



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas de Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Estabilidad robusta en la
ecuación de calor radialmente
simétrica

T E S I S

que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta:

Luis Araujo Hernández

Bajo la dirección de:

Dr. Raúl Temoltzi Ávila

Mineral de la Reforma, Hidalgo, 2021



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
 Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
School of Engineering and Basic Sciences

Mineral de la Reforma, Hgo., a 29 de julio de 2021

Número de control: ICBI-D/669/2021

Asunto: Autorización de impresión.

MTRO. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

Con fundamento en lo dispuesto en el Título Tercero, Capítulo I, Artículo 18 Fracción IV; Título Quinto, Capítulo II, Capítulo V Fracción IX del Estatuto General de nuestra Institución. Por este medio le comunico que el Jurado asignado al Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas Luis Araujo Hernández, quien presenta el trabajo de titulación "Estabilidad robusta en la ecuación de calor radialmente simétrica", después de revisar el trabajo en reunión de sinodales ha decidido autorizar la impresión del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación, firman de conformidad los integrantes del Jurado:

Presidente: Dr. Arturo Criollo Pérez
Secretario: Dra. Liliana Peralta Hernández
Vocal: Dr. Raúl Temoltzi Ávila
Suplente: Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente
 "Amor, Orden y Progreso"

Dr. Otilio Arturo Acevedo Sandoval
 Director de ICBI



OAAS/YCC



Ciudad del Conocimiento
 Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia Carboneras
 Mineral de la Reforma, Hidalgo México C.P. 42184
 Teléfono: +52 (771) 71 720 00 ext. 2231 Fax 2109
 direccion_icbi@uaeh.edu.mx

www.uaeh.edu.mx

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es extender a ecuaciones en derivadas parciales una definición ya establecida de estabilidad para ecuaciones diferenciales ordinarias, en particular, extender esta definición para la ecuación de calor radialmente simétrica en dos y tres dimensiones. Para dicha ecuación, consideramos fuentes de calor externas que se representan vía series de Fourier-Bessel y cuyos coeficientes de Fourier-Bessel son diferenciables a trozos y acotados en valor absoluto. Aplicamos el método de separación de variables a la ecuación de calor para obtener soluciones e identificamos los coeficientes de Fourier-Bessel que hacen que la solución obtenida, así como sus primeras derivadas parciales, alcancen los valores absolutos mayores posibles. En base a esto, establecemos condiciones suficientes para asegurar la estabilidad robusta en la ecuación de calor en cuestión.

En la primera parte de la tesis aplicamos el Principio del Mínimo de Pontryagin, uno de los resultados más importantes de la teoría de control óptimo, a un problema de optimización sujeto a una ecuación diferencial ordinaria que satisfacen los coeficientes de las series de Fourier-Bessel de las soluciones de la ecuación de calor radialmente simétrica. Además, describimos algunas propiedades del tubo de alcanzabilidad asociado a dicha ecuación diferencial.

En la segunda parte de la tesis detallamos el proceso deductivo para obtener la ecuación de calor en n dimensiones. También, examinamos a detalle el caso particular de la ecuación de calor radialmente simétrica en dos y tres dimensiones y aplicamos el método de separación de variables de Fourier-Bessel para obtener soluciones de la ecuación en cuestión sin fuentes de calor externas.

En la tercera parte del trabajo proponemos la definición de estabilidad robusta para la ecuación

VI

ción de calor radialmente simétrica en dos y tres dimensiones. Además, verificamos que el método de separación de variables de Fourier-Bessel sea válido, es decir, que se obtengan soluciones de la ecuación de calor que se puedan representar vía series de Fourier-Bessel. Después, como principales resultados de esta tesis, establecemos condiciones suficientes, sobre el coeficiente de difusividad térmica para garantizar la estabilidad robusta en la ecuación de calor radialmente simétrica en dos y tres dimensiones. Ilustramos numéricamente los resultados obtenidos.

Adicionalmente, en el Apéndice A se detallan propiedades importantes sobre las funciones cilíndricas y esféricas de Bessel de primera especie que son de utilidad en este trabajo.



*A mis padres, Luis Araujo y Alejandra Hernández, quienes siempre me muestran su apoyo y cariño, a mi hermano Erick que, aunque sea el consentido, siempre está a mi lado dándome un respiro, y a mi hermana, quien siempre me motivó y alentó a sobresalir.
Para ellos, todos mis logros.*

Agradecimientos

Quiero agradecer a las personas más importantes en mi vida: mis padres y mis hermanos, por ser mis modelos a seguir y por apoyar todas mis ambiciones.

Agradezco, también, a mis profesores, a mis amigos, a los miembros del jurado que revisó este trabajo, cuyas observaciones ayudaron a complementar significativamente su contenido: Dr. Arturo Criollo Pérez, Dra. Liliana Peralta Hernández, Dr. Aarón Victor Reyes Rodríguez, y en particular al Dr. Raúl Temoltzi Ávila, por toda su paciencia y todo el apoyo brindado durante mis estudios y durante la elaboración de este trabajo.

Introducción

Para ecuaciones diferenciales hay varios tipos de estabilidad en la literatura, por ejemplo, para ecuaciones diferenciales ordinarias, en [5] encontramos la *estabilidad de Lyapunov* y la *estabilidad asintótica*. La estabilidad de Lyapunov de un punto de equilibrio significa que las soluciones cuyas condiciones iniciales tiendan al punto de equilibrio en cuestión, convergen uniformemente a una solución constante para todo $t \geq 0$. Más formalmente, considerando la norma euclidiana, si $\bar{x} = \bar{x}_0$ es un punto de equilibrio estable de la ecuación diferencial ordinaria $\dot{x} = v(x)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que si se cumple que $\|\bar{x}_0 - x_0\| < \eta$ entonces la solución φ , de la ecuación diferencial en cuestión, asociada a la condición inicial x_0 satisface $\|\varphi(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon$ para $t \geq 0$. En la estabilidad asintótica se pide estabilidad de Lyapunov y que $\varphi(t) \rightarrow \bar{x}_0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para la estabilidad de Lyapunov, cuando hay ciertas condiciones de suavidad sobre la función v en la ecuación diferencial ordinaria en cuestión, para cada condición inicial dada, hay una y solo una solución asociada a cada condición inicial.

Para ecuaciones diferenciales ordinarias hay otro tipo de estabilidad: *estabilidad bajo perturbaciones de acción permanente*. Este tipo de estabilidad es de particular interés en este trabajo de tesis. La definición de este tipo de estabilidad fue propuesta inicialmente por Duboshin y Malkin, ver por ejemplo [13]. En esta definición se considera el sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad (1)$$

el cual se somete a perturbaciones pequeñas de acción permanente¹ $R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$,

¹Es decir, que las perturbaciones afectan el sistema para todo el tiempo de estudio.

así el sistema (1) se sustituye, para toda $t \geq t_0$, por el sistema perturbado

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad (2)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, ver la Figura 1. En [13] se da la definición siguiente.

Definición 0.0.1. Se dice que la solución del sistema (1) es estable con respecto a las perturbaciones de acción permanente si se cumple que para todo $\varepsilon > 0$ dado, existen constantes positivas $\eta_1 = \eta_1(\varepsilon)$ y $\eta_2 = \eta_2(\varepsilon)$ tales que si

$$\sum_{i=1}^n R_i^2 < \eta_1^2, \quad t \geq t_0, \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n x_{i0}^2 < \eta_2^2,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \varepsilon^2, \quad t \geq t_0,$$

donde $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, es solución del sistema perturbado (2).

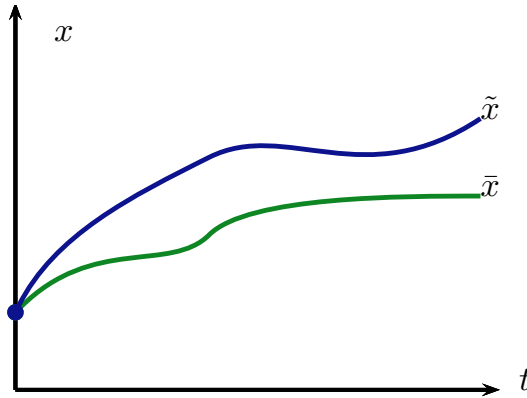


Figura 1: Solución \bar{x} del sistema (1) y solución \tilde{x} del sistema perturbado (2). (Gráficas elaboradas con PSTricks)

Este tipo de estabilidad ha sido usada e incluso se han dado variantes antes, por ejemplo, en [2] se usa la misma definición en un sistema de segundo orden y en [17] se da una variación de esta definición usando una norma distinta a la euclidiana, también para un sistema de segundo orden. En [17], el tipo de estabilidad recibe el nombre de *estabilidad robusta*. En este tipo de estabilidad, para cada condición inicial se puede trabajar con muchas perturbaciones, siempre y cuando cumplan que su norma sea menor que η_1 , así, con la misma condición inicial, tenemos una solución asociada a cada perturbación, y cada

una de esas soluciones permanece suficientemente cerca del origen. Esto último es lo que hace que se le llame “robusta” y, en cierto sentido, este tipo de estabilidad es más fuerte que la estabilidad de Lyapunov.

Por otro lado, para ecuaciones en derivadas parciales, en particular para la ecuación de calor, se han estudiado varios tipos de estabilidad, por ejemplo, en [14] se aborda la *estabilidad estructural* de soluciones que están definidas hasta cierto tiempo finito y que para algún tiempo $\tilde{t} < \infty$, estas soluciones tienden a infinito. Otro tipo de estabilidad que se ha estudiado para la ecuación de calor es la *estabilidad de Hyers-Ulam*. En [12], se estudia este tipo de estabilidad en la ecuación de calor para funciones radialmente simétricas. Un tipo más de estabilidad que se estudia para la ecuación de calor es la *estabilidad en medida*, para este tipo de estabilidad, en [19] se consideran fuentes externas con interferencia descrita por procesos de Wiener.

En este trabajo de tesis estudiamos, para la ecuación de calor radialmente simétrica, la estabilidad robusta para una clase particular de fuentes de calor externas (o perturbaciones externas), como una extensión de la estabilidad bajo perturbaciones de acción permanente. Para la clase de fuentes externas que utilizamos, aplicamos el método de separación de variables de Fourier-Bessel y obtenemos, mediante manipulación de los coeficientes de Fourier-Bessel, las peores fuentes externas a las que la ecuación de calor se puede someter de tal forma que las soluciones obtenidas, así como sus primeras derivadas parciales, alcancen los valores absolutos mayores posibles. Al acotar apropiadamente estas fuentes de calor extremas damos un criterio para garantizar la estabilidad robusta en la ecuación de calor en cuestión.

Para poder realizar lo anterior consideramos un problema de optimización para los coeficientes de Fourier-Bessel de las soluciones de la ecuación de calor. Lo obtenido al resolver dicho problema de optimización nos permite definir un tubo de alcanzabilidad el cual nos da información sobre el comportamiento de cada coeficiente de Fourier-Bessel.

Esta tesis consta de tres capítulos, en el primero abordamos todo lo relacionado con las ecuaciones diferenciales ordinarias que son de utilidad para este trabajo, y en los siguientes dos capítulos nos concentramos en las ecuaciones diferenciales parciales de interés y su estabilidad robusta.

Índice general

Resumen	V
Introducción	XI
1. Preliminares	1
1.1. Principio del Mínimo de Pontryagin	1
1.1.1. Propiedades de soluciones fundamentales para una ecuación dife- rencial ordinaria lineal	1
1.1.2. Deducción del Principio del Mínimo de Pontryagin	3
1.2. Principio del Mínimo de Pontryagin aplicado a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden	8
1.2.1. Problema de optimización	9
1.2.2. Solución x para $u \in \mathcal{U}_v$ arbitrario	10
1.2.3. Algunas propiedades de $D(\tau)$	12
2. Ecuación de calor	19
2.1. Deducción en n dimensiones	19
2.2. Ecuación de calor en dos dimensiones	22
2.2.1. Ecuación de calor en coordenadas polares	22
2.2.2. Soluciones de la ecuación de calor con simetría radial	24
2.3. Ecuación de calor en tres dimensiones	26
2.3.1. Ecuación de calor en coordenadas esféricas	27
2.3.2. Soluciones de la ecuación de calor con simetría radial	31

3. Estabilidad robusta para la ecuación de calor radialmente simétrica con fuentes de calor externas	35
3.1. Análisis en una placa circular en el plano	35
3.1.1. Planteamiento del problema	35
3.1.2. Justificación del método de separación de variables de Fourier-Bessel	38
3.1.3. Criterio de estabilidad robusta	45
3.1.4. Ejemplos numéricos	48
3.2. Análisis en una esfera en el espacio	53
3.2.1. Planteamiento del problema	53
3.2.2. Justificación del método de separación de variables de Fourier-Bessel	55
3.2.3. Criterio de estabilidad robusta	61
Conclusiones	65
A. Funciones de Bessel de primera especie	67
A.1. Funciones cilíndricas	67
A.1.1. Fórmulas recursivas	69
A.1.2. Ceros de las funciones de Bessel	70
A.1.3. Funciones de Bessel de orden entero	71
A.1.4. Series de Fourier-Bessel	72
A.2. Funciones esféricas	74
A.2.1. Relaciones de recurrencia	75
A.2.2. Ceros de las funciones esféricas de Bessel	76
Bibliografía	77

Principio del Mínimo de Pontryagin

En esta sección presentamos el Principio del Mínimo de Pontryagin, el cual usaremos para maximizar cierto funcional mediante la minimización de una función de Pontryagin, siguiendo el desarrollo de [15]. Esta es una versión equivalente a la que enuncia Pontryagin y colaboradores en [7, 8].

Comenzamos analizando algunas propiedades de soluciones fundamentales para una ecuación diferencial ordinaria de la forma $\dot{y}(t) = a(t)y(t)$, dichas propiedades nos serán de utilidad para mostrar el Principio del Mínimo de Pontryagin.

1.1.1. Propiedades de soluciones fundamentales para una ecuación diferencial ordinaria lineal

Consideremos el problema de valores iniciales siguiente

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t), \quad y(s) = y_0, \quad (1.1)$$

en donde a es una función continua en $[\alpha, \beta]$, el punto (\cdot) denota la derivada respecto del tiempo, $s \in (\alpha, \beta)$ y y_0 es la condición inicial.

Decimos que $\varphi : [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución fundamental para la ecuación (1.1) si se cumple que

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, s) = a(t)\varphi(t, s) \quad \text{y} \quad \varphi(s, s) = 1.$$

La siguiente propiedad sobre soluciones fundamentales, que podemos encontrar en [15], nos indica cómo se relaciona una solución fundamental con cualquier solución de la ecuación diferencial (1.1).

Proposición 1.1.1. Toda solución $y : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ de la ecuación diferencial (1.1) cumple lo siguiente para toda $t \in [\alpha, \beta]$:

$$y(t) = \varphi(t, s)y_0, \quad t \geq s.$$

La segunda propiedad de interés nos proporciona una forma alternativa de escribir la solución fundamental φ de la ecuación diferencial ordinaria (1.1).

Proposición 1.1.2. La siguiente identidad es válida para todo $t, s, \tau \in [\alpha, \beta]$,

$$\varphi(s, t) = \varphi(t, \tau)\varphi(\tau, s).$$

La prueba de la propiedad anterior consiste en notar que para τ y s fijos, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\varphi(t, \tau)\varphi(\tau, s)) &= \frac{d}{dt} (\varphi(t, \tau)) \varphi(\tau, s) \\ &= a(t)\varphi(t, \tau)\varphi(\tau, s), \end{aligned}$$

obteniendo así que $\varphi(t, \tau)\varphi(\tau, s)$ es una solución de la ecuación (1.1). Luego, dado que tenemos $\varphi(\tau, \tau) = 1$, entonces

$$\varphi(\tau, \tau)\varphi(\tau, s) = \varphi(\tau, s).$$

Por lo tanto $\varphi(s, t)$ y $\varphi(t, \tau)\varphi(\tau, s)$ son soluciones fundamentales de (1.1) y además coinciden en $t = \tau$. Usando el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias, ver por ejemplo Teorema 10.1 en [1], podemos concluir que ambas soluciones fundamentales deben de ser la misma, dando por cierta esta proposición.

Usando la propiedad anterior podemos ver que $\varphi(s, t)\varphi(t, s) = 1$, de donde, usando la invertibilidad de φ , se desprende la siguiente propiedad.

Proposición 1.1.3. Se cumple que

$$\varphi(t, s) = \varphi(s, t)^{-1}.$$

Finalmente, otra propiedad que nos será útil es la siguiente.

Proposición 1.1.4. La función $\varphi : [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, considerada como una función de $s \in (\alpha, \beta)$, satisface

$$\frac{d}{ds}\varphi(s, t) = -a(t)\varphi(t, s), \quad t \in [s, \beta].$$

La prueba de la proposición anterior se sigue de notar que, de la Proposición 1.1.3, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\varphi(t, s) &= \frac{d}{ds}\varphi^{-1}(s, t) \\ &= -\varphi^{-2}(s, t)\frac{d}{ds}\varphi(s, t) \\ &= -\varphi^{-2}(s, t)a(s)\varphi(s, t) \\ &= -a(s)\varphi^{-1}(s, t) \\ &= -a(s)\varphi(s, t). \end{aligned}$$

Estas propiedades las usaremos para mostrar el Principio del Mínimo de Pontryagin.

1.1.2. Deducción del Principio del Mínimo de Pontryagin

En esta sección daremos una revisión al Principio del Mínimo de Pontryagin válido para funciones continuas a trozos. Introducimos la notación que será de utilidad para este fin.

Una función $u : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada *continua a trozos*, si existe una partición finita e irreducible $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ del intervalo $[\alpha, \beta]$, con $\alpha = t_0$ y $\beta = t_n$, tal que para cualquier entero $j = 1, 2, \dots, n$, existe una función u_j continua en $[\alpha, \beta]$ de tal forma que la igualdad $u(t) = u_j(t)$ se cumpla para todo $t \in (t_{j-1}, t_j)$; en este caso se dice que u_j es una extensión continua de u en $[\alpha, \beta]$. Al conjunto de funciones continuas a trozos con dominio $[\alpha, \beta]$ y rango \mathbb{R} lo denotamos por $\mathcal{CC}[\alpha, \beta]$.

La discusión siguiente toma como guía parte del Capítulo 2 de [15].

Sea el funcional $J : \mathcal{C}[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $J[x] = g(x(\beta))$, con $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable dada. Consideraremos el problema de optimización siguiente:

$$J[x] = g(x(\beta)) \rightarrow \sup_{u \in \mathcal{U}_v}, \quad (1.2)$$

sujeto a

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(\alpha) = x_\alpha. \quad (1.3)$$

en donde $\mathcal{U}_\nu := \{u \in \mathcal{KC}[\alpha, \beta] : |u(t)| \leq \nu\}$, con $\nu > 0$ una constante dada. Suponemos que la función $f : \mathbb{R} \times [-\nu, \nu] \rightarrow \mathbb{R}$ es dada y continuamente diferenciable. El conjunto de funciones \mathcal{U}_ν es llamado *conjunto de controles admisibles* para el problema (1.2), la solución x de la ecuación diferencial (1.3) con u fija, se le llama trayectoria asociada al control u . La notación empleada en el problema (1.2)-(1.3) significa que estamos buscando controles $u \in \mathcal{U}_\nu$ tales que la solución de (1.3) asociada a este control maximice el funcional J . Una función $u \in \mathcal{U}_\nu$ que da solución al problema de optimización (1.2) y que satisface la ecuación diferencial ordinaria (1.3) es llamado *control óptimo*.

Supongamos que $\bar{u} \in \mathcal{U}_\nu$ es el control óptimo que resuelve el problema de optimización (1.2) y sea \bar{x} la solución de la ecuación diferencial ordinaria (1.3) asociada a \bar{u} .

Consideremos ahora un punto de continuidad s de \bar{u} , para el cual podemos tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de tal forma que \bar{u} siga siendo continua en el intervalo $(s - \varepsilon, s]$. Con lo anterior definamos la variación u^* como sigue:

$$u^*(t) = \begin{cases} \bar{u}(t), & \text{si } t \notin (s - \varepsilon, s], \\ \delta u, & \text{si } t \in (s - \varepsilon, s], \end{cases}$$

donde δu es una constante tal que u^* sigue siendo un control admisible, esto es, que u^* esté en \mathcal{U}_ν .

Denotemos por x^* la solución de la ecuación diferencial ordinaria (1.3) asociada a u^* . Notemos que $x^*(t) = \bar{x}(t)$ para $t \in [\alpha, s - \varepsilon]$, mientras que en el resto del intervalo dichas funciones no tienen por qué coincidir. El comportamiento de \bar{u} , \bar{x} , u^* y x^* lo podemos apreciar en la Figura 1.1.

