UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

TESIS

“Tareas de aprendizaje para promover el entendimiento de las funciones seno y coseno en Telebachillerato”

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica

PRESENTA

Farid Azael Mejía Bolio

Director
Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez

Codirectora
Dra. Luisa Mabel Morales Maure

Comité tutorial
Dr. Marcos Campos Nava

Dr. Carlos Arturo Soto Campos

Dr. Carlos Rondero Guerrero

Mineral de la Reforma, Hidalgo, mayo 2023

AGRADECIMIENTOS

A Dios por darme la fortaleza de seguir adelante con la dicha de tener salud e inspiración para poder cumplir con el propósito de finalizar el presente proyecto.

A mi esposa que siempre me ha brindado el apoyo que tanto necesito, en momentos cruciales para tomar decisiones asertivas y que favorecen el pleno desarrollo personal y familiar.

A mis hijos por ser mi inspiración, fuente de energía y motivación para cumplir con mis propósitos.

A mis padres por la vida y por el apoyo a lo largo de mi trayectoria profesional, especialmente a mi madre quien falleció meses antes de finalizar con este trabajo (con todo mi cariño, te amo mamá, a ti te lo *dedico*).

Al Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez por el tiempo dedicado, por los momentos de fortaleza emocional, por el acompañamiento y paciencia.

Al Dr. Marcos Campos Nava por los llamados de atención que me ayudaron a formar un gusto por el trabajo realizado.

A los Doctores: Carlos Rondero Guerrero y Carlos Arturo Soto Campos por sus puntuales observaciones en favor del mejoramiento del escrito.

A mis estudiantes que con su participación mostraron interés por aprender, en todas las etapas del proceso.

Mineral de la Reforma, Hgo., a 14 de abril de 2023

Número de control: ICBI-AAMyF/1448/2023
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

El Comité Tutorial de la tesis titulada **"Tareas de aprendizaje para promover el entendimiento de las funciones seno y coseno en Telebachillerato"**, realizada por el sustentante **Farid Azael Mejía Bolio** con número de cuenta **126041** perteneciente a la **Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial

Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez
Director

Dr. Carlos Arturo Soto Campos
Miembro del comité

Dr. Marcos Campos Nava
Miembro del comité

Dr. Carlos Rondero Guerrero
Miembro del comité

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Ciudad del Conocimiento
Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: +52 (771) 71 720 00 ext. 2531
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx

RESUMEN

El presente proyecto de investigación se abordó mediante el diseño, implementación y evaluación de una tarea de aprendizaje matemático (TAM), en la enseñanza del tema funciones trigonométricas seno y coseno, para su desarrollo en el primer año de bachillerato. Se identificó en la literatura un grupo de dificultades que se encuentran asociadas a su enseñanza y aprendizaje, destacando el hecho de que diversas investigaciones señalan que el origen de tales dificultades deriva de una tradición dicotómica en su enseñanza: su concepción como razones entre los lados de un triángulo rectángulo, dificulta el tránsito hacia su concepción como funciones trigonométricas.

En la propuesta realizada, se consideró que la tarea de aprendizaje debiera estar conformada por un conjunto de elementos relevantes tal como el empleo de diferentes registros de representación, incluyendo manipulables físicos, resolución a lápiz y papel, y el uso de una herramienta digital; para permitir que los estudiantes identificaran patrones, formularan conjeturas, realizaran comprobaciones y comunicaran resultados, acciones consideradas como importantes en el desarrollo de los procesos de reflexión y el entendimiento de contenidos matemáticos.

Para el diseño e implementación de la tarea de aprendizaje, se tomaron en consideración referentes teórico-metodológicos como la teoría de registros de representaciones semióticas, el empleo de las herramientas digitales en la enseñanza, la abstracción en contexto y la demanda cognitiva de las tareas. Los resultados de la investigación sugieren que una tarea de aprendizaje basada en algunos de los elementos mencionados, permite que los estudiantes incrementen su disposición e interés, así como el entendimiento de los conceptos abordados, desarrollando en forma parcial algunos de los niveles considerados en el marco de la demanda cognitiva según la escala evaluativa del análisis teórico de este referente.

ABSTRACT

The present research project was approached through the implementation, evaluation and design of a mathematical learning task, in the teaching of the topic sine and cosine trigonometric functions, for its development in the first year of high school. A group of difficulties associated with their teaching and learning was identified in the literature, emphasizing the fact that various investigations indicate that the origin of such difficulties derives from a dichotomous tradition in their teaching: their conception as reasons between the sides of a right triangle, makes it difficult transit towards a conception as trigonometric functions.

In the propose designed, it was considered that the learning task should be associated to a set of relevant elements such as the use of different representation registers, including physically manipulated, resolution through pencil and paper, and the use of a digital tool; to allow students to identify patterns, conjeture formulation and they make verifications, beside communicate results, actions considered important in the development of reflection processes and the understanding of mathematical contents.

For the design and implementation of the learning task, theoretical-methodological references such as the theory of semiotic representations registers, the employ of digital tools in teaching, abstraction in context and the cognitive demand of the tasks were considered. The research results suggest that a learning task based on some of the mentioned elements, allows students to increase their disposition and interest, at the same time understanding the concepts addressed, partially developing some of the levels considered in the framework of cognitive demand according to the evaluative scale of the theoretical analysis of this referent.

ÍNDICE

Contenido **Página**

CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN 8
1.1. Introducción 8
1.2. Antecedentes 10
1.2.1. Algunos referentes históricos de las funciones trigonométricas 10
1.2.2. Sobre el aprendizaje de las funciones trigonométricas 14
1.3. El problema de investigación 16
1.3.1. Objetivo general 18
1.3.2. Objetivos específicos 18
1.3.3. Preguntas de investigación 18
1.4. Estado del arte 19
1.4.1. Sobre la trigonometría en el currículo escolar 19
1.4.1.1. La trigonometría en el currículo de secundaria 20
1.4.1.2. La trigonometría en el currículo de bachillerato 22
1.4.2. Sobre la enseñanza de las funciones trigonométricas 25

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL 27
2.1. Diseño de tareas de instrucción 27
2.2. Teoría de representaciones semióticas de Duval 28
2.3. Empleo de las herramientas digitales en la enseñanza 29
2.4. Demanda cognitiva de las tareas 30
2.5. Abstracción en contexto 33
2.6. Aprendizaje con entendimiento 35
2.7. Referentes conceptuales 35

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA 36
3.1. Introducción 36
3.2. Características de la investigación cualitativa 37
3.3. Sujetos de estudio 38
3.4. Diseño de la tarea de aprendizaje 38

CAPÍTULO 4. RESULTADOS Y DISCUSIONES 43
4.1. Análisis sesión I 43
4.2. Análisis sesión II 46
4.3. Análisis sesión III 48
4.4. Análisis sesión IV 51
4.5. Análisis sesión V 53
4.6. Análisis sesión VI 56

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES 60

REFERENCIAS 67

APÈNDICE A: TRANSCRIPCIÓN DE REGISTROS ESCRITOS 72

APÈNDICE B: TRANSCRIPCIÓN DE GRABACIONES DE AUDIO 87

APÈNDICE C: TAREA DE APRENDIZAJE MATEMÀTICO 104

APÈNDICE D: HOJAS DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES 121

CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

Desde su origen, en la antigüedad de la tradición occidental, la trigonometría se concibió como el estudio de las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Particularmente, a partir de las razones trigonométricas, que fueron planteadas como razones o cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo (Hallinan y Sandford, 2019). Es así que el término trigonometría es una palabra compuesta que proviene del griego "triángulo" y "medida", y ha jugado un rol importante en el desarrollo de la matemática en la era moderna.

