas, operaciones y procedimientos; vi) crear, tuvo la capacidad de modificar y crear nuevos problemas para mejorar las habilidades de resolución de problemas. Se espera que los profesores sean conscientes de la reflexión y estén dispuestos a enseñar o entrenar a los estudiantes a pensar reflexivamente hasta el más alto nivel.

Agustan, et al. (2017), llevaron a cabo un estudio con un estudiante del Departamento de Educación Matemática, de la universidad de Muhammadiyah Makassar, Indonesia, quien tiene un estilo cognitivo independiente de campo. Según Witkin et al. (1971) una persona con este estilo percibe las partes separadas de su campo visual, es decir, tiene iniciativa cuando usa sus propios criterios para desarrollar tareas, así como para analizar y reorganizar la información al resolver problemas sin necesidad de recibir instrucciones. El objetivo fue describir su pensamiento reflexivo cuando resuelve un problema de álgebra. Fue un estudio exploratorio descriptivo con enfoque cualitativo y emplearon cuatro etapas para analizar su pensamiento: i) formulación y síntesis de la experiencia, ii) orden de la experiencia, iii) evaluación de la experiencia y iv) probar la solución seleccionada con base en la experiencia. Los hallazgos reportan que, en la primera etapa, el sujeto explicó que para entender el problema se necesita leerlo para replantear con sus propias palabras, identificando conceptos relacionados con el problema. En la segunda etapa, el sujeto formuló información basada en su experiencia y adaptó sus estrategias para dar solución al problema. En la tercera etapa, el sujeto tuvo la capacidad de determinar la información conocida y de encontrar la clave para resolver el problema matemático. En la última etapa, probó la solución seleccionada con base en su experiencia y para corregir errores verificó los procedimientos y operaciones utilizadas, además intentaba resolver el problema de forma diferente para comparar las respuestas que había obtenido antes. Los hallazgos respaldaron la afirmación de que el pensamiento reflexivo brinda una oportunidad para que los estudiantes mejoren en la resolución de problemas matemáticos.

Dündar, S. & Yaman, H. (2015), publicaron un estudio realizado a 53 futuros profesores de matemáticas cuyo objetivo fue identificar sus habilidades para aplicar sus conocimientos de trigonometría al momento de resolver los problemas matemáticos. Se utilizaron como herramientas de recolección de datos el Test de Resolución de Problemas Rutinarios (TSRP) y el Test de Resolución de Problemas No Rutinarios (TSNRP). Como resultado del análisis de datos, los futuros maestros respondieron correctamente a casi todas las preguntas del TSRP que requerían conocimientos de procedimientos, mientras que experimentaron dificultades en el TSNRP que requerían de sus habilidades para aplicar esos conocimientos de trigonometría. En vista de estos resultados, se concluyó que los futuros docentes de matemáticas fueron capaces de responder preguntas procedimentales con sus conocimientos de trigonometría, pero a pesar de contar con esos recursos acerca de la disciplina, presentaron dificultad y confusión al momento de intentar resolver los problemas no rutinarios, debido a que no están acostumbrados a resolver ese tipo de problemas.

Por último, el trabajo de Bjuland (2004) fue centrarse en las reflexiones de los futuros profesores de matemáticas sobre su proceso de aprendizaje a través de la resolución colaborativa de problemas en geometría, en donde su interés principal estuvo enfocado en los diálogos de un grupo de estudiantes con antecedentes matemáticos limitados. Los hallazgos reportados exhiben que la falta de conocimientos sólidos acerca de la disciplina incide en sus procesos de solución, por lo tanto, los problemas son demasiado difíciles y eso origina que su participación efectiva en su solución sea escasa o nula, pero una forma de estimularla fue a través de la discusión de ideas para ser complementadas, reflexionando sobre la importancia de trabajar colaborativamente. Otro hallazgo fue que aparte de reflexionar como estudiantes, lo hicieron también como futuros profesores de matemáticas, es decir, resolver este tipo de problemas los hizo pensar sobre la importancia que tiene el orientar adecuadamente a los estudiantes en el proceso de resolución y que los conocimientos que el profesor posee sobre la disciplina incide en el aprendizaje del estudiante.

Tabla 1. *Descripción general de la revisión de la literatura*

Autor (es)	Planteamiento del problema	Objetivo	Metodología	Principales hallazgos
(2022) Muhammad Noor Kholid et al. *"Hierarchy of Students' Reflective Thinking Levels in Mathematical Problem Solving"*	Descubrir la jerarquía del pensamiento reflexivo.	Determinar los niveles de jerarquía de pensamiento reflexivo en la resolución de problemas matemáticos.	Investigación cualitativa y enfoque exploratorio, entrevistas, pensar en voz alta, videograbaciones y hojas de observación.	Cuatro jerarquías: comprensión profunda, relación entre conceptos, cometer errores y estar dispuesto a corregirlos, y estar convencido de la respuesta.
(2021). Muhammad Noor Kholid, Sekar Telasih, Lingga Nico Pradana, Swasti Maharani. *"Reflective Thinking of Mathematics Prospective Teachers' for Problem Solving"*	Cómo se desarrolla el pensamiento reflexivo de los futuros profesores de matemáticas.	Describir el proceso del pensamiento reflexivo de los futuros profesores de matemáticas en la resolución de problemas de geometría analítica.	Pensar en voz alta, test, guías de entrevista y fichas de observación. Emplearon las categorías de pensamiento reflexivo de aclaración, conectivo y productivo, basándose en aspectos de técnica, seguimiento, intuición y conceptualización.	Los sujetos con las categorías de pensamiento cumplieron los cuatro aspectos, aunque no todos los indicadores de cada aspecto. Por lo tanto, se concluye que es necesaria una formación para desarrollar el pensamiento reflexivo.
(2020) Agustan Syamsuddin. *"Describing taxonomy of reflective thinking for field dependent-prospective mathematics teacher in solving mathematics problem"*	¿Cuál es el comportamiento del sujeto en la realización de las tareas con base en la taxonomía del pensamiento reflexivo?	Describir la habilidad de los futuros profesores para resolver problemas, basados en la taxonomía del pensamiento reflexivo.	Se eligió al participante a través de la prueba GEFT, implementando una tarea no rutinaria y entrevistando al sujeto para explorar su capacidad.	El sujeto alcanzó los tres primeros niveles de la taxonomía del pensamiento reflexivo, dando una idea de sus habilidades al resolver problemas matemáticos.
(2020) Hidayati, Y. M., Ngalim, A., Sutama, Arifin, Z., Abidin, Z., & Rahmawati, E. *"Level of combinatorial thinking in solving mathematical problems"*	¿Cuáles son las descripciones de los niveles 1, 2, 3 y 4 del pensamiento combinatorio?	Describir las características del nivel de pensamiento combinatorio en la resolución de problemas matemáticos.	Enfoque cualitativo, ocuparon entrevistas y pruebas, organizándose seis reuniones. La primera fue la entrevista preliminar sobre pensamiento y material combinatorios. De la segunda a la sexta reunión fueron pruebas y entrevistas.	Reportan otro nivel del pensamiento combinatorio, "el orden de cálculo" y se encuentra entre el nivel dos y el tres. Los investigadores recomiendan explorar más sobre la aplicación de este nivel.

Autor (es)	Planteamiento del problema	Objetivo	Metodología	Principales hallazgos
(2020). Syamsuddin, Dwi Juniati, Tatag Yuli Eko Siswono. *“Understanding the Problem-Solving Strategy Based on Cognitive Style as a Tool to Investigate Reflective Thinking Process of Prospective Teacher”*	¿Cuál es el impacto del estilo cognitivo en los procesos de pensamiento reflexivo de futuros profesores de matemáticas?	Describir las habilidades de pensamiento reflexivo de los futuros maestros para resolver problemas matemáticos basados en la diferencia de estilo cognitivo.	-Prueba de estilo cognitivo GEFT. -Una tarea de resolución de problemas que no es rutinaria. -Las pautas de la entrevista basadas en el componente del pensamiento reflexivo.	Estilo cognitivo dependiente: utiliza sus conocimientos y experiencias, pero no hace uso de una nueva información. Estilo cognitivo independiente: Usa la nueva información para generar otras estrategias de solución.
(2020) Muhammad Noor Kholid, Cholis Sa’dijah, Erry Hidayanto, and Hendro Permadi. *How are students’ reflective thinking for problem solving?*	¿Cómo es el pensamiento reflexivo de los estudiantes para resolver una pregunta no rutinaria de geometría analítica, usando las técnicas, monitoreo, percepción y conceptualización?	Clasificar el pensamiento reflexivo de los estudiantes con base en aquellos componentes para resolver una pregunta no rutinaria de geometría analítica.	Utilizó un enfoque cualitativo descriptivo que describió todos los hechos, fenómenos y síntomas sin manipulación.	Tres clasificaciones: Supuestos: ensayo y error Ilustraciones virtuales: confianza en sus respuestas. Conectivo: Capacidad para recordar y relacionar conceptos matemáticos.
(2019). Agustan Syamsuddin *“Analysis of prospective teacher’s mathematical problem solving based on taxonomy of reflective thinking”*	Hasta qué punto se ha utilizado el pensamiento reflexivo en la resolución de problemas.	Describir profundamente acerca de los seis niveles de la taxonomía del pensamiento reflexivo de los profesores.	Se les asignó la tarea de resolver problemas y se aplicó un cuestionario para elegir al estudiante con el pensamiento reflexivo de más alto nivel.	El sujeto pasó por los seis niveles del pensamiento reflexivo. Cada nivel ilustra las características de sus habilidades matemáticas.
(2017). Agustan Syamsuddin, Tatag Yuli Eko Siswono y Dwi Juniati. *“Investigating and analyzing prospective teacher’s reflective thinking in solving mathematical problem: A case study of female-field dependent (FD) prospective teacher”*	Cómo impacta en la actividad mental del futuro docente el estilo cognitivo en la resolución de problemas matemáticos.	Investigar y analizar las habilidades de pensamiento reflexivo de los futuros maestros para resolver problemas matemáticos.	Se utilizó el Test de Figuras Incrustadas en Grupo (GEFT), planteándose un problema no rutinario y se utilizó la entrevista no estructurada que consiste en preguntas para desenterrar aspectos del pensamiento reflexivo.	El sujeto tuvo que leer más de una vez el problema, y para comprenderlo, lo replanteó con sus propias palabras. Además, siguió dos rutas para llegar al resultado, verificando procedimientos y operaciones.

Autor (es)	Planteamiento del problema	Objetivo	Metodología	Principales hallazgos
(2017) Agustan, S., Juniati, D., & Siswono, T. Y. E. *"Reflective thinking in solving an algebra problem: a case study of field independent prospective teacher"*	Cómo el estudiante utiliza el pensamiento reflexivo cuando resuelve un problema de álgebra.	Describir cómo el estudiante utiliza el pensamiento reflexivo cuando resuelve un problema de álgebra.	Estudio exploratorio descriptivo con enfoque cualitativo y emplearon cuatro categorías para analizar el pensamiento reflexivo.	Leyó más de una vez el problema, para asegurarse de haberlo comprendido, lo replanteó con sus propias palabras, empleó estrategias que le ayudaron a llegar a la solución y para verificar sus resultados intentaba resolver el problema de forma diferente para compararlas.
(2015) Dündar, S., & Yaman, H. *How do prospective teachers solve routine and non-routine trigonometry problems?*	¿Cómo resuelven los futuros maestros problemas de trigonometría rutinarios y no rutinarios?	Identificar las habilidades de los futuros maestros para transferir sus conocimientos de trigonometría al resolver problemas matemáticos.	Método mixto (cuantitativo y cualitativo) y emplearon dos test: resolución de problemas rutinarios y resolución de problemas no rutinarios.	Los futuros profesores de matemáticas fueron capaces de responder preguntas procedimentales con sus conocimientos de trigonometría, sin embargo se les dificulta resolver problemas no rutinarios.
(2004) Raymond Bjuland. "Student teachers' reflections on their learning process through collaborative problem solving in geometry	¿Qué elementos de reflexión se pueden identificar en la comunicación de los estudiantes a través de la actividad colaborativa de resolución de problemas?	Centrarse en las reflexiones de los futuros profesores sobre su proceso de aprendizaje a través de la resolución colaborativa de problemas en geometría.	Se basó en una investigación naturalista con un enfoque etnográfico y se llevó a cabo en un curso de resolución de problemas de geometría, con tres grupos de estudiantes de magisterio y con antecedentes matemáticos limitados.	La falta de conocimientos sólidos de la disciplina les impide llegar a la solución de manera individual y el orientar correctamente a los estudiantes en su proceso de aprendizaje dependerá de los conocimientos que posee un profesor.

***Fuente**: Elaboración propia*

Con base en la revisión de la literatura, como hallazgos principales se puede destacar que de acuerdo con Kholid (2022) existen cuatro jerarquías del pensamiento reflexivo: comprensión profunda, relación entre conceptos, cometer errores y estar dispuesto a corregirlos, y estar convencido de la respuesta. Este mismo autor, en su estudio realizado en 2021 en donde describe los procesos del pensamiento reflexivo a través de las categorías del pensamiento reflexivo de aclaración, conectivo y productivo, basándose en aspectos de técnica, seguimiento, intuición y conceptualización, llegó a la conclusión de que los participantes cumplen esas categorías pero no las satisfacen totalmente. Cabe resaltar que en el estudio realizado por Agustan (2020), el sujeto solamente alcanzó los tres primeros niveles de la taxonomía del pensamiento reflexivo (taxonomía de Bloom). En el caso de Hidayati et. al. (2020), reportan otro nivel del pensamiento combinatorio, "el orden de cálculo" y se encuentra entre el nivel dos y el tres, subiendo de 5 a 6 niveles.

Por su parte, Syamsuddin et. al. (2020) encontraron que el impacto de los estilos cognitivos en los procesos del pensamiento reflexivo es distinto en cada estilo. En el caso del participante con un estilo cognitivo dependiente, utiliza sus conocimientos y experiencias, pero no hace uso de una nueva información, sin embargo, el participante con estilo cognitivo independiente usa la nueva información para generar otras estrategias de solución, por lo que se considera un estilo reflexivo generativo. Kholid et. al. (2020) estudiaron el pensamiento reflexivo de los estudiantes para resolver una pregunta no rutinaria de geometría analítica mediante el uso de cuatro componentes: técnicas, monitoreo, percepción y conceptualización y lo describen mediante tres clasificaciones: Supuestos: ensayo y error; Ilustraciones virtuales: confianza en sus respuestas y Conectivo: Capacidad para recordar y relacionar conceptos matemáticos.

Por otro lado, Agustan et. al. (2019) hacen una descripción profunda acerca de los seis niveles de la taxonomía del pensamiento reflexivo de un estudiante, ilustrando en cada nivel las características de sus habilidades matemáticas. Agustan (2017), describe cómo el estudiante utiliza el pensamiento reflexivo cuando resuelve un problema de álgebra, en donde se percata que leyó más de una vez el problema, para asegurarse de haberlo comprendido, lo replanteó con sus propias palabras, empleó estrategias que le ayudaron a llegar a la solución y para verificar sus resultados intentaba resolver el problema de forma diferente para comparar sus respuestas. Dündar, et. al. (2015) se concentraron en identificar las habilidades de los futuros maestros para transferir sus conocimientos de trigonometría al resolver problemas matemáticos, obteniendo como hallazgo que los futuros profesores de matemáticas fueron capaces de responder preguntas procedimentales con sus conocimientos de trigonometría, sin embargo se les dificulta resolver aquellos problemas no rutinarios, es decir, en aquellos problemas en donde identificar qué procedimiento o recurso emplear no se observa de manera inmediata. Por último, Bjuland (2004) realizó su investigación con futuros profesores de matemáticas en donde su principal interés fue identificar los elementos de reflexión que se hacen presentes al momento de resolver problemas de geometría de manera colaborativa con estudiantes con antecedentes matemáticos limitados, llegando a la conclusión de que la falta de conocimientos sólidos de la disciplina les impide llegar a la solución de manera individual.

1.3. Preguntas de investigación

Se han expuesto hasta este momento algunos estudios que tratan sobre los procesos de reflexión por los que un profesor o futuro profesor de matemáticas experimenta en el proceso de resolver problemas. De manera general, los trabajos revisados muestran diferentes jerarquías o niveles de pensamiento reflexivo cuando resuelven problemas no rutinarios, es decir problemas en donde su solución no es únicamente emplear algoritmos aprendidos, sino que va más allá de la memorización, propiciando un posible acercamiento al aprendizaje con entendimiento a través de la reflexión. Con base en lo anterior, el interés que llevó a comenzar este proceso de investigación y como consecuencia, elaborar interrogantes que incitan la curiosidad, está centrado en conocer esos procesos que intervienen en la reflexión y la comunicación de las ideas del docente de matemáticas de secundaria y de nivel medio superior, que son la base para adquirir un aprendizaje con entendimiento.

Como se ha revisado en las investigaciones la reflexión del profesor desde la perspectiva de un resolutor de problemas constituye un reto intelectual, ya que durante ese proceso no solo se enfrenta a las dificultades propias de cálculo o algorítmicas, también debe emplear sus conocimientos previos para diseñar una ruta de solución que favorezca esa reflexión y se avance en los diversos niveles de entendimiento y se desarrolle la capacidad de elaborar sus propios procedimientos para resolver problemas. Una dificultad que se ha encontrado en los estudios realizados es vincular estos conocimientos con la situación problemática, considerándose uno de los puntos débiles de la formación del profesorado. Polya (1965) y Schoenfeld (1985) señalan que la resolución de problemas va más allá de encontrar una solución o saber aplicar a la perfección determinados métodos. A los estudiantes se les debe brindar la oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel.

Se han expuesto hasta el momento hallazgos de diferente naturaleza y fortaleza sobre la importancia de la resolución de problemas en matemáticas. En este sentido, se ha llegado al interés de profundizar más en este terreno. De acuerdo con Bachelard, para generar conocimiento hay que dar respuesta a una pregunta, *"para un espíritu científico todo conocimiento es una respuesta a una pregunta. Si no hay pregunta, no puede haber conocimiento científico. Nada es espontáneo. Nada está dado. Todo se construye"* (Bachelard 2000, p.16). Siguiendo este orden de ideas fueron surgiendo algunas interrogantes: *¿Cuáles son algunas características de los procesos reflexivos en profesores de matemáticas en un ambiente colaborativo de resolución de problemas para adquirir un aprendizaje con entendimiento?¿Cuáles son las heurísticas que ponen de manifiesto los profesores al resolver problemas?*

El interés por encontrar respuestas a estos planteamientos llevó a la realización de un estudio exploratorio cuyo objetivo principal es caracterizar los procesos reflexivos de los profesores de matemáticas en la resolución de problemas. Como afirma Santos Trigo (2007, p.19), *"en el estudio de las matemáticas, la actividad de resolver y formular problemas desempeña un papel muy importante cuando se discuten las estrategias y el significado de las soluciones"*.

1.4. Objetivos de la investigación

Con base en el planteamiento del problema que se expuso anteriormente y de las interrogantes planteadas, surgen los siguientes objetivos que guían esta investigación.

- ***General***

1. Caracterizar algunos procesos reflexivos en profesores de matemáticas en un ambiente colaborativo de resolución de problemas.

- ***Específicos***

   1.1 Seleccionar los problemas matemáticos que resolverán los profesores para observar procesos reflexivos.

   1.2 Identificar las heurísticas que ponen de manifiesto los profesores al resolver problemas.

Esta investigación resulta relevante desde el punto de vista creativo y de pensar cuidadosamente y en forma intencionada y sistemática, acerca de todos los aspectos que conllevan a descubrir mediante la reflexión lo que el docente es capaz de hacer cuando resuelve problemas matemáticos.

CAPÍTULO 2. MARCO DE INVESTIGACIÓN

2.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es mostrar el marco de investigación que permite interpretar y sustentar los resultados del estudio. Como ya se ha mencionado en el capítulo anterior, esta propuesta sigue la línea de investigación sobre los procesos reflexivos que llevan a un aprendizaje con entendimiento desde la perspectiva de un resolutor de problemas, por lo que en este capítulo nos limitaremos a dar las bases teóricas generales. Para Lester (2005), un marco de investigación es "una estructura básica de las ideas, es decir, abstracciones y relaciones que sirven como la base de un fenómeno que se va a investigar" (p. 458). Este autor hace una analogía entre el marco de investigación y un andamio en donde este último se utiliza para hacer reparaciones en un edificio, ya que permite a los trabajadores llegar a partes del mismo que de otro modo serían inaccesibles.

Eisenhart (1991), ha identificado tres tipos de marcos: teórico, práctico y conceptual, desempeñando cada uno de ellos un papel importante en la investigación en educación matemática. En lo que concierne a un marco teórico, este sirve de guía en las actividades, empleando una teoría formal. La teoría del desarrollo intelectual de Piaget y la teoría del constructivismo socio histórico de Vygotsky, son ejemplos de marcos teóricos que se han utilizado en el estudio del aprendizaje de los niños y que se han desarrollado mediante explicaciones coherentes de ciertos tipos de fenómenos y sus relaciones. Trabajar con un marco teórico implica reformular las preguntas en función de la teoría formal y los datos recopilados deben utilizarse para respaldar, ampliar o modificar la teoría. En otras palabras, cuando se decide por una teoría en específico, se debe conformar y aceptar los argumentos y experimentaciones asociadas a la teoría.

Un marco práctico es una alternativa a un marco teórico pues guía la investigación utilizando lo que funciona, es decir, en la experiencia práctica de quien la realiza. Aunque este tipo de marco tiene al menos una ventaja sobre los marcos teóricos, casi no se utiliza porque sus resultados son muy limitados, ya que son aplicables solamente a situaciones muy restringidas, en lo referente a circunstancias, condiciones y contexto.

El otro marco es el conceptual, el cual permite adaptarse a necesidades específicas de la pregunta que se desea responder debido a su característica de integrarse con ideas o constructos que provienen de distintas teorías, y las relaciones entre ellos son relevantes para comprender el problema de investigación. Los marcos conceptuales se basan en investigaciones previas, pero se construyen de una variedad de fuentes actuales y posiblemente de largo alcance. Eisenhart (1991) afirma que un marco conceptual es "una estructura esquelética de justificación, en lugar de una estructura esquelética de explicación" (p. 210). Como lo menciona Lester (2005), es importante que el investigador de a conocer supuestos que sostiene, por ejemplo, los ontológicos, epistemológicos y didácticos, ya que permite al lector entender por qué el investigador hace lo que hace y permite justificar de forma por qué se eligieron como sustento de la investigación ciertos conceptos y relaciones, y no otros. En la Tabla 2 se recapitulan las características más importantes de los marcos revisados.

Tabla 2.- Cuadro comparativo de los marcos de investigación.

Marco de investigación	**Descripción**	**Ventaja**
Teórico	Emplea teoría formal, es rígido, sistemático y obliga a la investigación a explicar sus resultados por "decreto" más que por evidencia.	Facilita la comunicación, alienta programas de investigación y aporta elementos a la teoría.
Práctico	Se basa en el empirismo, en hallazgos de investigaciones previas y en puntos de vista de la opinión pública. Tiene limitaciones y solo es generalizable localmente.	Los problemas son de las personas directamente involucradas.
Conceptual	Incluye diferentes puntos de vista y los conceptos elegidos y la relación entre ellos son apropiados y útiles para el problema de investigación.	Son flexibles, no se construyen con vigas de acero (proposiciones teóricas), son como andamios de madera que sirven de argumentos (justificaciones) sobre lo que es relevante para estudiar y por qué.

Fuente: *Elaboración propia*

El marco empleado en esta investigación considera elementos enfocados a la caracterización de los procesos de reflexión del profesor de matemáticas cuando adquiere un aprendizaje con entendimiento y a las heurísticas que emplean. Por ese motivo, el marco adoptado en este trabajo es el conceptual y se forma con dos componentes esenciales. El primero aborda elementos relacionados con los procesos de reflexión que ocurren cuando se aprende matemáticas con entendimiento y el segundo aborda elementos relacionados con comunicar ideas a través de las heurísticas empleadas.

Tomando en cuenta que en esta investigación se emplearon conceptos e ideas de diferentes fuentes, se construye un marco conceptual el cual se integra por tres dimensiones: ontológica, epistemológica y didáctica. En la dimensión ontológica se adopta una postura en función del concepto de matemáticas y su estudio. En lo que se refiere a la dimensión epistemológica se explica la posición que se adopta respecto a ¿cómo se genera el conocimiento? o ¿cómo se aprende? Mientras que en la dimensión didáctica se hace énfasis en las características del aprendizaje matemático que se consideran deseables así como de un escenario de instrucción apropiado para la reflexión de los profesores en la resolución de problemas.

2.2. Dimensión ontológica

Es importante recordar que el objetivo principal de este trabajo está centrado en observar las características de los procesos de reflexión de los participantes a través de la resolución de problemas y para ello es importante establecer la postura que se adopta en esta dimensión y determinar los elementos necesarios para encaminarlos hacia esa reflexión mediante la experimentación de dudas, dificultades u obstáculos que se les presente.

Desde el punto de vista filosófico, la ontología está orientada al estudio del “ser”, es decir a su naturaleza. Por tal motivo, en esta dimensión se admite una postura para dar respuesta a la pregunta ¿Qué son las matemáticas? ya que esta disciplina se ha conceptualizado desde distintas perspectivas. Por ejemplo, hay quienes la consideran como una disciplina estática y que se desarrolla de forma abstracta; es decir, como un conjunto de hechos y procedimientos establecidos y para aprenderla se necesita de la memorización de esos elementos. Mirándola desde otra perspectiva, las matemáticas se caracterizan como una disciplina en constante desarrollo (Hersh, 1986); de igual forma se le considera como la ciencia de los patrones (Steen 1988), debido a que el matemático busca patrones en los números, en el espacio, en la naturaleza, en las computadoras y hasta en la imaginación. Una de las aplicaciones de la matemática es utilizar esos patrones para explicar y predecir fenómenos naturales. De este modo la matemática se caracteriza por estar conformada de procesos donde interviene el descubrimiento y el interés por buscar regularidades. Dicho de otra manera, se convierte en una disciplina experimental que va más allá de la aplicación de reglas y procedimientos para responder preguntas. Su enfoque consiste en desarrollar el pensamiento matemático, elemento fundamental para que se planteen conjeturas, se empleen distintos sistemas de representación, se establezcan conexiones, se utilicen diversos tipos de argumentos y se comuniquen resultados (Santos-Trigo y Vargas, 2003).