Para analizar la diferencia de ambas soluciones definamos la variación

$$\delta x(t) := x^*(t) - \bar{x}(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Al analizar a δx en cada intervalo podemos ver que $\delta x(t) = 0$ para toda $t \in [\alpha, s - \varepsilon]$, pues como mencionamos arriba, \bar{x} coincide con x^* en dicho intervalo. Para analizar δx en el intervalo $(s - \varepsilon, s]$ podemos usar una expansión en series de Taylor, esto de la manera siguiente. Aplicando un desarrollo en series de Taylor para $\bar{x}(s)$ y para $x^*(s)$ podemos observar que

$$x^*(s - \varepsilon) = x^*(s) - \varepsilon \dot{x}^*(s) + o(\varepsilon) \quad \text{y} \quad \bar{x}(s - \varepsilon) = \bar{x}(s) - \varepsilon \dot{\bar{x}}(s) + o(\varepsilon),$$

donde $o(\varepsilon)$ representa una cantidad que depende de ε que tiende a cero más rápido que ε . Esto se puede escribir con símbolos como sigue

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$$

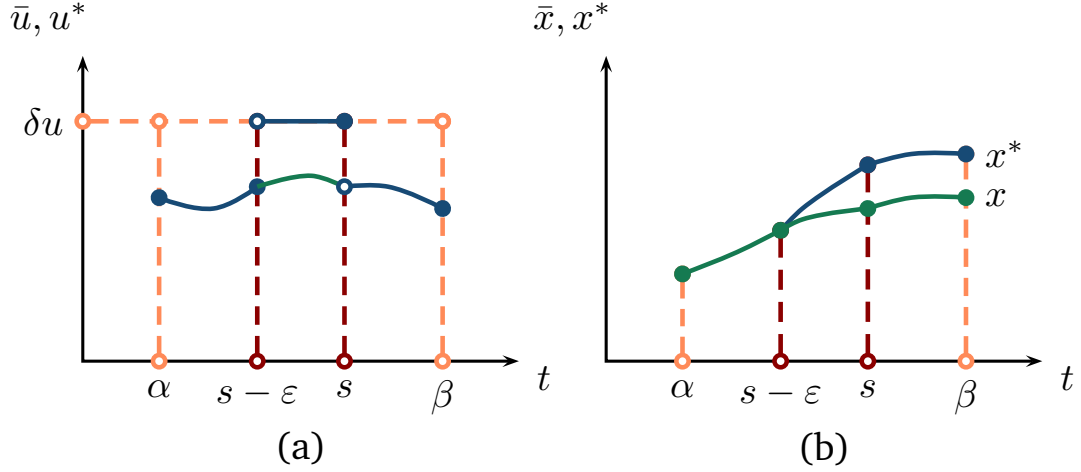


Figura 1.1: (a): control óptimo \bar{u} y la variación u^* . (b): soluciones \bar{x} y x^* de la ecuación diferencial ordinaria asociadas a \bar{u} y u^* , respectivamente. (Gráficas elaboradas con PSTricks)

Usando las ecuaciones anteriores, y ya que en $s - \varepsilon$ ambas soluciones coinciden, podemos establecer el siguiente hecho

$$x^*(s) - \varepsilon \dot{x}^*(s) + o(\varepsilon) = \bar{x}(s) - \varepsilon \dot{\bar{x}}(s) + o(\varepsilon),$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} \delta x(s) + o(\varepsilon) &= x^*(s) - \bar{x}(s) + o(\varepsilon) = \varepsilon [\dot{x}^*(s) - \dot{\bar{x}}(s)] + o(\varepsilon) \\ &= \varepsilon [f(x^*(s), u^*(s)) - f(\bar{x}(s), \bar{u}(s))] + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Tomando solo los extremos de la expresión anterior obtenemos la ecuación siguiente, la cual nos servirá como condición inicial para el siguiente intervalo,

$$\delta x(s) = \varepsilon [f(x^*(s), u^*(s)) - f(\bar{x}(s), \bar{u}(s))] + o(\varepsilon). \quad (1.4)$$

Para determinar $\delta x(t)$ en el intervalo $(s, \beta]$ procederemos como se muestra a continuación. Primero, notemos que δx es solución de la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{\delta x} = f(x^*, u^*) - f(\bar{x}, \bar{u}) = f(\bar{x} + \delta x, u^*) - f(\bar{x}, \bar{u}),$$

con condición inicial (1.4).

Al expandir el lado derecho de la ecuación diferencial anterior, podemos ver que se cumple la ecuación diferencial

$$\dot{\delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) \delta x + o(\delta x),$$

con condición inicial (1.4). La parte principal de esta ecuación diferencial es

$$\dot{\delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})\delta x, \quad (1.5)$$

con condición inicial (1.4). La ecuación (1.5) es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden de la forma $\dot{y} = ay$ con $y = \delta x$ y $a = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u})$, por lo que podemos hacer uso de las propiedades revisadas en el apartado anterior.

Usando en (1.5) la Proposición 1.1.1, tenemos lo siguiente

$$\delta x(t) = \varepsilon [f(x^*(s), u^*(s)) - f(\bar{x}(s), \bar{u}(s))] \varphi(t, s) + o(\varepsilon),$$

con $\varphi : [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ una solución fundamental de la ecuación (1.5). Al evaluar en el tiempo $t = \beta$ obtenemos

$$\delta x(\beta) = \varepsilon [f(x^*(s), u^*(s)) - f(\bar{x}(s), \bar{u}(s))] \varphi(\beta, s) + o(\varepsilon). \quad (1.6)$$

Ahora analizamos la diferencia $J[\bar{x} + \delta x] - J[\bar{x}]$, para lo cual usaremos una expansión en series de Taylor y la identidad (1.6). Tenemos que las siguientes igualdades son válidas

$$\begin{aligned} J[\bar{x} + \delta x] - J[\bar{x}] &= g(\bar{x}(\beta) + \delta x(\beta)) - g(\bar{x}(\beta)) \\ &= \left. \frac{d}{dx} g(x) \right|_{x=\bar{x}(\beta)} \delta x(\beta) + o(\delta x(\beta)), \end{aligned}$$

por lo que, sustituyendo (1.6) en esta expresión, obtenemos que

$$J[\bar{x} + \delta x] - J[\bar{x}] = \varepsilon \left. \frac{d}{dx} g(x) \right|_{x=\bar{x}(\beta)} [f(x^*(s), u^*(s)) - f(\bar{x}(s), \bar{u}(s))] \varphi(\beta, s) + o(\varepsilon).$$

Para finalizar esta parte, definamos

$$\psi(s) = - \left. \frac{d}{dx} g(x) \right|_{x=\bar{x}(\beta)} \varphi(\beta, s), \quad (1.7)$$

para la cual podemos notar que

$$\psi(\beta) = - \left. \frac{d}{dx} g(x) \right|_{x=\bar{x}(\beta)} \quad \text{y} \quad \frac{d}{ds} \psi(s) = - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) \psi(s).$$

La primera igualdad se sigue del hecho $\varphi(\beta, \beta) = 1$, este es válido pues φ es solución fundamental de la ecuación diferencial ordinaria (1.5). Para la segunda basta derivar la expresión en (1.7), usar la Proposición 1.1.4 para la solución fundamental φ y reescribir

usando (1.7) una vez más. Con esto tenemos que la expresión $\delta J[\bar{x}] = J[\bar{x} + \delta x] - J[\bar{x}]$ se puede escribir como

$$\delta J[\bar{x}] = \varepsilon \psi(s) [f(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) - f(x^*(s), u^*(s))] + o(\varepsilon).$$

Al término $\psi(s) [f(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) - f(x^*(s), u^*(s))]$ se le llama *variación de segunda especie* de J y se denota por $\delta_{\varepsilon, s} J[\bar{x}]$. Usando todo lo anterior enunciamos el resultado siguiente, el cual se puede encontrar como Teorema 2.3.1 en [15].

Teorema 1.1.1. Si s es un punto de continuidad del control óptimo $\bar{u} \in \mathcal{U}_v$ del problema de optimización (1.2) y \bar{x} una solución de la ecuación diferencial ordinaria (1.3) asociada a \bar{u} , entonces la diferencia $\delta J[\bar{x}] = J[\bar{x} + \delta x] - J[\bar{x}]$ puede escribirse en términos de la variación de segunda especie de J :

$$\delta_{\varepsilon, s} J[\bar{x}] = \psi(s) [f(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) - f(x^*(s), u^*(s))],$$

esto es

$$\delta J[\bar{x}] = \varepsilon \delta_{\varepsilon, s} J[\bar{x}] + o(\varepsilon),$$

en donde ψ es llamada *coordenada conjugada* y satisface la ecuación diferencial ordinaria en tiempo inverso

$$\frac{d}{ds} \psi(s) = - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) \psi(s), \quad \psi(\beta) = - \frac{d}{dx} g(x) \Big|_{x=\bar{x}(\beta)}. \quad (1.8)$$

Una vez establecido el teorema anterior, procedemos a enunciar el Principio del Mínimo de Pontryagin. Para ello observemos que, siguiendo la discusión anterior, si definimos la función $H(\psi, x, u) = \psi f(x, u)$, la cual se conoce como *función de Pontryagin*¹, se verifica lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \psi}(\psi, \bar{x}, \bar{u}) &= f(\bar{x}, \bar{u}) = \dot{\bar{x}}, \\ \frac{\partial H}{\partial x}(\psi, \bar{x}, \bar{u}) &= \psi \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) = -\dot{\psi}. \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial H}{\partial \psi}(\psi, \bar{x}, \bar{u}), \quad \dot{\psi} = - \frac{\partial H}{\partial x}(\psi, \bar{x}, \bar{u}).$$

¹Una nota que se puede encontrar en [15] es que Pontryagin, inicialmente, llamó a H función de Hamilton, subsecuentemente recibió el nombre de función de Pontryagin.

es un ejemplo de ecuaciones de Hamilton, las cuales son frecuentes en física, y su cumplimiento hace que H sea una forma Hamiltoniana, ver por ejemplo [11].

Si \bar{u} es solución del problema de optimización (1.2) y \bar{x} la solución de la ecuación diferencial ordinaria (1.3) asociada a \bar{u} , entonces $\delta J[\bar{x}] \leq 0$, además, como ε es arbitrariamente pequeño, lo podemos escoger de tal forma que el signo de $\delta J[\bar{x}]$ sea el mismo que el signo de $\delta_{\varepsilon,s} J[\bar{x}]$, es decir, una condición necesaria para que \bar{u} y \bar{x} satisfagan el problema de optimización (1.2) sujeto a la ecuación diferencial ordinaria (1.3), es que $\delta_{\varepsilon,s} J[\bar{x}] \leq 0$. La definición de H nos permite escribir a $\delta_{\varepsilon,s} J[\bar{x}]$ como sigue

$$\delta_{\varepsilon,s} J[\bar{x}] = H(\psi(s), \bar{x}(s), \bar{u}(s)) - H(\psi(s), x^*(s), u^*(s)),$$

lo cual permite escribir la condición $\delta_{\varepsilon,s} J[\bar{x}] \leq 0$, discutida arriba, en términos de la función de Pontryagin H , esto de la siguiente manera:

$$H(\psi(s), \bar{x}(s), \bar{u}(s)) \leq H(\psi(s), x^*(s), u^*(s)),$$

es decir, \bar{u}, \bar{x} deben minimizar a H en todo punto de continuidad de \bar{u} , esto último es el Principio del Mínimo de Pontryagin, el cual formulamos a continuación.

Teorema 1.1.2. [Principio del Mínimo de Pontryagin.] Supongamos que \bar{u} es un control óptimo que resuelve el problema de optimización (1.2) y que \bar{x} es la solución de la ecuación diferencial ordinaria (1.3) asociada a \bar{u} . Supongamos además que ψ es una solución del problema en tiempo inverso dado en (1.8). Entonces la función de Pontryagin $H(\psi, x, u) = \psi f(x, u)$ alcanza su mínimo en \bar{u} y \bar{x} .

El Teorema 1.1.2 nos dice, en palabras más sencillas, que para resolver el problema de optimización (1.2) sujeto a la ecuación diferencial ordinaria (1.3), es necesario minimizar la función de Pontryagin H .

Sección 1.2

Principio del Mínimo de Pontryagin aplicado a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

En esta sección resolvemos, aplicando el Principio del Mínimo de Pontryagin, un problema de optimización sujeto a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. También obtenemos algunas propiedades de la solución obtenida de dicho problema de optimización. Este problema, así como los resultados y propiedades obtenidas, serán de utilidad en el Capítulo 3.

Consideraremos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\dot{x}(t) + c\lambda x(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, \tau], \quad (1.9)$$

donde $u \in \mathcal{U}_\nu$. Supondremos que $0 < \nu < c\lambda$.

1.2.1. Problema de optimización

En este apartado consideramos el problema de encontrar controles $u \in \mathcal{U}_\nu$ de tal forma que la solución x de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) asociada a u en cuestión, cumpla que $|x(\tau)|$ tome el valor más grande posible en un tiempo finito $t = \tau > 0$. La finalidad de considerar tal interrogante es que conociendo tales soluciones de la ecuación diferencial ordinaria (1.9), las demás soluciones de dicha ecuación, considerando controles en \mathcal{U}_ν , no crecerán tanto en el tiempo $t = \tau$, lo cual nos permitirá conocer mejor el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) para todo $t \in [0, \tau]$.

La cuestión anterior la podemos abordar mediante el siguiente problema de optimización

$$J[x] = x(\tau)^2 \rightarrow \sup_{u \in \mathcal{U}_\nu}, \quad (1.10)$$

sujeto a la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x}(t) + c\lambda x(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, \tau],$$

con controles en \mathcal{U}_ν .

Para obtener el control óptimo que resuelve el problema (1.10)-(1.9), usaremos, como ya dijimos al inicio de esta sección, el Principio del Mínimo de Pontryagin. Al despejar el término \dot{x} de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) resulta que $\dot{x} = f(x, u)$, con la función f dada por $f(x, u) = -c\lambda x + u$, con lo cual, la función de Pontryagin H para este problema de optimización es $H(x, \psi, u) = \psi f(x, u) = \psi (-c\lambda x + u)$, en donde ψ es solución del problema en tiempo inverso siguiente:

$$\dot{\psi}(t) = c\lambda\psi(t), \quad \psi(\tau) = -2x(\tau), \quad t \in [0, \tau]. \quad (1.11)$$

Siguiendo el Principio del Mínimo de Pontryagin, para encontrar un control óptimo que resuelva el problema problema de optimización (1.10)-(1.9), debemos determinar cuando la función de Pontryagin H alcanza un mínimo respecto a u y su solución asociada x de la ecuación diferencial ordinaria (1.9).

La solución general de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden (1.11) es de la forma $\psi(s) = C_0 e^{c\lambda s}$, donde la constante C_0 depende de la condición final $\psi(\tau) = -2x(\tau)$.

Se observa que esta solución no cambia de signo y que su signo depende únicamente del signo de la condición final $x(\tau)$.

Supongamos que $x(\tau) > 0$, entonces tenemos que ψ es negativa, en este caso resulta que $-c\lambda\psi x \geq 0$ y el valor mínimo de H se alcanza cuando u es la función constante idénticamente igual a ν . Por otro lado, si suponemos que $x(\tau)$ es negativa, entonces la solución ψ del sistema (1.11) será positiva y $-c\lambda\psi x \geq 0$, con lo cual, el mínimo de H se alcanzará cuando u sea la función constante idénticamente igual a $-\nu$.

De lo expuesto antes, tenemos dos casos posibles, cuando el control óptimo considerado es $u^+(t) = \nu$ para todo $t \geq 0$ y cuando el control óptimo considerado es $u^-(t) = -\nu$ para todo $t \geq 0$. Para cada caso tenemos lo siguiente

Caso 1. Para el control óptimo $u^+(t) = \nu$ para todo $t \geq 0$, tenemos la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} + c\lambda x = \nu, \quad x(0) = 0,$$

cuya solución es

$$x^+(t) = \frac{\nu}{c\lambda} (1 - e^{-c\lambda t}), \quad t \geq 0.$$

Caso 2. Cuando el control óptimo es $u^-(t) = -\nu$ para todo $t \geq 0$, la ecuación diferencial ordinaria es

$$\dot{x} + c\lambda x = -\nu, \quad x(0) = 0,$$

cuya solución es

$$x^-(t) = -\frac{\nu}{c\lambda} (1 - e^{-c\lambda t}), \quad t \geq 0.$$

A los controles óptimos u^+ y u^- los llamaremos *perturbaciones extremas* o *peores perturbaciones*, y a las soluciones x^+ y x^- de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) las llamaremos *soluciones extremas* de la ecuación diferencial ordinaria (1.9). Lo anterior se justifica en el siguiente apartado.

1.2.2. Solución x para $u \in \mathcal{U}_\nu$ arbitrario

En este apartado detallamos cómo se relacionan las soluciones extremas x^+ y x^- con las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) al considerar $u \in \mathcal{U}_\nu$ arbitrario.

La solución x de la ecuación diferencial (1.9) asociada a $u \in \mathcal{U}_\nu$ tiene la forma

$$x(t) = \int_0^t e^{-c\lambda s} u(t-s) ds, \quad t \geq 0. \quad (1.12)$$

Dada la definición de \mathcal{U}_ν , tenemos la restricción $|u(t)| \leq \nu$, lo que nos permite notar lo siguiente referente al valor absoluto de $x(t)$:

$$|x(t)| = \left| \int_0^t e^{-c\lambda s} u(t-s) ds \right| \leq \int_0^t \nu e^{-c\lambda s} ds,$$

con lo que obtenemos las siguientes desigualdades, las cuales nos permiten acotar la solución x de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) asociada a u ,

$$-\frac{\nu}{c\lambda} (1 - e^{-c\lambda t}) \leq \int_0^t e^{-c\lambda s} u(t-s) ds \leq \frac{\nu}{c\lambda} (1 - e^{-c\lambda t}). \quad (1.13)$$

Los extremos izquierdo y derecho de la desigualdad (1.13) son, respectivamente, las soluciones extremas x^- y x^+ de la ecuación diferencial ordinaria (1.9). De esto podemos concluir que toda solución x de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) está acotada por las soluciones extremas x^- y x^+ , esto es,

$$x^-(t) = -\frac{\nu}{c\lambda} (1 - e^{-c\lambda t}) \leq x(t) \leq \frac{\nu}{c\lambda} (1 - e^{-c\lambda t}) = x^+(t), \quad t \geq 0.$$

La desigualdad anterior nos permite definir el siguiente conjunto

$$D(\tau) := \{(t, x(t)) \in \mathbb{R}^2 : x \text{ es solución de (1.9) asociada a } u \in \mathcal{U}_\nu, t \in [0, \tau]\}, \quad (1.14)$$

el cual se conoce como tubo de alcanzabilidad de (1.9), ver [3]. Se puede observar que la frontera del conjunto $D(\tau)$ se describe por la funciones x^- y x^+ .

Ilustramos numéricamente lo anterior con un ejemplo.

Ejemplo 1.1

Consideremos las funciones siguientes:

$$\begin{aligned} u(t) &= \nu \sin(bt), \\ v(t) &= \nu \cos(bt) \end{aligned}$$

para alguna $b > 0$. Consideremos también la función tipo dientes de sierra:

$$w(t) = 4\nu \min \left\{ \frac{t}{2\vartheta} - \left\lfloor \frac{t}{2\vartheta} \right\rfloor, \left\lceil \frac{t}{2\vartheta} \right\rceil - \frac{t}{2\vartheta} \right\} - \nu, \quad \vartheta > 0.$$

Las perturbaciones u y v son continuas a trozos, de hecho continuas, y están acotadas por ν , así que $u, v \in \mathcal{U}_\nu$.

La perturbación w se puede definir a trozos de la manera siguiente:

$$w(t) = (-1)^n \left(\frac{2\nu t}{\vartheta} - (2n+1)\nu \right), \quad t \in [n\vartheta, (n+1)\vartheta],$$

donde $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. De la expresión anterior para $w(t)$ podemos observar que $|w(t)| \leq \nu$ para todo $t \in [n\vartheta, (n+1)\vartheta]$ y toda $n \in \mathbb{N}_0$, por lo cual, $w \in \mathcal{U}_\nu$. En la Figura 1.2 mostramos cómo se ve la gráfica de w cuando $\nu = \vartheta = 1$.

Denotemos por x_u , x_v y x_w las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) asociadas a u , v y w , respectivamente. Para x_w podemos resolver la ecuación (1.9) en cada intervalo $[n\vartheta, (n+1)\vartheta]$ y luego “pegar” los extremos de la solución en cada intervalo, como se describe en [8, p. 12].

Las soluciones obtenidas son las siguientes:

$$x_u(t) = \nu \frac{b [e^{-c\lambda t} - \cos(bt)] - c\lambda \sin(bt)}{c^2\lambda^2 + b^2},$$

$$x_v(t) = \nu \frac{-c\lambda [e^{-c\lambda t} + \cos(bt)] + b \sin(bt)}{c^2\lambda^2 + b^2},$$

mientras que x_w está definida para $n\vartheta \leq t \leq (n+1)\vartheta$, $n \in \mathbb{N}_0$, como sigue:

$$x_w(t) = \frac{\nu}{c^2\lambda^2\vartheta} \left\{ (-1)^{n+1} [2(1 - c\lambda t) + (2n+1)c\lambda\vartheta] \right. \\ \left. + \left(c\lambda\vartheta - 2 + 4 \sum_{j=0}^n (-1)^j e^{jc\lambda\vartheta} \right) e^{-c\lambda t} \right\}.$$

En la Figura 1.3 fijamos los parámetros $\nu = c\lambda = b = \vartheta = 1$, $\tau = 5$, en dicha figura podemos observar el comportamiento de las soluciones x^- , x^+ , x_u , x_v y x_w . También podemos observar que las soluciones obtenidas no se salen del tubo de alcanzabilidad $D(5)$.

1.2.3. Algunas propiedades de $D(\tau)$

En este apartado mostramos algunas propiedades del tubo de alcanzabilidad $D(\tau)$ de la ecuación diferencial ordinaria (1.9).

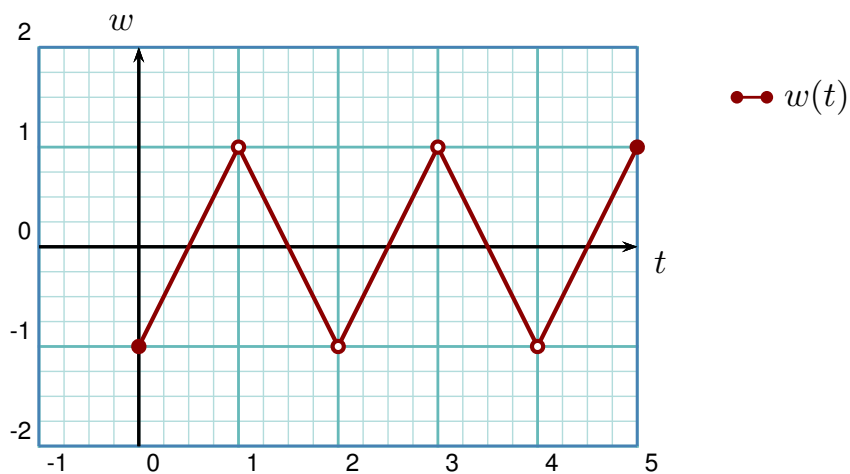


Figura 1.2: Gráfica de una perturbación tipo dientes de sierra w , en el intervalo $[0, 5]$. (Gráfica elaborada con PSTricks)

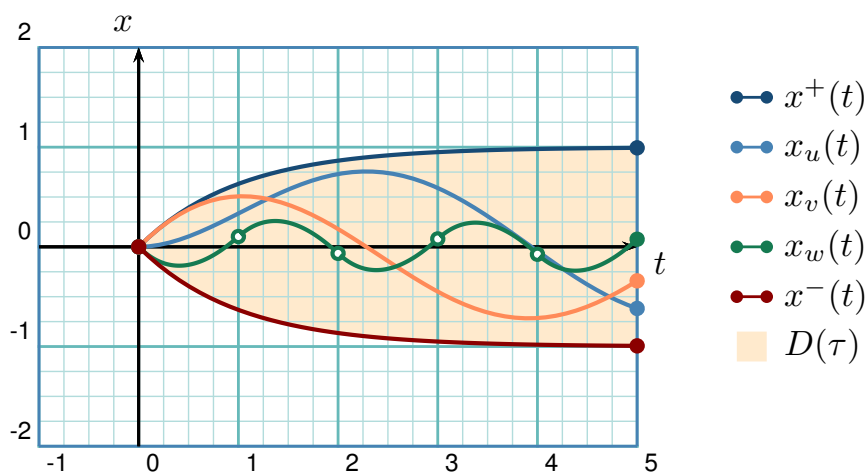


Figura 1.3: Comportamiento de algunas soluciones de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) dentro del tubo de alcanzabilidad $D(\tau)$ con $\tau = 5$. (Gráfica elaborada con PSTricks)

Comenzamos analizando que todo punto (s, z) con $0 \leq s \leq \tau$ y $x^-(s) \leq z \leq x^+(s)$ está en $D(\tau)$. Para esto, primero encontramos $u \in \mathcal{U}_\nu$ tal que la solución x de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) asociada a u satisfaga $x(s) = z$, después de esto, bastará mostrar que cualquier valor $z \in [x^-(s), x^+(s)]$ se puede ver como combinación lineal convexa de los valores $x^-(s)$ y $x^+(s)$.