Las culturas ancestrales apreciaron e identificaron la agrimensura en la construcción, derivado de la necesidad de identificar, dibujar, medir, representar las superficies y en general la ubicación de predios. La importancia del ángulo recto en el trazado de sus construcciones fue de importancia para mantener la estabilidad de sus viviendas y así poder habitarlas y evaluar monetariamente las propiedades.

Un descubrimiento realizado por la cultura Babilónica a inicios del siglo XX, refleja la relevancia que tenía la trigonometría, en particular hablamos de la famosa tablilla Plimpton, que data de alrededor de 1800 A.C. Contiene información numérica relacionada a los triángulos rectángulos, su significado sigue en estudio y debate pero se acepta en que presenta un conjunto de ternas pitagóricas (Rondero et al., 2018), esto es, tres números positivos representando las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

A la mitad del siglo XVII, los científicos Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz desarrollaron el cálculo diferencial e integral, uno de los fundamentos del trabajo de Newton fue la representación de varias funciones matemáticas por medio de series infinitas de potencias de la variable x. Newton halló la serie para $sen\, x$ y series similares para $cos\, x$ y $tag\, x$. Con la invención del Cálculo, las funciones trigonométricas fueron integradas al análisis, donde hoy día hacen un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas (Cuevas-Ramírez, 2021).

La trigonometría siguió siendo un área de interés y estudio dentro de las matemáticas, en el siglo XVII Joseph Fourier aplicó las funciones trigonométricas en sus investigaciones sobre las ondas y las vibraciones. Las denominadas "series de Fourier", producto de su trabajo han sido usadas ampliamente en campos científicos tan variados como la óptica, el electromagnetismo, y más recientemente en la mecánica cuántica (Hallinan y Sandforfd, 2019).

Las aplicaciones que tiene la trigonometría permiten obtener medidas precisas al considerar los lados de triángulos con respecto a sus ángulos. Las aplicaciones se dan en diferentes rubros como la agricultura, carpintería, topografía, ingeniería, astronomía, navegación (Hoachlander, 1997).

Como puede apreciarse en los ejemplos anteriores, la relevancia que ha tenido la trigonometría como un área de la matemática, explica su incorporación en la enseñanza escolarizada, desde el nivel de secundaria en México y otros países. Es usual que se inicie su estudio en los cursos de matemáticas de la escuela secundaria y tenga continuación en el nivel bachillerato y el primer año de diversas carreras universitarias.

El estudio de la trigonometría generalmente comienza con un enfoque en las razones, formadas por los lados de triángulos rectángulos. Este método es eficaz para resolver triángulos rectángulos y por tanto ocupa su lugar en el plan de estudios de secundaria y bachillerato, sin embargo este método se basa fuertemente en la memorización de expresiones matemáticas (Kendal y Stacey, 1998).

En este sentido la trigonometría en el currículo de secundaria se aborda como un proceso de repetición o trabajo de memoria de las definiciones, al no promover el pensamiento matemático en los estudiantes, esto en parte a los recursos empleados en el aula. Debemos observar que con mucha frecuencia los libros de texto son parte del problema, no de la solución, al plantear situaciones poco accesibles a los alumnos (medir la anchura de un río, hallar la altura de un acantilado, calcular la altura de un faro visto desde un barco). Algunos profesores indican que esto se debe a que los alumnos no saben leer y se olvida que los ejercicios tipo problemas deben ser significativos para que ellos se muestren más interesados en esta disciplina (Aray et al., 2020).

En el programa de estudios de Educación Media Superior (SEP, 2017), en el campo disciplinar de matemáticas para el bachillerato general (Telebachillerato Comunitario) se especifica que como aprendizaje esperado, la solución de problemas relacionados con el entorno físico.

Para el programa de estudios de segundo semestre en el programa de trigonometría, se solicita al estudiante resolver ejercicios y problemas usando las propiedades de ángulos y triángulos, además que los problemas planteados deben estar relacionados con situaciones de la vida real, del entorno de los estudiantes, así como problemas de su comunidad. Los programas no ofrecen indicaciones sobre tener en consideración los conocimientos previos de los alumnos para la resolución de problemas.

La enseñanza de razones y funciones trigonométricas en el nivel educativo secundaria y bachillerato es de gran relevancia para el nivel Universitario. Se identifica en la literatura que hay un fuerte énfasis en nivel superior en atender la comprensión de funciones trigonométricas, que es un recurso para avanzar en carreras como ingeniería (Torres-Corrales y Montiel, 2021).

Haciendo énfasis en el tránsito de los niveles educativos básicos al nivel superior, resulta relevante que el estudiante comprenda el paso de la noción de razones trigonométricas al concepto de funciones trigonométricas.

Los contenidos matemáticos anteriormente descritos se pueden abordar bajo diferentes estrategias de enseñanza, las herramientas didácticas se presentan como un recurso que puede ayudar a articular propuestas pedagógicas, el empleo de materiales tales como manipulables físicos, uso de materiales a lápiz y papel, el uso de herramientas digitales, por mencionar algunas, pueden contribuir al desarrollo de tales propuestas para el aprendizaje de las razones trigonométricas y posteriormente las funciones trigonométricas.

El empleo de forma adecuada de los materiales pedagógicos, así como plantear un problema y animarlos a resolverlo, incide de forma positiva en el desempeño y aprendizaje por parte de los estudiantes (Cañadas y Castro, 2022). Las estrategias que se plantean en los programas de estudio de nivel medio superior requieren de un trabajo de reflexión, análisis, reconocimiento de contenidos matemáticos para abordar tareas de aprendizaje y en la solución de problemas reales, más allá de la aplicación directa de un recurso matemático.

1.2. Antecedentes

1.2.1 Algunos referentes históricos de las funciones trigonométricas

En la antigua Grecia, Tales de Mileto empleó sus conocimientos obtenidos del estudio de culturas como la babilónica y egipcia, para estimar la altura de la pirámide de Guiza. Para sus cálculos consideró que al estar siendo esta irradiada por el sol, producía una sombra que era comparada en otro punto con un objeto vertical ortogonal al suelo (gnomon) que produce una sombra. En la Figura 1 se muestran los elementos matemáticos, empleados por este personaje: la proporción de la sombra del objeto vertical (a) a la sombra de la pirámide (e) más la distancia del pie de la altura de la pirámide hasta su base (f) era igual a la relación entre la altura del objeto vertical (b) y de la pirámide (d) (Mateus, 2013).