La matemática desde la perspectiva de una disciplina que está en constante cambio considera la relación que existe entre el desarrollo de ideas vinculadas a las necesidades del ser humano e ir cambiando constantemente sus actividades (Núñez 2000); por ende, existe un constante cambio en el conocimiento matemático debido a los nuevos descubrimientos que llevan a cabo los matemáticos. Por otra parte, aprender matemáticas va relacionado con los procesos de descubrimiento, el cual se va dando al explorar las relaciones que existen entre los objetos matemáticos. Un elemento importante en el aprendizaje es la adquisición del mismo en términos de la formulación constante de preguntas que se analizan y discuten de manera colectiva, a través de recursos matemáticos que permiten darle sentido a las ideas o conceptos. (Santos, 2007).

Esta visión de la matemática acepta que existan procesos reflexivos que se favorecen al interactuar en un ambiente colaborativo de pequeños grupos en donde se valora la participación de todos sus integrantes (Santos-Trigo, 2008), logrando así la calidad colaborativa esperada cuando se comunican ideas para adquirir un aprendizaje con entendimiento. No hay que perder de vista que las tareas de instrucción juegan un papel importante en el desarrollo de los niveles de entendimiento, por tal motivo se hace hincapié en que éstas deben fomentar el empleo de distintas representaciones y estrategias para la búsqueda de patrones, formulación de conjeturas y comunicación de resultados. Por eso es importante tener claro que lo que se quiere que aprenda el estudiante va más allá de la memorización de algoritmos, se quiere que aprenda matemáticas desde la perspectiva que considera a la disciplina como una manera de fomentar la creatividad al identificar patrones y adquirir un aprendizaje con entendimiento a través de la reflexión.

2.3. Dimensión epistemológica

La epistemología, del griego episteme (conocimiento) y lógos (estudio), teoría del saber acerca del conocimiento, tiene como objeto de estudio conocer los fundamentos y los métodos del conocimiento científico; estudia la naturaleza, los preceptos (orden o mandato impuesto) y su validez del conocimiento. No hay que perder de vista que al tomar una decisión en cuanto al diseño de tareas y a las características del escenario de instrucción, ésta debe ser guiada por los antecedentes teóricos y enfoques interpretativos (Barrón 2015).

En lo que respecta a esta dimensión, se ha adoptado un enfoque socio constructivista, donde supone que cada individuo construye su propio conocimiento de una forma activa, es decir, cuando existe una interacción entre el sujeto y el objeto matemático a través de sus distintas representaciones, se modifican las estructuras cognitivas dando sentido a la información que procesa y a partir de ello pueden emerger ideas que emplearán para generar nuevo conocimiento. Por esta razón, el conocimiento no debe considerarse como una simple copia de la realidad externa, sino más bien, debe verse como una construcción que va ocurriendo mientras se van modificando los conocimientos previos que cada individuo posee. Así, aprender es un proceso que consiste en formar estructuras conceptuales cada vez más robustas, integrando o conectando conocimientos previos con conocimientos nuevos (Lerman, 2014).

Otros elementos importantes para considerar son los cognitivos, sociales y afectivos de una persona, puesto que cuando un individuo interactúa con otros en una comunidad de aprendizaje, el conocimiento se reestructura y reorganiza como resultado de esta interacción social. Por lo anterior, la participación de los estudiantes en procesos de reflexión y comunicación de ideas es crucial para que construyan nuevo conocimiento, ya que este no es recibido pasivamente, sino que es procesado y construido activamente (Ernest, 2010). El enfoque de este estudio está centrado en los procesos de reflexión que se desarrollan al momento de abordar problemas que desequilibran sus estructuras cognitivas mientras interactúan en pequeños grupos. Uno de los desafíos en el aprendizaje matemático (Borgersen, 1994) es crear entornos que brinden aceptación, seguridad y confianza; y para tal efecto, se ha elegido el trabajo cooperativo en la resolución de problemas como una forma de enfrentarlos. Usando este método, se respeta la forma de pensar de los resolutores y en donde los estudiantes experimentan todo el proceso de hacer matemáticas. Kilpatrick, (1985) y Noddings (1985) coinciden en que la teoría sociocultural de Vygotsky, que considera el aprendizaje como un proceso social en donde se participa activamente, se aportan ideas y argumentos en una situación construida conjuntamente por los participantes, es posiblemente el marco más útil si se desea estudiar el aprendizaje en pequeños grupos.

2.4. Dimensión didáctica

La Didáctica de la Matemática es una ciencia con un desarrollo relativamente reciente (Rico, 2012) y dentro de ella existe el interés por saber cómo se aprende matemáticas. De acuerdo con Salvador y Medina (2009), la didáctica se consolida como una disciplina formativa, en donde se van construyendo teorías y modelos propios para lograr una formación intelectual y actitudinal de los estudiantes, más integral y fundamentada, en donde se van proponiendo nuevos modos de acción y reflexión. En este sentido, este trabajo se enfoca en las características de los conocimientos que se consideran deseables, lo cual conlleva a la construcción de conexiones robustas entre un conocimiento nuevo y los recursos que se poseen, y que tienen lugar a partir de los procesos de reflexión y comunicación de ideas llevados a cabo durante la resolución de problemas (Hiebert et al. 1997). Estos mismos autores argumentan que para entender algo es importante ver cómo se relaciona o conecta con otras cosas que se conocen. En esta línea de ideas, Dewey (1933), Habermas (1971), Shön (1983) y Hiebert et. al; (1997) afirman que reflexionar para adquirir un aprendizaje con entendimiento ocurre cuando se piensa de manera consciente en las experiencias, en lo que se está haciendo y por qué se está haciendo, retroceder cuando hay dificultades o confusiones para mirar las cosas nuevamente y evaluar los pasos repetidamente. Todo este proceso requiere de perspicacia constante para resolver un problema de manera adecuada y eficiente. Retomando las ideas de Hiebert y colaboradores, argumentan que los estudiantes que aprenden con entendimiento tienen una base más sólida para construir nuevos conocimientos y habilidades en lugar de simplemente recordar hechos y procedimientos. Una forma de examinar los procesos que ocurren al construir este tipo de aprendizaje es pasar por las fases del ciclo básico propuesto por Kolb (1989), modificado por Zull (2002), adaptado por Barrera y Reyes (2016) y representado por Téllez, (2020). Este ciclo está integrado por cuatro fases: *acción*, *observación*, *formulación de conjeturas y justificación de resultados (*Figura 1).

Figura 1: *Ciclo básico para la construcción de aprendizaje matemático con entendimiento.*

Cabe destacar que durante este proceso se ven involucrados los elementos del pensamiento matemático. Por ejemplo, en la fase de acción se da una interacción entre el sujeto y el objeto en donde los resolutores identifican datos que son relevantes y los emplean para representar la información o la amplía cuando agrega elementos auxiliares. Es importante también mencionar que las distintas representaciones simbólicas de los objetos matemáticos ayudan a darle sentido y significado. La acción por sí sola no es suficiente para entender, es ineludible un proceso de reflexión en donde la observación juega un rol importante debido a que en esta fase el estudiante toma nota de lo que observa durante la acción y registra cosas que hayan llamado su atención; como pueden ser patrones, similitudes, diferencias o cualquier otro elemento que pueda ser relevante. Estas dos fases son bidireccionales porque para identificar esas regularidades y patrones puede requerir de un retorno a la interacción con los objetos matemáticos a partir de los cuales se ha abstraído cierta propiedad o relación matemática. En la fase de formulación de conjeturas el estudiante lleva a cabo la generalización de sus observaciones y las formaliza a través de modelos matemáticos, pudiendo ser modificadas o refinadas a medida que se avanza en el proceso de aprendizaje. Por último, en la etapa de justificación de resultados es importante que se proporcione una explicación razonada de lo que se observó y de las conjeturas que se formularon. Esto implica validarlas con diferentes argumentos como pueden ser visuales, empíricos o formales; llevando esta última etapa del ciclo al planteamiento de nuevas interrogantes y/o problemas que guiarán a una nueva fase de acción.

De acuerdo con Barrera y Reyes, (2016) el proceso de transitar entre los distintos niveles de entendimiento se puede lograr a través de la conexión de ideas cuando participan en un ambiente colaborativo de aprendizaje en el que se discuten y construyen significados considerados como compartidos. Por lo tanto, en el diseño de tareas se debe tener claridad en lo que se quiere que el profesor aprenda a través de la reflexión. En la Tabla 3 se puede observar cómo las dimensiones del marco conceptual se relacionan entre sí para dar sustento al trabajo de investigación.

Tabla 3. *Dimensiones del marco conceptual*

Dimensión	Indicadores	Uso en el pensamiento reflexivo
Ontológica	La matemática es concebida como la ciencia de los patrones.	Identificar regularidades en el proceso de resolución de problemas.
Epistemológica	Se adopta un enfoque socio constructivista.	Ambiente colaborativo en pequeños grupos.
Didáctica	Implementación del ciclo básico para observar el desarrollo del entendimiento a través de la resolución de problemas.	Identificar las heurísticas cuando examinan casos particulares durante el proceso.

Fuente: *Elaboración propia.*

Además del ciclo básico para la construcción del aprendizaje matemático con entendimiento, que se emplea para analizar los procesos de reflexión a través del uso de distintos sistemas de representación y de estrategias de resolución de problemas (heurísticas), de la búsqueda de patrones, de formulación de conjeturas, entre otras (Santos-Trigo y Vargas, 2003), se adopta también las categorías esenciales para el rendimiento en la resolución de problemas que establece Schoenfeld (1985). Él afirma que entendemos cómo pensar matemáticamente cuando somos ingeniosos, flexibles y eficientes con nuestras habilidades para abordar nuevos problemas de matemáticas. La Tabla 4, muestra las categorías formuladas por Schoenfeld.

Tabla 4. *Conocimientos y comportamientos necesarios para una caracterización adecuada del rendimiento en la resolución de problemas matemáticos.*

Recursos: Son los conocimientos matemáticos que poseen los individuos y que pueden ser puestos en acción sobre el problema en cuestión. Pueden consistir en:

Intuiciones y conocimientos informales respecto a la esfera de conocimiento donde esté inmerso el problema, como podrían ser:

- Datos
- Procedimientos algorítmicos
- Procedimientos de “rutina” no algorítmicos
- Entendimiento (conocimiento proposicional) sobre las reglas elegidas para trabajar en el ámbito de que se trate

Heurísticas: Estrategias y técnicas para avanzar al resolver problemas desconocidos o no comunes; reglas básicas para una eficaz resolución de problemas, incluyendo:

- Dibujar figuras; introducir notación adecuada
- Explotar problemas relacionados
- Reformular problemas; trabajar hacia atrás
- Verificar y comprobar los procedimientos

Control: Decisiones globales respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias:

- Planificación
- Supervisión y evaluación
- Toma de decisiones
- Actos conscientes metacognitivos

Sistemas de creencias: La “visión personal del mundo matemático”, el conjunto de (no necesariamente consciente) determinantes del comportamiento de un individuo acerca de:

- Sí mismo
- Su entorno
- El tema
- Las matemáticas

Fuente: *Schoenfeld 1985, Mathematical Problem Solving, p. 15.*

Con base en la Tabla 4, el desempeño en la resolución de problemas se construye gracias a los conocimientos básicos matemáticos (recursos) con los que cuenta el resolutor. En cuanto a las heurísticas, Schoenfeld las define como una sugerencia general o técnica que ayuda a entender o a resolver problemas. Una amplia gama de estrategias de solución favorece el ingenio y la creatividad. El control se refiere a la forma en que las personas explotan la información que tienen, a la planificación, a las decisiones que se toman; es decir, dependiendo del control que se tenga el problema será o no resuelto. Por último, los sistemas de creencias están constituidos por lo que se cree sobre las matemáticas y esto nos lleva a decidir cómo abordar un problema, qué herramientas y habilidades se implementarán. En la Tabla 5 se establecen los principios que permitirán examinar los procesos reflexivos que llevan a cabo los participantes.

Tabla 5. *Procesos reflexivos que ocurren en la resolución de problemas matemáticos.*

Fases del ciclo básico para la construcción del aprendizaje matemático con entendimiento	**Procesos reflexivos en la resolución de problemas matemáticos**
Acción	Identificar datos relevantes. Representar y/o ampliar la información. Emplear distintas representaciones simbólicas de los objetos matemáticos.
Observación	Identificar regularidades y/o patrones. Socializar resultados preliminares reflexionando sobre la experiencia de trabajar en pequeños grupos.
Formular conjeturas	Generalizar resultados a través de modelos matemáticos.
Justificar resultados	Características al justificar resultados. - Utilizar argumentos formales para obtener conclusiones. - Apelar únicamente al uso de sus recursos.

Fuente: *Elaboración propia*

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

3.1. Introducción

Llevar a cabo una investigación implica un proceso previo de reflexión sobre el qué, para qué, por qué, cómo, cuándo y dónde investigar (Gómez R. 2019). Estas interrogantes nos llevan a plantearnos el paradigma de nuestra investigación y para tal efecto, al redactar la sección metodológica de esta tesis, se ha seguido la línea de Ernest (1998) en cuanto a la definición de metodología, la cual describe como "Una teoría de métodos, el fundamento marco teórico y el conjunto de supuestos epistemológicos y ontológicos que determinan una forma de ver el mundo y, por lo tanto, que sustentan la elección de los métodos de investigación" (p. 35); expresado de otra manera, se describe y argumenta por qué se utilizaron ciertos métodos específicos.

Recordemos que una de las preguntas de investigación está centrada en conocer algunas características de los procesos reflexivos de los participantes cuando resuelven problemas y para dar respuesta fue necesario emplear una investigación de corte descriptivo. De acuerdo con Hernández et al. (2010), este tipo de investigación busca especificar características importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que sea sometido al análisis. Además, el trabajo adoptó un enfoque cualitativo porque según González y Hernández (2003) esas descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que se pueden observar, incorporan lo que los participantes dicen, sus experiencias, actitudes, creencias, pensamientos y reflexiones tal y como son expresadas por ellos mismos. De acuerdo con Creswell (2009) este tipo de enfoque puede ser necesario porque el tema es nuevo, nunca se ha abordado con una determinada muestra o grupo de personas o porque se ha investigado poco sobre él. Además, básicamente se desarrolla en un contexto de interacción personal, es decir, el investigador va asumiendo diferentes roles, según su grado de participación. Otra característica que es de suma importancia en la investigación cualitativa es la elección del escenario o lugar en donde se va a llevar a cabo la investigación, ya que, de la elección de éste, va a depender la realización del estudio.

Además, un rasgo que tiene este tipo de investigación es la flexibilidad y capacidad de adaptarse en cada momento y circunstancia en función del cambio que se produzca en el objeto de investigación (Rodríguez, 1999).

Cabe señalar que existen diversos métodos para recolectar la información con que se elaboran y sustentan las conclusiones y con base en el enfoque cualitativo-descriptivo que adoptó este trabajo, un ejemplo de método que sigue esa misma línea es el estudio de caso. Se prefirió este método porque es el más adecuado para describir las múltiples realidades encontradas en cualquier situación dada. A sí mismo, la recolección de la información se puede realizar a través de diferentes técnicas, como ejemplo tenemos las entrevistas y la observación, entre otras. Cada una de estas técnicas hacen uso de diversos instrumentos de recogida de datos, como son: diarios, grabaciones en audio y video, productos de actividades que realizaron los participantes, individualmente o en grupo; entre otros (Miles y Huberman, 1994).

3.2. Estudio de caso

El estudio de caso tiene como característica básica abordar de forma intensiva una unidad, ésta puede referirse a una persona, una familia, un grupo, una organización o una institución (Stake, 1994). Esta metodología se puede aplicar especialmente cuando se analizan fenómenos sociales y educativos. En su definición, Stake (1998) refiere que *"es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes*" (p. 11). Por otro lado, el estudio de caso pretende identificar aquellas características que son comunes a otras situaciones, pero también las que hacen de ese caso en particular algo distinto. El propósito consiste en demostrar cómo estas características influyen de una u otra forma en un sistema, conjunto de personas o eventos con características similares. Como técnicas de recolección de datos generalmente se utilizan las encuestas y la observación, sin embargo, el estudio de caso no excluye a ninguna, por lo que el investigador podrá seleccionar las que mejor se adapten a su trabajo (Bell, 2005).

No es una simple descripción de un evento o situación específica, sino que "*como en toda investigación, se recogen pruebas sistemáticamente, se estudia la relación entre variables y se planifica metódicamente la indagación*" (Bell, 2005, p. 22). Para llevar a cabo esta investigación, cada caso se integró por pequeños grupos (tres participantes) porque interesa conocer las heurísticas que ponen de manifiesto al momento de resolver problemas y algunas características de sus procesos reflexivos.

3.3. Diseño metodológico

En una primera etapa se les aplicó a los participantes una encuesta de entrada a través de Google Forms, la cual fue diseñada para obtener información sobre los años de servicio que llevan frente a grupo, la creencia que tienen acerca del aprendizaje matemático vía resolución de problemas, la importancia que ellos le dan a la reflexión cuando resuelven problemas, así como su formación y grado académico. Posteriormente se llevó a cabo un curso titulado "Introducción a la resolución de problemas matemáticos"; con una duración de 20 horas y con sesiones de cuatro horas diarias. Las primeras cuatro sesiones sirvieron para introducirlos a la reflexión a través de resolución de problemas no rutinarios en donde en forma individual y/o en equipo, realizaron las actividades. En la quinta sesión se formaron grupos de 3 integrantes, donde ellos mismos eligieron con quien trabajar. Se optó este criterio porque con base en las observaciones que hizo la investigadora durante el curso, los participantes se sentían en confianza y participaban más cuando estaban con alguien a quien ellos conocían.

Los problemas planteados fueron de Geometría sintética (adaptado de Bjuland 2002) y de formación de patrones numéricos (Problemas de álgebra, Geometría y Trigonometría. A. Nietushil. IPN 2012), dentro de un ambiente de lápiz y papel. De forma individual a cada profesor se le entregó en físico una encuesta con la finalidad de saber sus impresiones del curso, si su concepción que tenían acerca de la matemática y su aprendizaje cambió después del curso, cuáles de los elementos del pensamiento matemático creen que son de utilidad para resolver problemas, entre otras cosas. Los instrumentos seleccionados para llevar a cabo el estudio ayudaron a validar el análisis de los datos a través del método de triangulación.

3.3.1. Participantes

Participaron 15 profesores de matemáticas que proceden de escuelas secundarias técnicas y de planteles de bachillerato de diferentes instituciones públicas y privadas del estado de Hidalgo, México; de los cuales 8 estudian un posgrado en Matemáticas y su Didáctica a quienes nombramos Grupo 1; mientras que el resto son profesores en servicio en la Secretaría de Educación Pública y los nombramos Grupo 2.

Para seleccionar a los participantes, se les dio a conocer el proyecto de investigación a los profesores en servicio, pertenecientes a una zona en específico del estado de Hidalgo y a estudiantes de la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica de ese mismo lugar, haciendo énfasis en la confidencialidad de sus datos y para tal efecto emplearían un pseudónimo. Además, se resaltó la importancia de colaborar de manera voluntaria. En la Tabla 6 se presenta el perfil de los participantes.

Tabla 6. *Perfil de los participantes clasificados por Grupo*.

Grupo 1	Formación académica	Grado académico	Años de servicio
Alo	Licenciatura en educación secundaria con especialidad en Matemáticas	Licenciatura	15
Ana	Ingeniero Químico	Ingeniería	3
Free-form	Ingeniero Industrial	Ingeniería	24
Homero	Licenciatura en contaduría	Licenciatura	6
Rosa negra	Ingeniera Química	Ingeniería	8
Self-wait	Ingeniería en Electrónica y Telecomunicaciones	Ingeniería	8
Spellman	Ingeniería en Sistemas Computacionales	Ingeniería	2
Valmns	Ingeniería en Telecomunicaciones	Ingeniería	2

Grupo 2	Formación académica	Grado académico	Años de servicio
El 50	Licenciatura en educación secundaria con especialidad en Matemáticas	Licenciatura	11
FantoDio	Licenciatura de educación secundaria con especialidad en Matemáticas	Licenciatura	9
Lea	Licenciatura en educación secundaria con especialidad en Matemáticas	Maestría en educación	12
Lolin	Licenciatura en educación secundaria con especialidad en Matemáticas	Maestría en Psicopedagogía Humanista	8
Mirrys	Licenciatura en nivel medio básico con especialidad en Matemáticas	Licenciatura	26
Sam	Licenciatura en educación secundaria con especialidad en Matemáticas	Licenciatura	2
Zerimar	Licenciatura en educación secundaria con especialidad en Matemáticas	Licenciatura	9

***Fuente**: Elaboración propia.*

3.3.2. Elección de los problemas

Previamente a la implementación de la actividad experimental se realizó una búsqueda de problemas en distintas fuentes y con distintos niveles de dificultad, los cuales pasaron por un proceso de revisión a cargo de personas con experiencia en investigación en la línea de Resolución de Problemas. Los problemas fueron seleccionados tomando en cuenta tres criterios: *i)* que fuesen relevantes para que los participantes pudiesen experimentar, identificar regularidades, formular conjeturas y justificarlas; *ii)* desafiantes, con cierto grado de dificultad, pero dentro de la capacidad de los participantes para solucionarlos, además, *iii)* con preguntas interesantes para captar su atención. Para garantizar que los problemas cumplieran con esos criterios, una vez que se llevó a cabo el curso de introducción a la resolución de problemas matemáticos con los participantes y conocer sus alcances y limitaciones como resolutores; se eligieron de la lista que se tenía uno de Geometría sintética y otro de Formación de patrones numéricos.

3.3.3. Implementación del problema "Formación de patrones numéricos"

Este problema consiste en un arreglo de números enteros positivos, como se muestra en la Figura 2, cuya implementación se llevó a cabo en la última sesión del curso "Introducción a la resolución de problemas matemáticos", con una duración de entre 70 y 80 minutos. Se entregó a los participantes un formato escrito con el enunciado de la actividad y se leyeron las indicaciones pertinentes, en donde el instructor realizó algunas preguntas para verificar que efectivamente los participantes las entendieron.

1						
2	3	4				
3	4	5	6	7		
4	5	6	7	8	9	10

***Figura 2**. Formación de patrones numéricos*

Para guiar a los participantes en la resolución del problema, se realizaron preguntas de diferente grado de dificultad, cuyas características contribuyen a la reflexión al momento de darles respuesta. Primero, tenían que construir los siguientes dos renglones del arreglo y para que pudiesen contestar, debían analizar algunas regularidades y/o patrones; posteriormente había que encontrar el primer elemento del renglón número cien y obtener la suma de los elementos de cada uno de los primeros seis renglones. Después de esto, tenían que describir las regularidades que observaron en la construcción de cada renglón. En caso de que algún equipo no tuviese un avance significativo el instructor lo apoyaba mediante ejemplos o preguntas orientadoras. Durante el desarrollo de esta actividad, las preguntas giraban en torno al análisis de casos particulares que los iban guiando a la conjetura y al argumento de ésta.

3.3.4. Implementación del problema de "Geometría sintética"

El problema fue modificado del estudio "Student teachers' reflections on their learning process through collaborative problem solving in geometry", realizado por Raymond Bjuland y publicado en Educational Studies in Mathematics en 2002. Se realizaron algunos cambios basándose en los conocimientos de los participantes mostrados durante el curso y la forma en cómo resolvían los problemas. A continuación, en la Figura 3 se muestra la configuración geométrica que se les presentó.

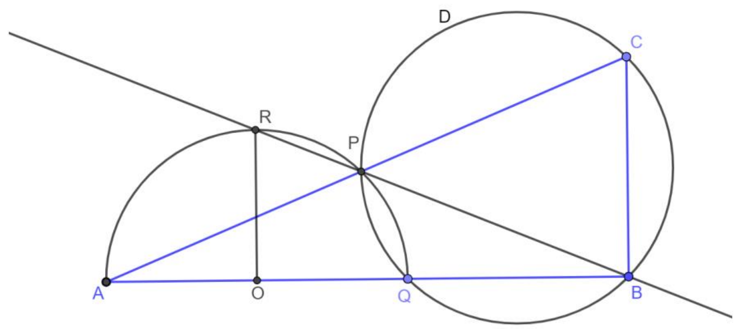


***Figura 3**. Configuración geométrica adaptada de Raymond Bjuland (2002).*

Esta actividad se llevó a cabo en un tiempo de 60 a 80 minutos, cuya implementación consistió en primer lugar en encontrar las medidas de los ángulos *APR* y *QPC.* Al tratarse de una actividad en un ambiente de lápiz y papel, algunos participantes emplearon un transportador para medir dichos ángulos, pero querían estar seguros de sus respuestas y trataban de encontrar y/o recordar algunas propiedades de la configuración geométrica. Otra pregunta de interés que llevó a los participantes a la reflexión fue que encontraran la relación entre los ángulos *BQC* y *BPC*. Por último, los participantes debían demostrar que los puntos B, P y R son colineales sí y sólo sí el ángulo BQC mide 45°. Para la captura de los datos se utilizó el procedimiento de "pensar en voz alta", los cuales fueron registrados a través de una herramienta de grabación audiovisual.

3.3.5. Elementos teóricos tomados en cuenta para implementar los problemas

Al considerar a la matemática como la ciencia de los patrones, los procesos reflexivos deben estar orientados al descubrimiento de los mismos, esto, mediante la exploración y experimentación con objetos matemáticos. También se debe promover la formulación de conjeturas a través de analizar casos particulares y a presentar argumentos para justificar resultados. Siguiendo esa línea, los problemas representaron desafíos para el profesor, sin perder de vista que en el enfoque socio constructivista, la interacción entre el sujeto y el objeto fomenta la generación del conocimiento a partir de las discusiones de ideas con otros individuos, pudiendo ser entre pares o con el instructor. Cabe resaltar que de acuerdo con Campos-Nava y Torres-Rodríguez (2023) el instructor o profesor desempeña un papel fundamental al elaborar una serie de preguntas así como las acciones que implementa para guiar el proceso de solución, mantener en los resolutores el interés y desarrollar el pensamiento matemático al analizar casos particulares, observar regularidades, generalizar, elaborar conjeturas, comunicar resultados, entre otras. Dicho proceso llamado inquisitivo es necesario cuando se aprende matemáticas vía resolución de problemas.