Para la primera parte supondremos que $u(t) = \vartheta$ para $t \geq 0$ y ϑ una constante por determinar, con esto, la solución de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) asociada a u se escribe como $x(t) = \vartheta (1 - e^{-c\lambda t}) / (c\lambda)$ para todo tiempo $t \geq 0$ y, por tanto, para cualquier instante $s \in [0, \tau]$ fijo, se tiene la igualdad $x(s) = \vartheta (1 - e^{-c\lambda s}) / (c\lambda)$, de donde obtenemos que si $x(s) = z$ para algún valor $z \in [x^-(s), x^+(s)]$, entonces el valor de la constante ϑ es

$$\vartheta = \frac{c\lambda}{(1 - e^{-c\lambda s})} z.$$

Como $|z| \leq \nu (1 - e^{-c\lambda s}) / (c\lambda)$, se verifica que $\vartheta \leq \nu$ y por lo tanto la función u , dada por $u(t) = \frac{c\lambda}{(1 - e^{-c\lambda s})} z$ para toda $t \geq 0$, pertenece al conjunto \mathcal{U}_ν .

Ya tenemos la parte de que existe ν con $|\vartheta| \leq \nu$ tal que si $u(t) = \vartheta$ para todo $t \geq 0$, entonces la solución x de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) asociada a dicha función constante $u = \nu$, cumple que $x(s) = z$. Resta probar que todo $z \in [x^-(s), x^+(s)]$ se puede ver como una combinación lineal convexa de $x^-(s)$ y $x^+(s)$.

Supongamos que $z = \alpha x^-(s) + (1 - \alpha)x^+(s)$, esto equivale a

$$\begin{aligned} z &= -\alpha \frac{\nu}{c\lambda} (1 - e^{-c\lambda s}) + (1 - \alpha) \frac{\nu}{c\lambda} (1 - e^{-c\lambda s}) \\ &= (1 - 2\alpha) \frac{\nu}{c\lambda} (1 - e^{-c\lambda s}), \end{aligned}$$

de donde, al despejar α obtenemos que

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c\lambda}{\nu(1 - e^{-c\lambda s})} z \right).$$

Usando que $|z| \leq \nu (1 - e^{-c\lambda s}) / (c\lambda)$ se verifica que

$$|\alpha| \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c\lambda}{\nu(1 + e^{-c\lambda s})} z \right) \leq 1,$$

además

$$\left| \frac{c\lambda}{\nu(1 + e^{-c\lambda s})} z \right| \leq 1,$$

por lo que $\alpha > 0$. Con lo anterior, tenemos que $\alpha \in (0, 1)$. Se sigue el siguiente resultado.

Proposición 1.2.1. Para todo $s \in [0, \tau]$ y todo $z \in [x^-(s), x^+(s)]$ existe $\vartheta \in [-\nu, \nu]$ tal que si $u(t) = \vartheta$ para toda $t \geq 0$, la solución x de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) asociada a u satisface $x(s) = z$.

Lo anterior significa que el conjunto $D(\tau)$ no tiene agujeros, es decir, el tubo de alcanzabilidad $D(\tau)$ es conexo.

A continuación mostramos que el tubo de alcanzabilidad $D(\tau)$ es un conjunto acotado, cerrado y simétrico respecto al eje t .

Para probar que el tubo de alcanzabilidad $D(\tau)$ es cerrado y acotado usamos el hecho de que \mathcal{U}_ν es compacto bajo la norma $\|u\| = \max_{t \geq 0} |u(t)|$ y luego definimos un funcional continuo de tal forma que el conjunto $D(\tau)$ sea la imagen de \mathcal{U}_ν bajo dicho funcional, así tendremos asegurada la compacidad de $D(\tau)$.

Definamos el funcional $J : \mathcal{U}_\nu \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$J[u](t) := \int_0^t e^{-c\lambda s} u(t-s) ds.$$

Para u, w funciones en \mathcal{U}_ν tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} |J[u](t) - J[w](t)| &= \left| \int_0^t e^{-c\lambda s} (u(t-s) - w(t-s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^t e^{-c\lambda s} |u(t-s) - w(t-s)| ds \\ &\leq \int_0^t e^{-c\lambda s} \|u - w\| ds \\ &= \frac{\|u - w\|}{c\lambda} (1 - e^{-c\lambda t}) \\ &\leq \frac{\|u - w\|}{c\lambda}. \end{aligned}$$

De las desigualdades anteriores podemos notar que si $\|u - w\| < c\lambda\varepsilon$ entonces

$$|J[u](t) - J[w](t)| < \varepsilon,$$

lo cual nos indica que J es continuo en \mathcal{U}_ν .

Además, para este funcional podemos notar lo siguiente para todo $0 \leq t \leq \tau$:

$$J[\mathcal{U}_\nu](t) := \bigcup_{u \in \mathcal{U}_\nu} J[u](t) = [x^-(t), x^+(t)]$$

es compacto, y que

$$\begin{aligned} J[\mathcal{U}_\nu]([0, \tau]) &:= \bigcup_{t \in [0, \tau]} J[\mathcal{U}_\nu](t) \\ &= \bigcup_{t \in [0, \tau]} [x^-(t), x^+(t)] \\ &= [x^-(\tau), x^+(\tau)]. \end{aligned}$$

Para $t_1 < t_2$ es claro que $[x^-(t_1), x^+(t_1)] \subset [x^-(t_2), x^+(t_2)]$, por lo que $J[\mathcal{U}_\nu]([0, \tau])$ es la unión acotada de intervalos compactos, crecientes y anidados, por lo tanto es compacta.

Así, al definir el siguiente funcional:

$$I[u](t) := (t, J[u](t)),$$

tenemos que este es continuo pues sus entradas son continuas y que, además $I[\mathcal{U}_\nu]([0, \tau])$ es compacto pues tanto \mathcal{U}_ν como $[0, \tau]$ son conjuntos compactos. Luego, como

$$\begin{aligned} I[\mathcal{U}_\nu]([0, \tau]) &:= \bigcup_{t \in [0, \tau]} I[\mathcal{U}_\nu](t) \\ &= \bigcup_{t \in [0, \tau]} \{t\} \times [x^-(t), x^+(t)], \end{aligned}$$

entonces $I[\mathcal{U}_\nu]([0, \tau]) = D(\tau)$, por lo tanto el tubo de alcanzabilidad $D(\tau)$ es un conjunto compacto.

Probamos ahora que $D(\tau)$ es simétrico respecto al eje t en el sentido de que al considerar una función $u \in \mathcal{U}_\nu$, al obtener las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) asociadas a u y $-u$, una solución es el inverso aditivo de la otra.

Lo anterior puede deducirse si consideramos lo siguiente.

Por un lado, para $u \in \mathcal{U}_\nu$ la solución x de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) asociada a u tiene la forma siguiente:

$$x(t) = \int_0^t e^{-c\lambda s} u(t-s) ds.$$

Por otro lado, al considerar ahora a $u^* = -u$, tenemos que la solución x^* de la ecuación diferencial (1.9) asociada a u^* satisface

$$x^*(t) = \int_0^t e^{-c\lambda s} u^*(t-s) ds = - \int_0^t e^{-c\lambda s} u(t-s) ds = -x(t).$$

De lo cual se obtiene que $x^*(t) = -x(t)$ para toda $t \geq 0$, en particular para $t \in [0, \tau]$. Esto muestra que el tubo de alcanzabilidad $D(\tau)$ es un conjunto simétrico respecto al eje t .

Lo discutido en esta sección, en particular el concepto del tubo de alcanzabilidad $D(\tau)$ de la ecuación diferencial (1.9) y las propiedades expuestas sobre las funciones x^- y x^+ , se emplearán en el Capítulo 3.

Ecuación de calor

En este capítulo detallamos el proceso deductivo para obtener la ecuación de calor desde el punto de vista físico. Además, analizamos con detalle el caso particular de la ecuación de calor en coordenadas polares y esféricas, luego aplicamos el método de separación de variables de Fourier-Bessel para obtener soluciones vía series de Fourier-Bessel.

Sección 2.1

Deducción en n dimensiones

Abordamos primero el caso general y luego hablamos sobre los casos de interés, $n = 2, 3$. Partiremos del hecho físico de la ley de calor de Fourier.

Sea Γ una región en \mathbb{R}^n en donde el calor está fluyendo. Sea $y = y(\mathbf{x}, t)$ la temperatura en el punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ en Γ al tiempo $t \geq 0$. También asumimos que Γ es una región homogénea¹ con densidad de masa constante ρ y valor de calor específico c , ver [16, 10].

Para este modelo hacemos dos suposiciones: (i) que el flujo de calor se lleva a cabo de zonas de alta concentración de calor a zonas de baja concentración de calor (ver Figura 2.1); (ii) que entre más pronunciado sea el gradiente (o derivada) mayor será el flujo de calor.

Consideremos una bola arbitraria $B := \{\mathbf{x} \in \Gamma : \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \leq \kappa\}$, donde (\cdot) denota el producto punto, con $\kappa > 0$ arbitrario pero fijo tal que B esté contenida en Γ . Al considerar un elemento pequeño de volumen, el cual denotamos por $dV = dx_1 dx_2 \dots dx_n$, la cantidad

¹Es decir, para cualesquier dos puntos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Gamma$, la densidad de masa en dichos puntos es la misma.

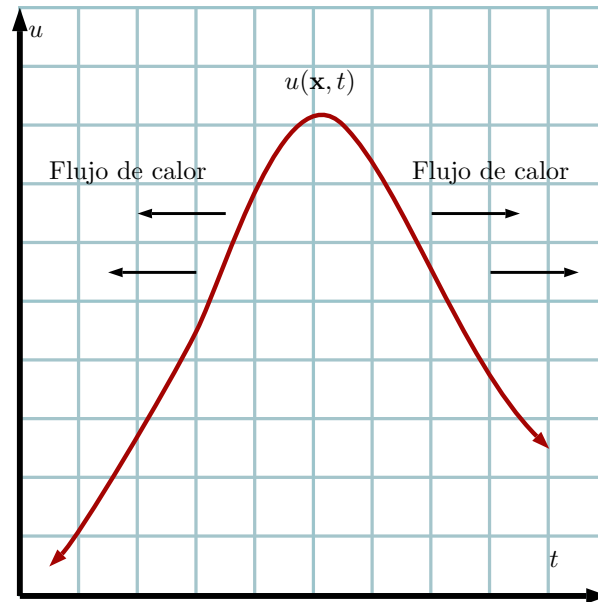


Figura 2.1: El movimiento difusivo va de grandes concentraciones a bajas concentraciones. (Gráfica elaborada con PSTricks)

de calor en dV es el producto del calor específico, la cantidad de masa y la temperatura, esto es $c\rho u dV$. Con esto, la cantidad total de calor en B está dada por la integral

$$\text{Cantidad total de calor en } B = \int_B c\rho u dV.$$

Asumiremos que las fuentes externas² de calor están dadas por una función $f = f(\mathbf{x}, t)$ para $\mathbf{x} \in \Gamma$ y $t \geq 0$, la cual se mide en energía por unidad de volumen por unidad de tiempo, y $f dV$ es la tasa con la cual se genera calor en dV . Así, la cantidad de calor que se genera en B es

$$\text{Cantidad de calor generado en } B = \int_B f dV.$$

El vector de flujo de calor lo denotamos por $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ y está definido para $\mathbf{x} \in \Gamma$ y para tiempo $t \geq 0$. Este vector apunta en la dirección hacia donde fluye el calor en el punto \mathbf{x} al tiempo t . La cantidad

$$\phi \cdot \mathbf{n} dA,$$

²Por fuentes externas nos referimos a perturbaciones causadas por agentes externos que provocan variaciones de calor y que, en muchos casos, no podemos controlar, por ejemplo la temperatura en una región geográfica predeterminada.

nos indica el flujo de calor a través de un elemento de superficie dA , la cual es orientada por un vector exterior normal unitario \mathbf{n} . Con esto, el flujo de calor a través de la frontera de B , a la cual denotaremos por ∂B , está dado por

$$\int_{\partial B} \phi \cdot \mathbf{n} dA.$$

La ley de conservación de energía, en este caso, nos indica que la tasa de cambio de la cantidad de calor total en B coincide con la cantidad de calor que fluye hacia B a través de su frontera más la cantidad de calor que se genera en B debido a las fuentes externas. Esto lo podemos expresar como sigue

$$\frac{d}{dt} \int_B c\rho u dV = - \int_{\partial B} \phi \cdot \mathbf{n} dA + \int_B f dV.$$

Para que la integral en medio de la expresión anterior se pueda expresar como una integral de volumen (en n dimensiones), en lugar de una integral de flujo, usaremos el teorema de la divergencia, el cual nos indica que si el campo vectorial ϕ es continuamente diferenciable en B y continuo en $B \cup \partial B$, entonces

$$\int_B \nabla \cdot \phi dV = \int_{\partial B} \phi \cdot \mathbf{n} dA,$$

con lo cual, la tasa de cambio de la cantidad de calor total en B se puede expresar como

$$\frac{d}{dt} \int_B c\rho u dV = - \int_B \nabla \cdot \phi dV + \int_B f dV.$$

La expresión anterior la podemos reescribir de la siguiente manera

$$\int_B \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \phi - f \right) dV.$$

Debido a que la ley de conservación de energía se debe cumplir para cualquier bola B dentro de Γ , obtenemos la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \phi = f, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) es la forma local de la ley de conservación de calor en n dimensiones. Usando que el flujo ϕ se puede relacionar con y mediante la Ley de calor de Fourier, la cual dice que el flujo es proporcional al gradiente de la temperatura, esto es

$$\phi = -K \nabla y,$$

donde K es la constante de proporcionalidad y representa la conductividad de calor, la cual está determinada por el medio. Reemplazando esta expresión en la ecuación (2.1), obtenemos

$$c\rho \frac{\partial y}{\partial t} - K\Delta y = f,$$

en donde

$$\Delta y = \nabla^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2}$$

indica el *Laplaciano* de y respecto las variables espaciales.

Al introducir la notación $k = K/(c\rho)$ y $h(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)/(c\rho)$ para $\mathbf{x} \in \Gamma$ y $t \geq 0$, donde la constante k es llamada la difusividad térmica del medio, obtenemos la *ecuación de calor* clásica en n dimensiones

$$\frac{\partial y(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - K\Delta y(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

Sección 2.2

Ecuación de calor en dos dimensiones

2.2.1. Ecuación de calor en coordenadas polares

Como primer caso de interés, suponemos $n = 2$. En este caso tenemos coordenadas cartesianas $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y una región plana $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. El Laplaciano de la solución y de la ecuación de calor (2.2), en el punto \mathbf{x} al tiempo $t \geq 0$, adopta la forma

$$\Delta y(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 y(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2^2}.$$

Usando al expresión anterior para el Laplaciano de la solución y tenemos que la ecuación de calor en dos dimensiones adopta la forma siguiente:

$$\frac{\partial y(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 y(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2^2} \right) + h(\mathbf{x}, t). \quad (2.3)$$

Para escribir la ecuación (2.3) en coordenadas polares, basta expresar el Laplaciano de y en coordenadas polares. Esto puede hacerse usando el cambio $x_1 = r \cos \theta$ y $x_2 = r \sin \theta$ donde $\theta \in [0, 2\pi]$ y $r \in [0, a]$ con $a > 0$, ver Figura 2.2.

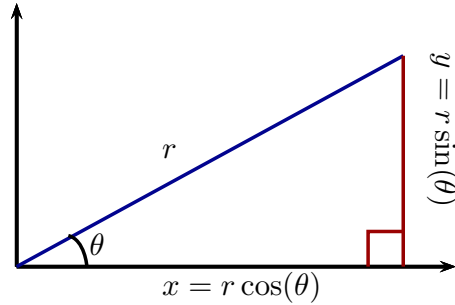


Figura 2.2: Cambio de coordenadas cartesianas a polares. (Gráfica elaborada con PS-Tricks)

Primero, observemos que las primeras derivadas de y respecto de r y de θ son

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial r} &= \cos \theta \frac{\partial y}{\partial x_1} + \sin \theta \frac{\partial y}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \frac{\partial y}{\partial x_1} + r \cos \theta \frac{\partial y}{\partial x_2},\end{aligned}$$

con lo cual tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} &= \cos \theta \left(\cos \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \sin \theta \left(\cos \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} + \sin \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} &= -r \cos \theta \frac{\partial y}{\partial x_1} - r \sin \theta \frac{\partial y}{\partial x_2} - r \sin \theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + r \cos \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \\ &\quad + r \cos \theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} + r \cos \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \right) \\ &= -r \cos \theta \frac{\partial y}{\partial x_1} - r \sin \theta \frac{\partial y}{\partial x_2} + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - 2r^2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &\quad + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \\ &= -r \frac{\partial y}{\partial r} + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - 2r^2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}.\end{aligned}$$

Usando las dos expresiones anteriores para $\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$ y para $\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \\ &\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}. \end{aligned}$$

De los extremos de las igualdades anteriores obtenemos que la expresión del Laplaciano en coordenadas polares es

$$\Delta y = \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}.$$

Por lo tanto, la ecuación de calor en coordenadas polares es

$$\frac{\partial y(r, t)}{\partial t} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y(r, t)}{\partial \theta^2} \right] + u(r, \theta, t), \quad (r, t) \in \Omega, \quad (2.4)$$

donde $u(r, \theta, t) = h(r \cos(\theta), r \sin(\theta), t)$ y $\Omega := [0, a] \times [0, \infty)$.

Cuando se tiene simetría radial, es decir, que la distribución del calor respecto a la coordenada angular es constante para cada tiempo $t \geq 0$, en la ecuación (2.4) no aparecen los términos correspondientes a la derivada parcial de la solución y respecto a la variable angular, pues su derivada es nula. En este caso obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial y(r, t)}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right) + u(r, t), \quad (r, t) \in \Omega. \quad (2.5)$$

2.2.2. Soluciones de la ecuación de calor con simetría radial

Consideramos la ecuación de calor en dos dimensiones con soluciones radialmente simétricas sin fuentes de calor externas en una placa circular aislada de radio $a \in [0, 1]$,

$$\frac{\partial y(r, t)}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right), \quad (r, t) \in \Omega, \quad (2.6)$$

con condición inicial $y(r, 0) = f(r)$ para toda $r \in [0, a]$ y con condición de contorno nula, esto es $y(a, t) = 0$ para toda $t \geq 0$. Buscamos soluciones acotadas cuando $r \rightarrow 0^+$.

Aplicamos el método de separación de variables de Fourier el cual, como indica [6], consta en suponer que la solución y de la ecuación de calor (2.6) es el producto de dos funciones, una que solo depende de r y otra que depende únicamente de t , esto es, $y(r, t) = \varphi(r)T(t)$ para toda $(r, t) \in \Omega$. Suponiendo esta forma para y , la sustituimos en la ecuación de calor (2.6) y obtenemos

$$\varphi(r)\dot{T}(t) = \frac{k}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi(r)}{dr} T(t) \right),$$

de donde, al separar las variables resulta

$$\frac{\dot{T}(t)}{kT(t)} = \frac{1}{r\varphi(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right).$$

De esto último, podemos observar que tenemos dos funciones, de variables distintas, que tienen siempre el mismo valor. Se sigue que ambas funciones son constantes, digamos que el valor de la constante es $-\lambda$, así, esto lo podemos expresar como

$$\frac{\dot{T}(t)}{kT(t)} = \frac{1}{r\varphi(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\lambda.$$

De la expresión anterior obtenemos el siguiente par de ecuaciones, la primera para T y la segunda para φ :

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) + \lambda k T(t) &= 0, & t \geq 0, \\ \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi(r)}{dr} \right) + \lambda r \varphi(r) &= 0, & 0 \leq r \leq a. \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos el siguiente problema para φ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi(r)}{dr} \right) + \lambda r \varphi(r) &= 0, & 0 \leq r \leq a, \\ \varphi(a) &= 0, \\ |\varphi(0)| &\leq C, \end{aligned}$$

donde C es alguna constante positiva.

Para satisfacer la condición $y(a, t) = 0$ para toda $t \geq 0$, basta pedir que $\varphi(a) = 0$. También pediremos que $|\varphi(0)| < C$, lo cual equivale a que $|y(r, 0)|$ esté acotado.

Al multiplicar por r la ecuación diferencial ordinaria anterior para φ , obtenemos la ecuación diferencial ordinaria siguiente

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi(r)}{dr} \right) + \lambda r^2 \varphi(r) = 0,$$

de donde, al desarrollar, obtenemos la ecuación diferencial ordinaria de Bessel de orden cero:

$$r^2 \frac{d^2 \varphi(r)}{dr^2} + r \frac{d\varphi(r)}{dr} + \lambda r^2 \varphi(r) = 0.$$

De acuerdo al Apéndice A, la ecuación diferencial ordinaria anterior tiene como solución la función φ dada por $\varphi(r) = J_0(\sqrt{\lambda}r)$ donde J_0 es conocida como la función de Bessel (cilíndrica) de primera especie de orden cero, la cual se define en (A.2) y cumple que es acotada cuando $r = 0$.