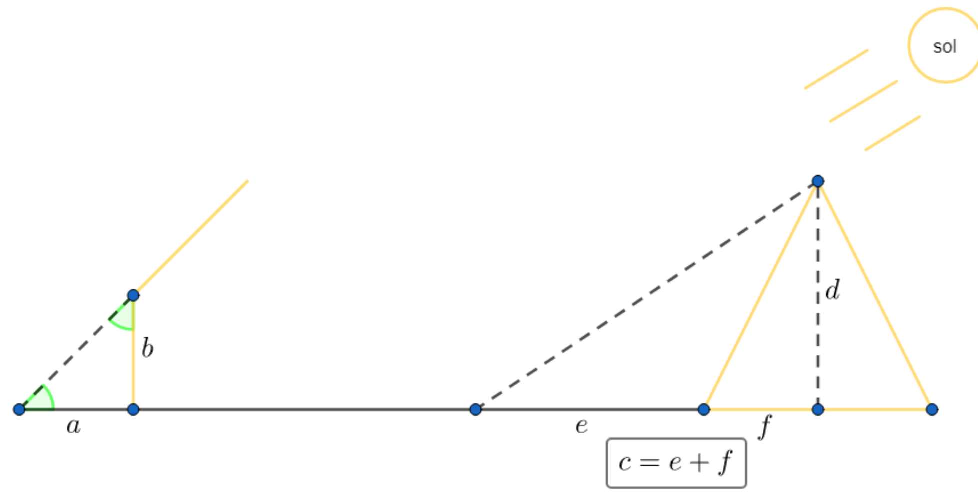


Figura 1. Medición de la altura de pirámide Guiza, mediante la comparación de sombras proyectadas en el suelo. Fuente: Mateus (2013).

La trigonometría de la antigua Grecia incluyó otros personajes que dedicaron tiempo en estudiar fenómenos físicos. Tal es el caso de Aristarco de Samos, fue el primero en afirmar que la Tierra y los planetas giran alrededor del Sol, además escribió una obra llamada “Sobre las dimensiones y las distancias del Sol y la Luna”. Emprende la tarea de determinar la relación entre las distancias de la Tierra (T) a la Luna (L) y al Sol (S). En la Figura 2 se representa una construcción geométrica, que como punto de partida considera que el triángulo formado por los vértices SLT, es rectángulo en L, el método describe que cuando el sol ilumina la mitad del disco lunar, se puede observar a la Tierra y la Luna que se encuentran la misma disposición geométrica. Aristarco fue capaz de postular que el ángulo SLT es $\frac{29}{30}$ partes de un ángulo recto, aproximadamente 87°, acercándose a la construcción geométrica de un triángulo rectángulo (Ortiz, 2005).

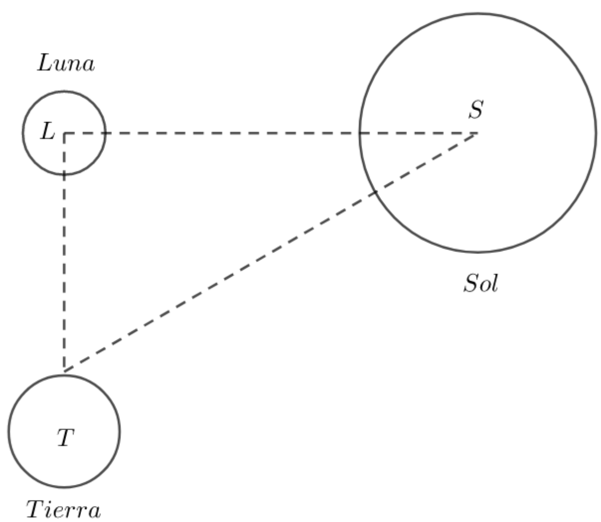


Figura 2. Reflexión de la luz solar sobre la luna. Fuente: Ortiz (2005).

Siguiendo el orden de ideas, se continúa con el relato de otro personaje, con aportaciones para el progreso de la Astronomía. En la sintaxis matemática de Ptolomeo (150 D.C.), en el texto mejor conocido como el Almagesto, dividió a la circunferencia en 360° y el diámetro en 120 partes, cada parte en minutos, cada minuto en segundos. Ptolomeo admitió la siguiente razón:

$$\frac{circunferencia}{2\,radio} = 3°\,8'\,30''$$

Para así llegar a establecer que $\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} \approx$ 3.14166, empleando la siguiente representación $(3, 8, 30) = \left(\frac{377}{120}\right) \approx$ 3.14166, (este valor se obtiene al emplear seis cifras significativas). El escrito contiene la descripción de numerosos elementos de trigonometría, por ejemplo una tabla de cuerdas que pertenecían a diferentes ángulos, que variaban por mitades de ángulo, equivalente a una tabla de senos, de acuerdo con la fórmula cuerda: $\alpha = 2R\ sen\ \frac{\alpha}{2}$ dónde $R = 60$. Ptolomeo encontró, para la cuerda de 1°, el valor (Ortiz, 2005).

$$(1, 2, 50) = \frac{1}{60} + \frac{2}{60^2} + \frac{50}{60^3} \approx 0.017453$$

La matemática, a través de la historia, no puede ser separada de la astronomía. De este modo, la astronomía árabe se interesó en la trigonometría, por ejemplo el seno correspondía a la mitad de la cuerda del doble arco, y era concebido como una línea, no como un número (como referencia Ptolomeo usó la cuerda total).

En la época aproximada entre 850 y 929 D.C., se hallan los trabajos del astrónomo Al-Battani, quien usaba una tabla de cotangentes para cada grado (umbra extensa), así como la regla del coseno para los triángulos esféricos (Stewart, 2009).

Otro estudioso árabe, Abu-al-Wafa, derivó el teorema del seno de la geometría esférica hacia el 940-997 D.C., calculó tablas del seno para intervalos de quince minutos, cuyos valores eran correctos en ocho lugares decimales. Introdujo también los equivalentes de la secante y la cosecante (Stewart, 2009).

Las siddhantas fueron contribuciones de hindúes a las ciencias exactas, un ejemplo de ello fue el surya siddhanta (fechado entre 300-400 D.C.), que contiene una tabla de senos en vez de cuerdas, estos senos eran semi-cuerdas, que en consecuencia eran segmentos lineales.

Ya en la edad moderna, hacia el final del siglo XVI, el físico y astrónomo italiano Galileo, utilizó la trigonometría para modelar la trayectoria de los proyectiles, cálculos en los que la gravedad se consideraba así mismo un factor importante. Esas mismas ecuaciones se han usado ya en el siglo XX, para los cálculos del movimiento de cohetes y misiles en la atmósfera terrestre.

También hacia el año 1500 un cartógrafo alemán de nombre Frisius, usó la trigonometría para estimar distancias, y obtener mapas más exactos.

En 1614 el matemático escocés John Napier descubrió los logaritmos, al estar compilando tablas de seno, coseno y tangente. En 1722 Abraham de Moivré mostró cómo las funciones trigonométricas podían ser usadas en el análisis de números complejos.

Estos avances resultaron de suma importancia para áreas científicas como fue el caso de las ingenierías mecánica y eléctrica. Con estos antecedentes Leonard Euler derivó una de las ecuaciones fundamentales de la matemática, la llamada ahora identidad de Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$ que se relaciona con las funciones seno y coseno mediante la siguiente expresión $e^{ix} = \cos(x) + i\ sen(x)$.