3.3.6. Instrumentos y métodos de recopilación de datos

Primero se aplicó una encuesta vía Google Forms para conocer principalmente lo que significa para los participantes el aprender matemáticas vía resolución de problemas así como la importancia de reflexionar. El último día del curso, se les proporcionó dos problemas en forma impresa (Figuras 4 y 5). La investigadora principal utilizó hojas de observación y recolectó la información a través de las encuestas, de las videograbaciones y de los trabajos reportados. Se indicó a los participantes que aplicaran el método de pensamiento en voz alta para resolver los problemas, el cual consiste en externar de manera activa y rigurosa lo que se está pensando. Según Eccles & Arsal (2017), este método puede usarse para comprender de manera efectiva un proceso de pensamiento.

1. Arreglo de números enteros positivos

Los siguientes cuatro renglones son parte de un arreglo infinito que sigue un patrón.

1
2 3 4
3 4 5 6 7
4 5 6 7 8 9 10

1. Construya los siguientes dos renglones del arreglo anterior.
2. ¿Cuál es el primer elemento del renglón número 100?
3. ¿Cuál es la suma de los elementos de cada uno de los primeros seis renglones?
4. ¿Qué regularidades observa en la construcción de cada renglón?
5. ¿Cuál es la suma de los elementos de la fila número k? Exprese el resultado en términos de k. Justifique sus respuestas.

Figura 4. *Formación de patrones numéricos*

2. Configuración Geométrica

Modificada del estudio *"Student teachers' reflections on their learning process through collaborative problem solving in geometry"* realizado por Raymond Bjuland y publicado en Educational Studies in Mathematics en 2004.

Dado un triángulo ABC rectángulo en B, se toma un punto Q en AB y se construye la circunferencia D que pasa por QBC. Adicionalmente, sea O el punto medio de AQ y se traza la semicircunferencia con centro en O y radio OQ que interseca a D en el punto P, el cual se encuentra en el segmento AC. Suponga también, que RO es perpendicular a OQ. Ver la figura anexa.

a) ¿Cuál es la medida de los ángulos APR y QPC?

b) ¿Cuál es la relación entre los ángulos BQC y BPC?

c) Demuestre que si B, P y R son colineales sí y solo sí el ángulo BQC mide 45°.

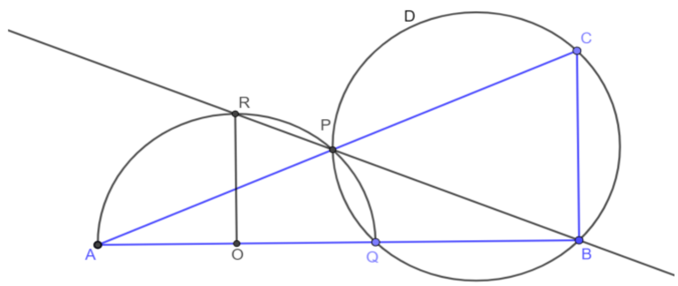


Figura 5. *Geometría sintética*

Como se mencionó en el planteamiento del problema del Capítulo 1, el interés que llevó a comenzar este proceso de investigación y elaborar preguntas, está centrado en conocer esos procesos reflexivos que intervienen en la resolución de problemas de los participantes. Para tal efecto, en este capítulo se describen los fundamentos metodológicos; además, la Figura 6 muestra un esquema de cómo se relaciona el marco conceptual con los instrumentos, es decir se presenta una visión general del diseño de investigación para ayudar al lector a comprender mejor los resultados y las discusiones del trabajo.

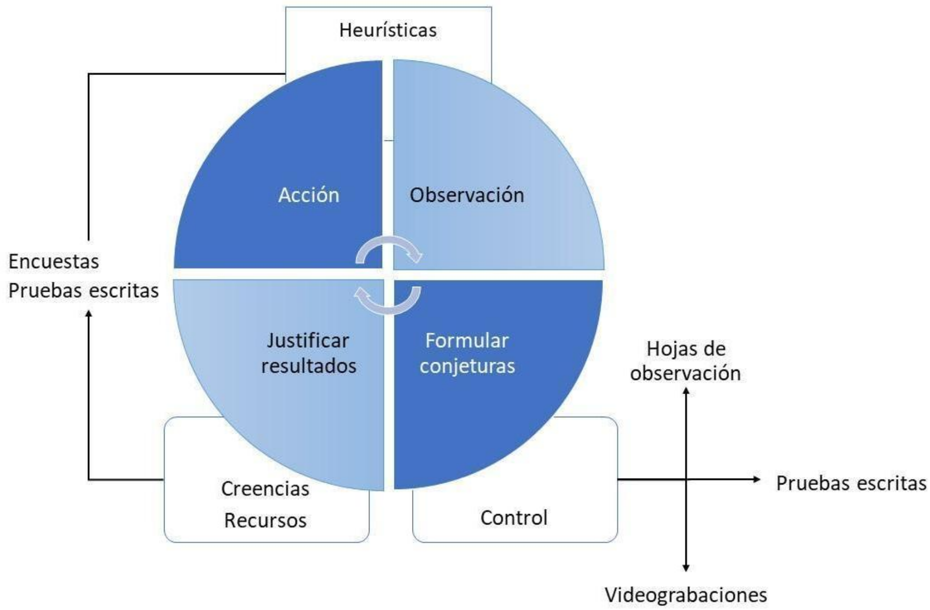


Figura 6. *Relación entre el marco conceptual y los instrumentos de investigación.*

Como se puede observar en el esquema, para obtener los datos experimentales se emplearon encuestas, videograbaciones, hojas de observación y pruebas escritas en donde el análisis que se hizo a través del ciclo básico para la construcción del aprendizaje matemático con entendimiento y de las categorías en la resolución de problemas, lo que permitió dar respuesta a las preguntas de investigación.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

4.1. Introducción

Los procesos de recolección y análisis de datos se basaron en un punto de vista constructivista. El enfoque constructivista afirma que el conocimiento consiste en un conjunto de esquemas basados en la experiencia previa (Dubinsky, 2002; Von Glasersfeld, 1995), lo que implica que no tenemos acceso directo al aprendizaje, sólo podemos modelar sus interpretaciones en función del pensamiento en voz alta observado (por ejemplo, expresiones verbales, comportamientos/gestos, gráficos resultantes) y los resultados de la encuesta. Como lo menciona Kerlinger (1975), para analizar un constructo es necesario definirlo de tal forma que pueda ser observado y medido. Es así como el análisis de los datos refleja los mejores esfuerzos para caracterizar algunos procesos del pensamiento reflexivo de los participantes.

4.2. Análisis de datos

Los datos fueron analizados en dos etapas, reducción y presentación. En la primera etapa se analizaron los que aportaron elementos fundamentales que permitieron dar respuesta a las preguntas de investigación. En la segunda etapa se muestran los resultados de los procesos de solución, tomando en cuenta el ciclo básico para la construcción del aprendizaje matemático con entendimiento y las categorías en la resolución de problemas. Para el análisis, la investigadora escuchó las grabaciones, leyó con detalle las encuestas, las hojas de observación y las pruebas escritas que los participantes reportaron. El análisis fue validado mediante el método de triangulación el cual consiste en un proceso sistemático de validez donde los investigadores buscan la convergencia entre diferentes fuentes de información para formar temas o categorías de estudio (Creswell et al. 2000), obteniendo así una prueba de confiabilidad de las características encontradas.

4.3. Solución de los problemas

En este apartado se ilustra cómo los participantes dieron solución a los problemas a través del diálogo, después de haber colaborado en el proceso de resolución de problemas en un contexto de grupos pequeños, llevada a cabo durante la última sesión del curso. Antes de iniciar con la actividad experimental, la investigadora entregó a cada uno de los equipos un folder que contenía las indicaciones, los dos problemas y la encuesta de salida que debían contestar de manera individual al terminar de resolverlos, además de hojas en blanco en donde tenían que reportar sus procesos de solución. La investigadora comentó que disponían de 3 horas ininterrumpidas para resolverlos y debían leer con mucho cuidado cada uno de los problemas. Se les explicó que el instructor estaría disponible para aclarar cualquier duda o dar alguna indicación después de iniciado el proceso de solución, en caso de no tener avances significativos. Así mismo, se les informó que las soluciones debían escribirlas en las hojas que se les proporcionó con la finalidad de documentar momentos relevantes en el proceso de resolución; además, una persona estaría videograbando el proceso. El instructor señaló la importancia de reportar por equipo la solución, les comentó que socialicen sus ideas y al final solamente reportarían un trabajo, aclarándose que en la discusión ellos podrían aportar ideas e interactuar como consideren apropiado, tomándose su tiempo para leer cuidadosamente.

A continuación se presentan las soluciones de los problemas organizadas por equipo. Cabe destacar que se establecieron 5 equipos de 3 integrantes cada uno. Los equipos 1 y 5 estuvieron formados por participantes del Grupo 2 y los integrantes de los equipos 3 y 4 por participantes del Grupo 1. El equipo 2 fue el único que estaba integrado por un participante del Grupo 2 y dos del Grupo 1.

4.3.1 Solución al problema "Formación de patrones numéricos"

Steen (1988), considera a las matemáticas como la ciencia de los patrones y argumenta que esta disciplina puede ayudar a resolver problemas complejos. También enfatiza la relevancia de enseñar a los estudiantes a reconocer esos patrones y a utilizarlos en la resolución de problemas como una forma de desarrollar habilidades analíticas y creativas que pueden ser valiosas en muchos campos. Por tal motivo, se sugirió este tipo de problema en donde los participantes al tratar de identificar y describir regularidades utilizaron varias técnicas de visualización, como gráficos, por ejemplo.

Equipo 1 (Zerimar, Mirrys y el 50)

Para construir los siguientes dos renglones del arreglo de números enteros positivos, el equipo identificó que había una sucesión formada con el último elemento de cada fila. El siguiente extracto de la conversación muestra la regularidad que observaron.

39	*Zerimar:*	*Va de tres en tres, es una sucesión . . .*
40	*El 50:*	*7, 10, 13, 16…,*
41	*Zerimar:*	*Ajá, es que trae una sucesión*
42	*El 50:*	*(Asintió con la cabeza)*
43	*Zerimar:*	*Aquí entonces sería de tres en tres*

Además de esa regularidad, el equipo identificó que en la primera columna del arreglo hay una sucesión de números consecutivos y que en las filas, los elementos aumentan dos números consecutivos. La Figura 7 muestra la solución al primer inciso.

1.- Arreglo de Números enteros positivos

1.- 5 6 7 8 9 10 11 12 13
6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- En la columna 1 identificamos que es una progresión de números consecutivos
- En las filas aumentan 2 números consecutivos

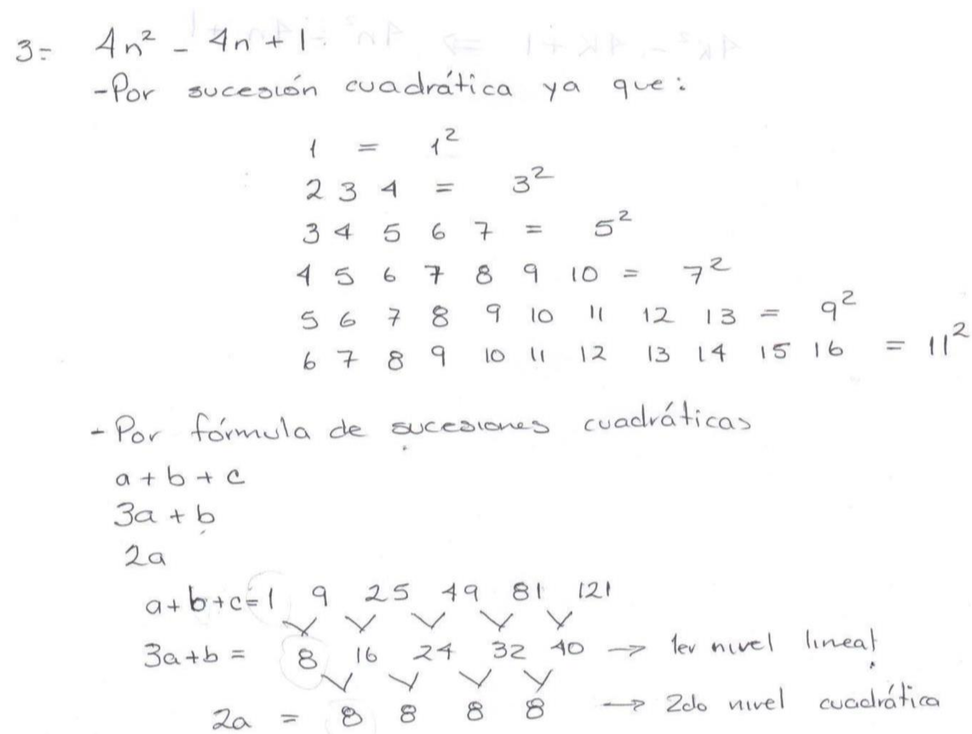
Figura 7. *Solución a la primera instrucción.*

La Figura 8 muestra la solución a la segunda pregunta en donde se puede observar que la respuesta es breve, tratan de justificar el resultado pero lo hacen de una manera informal.

2.- 100
- Por la observación identificada en el primer planteamiento

Figura 8. *Solución a la segunda pregunta*

Para responder a ¿Cuál es la suma de los elementos de cada uno de los primeros seis renglones?, los participantes sumaron los elementos, los colocaron en una fila para encontrar las diferencias entre ellos, concluyendo que esas sumas son términos de una sucesión cuadrática. La figura 9 muestra la solución.


3= $4n^2 - 4n + 1$

-Por sucesión cuadrática ya que:

$1 = 1^2$

$2\ 3\ 4 = 3^2$

$3\ 4\ 5\ 6\ 7 = 5^2$

$4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10 = 7^2$

$5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13 = 9^2$

$6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16 = 11^2$

-Por fórmula de sucesiones cuadráticas

$a + b + c$

$3a + b$

$2a$

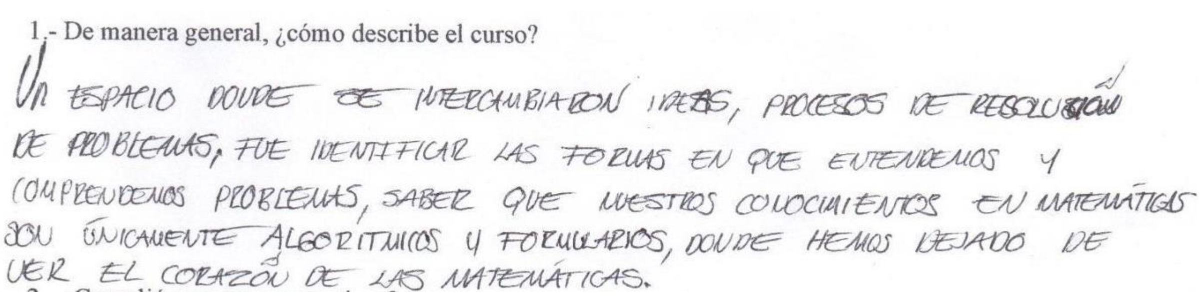
$a+b+c =$ 1 9 25 49 81 121

$3a+b =$ 8 16 24 32 40 → 1er nivel lineal

$2a =$ 8 8 8 8 → 2do nivel cuadrática

Figura 9. *Solución a la tercera pregunta*

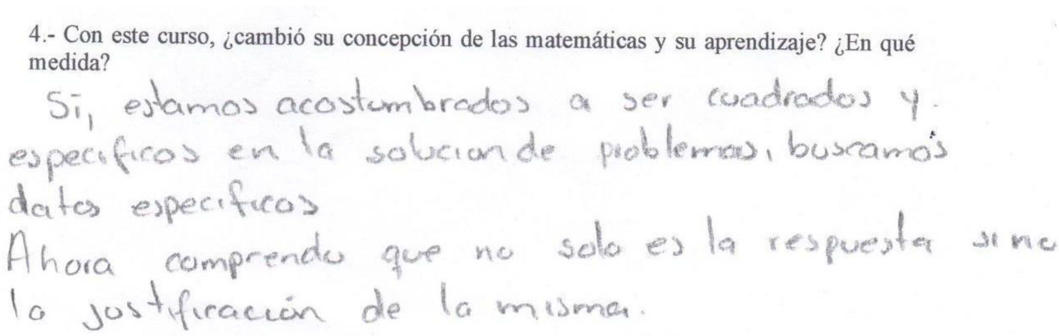
Esa única ruta de solución que emplearon los integrantes en donde apelan a sus conocimientos previos, se debe principalmente a la creencia que tienen de la matemática y su aprendizaje. Esa afirmación se justifica por la manera en que expresan sus ideas en la encuesta final. En la Figura 10 se observa cómo *el 50* manifiesta que ha aprendido matemáticas cuando memoriza fórmulas y algoritmos.


1.- De manera general, ¿cómo describe el curso?

UN ESPACIO DONDE SE INTERCAMBIARON IDEAS, PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, FUE IDENTIFICAR LAS FORMAS EN QUE ENTENDEMOS Y COMPRENDEMOS PROBLEMAS, SABER QUE NUESTROS CONOCIMIENTOS EN MATEMÁTICAS SON ÚNICAMENTE ALGORÍTMICOS Y FORMULARIOS, DONDE HEMOS DEJADO DE VER EL CORAZÓN DE LAS MATEMÁTICAS.

Figura 10*. Respuesta de el 50 a la primera pregunta de la encuesta final.*

En la Figura 11, *Zerimar* manifiesta que está acostumbrada a ser cuadrada y a buscar datos específicos y que aprender matemáticas es llegar a un resultado sin necesidad de justificar.


4.- Con este curso, ¿cambió su concepción de las matemáticas y su aprendizaje? ¿En qué medida?

Si, estamos acostumbrados a ser cuadrados y específicos en la solución de problemas, buscamos datos específicos
Ahora comprendo que no solo es la respuesta sino la justificación de la misma.

***Figura 11**. Respuesta de Zerimar a la cuarta pregunta de la encuesta de salida*

Cuando trataban de dar respuesta a la pregunta ¿qué regularidades observa en la construcción de cada renglón?, los participantes entendieron que debían encontrar la relación que existe entre el número de la fila con la suma de sus elementos. Cabe resaltar que al encontrar esa relación, estarían dando respuesta a la quinta pregunta. La siguiente conversación evidencia los esfuerzos que muestran por encontrar esa relación.

El 50:	*Uno al cuadrado es uno. Ahora, dos, escriba, 2, 3 . . .*
Mirrys:	*¿2, 3 y 4?*
El 50:	*Exactamente, 2, 3 y 4 y el signo igual.*
Zerimar:	*tres al cuadrado*
Mirrys:	*Luego 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ¿es igual a?*
Zerimar:	*a . . . cinco al cuadrado*
El 50:	*Mira amiguita, si tu cuentas los números 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, al cuadrado (señalando los renglones 3 y 4 respectivamente)*
Zerimar:	*¡Ah, sí cierto! (risas en el equipo)*

La Figura 12 muestra la respuesta que proporcionan los participantes a la cuarta pregunta. Sin embargo, no se percataron que únicamente tenían que describir las regularidades observadas en el problema.

4. La suma representa el cuadrado de 2 veces el nivel menos uno.

$$1 \rightarrow 1^2 \quad (2(1)-1)^2$$
$$2 \rightarrow 3^2 \quad (2(2)-1)^2$$
$$3 \rightarrow 5^2 \quad (2(3)-1)^2$$
$$4 \rightarrow 7^2 \quad (2(4)-1)^2$$
$$5 \rightarrow 9^2 \quad (2(5)-1)^2$$
$$6 \rightarrow 11^2 \quad (2(6)-1)^2$$

Figura 12. *Solución a la cuarta pregunta*

Por último, para responder ¿cuál es la suma de los elementos de la fila número k?, representaron de forma general esa relación a través de un binomio al cuadrado el cual desarrollaron para obtener un trinomio cuadrado perfecto. La Figura 13 muestra la respuesta pero no la justifican.

$$K \rightarrow (2K-1)^2$$
$$4K^2 - 4K + 1 \Rightarrow 4n^2 - 4n + 1$$

Figura 13. *Solución a la quinta pregunta*

A pesar de que en la encuesta inicial los participantes manifestaron que es importante reflexionar cuando se resuelven problemas porque permite adquirir un aprendizaje significativo, argumentar su análisis y comprender (Figuras 14, 15 y 16), se puede observar que emplearon poco este elemento ya que buscaron en la mayoría de las veces una fórmula que les permitiera obtener la respuesta.

¿Considera importante reflexionar al resolver problemas matemáticos? ¿Por que? *

Para resolver un problema es de suma importancia la reflexión, el análisis, la reflexión, y la comprensión para poder llegar a una solución.

Figura 14. *Respuesta de Mirrys acerca de la importancia de reflexionar.*

¿Considera importante reflexionar al resolver problemas matemáticos? ¿Por que? *

Si, por qué el alumno debe de lograr la argumentación de sus análisis para llegar a solicitar un problema

Figura 15. *Respuesta de el 50 acerca de la importancia de reflexionar.*

¿Considera importante reflexionar al resolver problemas matemáticos? ¿Por que? *

Si, porque permite construir aprendizajes significativos

Figura 16. *Respuesta de Zerimar acerca de la importancia de reflexionar.*

Con base en la información obtenida, se pudo identificar que los participantes tienen poca o nula experiencia al aprender matemáticas vía resolución de problemas, sus recursos no son suficientes y apelan únicamente a sus conocimientos previos. Cabe destacar que otra de sus heurísticas empleadas fue representar la información, socializar resultados y releer la información con la finalidad de encontrar alguna fórmula y aplicarla. Con base en el ciclo básico para la construcción del aprendizaje matemático con entendimiento, este equipo a través de la acción y la observación, lograron encontrar regularidades y dar respuesta a las preguntas, sin embargo no lograron justificarlas, por tal motivo, sus procesos reflexivos son limitados y su aprendizaje con entendimiento se queda en la fase de observación.

Equipo 2 (Ana, Lolín y Homero)

Este equipo fue el único que se formó con dos integrantes del Grupo 1 y un integrante del Grupo 2, es importante aclararlo porque es probable que esta característica haya influido en la poca participación de *Lolin* (Grupo 2) en las discusiones, así como se muestra en el siguiente extracto de las conversaciones.

Homero: *. . . aquí son 3 (señala la segunda fila), aquí son 5 (tercera fila)), 7 (cuarta fila) . . . aquí tendrían que ser 9 elementos (quinta fila).*

Ana: *Ajá*

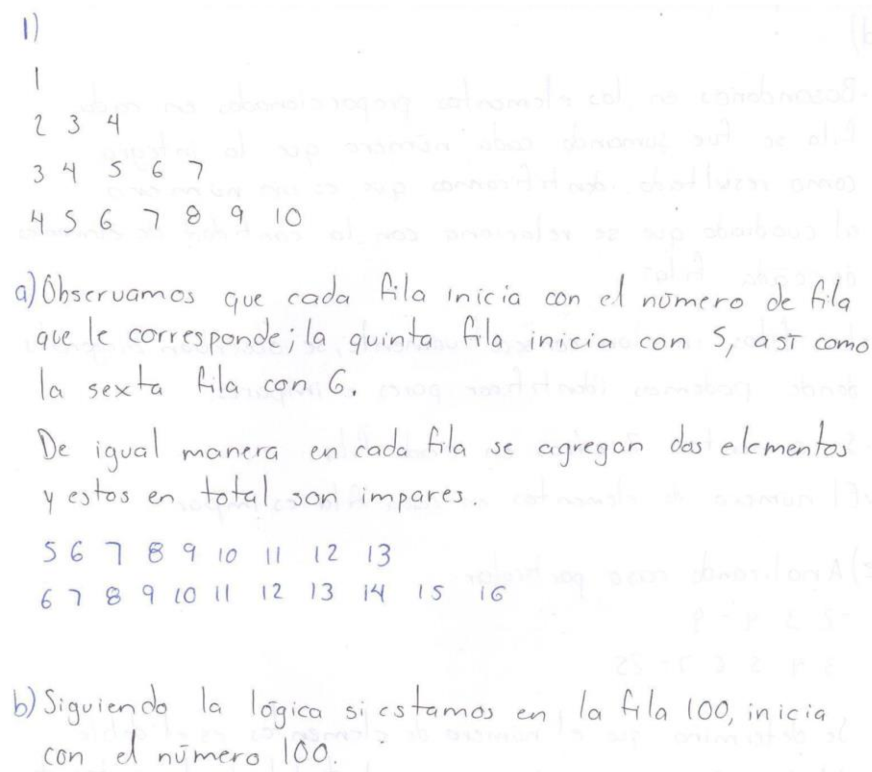
Homero: *Entonces 12, 3, 6, 7, 8 (cuenta los elementos de esa fila), 13 ¿no?*

Lolin: *y aquí tendrían que ser 11 (señalando la sexta fila).*

Homero: *Ajá, 11, 12, 13; 2, 3, 6, 7, 8 (contando los elementos), este 14, 15 y 16.*

Ana: *y las sumas ¿también siguen dando cuadrados?. . .*

En la Figura 17 se muestra la construcción de los siguientes dos renglones del arreglo y el primer elemento del renglón número 100.



1)

1

2 3 4

3 4 5 6 7

4 5 6 7 8 9 10

a) Observamos que cada fila inicia con el número de fila que le corresponde; la quinta fila inicia con 5, así como la sexta fila con 6.

De igual manera en cada fila se agregan dos elementos y estos en total son impares.

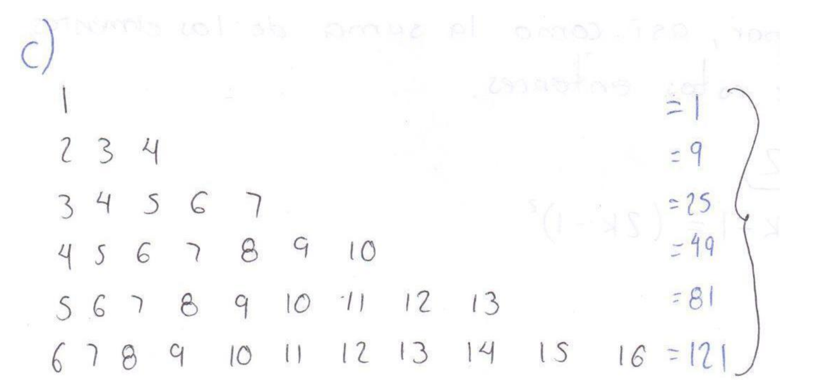
5 6 7 8 9 10 11 12 13

6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

b) Siguiendo la lógica si estamos en la fila 100, inicia con el número 100.