Para que se cumpla que $\varphi(a) = 0$, se debe se debe satisfacer la condición $J_0(\sqrt{\lambda}a) = 0$, lo que nos lleva a pedir que

$$\sqrt{\lambda_n}a = z_n,$$

donde $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, son los ceros positivos de J_0 los cuales se definen en el apartado A.1.2 en el Apéndice A

Por otro lado, con λ_n como antes, para $n \in \mathbb{N}$, tenemos la ecuación diferencial ordinaria siguiente:

$$\dot{T}_n(t) + \lambda_n k T_n(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad T_n(0) = 1,$$

cuya solución es $T_n(t) = e^{-\lambda_n k t}$.

Con lo anterior, y suponiendo que f es cuadrado integrable, consultar por ejemplo [6], tenemos que la solución y se puede representar mediante la siguiente serie de Fourier, la cual denominaremos serie de Fourier-Bessel debido a que involucra funciones de Bessel:

$$y(r, t) = \sum_{n \geq 1} c_n J_0(\sqrt{\lambda_n}r) e^{-\lambda_n k t}, \quad (r, t) \in \Omega,$$

donde $\{c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, son los coeficientes de Fourier-Bessel de f respecto J_0 y $\sqrt{\lambda_n}$, y están dados por

$$c_n = 2 \left[J_0(\sqrt{\lambda_n}r) \right]^{-1} \int_0^1 r f(r) J_0(\sqrt{\lambda_n}r) dr.$$

Sección 2.3

Ecuación de calor en tres dimensiones

Similarmente a lo hecho en la sección anterior, detallamos la forma analítica de la ecuación de calor en tres dimensiones, tanto en coordenadas rectangulares como en coordenadas esféricas, y aplicamos el método de separación de variables de Fourier para obtener una solución de la ecuación de calor en tres dimensiones radialmente simétrica expresada vía una serie de Fourier-Bessel.

2.3.1. Ecuación de calor en coordenadas esféricas

Nuestro segundo caso de interés es cuando en la ecuación de calor la dimensión del espacio es $n = 3$ y $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Con esto tenemos que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y, por lo tanto, el Laplaciano de la solución y de la ecuación de calor (2.6) en el punto \mathbf{x} al tiempo t toma la forma

$$\Delta y(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 y(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y(\mathbf{x}, t)}{\partial x_3^2}.$$

Por lo tanto, la ecuación de calor en tres dimensiones tiene la siguiente apariencia

$$\frac{\partial y(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 y(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y(\mathbf{x}, t)}{\partial x_3^2} \right) + h(\mathbf{x}, t). \quad (2.7)$$

Análogamente al caso $n = 2$, podemos expresar la ecuación (2.7) en coordenadas esféricas, esto como sigue.

El Laplaciano en tres dimensiones se puede escribir en coordenadas esféricas considerando el cambio $x_1 = r \sin \theta \cos \phi$, $x_2 = r \sin \theta \sin \phi$ y $x_3 = r \cos \theta$, donde $r \in [0, a]$ para algún $a > 0$, $\phi \in [0, 2\pi)$ es el ángulo azimutal y $\theta \in [0, \pi]$ es el ángulo de colatitud, cuya interpretación se muestra en la Figura 2.3.

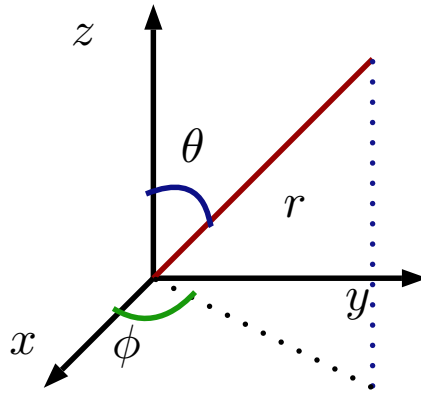


Figura 2.3: Cambio de coordenadas cartesianas a esféricas. (Gráfica elaborada con PS-Tricks)

Considerando este cambio tenemos que $\frac{\partial y}{\partial r}$ tiene la siguiente expresión

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \frac{\partial y}{\partial x_1} + \sin \theta \sin \phi \frac{\partial y}{\partial x_2} + \cos \theta \frac{\partial y}{\partial x_3}.$$

Continuando con la variable r , para $\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} &= \sin \theta \cos \phi \frac{\partial y}{\partial x_1} + \sin \theta \sin \phi \frac{\partial y}{\partial x_2} + \cos \theta \frac{\partial y}{\partial x_3} \\ &+ \sin \theta \cos \phi \left(\sin \theta \cos \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \sin \theta \sin \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + \cos \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \\ &+ \sin \theta \sin \phi \left(\sin \theta \cos \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} + \sin \theta \sin \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \cos \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_3} \right) \\ &+ \cos \theta \left(\sin \theta \cos \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 \partial x_1} + \sin \theta \sin \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 \partial x_2} + \cos \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} \right), \end{aligned}$$

con lo cual tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} &= \sin^2 \theta \cos^2 \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \sin^2 \theta \sin^2 \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} \\ &+ 2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + 2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_3} \\ &+ 2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_3}. \end{aligned}$$

De manera análoga a lo anterior, para θ tenemos que

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \phi \frac{\partial y}{\partial x_1} + r \cos \theta \sin \phi \frac{\partial y}{\partial x_2} - r \sin \theta \frac{\partial y}{\partial x_3},$$

mientras que para $\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} &= -r \sin \theta \cos \phi \frac{\partial y}{\partial x_1} - r \sin \theta \sin \phi \frac{\partial y}{\partial x_2} - r \cos \theta \frac{\partial y}{\partial x_3} \\ &+ r \cos \theta \cos \phi \left(r \cos \theta \cos \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + r \cos \theta \sin \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} - r \sin \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \\ &+ r \cos \theta \sin \phi \left(r \cos \theta \cos \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} + r \cos \theta \sin \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - r \sin \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_3} \right) \\ &- r \sin \theta \left(r \cos \theta \cos \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 \partial x_1} + r \cos \theta \sin \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 \partial x_2} - r \sin \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} \right) \\ &= -r \sin \theta \cos \phi \frac{\partial y}{\partial x_1} - r \sin \theta \sin \phi \frac{\partial y}{\partial x_2} - r \cos \theta \frac{\partial y}{\partial x_3} \\ &+ r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2r^2 \cos^2 \theta \sin \phi \cos \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} - 2r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_3} \\
& - 2r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 \partial x_2}.
\end{aligned}$$

Similarmente, para ϕ tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = -r \sin \theta \sin \phi \frac{\partial y}{\partial x_1} + r \sin \theta \cos \phi \frac{\partial y}{\partial x_2},$$

también

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} &= -r \sin \theta \cos \phi \frac{\partial y}{\partial x_1} - r \sin \theta \sin \phi \frac{\partial y}{\partial x_2} \\
&+ r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \\
&- 2r^2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}.
\end{aligned}$$

Usando la expresiones anteriores para las derivadas parciales de la solución y de la ecuación de calor (2.7) tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} &= \sin^2 \theta \cos^2 \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \sin^2 \theta \sin^2 \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} \\
&+ 2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + 2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_3} \\
&+ 2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_3} \\
&- \frac{1}{r} \sin \theta \cos \phi \frac{\partial y}{\partial x_1} - \frac{1}{r} \sin \theta \sin \phi \frac{\partial y}{\partial x_2} - \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial y}{\partial x_3} \\
&+ \cos^2 \theta \cos^2 \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \cos^2 \theta \sin^2 \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - \sin^2 \theta \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} \\
&+ 2 \cos^2 \theta \sin \phi \cos \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} - 2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_3} \\
&- 2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 \partial x_2} \\
&- r \sin \theta \cos \phi \frac{\partial y}{\partial x_1} - r \sin \theta \sin \phi \frac{\partial y}{\partial x_2} \\
&+ r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \\
&- 2r^2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}.
\end{aligned}$$

Después de simplificar obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial y}{\partial x_1} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial y}{\partial x_2} \\
&= \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\sin^2 \theta \cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial y}{\partial x_1} - \frac{\cos^2 \theta \cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\
&\quad - \frac{\sin^2 \theta \sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial y}{\partial x_2} - \frac{\cos^2 \theta \sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial y}{\partial x_2} \\
&= \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\sin \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial y}{\partial x_1} - \frac{\sin \theta \sin \phi}{r} \frac{\partial y}{\partial x_2} \\
&\quad - \frac{\cos^2 \theta \cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial y}{\partial x_1} - \frac{\cos^2 \theta \sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial y}{\partial x_2} \\
&= \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial y}{\partial x_3} - \frac{\cos^2 \theta \cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\
&\quad - \frac{\cos^2 \theta \sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial y}{\partial x_2} \\
&= \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \times \\
&\quad \times \left(-r \sin \theta \frac{\partial y}{\partial x_3} + r \cos \theta \cos \phi \sin \theta \frac{\partial y}{\partial x_1} + r \cos \theta \sin \phi \frac{\partial y}{\partial x_2} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el Laplaciano en coordenadas esféricas tiene la forma

$$\Delta y = \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial y}{\partial \theta},$$

lo cual se puede reescribir como

$$\Delta y = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2}.$$

La ecuación de calor en coordenadas esféricas se escribe como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y(r, t)}{\partial t} &= k \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial y(r, t)}{\partial \theta} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 y(r, t)}{\partial \phi^2} \right] + u(r, \theta, \phi, t), \quad (r, t) \in \Omega := [0, a] \times [0, \infty), \quad (2.8)
\end{aligned}$$

donde $u(r, \theta, \phi, t) = h(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta, t)$.

Cuando en la ecuación (2.8) hay simetría radial, es decir, que el calor se distribuye de forma constante respecto a ambas coordenadas angulares, en la expresión del Laplaciano las derivadas parciales respecto a estas variables son cero. En este caso obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial y(r, t)}{\partial t} = \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right) + u(r, t), \quad (r, t) \in \Omega. \quad (2.9)$$

2.3.2. Soluciones de la ecuación de calor con simetría radial

Consideramos la ecuación de calor en tres dimensiones radialmente simétrica sin fuentes de calor externas en una esfera aislada de radio $a \in [0, 1]$:

$$\frac{\partial y(r, t)}{\partial t} = \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right), \quad (r, t) \in \Omega, \quad (2.10)$$

con condición de contorno $y(a, t) = 0$ para todo $t \geq 0$, condición inicial $y(r, 0) = f(r)$ para toda $r \in [0, a]$ y f cuadrado integrable. Al igual que en el caso de la placa circular, queremos encontrar soluciones acotadas cuando $r \rightarrow 0^+$.

Procedemos de manera análoga al caso de dos dimensiones y aplicamos el método de separación de variables de Fourier. Al suponer que la solución de la ecuación de calor (2.10) es de la forma $y = \varphi T$, con $\varphi = \varphi(r)$ y $T = T(t)$, entonces al sustituir esta expresión para y en la ecuación (2.10) obtenemos

$$\varphi(r) \dot{T}(t) = \frac{k}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi(r)}{dr} \right) T(t),$$

de donde resulta

$$\frac{\dot{T}(t)}{kT(t)} = \frac{1}{r^2 \varphi(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right).$$

De esto último se sigue que

$$\frac{\dot{T}(t)}{kT(t)} = \frac{1}{r\varphi(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\mu,$$

para alguna constante μ .

De la expresión anterior obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) + \mu k T(t) &= 0, & t \geq 0, \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi(r)}{dr} \right) + \mu r^2 \varphi(r) &= 0, & 0 \leq r \leq a. \end{aligned}$$

Así, φ debe satisfacer el siguiente problema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi(r)}{dr} \right) + \mu r^2 \varphi(r) &= 0, & 0 \leq r \leq a, \\ \varphi(a) &= 0, \\ |\varphi(0)| &\leq C, \end{aligned}$$

para alguna constante positiva C .

Para satisfacer la condición de contorno $y(a, t) = 0$, para toda $t \geq 0$, basta pedir que φ cumpla que $\varphi(a) = 0$.

La ecuación diferencial ordinaria que satisface φ es la siguiente:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi(r)}{dr} \right) + \mu r^2 \varphi(r) = 0,$$

la cual se conoce como ecuación diferencial esférica de Bessel de primera especie y de orden cero. Tal y como se discute en la Sección A.2 del Apéndice A, la solución de la ecuación diferencial ordinaria anterior es la función φ dada por $\varphi(r) = j_0(\sqrt{\mu}r)$, donde la función j_0 es conocida como función de Bessel (esférica) de primera especie de orden cero y se define como en (A.12) y la cual es acotada cuando $r = 0$.

Para que se cumpla que $\varphi(a) = 0$ se debe satisfacer la condición $j_0(\sqrt{\mu}a) = 0$, lo que nos lleva a pedir que

$$\sqrt{\mu_n}a = \zeta_n,$$

donde $\{\zeta_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, son los ceros positivos de la función j_0 , los cuales se discuten en el apartado A.2.2.

Suponiendo a μ_n como antes para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que la ecuación diferencial ordinaria que satisface T tiene la forma

$$\dot{T}_n(t) + \mu_n k T_n(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad T_n(0) = 1,$$

cuya solución es $T_n(t) = e^{-\mu_n k t}$.

Con lo discutido hasta ahora, y suponiendo que la función f de la condición inicial de la ecuación de calor (2.10) es cuadrado integrable, tal como indica [6], tenemos que la solución y de la ecuación de calor (2.10) con condición inicial f y condición de contorno nula, se puede representar vía una serie de Fourier usando la función esférica de Bessel j_0 y sus ceros de la manera siguiente:

$$y(r, t) = \sum_{n \geq 1} c_n j_0(\sqrt{\mu_n}r) e^{-\mu_n k t}.$$

De manera análoga al caso en dos dimensiones, a la serie anterior la llamaremos serie de Fourier-Bessel.

Los coeficientes $\{c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ que aparecen en la serie de Fourier-Bessel de arriba están dados por

$$c_n = 2 [j_0(\sqrt{\mu_n}r)]^{-1} \int_0^1 r^2 f(r) j_0(\sqrt{\mu_n}r) dr.$$

Estabilidad robusta para la ecuación de calor radialmente simétrica con fuentes de calor externas

En este capítulo proponemos una definición de estabilidad robusta para la ecuación de calor radialmente simétrica en dos y tres dimensiones, dicha definición es una extensión de la definición de estabilidad bajo perturbaciones de acción permanente establecida para sistemas de ecuaciones ordinarias por Duboshin y Malkin dada en [13]. Empleamos el método de separación de variables de Fourier-Bessel y verificamos su validez para la ecuación de calor en cuestión. Aplicamos resultados obtenidos en la Sección 1.2 a los coeficientes de Fourier-Bessel de las soluciones consideradas con la finalidad de establecer condiciones suficientes para garantizar la estabilidad robusta de la ecuación de calor radialmente simétrica en dos y tres dimensiones.

Sección 3.1

Análisis en una placa circular en el plano

3.1.1. Planteamiento del problema

Consideramos la ecuación de calor con fuentes de calor externas en una placa circular plana de radio $a \in [0, 1]$ con simetría radial:

$$\frac{\partial y(r, t)}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right) + u(r, t), \quad (r, t) \in \Omega = [0, a] \times [0, \infty), \quad (3.1)$$

sujeto a las condiciones inicial y de contorno siguientes

$$y(r, 0) = 0, \quad r \in [0, a], \quad y(a, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.2)$$

Suponemos que las soluciones de la ecuación de calor (3.1) sujeto a las condiciones (3.2) admiten una representación vía series de Fourier-Bessel respecto de la función cilíndrica de Bessel de orden cero J_0 y sus respectivos ceros positivos z_n para $n \in \mathbb{N}$, esto es que las soluciones y del problema (3.1)-(3.2) admiten la siguiente representación:

$$y(r, t) = \sum_{n \geq 1} a_n(t) J_0 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right), \quad (r, t) \in \Omega, \quad (3.3)$$

donde $\sqrt{\lambda_n} a = z_n$. Las funciones cilíndricas de Bessel de primera especie se definen en la expresión (A.2) y los ceros positivos de estas funciones se discuten en el apartado A.1.2. Las funciones a_n en las series de Fourier-Bessel (3.3) son llamados coeficientes de Fourier-Bessel asociados a la solución y en cuestión. Como caso particular consideramos que k satisface la desigualdad $a^2/(2z_1^2) < k^1$.

Para usar el método de separación de variables de Fourier-Bessel suponemos que las fuentes externas u admiten una representación vía series de Fourier-Bessel como la siguiente:

$$u(r, t) = \sum_{n \geq 1} u_n(t) J_0 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right), \quad (r, t) \in \Omega, \quad (3.4)$$

donde u_n , con $n \in \mathbb{N}$, son los coeficientes de Fourier-Bessel para u . Más precisamente, el conjunto de perturbaciones que usaremos es el siguiente:

$$\mathcal{U}_\Omega := \left\{ u : u(r, t) = \sum_{n \geq 1} u_n(t) J_0 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right), (r, t) \in \Omega, u_n(t) \in \mathcal{U}_{\delta_n} \text{ y } \{\delta_n\} \in D(\delta) \right\}, \quad (3.5)$$

donde $D(\delta)$ denota el conjunto de sucesiones de números reales no negativos tales que su suma $\sum_{n \geq 1} \delta_n$ converja a δ y el conjunto \mathcal{U}_{δ_n} se define como sigue:

$$\mathcal{U}_{\delta_n} := \{u_n \in \mathcal{KC}[0, \infty) : |u_n(t)| \leq \delta_n\}.$$

Nótese que la notación para \mathcal{U}_Ω y para \mathcal{U}_{δ_n} , aunque similar, significan cosas completamente distintas.

¹La restricción $a^2/(2z_1^2)$ es más grande cuando $a = 1$, en tal caso $a^2/(2z_1^2) \approx 0.0864$. Según [9, 18], algunas placas circulares de materiales cuyo coeficiente de difusividad térmica es mayor que 0.0864 son: plata, oro, cobre, aluminio y acero común; y algunas placas circulares que no lo cumplen son: acero inoxidable 304A, PVC, cuarzo y parafina alrededor de los $25^\circ C$. Para estos últimos materiales no se garantiza que la discusión en este trabajo aplique.

De la representación (3.4) para la fuente externa u y usando que $|J_0(\sqrt{\lambda_n}r)| \leq 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $r \in [0, a]$, podemos notar lo siguiente:

$$\begin{aligned} |u(r, t)| &\leq \sum_{n \geq 1} |u_n(t)| \left| J_0(\sqrt{\lambda_n}r) \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} |u_n(t)| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \delta_n \\ &= \delta. \end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que $|u(r, t)|$ está acotado por δ para todo $(r, t) \in \Omega$.

Si en la ecuación de calor (3.1) consideramos la fuente externa u tal que $u(r, t) = 0$ para todo $(r, t) \in \Omega$, la solución obtenida, al tomar en cuenta las condiciones (3.2), resulta ser la función idénticamente cero; sin embargo, si se considerara una condición inicial distinta de cero, entonces la solución y de la ecuación de calor (3.1) sin fuentes externas no necesariamente es cero en todo Ω . Considerando lo anterior formulamos la siguiente definición.

Definición 3.1.1. Decimos que la solución de la ecuación de calor (3.1) en ausencia de fuentes externas y con condiciones inicial y de contorno como en (3.2), es llamada solución *no perturbada* y la denotamos por \bar{y} .

Con las condiciones inicial y de contorno (3.2), la solución no perturbada resulta ser la solución trivial, es decir, la solución idénticamente cero en Ω .

Para la solución y de la ecuación de calor (3.1) definimos la siguiente norma en \mathbb{R}^3 :

$$\|y(r, t)\|_\infty = \max \left\{ |y(r, t)|, \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| \right\}, \quad (r, t) \in \Omega.$$

Extendemos a la ecuación de calor (3.1) la definición de estabilidad bajo perturbaciones de acción permanente dada por Duboshin y Malkin dada en [13], para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 3.1.2. [Estabilidad robusta.] Decimos que la solución no perturbada \bar{y} del problema (3.1)-(3.2) es *robustamente estable*, si para $\varepsilon > 0$ dado existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tal que si $|u(r, t)| \leq \delta < \eta(\varepsilon)$ para todo punto $(r, t) \in \Omega$, cualquier solución de la ecuación (3.1) satisface $\|y(r, t)\|_\infty < \varepsilon$ para todo $(r, t) \in \Omega$.

En contraste con la Definición 0.0.1, en la definición anterior η juega el papel de η_1 en la Definición 0.0.1, sin embargo, al tener condición inicial nula en (3.2) no requerimos de acotar la condición inicial, pero si la condición inicial fuera distinta de cero, entonces en la Definición 3.1.2 tendríamos que considerar un valor $\eta_2 = \eta_2(\varepsilon)$ para acotar la condición inicial, en tal caso el valor η_2 jugaría el papel de η_2 en la Definición 0.0.1.

Estudiamos la estabilidad robusta del problema (3.1)-(3.2) en el sentido de la Definición 3.1.2 considerando fuentes externas en \mathcal{U}_Ω .

3.1.2. Justificación del método de separación de variables de Fourier-Bessel

En este apartado proponemos condiciones suficientes para la existencia de soluciones del problema (3.1)-(3.2) que se puedan expresar vía una serie de Fourier-Bessel como en (3.3).