La fórmula de Euler proporciona una potente conexión entre el análisis matemático y la trigonometría, pues es la base para poder evaluar la función exponencial de cualquier número complejo, lo que nos dice es que la exponencial de un complejo imaginario puro es un número complejo cuyas partes real e imaginaria están dadas respectivamente por las funciones coseno y seno (Stewart, 2009). Una propiedad importante de la fórmula es que es la única función matemática que permanece con la misma forma en las operaciones de integración y derivación lo que permite su uso en ecuaciones diferenciales a ecuaciones con forma algebraica, simplificando mucho las operaciones.

Debido a lo anterior, se considera que la actual notación trigonométrica se remonta a Euler en el siglo XVIII. La llamada identidad de Euler, formulada en 1747, resultó fundamental para que Abraham de Moivre (1749) utilizara dicha fórmula para simplificar los cálculos de las operaciones de radicación y exponenciación de los números complejos, expresados en su forma polar.

Como se puede ver en los antecedentes antes mencionados, la trigonometría está presente en el desarrollo de la matemática y también ha tenido diversas áreas de aplicación. La historia de la trigonometría tuvo su origen en una necesidad práctica para estudiar el movimiento de las estrellas, guiar la navegación. Posteriormente su desarrollo tuvo impacto en otras áreas de las matemáticas y la física (Montalvo, 2012).

La revisión histórica de la literatura presentada en esta sección nos permite visualizar la importancia de la enseñanza de la trigonometría en el sistema escolarizado actual. Es así que las ideas revisadas como la estimación de altura de las pirámides, realizando operaciones aritméticas, el cálculo para la aproximación de la distancia entre la luna y la tierra y el cálculo del valor y aproximación a ángulo recto, así como las diferentes aproximaciones para estimar con una mejor precisión el valor de pi, entre otras aplicaciones fueron consolidando el campo de la trigonometría y su relación con otras áreas de la matemática.

Se considera por lo tanto que esta rama es un campo de la matemática, que se inicia a estudiar en el nivel de educación secundaria, teniendo cursos en bachillerato y en primer año universitario. Durante la enseñanza de este tópico se han identificado diversas dificultades, dentro de las cuales algunas son referidas por autores como Franchi y Hernández (2003), Godino, Batanero y Font (2003) y Zubieta (2018). La perspectiva de la revisión realizada nos permite enmarcar en la siguiente sección algunas de estas dificultades, lo que ayuda a ir delimitando el problema de investigación.

1.2.2. Sobre el aprendizaje de las funciones trigonométricas

La revisión de la literatura realizada en la sección previa permite dar cuenta que la concepción de las funciones seno y coseno ha tenido un mayor desarrollo como razones entre los lados de triángulos rectángulos, y solo en la historia más reciente de la matemática se ha ampliado como una concepción de funciones, donde existe una correspondencia que asocia una variable independiente con una variable dependiente y que permite abordar a otros conceptos asociados tales como dominio, rango, límites y continuidad, entre otros.

Se han reportado en la literatura (Altman y Kidron, 2016) un conjunto de dificultades asociadas al aprendizaje y la enseñanza de las funciones trigonométricas. Una de las problemáticas identificadas es que la enseñanza de este tema enfatiza la comprensión de las funciones trigonométricas, solamente como razones (cocientes) entre dos cantidades (Kendal y Stacey, 1998).

A modo de ejemplo, en el contexto del triángulo rectángulo, la función seno de un ángulo, es comprendida solamente como la razón entre el cateto opuesto de un ángulo agudo, y la hipotenusa; o en el mismo sentido, la tangente es entendida como la razón o cociente entre las magnitudes del cateto opuesto y el adyacente (ver Figura 3).

Estos autores también señalan que al dar más énfasis en esta concepción (la razón entre dos cantidades), no se transita de modo suficiente hacia la noción del seno, coseno o tangente (por mencionar las primeras tres razones que el estudiantes conoce) como funciones circulares ni como funciones de variable real.

Además lo anterior se relaciona con otro aspecto: es difícil que el estudiante desligue sus ideas sobre dichas funciones, del contexto del triángulo rectángulo. Lo anterior significa que ante la ausencia del triángulo rectángulo, su comprensión no resulta robusta, como un ejemplo de lo antes mencionado, no identifica las diferentes características que se asocian a dichas funciones ni en el círculo unitario, ni finalmente como funciones.

En términos de Torres-Corrales y Montiel-Espinosa (2021) es necesario para los estudiantes que transitan hacia el nivel medio superior y al primer año de licenciatura, una resignificación de las funciones trigonométricas, lo anterior es necesario debido a que algunas investigaciones indican que los estudiantes de los niveles medio superior y superior no relacionan las funciones trigonométricas como funciones circulares y solo tienen la noción de ellas como razones trigonométricas.

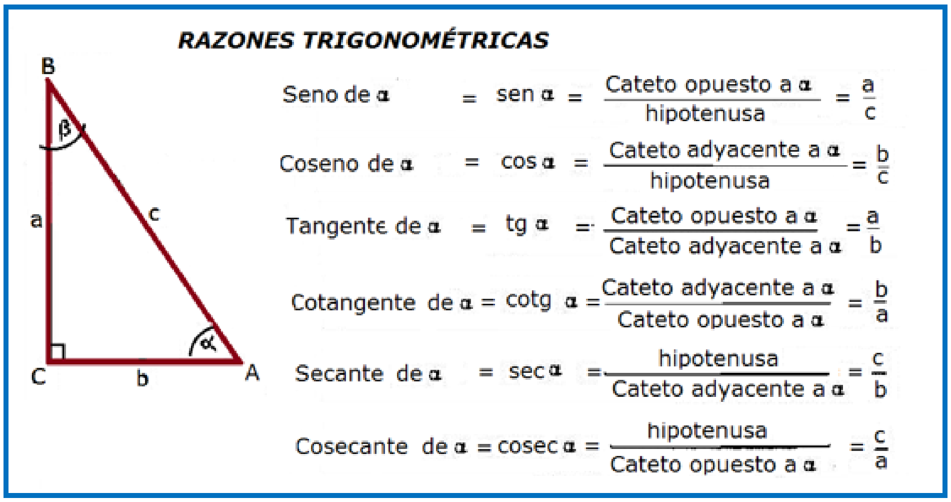


Figura 3. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

En este mismo sentido, otro elemento que puede representar un obstáculo en la comprensión del estudiante, se relaciona con la medición de los ángulos. En el triángulo rectángulo habitualmente se emplea la medición de los ángulos en grados sexagesimal, en tanto que en la trigonometría del círculo aparecen en mayor frecuencia el valor de radianes, e inclusive en el contexto de las coordenadas rectangulares y polares.

Un segundo elemento ha sido identificado y tiene que ver con el hecho de que en el caso del triángulo rectángulo, el estudiante asiste a una concepción relativa a ángulos de valores fijos, esto es, una estructura o construcción de tipo estático; en tanto que en el caso del círculo trigonométrico, puede percatarse más fácilmente de la naturaleza dinámica de los ángulos (Thompson, 2008).

La dicotomía de las dos concepciones puede explicarse debido a que históricamente el desarrollo de una trigonometría triangular se dio en forma separada a la trigonometría circular, como dos tradiciones epistémicas distintas (Bressoud, 2010). En ese mismo contexto tal diferencia ha sido relacionada con el hecho de que ambas, se hallan muy distantes entre sí, a causa de que cada una de ellas proviene de un desarrollo conceptual-histórico distinto (Thompson, 2008). Esta situación puede explicar también que, en la enseñanza de la trigonometría en los niveles educativos donde se imparte esta asignatura, no estén suficientemente articuladas las concepciones de razones y funciones trigonométricas.