Figura 17. *Respuesta a la primera y segunda pregunta.*

Con base en lo observado por parte de la investigadora, los participantes no tuvieron mayor dificultad para dar respuesta a lo solicitado. La observación del arreglo por parte de ellos fue un elemento importante para encontrar regularidades y responder satisfactoriamente. La Figura 18 muestra cómo dieron respuesta a la pregunta ¿cuál es la suma de los elementos de cada uno de los primeros seis renglones?



c)

1 = 1

2 3 4 = 9

3 4 5 6 7 = 25

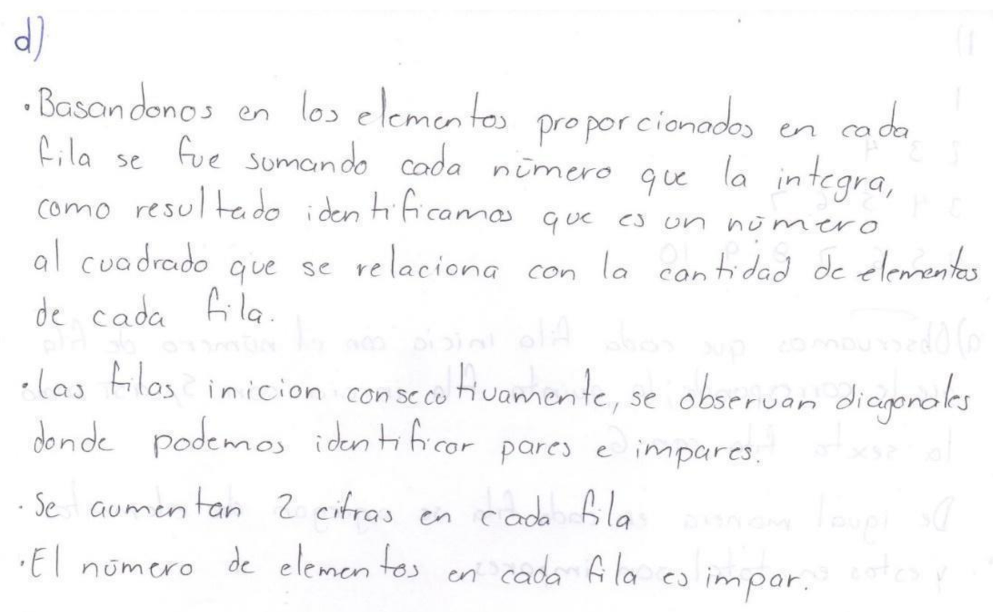
4 5 6 7 8 9 10 = 49

5 6 7 8 9 10 11 12 13 = 81

6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 = 121

Figura 18. *Respuesta a la tercera pregunta.*

Cabe destacar que en la solución que reportan, les faltó especificar que la suma de esos elementos da un número cuadrado, regularidad que ya habían observado. En cuanto a la pregunta ¿qué regularidades observa en la construcción de cada renglón?, los resolutores identificaron varios patrones que se pueden observar en la Figura 19.



d)

• Basandonos en los elementos proporcionados en cada fila se fue sumando cada nūmero que la integra, como resultado identificamos que es un nūmero al cuadrado que se relaciona con la cantidad de elementos de cada fila.

• las filas inicion consecutivamente, se observan diagonales donde podemos identificar pares e impares.

• Se aumentan 2 cifras en cada fila

• El nūmero de elementos en cada fila es impar.

Figura 19: *Respuesta a la cuarta pregunta.*

Cuando discutían sus ideas para dar respuesta a la pregunta ¿cuál es la suma de los elementos de la fila número k?, la investigadora quien fungió como observadora se percató de que los participantes introducían demasiadas ideas y dedicaban poco tiempo para concentrarse en cada una de ellas. Cuando obtuvieron la respuesta, *Homero* la validó realizando nuevamente los cálculos, tal y como se muestra en el siguiente extracto de las transcripciones.

Homero: *2k menos uno al cuadrado, entos nos quedaría…(resolviendo mentalmente el binomio al cuadrado).*

Ana: *4k²…*

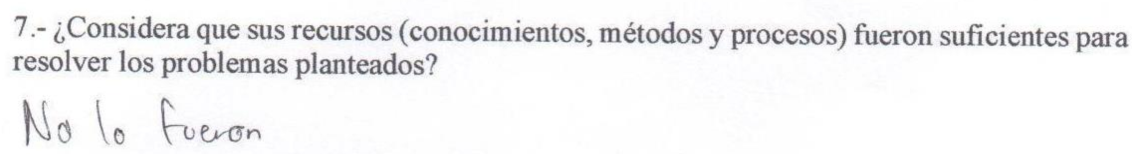
Homero: *… menos 4k más 1. Haber, vamos a plantearla otras vez: 4 por dos al cuadrado menos 4 por dos más uno. Este sería 4, 16 menos 8 más uno.*

Ana: *¿16 menos 8?*

Lolin: *8 más 1, 9 ¿no?*

Homero: ¡Ya está! (los demás integrantes expresan alegría a través de risas)
Ana: Ok, o sea pero… (pensando) Ah, creo que ya entendí y luego va ser 101, 102
y así nos vamos, ahora, de este (señala k) entonces empezamos del número
que se nos antoje . . . y el total de elementos va ser el doble de k menos 1.

Como se puede observar, *Ana* muestra dudas e intenta encontrarle sentido a la respuesta cuando ella misma explica con sus palabras la solución y de esa forma verificar que ha entendido. La poca participación en los procesos de solución de *Lolin* (Grupo 2) puede deberse a que ella considera que sus conocimientos matemáticos no son suficientes, afirmación que hace en la encuesta final y que se puede observar en la Figura 20.


7.- ¿Considera que sus recursos (conocimientos, métodos y procesos) fueron suficientes para resolver los problemas planteados?

No lo fueron

Figura 20: *Consideración de Lolin acerca de sus recursos matemáticos.*

En la Figura 21, se puede observar que a través de analizar casos particulares y observar las regularidades, pudieron dar respuesta de manera breve a la última pregunta.

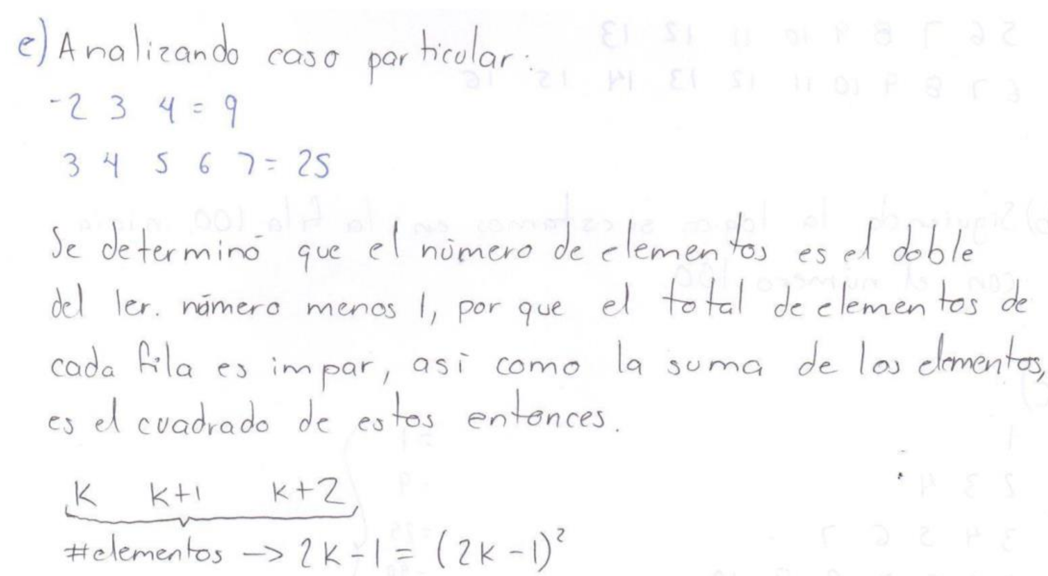

e) Analizando caso particular:
2 3 4 = 9
3 4 5 6 7 = 25
Se determinó que el número de elementos es el doble del 1er. número menos 1, por que el total de elementos de cada fila es impar, así como la suma de los elementos, es el cuadrado de estos entonces.
$\underbrace{K \quad K+1 \quad K+2}$
#elementos -> $2K-1 = (2K-1)^2$

Figura 21. *Solución a la quinta pregunta.*

Revisando una pregunta de la encuesta inicial, por la forma en cómo *Homero* quien pertenece al Grupo 1 dio respuesta a ¿qué significa para usted aprender matemáticas vía resolución de problemas? (Figura 22), se puede argumentar que la experiencia que ha adquirido al estar inscrito en un programa de Posgrado, le ha permitido diseñar un plan para resolver los problemas planteados o buscar otras alternativas de solución.

¿Qué significa para usted aprender matemáticas vía resolución de problemas? *

Comprender, Analizar y diseñar un plan para resolver una tarea no rutinaria para después buscar otras alternativas de solución.

Figura 22. *Lo que significa para Homero aprender matemáticas vía resolución de problemas.*

Una vez revisadas las transcripciones, sus pruebas escritas y las encuestas se pudo identificar que presentaron menor dificultad al momento de dar respuesta a las preguntas. Cabe mencionar que al principio, *Lolin* no lograba socializar porque su concepción de la matemática y su aprendizaje estaba basada en aplicar Teoremas y en ese momento no los recordaba o no los lograba aplicar. La Figura 23 evidencia tal afirmación.

4.- Con este curso, ¿cambió su concepción de las matemáticas y su aprendizaje? ¿En qué medida?

Si cambio, ya que hay teoremas que no recordaba, así como conocimientos que no lograba aplicar en los ejercicios

Figura 23. *Concepción de Lolin sobre la matemática y su aprendizaje.*

Con base en los resultados, se pudo concluir que este equipo alcanza la fase de formulación de conjeturas del ciclo básico para la construcción del aprendizaje matemático con entendimiento y que las heurísticas empleadas para dar solución fueron el análisis de casos particulares, representación de la información y realización de esquemas, todo esto con la finalidad de identificar patrones para formular conjeturas y tratar de justificarlas.

Equipo 3 (Selft-wait, Free-form y Rosa negra)

El presente extracto de la transcripción describe cómo lograron construir las siguientes dos filas del arreglo, con algunas dificultades porque no sabían cómo representar las regularidades observadas.

Rosa negra: … y ya lo que observamos en la primera columna, ¿no?, nos dimos cuenta que en la primer columna …¿cómo le ponemos? ¿Iba de n? Y la segunda columna n+1 y en la tercera n+2.

Free-form: Mj. Estas son filas (señala de forma horizontal el arreglo).

Self-wait: Sí, son filas. Bueno, en la columna 1 se van de, avanzando de 1. La fila es esta. (señala de forma horizontal el arreglo).

Para reportar la respuesta construyeron un gráfico que les permitió observar regularidades y de esa manera generalizar mediante la expresión $k + (k - 1)$ el número de elementos del renglón *n* (Figura 24).

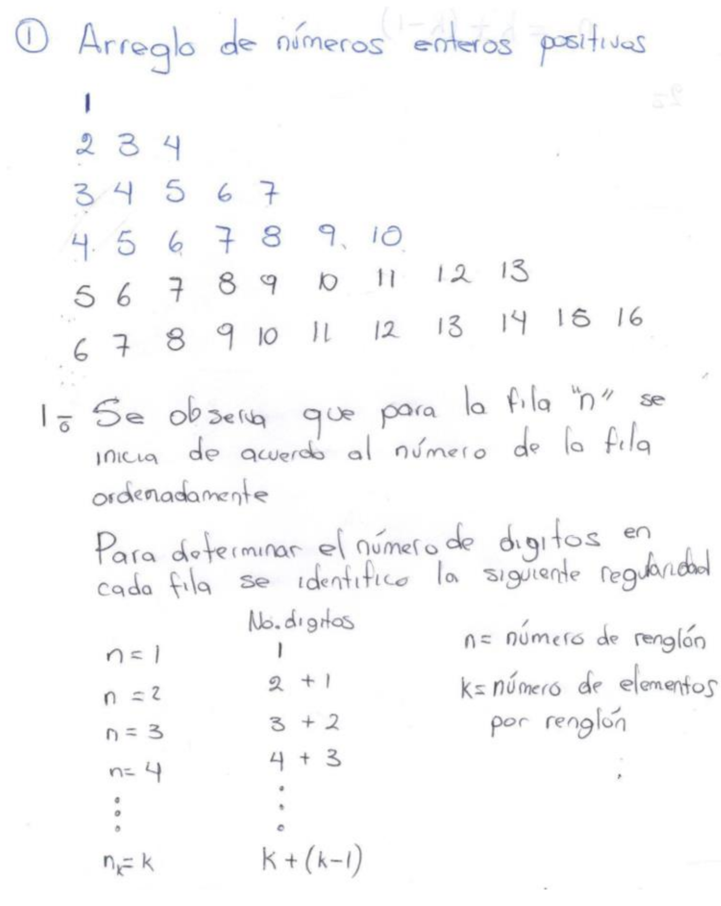
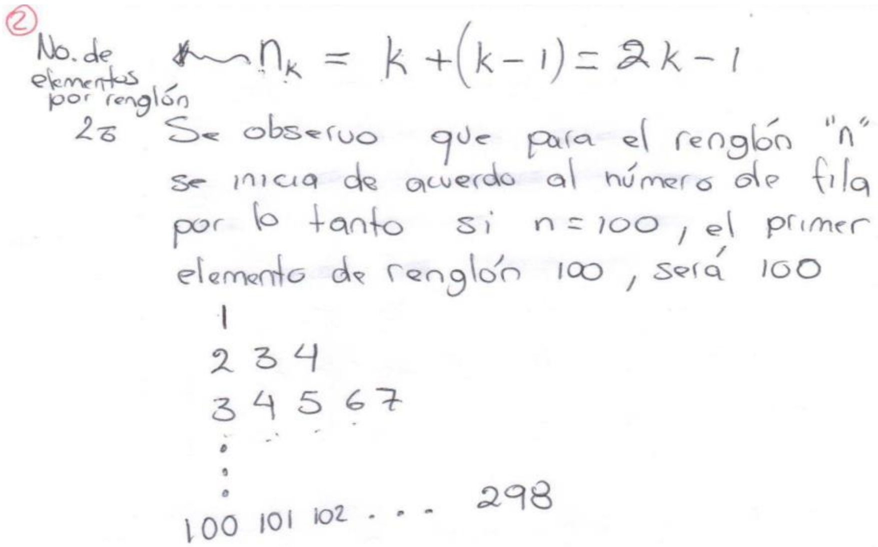


Figura 24. *Respuesta a la primera instrucción del problema.*

Con base en lo que observaron, en la Figura 25 se muestra la respuesta a la segunda pregunta, en donde gracias a la expresión $k + (k - 1)$ que hallaron, calcularon también el último elemento del renglón 100. Cabe destacar que fue el único equipo que calculó el último elemento del renglón 100 aún sin haber sido solicitado.



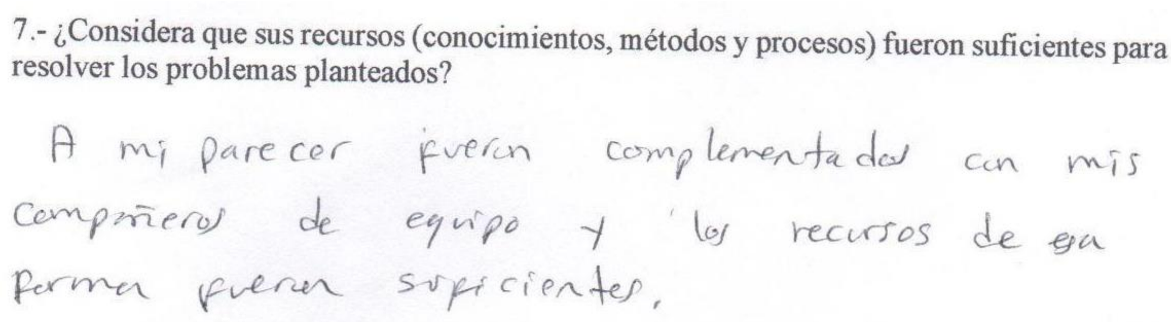
② No. de elementos por renglón $n_k = k + (k-1) = 2k - 1$

2a Se observo que para el renglón "n" se inicia de acuerdo al número de fila por lo tanto si n = 100, el primer elemento de renglón 100, será 100

1
2 3 4
3 4 5 6 7
⋮
100 101 102 . . . 298

Figura 25. Respuesta a la segunda pregunta.

Esto pudo deberse a que al ser integrantes del Grupo 1, tienen más experiencia en aprender matemáticas vía resolución de problemas y aunque se presentara alguna dificultad durante el proceso de solución, sus recursos se fueron complementando para ser suficientes, tal y como lo manifiesta Free- form en la encuesta final y que se puede observar en la Figura 26.

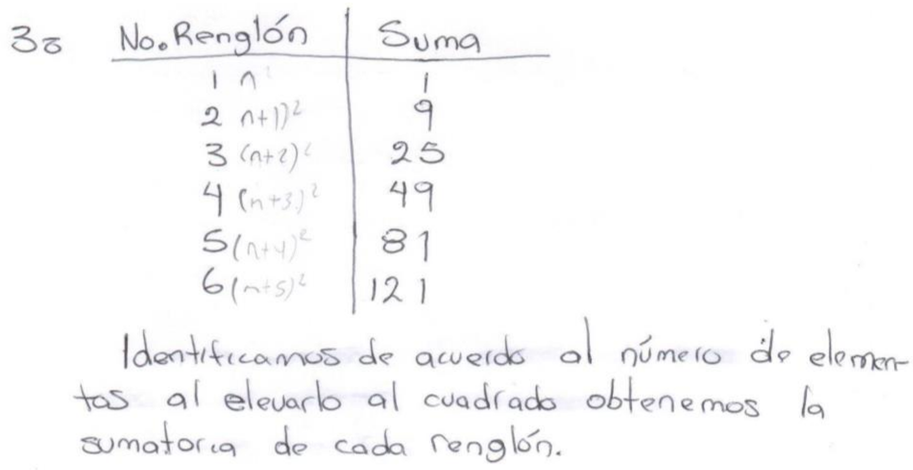


7.- ¿Considera que sus recursos (conocimientos, métodos y procesos) fueron suficientes para resolver los problemas planteados?

A mi parecer fueron complementados con mis compañeros de equipo y los recursos de esa forma fueron suficientes.

Figura 26. *Respuesta de Free-form a una pregunta de la encuesta de salida.*

La Figura 27 muestra cómo determinaron que la suma de los elementos de cada renglón se obtiene elevando al cuadrado el total de elementos que lo contiene.



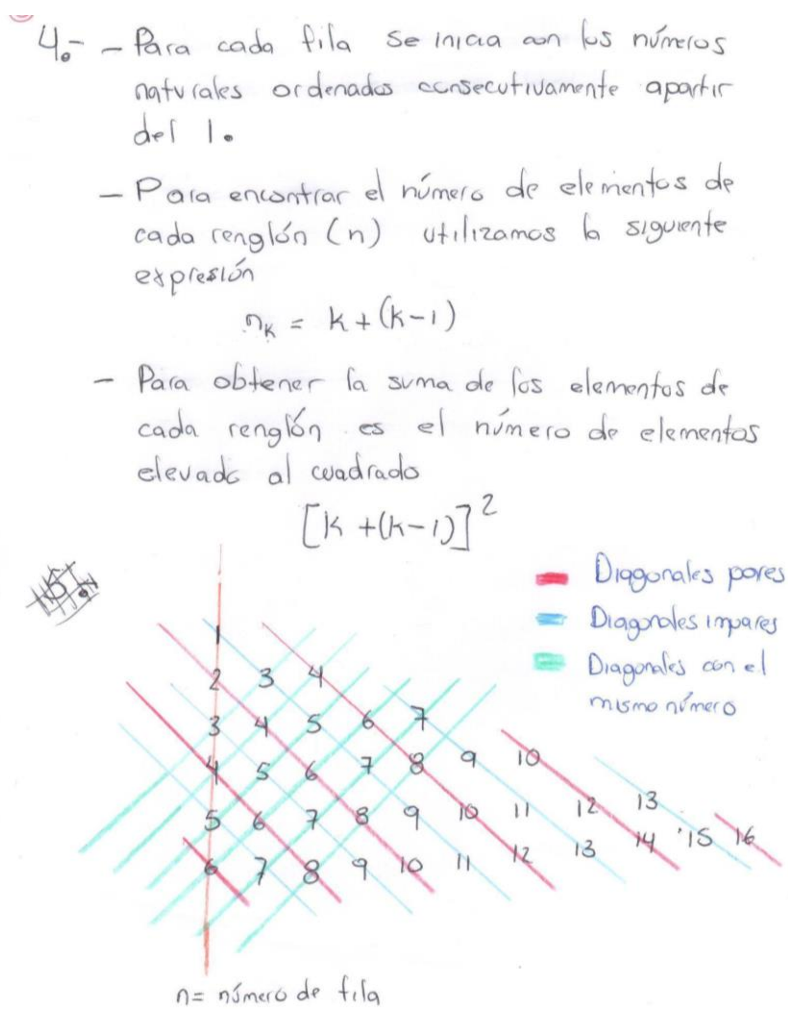
3.

No. Renglón	Suma
1 n^1	1
2 $(n+1)^2$	9
3 $(n+2)^2$	25
4 $(n+3)^2$	49
5 $(n+4)^2$	81
6 $(n+5)^2$	121

Identificamos de acuerdo al número de elementos al elevarlo al cuadrado obtenemos la sumatoria de cada renglón.

__Figura 27__. Respuesta a la tercera pregunta.

Después de observar algunas regularidades, dieron respuesta a la pregunta ¿qué regularidades observa en la construcción de cada renglón? (Figura 28).



4.- - Para cada fila se inicia con los números naturales ordenados consecutivamente apartir del 1.

- Para encontrar el número de elementos de cada renglón (n) utilizamos la siguiente expresión

$$n_k = k + (k-1)$$

- Para obtener la suma de los elementos de cada renglón es el número de elementos elevado al cuadrado

$$[k+(k-1)]^2$$

__Figura 28.__ Solución a la cuarta pregunta.

Este equipo mostró confusión al momento de dar solución a la quinta pregunta. Ellos obtuvieron la expresión $n_k = k$ como una representación del número de elementos por renglón. La siguiente verbalización evidencia cómo el instructor trataba de guiarlos a través de preguntas orientadoras.

786	*D:*	*…y ¿por qué aquí sí? (Señala la expresión n_k=k)*
787	*Free-form:*	*Bueno, entonces aquí tendríamos que ponerla ¿no? (señala n=1) porque*
788		*este, es la fila uno, la dos, la tres y la …*
789	*D:*	*¡no! pero, pero, pero ¿hace falta?*
790	*Free-form*	*Sí, porque para saber para la … la fila enésima*
791	*D:*	*¡No pues, si ya están usando la n para denotar el número de fila!*

Como se puede observar, no lograron entender el por qué no es necesario colocar el subíndice *k* a la variable *n* y creen que deben emplear las dos variables para representar la suma de los elementos de la fila *k*, pero el instructor continúa orientándolos.

794	*D:*	*Pero ¿para qué meten otra, otra variable?*
795	*Free-form:*	*Ajá, exacto, ese es el detalle que tenemos.*
796	*Self-wait :*	*Partimos de esta (señala la letra k)*
797	*D:*	*Cuando, cuando le dicen cuál es el, ¿cómo dice? A ver léalo*
798		*(refiriéndose a la pregunta) . . .*
799	*Free-form:*	*¿cuál es la suma de los elementos de la fila número k?, entonces aquí*
800		*debe ser, en lugar de n debe ser k, ¿no?*
801	*D:*	*Por ejemplo. Pero si a ustedes les gusta la n en lugar de la k, pues usen*
802		*n. Es un detalle de importancia aclarar porque esto les está impidiendo*
803		*llegar a alguna conclusión.*

A pesar de que el instructor mencionó que no es necesario tener dos variables, los integrantes del equipo las incluyeron porque para ellos *n* representa el número de renglón y *k* el número de elementos por renglón, así como lo reportan en la Figura 29.

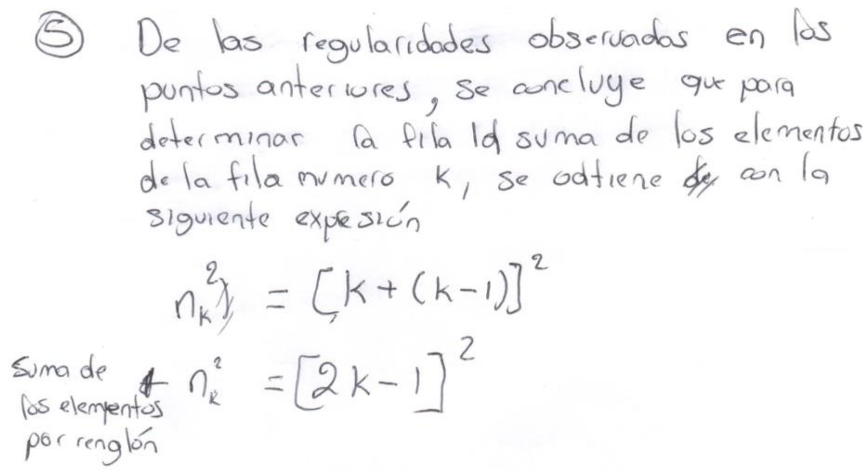


__Figura 29.__ Expresión para encontrar la suma de los elementos de la fila número k.

Podemos concluir que, de acuerdo al ciclo básico para el aprendizaje matemático con entendimiento, este equipo se quedó en la formulación de conjeturas. Aunque en algunos casos sí lograron justificar pero de manera informal, en la mayoría de las respuestas no lo lograron. En cuanto a las heurísticas empleadas, se observaron las siguientes: el planteamiento de preguntas, la socialización de saberes previos, la representación de la información y la elaboración de tablas.

Equipo 4 (Spellman, Valmns y Alo)

Este equipo no tuvo mayor dificultad para resolver las dos primeras instrucciones, las cuales consistieron en construir los siguientes dos renglones del arreglo y en calcular el primer elemento del renglón número 100. A través de la observación y la acción se dieron cuenta de que el número de renglón es el número con el que inicia la fila y se tienen dos elementos más que en el renglón anterior (Figura 30).