Al tomar las expresiones para y en (3.3) y para la fuente externa (3.4), y al sustituirlas en la ecuación de calor (3.1) obtenemos lo siguiente

$$\sum_{n \geq 1} \dot{a}_n(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) = \sum_{n \geq 1} \frac{k}{r} a_n(t) \frac{d}{dr} \left(r J_0'(\sqrt{\lambda_n} r) \right) + \sum_{n \geq 1} u_n(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r),$$

donde el apóstrofo ($'$) denota la derivada respecto de r y el punto ($\dot{}$) denota la derivada respecto de t . Usando la expresión para la derivada de las funciones de Bessel dada en (A.6) tenemos que $J_0'(\sqrt{\lambda_n} r) = -\sqrt{\lambda_n} J_1(\sqrt{\lambda_n} r)$, por lo que la serie anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \dot{a}_n(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) &= - \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{\lambda_n} k}{r} a_n(t) \frac{d}{dr} \left(r J_1(\sqrt{\lambda_n} r) \right) + \sum_{n \geq 1} u_n(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) \\ &= - \sum_{n \geq 1} \sqrt{\lambda_n} k a_n(t) \left[J_1'(\sqrt{\lambda_n} r) + \frac{1}{r} J_1(\sqrt{\lambda_n} r) \right] + \sum_{n \geq 1} u_n(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r). \end{aligned}$$

Usando nuevamente la expresión (A.6) tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \dot{a}_n(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) &= - \sum_{n \geq 1} \sqrt{\lambda_n} k a_n(t) \left[\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2} \left(J_0(\sqrt{\lambda_n} r) - J_2(\sqrt{\lambda_n} r) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} J_1(\sqrt{\lambda_n} r) \right] + \sum_{n \geq 1} u_n(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r). \end{aligned}$$

Al agrupar términos semejantes obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \dot{a}_n(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) &= - \sum_{n \geq 1} \lambda_n k a_n(t) \left[\frac{1}{2} \left(J_0(\sqrt{\lambda_n} r) - J_2(\sqrt{\lambda_n} r) \right) + \frac{1}{2} \frac{2J_1(\sqrt{\lambda_n} r)}{\sqrt{\lambda_n} r} \right] \\ &\quad + \sum_{n \geq 1} u_n(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r), \end{aligned}$$

donde al usar la expresión (A.7) para el término $2J_1(\sqrt{\lambda_n} r) / \sqrt{\lambda_n} r$ y simplificando tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \dot{a}_n(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) &= - \sum_{n \geq 1} \lambda_n k a_n(t) \left[\frac{1}{2} \left(J_0(\sqrt{\lambda_n} r) - J_2(\sqrt{\lambda_n} r) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(J_0(\sqrt{\lambda_n} r) + J_2(\sqrt{\lambda_n} r) \right) \right] \\ &\quad + \sum_{n \geq 1} u_n(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) \\ &= - \sum_{n \geq 1} \lambda_n k a_n(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) + \sum_{n \geq 1} u_n(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r). \end{aligned}$$

Reacomodando los términos en la expresión anterior llegamos a la siguiente expresión

$$\sum_{n \geq 1} (\dot{a}_n(t) + \lambda_n k a_n(t)) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) = \sum_{n \geq 1} u_n(t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r).$$

Al igualar coeficientes en las series anteriores obtenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el coeficiente de Fourier-Bessel a_n de la serie (3.3) satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{a}_n(t) + \lambda_n k a_n(t) = u_n(t), \quad t \geq 0, \quad n \geq 1.$$

De la condición inicial $y(r, 0) = 0$ obtenemos que $a_n(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Al considerar la condición inicial anterior obtenemos que, para toda $n \in \mathbb{N}$, el coeficiente de Fourier-Bessel a_n satisface el siguiente problema de valores iniciales:

$$\dot{a}_n(t) + \lambda_n k a_n(t) = u_n(t), \quad a_n(0) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.6)$$

La ecuación diferencial ordinaria (3.6) la encontramos como caso particular de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) en la Sección 1.2, con las igualdades $c = k$, $\lambda = \lambda_n$ y $\nu = \delta_n$. Bajo el supuesto $0 < \delta_n < \lambda_n k$ el problema (3.6) hereda las siguientes propiedades del problema de valores iniciales (1.9):

1. Para $u_n \in \mathcal{U}_{\delta_n}$ obtenemos que el coeficiente de Fourier-Bessel asociado a u_n , es decir, la solución de la ecuación diferencial ordinaria (3.6) asociada a u_n , tiene la expresión siguiente:

$$a_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds, \quad t \geq 0. \quad (3.7)$$

2. Las peores perturbaciones, las cuales causan que a_n esté lo más alejado del origen en cualquier tiempo finito $t = \tau$ son $u_n^+(t) = \delta_n$ y $u_n^-(t) = -\delta_n$ para toda $t \geq 0$, y las soluciones extremas de la ecuación diferencial ordinaria (3.6) son

$$a_n^+(t) = \frac{\delta_n}{\lambda_n k} (1 - e^{-\lambda_n k t}), \quad t \geq 0$$

y

$$a_n^-(t) = -\frac{\delta_n}{\lambda_n k} (1 - e^{-\lambda_n k t}), \quad t \geq 0,$$

respectivamente. A estas soluciones también las llamamos coeficientes de Fourier-Bessel extremos.

3. Para cualquier $u_n \in \mathcal{U}_{\delta_n}$ se cumple que

$$-\frac{\delta_n}{\lambda_n k} (1 - e^{-\lambda_n k t}) \leq \int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds \leq \frac{\delta_n}{\lambda_n k} (1 - e^{-\lambda_n k t}), \quad (3.8)$$

donde los extremos de las desigualdades anteriores son los coeficientes de Fourier-Bessel extremos a_n^- y a_n^+ , respectivamente.

Recordemos que a_n^- y a_n^+ describen la frontera del tubo de alcanzabilidad $D(\tau)$ definido en (1.14), esto nos permite controlar el comportamiento de la serie de Fourier-Bessel (3.3) ajustando los valores de δ_n .

Usando la expresión (3.7) para los coeficientes de Fourier-Bessel a_n obtenemos que la serie de Fourier-Bessel expresada en (3.3) adopta la siguiente forma:

$$y(r, t) = \sum_{n \geq 1} J_0(\sqrt{\lambda_n} r) \int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds, \quad (r, t) \in \Omega, \quad (3.9)$$

la cual converge uniformemente en Ω si $\sum_{n \geq 1} \delta_n$ converge, pues podemos obtener la siguiente estimación

$$\begin{aligned} |y(r, t)| &\leq \sum_{n \geq 1} \left| J_0(\sqrt{\lambda_n} r) \int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \left| \int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n \geq 1} \frac{\delta_n}{\lambda_n k} |1 - e^{-\lambda_n k t}| \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \frac{a^2 \delta_n}{4k}, \\
&= \frac{a^2}{4k} \sum_{n \geq 1} \delta_n,
\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad usamos que $|J_0(\sqrt{\lambda_n} r)| \leq 1$ para $r \in [0, a]$, en la tercera desigualdad aplicamos la desigualdad (3.6) y en la última desigualdad usamos que para toda n en \mathbb{N} se tiene la desigualdad $\lambda_n > 4/a^2$, esto último pues el primer cero de la función J_0 es mayor que 2, y dado que $\sqrt{\lambda_n} > \sqrt{\lambda_1} = z_1/a > 2/a$, obteniendo así la validez de la desigualdad $\lambda_n > 4/a^2$.

Ahora, para que el método de separación de variables de Fourier-Bessel sea válido, las series obtenidas al sustituir la expresión (3.9) en la ecuación de calor (3.1) deben converger uniformemente en Ω . Para esto notemos lo siguiente:

$$\frac{k}{r} \frac{\partial y}{\partial r} \left(r \frac{\partial y}{\partial r} \right) = k \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} \right).$$

Verificaremos la convergencia uniforme en Ω de las series obtenidas al diferenciar término a término la serie (3.9) como sigue: una vez respecto de t , una vez respecto de r y dividir por r y dos veces respecto de r .

Para esto, notemos que las series en cuestión son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y(r, t)}{\partial t} &= \sum_{n \geq 1} J_0(\sqrt{\lambda_n} r) \left[u_n(t) - \lambda_n k \int_0^t e^{-\lambda_n k(t-s)} u_n(s) ds \right], \\
\frac{1}{r} \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} &= - \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{r} J_1(\sqrt{\lambda_n} r) \int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds, \\
\frac{\partial^2 y(r, t)}{\partial r^2} &= - \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_n}{2} \left[J_0(\sqrt{\lambda_n} r) - J_2(\sqrt{\lambda_n} r) \right] \int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Las identidades anteriores se obtienen al diferenciar término a término la serie (3.9), usando la regla de la cadena, la identidad (A.4) con $\nu = 0$ y la identidad (A.6) con $\nu = 1$.

Podemos notar lo siguiente:

$$\left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial t} \right| \leq \sum_{n \geq 1} \left| J_0(\sqrt{\lambda_n} r) \left(u_n(t) - \lambda_n k \int_0^t e^{-\lambda_n k(t-s)} u_n(s) ds \right) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n \geq 1} \left| u_n(t) - \lambda_n k \int_0^t e^{-\lambda_n k(t-s)} u_n(s) ds \right| \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \delta_n + \left| \lambda_n k \int_0^t e^{-\lambda_n k(t-s)} u_n(s) ds \right| \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \delta_n + \lambda_n k \frac{\delta_n}{\lambda_n k} |1 - e^{-\lambda_n kt}| \\
&\leq 2 \sum_{n \geq 1} \delta_n
\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad usamos que $|J_0(\sqrt{\lambda_n t})| \leq 1$ para toda $r \in [0, a]$, en la tercera desigualdad usamos la desigualdad del triángulo y que el valor absoluto de $u_n(t)$ está acotado por δ_n para toda $t \geq 0$, en la cuarta desigualdad usamos la desigualdad (3.6) y en la última desigualdad usamos que $|e^{-\lambda_n kt}| \leq 1$.

Similarmente, observamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| &\leq \sum_{n \geq 1} \left| \sqrt{\lambda_n} J_1(\sqrt{\lambda_n} r) \int_0^t e^{-\lambda_n ks} u_n(t-s) ds \right| \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \sqrt{\lambda_n} \frac{\delta_n}{\lambda_n k} |1 - e^{-\lambda_n kt}| \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \frac{\delta_n}{\sqrt{\lambda_n} k} \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \frac{a \delta_n}{2k} \\
&= \frac{a}{2k} \sum_{n \geq 1} \delta_n.
\end{aligned}$$

en donde se usó que las funciones de Bessel de primera especie están acotadas por 1 para todo $r \in [0, a]$, la desigualdad (3.8) para los coeficientes de Fourier-Bessel, además se usó que las raíces positivas de la función de Bessel de orden cero son mayores que $2/a$.

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{r} \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| &\leq \sum_{n \geq 1} \left| \frac{\sqrt{\lambda_n}}{r} J_1(\sqrt{\lambda_n} r) \int_0^t e^{-\lambda_n ks} u_n(t-s) ds \right| \\
&= \sum_{n \geq 1} \left| \lambda_n \frac{J_1(\sqrt{\lambda_n} r)}{\sqrt{\lambda_n} r} \int_0^t e^{-\lambda_n ks} u_n(t-s) ds \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n \geq 1} \lambda_n \frac{\delta_n}{\lambda_n k} |1 - e^{-\lambda_n k t}| \left| \frac{J_1(\sqrt{\lambda_n} r)}{\sqrt{\lambda_n} r} \right| \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \frac{\delta_n}{k} \left| \frac{J_1(\sqrt{\lambda_n} r)}{\sqrt{\lambda_n} r} \right| \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{\delta_n}{2k} \left| J_0(\sqrt{\lambda_n} r) + J_2(\sqrt{\lambda_n} r) \right| \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \frac{\delta_n}{k} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{n \geq 1} \delta_n,
\end{aligned}$$

en donde usamos la desigualdad (3.6), la identidad (A.7) con $\nu = 1$, la desigualdad del triángulo y que las funciones J_0 y J_2 están acotadas por uno.

Ahora, para la serie obtenida al diferenciar la expresión (3.9) término a término dos veces respecto a la variable r , obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2(r, t)}{\partial r^2} \right| &\leq \sum_{n \geq 1} \left| \frac{\lambda_n}{2} \left[J_0(\sqrt{\lambda_n} r) - J_2(\sqrt{\lambda_n} r) \right] \int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds \right| \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \lambda_n \frac{\delta_n}{\lambda_n k} |1 - e^{-\lambda_n k t}| \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \frac{\delta_n}{k} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{n \geq 1} \delta_n.
\end{aligned}$$

De lo expuesto anteriormente, podemos ver que la convergencia uniforme de las series obtenidas al diferenciar la serie (3.9) término a término una vez respecto de t , una vez respecto de r y dividir por r , y dos veces respecto de r , dependen únicamente de la convergencia de la serie $\sum_{n \geq 1} \delta_n$.

Ahora verificaremos que la serie (3.9) satisface la ecuación de calor (3.1). Para esto usaremos las expresiones en (3.10) y la serie de Fourier-Bessel para la fuente externa u .

Al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación de calor (3.1) obtenemos lo siguiente

$$\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right) + u(r, t) =$$

$$\begin{aligned}
&= k \left(\frac{\partial^2 y(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y(r, t)}{\partial t} \right) + u(r, t) \\
&= -k \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_n}{2} \left[J_0 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) - J_2 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) \right] \int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds \\
&\quad - k \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{r} J_1 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) \int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds + u(r, t) \\
&= -k \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_n}{2} \left[J_0 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) - J_2 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) + \frac{2}{\sqrt{\lambda_n} r} J_1 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) \right] \times \\
&\quad \int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds + u(r, t) \\
&= -k \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_n}{2} \left[J_0 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) - J_2 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) + J_0 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) + J_2 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) \right] \times \\
&\quad \int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds + u(r, t) \\
&= -k \sum_{n \geq 1} \lambda_n J_0 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) \int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds + u(r, t) \\
&= -k \sum_{n \geq 1} \lambda_n J_0 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) \int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds + \sum_{n \geq 1} u_n(t) J_0 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) \\
&= \sum_{n \geq 1} J_0 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) \left[u_n(t) - \lambda_n k \int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds \right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right) + u(r, t) = \sum_{n \geq 1} J_0 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) \left[u_n(t) - \lambda_n k \int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds \right].$$

Después de notar que $\int_0^t e^{-\lambda_n k s} u_n(t-s) ds = \int_0^t e^{-\lambda_n k(t-s)} u_n(s) ds$, tenemos que la expresión anterior es igual a la expresión de $\partial y(r, t)/\partial t$ dada en (3.10), por lo que concluimos que la serie de Fourier-Bessel propuesta en (3.9) satisface el problema (3.1)-(3.2) con \mathcal{U}_Ω como en (3.5).

De lo discutido anteriormente, deducimos el siguiente resultado.

Proposición 3.1.1. Es condición suficiente que $\sum_{n \geq 1} \delta_n < \infty$, para que la serie (3.9) sea una solución del problema (3.1)-(3.2) con fuentes externas en (3.5).

3.1.3. Criterio de estabilidad robusta

En esta apartado damos condiciones suficientes para la estabilidad robusta del problema (3.1)-(3.2) en el sentido de la Definición 3.1.2 considerando fuentes externas en \mathcal{U}_Ω .

Dada la representación de y descrita en (3.3), obtenemos, para cada $(r, t) \in \Omega$, las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned} |y(r, t)| &\leq \sum_{n \geq 1} \left| a_n(t) J_0 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) \right| \leq \sum_{n \geq 1} |a_n(t)|; \\ \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial t} \right| &\leq \sum_{n \geq 1} \left| J_0 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) \dot{a}_n(t) \right| \leq \sum_{n \geq 1} |\dot{a}_n(t)|; \\ \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| &\leq \sum_{n \leq 1} \left| \sqrt{\lambda_n} J_1 \left(\sqrt{\lambda_n} r \right) a_n(t) \right| \leq \sum_{n \leq 1} \sqrt{\lambda_n} |a_n(t)|. \end{aligned}$$

Así que para estimar la norma de $y(r, t)$ para $(r, t) \in \Omega$, que aparece en la definición de estabilidad robusta, hay que dar estimaciones para los valores absolutos que aparecen a la izquierda de las desigualdades anteriores, sin embargo, de estas mismas desigualdades se sigue que para estimar dichos valores absolutos, y por ende, la norma de $y(r, t)$, basta con estimar los valores absolutos de $|a_n(t)|$ y $|\dot{a}_n(t)|$. De la desigualdad (3.8) y de la ecuación (3.6) obtenemos las desigualdades siguientes:

$$|a_n(t)| \leq \frac{\delta_n}{\lambda_n k} \quad \text{y} \quad |\dot{a}_n(t)| \leq 2\delta_n.$$

De forma similar a la Definición 3.1.1, llamamos solución no perturbada a la solución \bar{a}_n de la ecuación diferencial ordinaria (3.6) en ausencia de fuentes externas, en este caso, al tener condición inicial nula, dicha solución resulta ser la solución trivial. También, de forma similar a la definición de la norma

$$\|y(r, t)\|_\infty = \text{máx} \left\{ |y(r, t)|, \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| \right\}, \quad (r, t) \in \Omega,$$

definimos la norma en el plano para $a_n(t)$ de la siguiente manera:

$$\|a_n(t)\|_\infty = \text{máx} \{ |a_n(t)|, |\dot{a}_n(t)| \}, \quad t \geq 0.$$

La norma anterior se define de esa manera pues para acotar la norma de $y(r, t)$ para todo punto $(r, t) \in \Omega$ requerimos de acotar tanto a $|a_n(t)|$ como a $|\dot{a}_n(t)|$.

Nótese que no hacemos distinción en la notación de las normas de $\|y(r, t)\|_\infty$ y de $\|a_n(t)\|_\infty$, esto pues basta notar la diferencia entre el punto $y(r, t)$ y el punto $a_n(t)$.

De forma análoga a la Definición 3.1.2, para a_n , consideraremos fuentes externas en \mathcal{U}_{δ_n} . Así, podemos dar la siguiente definición de estabilidad robusta para la ecuación diferencial ordinaria (3.6).

Definición 3.1.3. La solución no perturbada \bar{a}_n de la ecuación (3.6) (sin fuentes externas) es llamada robustamente estable si se cumple que para todo $\varepsilon_n > 0$ dado, existe un número positivo $\eta_n = \eta_n(\varepsilon_n)$ tal que si $|u_n(t)| \leq \delta_n < \eta_n$ para toda $t \geq 0$, entonces la solución de (3.6) asociada a u_n cumple que $\|a_n(t)\|_\infty < \varepsilon$ para toda $t \geq 0$.

La definición anterior es análoga a la definición de estabilidad robusta que se da en [17] con la diferencia de que en la ecuación diferencial ordinaria (3.6) tiene condición inicial nula, por lo que no requerimos acotarla.

Ahora, damos una estimación para la norma de $y(r, t)$ para la solución y de la ecuación de calor (3.1) usando estimaciones de la norma de $a_n(t)$. Notemos que para una solución a_n de la ecuación diferencial ordinaria (3.6) asociada a $u_n \in \mathcal{U}_{\delta_n}$, se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} \|a_n(t)\|_\infty &= \max \{|a_n(t)|, |\dot{a}_n(t)|\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{\delta_n}{\lambda_n k}, 2\delta_n \right\} \\ &= \delta_n \max \left\{ \frac{1}{\lambda_n k}, 2 \right\}. \end{aligned}$$

Bajo el supuesto $(2\lambda_1)^{-1} < k$ tenemos que $\max \{(2\lambda_n k)^{-1}, 2\} = 2$. Así $\|a_n(t)\| \leq 2\delta_n$ para todo $t \geq 0$.

De las expresiones anteriores deducimos que, para que se cumpla que $\|a_n(t)\| < \varepsilon_n$ para toda $t \geq 0$, basta pedir que $\delta_n < \varepsilon_n/2$, con lo cual la cantidad $\eta_n = \eta_n(\varepsilon_n)$ de la Definición 3.1.3 es $\eta_n(\varepsilon_n) := \varepsilon_n/2$.

Por lo tanto, tenemos que el siguiente resultado es válido.

Proposición 3.1.2. La solución no perturbada \bar{a}_n de la ecuación ecuación diferencial ordinaria (3.6) es robustamente estable de acuerdo a la Definición 3.1.3.

Para dar criterios para la estabilidad robusta para la solución no perturbada \bar{y} de la ecuación de calor (3.1) respecto a las fuentes externas en \mathcal{U}_Ω , usamos la estabilidad robusta para la solución no perturbada de la ecuación (3.6) mostrada en la proposición anterior. Para esto, procedemos como sigue.

Para $\varepsilon > 0$ dado, consideramos la familia $\{\varepsilon_n\}$ tal que $\varepsilon_n = \varepsilon(1 - \alpha)\alpha^{n-1}$ con $\alpha \in (0, 1)$.

Para dicha sucesión se cumple lo siguiente:

$$\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n = \sum_{n \geq 1} \varepsilon(1 - \alpha)\alpha^{n-1} = \varepsilon(1 - \alpha) \sum_{n \geq 1} \alpha^{n-1} = \varepsilon(1 - \alpha) \frac{1}{1 - \alpha} = \varepsilon,$$

pues $\sum_{n \geq 1} \alpha^{n-1}$ es una serie geométrica con argumento $\alpha \in (0, 1)$.

Considerando lo anterior, tenemos las estimaciones siguientes:

$$|y(r, t)| \leq \sum_{n \geq 1} |a_n(t)| < \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n = \varepsilon,$$

y

$$\left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial t} \right| \leq \sum_{n \geq 1} |\dot{a}_n(t)| < \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n = \varepsilon.$$

También tenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| &\leq \sum_{n \geq 1} \sqrt{\lambda_n} |a_n(t)| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \sqrt{\lambda_n} \frac{\delta_n}{\lambda_n k} \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{\delta_n}{\sqrt{\lambda_n} k} \\ &< \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} k} \left(\frac{\varepsilon_n}{2} \right). \end{aligned}$$

Usando que $\sqrt{\lambda_n} > 2/a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| < \frac{a\varepsilon}{4k}.$$

Al considerar las estimaciones anteriores para $|y(r, t)|$ así como para sus primeras derivadas, notamos que la norma de $y(r, t)$ tiene la siguiente estimación

$$\|y(r, t)\|_\infty < \varepsilon \max \left\{ 1, \frac{1}{4k} \right\}, \quad (r, t) \in \Omega.$$

Si ahora consideramos $\delta_n < 2k\varepsilon_n/a$, entonces

$$\left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| < \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n = \varepsilon,$$

con lo cual

$$\|y(r, t)\|_\infty < \varepsilon, \quad (r, t) \in \Omega.$$

Recordemos que de la estabilidad robusta para \bar{a}_n , vimos que $\delta_n < \eta_n = \varepsilon_n/2$, con lo cual

$$\delta = \sum_{n \geq 1} \delta_n < \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n/2 = \varepsilon/2.$$

Visto lo anterior, para garantizar la estabilidad robusta de la solución no perturbada \bar{y} basta pedir que

$$\delta < \eta(\varepsilon) := \varepsilon \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2k}{a} \right\}.$$

Lo anterior se resume en el siguiente resultado, el cual es el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.1.1. Si se cumple la condición $a^2/(2z_1^2) < k$ con z_1 el primer cero positivo de J_0 , entonces la solución no perturbada \bar{y} de la ecuación de calor (3.1) con fuentes externas en \mathcal{U}_Ω , es robustamente estable.