1.3. El problema de investigación

Con base en los antecedentes revisados, hemos centrado la atención en el tópico referente al aprendizaje de las funciones trigonométricas a partir del triángulo rectángulo, y posteriormente definidas como funciones periódicas con base en el círculo unitario. Investigaciones como la de Sánchez (2014), señalan que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de este tipo de contenidos. Dentro de estas dificultades se identifican las siguientes: en las conversiones entre grados y radianes, en la representación de ángulos negativos o ángulos mayores a 360 grados y en el tratamiento algebraico de las razones trigonométricas, así como relaciones y fórmulas (Fernández, 2010).

Para Zubieta (2018) resulta importante clasificar dificultades en el aprendizaje de los tópicos, comentando que los estudiantes presentan errores que también puedan ser parte del problema. Describe algunos de ellos: de pre-requisitos, esto es cuando el estudiante no posee las destrezas previas necesarias, aquellos propios del lenguaje geométrico y trigonométrico, que implican el uso erróneo de la terminología y notación empleadas, los gráficos que incluyen aspectos de imaginación, trazos e interpretación de formas y figuras, entre otros.

En un estudio de Godino, Batanero y Font (2003) se describen seis tipos de dificultades de contenidos matemáticos en general: la primera a causa de los propios contenidos matemáticos, otras por la secuencia de actividades propuesta, las ocasionadas por la organización del escenario y las actividades, aquellas relacionadas con la motivación del alumnado e incluso motivos psicológicos, y finalmente dificultades con la falta de dominio de contenidos o conocimientos previos.

De esta última clasificación, se puede desprender que algunas dificultades pueden ser abordadas con las intervenciones del profesor, tal es el caso de los errores relacionados con las secuencias implementadas en el aula, así como los referidos a la motivación del estudiante y la organización del escenario y las actividades de aprendizaje. Es aquí donde se identifica que las características de las tareas o actividades que el docente diseña e implementa en el aula, constituyen en un factor importante para poder abordar e intentar solventar algunas de las dificultades señaladas.

En este sentido un elemento que puede resultar clave en al abordaje de estas problemáticas, puede relacionarse precisamente con las características de dichas tareas. Algunas interrogantes pueden cobrar relevancia: ¿Qué características deberían adquirir dichas tareas?, ¿Qué secuencias de actividades podrían incluir, de modo que promuevan mejor aprendizaje?, ¿Se puede incorporar el empleo de herramientas digitales para enriquecer las propuestas descritas en dichas tareas?, entre otras.

En ese orden de ideas, existe una gran variedad de artículos en educación matemática, cuyo eje de estudio se centra en abordar problemas caracterizados en papel y lápiz, pero poco se ha avanzado acerca de actividades que involucren el uso de manipulativos, o bien el empleo de herramientas digitales, en un contexto donde el alumnado interactúe con herramientas manuales y trabajar con estructuras que le permitan reconocer patrones, formular conjeturas y moverlos al entendimiento de la definición de función seno y coseno a partir de la semejanza de triángulos rectángulos.

Partiendo de la revisión de la literatura, y de las ideas expuestas por diversos autores, se identifica que la trigonometría es entendida como un criterio estandarizado de representaciones simbólicas, tal como se da en la definición de las funciones trigonométricas para el seno y coseno en triángulos rectángulos. Es importante para los estudiantes que el diseño de la tarea de aprendizaje incluya no solo una serie de conceptos y fórmulas, sino también herramientas y estrategias útiles para explorar, relacionar, conjeturar y demostrar (Gutiérrez y Fiallo, 2009).

Otro elemento importante para el diseño de la tarea de aprendizaje es la posibilidad de emplear el software de geometría dinámica (SGD) GeoGebra, para diversificar ideas que enriquezcan la visualización de contenidos como el de representación de triángulos rectángulos en el círculo unitario. Los softwares clasificados como SGD, se caracterizan por la posibilidad realizar construcciones geométricas dinámicas, en las que el estudiante puede crear y manipular los objetos geométricos construidos (Gutiérrez, 2016). Una posible solución que permita promover en el estudiante el tránsito de la noción de razones a funciones trigonométricas, consiste entonces en lograr diseñar una tarea de aprendizaje que involucre los elementos didácticos anteriormente descritos.

1.3.1. Objetivo general

Diseñar, implementar y evaluar una tarea de aprendizaje para facilitar el tránsito de la noción del seno y coseno como razones trigonométricas hacia la noción como funciones trigonométricas en estudiantes de primer grado de Telebachillerato.

1.3.2. Objetivos específicos

1.-Identificar los referentes teórico-metodológicos que orientan el diseño de tareas de aprendizaje que promuevan el entendimiento de las funciones seno y coseno.

2.-Aplicar la tarea de aprendizaje diseñada, con un grupo de estudiantes de primer grado de Telebachillerato.

3.-Evaluar los resultados obtenidos a partir de los elementos teóricos, para analizar el entendimiento en los estudiantes, al implementar la tarea propuesta.

1.3.3. Preguntas de investigación

1.- ¿Cuáles son los referentes teórico-metodológicos que orientan el diseño de tareas de aprendizaje que promuevan el entendimiento de las funciones seno y coseno?

2.- ¿Cómo realizar la implementación de una tarea de aprendizaje diseñada para tal propósito?

3.- ¿Cómo realizar la evaluación de los resultados obtenidos al implementar la actividad propuesta con un grupo de estudiantes de primer grado de Telebachillerato?

1.4. Estado del arte

1.4.1. Sobre la trigonometría en el currículo escolar

Es importante conocer los antecedentes históricos que dieron lugar a las construcciones matemáticas que se abordan hoy en día en el aula de clases, cabe mencionar que los programas de estudio a nivel nacional, reconocen también las construcciones históricas que se han desarrollado en el ser humano a nivel cognitivo. Algunas propuestas curriculares están basadas en la teoría de Vygotsky, para este autor la acción humana utiliza instrumentos sociales como mediadores, los cuales le dan una forma esencial. Por lo tanto, las acciones físicas como las lógico-matemáticas tienen un origen sociocultural (Vielma et al., 2000; Rodríguez, 1998).

En el programa de estudios de educación básica (secundaria) y educación media superior (bachillerato), se consideran las competencias del perfil de egreso de los estudiantes, una vez que hayan terminado el grado respectivo. En la siguiente tabla (Tabla 1) se muestra la competencia (general) matemática en el perfil de egreso de cada grado mencionado.

Tabla 1. Competencia matemática del perfil de egreso

Ámbito	Al término de secundaria	Al término de bachillerato
Pensamiento matemático	Amplía su conocimiento de técnicas y conceptos matemáticos para plantear y resolver problemas con distinto grado de complejidad, así como para proyectar escenarios y analizar situaciones. Valora las cualidades del pensamiento matemático.	Construye e interpreta situaciones reales, hipotéticas o formales que requieren de la utilización del pensamiento matemático. Formula y resuelve problemas, aplicando diferentes enfoques. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos.