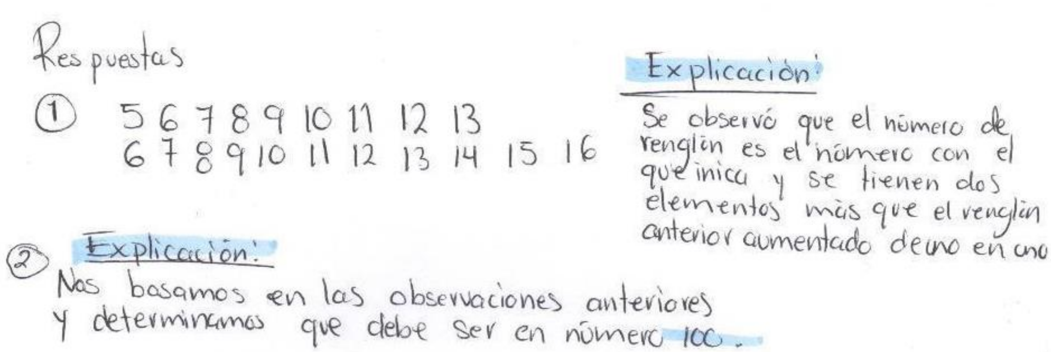


__Figura 30.__ Solución a las primeras dos indicaciones.

Una de las estrategias que emplearon para dar solución al problema, fue que cada integrante resolviera de forma individual y posteriormente comparar sus resultados. La conversación entre Spellman y Valmns, hace referencia a la forma en la que cada una sumó los elementos de los renglones.

295	*Spellman:*	*Es que . . . hasta el 16 tenemos 121 (suma de los elementos del renglón 6)*
296		*pero le aumentamos 1 porque empieza del 7 y le sume el 17, 18 y 19.*
297	*Valmns:*	*Yo lo hice mental, espérame, déjame ver si coincide con tu resultado.*

La Figura 31 muestra la solución a la indicación de calcular la suma de los elementos de cada uno de los primeros seis renglones.

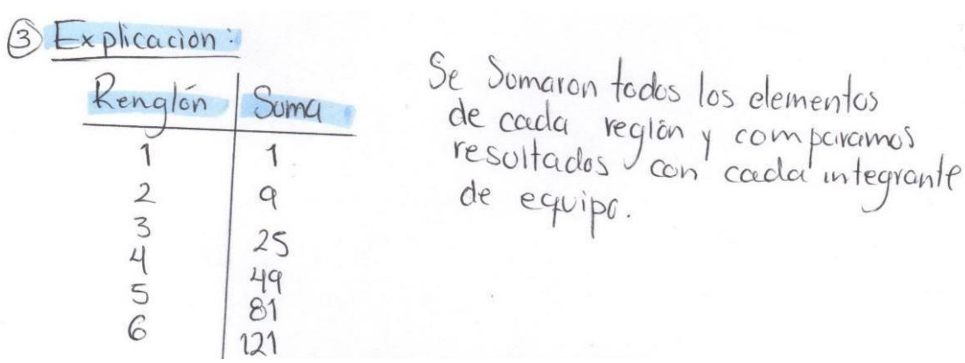
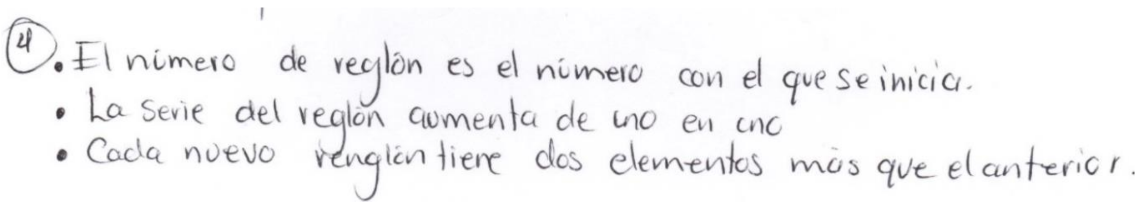


Figura 31. *Solución a la tercera pregunta.*

Por la manera en cómo reportan sus ideas, el responder de manera individual las preguntas, fue la estrategia principal para validar sus resultados. Después de calcular la suma de los elementos de cada renglón se dieron cuenta de la relación que existe entre el número de elementos de un renglón con la posición que ocupa, dicha relación la representaron con la expresión $2k-1$, así como se percibe en la siguiente conversación.

375	*Alo:*	*El número de elementos es el número que inicia el arreglo, que es*
376		$k+k-1$, *¡no!, estamos hablando de . . .*
377	*Spellman:*	*. . . k, k, (pensando), del arreglo anterior . . .*
378	*Valmns:*	*. . . entonces, cada arreglo inicia con el número del renglón.*

Para dar respuesta a la pregunta ¿qué regularidades observa en la construcción de cada renglón? Los resolutores se basaron en las observaciones que hicieron cuando resolvieron las preguntas anteriores. La Figura 32 muestra las conclusiones a las que llegó el equipo.

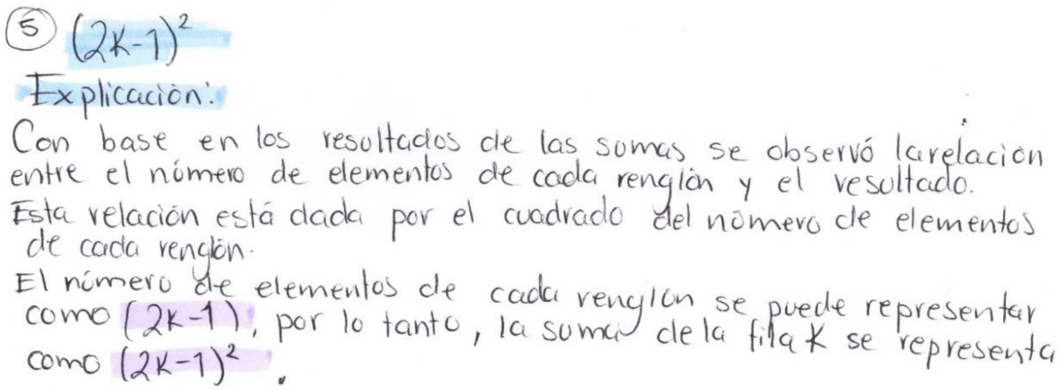


4

- El número de reglón es el número con el que se inicia.
- La serie del reglón aumenta de uno en uno
- Cada nuevo renglón tiene dos elementos más que el anterior.

Figura 32. *Regularidades observadas en el arreglo de números enteros positivos.*

Al observar el equipo que la expresión $2k-1$ representa el número de elementos de cada fila y que la suma de esos elementos es un número al cuadrado, concluyeron que para representar la suma de la fila número k, basta con elevar al cuadrado esa expresión, tal y como se muestra en la Figura 33.



5 $(2K-1)^2$

Explicación:

Con base en los resultados de las sumas se observó la relación entre el número de elementos de cada renglón y el resultado.
Esta relación está dada por el cuadrado del número de elementos de cada renglón.
El número de elementos de cada renglon se puede representar como $(2K-1)$, por lo tanto, la suma de la fila K se representa como $(2K-1)^2$.

Figura 33. *Solución a la quinta pregunta.*

Revisando las respuestas que reportaron, se puede concluir que, a pesar de haber contestado, en algunas preguntas no lograron justificar sus resultados y en varias ocasiones la ruta de solución que habían tomado la corrigieron porque no siempre funcionó. Por ejemplo, *Valmns* manifiesta en la encuesta final y que se muestra en la Figura 34 por qué tuvo qué corregir esa ruta.

8.- Cuando usted había tomado una ruta de solución, ¿siempre funcionó o tuvo qué corregirla?

Tuve que corregirla, pues en un primer instante quise resolver el problema unicamente con las ideas y conocimientos con los que me encuentro más familiarizada, aún que había caminos posiblemente más sencillos

Figura 34. *Argumento de Valmns del por qué tuvo qué corregir su ruta trazada.*

Algo importante de resaltar es que *Alo*, quien manifiesta en la encuesta final que sus recursos no fueron suficientes para resolver los problemas pero los acrecentó al trabajar en equipo y le permitió observar más cosas de las que había percibido (Figura 35).

7.- ¿Considera que sus recursos (conocimientos, métodos y procesos) fueron suficientes para resolver los problemas planteados?

Definitivamente no. La puesta en común de la solución de los problemas, me permitio acrecentar mis recursos y observar más cosas de las que había percibido.

Figura 35. *Argumento del por qué Alo logró acrecentar sus recursos.*

Las respuestas que lograron justificar pudieron deberse a que como lo manifestó *Spellman* en la encuesta final explotaron sus conocimientos y recordaron lo aprendido (Figura 36).

4.- Con este curso, ¿cambió su concepción de las matemáticas y su aprendizaje? ¿En qué medida?

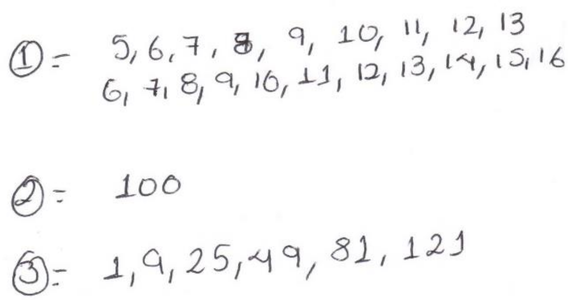
Claro que si, me parece muy interesante la manera en la que podemos explotar lo que conocemos. y en algunas ocasiones recordar algo aprendido, pero no recordabamos que lo sabiamos.

Figura 36. *Concepción de las matemáticas de Spellman.*

Con base en los resultados, se puede argumentar que este equipo también se quedó en la fase de formulación de conjeturas y aunque algunas respuestas lograron justificarlas, en la mayoría no lo hicieron. Las heurísticas empleadas fueron trabajar de manera individual para comparar sus resultados, validando de esta forma sus soluciones, hacerse preguntas mientras socializaban sus respuestas, analizar casos particulares y encontrar patrones.

Equipo 5 (Sam, Lea y FantoDio)

Los procesos reflexivos que se llevaron a cabo durante la resolución de las tres primeras preguntas reflejan que mediante la observación y acción que los resolutores tuvieron a bien realizar, pudieron encontrar esas regularidades. La Figura 37 muestra esas soluciones.

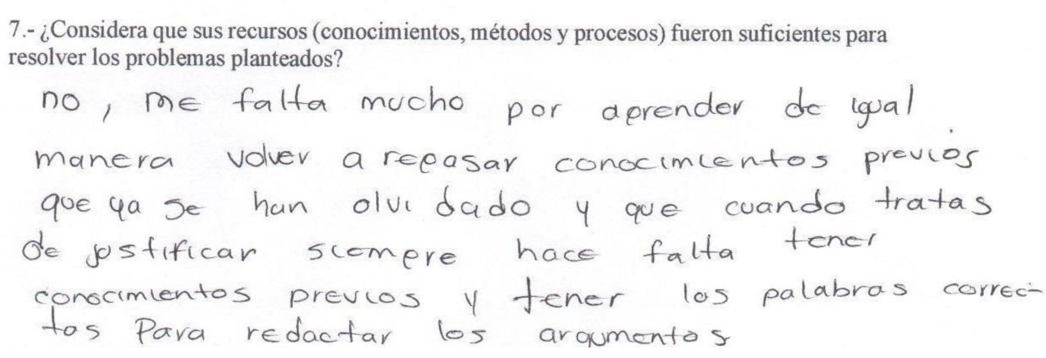

1 = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13
6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

2 = 100

3 = 1, 9, 25, 49, 81, 121

Figura 37. *Solución a las primeras tres preguntas.*

Como se pudo observar, los participantes de este equipo que pertenecen al Grupo 2 se enfocaron en dar respuesta sin explicar la razón, esto puede deberse a que les falta mucho por aprender o porque les falta repasar sus conocimientos previos tal y como lo manifiesta *Sam* en una de las respuestas de la encuesta final y que se muestra en la Figura 38.


7.- ¿Considera que sus recursos (conocimientos, métodos y procesos) fueron suficientes para resolver los problemas planteados?

no, me falta mucho por aprender de igual manera volver a repasar conocimientos previos que ya se han olvidado y que cuando tratas de justificar siempre hace falta tener conocimientos previos y tener los palabras correc-tos para redactar los argumentos

Figura 38. *Sam considera que sus conocimientos no son suficientes.*

Lea también considera que sus recursos no fueron suficientes porque no ha puesto en práctica algunos de sus conocimientos (Figura 39).

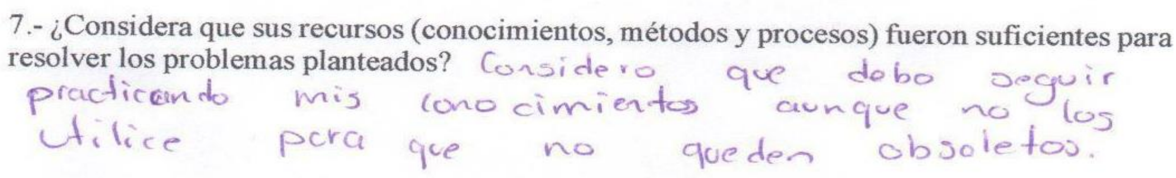

7.- ¿Considera que sus recursos (conocimientos, métodos y procesos) fueron suficientes para resolver los problemas planteados? Considero que dobo seguir practicando mis conocimientos aunque no los utilice para que no queden obsoletos.

Figura 39. *Lea considera que sus conocimientos no son suficientes.*

FantoDio considera que sus conocimientos no están actualizados en estos procesos y eso le impide resolver los problemas de manera inmediata (Figura 40).

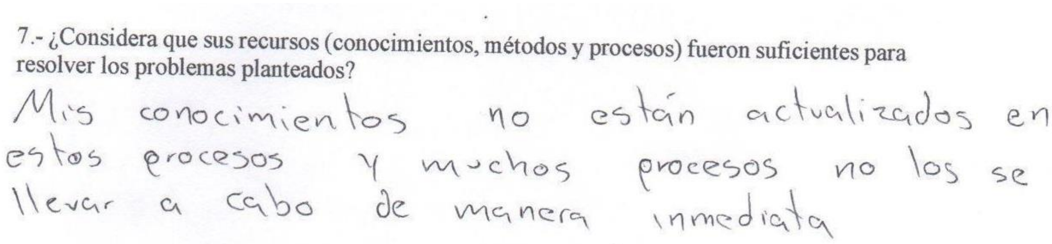

7.- ¿Considera que sus recursos (conocimientos, métodos y procesos) fueron suficientes para resolver los problemas planteados?
Mis conocimientos no están actualizados en estos procesos y muchos procesos no los se llevar a cabo de manera inmediata

Figura 40. *FantoDio considera que sus conocimientos no están actualizados.*

La siguiente discusión de ideas evidencia el proceso de solución que presentan cuando tratan de dar respuesta a la pregunta ¿qué regularidades observa en la construcción de cada renglón?

Fantodio: . . . puede ser que en la primera posición empieza por el, primera posición más 1, posición anterior más 1 y en la última va aumentando de 3 en 3.

Lea: Ajá, puede ser esas 2 porque ahí habla en plural ¿no? ¿qué regularidades? no solo hay una, o sea son varias, entos puede ser esa: va de 2 en 2 y que al formarse así la pirámide (señala en diagonal el arreglo de números) lo que usted dice, va de 3 en 3.

Después de un tiempo de reflexión lograron identificar algunas regularidades de ese arreglo de números enteros positivos. Cabe destacar que ellos nombraron a los elementos de cada fila como posiciones, debido a que relacionaban al arreglo con una sucesión de números. La Figura 41 representa la solución a la pregunta 4.

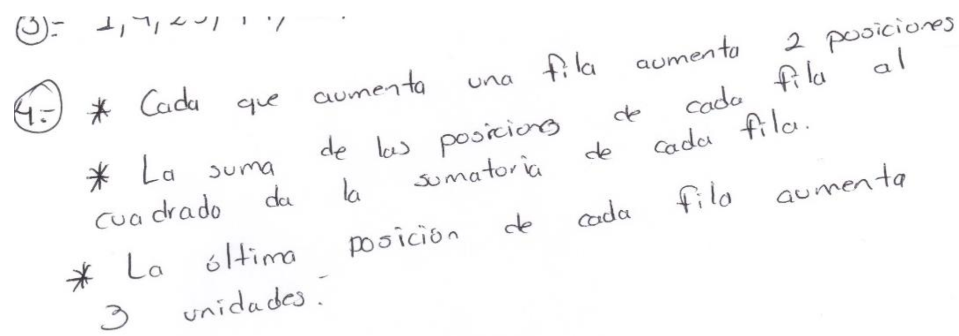


Figura 41. *Solución a la cuarta pregunta.*

Para dar solución a la pregunta ¿cuál es la suma de los elementos de la fila número *k?*, los participantes tuvieron ciertas dificultades debido a que no lograban encontrar esa relación que existe entre el número del renglón y la cantidad de elementos que lo forman. A pesar de ello, el esfuerzo por encontrarla se hizo presente durante el proceso.

326 Lea: Este 7 lo elevas al cuadrado, 7 al cuadrado y te da la suma que es el 49.
327 Sam: Es lo que decía el profe, que de la suma, la suma de las posiciones. . .
328 Lea: Ajá, de cada fila al cuadrado, da la sumatoria de cada fila, pero no
329 puede ser k al cuadrado.
330 Fantodio: No, porque k corresponde al número de la fila.

Habían observado que al elevar al cuadrado el número de elementos de cada fila, obtenían su suma; sin embargo, su preocupación seguía presente porque no sabían cómo relacionar esas dos variables (número de elementos y número de fila). Las verbalizaciones siguientes dan muestra de su intento por salir de esa dificultad.

333 Lea: . . . por ejemplo, si hacemos 10 filas, sería 10 al cuadrado, pero en la fila.
334 10, la sumatoria nos tendría qué dar 100 y no, ¿verdad?
335 FantoDio: no, no nos daría.
336 Lea: No, no nos daría, no puede ser k al cuadrado porque aquí dice: ¿cuál es
337 la sumatoria de los elementos de la fila número k?¿Cómo podríamos
338 justificar esto? Sí, porque si ponemos k al cuadrado . . .

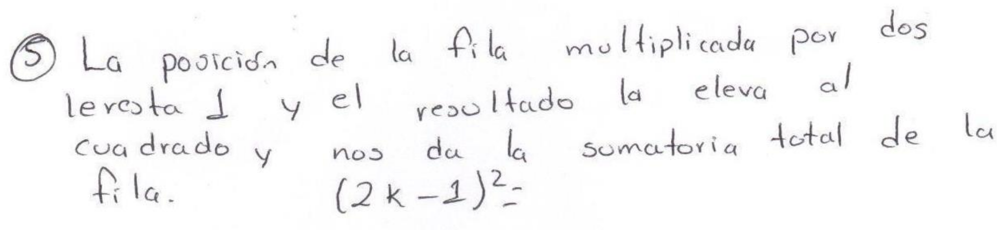
Después de un rato, tuvieron avance y lograron encontrar esa relación al representarla con la expresión $2k - 1$ pero tenía dudas y confusiones porque no sabían cómo comunicar de manera verbal sus ideas. La siguiente transcripción muestra la explicación que le dan al instructor y qué es lo que les genera confusión y duda.

422 Lea: . . . el resultado no se puede elevar al cuadrado, ¿verdad doctor?
423 D: No la entiendo.
424 Lea: Mire, por ejemplo: $2k - 1$ *ok, k es la posición de la primer fila, no?*
425 sería 1, aquí sí se cumpliría, pero si yo quiero usarla con el 2, sería 2
426 por 2, 4; menos 1, 3, pero si yo a ese resultado lo quiero elevar al
427 cuadrado para que me de lo que me pide, ¿eso se puede?
428 FantoDio: ¿cómo lo podemos indicar?
429 Lea: Pero ¿cómo lo podríamos indicar? Eso es lo que nosotros no sabemos.

Para ayudarlos a lidiar con la confusión, el instructor dijo que ya habían observado que la variable *k* representa el número de fila y al tomar dos veces ese número, restarle 1 y elevar al cuadrado el resultado les aportaba algo y tenían qué identificarlo. El siguiente extracto de la transcripción muestra la orientación que brinda el instructor al equipo.

453 D: y eso es lo que corresponde a la suma. Entonces ustedes han observado esto,
454 están formulando una conjetura y lo que quieren, es decir, ¿cómo lo expreso?
455 Lea: ajá
456 D: dirían algo como esto: el resultado de sumar los elementos de la fila k, se . . .
457 Lea: obtiene multiplicando k por dos menos 1 y elevando al cuadrado.
458 D: Tienen la respuesta, si es que eso es lo que ya observaron, ¿ok?

Una vez más se puede observar que la intervención adecuada del instructor ayudó a mejorar el pensamiento reflexivo de los participantes. La Figura 42 muestra no solo una respuesta sino tratan de comunicar lo que representa esa expresión.



(5) La posición de la fila multiplicada por dos le resta 1 y el resultado la eleva al cuadrado y nos da la sumatoria total de la fila. $(2k-1)^2 =$

Figura 42. *Solución a la quinta pregunta.*

Una vez revisado los resultados se puede argumentar que este equipo empleó como estrategias el observar regularidades, identificar patrones, pero sobre todo, apelar a sus conocimientos previos como estrategia principal, siendo esta última estrategia una limitante para resolver satisfactoriamente el problema. Es decir, no lograron formular conjeturas y justificarlas, concluyendo que este equipo llegó a la fase de observación del ciclo básico para la construcción del aprendizaje matemático con entendimiento.

4.3.2. Solución al problema de "Geometría sintética"

Equipo 1 (Zerimar, Mirrys y el 50)

Al tratar de calcular la medida de los ángulos $APR\ y\ QPC$, *Zerimar* consideró necesario la estrategia de unir los puntos P y Q para construir el ángulo QPC y tener una idea de cómo calcularlos.

Zerimar: . . . entonces aquí hay que trazar una línea. (traza una línea que une los puntos P y Q de la configuración geométrica) ¿Sí, no el 50? El ángulo QPC .
El 50: ¿el ángulo que?, a ver el ángulo Q . . .
Zerimar: QPC
El 50: Q, P, C, ajá, QPC
Zerimar: Es éste ¿no? (punto P) tienes que trazar una recta porque no se forma.

Además, construyeron trazos auxiliares y se dieron cuenta que se forman triángulos isósceles dentro de la semicircunferencia. Esta conjetura la formularon después de trazar la bisectriz al ángulo ROQ e identificar que pasa por el punto P (Figura 43).

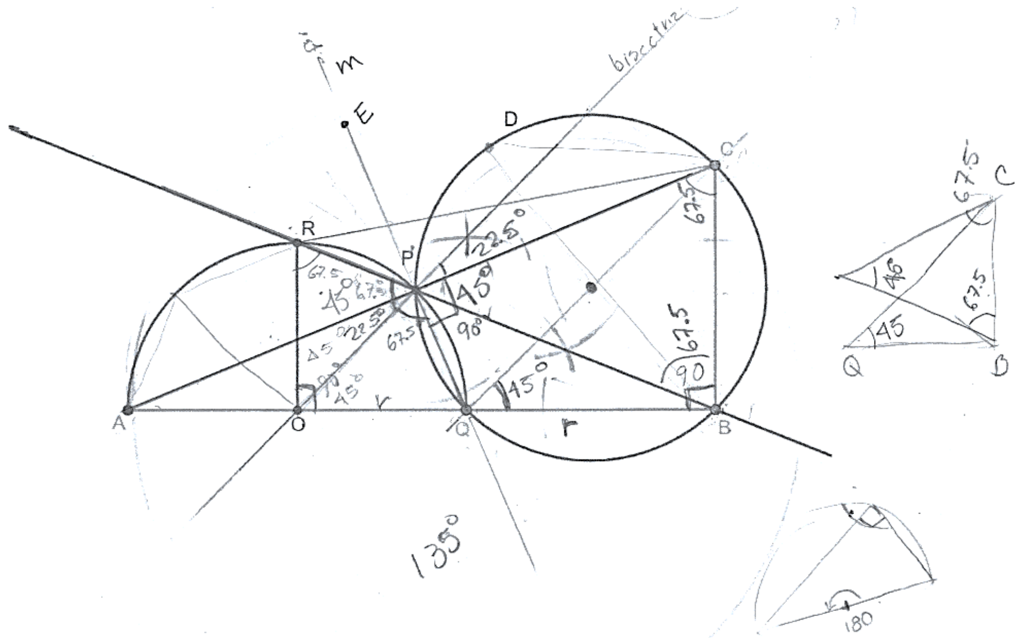
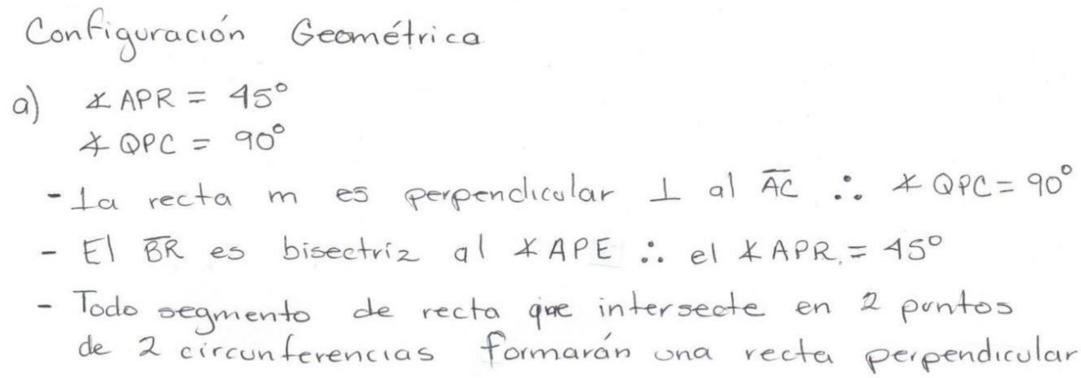


Figura 43. *Construcción de trazos auxiliares para calcular el valor del ángulo APR.*

Los participantes lograron calcular el valor de los ángulos *APR* y *QPC*, sin embargo, presentaron dificultades para justificar sus resultados de una manera formal, es decir, no emplearon argumentos como principios, propiedades o axiomas. La Figura 44 muestra la respuesta explicando brevemente cuál es la razón.