Notemos una propiedad importante sobre el comportamiento de ε_n .

Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función

$$f_n(\alpha) = (1 - \alpha)\alpha^{n-1}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ resulta claro que $f_n(\alpha) > f_{n+1}(\alpha)$ para todo $\alpha \in (0, 1)$, esto lo podemos observar en la Figura 3.1, donde se muestran las gráficas de f_n para algunos n . Notamos que para valores de α cercanos a cero, en comparación con valores de α cercanos a uno, los primeros términos de la serie (3.3) pueden ser más significativos.

3.1.4. Ejemplos numéricos

Para ilustrar los resultados obtenidos en la sección anterior consideraremos dos ejemplos.

Fijamos los siguientes valores para los parámetros:

$$\varepsilon = 1, \quad a = 1, \quad k = \frac{1}{10}, \quad b = \frac{1}{10}, \quad \alpha = \frac{1}{10}.$$

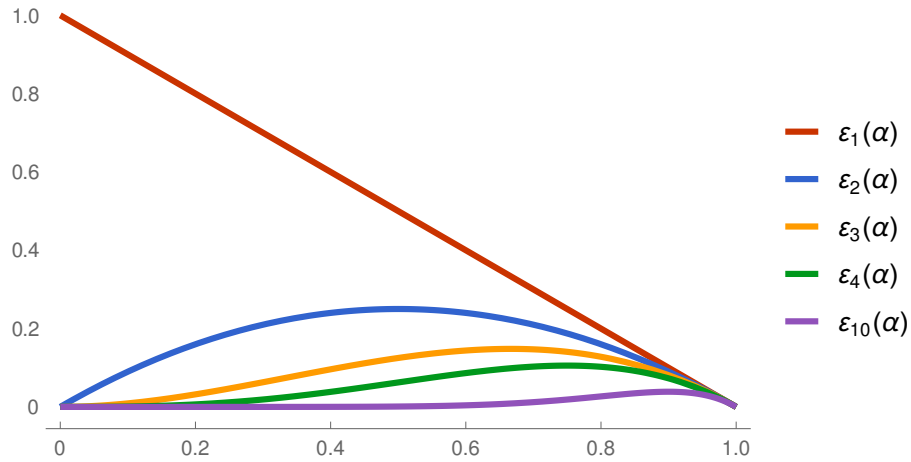


Figura 3.1: Gráficas de $(1 - \alpha)\alpha^{n-1}$ con $\alpha \in (0, 1)$ para distintos valores de n . (Gráfica elaborada en Wolfram Mathematica)

De esta manera, fijamos δ_n como sigue

$$\delta_n = \frac{9}{10} \frac{\varepsilon_n}{2},$$

donde

$$\varepsilon_n = \frac{9}{10^{n+1}}.$$

Con los parámetros dados, consideramos la perturbación extrema $u_n^+(t) = \delta_n$ para todo tiempo $t \geq 0$. El coeficiente de Fourier-Bessel extremo a_n^+ asociado a la perturbación extrema u_n^+ es

$$a_n^+(t) = \frac{10\delta_n}{\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n t/10}), \quad t \geq 0.$$

Recordemos que dicho coeficiente describe la parte superior de la frontera del tubo de alcanzabilidad $D(\tau)$ de la ecuación diferencial ordinaria (3.6), el cual se definió en (1.14).

En la Figura 3.2 se muestran las gráficas de y y sus primeras derivadas parciales respecto a las variables r y t , esto para $r \in [0, 1]$ y $t \in [0, 90]$ usando a a_n^+ como coeficiente de Fourier-Bessel para todo $n \in \mathbb{N}$. Numéricamente obtenemos la Tabla 3.1, donde se muestran los valores extremos de y y sus primeras derivadas parciales. Podemos observar tanto en la Figura 3.2 como en la Tabla 3.1 que tanto $y(r, t)$ como las primeras derivadas parciales de y evaluadas en el punto (r, t) están acotadas por $\varepsilon = 1$, esto es $\|y(r, t)\| < \varepsilon$.

Por otro lado, si consideramos la perturbación $u_n(t) = \delta_n \sin(t/10)$ para todo $t \geq 0$, el

	Mínimo	Máximo
$y(r, t)$	0.00000	0.714169
$\partial y(r, t)/\partial t$	0.000000	0.450000
$\partial y(r, t)/\partial r$	-0.969196	0.000000

Tabla 3.1: Valores extremos de y y sus primeras derivadas parciales en Ω considerando los coeficientes de Fourier-Bessel u_n^+ .

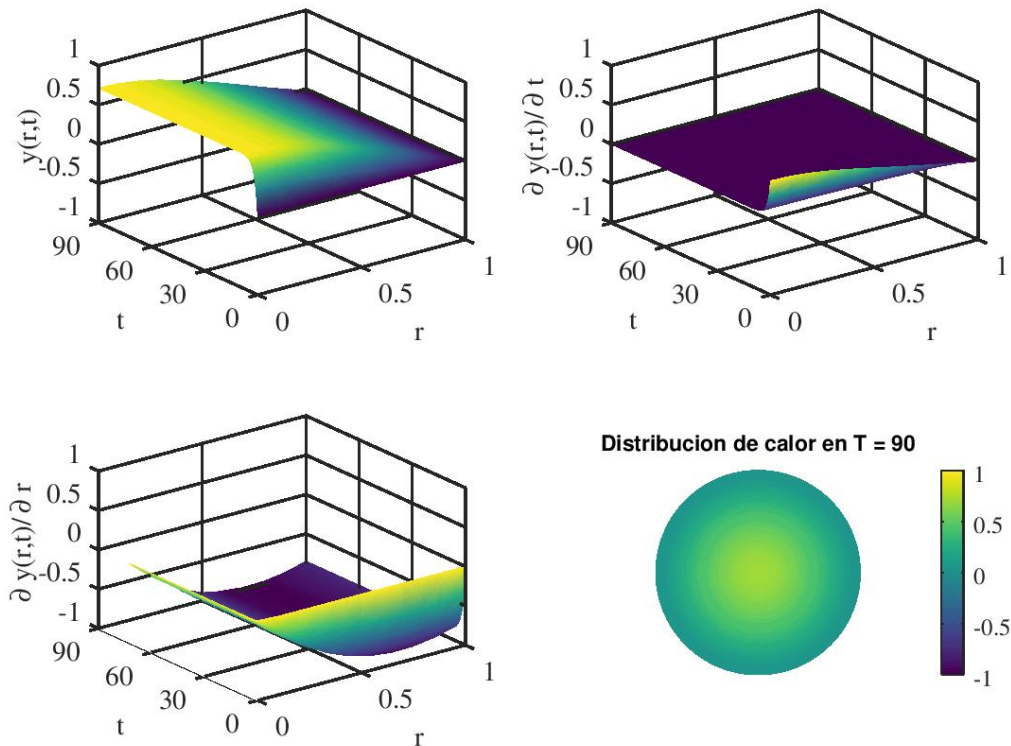


Figura 3.2: Gráfica de y y sus primeras derivadas parciales para $t \in [0, 90]$ considerando a u_n^+ . Temperatura de la placa de radio 1 al tiempo $t = 90$. (Gráficas elaboradas con Octave)

coeficiente de Fourier-Bessel a_n^u asociado a esta fuente externa es

$$a_n^u(t) = \delta_n \frac{10 \left[e^{-\lambda_n t/10} - \cos\left(\frac{t}{10}\right) - \lambda_n \sin\left(\frac{t}{10}\right) \right]}{\lambda_n^2 + 1}, \quad t \geq 0.$$

Para la solución $y(r, t)$ y sus primeras derivadas parciales, obtenidas con los coeficientes de Fourier-Bessel a_n^u , mostramos sus gráficas en la Figura 3.3 y sus valores mínimo y máximo en la Tabla 3.2. Podemos ver que $\varepsilon = 1$ es una cota para y y sus primeras derivadas parciales, con lo cual $\|y(r, t)\| < \varepsilon$.

	Mínimo	Máximo
$y(r, t)$	-0.703661	0.703754
$\partial y(r, t)/\partial t$	-0.070375	0.070379
$\partial y(r, t)/\partial r$	-0.955916	0.955823

Tabla 3.2: Valores extremos de $y(r, t)$ y sus primeras derivadas parciales en $[0, 1] \times [0, 90]$ considerando $u_n(t) = \delta_n \sin(t/10)$ para $t \geq 0$.

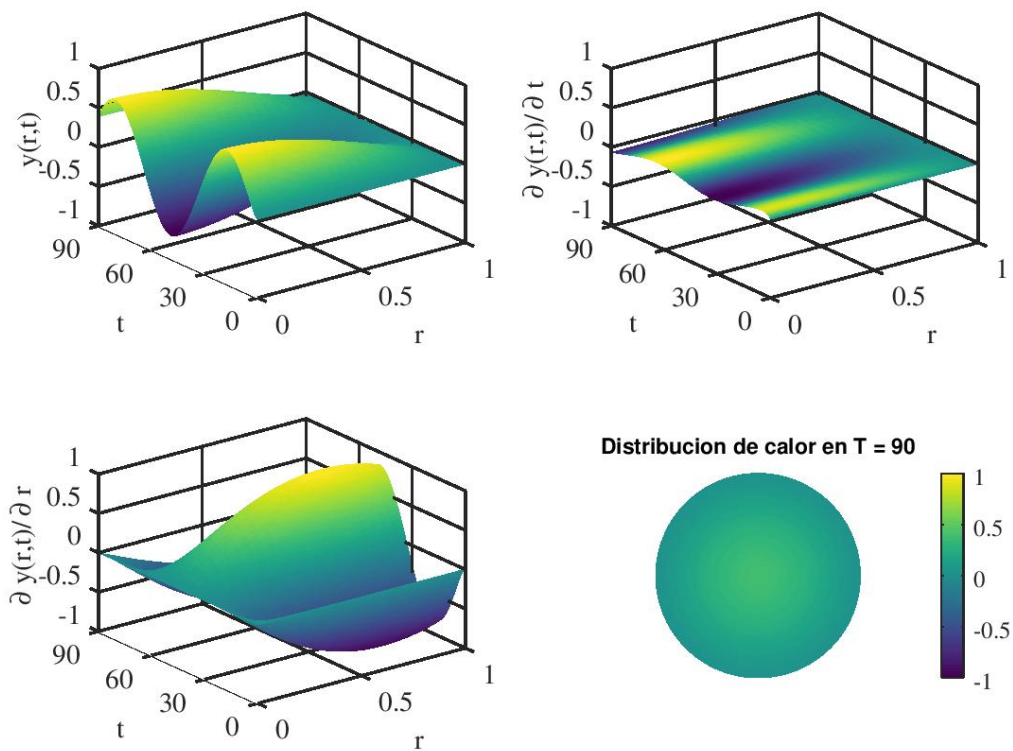


Figura 3.3: Gráfica de y y sus primeras derivadas parciales para $t \in [0, 90]$ considerando $u_n(t) = \delta_n \sin(t/10)$ para $t \geq 0$. Temperatura de la placa de radio 1 al tiempo $t = 90$. (Gráficas elaboradas con Octave)

Sección 3.2

Análisis en una esfera en el espacio

En esta sección consideramos la ecuación de calor en tres dimensiones, sin embargo, aunque tenemos una dimensión extra, el procedimiento y los resultados obtenidos en esta sección son similares a los obtenidos en el caso de dos dimensiones.

3.2.1. Planteamiento del problema

Consideramos la ecuación de calor radialmente simétrica en una esfera de radio $a \in [0, 1]$ con fuentes de calor externas:

$$\frac{\partial y(r, t)}{\partial t} = \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right) + u(r, t), \quad (r, t) \in \Omega = [0, a] \times [0, \infty), \quad (3.11)$$

sujeto a las condiciones inicial y de contorno siguientes

$$y(r, 0) = 0, \quad r \in [0, a], \quad y(a, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.12)$$

Suponemos que las fuentes externas se pueden extender vía series de Fourier-Bessel usando funciones esféricas de Bessel. El conjunto de fuentes externas que consideramos es el siguiente:

$$\mathcal{U}_\Omega := \left\{ u : u(r, t) = \sum_{n \geq 1} u_n(t) j_0(\sqrt{\mu_n} r), \quad u_n(t) \in \mathcal{U}_{\delta_n} \text{ y } \{\delta_n\} \in D(\delta) \right\}, \quad (3.13)$$

donde la notación para \mathcal{U}_{δ_n} y $D(\delta)$ es la misma que se usó en la sección anterior y μ_n satisface la identidad $\sqrt{\mu_n} a = \zeta_n$ donde ζ_n es el n -ésimo cero positivo de j_0 , la función esférica de Bessel de primera especie y orden cero. Las funciones esféricas de Bessel de primer especie y algunas de sus propiedades se discuten en la Sección A.2 y los ceros de la función j_0 en el apartado A.2.2. Como caso particular suponemos que se satisface la desigualdad² $1 < 2\mu_1 k = 2\pi^2 k/a^2$.

Suponemos que las soluciones de la ecuación de calor (3.11) se pueden extender vía series de Fourier-Bessel como sigue:

$$y(r, t) = \sum_{n \geq 1} b_n(t) j_0(\sqrt{\mu_n} r), \quad (r, t) \in \Omega, \quad (3.14)$$

²Cuando $a = 1$ la desigualdad es $a^2/2\pi^2 \approx 0.0506 < k$. Según [9, 18], algunos materiales cuyo coeficiente de difusividad sea menor que 0.0506 son, por ejemplo, el cuarzo y el acero inoxidable 304A; materiales como el acero, oro, plata y cobre cumplen con la desigualdad dada. En contraste al caso de dos dimensiones, lo discutido en esta sección es válido para la parafina a temperaturas cercanas a los 25°C.

con b_n los coeficientes de Fourier-Bessel a determinar para y .

De la expresión de la función u vía series de Fourier-Bessel como en (3.13), notamos que para todo $(r, t) \in \Omega$ se cumple $|u(r, t)| \leq \delta$, esto pues $j_0(\sqrt{\mu_n}r)$ está acotado por uno y

$$\begin{aligned} |u(r, t)| &\leq \sum_{n \geq 1} |u_n(t)| |j_0(\sqrt{\mu_n}r)| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} |u_n(t)| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \delta_n \\ &= \delta. \end{aligned}$$

De manera similar a lo trabajado para la ecuación de calor (3.1) en la sección anterior, consideramos la solución de la ecuación (3.11) en ausencia de fuentes externas y con condiciones inicial y de contorno (3.12), la cual en este caso, nuevamente es la solución trivial.

Definición 3.2.1. Decimos que la solución del problema (3.11)-(3.12) en ausencia de fuentes externas es llamada solución *no perturbada* y la denotamos por \bar{y} .

Similarmente a lo discutido en la sección anterior, usamos la siguiente norma en \mathbb{R}^3 para el punto $y(r, t)$:

$$\|y(r, t)\|_\infty = \max \left\{ |y(r, t)|, \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| \right\}, \quad (r, t) \in \Omega.$$

Damos el equivalente a la Definición 3.1.2 como sigue.

Definición 3.2.2. La solución no perturbada \bar{y} del problema (3.11)-(3.12) es llamada *robustamente estable* si se cumple que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número positivo $\eta = \eta(\varepsilon)$ tal que si $|u(r, t)| \leq \delta < \eta(\varepsilon)$ para todo $(r, t) \in \Omega$, entonces $\|y(r, t)\| < \varepsilon$ en Ω .

Al igual que en el caso del plano, en esta sección proponemos condiciones suficientes para garantizar la estabilidad robusta en el sentido de la Definición 3.2.2 para el sistema (3.11)-(3.12).

3.2.2. Justificación del método de separación de variables de Fourier-Bessel

En este apartado damos condiciones suficientes para que la serie (3.14) sea una solución en el sentido clásico de la ecuación de calor (3.11) sujeta a las condiciones inicial y de contorno (3.12).

Procedemos de manera análoga al caso del plano, sustituimos en la ecuación de calor (3.11) las expresiones para y y para las fuentes externas u como series de Fourier-Bessel para obtener información del comportamiento de los coeficientes de Fourier-Bessel b_n de la solución y . Sustituyendo las expresiones antes mencionadas en la ecuación de calor (3.11) obtenemos lo siguiente

$$\sum_{n \geq 1} \dot{b}_n(t) j_0(\sqrt{\mu_n} r) = \sum_{n \geq 1} \frac{k}{r^2} b_n(t) \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} j_0(\sqrt{\mu_n} r) \right) + u(r, t),$$

usando la tercera identidad de (A.14) obtenemos que $\frac{d}{dr} j_0(\sqrt{\mu_n} r) = -\sqrt{\mu_n} j_1(\sqrt{\mu_n} r)$, con lo que la expresión anterior toma la forma

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \dot{b}_n(t) j_0(\sqrt{\mu_n} r) &= - \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{\mu_n} k}{r^2} b_n(t) \frac{d}{dr} (r^2 j_1(\sqrt{\mu_n} r)) + u(r, t) \\ &= - \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{\mu_n} k}{r^2} b_n(t) \left(2r j_1(\sqrt{\mu_n} r) + r^2 \frac{d}{dr} j_1(\sqrt{\mu_n} r) \right) + u(r, t). \end{aligned}$$

Usando la segunda identidad que aparece en (A.14) observamos que

$$\frac{d}{dr} j_1(\sqrt{\mu_n} r) = \sqrt{\mu_n} (j_0(\sqrt{\mu_n} r) - 2j_1(\sqrt{\mu_n} r)/(r\sqrt{\mu_n})),$$

de esto, notamos lo siguiente:

$$\sum_{n \geq 1} \dot{b}_n(t) j_0(\sqrt{\mu_n} r) =$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{\mu_n k}}{r^2} b_n(t) \left[2r j_1(\sqrt{\mu_n r}) + \sqrt{\mu_n r^2} \left(j_0(\sqrt{\mu_n r}) - \frac{2}{\sqrt{\mu_n r}} j_1(\sqrt{\mu_n r}) \right) \right] \\
&\quad + u(r, t) \\
&= - \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{\mu_n k}}{r^2} b_n(t) \left[2r j_1(\sqrt{\mu_n r}) + \sqrt{\mu_n r^2} j_0(\sqrt{\mu_n r}) - 2r j_1(\sqrt{\mu_n r}) \right] + u(r, t) \\
&= - \sum_{n \geq 1} \mu_n k b_n(t) j_0(\sqrt{\mu_n r}) + u(r, t) \\
&= - \sum_{n \geq 1} \mu_n k b_n(t) j_0(\sqrt{\mu_n r}) + \sum_{n \geq 1} u_n(t) j_0(\sqrt{\mu_n}).
\end{aligned}$$

De lo anterior, obtenemos la siguiente expresión:

$$\sum_{n \geq 1} \left(\dot{b}_n(t) + \mu_n k b_n(t) \right) j_0(\sqrt{\mu_n r}) = \sum_{n \geq 1} u_n(t) j_0(\sqrt{\mu_n}).$$

Al igualar los coeficientes de las series en la expresión anterior, tenemos que los coeficientes de Fourier-Bessel b_n de la serie (3.14) satisfacen la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\dot{b}_n(t) + \mu_n k b_n(t) = u_n(t), \quad b_n(0) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.15)$$

Observamos que los coeficientes b_n satisfacen un caso particular de la ecuación diferencial ordinaria (1.9) vista en la Sección 1.2, esto para $c = k$, $\lambda = \mu_n$ y $\nu = \delta_n$. Considerando lo anterior y bajo el supuesto $0 < \delta_n < \mu_n k$, podemos garantizar las siguientes propiedades:

1. Para cualquier $u_n \in \mathcal{U}_{\delta_n}$ arbitraria, se tiene el siguiente coeficiente de Fourier-Bessel para y dado como solución de la ecuación diferencial ordinaria (3.15) asociada a u_n :

$$b_n(t) = \int_0^t e^{-\mu_n k s} u_n(t-s) ds, \quad t \geq 0. \quad (3.16)$$

2. Las perturbaciones extremas que causan que b_n esté lo más alejado del origen en cualquier tiempo finito $t = \tau$ son u_n^+ y u_n^- tales que $u_n^+(t) = \delta_n$ y $u_n^-(t) = -\delta_n$ para todo tiempo $t \geq 0$, y las soluciones extremas de (3.15), correspondientes son

$$b_n^+(t) = \frac{\delta_n}{\mu_n k} (1 - e^{-\mu_n k t}), \quad t \geq 0,$$

y

$$b_n^-(t) = -\frac{\delta_n}{\mu_n k} (1 - e^{-\mu_n k t}), \quad t \geq 0,$$

respectivamente.

3. Además, para cualquier $u_n \in \mathcal{U}_{\delta_n}$ se cumple la desigualdad

$$-\frac{\delta_n}{\mu_n k} (1 - e^{-\mu_n k t}) \leq \int_0^t e^{-\mu_n k s} u_n(t-s) ds \leq \frac{\delta_n}{\mu_n k} (1 - e^{-\mu_n k t}), \quad t \geq 0, \quad (3.17)$$

donde los extremos de las desigualdades anteriores son las soluciones b_n^- y b_n^+ , respectivamente. A estos coeficientes también los llamamos *coeficientes de Fourier-Bessel extremos*.

De lo anterior tenemos que y , propuesta en (3.14), al considerar los coeficientes dados en (3.16), tiene la forma siguiente:

$$y(r, t) = \sum_{n \geq 1} j_0(\sqrt{\mu_n} r) \int_0^t e^{-\mu_n k s} u_n(t-s) ds, \quad (r, t) \in \Omega. \quad (3.18)$$

Para la serie (3.18) notamos que para todo $(r, t) \in \Omega$:

$$\begin{aligned} |y(r, t)| &\leq \sum_{n \geq 1} \left| j_0(\sqrt{\mu_n} r) \int_0^t e^{-\mu_n k s} u_n(t-s) ds \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \left| \int_0^t e^{-\mu_n k s} u_n(t-s) ds \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{\delta_n}{\mu_n k} |1 - e^{-\mu_n k t}| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{a^2 \delta_n}{\pi^2 k} \\ &= \frac{a^2}{\pi^2 k} \sum_{n \geq 1} \delta_n, \end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad usamos que $|j_0|$ no excede a 1, en la tercera desigualdad usamos la desigualdad (3.17) y en la última desigualdad usamos que $\mu_n > \mu_1 = \pi^2/a^2$.