Fuente: SEP (2017). Planes de estudio de referencia.

Como puede apreciarse en la Tabla 1, en el nivel de educación secundaria, el estudiante debe ser capaz de plantear y resolver problemas, sin embargo no siempre va a lograr interpretar las situaciones que pueden estar implicadas, competencia que se contempla que adquiera hasta el nivel medio superior.

1.4.1.1. La trigonometría en el currículo de secundaria

En la presente sección se describen algunas características del currículo de la trigonometría en la secundaria, con base en la reforma que la SEP presentó en el año 2017 y que denominó nuevo modelo educativo. El propósito es contextualizar los contenidos matemáticos tal como están definidos para los niveles de secundaria y posteriormente para el bachillerato.

En el currículum de secundaria aparece hasta el tercer grado con el tratamiento y empleo de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente (Figura 4).

MATEMÁTICAS. SECUNDARIA. 3º		
EJES	**Temas**	**Aprendizajes esperados**
NÚMERO, ÁLGEBRA Y VARIACIÓN	**Número**	•Determina y usa los criterios de divisibilidad y los números primos. •Usa técnicas para determinar el mcm y el MCD.
	Ecuaciones	•Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.
	Funciones	•Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.
	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes	•Formula expresiones de segundo grado para representar propiedades del área de figuras geométricas y verifica la equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente. •Diferencia las expresiones algebraicas de las funciones y de las ecuaciones.
FORMA, ESPACIO Y MEDIDA	**Figuras y cuerpos geométricos**	•Construye polígonos semejantes. Determina y usa criterios de semejanza de triángulos. •Resuelve problemas utilizando las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
	Magnitudes y medidas	•Formula, justifica y usa el teorema de Pitágoras.

Figura 4. Razones trigonométricas en el currículum de 3º de secundaria.

Como ejemplo de esto, mostramos a continuación la forma en que se introduce la definición de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en el contexto del triángulo rectángulo (Figuras 5 y 6), en el libro de texto de nombre “matemáticas tres” de los autores Cuevas, González, Real y Rodríguez (2014) editado por la SEP.

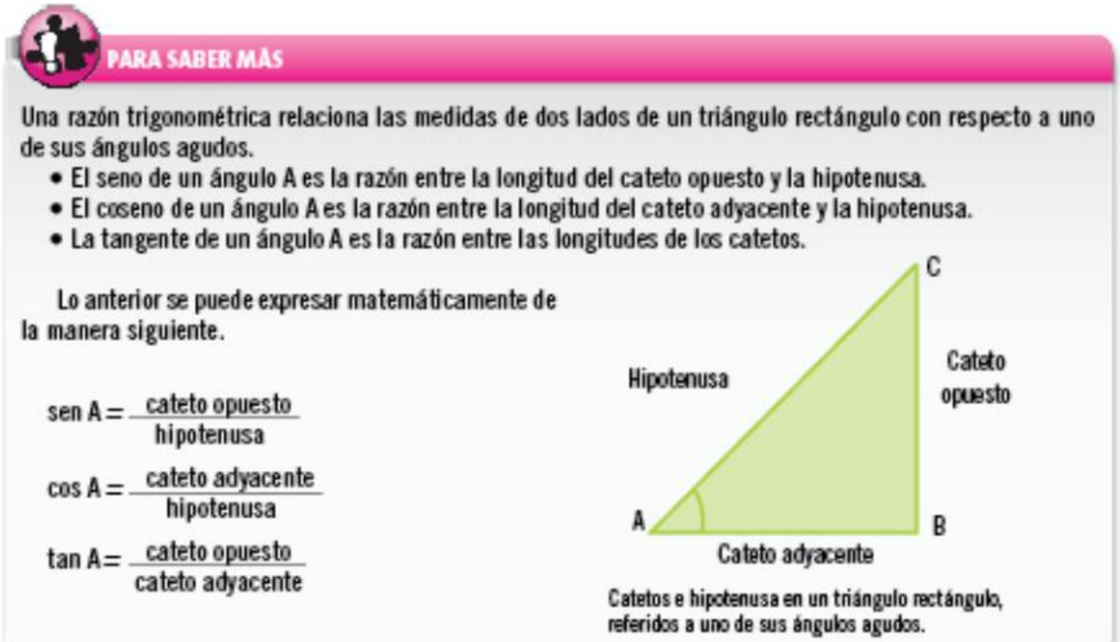


Figura 5. Definición de las razones trigonométricas en libro de texto de 3º de secundaria. Fuente: Cuevas et al. (2014).

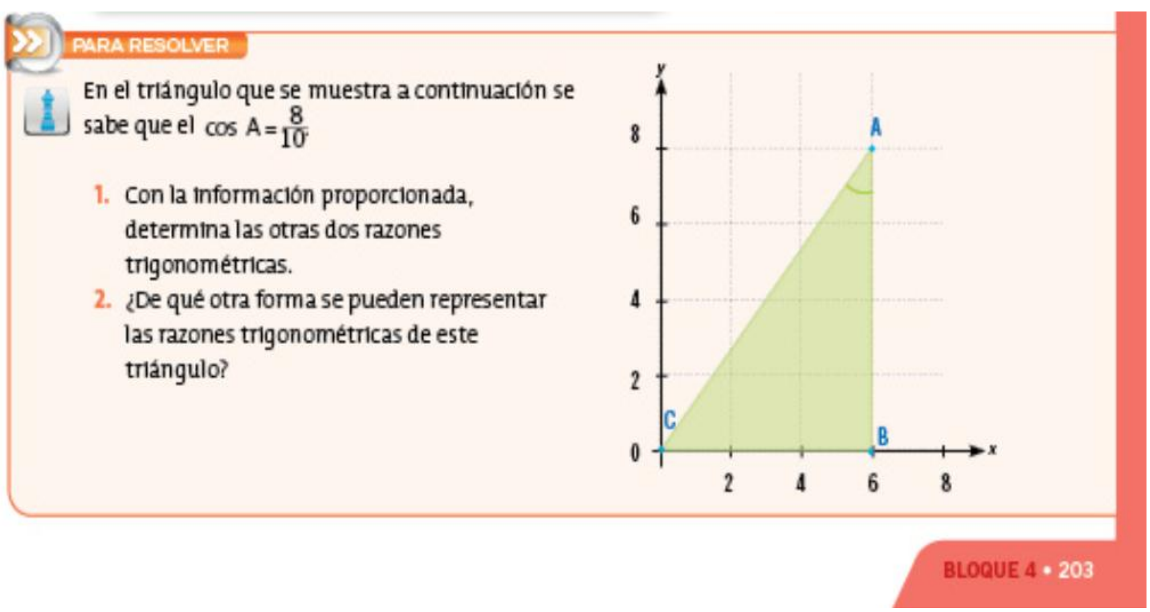
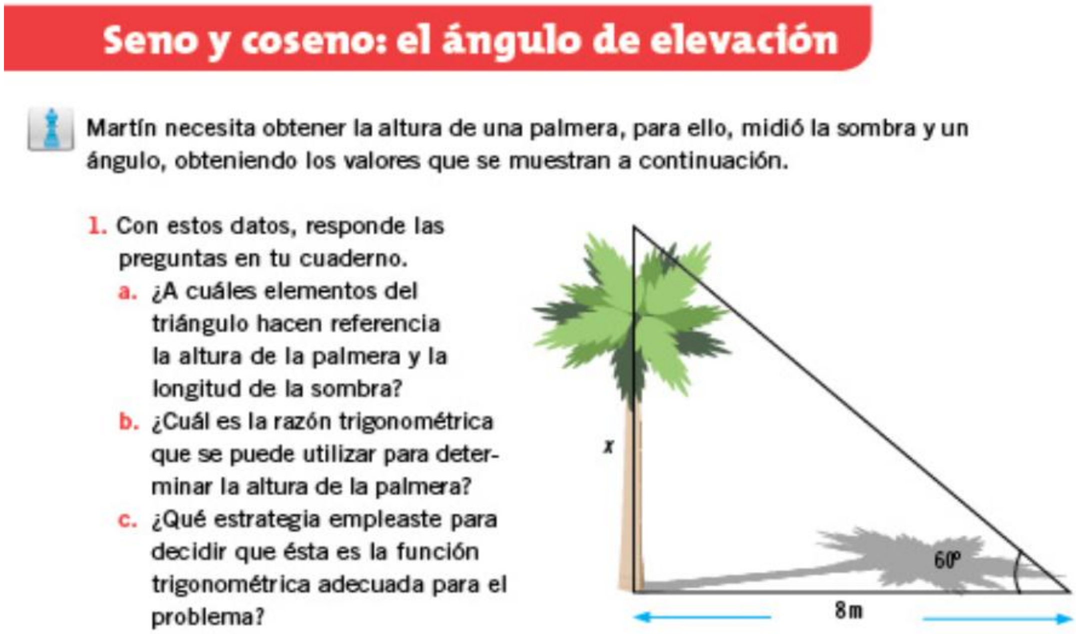