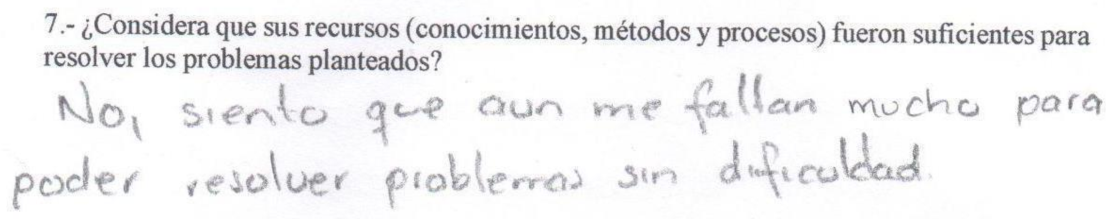

Configuración Geométrica

a) ∡APR = 45°
∡QPC = 90°

- La recta m es perpendicular ⊥ al $\overline{AC}$ ∴ ∡QPC = 90°
- El $\overline{BR}$ es bisectriz al ∡APE ∴ el ∡APR = 45°
- Todo segmento de recta que intersecte en 2 puntos de 2 circunferencias formarán una recta perpendicular

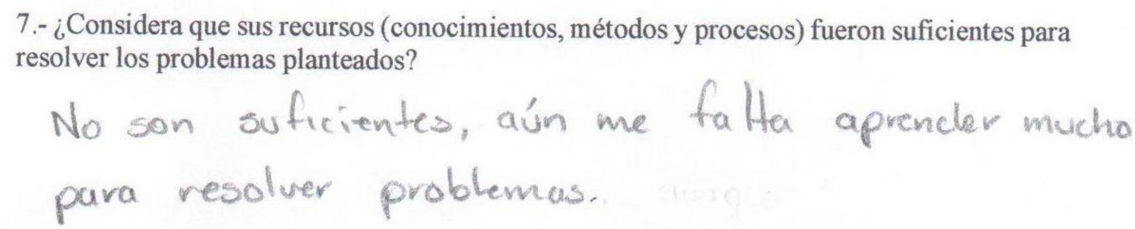
Figura 44. *Solución a la primera pregunta.*

Se puede observar en la respuesta que tratan de justificar cuando argumentan que todo segmento que interseca a dos circunferencias forma una recta perpendicular, lo cual es incorrecto. Esta respuesta afirma que sus conocimientos, métodos y procesos no son suficientes para resolver satisfactoriamente el problema., tal y como lo manifiesta *Zerimar* y *Mirrys* en la encuesta final y que se muestra en las Figuras 45 y 46 respectivamente.


7.- ¿Considera que sus recursos (conocimientos, métodos y procesos) fueron suficientes para resolver los problemas planteados?

No, siento que aun me fallan mucho para poder resolver problemas sin dificultad.

Figura 45. *Los recursos de Zerimar no fueron suficientes para resolver problemas.*


7.- ¿Considera que sus recursos (conocimientos, métodos y procesos) fueron suficientes para resolver los problemas planteados?

No son suficientes, aún me falta aprender mucho para resolver problemas.

Figura 46. *Los recursos de Mirrys no fueron suficientes para resolver problemas.*

Para encontrar la relación entre los ángulos *BQC* y *BPC*, *el 50* tomaba como referencia que los segmentos *AC* y *PQ* son perpendiculares y que el segmento *BR* es bisectriz del ángulo *QPC*, por lo tanto el ángulo *BPC* es de 45°. Sin embargo, Zerimar decía que ese segmento era bisectriz del ángulo *APE* pero no del ángulo *QPC*. Eso generaba duda en *el 50* por lo que sus ideas no eran muy claras al momento de comunicarlas, muestra de ello lo podemos observar en la siguiente conversación.

El 50: Tú este mencionastes que este (ángulo CPQ) este es el ángulo, esto, a ver Para que nos, ¡estos son perpendiculares! (segmentos AC y PQ).

Zerimar: Sí.

El 50: Y tú, tú mencionastes que esto es una bisectriz (segmento BR, bisectriz del ángulo APE).

Zerimar: No, ésta no es bisectriz (señala el segmento BR) pero es bisectriz de este ángulo (señala el ángulo APE).

El 50 sostenía que el ángulo *BPC* mide 45° pero no sabía cómo justificar esa conjetura a la que había llegado. Sin embargo, *Zerimar* mantenía la misma postura de que ese ángulo no mide 45°.

680 Zerimar: Esta es bisectriz pero ya para acá (refiriéndose al ángulo QPC), ya no es
681 bisectriz.
682 El 50: Pero yo digo que cuaren. . . aquí tiene qué medir cuarenta y cinco (señala
683 el ángulo BPC), ¡son cuarenta y cinco!

Después de una discusión de ideas, *el 50* argumentó, aunque no de manera precisa por qué ese ángulo BPC si es de 45°.

698 El 50: . . . maestra, un ángulo que se corre, un ángulo que se corre siempre va a
699 medir 45, siempre. O sea, donde tú lo quieras correr, se va ir a 45°.
700 Zerimar: Sí, pero este ya no es rectángulo (señala el ángulo QBC).

Zerimar no aceptaba el argumento porque al correr ese ángulo en la circunferencia, el ángulo QBC ya no era de 90° y ya no existía relación entre esos ángulos. Defendiendo su argumento, *el 50* mencionó que si usas en GeoGebra podría demostrar que el ángulo mide 45°. Insistía en esa idea porque sabía que había una relación entre los ángulos inscritos que comparten el mismo arco, pero no recordaba con precisión.

719 El 50: Sí, sí, mira, pero si tú corres este amiguita (señala el punto Q) este ángulo
720 (ángulo BQC), ve. ¡lástima que no tenemos GeoGebra)! . . . este punto lo
721 lo hubiera corrido aquí (punto P) y este ángulo (BPC) es lo mismo que
722 aquí está. (ángulo BQC). Es como si estuvieras jugando con el punto en la
723 circunferencia, corriendo. Mira.

A pesar del esfuerzo de *el 50* por convencer a *Zerimar*, ella no aceptaba sus argumentos, lo que sí aceptaba era que el ángulo BQC es de 45° por ser vértice del triángulo rectángulo isósceles QBC, pero al mover el punto Q en la circunferencia hasta hacerlo coincidir con el punto P, el ángulo QBC ya no sería de 90° por lo tanto, el ángulo BPC tampoco sería de 45°.

El 50: … haz de cuenta que si este punto tú lo jalaras, es este el mismo ángulo.

Zerimar: ¡No te creo!

El 50: Sí, sí, sí, es una relación que tiene no sé cómo explicarme pero sí es una relación que tiene aquí.

Zerimar: No, porque se pierde el ángulo de 90°. (punto B), entonces ya no.

El 50: Mj (pensando), bueno si lo ves así, sí, pero yo digo . . .

Zerimar: ¿estás de acuerdo?

El 50: . . . pero el ángulo no cambia.

Gracias a la perseverancia y a un buen control en sus heurísticas, *el 50* tomó otra ruta de solución y convenció a *Zerimar* de que estaba en lo correcto al decir que los ángulos *APR* y *BPC* son opuestos por el vértice, por lo tanto miden lo mismo. Como ya habían encontrado el valor del ángulo *APR*, fue inmediato conocer la medida del ángulo *BPC*. El argumento empleado para dar solución a la segunda pregunta se muestra en la Figura 47.

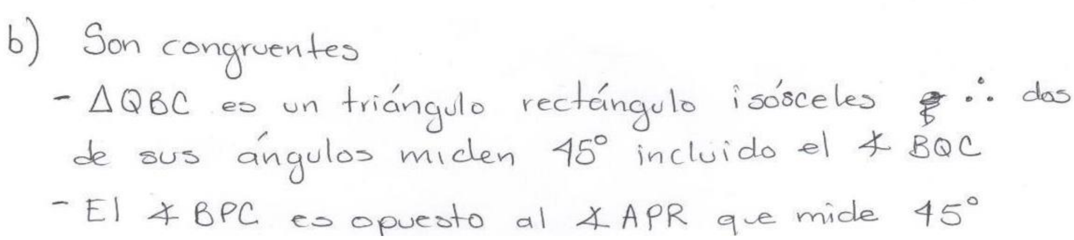

b) Son congruentes
- ΔQBC es un triángulo rectángulo isósceles $\therefore$ dos de sus ángulos miden 45° incluido el $\measuredangle BQC$
- El $\measuredangle BPC$ es opuesto al $\measuredangle APR$ que mide 45°

Figura 47. *Solución a la segunda pregunta.*

Al tratar de dar solución a la tercera pregunta, los resolutores presentaron mayor dificultad porque no sabían cómo justificar que el ángulo *BQC* mide 45°. Además, no estaban seguros de haber entendido bien la pregunta, lo que originó confusión de ideas y un obstáculo en el proceso de solución. Al persistir esta situación, solicitaron apoyo al instructor cuya intervención consistió en comentarles que el punto Q no es fijo. Esto con la finalidad de darles una pista, tal y como se muestra en el extracto de la transcripción.

D: Y si se mueve Q, este siempre, este va a estar cambiando (señala BQ)

Zerimar: Ajá.

D: Entonces no va ser posible que siempre este triángulo sea isósceles…

1342 *Zerimar:* *No.*

1343 *D:* *…rectángulo*

1344 *El 50:* *No.*

1345 *D:* *Solo hay una posición.*

1346 *Zerimar:* *Sí, que sería esta (señala el punto Q)*

1347 *Mirrys:* *que es esa*

1348 *D:* *que es la que se muestra*

A pesar del apoyo recibido, no lograron demostrar que *B*, *P* y *R* son colineales, sí y sólo sí el ángulo *BQC* mide 45°. Con esto se reafirma que están acostumbrados a ser “cuadrados” y específicos (ver Figura 11) es decir, que sus conocimientos matemáticos se reducen al conocimiento y aplicación de algoritmos y fórmulas.

Se puede concluir que, en este problema el equipo llegó a la fase de formulación de conjeturas del ciclo básico para la construcción del aprendizaje con entendimiento y las heurísticas empleadas ya no fueron únicamente en apelar a sus conocimientos previos sino que también representaron la información para tener un apoyo visual, socializaron sus resultados para validarlos, construyeron trazos auxiliares, emplearon regla y compás para medir trazos y ángulos. En este problema, sus procesos reflexivos se hicieron más evidentes que cuando resolvieron el problema de formación de patrones numéricos.

Equipo 2 (Ana, Lolín y Homero)

Los resolutores de problemas emplearon como estrategia la comparación de algunos segmentos de la configuración, de tal manera que pudiesen observar alguna semejanza, además de realizar trazos adicionales para encontrar algunas relaciones; e incluso realizaron un dibujo considerando sus medidas reales para plantear hipótesis, pero al no tener éxito decidieron dar respuesta a las otras preguntas con la esperanza de tener éxito. Sin embargo, los esfuerzos realizados no aportaban avances en su proceso por lo que pidieron apoyo al instructor quien, a través de preguntas orientadoras, el equipo identifique qué tipo de ángulos son los que deben calcular.

D: *APR, ¿qué tipo de ángulo es ese, lo identifican? Ese es un ángulo que está definido por los 3 puntos que son extremos de los segmentos que definen el ángulo y el vértice, ¿dónde está el vértice? ¿Cuál es el vértice?*

Homero: *Sería este, (señala el punto A).*

D: *No, ese no es vértice.*

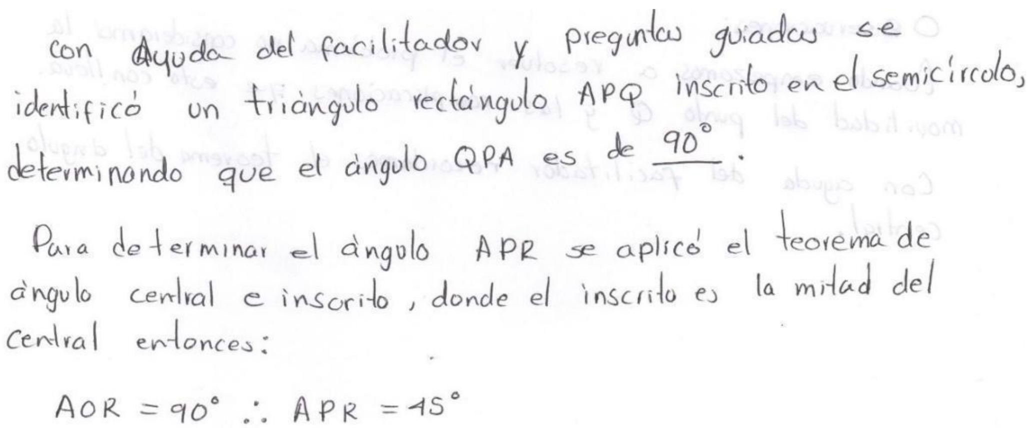
Ana: *Este. (señala el punto P)*

D: *Ese es el vértice, ¿sobre qué está el vértice?*

Homero: *Sobre AC*

D: *¡sobre una circunferencia! ¿qué saben de arcos o ángulos inscritos? ¡es un ángulo inscrito!*

Gracias a la orientación recibida, los participantes lograron identificar que el ángulo *APR* es inscrito, lo mismo que el ángulo *QPC*. La figura 48 representa la solución a la pregunta 1.


con Ayuda del facilitador y preguntas guiadas se identificó un triángulo rectángulo APQ inscrito en el semicírculo, determinando que el ángulo QPA es de 90°.

Para determinar el ángulo APR se aplicó el teorema de ángulo central e inscrito, donde el inscrito es la mitad del central entonces:

AOR = 90° ∴ APR = 45°

Figura 48. *Solución a la pregunta 1.*

Como se puede observar en la respuesta, lograron justificar debido a que en la encuesta inicial, *Homero* reportó la creencia de que aprender matemáticas vía resolución de problemas es un proceso que le permite comprender, analizar y diseñar un plan. Mientras que *Ana* sabe de la importancia que tiene reflexionar al resolver problemas (Figuras 49 y 50).

¿Qué significa para usted aprender matemáticas vía resolución de problemas? *

Comprender, Analizar y diseñar un plan para resolver una tarea no rutinaria para después buscar otras alternativas de solución.

Figura 49. *Lo que significa para Homero aprender matemáticas.*

¿Considera importante reflexionar al resolver problemas matemáticos? ¿Por que? *

Claro, esto nos ayuda a visualizar otras opciones de resolución, nos permite detectar lo que conocemos y lo que buscamos

Figura 50. *La importancia que le da Ana a la reflexión cuando se resuelven problemas.*

Para encontrar la relación que existe entre los ángulos *BQC* y *BPC*, los resolutores identificaron el valor del ángulo *BPC* ya que al ser opuesto por el vértice con el ángulo *APR*, son congruentes, por lo tanto su valor es 45°. Para encontrar el valor del ángulo *BQC* emplearon la estrategia de medir los segmentos *QB* y *BC* y a través de la función trigonométrica tangente, obtenerlo. Sin embargo, los cálculos no fueron precisos debido a que tuvieron un error al medir el segmento *QB*, su medida real es de 4.7 centimetros y ellos calcularon 6 centimetros. La Figura 51 muestra que el ángulo *BQC* mide 45°, valor que obtuvieron después de sumar la medida del ángulo *OQR* y del ángulo *RQC* y restarla a 180°.

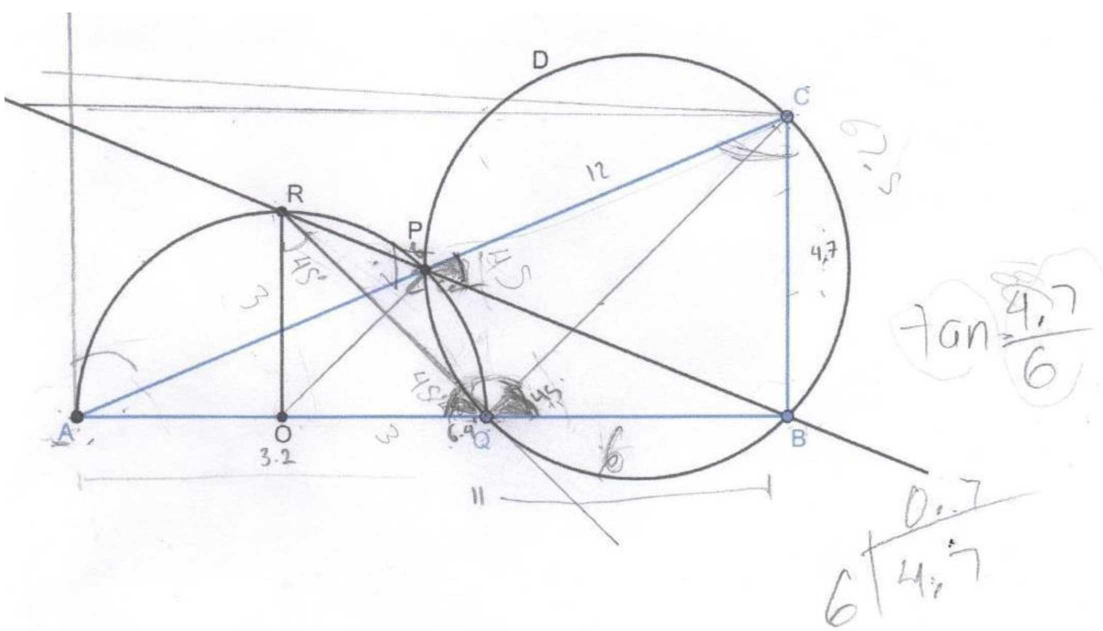


Figura 51. *Medidas reales de la configuración geométrica.*

Cabe mencionar que *Lolin* tiene la idea de que al medir el ángulo con el transportador es una forma de justificar la respuesta.

1038	*Lolin:*	*Sí, yo ya sé estas medidas (refiriéndose al ángulo RQC)*
1039	*D:*	*Perdóneme.*
1040	*Lolin:*	*Sí, yo . . . bueno, decidimos este, medirlo.*

Sin embargo, el valor del ángulo *BQC* no lo manifestaron en la solución, esto puede deberse a que sus cálculos no coincidieron con el resultado de aplicar la función trigonométrica tangente, y porque después de la discusión con el instructor se dieron cuenta de que no habían justificado la medida del ángulo BQC. En la Figura 52 se muestra la solución a la segunda pregunta, donde los argumentos evidencian que, para los integrantes del equipo la medida del ángulo *BQC*, depende de la movilidad del punto *G*.

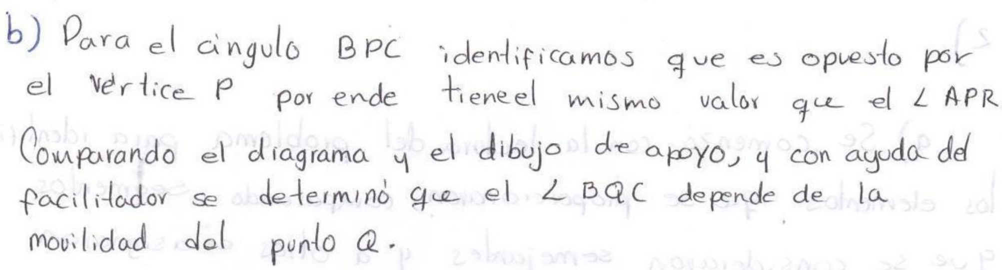
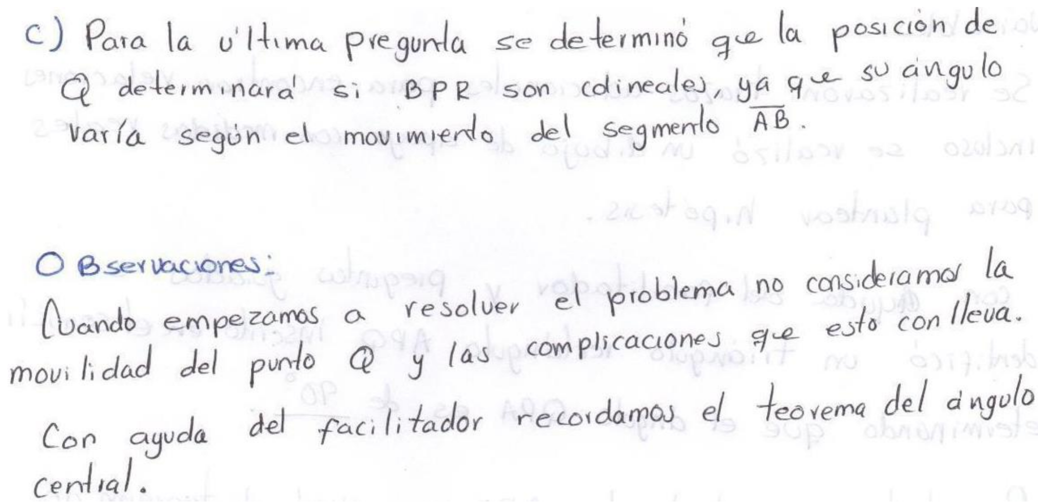

b) Para el ángulo BPC identificamos que es opuesto por el vértice P por ende tiene el mismo valor que el ∠APR.
Comparando el diagrama y el dibujo de apoyo, y con ayuda del facilitador se determinó que el ∠BQC depende de la movilidad del punto Q.

Figura 52. *Solución a la pregunta 2.*

Tampoco pudieron demostrar que los puntos *B*, *P* y *R* son colineales, sí y sólo sí el ángulo *BQC* mide 45°. En la Figura 53 se observa que la respuesta carece de argumentos formales e incluso colocaron las observaciones que el instructor les hizo notar, como parte de su justificación.



c) Para la última pregunta se determinó que la posición de Q determinará si BPR son colineales, ya que su ángulo varía según el movimiento del segmento $\overline{AB}$.

Observaciones:
Cuando empezamos a resolver el problema no consideramos la movilidad del punto Q y las complicaciones que esto conlleva.
Con ayuda del facilitador recordamos el teorema del ángulo central.

Figura 53. *Solución a la pregunta 3.*

Con base en los resultados se puede afirmar que este equipo llegó a la fase de formulación de conjeturas, en donde las heurísticas empleadas fueron relacionar segmentos, identificar propiedades de ángulos inscritos en una circunferencia y triángulos, realizar trazos auxiliares, representar la información con un dibujo para que a partir de sus medidas reales pudiesen plantear hipótesis, así como la socialización de conjeturas o respuestas.

Equipo 3 (Self-wait, Free-form y Rosa Negra)

El argumento que emplearon los participantes para justificar que la medida del ángulo *APR* es de 45° muestra que sus recursos, estrategias y control fueron suficientes para dar respuesta parcial a la pregunta, tal y como se muestra en la Figura 54.

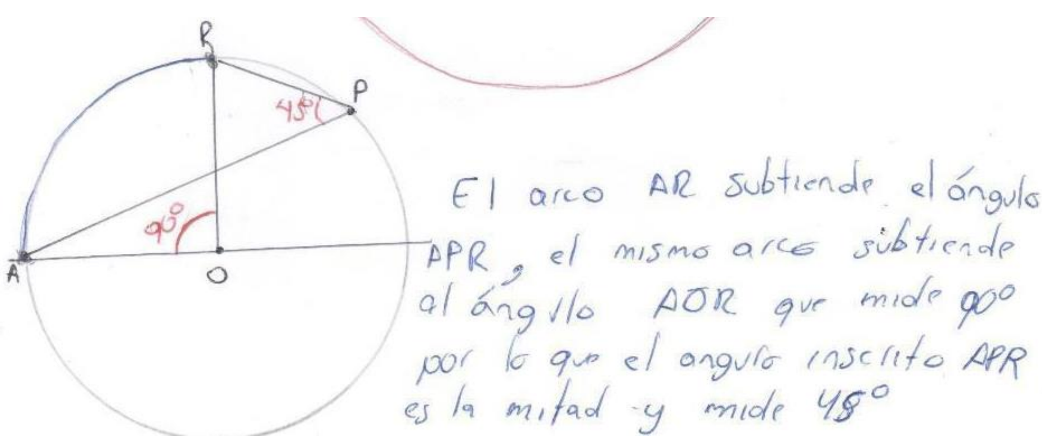


Figura 54. *Justificación de la medida del ángulo APR.*

Sin embargo, los argumentos que usaron para justificar que el ángulo *QPC* mide 90°, son confusos debido a que les faltó mencionar que dados dos puntos en una circunferencia, se determinan dos arcos y estos son congruentes sí y solamente sí la cuerda determinada por tales puntos es un diámetro. La Figura 55 muestra la confusión que experimentaron.

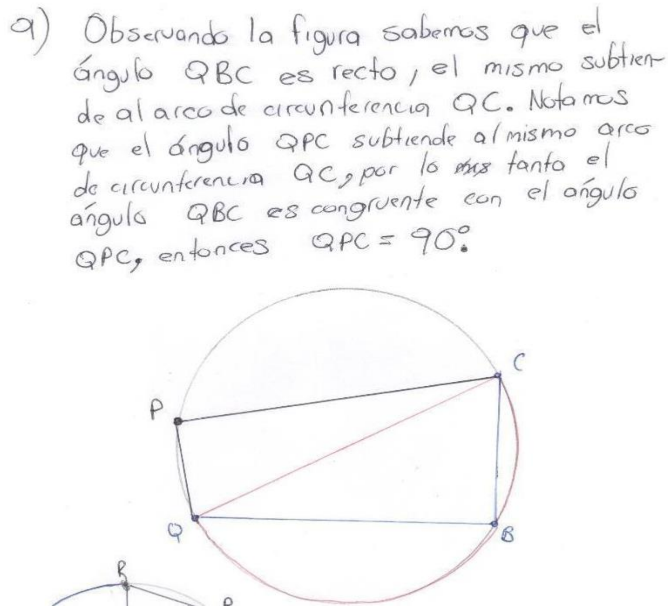
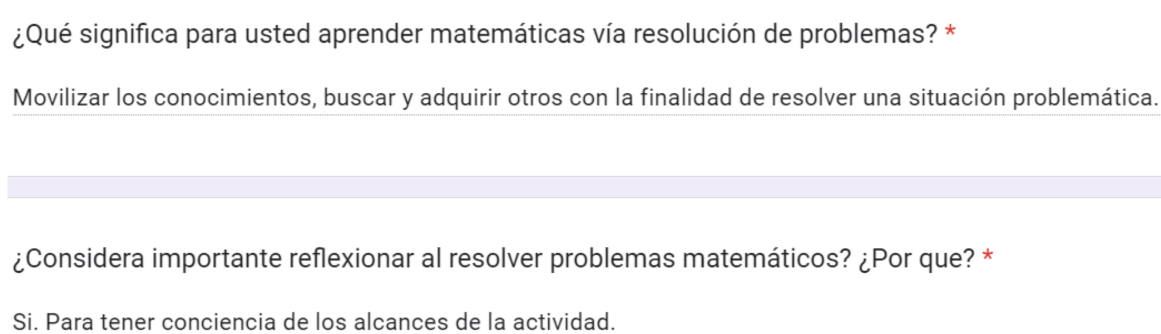


Figura 55. *Justificación de la medida del ángulo QPC*

Se puede observar que este equipo, al ser integrantes del Grupo 1 cuentan con más recursos y la experiencia de trabajar con este tipo de problemas. Sin embargo, requieren adquirir más conocimiento que les permita resolverlos satisfactoriamente. El siguiente fragmento de la encuesta inicial que contestó *Free-form* muestra cómo al aprender matemáticas vía resolución de problemas le permite adquirir nuevos conocimientos y se percata de la importancia que tiene el proceso de reflexión (Figura 56).