De forma similar a lo expuesto en la sección anterior, debemos garantizar la convergencia uniforme de las series de las derivadas parciales que aparecen en la ecuación de calor (3.11). Para esto, tenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right) = k \left[\frac{\partial^2 y(r, t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right], \quad (r, t) \in \Omega,$$

de donde podemos observar que, las series cuya convergencia uniforme debemos de garantizar, son las que se obtienen al diferenciar término a término la serie (3.14) como sigue:

una vez respecto de t , una vez respecto de r y dividir por r , y dos veces respecto de r . Las series en cuestión son las siguientes para todo $(r, t) \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(r, t)}{\partial t} &= \sum_{n \geq 1} j_0(\sqrt{\mu_n r}) \left[u_n(t) - \mu_n k \int_0^t e^{-\mu_n k(t-s)} u_n(s) ds \right], \\ \frac{1}{r} \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} &= - \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{\mu_n}}{r} j_1(\sqrt{\mu_n r}) \int_0^t e^{-\mu_n k s} u_n(t-s) ds, \\ \frac{\partial^2 y(r, t)}{\partial r^2} &= - \sum_{n \geq 1} \mu_n \left[j_0(\sqrt{\mu_n r}) - \frac{2}{\sqrt{\mu_n r}} j_1(\sqrt{\mu_n r}) \right] \int_0^t e^{-\mu_n k s} u_n(t-s) ds. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para obtener las expresiones en (3.19) procedemos de forma similar a lo hecho para obtener la ecuación diferencial ordinaria (3.15) al inicio de esta sección.

Para la serie de $\partial y / \partial r$ tenemos que para todo $(r, t) \in \Omega$ se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| &\leq \sum_{n \geq 1} \left| j_0(\sqrt{\mu_n r}) \left[u_n(t) - \mu_n k \int_0^t e^{-\mu_n k(t-s)} u_n(s) ds \right] \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \left| u_n(t) - \mu_n k \int_0^t e^{-\mu_n k(t-s)} u_n(s) ds \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \delta_n + \left| \mu_n k \int_0^t e^{-\mu_n k(t-s)} u_n(s) ds \right| \\ &\leq 2 \sum_{n \geq 1} \delta_n, \end{aligned}$$

donde usamos que $|j_0|$ no es mayor que uno, la desigualdad del triángulo, la desigualdad (3.17) y que $|1 - e^{-\mu_n k t}| \leq 1$ para toda $t \geq 0$.

Para la serie de la función $\partial y / \partial r$ obtenemos que las siguientes desigualdades son válidas para todo $(r, t) \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| &\leq \sum_{n \geq 1} \left| \sqrt{\mu_n} j_1(\sqrt{\mu_n r}) \int_0^t e^{-\mu_n k s} u_n(t-s) ds \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \sqrt{\mu_n} \frac{\delta_n}{\mu_n k} |1 - e^{-\mu_n k t}| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{\delta_n}{\sqrt{\mu_n k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{a\delta_n}{\pi k} \\ &= \frac{a}{\pi k} \sum_{n \geq 1} \delta_n, \end{aligned}$$

donde usamos que $|j_1|$ no excede a uno, la desigualdad (3.17), que $|1 - e^{-\mu_n kt}| \leq 1$ para todo tiempo $t \geq 0$, y que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\sqrt{\mu_n} > \sqrt{\mu_1} = \pi/a$.

Similarmente, para la serie de $(\partial y / \partial r) / r$ notamos que para todo $(r, t) \in \Omega$ se tiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| &\leq \sum_{n \geq 1} \left| \frac{\sqrt{\mu_n}}{r} j_1(\sqrt{\mu_n} r) \int_0^t e^{-\mu_n ks} u_n(t-s) ds \right| \\ &= \sum_{n \geq 1} \left| \frac{\mu_n}{3} \frac{3j_1(\sqrt{\mu_n} r)}{\sqrt{\mu_n} r} \int_0^t e^{-\mu_n ks} u_n(t-s) ds \right| \\ &= \sum_{n \geq 1} \left| \frac{\mu_n}{3} [j_0(\sqrt{\mu_n} r) + j_2(\sqrt{\mu_n} r)] \int_0^t e^{-\mu_n ks} u_n(t-s) ds \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{2\mu_n}{3} \frac{\delta_n}{\mu_n k} |1 - e^{-\mu_n kt}| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{2\delta_n}{3k} \\ &= \frac{2}{3k} \sum_{n \geq 1} \delta_n, \end{aligned}$$

donde usamos la identidad (A.13) para $j_1(\sqrt{\mu_n} r)$, la desigualdad del triángulo, la desigualdad (3.17) y que para todo tiempo $t \geq 0$ se cumple que $|1 - e^{-\mu_n kt}| \leq 1$.

Finalmente, para la serie obtenida de derivar (3.18) término a término dos veces respecto de r observamos lo siguiente para cada $(r, t) \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 y(r, t)}{\partial r^2} \right| &\leq \sum_{n \geq 1} \left| \mu_n \left[j_0(\sqrt{\mu_n} r) - \frac{2}{\sqrt{\mu_n} r} j_1(\sqrt{\mu_n} r) \right] \int_0^t e^{-\mu_n ks} u_n(t-s) ds \right| \\ &= \sum_{n \geq 1} \left| \mu_n \left[j_0(\sqrt{\mu_n} r) - \frac{2}{3} \frac{3}{\sqrt{\mu_n} r} j_1(\sqrt{\mu_n} r) \right] \int_0^t e^{-\mu_n ks} u_n(t-s) ds \right| \\ &= \sum_{n \geq 1} \left| \mu_n \left[j_0(\sqrt{\mu_n} r) - \frac{2}{3} (j_0(\sqrt{\mu_n} r) + j_2(\sqrt{\mu_n} r)) \right] \int_0^t e^{-\mu_n ks} u_n(t-s) ds \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \mu_n \frac{7}{3} \frac{\delta_n}{\mu_n k} |1 - e^{-\mu_n kt}| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{7}{3k} \sum_{n \geq 1} \delta_n,$$

donde usamos las identidades que empleamos en la serie de $(\partial y / \partial r) / r$.

De lo expuesto hasta ahora, observamos que basta con la convergencia de la suma $\sum_{n \geq 1} \delta_n$ para que las series de $\partial y(r, t) / \partial t$, $\partial y(r, t) / \partial r$, $(\partial y(r, t) / \partial r) / r$ y $\partial^2 y(r, t) / \partial r^2$ convergen uniformemente en todo Ω .

Para que la serie (3.18) sea solución de la ecuación de calor (3.11), resta ver que satisface dicha ecuación.

Sustituyendo la serie para y propuesta en (3.18) en el lado derecho de la ecuación de calor (3.11) obtenemos lo siguiente para cada $(r, t) \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right) + u(r, t) &= k \left(\frac{\partial^2 y(r, t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right) + u(r, t) \\ &= - \sum_{n \geq 1} k \left\{ \mu_n \left[j_0(\sqrt{\mu_n} r) - \frac{2}{\sqrt{\mu_n} r} j_1(\sqrt{\mu_n} r) \right] \times \right. \\ &\quad \times \int_0^t e^{-\mu_n k s} u_n(t-s) ds \\ &\quad \left. + \frac{2}{r} \sqrt{\mu_n} j_1(\sqrt{\mu_n} r) \int_0^t e^{-\mu_n k s} u_n(t-s) ds \right\} + u(r, t) \\ &= - \sum_{n \geq 1} k \left\{ \mu_n \left[j_0(\sqrt{\mu_n} r) - \frac{2}{\sqrt{\mu_n} r} j_1(\sqrt{\mu_n} r) + \frac{2}{\sqrt{\mu_n} r} j_1(\sqrt{\mu_n} r) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^t e^{-\mu_n k s} u_n(t-s) ds \right\} + u(r, t) \\ &= - \sum_{n \geq 1} k \mu_n j_0(\sqrt{\mu_n} r) \int_0^t e^{-\mu_n k s} u_n(t-s) ds + u(r, t), \end{aligned}$$

expresando a u como una serie de Fourier-Bessel para cada $(r, t) \in \Omega$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right) + u(r, t) &= - \sum_{n \geq 1} k \mu_n j_0(\sqrt{\mu_n} r) \int_0^t e^{-\mu_n k s} u_n(t-s) ds \\ &\quad + \sum_{n \geq 1} u_n(t) j_0(\sqrt{\mu_n} r) \\ &= \sum_{n \geq 1} \left[u_n(t) - k \mu_n \int_0^t e^{-\mu_n k s} u_n(t-s) ds \right] j_0(\sqrt{\mu_n} r). \end{aligned}$$

Notamos que esta última expresión es la primer expresión dada en (3.19), es decir, que la expresión anterior es la serie de $\partial y(r, t)/\partial t$ para cada $(r, t) \in \Omega$, con lo cual, concluimos que la serie (3.18) es solución en el sentido clásico del problema (3.11) con condiciones (3.12). Esto lo resumimos en el siguiente resultado.

Proposición 3.2.1. Es condición suficiente que la suma $\sum_{n \geq 1} \delta_n$ sea finita para que la función y dada por la serie (3.18) sea una solución del problema (3.11)-(3.12) con fuentes externas en (3.13).

3.2.3. Criterio de estabilidad robusta

En este apartado damos condiciones suficientes para garantizar la estabilidad robusta de la ecuación (3.11) sujeta a las condiciones inicial y de contorno dadas en (3.12), para esto procedemos de forma similar a lo realizado en la sección anterior.

Usando la expresión de la solución de la ecuación de calor (3.11) dada en (3.14) obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} |y(r, t)| &\leq \sum_{n \geq 1} |b_n(t) j_0(\sqrt{\mu_n} r)| \leq \sum_{n \geq 1} |b_n(t)|, \\ \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial t} \right| &\leq \sum_{n \geq 1} |j_0(\sqrt{\mu_n} r) \dot{b}_n(t)| \leq \sum_{n \geq 1} |\dot{b}_n(t)|, \\ \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| &\leq \sum_{n \geq 1} \left| \sqrt{\mu_n} j_1(\sqrt{\lambda_n} r) b_n(t) \right| \leq \sum_{n \geq 1} \sqrt{\mu_n} |b_n(t)|. \end{aligned}$$

De manera análoga a lo trabajado en la sección anterior, para estimar $\|y(r, t)\|_\infty$ para todo punto $(r, t) \in \Omega$, basta con estimar el valor absoluto de $b_n(t)$ y de su derivada para todo tiempo $t \geq 0$. Para $b_n(t)$ podemos usar la desigualdad (3.17) y usar que $e^{-\mu_n k t} \leq 1$ para todo tiempo $t \geq 0$ para obtener que $|b_n(t)| \leq \delta_n / \mu_n k$ para todo $t \geq 0$, mientras que para $\dot{b}_n(t)$ es suficiente notar que $|\dot{b}_n(t)| = |u_n(t) - \mu_n k T_n(t)|$ para todo $t \geq 0$ y aplicar la desigualdad del triángulo, con lo cual $|\dot{b}_n(t)| \leq |u_n(t)| + |\mu_n k b_n(t)| \leq 2\delta_n$, donde en la última desigualdad usamos la cota para $|b_n(t)|$ que acabamos de obtener. Así, las estimaciones que obtenemos son las siguientes

$$|b_n(t)| \leq \frac{\delta_n}{\mu_n k}, \quad \text{y} \quad |\dot{b}_n(t)| \leq 2\delta_n \quad t \geq 0.$$

Para la ecuación diferencial ordinaria (3.15) damos la definición de estabilidad robusta de igual forma que para la ecuación diferencial ordinaria (3.6).

Definición 3.2.3. Decimos que la solución no perturbada \bar{b}_n de la ecuación diferencial ordinaria (3.15) (solución en ausencia de fuentes externas) es robustamente estable, si se cumple que para todo $\varepsilon_n > 0$ dado, existe un número positivo $\eta_n = \eta_n(\varepsilon_n)$ tal que si garantizamos que $|u_n(t)| \leq \delta_n < \eta_n$ para todo $t \geq 0$, entonces la solución b_n de la ecuación diferencial ordinaria (3.15) asociada a u_n satisface $\|b_n(t)\|_\infty < \varepsilon$ para todo tiempo $t \geq 0$.

En la definición anterior usamos la norma siguiente en el plano:

$$\|b_n(t)\|_\infty = \text{máx} \left\{ |b_n(t)|, \left| \dot{b}_n(t) \right| \right\}, \quad t \geq 0.$$

De manera similar a lo discutido en la sección anterior, la Definición 3.2.3 es una adaptación de la definición de estabilidad robusta dada en [17].

Usando las estimaciones para $|b_n(t)|$ y $|\dot{b}_n(t)|$ para $t \geq 0$ dadas antes, observamos que

$$\begin{aligned} \|b_n(t)\|_\infty &= \text{máx} \left\{ |b_n(t)|, \left| \dot{b}_n(t) \right| \right\} \\ &\leq \text{máx} \left\{ \frac{\delta_n}{\mu_n k}, 2\delta_n \right\} \\ &= \delta_n \text{máx} \left\{ \frac{1}{\mu_n k}, 2 \right\}. \end{aligned}$$

Bajo el supuesto $1 < 2\mu_1 k$, tenemos que $\text{máx} \left\{ \frac{1}{\mu_n k}, 2 \right\} = 2$, con lo cual $\|b_n(t)\|_\infty \leq 2\delta_n$ para todo $t \geq 0$. Se sigue que para $\varepsilon_n > 0$ basta pedir que $\delta_n < \varepsilon_n/2$ para garantizar que para todo tiempo $t \geq 0$ se satisface $\|b_n(t)\|_\infty < \varepsilon_n$. Con esto, el valor η_n que aparece en la Definición 3.2.3 es $\eta_n = \varepsilon_n/2$. Lo anterior se resume en el siguiente resultado.

Proposición 3.2.2. La solución no perturbada \bar{b}_n de la ecuación ecuación diferencial ordinaria (3.15) es robustamente estable de acuerdo a la Definición 3.2.3.

De manera análoga al caso en dos dimensiones, para mostrar la estabilidad robusta de la solución no perturbada \bar{y} de la ecuación de calor (3.11), hacemos uso de la estabilidad robusta para la solución no perturbada \bar{b}_n de la ecuación diferencial ordinaria (3.15). Para todo $\varepsilon > 0$ dado consideraremos $\{\varepsilon_n\}$ tal que $\varepsilon_n = \varepsilon(1 - \alpha)\alpha^{n-1}$ para $\alpha \in (0, 1)$. Recordamos que tenemos lo siguiente:

$$\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n = \varepsilon.$$

Así, al aplicar el criterio de estabilidad robusta a la solución no perturbada \bar{b}_n de la ecuación diferencial ordinaria (3.15) con ε_n como antes, obtenemos las estimaciones siguientes para todo $(r, t) \in \Omega$:

$$|y(r, t)| \leq \sum_{n \geq 1} |b_n(t)| < \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n = \varepsilon,$$

$$\left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial t} \right| \leq \sum_{n \geq 1} |\dot{b}_n(t)| < \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n = \varepsilon.$$

y al considerar $\delta_n < \pi k \varepsilon_n / a$ obtenemos la estimación

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| &\leq \sum_{n \geq 1} \sqrt{\mu_n} |b_n(t)| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \sqrt{\mu_n} \frac{\delta_n}{\mu_n k} \\ &< \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{\mu_n} k} \left(\frac{\pi k \varepsilon_n}{a} \right) \\ &< \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{\mu_1} k} \left(\frac{\pi k \varepsilon_n}{a} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{a}{\pi k} \left(\frac{\pi k \varepsilon_n}{a} \right) \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

con lo cual tenemos que

$$\left| \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right| < \varepsilon.$$

Con las estimaciones anteriores obtenemos que la norma de $y(r, t)$ tiene la siguiente estimación para todo $(r, t) \in \Omega$:

$$\|y(r, t)\|_\infty < \varepsilon.$$

Al considerar la estabilidad robusta para \bar{b}_n , tenemos que $\delta_n < \eta_n = \varepsilon_n / 2$, con lo cual

$$\sum_{n \geq 1} \delta_n < \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n / 2 = \varepsilon / 2,$$

de esto se sigue que para garantizar la estabilidad robusta de la solución no perturbada \bar{y} de la ecuación de calor (3.11) basta pedir que

$$\delta < \eta(\varepsilon) := \varepsilon \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\pi k}{a} \right\}.$$

Lo anterior da lugar al siguiente resultado, el cual es el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.2.1. El cumplimiento de la desigualdad $a^2 < 2\pi^2 k$ es una condición suficiente para garantizar que la solución no perturbada \bar{y} de la ecuación de calor (3.11) sujeta a las condiciones (3.12) sea robustamente estable, esto considerando fuentes externas en \mathcal{U}_Ω definido en (3.5).

Al igual que en el caso de dos dimensiones, para α más cercano a 0 en la definición de los ε_n , los primeros términos de la serie (3.14) contribuirán más que para valores de α cercanos a 1.

Conclusiones

Al aplicar teoría de control óptimo a los coeficientes de Fourier-Bessel de la solución de la ecuación de calor radialmente simétrica, encontramos los coeficientes de Fourier-Bessel extremos correspondientes a dicha solución que nos permiten conocer el comportamiento de la solución de la ecuación de calor asociada a la peor fuente de calor externa posible, de tal manera que podemos ajustar nuestro conjunto de fuentes de calor externas para evitar soluciones cuyo comportamiento no sea deseado, por ejemplo, que las soluciones no muestren una temperatura mayor a una temperatura máxima permitida.

Al considerar la norma $\|\cdot\|_\infty$ para los valores de la solución de la ecuación de calor, nos aseguramos que, una vez acotada, la temperatura no exceda la cota dada, no haya cambios bruscos en la temperatura en la placa circular o en la esfera, en el sentido de que un punto sobre nuestra superficie no se va a calentar (o enfriar) al máximo de un momento a otro, y que tampoco tendremos dos puntos “cercaños” de tal forma que uno esté frío y el otro demasiado caliente. Esto puede ser útil en alguna aplicación. Por ejemplo, si el modelo estudiado se pudiera aplicar a una batería circular de algún dispositivo (por ejemplo una batería para computadora), podríamos garantizar, manteniendo la variación de voltaje en cierto rango, que la batería no exceda cierta temperatura dada, que la batería no se caliente mucho de un momento a otro causando algún desperfecto en el dispositivo, y que la batería no se caliente mucho más en una parte que en el resto de la batería.

Los resultados principales de esta tesis son la propuesta de la definición de estabilidad robusta para la ecuación de calor radialmente simétrica, es decir, la propuesta de la Definición 3.1.2 y la Definición 3.2.2; así como criterios suficientes para que la ecuación de calor en cuestión sea robustamente estable, estos criterios se dan en el Teorema 3.1.1 y el Teorema 3.2.1.

De este trabajo se desprenden algunos problemas de interés. En la discusión del Capítulo 3 se supone que el coeficiente de difusividad térmica k , satisface cierta desigualdad, en el caso de dos variables: $a^2/(2z_1^2) < k$; y en el caso de tres variables: $1 < 2\pi^2 k/a^2$. El cumplimiento de dicha desigualdad causa que los resultados obtenidos no sean necesariamente válidos para algunos materiales tales como el acero inoxidable 304A, cuarzo y cloruro de polivinilo (PVC). No obstante, se conjetura que al invertir el sentido de la desigualdad en cada caso, la ecuación de calor en cuestión sigue siendo robustamente estable, pero para abordar tal cuestión se requiere un trabajo más fino con los ceros de las funciones de Bessel.

Queda abierta la cuestión de dar condiciones suficientes para la estabilidad robusta cuando, por ejemplo, la condición inicial de la ecuación de calor no es idénticamente cero, cuando no tenemos simetría radial o cuando consideramos espacios de dimensión mayor a tres, en cuyo caso habría que trabajar con funciones hiperesféricas. También queda abierta la cuestión de extender la definición de estabilidad robusta a otro tipo de ecuaciones diferenciales parciales, por ejemplo la ecuación de onda o la ecuación de Laplace. En esta tesis consideramos fuentes de calor externas expresadas vía series e Fourier-Bessel, pero aún queda ver qué pasa para otro tipo de fuentes externas.

Funciones de Bessel de primera especie

En la discusión siguiente, la cual toma como guía algunos capítulos de [4, 6], detallamos la definición de las funciones de Bessel de primera especie, primero para las funciones cilíndricas y después para las funciones esféricas. Discutimos también algunas identidades que se cumplen para estas funciones y mencionamos algunas propiedades de los ceros de las funciones de Bessel de primer orden. Al final mencionamos algunas propiedades de las series de Fourier-Bessel.

Sección A.1

Funciones cilíndricas

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$r^2 \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + r \frac{d\varphi}{dr} + (r^2 - \nu^2) \varphi = 0, \quad (\text{A.1})$$

la cual es llamada *ecuación diferencial de Bessel de orden ν* , donde el parámetro ν es un número real. La ecuación (A.1) se puede encontrar al realizar separación de variables al resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales.

A cada número ν le corresponde una ecuación diferencial (A.1), sin embargo, las ecuaciones para ν y para $-\nu$ son las mismas.

Tal y como se menciona en [4], el punto $r = 0$ es un punto singular de la ecuación (A.1), por lo que no se puede expandir la solución vía una serie de potencias, así que el método que se utiliza es el método de Frobenius, el cual consiste en construir una solución

en términos de potencias reales, no necesariamente enteras, de r , el cambio $\varphi = r^\nu y$ transforma la ecuación diferencial de Bessel (A.1) en una nueva ecuación diferencial la cual es satisfecha por una serie de potencias de la forma $y = \sum_{n \geq 0} a_n r^{2n}$. Esta serie está únicamente determinada, salvo un factor constante.

Después de aplicar el método de Frobenius obtenemos que la solución de la ecuación (A.1), para ν un número real distinto de $-1, -2, -3, \dots$, se puede escribir como (Lema 6.2.2 de [6])

$$J_\nu(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^\nu \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}, \quad r > 0, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad -\nu \notin \mathbb{N}, \quad (\text{A.2})$$

la cual es llamada *función de Bessel de primera especie de orden ν* , aunque también recibe el nombre de *función de Bessel cilíndrica de orden ν* .