Figura 6. Tipo de ejercicios propuestos. Fuente: Cuevas et al. (2014).

Es importante mencionar que la definición la realizan sin considerar algún antecedente o contexto previo, y también puede constatarse que los primeros ejercicios propuestos solo consisten de ejercitar los cálculos necesarios para determinar los valores de las razones.

En la sección en la que los autores denominan: aplicaciones de las razones trigonométricas, se hallan ejemplos como en el siguiente esquema (Figura 7).


Seno y coseno: el ángulo de elevación

Martín necesita obtener la altura de una palmera, para ello, midió la sombra y un ángulo, obteniendo los valores que se muestran a continuación.

1. Con estos datos, responde las preguntas en tu cuaderno.
   a. ¿A cuáles elementos del triángulo hacen referencia la altura de la palmera y la longitud de la sombra?
   b. ¿Cuál es la razón trigonométrica que se puede utilizar para determinar la altura de la palmera?
   c. ¿Qué estrategia empleaste para decidir que ésta es la función trigonométrica adecuada para el problema?

Figura 7. Empleo las razones trigonométricas en libro de texto de 3º de secundaria. Fuente: Cuevas et al. (2014).

En forma análoga, la única diferencia de este segundo tipo de ejercicios que propone el referido libro de texto, es que circunscribe los cálculos a realizar, dentro de un contexto del “mundo real”, sin embargo la estructura de este tipo de tareas o ejercicios es la misma de los ejercicios iniciales.

1.4.1.2. La trigonometría en el currículo de bachillerato

En la última Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), se describe el campo disciplinar *matemáticas*, definido como uno de los cinco campos que conforman los estudios de bachillerato, se contemplan cinco áreas específicas: álgebra, aritmética, trigonometría, cálculo y estadística. Estas áreas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad, así como del pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes.

Para la trigonometría del bachillerato, se decidió considerar o centrar las competencias relacionadas con los siguientes contenidos: primeramente el concepto de ángulo, su medición en los sistemas radial y sexagesimal. Posteriormente el triángulo rectángulo y las relaciones entre sus lados y sus ángulos, así como la definición de las seis funciones trigonométricas básicas. En segunda instancia, la noción de las funciones trigonométricas, como funciones circulares, además de las distintas identidades trigonométricas.

Es la trigonometría un elemento que amplía nuestra idea de razones y articula un tratamiento métrico con uno cualitativo, lo numérico con lo geométrico. Para ello se trabaja con estructuras y transformación en el espacio y se adiciona con la trigonometría, el diseño, el trazo y la angularidad y sus propiedades (SEP, 2017). En el desarrollo del pensamiento geométrico y trigonométrico, se consideran las siguientes competencias (ver Tabla 2), de un total de ocho que conforman las competencias disciplinares para el campo de las matemáticas:

Tabla 2. Competencias de la trigonometría en el currículum de bachillerato.

Competencia 1	Competencia 2	Competencia 3	Competencia 4	Competencia 6
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales	Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	Explica e interpreta los resultados obtenidos, mediante procedimientos matemáticos, y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las TIC.	Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

En cuanto a la ubicación y tiempo de dedicación de los contenidos de trigonometría en los planes de estudio de bachillerato, tenemos primeramente el número de horas destinado para su estudio (ver Figura 8).

CAMPO DISCIPLINAR DE LAS MATEMÁTICAS BG	CAMPO DISCIPLINAR DE LAS MATEMÁTICAS BT
COMPONENTE DE FORMACIÓN PROPEDÉUTICA BÁSICA	
Matemáticas I 5 horas	Álgebra 4 horas
Matemáticas II 5 horas	Geometría y trigonometría 4 horas
Matemáticas III 5 horas	Geometría analítica 4 horas
Matemáticas IV 5 horas	Cálculo 4 horas
Componente de formación propedéutica extendida	
Cálculo integral 3 horas	Cálculo integral 5 horas
Probabilidad y estadística I Probabilidad y estadística II 6 horas	Probabilidad y estadística 5 horas

Figura 8. Ubicación y tiempo en bachillerato (BG y BT).

La Figura 8 muestra que en los bachilleratos generales (BG), el tiempo semanal dedicado a la asignatura es de 5 horas, en tanto que en los subsistemas de bachillerato tecnológico (BT) son 4 horas asignadas. En cuanto a la ubicación de la asignatura en el plan de estudios, corresponde al segundo semestre de bachillerato (matemáticas 2 o trigonometría, según el bachillerato (ver Figura 9).

Campo disciplinar	Programas de estudio Bachillerato General	Programas de estudio Bachillerato Tecnológico
Comunicación	Taller de lectura y redacción I Taller de lectura y redacción II Informática I Informática II	Tecnología de la información y la comunicación Lectura, expresión oral y escrita I Lectura, expresión oral y escrita II
Campo disciplinar	**Programas de estudio Bachillerato General**	**Programas de estudio Bachillerato Tecnológico**
Matemáticas	Matemáticas I Matemáticas II Matemáticas III Matemáticas IV	Álgebra Geometría y trigonometría Geometría analítica Cálculo diferencial Cálculo Integral Probabilidad y estadística
Ciencias Experimentales	Química I Química 2 Biología 1 Biología 2 Física 1 Física 2 Geografía Ecología y medio ambiente	Química I Química 2 Biología Física 1 Física 2 Ecología
Ciencias Sociales	Metodología de la investigación Introducción a las ciencias sociales Historia de México I Historia de México II Estructura socioeconómica de México Historia universal contemporánea	Ciencia, tecnología, sociedad y valores
Humanidades	Ética y valores I Ética y valores II Literatura 1 Literatura 2 Filosofía	Lógica Ética Temas de filosofía

Figura 9. Ubicación de la trigonometría en el currículo de bachillerato. Fuente: SEP (2017). Planes de estudio de referencia.