¿Qué significa para usted aprender matemáticas vía resolución de problemas? *

Movilizar los conocimientos, buscar y adquirir otros con la finalidad de resolver una situación problemática.

¿Considera importante reflexionar al resolver problemas matemáticos? ¿Por que? *

Si. Para tener conciencia de los alcances de la actividad.

Figura 56. *La importancia que le da Free-form a la reflexión en la resolución de problemas.*

En el caso de la segunda pregunta, los participantes lograron encontrar la relación que existe entre los ángulos *BQC* y *BPC* al observar que se tratan de ángulos inscritos en una circunferencia y que subtienden el mismo arco (Figura 57).

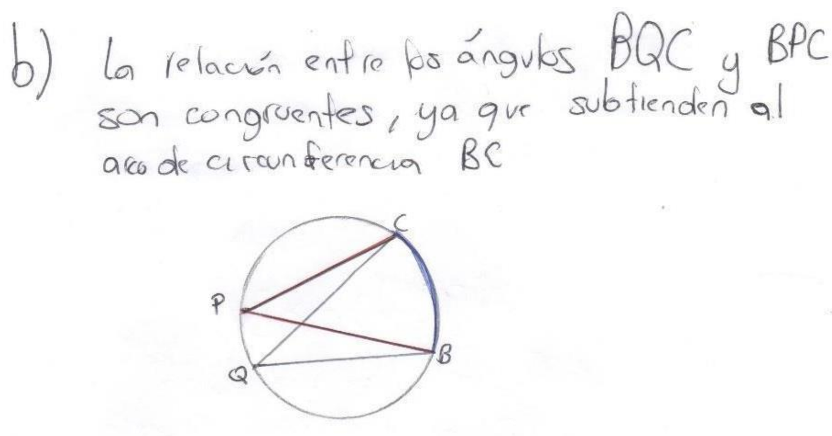
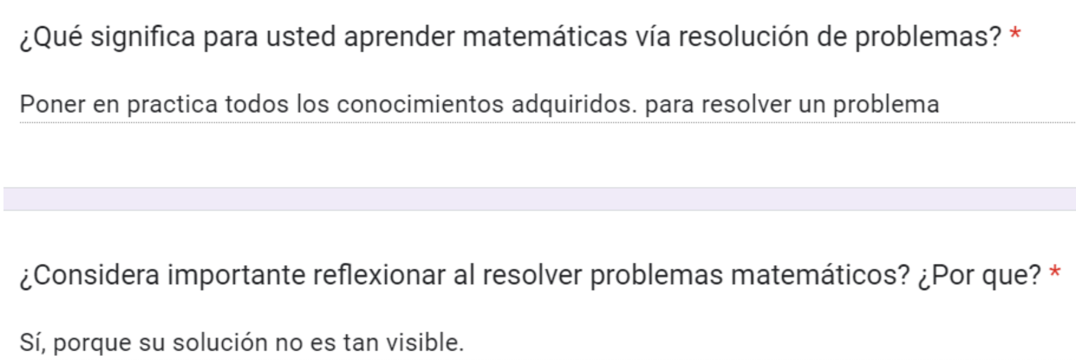


Figura 57. *Solución a la segunda pregunta.*

La solución que reporta el equipo muestra cómo sus recursos fueron suficientes para dar respuesta. Esto confirma lo que exhibe *Self-wait* en la encuesta de entrada, en donde para él aprender matemáticas vía resolución de problemas es poner en práctica sus conocimientos a través de la reflexión (Figura 58).


¿Qué significa para usted aprender matemáticas vía resolución de problemas? *

Poner en practica todos los conocimientos adquiridos. para resolver un problema

¿Considera importante reflexionar al resolver problemas matemáticos? ¿Por que? *

Sí, porque su solución no es tan visible.

Figura 58. *Lo que significa para Self-wait aprender matemáticas y la importancia de reflexionar.*

Al igual que los dos equipos anteriores, los participantes no lograron demostrar que si *B*, *P* y *R* son colineales, sí y sólo sí el ángulo *BQC* mide 45°. La siguiente transcripción muestra el intento por dar solución al enunciado a través de cuadriláteros inscritos y encontrar relaciones entre ellos, pero no tuvieron éxito porque no dieron ninguna respuesta al respecto.

Free-form: . . . si se dan cuenta podemos formar otro cuadrilátero aquí (señala el segmento PQ), a ver, ¡sí! Porque tenemos esta línea (segmento PQ),tenemos esta (RP) y esta (AQ) y tenemos esta otra (AR).

Self-wait: mj

Free-form: Tenemos 4 líneas, igual ya. Entonces podemos formar 2 cuadriláteros inscritos, pero ahí el detalle es que, bueno hay que ver las relaciones ¿no? . . .

Se puede concluir que este equipo en algunas soluciones llegó a la fase de formulación de conjeturas y en otras a la justificación de resultados. Esto puede deberse a que las estrategias empleadas como plantearse preguntas, relacionar segmentos o ángulos, identificar triángulos semejantes y realizar trazos auxiliares les permitió llegar a esta fase del ciclo básico para la construcción del aprendizaje matemático con entendimiento.

Equipo 4 (Spellman, Valmns y Alo)

Para calcular la medida de los ángulos *APR* y *QPC*, los participantes pensaron en construir el triángulo *APR* pero se toparon con cierta dificultad porque no tenían medidas que les permitiera conocer el valor del ángulo *APR* por lo que solicitaron apoyo al instructor. La siguiente extracción de la transcripción muestra cómo los fue orientando.

D: Para este ángulo (APR) ¿tienen alguna idea de cómo saber el valor?

Valmns: Pues lo primero que se nos había ocurrido era formar un triángulo o sea, de marcar el de A a R . . . pero pues igual nos topamos con que no tenemos como tal, medidas que nos permitan conocer el APR.

Alo: Pero, trazamos el ARQ.

D: Pregunta, ¿qué saben de ángulos en una circunferencia?

Alo: Ah, este . . .

D: Identifican ¿este tipo de ángulo en una circunferencia?

Gracias a la intervención del instructor, lograron identificar que los ángulos en una circunferencia son inscritos y tienen relación con el ángulo central.

Alo: Por ejemplo, este ángulo (AQR) subyace este arco (AR) y este ángulo
(AOR), subyace este arco (AR), entonces es un ángulo central (AOR)
Mide 90°. ¿este mide la mitad, 45°? (APR)
Valmns: Sí
Alo: ¿estoy mal?(risas en el equipo) Sí, porque subyacen el mismo arco
Valmns: Sí, sí, sí

Después de haber recordado el teorema del ángulo inscrito, pudieron justificar la medida del ángulo *APR*, pero no reportaron la medida del ángulo *QPC*, tal y como se muestra en la Figura 59.

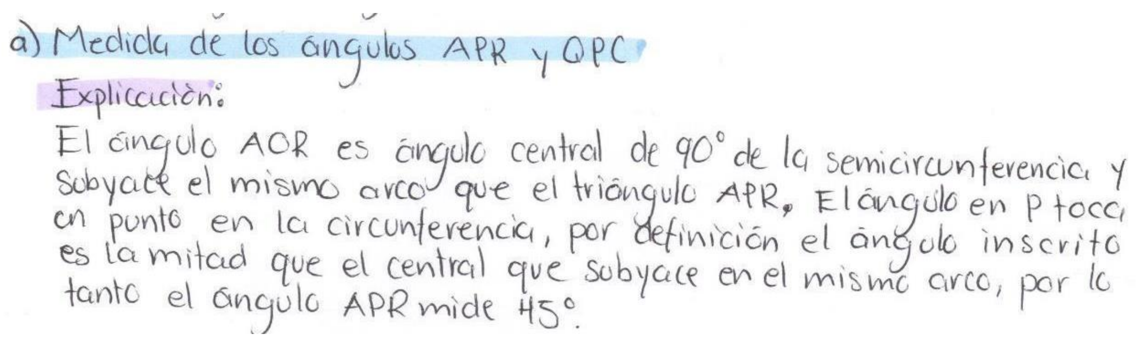

a) Medida de los ángulos APR y QPC
Explicación:
El ángulo AOR es ángulo central de 90° de la semicircunferencia y subyace el mismo arco que el triángulo APR, El ángulo en P toca un punto en la circunferencia, por definición el ángulo inscrito es la mitad que el central que subyace en el mismo arco, por lo tanto el ángulo APR mide 45°.

Figura 59. *Solución parcial a la primera pregunta.*

En cuanto a la segunda pregunta en donde los resolutores debían identificar la relación que existe entre los ángulos *BQC* y *BPC*, ellos reportaron lo que se observa en la Figura 60.

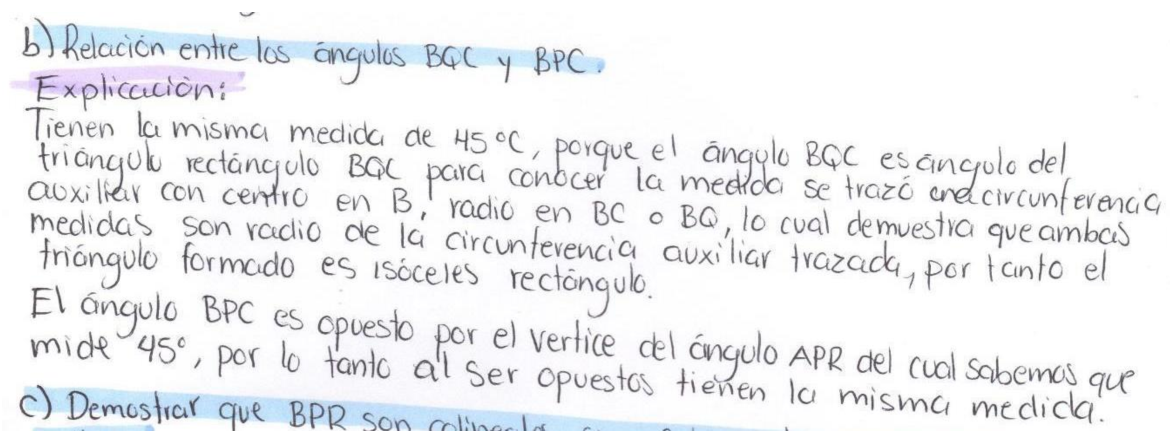

b) Relación entre los ángulos BQC y BPC.
Explicación:
Tienen la misma medida de 45 °C, porque el ángulo BQC es ángulo del
triángulo rectángulo BQC para conocer la medida se trazó una circunferencia
auxiliar con centro en B, radio en BC o BQ, lo cual demuestra que ambas
medidas son radio de la circunferencia auxiliar trazada, por tanto el
triángulo formado es isósceles rectángulo.
El ángulo BPC es opuesto por el vertice del ángulo APR del cual sabemos que
mide 45°, por lo tanto al ser opuestos tienen la misma medida.
c) Demostrar que BPR son colin

Figura 60. *Respuesta a la segunda pregunta*

Los argumentos que emplearon para calcular la medida del ángulo *BPC* son válidos, pero para determinar el valor del ángulo *BQC* muestran que se quedaron en la etapa de formulación de conjeturas. Para ellos, al construir una circunferencia auxiliar con centro en *B* y radio *BC* y observar que pasaba también por el punto *Q*, bastaba para demostrar que el ángulo *BQC* es de 45°. A pesar de los esfuerzos por demostrar que si *B*, *P* y *R* son colineales, sí y sólo sí el ángulo *BQC* mide 45°, no lo lograron. En el siguiente extracto de sus conversaciones se observa cómo la idea de utilizar semejanza de triángulos pudiese ayudarles a demostrar lo que se les pedía.

994	*Valmns:*	*Si mide BQC 45 y entonces por semejanza ya sabemos la medida de este*
995		*(ángulo QOP) y ya teníamos calculada la medida de este (ángulo OAR).*
996	*ALO:*	*Sí, ajá.*
997	*Valmns:*	*¿ok? Pero, eh, nos falta demostrar por qué solamente con la medida de*
998		*45 son colineales esos puntos. Bueno, eso es algo que observé. ¿sí*
999		*estamos de acuerdo todos que son semejantes?*

Después de haber discutido sus ideas para encontrar la manera en cómo darle solución a la indicación, la Figura 61 muestra la respuesta.

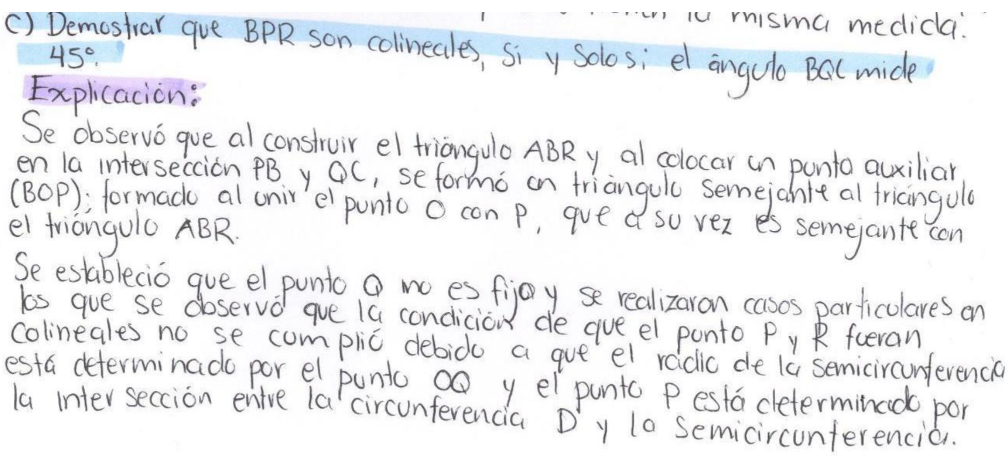


Figura 61. *Respuesta a la tercera pregunta.*

La solución que reportan muestra que no tienen claro lo que es una demostración, esa afirmación se justifica por la manera en la que expresan sus ideas, por lo tanto, en este problema de geometría sintética los participantes muestran evidencia de que alcanzan la etapa de formulación de conjeturas en la mayoría de sus soluciones y solo en unas cuantas la justificación de sus resultados. Cabe resaltar que las estrategias empleadas fueron plantearse preguntas, identificar datos que les permitiera relacionarlos con conocimientos con los que están más familiarizados, realizar trazos e identificar qué tipo de ángulos son.

Equipo 5 (Sam, Lea y FantoDio)

Para dar respuesta a las dos primeras preguntas, los participantes midieron con regla y compás las longitudes de la construcción geométrica, realizaron trazos auxiliares, identificaron tipos de triángulos y formularon conjeturas.

Fantodio: B y Q es la misma distancia de B y C y luego tenemos que trazar una perpendicular aquí, (segmento AC) para medir los puntos entre Q y P.

Sam: Sí, para que se forme el ángulo QPC, ¿verdad?

FantoDio: Ajá.(coloca el compás con centro en C y radio CP y con ese mismo radio colocó el compás con centro en P y observa que pasa por el punto A). Otra que encontré es que el punto P, es el centro entre A y C.

La estrategia empleada permitió que pudiesen formular conjeturas y la forma de justificar o validarlas fue midiendo las longitudes. La Figura 62 muestra la respuesta al primer inciso.

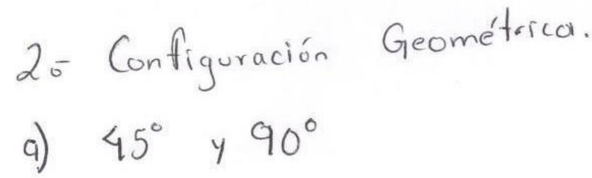


Figura 62. *Respuesta a la primera pregunta.*

Llegan a la respuesta correcta pero no explican la razón, es decir no emplean argumentos formales para justificar su solución. La Figura 63 evidencia que el uso del juego de geometría para medir trazos o ángulos fue la estrategia que emplearon para dar respuesta.

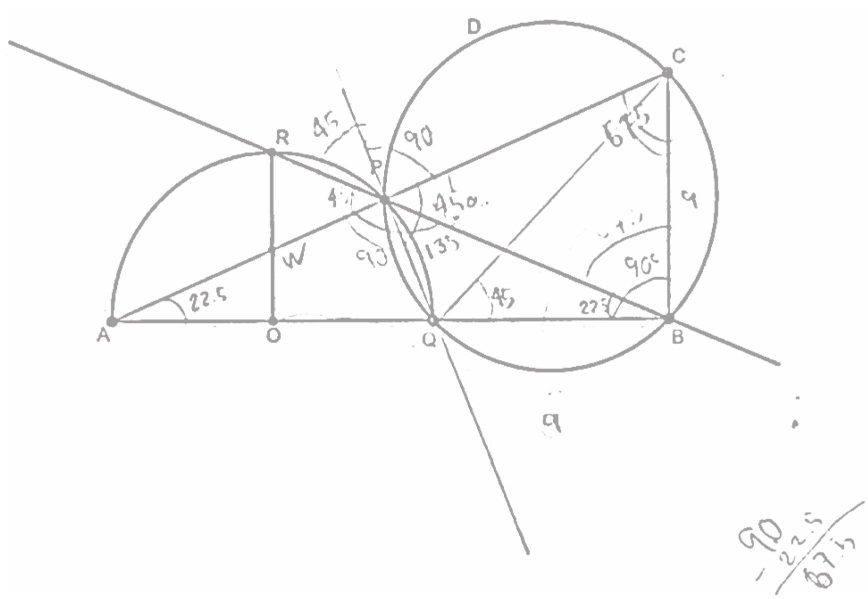


Figura 63. *Respuesta a la primera pregunta.*

Una vez que midieron las longitudes de segmentos y de ángulos, dieron respuesta a la segunda pregunta, la cual consistía en encontrar la relación entre los ángulos *BQC* y *BPC,* así como se muestra en la Figura 64.

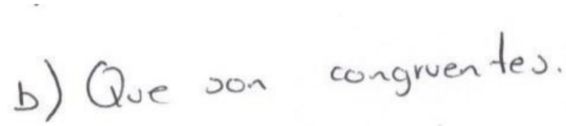


Figura 64. *Respuesta a la segunda pregunta.*

En cuanto a demostrar que si *B*, *P* y *R* son colineales, sí y sólo sí el ángulo *BQC* mide 45°, los participantes no tuvieron éxito. Veamos en la Figura 65 el argumento que emplean para tratar de demostrar lo que se les indica.

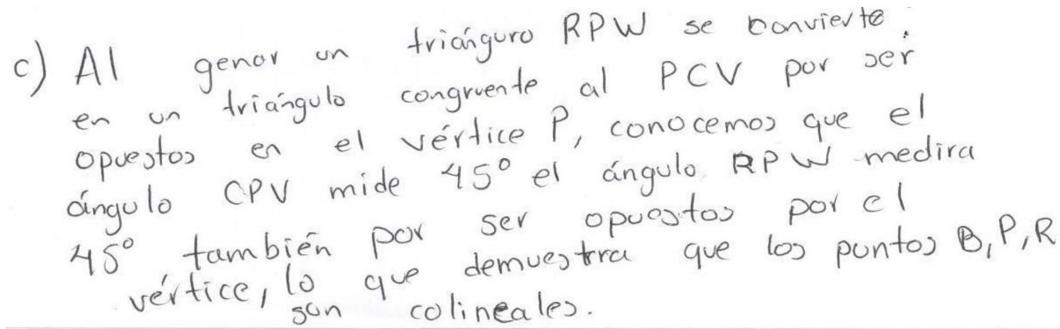

c) Al genor un triánguro RPW se bonvierte,
en un triángulo congruente al PCV por ser
opuestos en el vértice P, conocemos que el
ángulo CPV mide 45° el ángulo RPW medira
45° también por ser opuestos por el
vértice, lo que demuestra que los puntos B, P, R
son colineales.

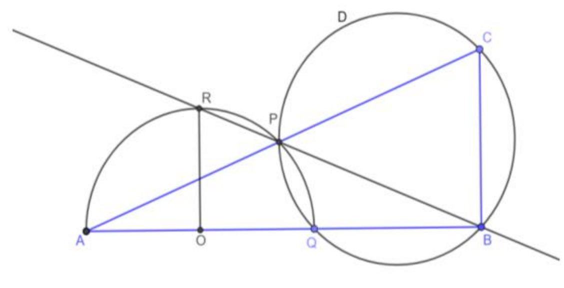
Figura 65. *Respuesta a la tercera pregunta.*

Los participantes reportaron que los triángulos *RPW* y *PCV* son congruentes porque identificaron que los ángulos *RPW* y *PCV* son congruentes por ser ángulos opuestos por el vértice. Para este equipo, dichos argumentos fueron suficientes para demostrar lo que se les pedía. Se puede observar que este equipo avanzó una fase del ciclo básico para la construcción del aprendizaje matemático con entendimiento con respecto al primer problema, lograron formular conjeturas, pero no justificarlas. Seguían apelando únicamente a sus conocimientos previos como estrategia principal, medían los trazos y ángulos para su demostración, además de realizar trazos auxiliares e identificar tipos de ángulos.

La Tabla 7 muestra de forma muy concisa una descripción semiglobal de lo que se vio durante los procesos reflexivos que experimentaron los participantes al momento de resolver los problemas matemáticos. Principalmente se describen las estrategias y los argumentos que emplearon para tal efecto.

Tabla 7. *Descripción semiglobal de los resultados.*

PROBLEMA 1	EQUIPO	OBSERVACIONES
Los siguientes 4 renglones son parte de un arreglo infinito que sigue un patrón. 1 2 3 4 3 4 5 6 7 4 5 6 7 8 9 10 1. Construya los siguientes 2 renglones del arreglo anterior. 2. ¿Cuál es el primer elemento del renglón número 100? 3. ¿Cuál es la suma de los elementos de cada uno de los primeros 6 renglones? 4. ¿Qué regularidades observa en la construcción de cada renglón? 5. ¿Cuál es la suma de los elementos de la fila número k? Exprese el resultado en términos de k. Justifique sus respuestas.	1	Durante el proceso de solución los participantes apelaban únicamente a la memoria en donde trataban de recordar fórmulas para dar respuesta a las preguntas. Esta única forma de resolver problemas se debe a sus creencias sobre la disciplina y su aprendizaje por lo que no intentaban buscar otras rutas de solución por lo que su nivel de entendimiento no satisface todas las etapas del ciclo básico para la construcción del aprendizaje matemático.
	2	Se basaron en la observación para encontrar regularidades, en el análisis de casos particulares y en la formulación de conjeturas. No apelaban tanto a fórmulas sino más bien acudían a sus conocimientos previos cuando encontraban relaciones o patrones en el arreglo y veían la forma de cómo emplear sus recursos de la disciplina para justificar sus respuestas, presentando así más elementos esenciales en la resolución de problemas.
	3	El observar y examinar casos particulares les permitió obtener la expresión $2k-1$, en donde k representa el número de elementos por renglón, convirtiéndose en el único equipo en que sin haberse pedido, con esa expresión calcularon el último elemento del renglón número 100. Tampoco apelaban tanto a la memoria, más bien se enfocaron en encontrar esos patrones que les permitiera formular conjeturas.
	4	Cada integrante resolvió individualmente los cuatro primeros enunciados y posteriormente compararon sus resultados, validándolos cuando estos coincidían. A partir de la quinta pregunta trabajaron colaborativamente y a través de elaborar una tabla con dos columnas en donde escribían el número de renglón y la suma de los elementos de ese renglón, pudieron observar esas regularidades del arreglo y formular sus conjeturas.
	5	Empezaron a resolver las preguntas de forma individual pero mostraron mayor dificultad al tratar de contestarlas porque también apelaban únicamente a sus conocimientos previos para identificar alguna fórmula que les permitiera emplear y dar respuesta a las preguntas. La forma en cómo contestaron muestra que su único interés fue dar respuesta a las preguntas, sin explicar cuál es la razón.

PROBLEMA 2	EQUIPO	OBSERVACIONES
Dado un triángulo *ABC* rectángulo en *B*, se toma un punto *Q* en *AB* y se construye la circunferencia *D* que pasa por *QBC*. Adicionalmente, sea *O* el punto medio de *AQ* y se traza la semicircunferencia con centro en *O* y radio *OQ* que interseca a *D* en el punto *P*, el cual se encuentra en el segmento *AC*. Suponga también, que *RO* es perpendicular a *OQ*. Ver la figura anexa.	1	Con base en las respuestas que reportan, se observa que siguen apelando a la memoria, tratan de justificar sus resultados pero presentan dificultades para hacerlo de manera formal. Sí contestan pero explican brevemente cuál es la razón. Por ejemplo, en el triángulo *QBC* midieron los segmentos *BQ* y *BC* y al ser congruentes concluyeron que se trata de un triángulo isósceles y para ellos, ese proceso es una forma de justificar sus resultados.
	2	Una de las estrategias que empleó este equipo fue construir trazos auxiliares para encontrar relaciones de semejanza que pudiesen ayudarles a responder las preguntas. Incluso, realizaron un dibujo con medidas reales, con la finalidad de formular conjeturas. Con la orientación del instructor, lograron recordar el teorema del ángulo inscrito y emplearlo para justificar algunas de sus conjeturas.
	3	Los participantes emplearon las hipótesis del problema, establecer relaciones, formular conjeturas y justificarlas con algunas propiedades de los ángulos. Cabe destacar que el argumento que emplearon para justificar que el ángulo *QPC* mide 90° es confuso porque no emplearon adecuadamente las propiedades de los ángulos inscritos en una circunferencia. Y a pesar de los esfuerzos por contestar la última pregunta, no lo lograron.
a) ¿Cuál es la medida de los ángulos *APR* y *QPC*? b) ¿Cuál es la relación entre los ángulos *BQC* y *BPC*?	4	También se apoyó en la construcción de trazos auxiliares para encontrar relaciones entre triángulos semejantes, hacer uso de sus propiedades, tener una ruta que les permitiera llegar a la solución y justificar sus resultados. Sin embargo, los argumentos que emplearon tienen características no muy satisfactorias, es decir, no explican ampliamente cuál es la razón debido a que sus recursos son limitados.
c) Demuestre que si *B*, *P* y *R* son colineales sí y solo sí el ángulo *BQC* mide 45°.	5	Durante el proceso de solución los participantes intentaron no apelar tanto a la memoria y encontrar alguna relación entre triángulos y ángulos. Sin embargo, al no tener éxito, optaron por medir los segmentos y ángulos para dar respuesta a las dos primeras preguntas pero no explican ninguna razón de cómo las obtuvieron. En la tercera pregunta, el argumento que emplearon para demostrar lo que se les pedía, no cumple con las características de lo que es una demostración.