Se puede mostrar, ver por ejemplo [4], que la serie (A.2) converge en todo \mathbb{R} . Es claro que si $\nu \geq 0$ la potencia r^ν está bien definida para todo r positivo, así que la función de Bessel dada en (A.2) está bien definida en $(0, \infty)$.

También se puede notar que si $\nu > 0$ entonces $J_\nu(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0^+$ y que si $\nu = 0$ entonces $J_\nu(r) \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow 0^+$, así que la función J_ν se puede extender por una función continua en $[0, \infty]$, esto definiendo $J_\nu(0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} J_\nu(r)$, para $\nu \geq 0$.

Si $\varphi_1 = \varphi_1(r)$ y $\varphi_2 = \varphi_2(r)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial (A.1) en el intervalo $(0, \infty)$, entonces la solución general de la ecuación (A.1) está dada por

$$y(r) = c_1 \varphi_1(r) + c_2 \varphi_2(r), \quad r \in (0, \infty),$$

con c_1, c_2 constantes. Un ejemplo sencillo en donde este fenómeno ocurre es la ecuación diferencial

$$r^2 \varphi'' + r \varphi' - \varphi = 0, \quad r > 0.$$

La solución general de la ecuación anterior está dada por

$$\varphi(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r}, \quad r > 0,$$

la cual no está definida para $r = 0$, porque esta variable se encuentra en el denominador de un cociente.

Podemos notar, dado que la ecuación (A.1) es invariante bajo el signo de ν , que

$$J_{-\nu}(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n - \nu + 1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}, \quad r > 0, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad \nu \notin \mathbb{N}. \quad (\text{A.3})$$

también es solución de la ecuación (A.1), sin embargo, el valor absoluto de la función (A.3) diverge a ∞ cuando $r \rightarrow 0^+$, esto pues el término $(r/2)^{-\nu}/\Gamma(1-\nu)$, el cual es el primer término de la serie, domina al resto y este tiende a $\pm\infty$ cuando $r \rightarrow 0^+$.

Se puede mostrar (ver el Teorema 5.1 de [4]) que una condición necesaria y suficiente para que J_ν y $J_{-\nu}$ sean linealmente independientes, es que ν no sea entero. De esto se puede deducir que la solución general de (A.1), cuando $\nu \notin \mathbb{Z}$ y solo cuando $r \in (0, \infty)$, esta se puede expresar como una combinación lineal de (A.2) y (A.3), esto es

$$\varphi(r) = c_1 J_\nu(r) + c_2 J_{-\nu}(r), \quad r > 0, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad \nu \notin \mathbb{Z}.$$

A.1.1. Fórmulas recursivas

En esta parte se presentan algunas propiedades sobre las derivadas de las funciones (A.2) y (A.3) las cuales se pueden expresar de forma recursiva.

Para evitar poner restricciones innecesarias, definiremos y denotaremos, para $\nu \in \mathbb{N}$, la función de Bessel de primera especie de orden $-\nu$ como

$$J_{-\nu}(r) = (-1)^\nu J_\nu(r), \quad r > 0, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Para $r > 0$ y $\nu \geq 0$ tenemos que las siguientes identidades son válidas:

$$\frac{d}{dr} [r^{-\nu} J_\nu(r)] = -r^{-\nu} J_{\nu+1}(r), \quad (\text{A.4})$$

y

$$\frac{d}{dr} [r^\nu J_\nu(r)] = r^\nu J_{\nu-1}(r). \quad (\text{A.5})$$

Para probar la identidad (A.4) hay que derivar término a término la serie $r^{-\nu} J_\nu(r)$, esto es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} [r^{-\nu} J_\nu(r)] &= \frac{d}{dr} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(n+\nu+1)} r^{2n} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{2n(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(n+\nu+1)} r^{2n-1} \\ &= -r^{-\nu} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+\nu+2)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+\nu+1} \\ &= -r^{-\nu} J_{\nu+1}(r). \end{aligned}$$

Similarmente, para probar la identidad (A.5) tenemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr} [r^\nu J_\nu(r)] &= \frac{d}{dr} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(n + \nu + 1)} r^{2n+2\nu} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{2(n + \nu)(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(n + \nu + 1)} r^{2n+2\nu-1} \\
 &= r^\nu \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+\nu-1} \\
 &= r^\nu J_{\nu-1}(r).
 \end{aligned}$$

Así que podemos dar por verdaderas las identidades (A.4) y (A.5), las cuales se pueden escribir de manera equivalente como

$$\frac{\nu}{r} J_\nu(r) + J'_\nu(r) = J_{\nu-1}(r), \quad \text{y} \quad \frac{-\nu}{r} J_\nu(r) + J'_\nu(r) = -J_{\nu+1}(r),$$

y estas, al sumarlas resultan en

$$J'_\nu(r) = \frac{1}{2} [J_{\nu-1}(r) - J_{\nu+1}(r)], \quad (\text{A.6})$$

y al restarlas obtenemos

$$\frac{2\nu}{r} J_\nu(r) = J_{\nu-1}(r) + J_{\nu+1}(r). \quad (\text{A.7})$$

En [6] se muestra la validez de las identidades (A.4), (A.5), (A.6) y (A.7) para cualquier $\nu \in \mathbb{R}$.

A.1.2. Ceros de las funciones de Bessel

Cuando consideramos $\nu \in \mathbb{N}_0$ con $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, tenemos que J_ν es una función analítica en $(0, \infty)$ y que tiene una extensión analítica en \mathbb{R} como una función par o impar dependiendo de la paridad de ν . En particular, para $\nu = 0$ se puede ver (Ejemplo 2.13 de [4]) que la función J_0 tiene infinitos ceros aislados en $(0, \infty)$ los cuales se acumulan en infinito. Los ceros de J_0 los denotaremos por z_j y estos se pueden acomodar como

$$z_1 < z_2 < \dots < z_j < \dots,$$

y cumplen que $z_j \rightarrow \infty$ cuando $j \rightarrow \infty$. Se puede mostrar (ver por ejemplo [6]) que en general, para $\nu \in \mathbb{R}$ la ecuación $J_\nu(r) = 0$ tiene una infinidad de raíces positivas las cuales forman una sucesión creciente

$$z_{\nu 1} < z_{\nu 2} < \dots < z_{\nu j} < \dots,$$

los cuales cumplen que $z_{\nu j} \rightarrow \infty$ cuando j tiende a ∞ .

A.1.3. Funciones de Bessel de orden entero

Cuando consideramos que $\nu = m \in \mathbb{N}$, y consideramos la ecuación de Bessel de orden m

$$r^2 \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + r \frac{d\varphi}{dr} + (r^2 - m^2)\varphi = 0,$$

la solución (A.2) toma la forma

$$J_m(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^m \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}, \quad r > 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Las primeras funciones de Bessel de primera especie de orden entero tienen la forma

$$\begin{aligned} J_0(r) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \\ &= 1 - \frac{r^2}{2^2(1!)^2} + \frac{r^4}{2^4(2!)^2} - \frac{r^6}{2^6(3!)^2} + \frac{r^8}{2^8(4!)^2} + \dots \\ J_1(r) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1} \\ &= \frac{r}{2} - \frac{r^3}{2^3 1! 2!} + \frac{r^5}{2^5 2! 3!} - \frac{r^7}{2^7 3! 4!} + \frac{r^9}{2^9 4! 5!} + \dots, \\ J_2(r) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+2)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+2} \\ &= \frac{r^2}{2^2 0! 2!} - \frac{r^4}{2^4 1! 3!} + \frac{r^6}{2^6 2! 4!} - \frac{r^8}{2^8 4! 6!} + \dots \end{aligned}$$

Como ejemplo ilustrativo, en la Figura A.1 podemos observar el comportamiento de estas tres funciones para $r \in [0, 20]$. Una propiedad que se puede observar en la Figura A.1, pero que se cumple para toda J_m con $m \in \mathbb{N}_0$ es que $|J_m(r)| \leq 1$ para toda $r \geq 0$.

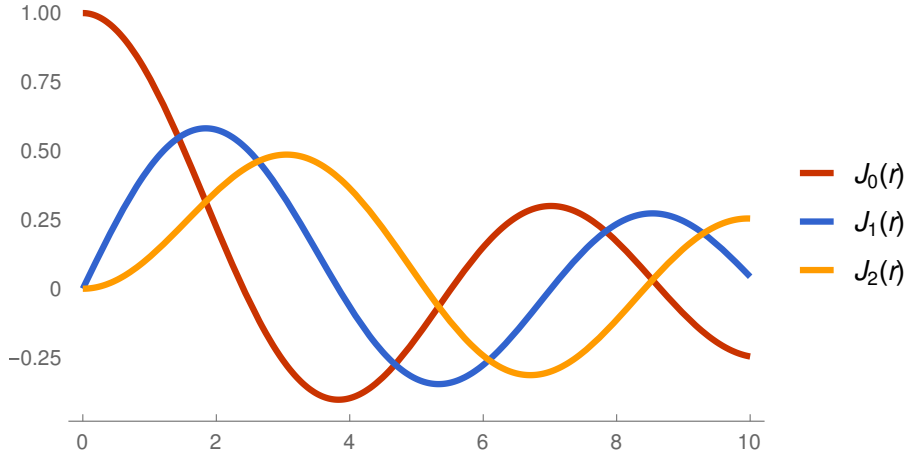


Figura A.1: Funciones J_m para distintos valores de m . (Gráficas elaboradas con Wolfram Mathematica)

A.1.4. Series de Fourier-Bessel

Supongamos que $\nu \geq 0$, entonces las funciones J_ν son acotadas (ver [6]), más aún, son integrables (en el sentido de Riemann) en cualquier subintervalo finito de $(0, \infty)$. En esta discusión nos restringiremos al intervalo $(0, 1)$.

Teorema A.1.1. Supongamos que $\nu \geq 0$ y que $z_{\nu n}$ con $n \in \mathbb{N}$ son los ceros positivos de J_ν . Entonces el sistema $J_\nu(z_{\nu n}r)$ para $r \in (0, 1)$ es un sistema ortogonal con función de peso $w(r) = r$.

PRUEBA:

Para simplificar un poco la notación, supongamos que α y β son ceros positivos distintos de J_ν , denotemos $u(r) = J_\nu(\alpha r)$, $v(r) = J_\nu(\beta r)$ y $y = \alpha r$. Con esta notación tenemos las siguientes identidades, las cuales surgen de la ecuación (A.1)

$$\begin{aligned} y^2 J_\nu''(y) + y J_\nu'(y) + (y^2 - \nu^2) J_\nu(y) &= 0, \\ \alpha^2 r^2 J_\nu''(\alpha r) + \alpha r J_\nu'(\alpha r) + (\alpha^2 r^2 - \nu^2) J_\nu(\alpha r) &= 0, \\ r^2 u'' + r u' + (\alpha^2 r^2 - \nu^2) u &= 0. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Y de manera análoga podemos obtener

$$r^2 v'' + r v' + (\beta^2 r^2 - \nu^2) v = 0. \tag{A.9}$$

Al restar (A.9) de (A.8) podemos eliminar el parámetro ν e identificar una derivada total,

con lo cual obtenemos

$$\frac{d}{dr} [r(u'v - uv')] + (\alpha^2 - \beta^2)ruv = 0.$$

Al integrar la expresión anterior obtenemos

$$0 = (\alpha^2 - \beta^2) \int_0^1 r J_\nu(\alpha r) J_\nu(\beta r) dr,$$

lo cual muestra el teorema. ■

Retomando la notación y algunas expresiones de la prueba del resultado anterior, tenemos al multiplicar por u' la expresión (A.8) obtenemos

$$2r^2 u' u'' + 2r(u')^2 + 2(\alpha^2 r^2 - \nu^2) u u' = 0,$$

lo cual se puede expresar como

$$\frac{d}{dr} [r^2(u')^2 + (\alpha^2 r^2 - \nu^2)u^2] - 2\alpha^2 r u^2 = 0,$$

lo cual, al integrar sobre $(0, 1)$ resulta en

$$(u')^2(1) - 2\alpha^2 \int_0^1 r u^2(r) dr = 0,$$

o, escrito de otra forma

$$(J'_\nu)^2(\alpha) - 2 \int_0^1 r J_\nu^2(\alpha r) dr = 0,$$

por lo que, al considerar la norma de una función con peso $w(r)$, $\|f\|^2 = \int_0^1 f(r)^2 w(r) dr$, tenemos que

$$\|J_\nu(z_{\nu n} r)\|^2 = \int_0^1 r J_\nu^2(z_{\nu n} r) dr.$$

Ahora, supongamos que f es una función real (o compleja) tal que $r f(r)$ es integrable en $(0, 1)$. Entonces definimos el n -ésimo coeficiente de Fourier-Bessel C_n respecto al sistema considerado en el Teorema A.1.1) como

$$c_n := 2 [J_{\nu+1}(\nu n)]^{-1} \int_0^1 r f(r) J_\nu(z_{\nu n} r) dr,$$

y definimos la serie de Fourier-Bessel de f respecto del sistema considerado en el Teorema A.1.1) como

$$f(r) \approx \sum_{n \geq 1} c_n J_\nu(z_{\nu n} r). \quad (\text{A.10})$$

Resulta que el sistema $J_\nu(z_{\nu n} r)$ con $r \in (0, 1)$ cumple la identidad de Parseval y, por lo tanto, es un sistema completo y, si la función f es integrable, entonces la serie (A.10) converge a $f(r)$.

Sección A.2

Funciones esféricas

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dy}{dr} \right) + (r^2 - n(n+1)) y = 0, \quad (\text{A.11})$$

donde n es un entero no negativo. Consideramos unicamente el caso n entero no negativo pues con n de esa forma, las funciones de las que hablaremos son acotadas en $r = 0$.

Las *funciones esféricas de Bessel de primera especie de orden n* son soluciones de la ecuación (A.11) y se pueden expresar en términos de las funciones cilíndricas de Bessel de primer especie de orden n (ver la sección anterior). Definimos las funciones esféricas de Bessel de primera especie de orden n , mediante esta relación, como sigue

$$j_n(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{n+1/2}(r). \quad (\text{A.12})$$

Al tomar límite a estas funciones cuando $r \rightarrow 0^+$ resulta que

$$j_n(r) \rightarrow \frac{r^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)},$$

con lo cual se puede notar que las funciones j_n se pueden extender como una función continua en $[0, \infty]$.

Aunque estas funciones parezcan un poco más complicadas que las funciones de Bessel cilíndricas, resultan más sencillas debido al hecho que se pueden expresar con un número finito de términos. Las primeras funciones esféricas de Bessel de primera especie, para $n = 0, 1, 2, 3$, son

$$j_0(r) = \frac{\sin(r)}{r},$$

$$j_1(r) = \frac{\sin(r)/r - \cos(r)}{r},$$

$$j_2(r) = \frac{(3/r^2 - 1)\sin(r) - 3\cos(r)/r}{r}$$

$$j_3(r) = \frac{(1 - 45/r^2 + 105/r^4)\sin(r) + (10/r - 105/r^3)\cos(r)}{r}.$$

En la Figura A.2 podemos observar el comportamiento de estas funciones en el intervalo $[0, 10]$.

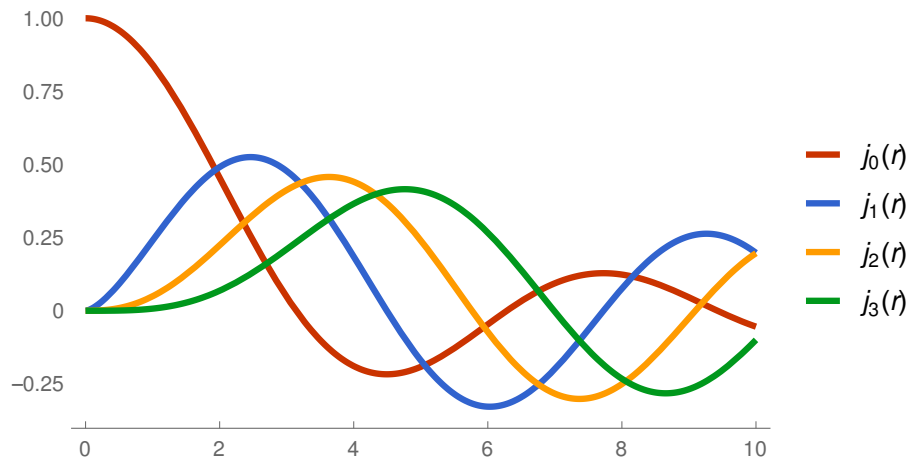


Figura A.2: Funciones esféricas de Bessel de primera especie de orden $n = 0, 1, 2, 3$. (Gráficas elaboradas con Wolfram Mathematica)

Para estas funciones se cumple que $|j_n(r)| \leq 1$ para toda $r \geq 1$ y toda n entero no negativo.

A.2.1. Relaciones de recurrencia

Utilizando algunas fórmulas de recurrencia obtenidas en la sección anterior para las funciones de Bessel cilíndricas podemos deducir algunas identidades para las funciones esféricas de Bessel.

Utilizando la fórmula (A.7) para la función $J_{n+1/2}$ tenemos que

$$\frac{2(n+1/2)}{r} J_{n+1/2}(r) = J_{(n+1/2)-1}(r) + J_{(n+1/2)+1}(r)$$

$$\frac{2n+1}{r} J_{n+1/2}(r) = J_{n-1/2}(r) + J_{n+3/2}(r),$$

al multiplicar por $\sqrt{\frac{\pi}{2r}}$ de ambos lados de la última expresión anterior obtenemos la siguiente identidad para j_n

$$\frac{(2n+1)j_n(r)}{r} = j_{n-1}(r) + j_{n+1}(r). \quad (\text{A.13})$$

Por otro lado, usando las identidades (A.6) y (A.7) se pueden mostrar las siguiente sucesión de identidades

$$\begin{aligned} j_n'(r) &= \frac{1}{2n+1} (nj_{n-1}(r) - (n+1)j_{n+1}(r)) \\ &= j_{n-1}(r) - \frac{n+1}{r} j_n(r) \\ &= \frac{n}{r} j_n(r) - j_{n+1}(r). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

A.2.2. Ceros de las funciones esféricas de Bessel

Los resultados del apartado sobre los ceros de las funciones de Bessel cilíndricas se pueden extender a las funciones esféricas de manera bastante directa usando la relación (A.12). Comenzamos con $n = 0$, para lo cual, los ceros positivos ζ_j , $j \in \mathbb{N}$ se pueden acomodar de la siguiente manera

$$\zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_j < \dots,$$

y cumplen que $\zeta_j \rightarrow \infty$ cuando $j \rightarrow \infty$.

De manera análoga, para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que los ceros positivos $\zeta_{n,j}$, $j \in \mathbb{N}$, de $j_n(r)$ satisfacen

$$\zeta_{n,1} < \zeta_{n,2} < \dots < \zeta_{n,j} < \dots$$

De manera análoga al apartado anterior, los resultados sobre series de Fourier-Bessel para funciones cilíndricas de primera especie se pueden extender para funciones esféricas, solo que en este caso la función de peso será $w(r) = r^2$. La norma de $j_n(\zeta_{n,j}r)$ se puede obtener de manera parecida al caso de $J_\nu(z_{n,j}r)$ y la series de Fourier-Bessel para funciones esféricas se definen similarmente a la series para funciones cilíndricas dadas en (A.10).

Bibliografía

- [1] Agarwal, R. P., & O'Regan, D. (2008). An introduction to ordinary differential equations. Springer Science & Business Media.
- [2] Aleksandrov, V.V., Reyes-Romero, M., Sidorenko, G.Y. et al. Stability of controlled inverted pendulum under permanent horizontal perturbations of the supporting point. *Mech. Solids* 45, 187–193 (2010). <https://doi.org/10.3103/S0025654410020044>
- [3] Alexander B. Kurzhanski, Pravin Varaiya (2014). Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. Birkhäuser Basel.
- [4] Al-Gwaiz, M. A. (2008). Sturm-Liouville theory and its applications (Vol. 7). Berlin: Springer.
- [5] Arnold, VI. (1992). Ordinary Differential Equations (3er edition). Springer.
- [6] Broman, A. (2014). Introduction to partial differential equations: from Fourier series to boundary-value problems. Dover Publications Corporation.
- [7] Boltyanski, V. G., Gamkrelidze, R. V., Mishchenko, E. F., & Pontryagin, L. S., The maximum principle in the theory of optimal processes (in Russian). *Doklady Akad. Nauk SSSR* 119 (1958), no. 6, 1070-1073.
- [8] Boltyanski, V., Martini, H., Soltan, V., & Soltan, V. P. (1999). Geometric Methods and Optimization Problems (Vol. 4). Springer Science & Business Media.

- [9] Blumm J., Lindemann A. (2003–2007). Characterization of the thermophysical properties of molten polymers and liquids using the flash technique. *High Temperatures – High Pressures*. 35/36 (6): 627. <https://doi.org/10.1068/htjr144>.
- [10] Evans, L. C. (1998). *Partial differential equations*. Graduate studies in mathematics, 19(2).
- [11] Fasano, A., & Marmi, S. (2006). *Analytical mechanics: an introduction*. OUP Oxford.
- [12] Hegyi, B., & Jung, S. M. (2013, January). On the stability of heat equation. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2013). Hindawi.
- [13] L. Elsgoltz. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Mir, Moscú, 1983.
- [14] Kurkina, E. S., & Nikol'skii, I. M. (2009). Stability and localization of unbounded solutions of a nonlinear heat equation in a plane. *Computational Mathematics and Modeling*, 20(4), 348-366.
- [15] Lebedev, L. P., & Cloud, M. J. (2003). *The calculus of variations and functional analysis: With optimal control and applications in mechanics* (Vol. 12). World Scientific.
- [16] Logan, J. D. (2014). *Applied partial differential equations*. Springer.
- [17] Temoltzi-Ávila, R., & Ávila-Pozos, R. (2020). Conjunto de alcanzabilidad de un sistema mecánico controlable y condiciones de estabilidad robusta. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 17(3), 285-293. <https://doi.org/10.4995/riai.2020.11938>
- [18] Jim Wilson (August 2007). Thermal diffusivity. Tomado de: <http://www.electronics-cooling.com/2007/08/thermal-diffusivity/>
- [19] Yang, X. (2019). Stability in measure for uncertain heat equations. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 24(12), 6533.