Fuente: *Elaboración propia.*

Con base en la tabla 7 en donde se hace una descripción por equipo de cómo resolvieron cada problema, se puede argumentar que los participantes de los equipos 1, 3 y 4 quienes forman parte del Grupo 1, dieron respuesta a las cinco preguntas del primer problema, pero las justifican de una forma simple. Cabe resaltar que el equipo 2 estuvo formado por dos integrantes del Grupo 1 y un integrante del Grupo 2 quienes también justificaron sus respuestas, pero sus argumentos fueron más escuetos. En el caso de los equipos 1 y 5 cuyos integrantes fueron del Grupo 2 no lograron llegar a la etapa de justificación de resultados. En cuanto al segundo problema, ningún equipo logró demostrar que si B, P y R son colineales sí y solo sí el ángulo BQC mide 45°. Con base en esos resultados, se puede decir que en lo que se refiere al problema de Geometría sintética, los participantes no alcanzan todas las etapas del ciclo básico para la construcción del aprendizaje matemático con entendimiento, quedando únicamente, en la fase de formulación de conjeturas.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

5.1. Introducción

Tomando como referencia los resultados en la presente investigación, se extrae una serie de conclusiones que permiten conocer algunas de las características de los procesos reflexivos que los participantes muestran al momento de resolver problemas, conocer y analizar las estrategias empleadas, buscando además explorar qué otros aspectos influyen a la hora de resolver problemas a parte de la observación, que es un elemento fundamental en la resolución, tal y como lo manifiestan Barrera y Reyes (2016).

Como se mencionó en la metodología, el estudio fue de carácter cualitativo-descriptivo en donde los participantes pertenecen esencialmente a los Grupos 1 y 2. De inicio se notó que las formas de concebir e interactuar con problemas de matemáticas, es decir, la reflexión sobre la acción (Schön, 1983, 1987) que indica el nivel de reflexión sobre la acción después de que ha tenido lugar, son distintas en cada grupo. Por ejemplo, los participantes del Grupo 1 muestran mayor nivel de reflexión porque en la mayoría de sus respuestas cubrieron las etapas del ciclo básico para la construcción del aprendizaje matemático con entendimiento, es decir, identificaron información, examinaron casos particulares, observaron patrones, formularon conjeturas y las justificaron. Sin embargo, los participantes del Grupo 2 muestran algunos elementos del aprendizaje con entendimiento, pero no de manera completa porque solamente identifican la información, observan regularidades o patrones y en algunas ocasiones formulan conjeturas, pero no las justifican. Apelan únicamente a la memoria y aunque sí llegan a la solución, sus procesos reflexivos son limitados porque no van en la línea de aprender matemáticas con entendimiento, tal y como se puede observar en la descripción semiglobal de los resultados de la Tabla 7.

A continuación se presenta una síntesis de lo que se observó en los procesos de solución de los participantes en el estudio tomando como base el ciclo básico para la construcción del aprendizaje matemático con entendimiento a través de la resolución de problemas.

5.2. Respuestas a las preguntas de investigación

Las preguntas de investigación que orientaron este trabajo son: ¿Cuáles son algunas características de los procesos reflexivos en profesores de matemáticas en un ambiente colaborativo de resolución de problemas? ¿Cuáles son las heurísticas que ponen de manifiesto los profesores al resolver problemas? A estas preguntas se les dio respuesta con base en los resultados del estudio. El análisis detallado de los datos ofrece una descripción de cómo los participantes abordaron y dieron sentido a los problemas, emergiendo así algunas características de esos procesos reflexivos, clasificadas en cuatro bloques y que a continuación se mencionan.

i). Características al justificar resultados

- Presentan dificultades para justificar resultados de manera formal, es decir, no emplean argumentos como principios, propiedades o axiomas que les facilite la justificación, principalmente cuando se trata de realizar demostraciones. Esa dificultad ocurrió principalmente en los participantes del Grupo 2.

- Sus procesos reflexivos no satisfacen todas las etapas del ciclo básico para la construcción del aprendizaje matemático con entendimiento. El grupo 1 provee la respuesta y justifica en algunos casos de una forma escueta porque no explica de manera amplia cuál es la razón. Mientras que el Grupo 2 solamente proporciona la respuesta, pero no la justifica.

- Presentan dificultad cuando intentan comunicar sus ideas porque no podían transmitirlas de una manera clara y precisa. El Grupo 2 muestra mayor dificultad que el Grupo 1 cuando intentan justificar sus resultados.

ii). Particularidades del trabajo colaborativo

- Al resolver el problema uno, particularmente en las primeras partes hubo poca colaboración en los equipos, en el equipo 4 hubo interacción al contrastar sus respuestas. En esta etapa reflexionaron sobre las diferencias y coincidencias, llegando a la conclusión de que en el proceso de validación de resultados es suficiente con que estos coincidiesen.

- Los participantes del Grupo 1 quienes cursan un posgrado en Educación Matemática mejoran su cooperación al tratar de dar pistas o introducir ideas antes de presentar una solución, proceso que los llevó a identificar patrones a través de las regularidades que observaron, logrando formular conjeturas y en algunos casos, a justificarlas.

- Los participantes del Grupo 2 lograron identificar datos y la mayoría de ellos muestra un manejo adecuado de procedimientos algorítmicos, siguiendo únicamente esa ruta de solución debido a las creencias que ellos tienen sobre la disciplina y su aprendizaje que no va acorde con los principios de aprender matemáticas vía resolución de problemas.

iii). Reflexiones sobre su experiencia como profesores

- Mostraron algún grado de frustración, principalmente los participantes del Grupo 2, situación que les ayudó a comprender la frustración que experimentan sus alumnos y reconocieron que a pesar de ser profesores de matemáticas, tienen muchos conflictos cognitivos. Es decir, que sus conocimientos son limitados debido a que no están acostumbrados a aprender matemáticas con entendimiento.

- Apelan únicamente a sus conocimientos previos y creen que el aprendizaje matemático sólo se adquiere cuando se aprenden fórmulas, una idea que tienen los participantes del Grupo 2 y que comparten algunos del Grupo 1.

iv). Resultados al trabajar en pequeños grupos

- Los participantes que colaboraron en este estudio y que no tienen experiencia en resolver este tipo de problemas realmente se han preocupado por reflexionar sobre su acción (Schön, 1983, 1987) y sobre cómo a través de la discusión de ideas y conceptos, de indagaciones y formulación de conjeturas en la resolución de problemas se puede llegar al aprendizaje cooperativo en matemáticas.
- Las experiencias vividas durante la actividad experimental muestran la coincidencia en cuanto a que conscientes o no, las creencias modelan la forma en cómo solucionan los problemas.

- Los participantes del Grupo 2 tienen una actitud menos rigurosa, es decir, no emplean argumentos formales, solo se preocupan en proporcionar un dato como respuesta o incorporan un discurso breve en el momento de argumentar. Su sistema de creencias marcan la ruta de solución y en ocasiones esa ruta puede convertirse en un obstáculo para aprender matemáticas con entendimiento.

5.3. Alcances y limitaciones

En este trabajo se ha documentado la forma en la que incide el resolver tareas con múltiples soluciones en los procesos de reflexión de profesores de matemáticas de nivel medio superior y secundaria en un ambiente colaborativo. Por ejemplo, los participantes que tenían la creencia de aprender matemáticas únicamente con el empleo de fórmulas y algoritmos, al final del curso se convencieron de la importancia que tiene el aprender con entendimiento y no apelar únicamente a la memoria. Los resultados de este estudio sugieren proponer formas de diseñar un programa de actualización docente a los participantes de esta investigación en donde se expongan de manera sistemática a esta forma de aprender matemáticas y mejorar su desempeño docente.

Por otro lado, las características del grupo al que se les aplicaron las tareas tiene algunas limitantes porque los resultados no se pueden generalizar debido a que pueden ser distintos si se aplica el estudio a otro grupo de profesores con otras características. Además, tampoco se pueden generalizar porque se clasificaron en Grupo 1 y Grupo 2 cuyas características del primero son que tienen cierta experiencia en resolver el tipo de problemas que se les planteó, por lo tanto, mostraron un mayor nivel de entendimiento que los participantes del Grupo 2.

5.4. Futuras líneas de investigación

Con base en lo expuesto anteriormente, se puede plantear una posible continuación y/o complementación de este trabajo, ya que por falta de tiempo no se pudo realizar un estudio más exhaustivo. Un estudio más amplio podría consistir en un estudio centrado en el análisis de su práctica docente con la finalidad de identificar si el curso al que asistieron causará impacto en ella. Ese análisis se considera una futura línea de investigación porque los participantes reportaron en la encuesta de salida que lo discutido en el curso, después de haber sido expuestos a procesos reflexivos para resolver problemas, pueden tomarlo como ejemplo para cambiar la manera de impartir su práctica docente. Por ejemplo, buscar diferentes estrategias de enseñanza-aprendizaje y desarrollar el pensamiento matemático en la medida que sea posible. Más específicamente: ¿Cuál es el impacto en el proceso de enseñanza de los participantes que asistieron a un curso de resolución de problemas para aprender matemáticas con entendimiento? Otra posible línea de investigación sería el observar, analizar e interpretar las conversaciones de estudiantes en niveles básicos del sistema educativo (por ejemplo, alumnos de 12 a 15 años) trabajando en colaboración en pequeños grupos en un contexto de resolución de problemas. Más específicamente: ¿Qué elementos de reflexión se pueden identificar en los estudiantes de los niveles básico y medio superior del sistema educativo durante la resolución colaborativa de problemas en pequeños grupos?

5.5. Algunas reflexiones derivadas del estudio

El percibir diversas estrategias de solución a un mismo problema, los obstáculos y aptitudes que presentaron los participantes en el proceso, así como determinar cuáles son los factores que influyen, ayudó a establecer algunas similitudes y diferencias en esos procesos reflexivos. Por ejemplo, los participantes del Grupo 1 muestran evidencia de que se enfocan en encontrar patrones, emplean sus recursos para establecer relaciones, analizar casos particulares, formular conjeturas y justificar sus resultados, por lo tanto, exhiben un mejor desempeño al resolver problemas con múltiples soluciones. Mientras que los del Grupo 2 apelan únicamente a la memoria porque se enfocan en recordar fórmulas y algoritmos para dar respuesta a las preguntas de los problemas sin intentar buscar otra ruta de solución, por lo tanto, su nivel de entendimiento tiene características no muy satisfactorias. Este grupo creía que resolver problemas matemáticos es enfrentarse a una gran cantidad de ejercicios similares a los que se resuelven en el salón de clases y que eso hace hábil al estudiante y al profesor para abordar cualquier otra situación. No se niega el valor de la ejercitación ya que los ejercicios consolidan las herramientas adquiridas, pero esto no quiere decir que se sepa cómo y cuándo utilizarlas. Prueba de ello es que los participantes del Grupo 2 mostraron mayor confusión que los del Grupo 1 debido a que no habían resuelto problemas de este tipo y tenían muchas dudas sobre cómo determinar un plan cuando intentaban dar solución a los problemas matemáticos.

Una similitud que se vio entre estos dos grupos fue la estrategia de realizar trazos auxiliares en el segundo problema, con la finalidad de encontrar relaciones de semejanza o construir algún polígono que les aportara elementos para dar solución y en el caso del Grupo 1 para justificar sus respuestas. Los participantes del grupo 2 midieron con el transportador los ángulos y con esta acción daban la respuesta, creyendo que lo más importante es reportar un dato y no el proceso de solución por lo que sus respuestas fueron muy breves, mostrando así que su nivel de entendimiento es limitado porque no cubre ampliamente las etapas del ciclo básico para la construcción del aprendizaje y esto sugiere que la actualización y formación de los profesores de matemáticas con un enfoque de resolución de problemas es importante para su desempeño docente. A pesar de no estar familiarizados con este tipo de problemas pero con la ayuda del instructor se motivaron y realizaron su mayor esfuerzo por encontrar regularidades, formular conjeturas y tratar de justificarlas.

El equipo 2 quien estuvo formado por un participante del Grupo 2 y dos del Grupo 1, logró justificar algunas respuestas. Esto puede deberse a que la mayoría de los integrantes cursa un posgrado en Educación Matemática, lo que permitió buscar diversas formas de dar solución a los problemas, sobre todo cuando no recordaban algún teorema que les permitiera llegar a la solución. Ellos no solamente apelaban a sus conocimientos previos, tal y como lo hacía la participante perteneciente al Grupo 2, esta limitante originó en ella mucha dificultad y confusión al resolver los problemas porque sus compañeros de equipo tenían una forma distinta de resolverlos. Con base en los hallazgos, se puede concluir que los participantes del Grupo 2 tenían la creencia de que resolver problemas matemáticos significa enfrentarse a una gran cantidad de ejercicios similares a los que ellos resuelven en el aula y que esa forma de aprender los hace hábiles para abordar cualquier otra situación problemática, pero al estar expuestos a esta forma de aprender en donde el análisis y la reflexión se hacen presentes en la resolución de problemas y ponen en juego los elementos del pensamiento matemático les permite adquirir un aprendizaje con entendimiento. Esta forma de aprender implicó en los participantes del Grupo 2 confusión, dificultad y frustración; pero además reflexionaron acerca de la importancia que ésta tiene y sobre todo, cómo incidirá en su desempeño docente.

Gracias a algunas de las características encontradas de esos procesos reflexivos, se proporciona información para sugerir algún programa de capacitación docente en donde el principal objetivo sea aprender matemáticas con entendimiento vía resolución de problemas y que a su vez, esta forma de aprender incida en los alumnos, es decir, que los profesores enseñen a sus estudiantes a pensar reflexivamente cuando aprenden matemáticas.

6. REFERENCIAS

Agustan, S. (2019). Analysis of prospective teacher's mathematical problem solving based on taxonomy of reflective thinking. *Journal of Physics: Conference Series*. 1157032078.

Agustan, S., Siswono, T. & Juniati, D. (2017). Investigating and analyzing prospective teacher's reflective thinking in solving mathematical problem: A case study of female-field dependent (FD) prospective teacher. In *Actas de la Conferencia AIP* (Vol. 1848, No. 1). Publicación AIP.

Agustan, S., Dwi, J. & Tatag, Y. (2017). Reflective thinking in solving an algebra problem: a case study of field independent-prospective teacher. *Journal of Physics: Conference Series* 893 012002, 1-6.

Alfaro, C. y Barrantes, H. (2008). ¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de Investigación y formación en educación matemática.* Año 3, Número 4, pp. 83-98.

Ambrose, R. (2004). Initiating change in prospective elementary school teachers' orientations to Mathematics teaching by building on beliefs *J. Math. Teacher Education* 7, 91–119.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico.* (23 ed.). Siglo veintiuno editores.

Barrera, F., & Reyes, A. (2016). Design Technology-Based Tasks for Enhancing Mathematical Understanding Through Problem Solving. En L. Uden, D. Liberona y T. Welzer (eds.), *Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 183-192). Springer.

Barrera, F., Reyes, A., Campos, M. y Rodríguez, C. (2021). Resolución de problemas en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. *PADI Boletín Científico de Ciencias e Ingenierías del ICBI*, 9 (especial), 10-17.

Barrón, T. C. (2015). Concepciones epistemológicas y práctica docente. Una revisión. *Revista de docencia universitaria*, 13(1), 35-56.

Bell, J. (2005). *Cómo hacer tu primer trabajo de investigación (Roc Filella Escolá, trad.).* España: Gedisa.

Bjuland, R. (2004). Student teachers' reflections on their learning process through collaborative problem solving in geometry. *Educational Studies in Mathematics. 55. 199-225.*

Borgersen, H.E. (1994). 'Open ended problem solving in geometry', *Nordisk Matematikk-didaktikk* 2(2), 6–35.

Dewey, J. (1933). *How We Think: A Restatement of the Relation of Reflective Thinking to the Educative Process.* Boston, MA: D.C. Heath & Co Publishers.

Dündar, S. & Yaman, H. (2015). How do prospective teachers solve routine and non-routine trigonometry problems? *International Online Journal of Educational Sciences*, 7(2), 41–57.

Eccles, D. & Arsal, G. (2017). The Think Aloud Method: What is It and How Do I Use It? *Qualitative Research in Sport, Exercise and Health,* 9(4), 514–531. https://doi.org/10.1080/2159676X.2017.1331501

Finlay, Linda. (2008). Reflecting on 'Reflective practice'. Practice-based Professional Learning Paper 52, The Open University. Disponible en https://oro.open.ac.uk/68945/1/Finlay-%282008%29-Reflecting-on-reflective-practice-PBPL-paper-52.pdf

Fisher, L. (2008). *A critical thinking: an introduction*. Jakarta: Erlangga.

García, M. J (2009). *El profesionalismo integrado. Un nuevo modo de ser educador.* México: Universidad Pedagógica Nacional. Plaza y Valdez Editores.

Ghanizadeh, A. (2017). The Interplay Between Reflective Thinking, Critical Thinking, Self-Monitoring, and Academic Achievement in Higher Education. *Higher Education,* 74(1), 101–114. https://doi.org/10.1007/s10734-016-0031-y

Gómez, R. (2019). La reflexión docente como estrategia para adquirir conocimiento práctico: interacciones de supervisión en el Prácticum. [Tesis doctoral publicada], Universidad de Salamanca.

Habermas, J. (1971). *Knowledge and Human Interests.* (1st ed.). UK: Polity Press.

Campos, M. y Torres, A. (2022). El proceso inquisitivo como un elemento central en la resolución de problemas: un problema sobre cuadriláteros. En: Hernández, L. A. y Juárez, E. (Eds.). *Tendencias en la educación matemática 2022* (pp. 66-83). México: Comunicación científica.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2010*). Metodología de la Investigación* (5ta Edición). México DF: McGraw-Hill.

Hersh, R. (1986). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. En T. Tymoczko (org), *New directions in the philosophy of mathematical* (pp. 9-289). Boston: Birkhäuiser.

Hery Suharna et al; (2020). The Reflective Thinking Elementary Student in Solving Problems Based on Mathematical Ability. *International Journal of Advanced Science and Technology,* 29(06), 3880 - 3891. Retrieved from http://sersc.org/journals/index.php/IJAST/article/view/15752

Hidayati, Y. M., Ngalim, A., Sutama, Arifin, Z., Abidin, Z. & Rahmawati, E. (2020). Level of Combinatorial Thinking in Solving Mathematical Problems. *Journal for the Education of Gifted Young Scientists*, 8(3), 1231-1243. DOI: http://dx.doi.org/10.17478/jegys.751038

Hiebert, 1997. Making sense: Teaching and Learning Mathematics with knowledge: conceptualizing and measuring teacher's topic specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39(4) 372-400.

Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39(4), 372–400.

Hsieh, P. H., & Chen, N. S. (2012). Effects of Reflective Thinking in the Process of Designing Software on Students' Learning Performances. Turkish Online *Journal of Educational Technology,* 11(2), 88–99.

John W. Creswell & Dana L. Miller (2000): Determining Validity in Qualitative Inquiry, *Theory Into Practice*, 39(3), 124-130. http://dx.doi.org/10.1207/s15430421tip3903_2

Karsenty, R., & Arcavi, A. (2017). Mathematics, lenses, and videotapes: A framework and a language for developing reflective practices of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 20(5), 433–455.

Kerlinger, F.N. y Lee H. B. (1975). *Investigación del comportamiento.* 4a. ed. Editorial McGRAW-HILL.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem-solving. In E. A. Silver (Eds), *Teaching and Learning Mathematical Problem-solving: Multiple Research Perspectives.* (pp. 1-15) New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Kholid, M. N., Sa'dijah, C., Hidayanto, E., & Permadi, H. (2020). How are students' reflective thinking for problem solving? *Journal for the Education of Gifted Young Scientists,* 8(3), 1135-1146. DOI: http://dx.doi.org/10.17478/jegys.688210

Kholid, M.N., Telasih, S., & Pradana, L. N. (2021). Reflective Thinking of Mathematics Prospective Teachers' for Problem Solving. *Journal of Physics: Conference Series,* 1783(012102), 1–6. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1783/1/012102

Kholid, M.N., Swastika, A., Ishartono, N., Nurcahyo, A., Lam, T., Maharani, S., Ikram, M., Murniasih, T., Majid., Wijaya, A. & Pratiwi, E. (2022). Hierarchy of Students' Reflective Thinking Levels in Mathematical Problem Solving. *Acta Scientiae.* V. 24, N. 6, pp. (24-59).

Kozakli Ulger, T., Bozkurt, I., & Altun, M. (2022). Analyzing in-service teachers' process of mathematical literacy problem posing. *International Electronic Journal of Mathematics Education,* 17(3), em0687. https://doi.org/10.29333/iejme/11985.

Kwan, S. & Leung, S. (2013). Teachers implementing mathematical problems posing in the classroom: challenges and strategies. *Educational Studies in Mathematics,* 83, 103-116.

Lerman, S. (2014). *Encyclopedia of Mathematics Education*. New York, NY: Springer.

Lester, F.K. (2005) On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics *education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 37, 457–467.

Lincoln, Y.S. & Guba, E.G. (1985). *Naturalistic inquiry*. London: Sage.

Mason, J. and Davis, J. (1991). *Fostering and Sustaining Mathematics Thinking Through Problem Solving*, Victoria: Deakin University Press.

Mota Villegas, DJ, & Valles Pereira, RE (2015). Papel de los conocimientos previos en el aprendizaje de la matemática universitaria. *Acta Scientiarum. Educación* , 37 (1), 85-90.

Muir, T. and Beswick, K. (2007). Stimulating Reflection on Practice: Using the Supportive Classroom Reflection Process. *Teacher Education and Development* Special Issue 8 74.

Muñoz, C. (2011*). Cómo elaborar y asesorar una investigación de tesis. México:* Pearson Education.

NCTM (1970). *Sugerencias para resolver problemas*. México: Trillas.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.
Noddings, N. (1985). Small groups as a setting for research on mathematical problem-solving. In E.A. Silver (Eds), *Teaching and Learning Mathematical Problem-solving*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Odafe, V. (2008) Teaching and Learning Mathematics: Student Reflective Adds a New Dimension, Bowling Green State University, Huron, USA, pp. 486-490.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* Editorial Trillas.

Salvador, M. & Medina, R. (2009). *Didáctica General* (2° ed.). Madrid: Pearson Educación.

Santos-Trigo y Vargas-Jarillo (2003). Más allá del uso de exámenes estandarizados. *Avance y perspectiva.*

Santos-Trigo, M. (2007). *La Resolución de Problemas Matemáticos*: Fundamentos Cognitivos. Trillas, México.

Santos-Trigo, M. (2008). On the use of technology to represent and explore mathematical objects or problems dynamically. *Mathematics and Computer Education Journal*, 42(2), pp. 123-139.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York: Basic Books.

Simon, (1994) Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. Educ Stud Math 26, 71–94 (1994). https://doi.org/10.1007/BF01273301

Stake, R. (1994). Case Studies.[Estudios de casos]. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Dirs.). Handbook of qualitative research (pags. 236-247). London: Sage. Universidad de Bergen, Bergen.

Syamsuddin, A., Juniati, D y Eko, T. (2020). Understanding the Problem-Solving Strategy Based on Cognitive Style as a Tool to Investigate Reflective Thinking Process of Prospective Teacher. *Universal Journal of Education Research* 8 (6). 2614-2620.

Syamsuddin, A. (2020). Describing taxonomy of reflective thinking for field dependent-prospective mathematics teacher in solving mathematics problem. *International Journal of Scientific & Technology Research*. Vol, 9. Issue 3. 4418-4421.

Téllez, J. L. (2020). *Relación entre el sentido numérico y pensamiento algebraico en el bachillerato* [Tesis maestría publicada], Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. https://drive.google.com/file/d/1Wlg-PI10qE7lTs2pLxww4XlSNrVx0lIY/view

Witkin, H. A., Oltman, P. K., Raskin, E. & Karp, S. A. (1971). *A manual for the embedded figures tests*. Consulting Psychologists Press.

Zull, James E. (2002). *The Art of Changing the Brain: Enriching the practice of Teaching by exploring the Biology of Learning.* USA: Stylus Publishing, LLC/Centers for Teaching and technology- book Library 195.

7. APÉNDICES

7.1. Apéndice A. Encuesta realizada vía Google Forms

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1PDkZ9VPHl4VHMZGYWYzBFPp6Mt6SoISR/edit?usp=drive_link&ouid=118128307211424012942&rtpof=true&sd=true

7.2. Apéndice B. Transcripción de las videograbaciones

https://drive.google.com/file/d/1B8iSqSMsuS0KFgRsh9fWt-HRbA4YOX2G/view?usp=drive_link

7.3. Apéndice C. Problemas

https://drive.google.com/file/d/1xoGQNJR1hay4gtG7C6Rz0EhUPCF2uJfi/view?usp=drive_link

7.4. Apéndice D. Encuesta realizada al término de la actividad experimental

https://drive.google.com/file/d/1g8A22DQKwy44ShP2VOuesaUPBJOK_oi3/view?usp=drive_link

7.5. Apéndice E. Soluciones al problema de Formación de patrones numéricos

https://drive.google.com/file/d/1zOvbLkFWaNWGFOefXclP9HNv9y0bLS8I/view?usp=drive_link

7.6. Apéndice F. Soluciones al problema de Geometría sintética

https://drive.google.com/file/d/18WTEdpP_7j2yl8d2kOhJSzn7j1LZ4NR-/view?usp=drive_link