En la siguiente imagen (Figura 10) se desglosan los contenidos que se abordan en torno a la trigonometría, en particular desglosando los contenidos de forma general como figuras geométricas, tema con mayor énfasis en el currículo y el tratado como relaciones y funciones en el triángulo.

Matemáticas 2 BG - 5 horas	Geometría y trigonometría BT - 4 horas
Figuras geométricas	
Ángulos. Características de ángulos. Sistemas de medición.	Origen y métodos. Punto y línea. Método inductivo. Método deductivo.
Triángulos. Características de triángulos. Suma de ángulos de triángulos. Criterios de congruencia de triángulos. Teorema de Tales y Pitágoras.	Triángulos. Notación y diversidad ángulos interiores y exteriores. Rectas y puntos notables. Teoremas.
Polígonos. Elementos y propiedades.	Polígonos. Notación y diversidad ángulos interiores y exteriores. Diagonales, perímetros, áreas y teoremas.
Circunferencia. Elementos y propiedades. Perímetros y áreas.	Circunferencias. Ángulos en la circunferencia. Perímetro. Áreas de figuras circulares. Teoremas
Relaciones y funciones en el triángulo	
Relaciones trigonométricas. Razones trigonométricas. Funciones trigonométricas en el plano cartesiano. Círculo unitario, aplicación de leyes de senos y cosenos.	Relaciones trigonométricas. Razones trigonométricas. Funciones trigonométricas en el plano cartesiano. Círculo unitario e identidades fundamentales. Resolución de triángulos.

Figura 10. Programas de trigonometría en el currículo de bachillerato (BG y BT). Fuente: SEP (2017). Planes de estudio de referencia.

En este caso, y en contraste con el currículum de tercero de secundaria, puede apreciarse que no se restringe a la noción de razón trigonométrica, sino que se transita hacia su definición como funciones en el plano cartesiano, y además se plantea el contexto del círculo unitario para estudiar algunas de sus propiedades e introducir el estudio de las identidades trigonométricas, así como las leyes de senos y cosenos, lo que a su vez permite la resolución de triángulos en general.

1.4.2. Sobre la enseñanza de las funciones trigonométricas

Se hizo la revisión de la literatura como parte de indagación acerca de cómo se están trabajando y bajo qué perspectiva, el diseño de tareas que favorezcan el entendimiento de la relación entre proporciones de lados de triángulos rectángulos. El entendimiento se considera como fundamental en los procesos de aprendizaje, ya que, al entender una idea, ésta se puede usar con flexibilidad, adaptarse para resolver problemas y ser la base para entender otros conceptos y métodos (Barrera y Reyes, 2014). Se presenta a continuación un análisis de investigaciones realizadas con una orientación de razones hacia funciones trigonométricas.

El aprendizaje de las funciones trigonométricas requiere un análisis en profundidad, en un trabajo presentado por Maknun, Rosjanuardi y Jupri (2019). Se señala que cuando se enseñan las relaciones trigonométricas como razones entre lados de un triángulo con ángulo recto y luego se pretende enseñar el concepto como funciones trigonométricas, es cuando surgen dificultades que no siempre son bien explicadas.

En dicho estudio exploratorio aplicado a estudiantes de secundaria, las tareas consistieron en una tarea de análisis y adicionalmente en una actividad práctica. Los principales hallazgos en este estudio muestran que los estudiantes descubren una respuesta para el valor de la razón trigonométrica seno y coseno a un ángulo dado, de triángulos representados en un plano coordenado centrado en el origen, donde el lado opuesto al ángulo referido, interseca en un punto del plano horizontal y un punto que forma parte de la colección de puntos de una circunferencia con radio igual a uno. La idea de conectar los dos métodos matemáticos resulta un complemento adecuado, de lo contrario el método de razón en triángulo rectángulo queda limitado.

Siguiendo la misma línea de acción, Renana e Ivy (2016) llevaron a cabo una investigación cualitativa, empleando un marco teórico de referencia el cual provee de un plan de acción al implementar ideas de abstracción de conocimiento matemático, con ideas aportadas por Freudental (1991), lo que lleva a consolidar una idea de matematización vertical. Resultados de este estudio muestran la reconstrucción de conocimiento matemático de un estudiante de 25 años, quien con base en su conocimiento previo fue actuando en una serie de tareas que le permitieron recuperar conocimientos matemáticos y consolidarlos hasta el punto de crear una estructura estable en cuanto al entendimiento de las razones trigonométricas y su interpretación geométrica en el círculo unitario.

El método del círculo unitario, que define el seno y el coseno como las coordenadas de un punto en el círculo unitario o según las longitudes indicadas, resuelve una serie de problemas con el método de razón de triángulos con ángulo recto (Hertel y Cullen, 2011). En esta investigación, el estudio se refiere al desarrollo de habilidades que adquieren profesores en formación pedagógica para el nivel secundaria, al visualizar estrategias que aplican al comparar la magnitud de dos razones trigonométricas, considerando la medida de un ángulo y longitudes dirigidas a él, en un plano coordenado, esto bajo un enfoque de geometría dinámica (DGE) que, de acuerdo a los resultados cualitativos, este enfoque ofrece flexibilidad para reflexionar acerca de las relaciones trigonométricas. Las estrategias empleadas por los participantes se clasificaron empleando un marco teórico APOS, el análisis de este marco se da bajo cuatro criterios acción, proceso, objeto y estructuras.

En los tres estudios revisados anteriormente hay coincidencia en que es importante considerar los entornos de aprendizaje donde las representaciones gráficas juegan un papel importante para la representación de triángulos rectángulos y su significado geométrico en círculo unitario para entender el concepto de funciones trigonométricas.

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

Una investigación supone una inquietud o curiosidad insatisfecha, dado que lo que sucede aparece como problemático y carece de explicación o de solución. Dicho en otras palabras, sólo ante un problema nos ponemos a investigar, y esta investigación se convierte en científica cuando se atiene a ciertas pautas que le dan precisión terminológica, conceptual, metodológica (Daros, 2002).

Para el presente trabajo se toman siete perspectivas teóricas como referencia para orientar la investigación, también se pretende que contribuyan de apoyo para dar respuesta a las preguntas y objetivos planteados; así mismo estas perspectivas pretenden guiar las etapas de diseño, implementación y evaluación de la tarea de aprendizaje.

2.1. El diseño de tareas de instrucción y la aproximación de resolución de problemas

El marco conceptual del diseño de tareas de instrucción, o también conocido como tareas de aprendizaje matemático (TAM; Torres et al., 2022; Stein, Remillard y Smith, 2007) consiste básicamente en considerar que de la naturaleza y propiedades de las tareas que el docente implementa en el aula, depende las características del aprendizaje logrado. Para Doyle (1988), las tareas que el profesor implementa son el elemento clave en la forma en que ocurre el aprendizaje de sus estudiantes. Algunas de tales características son las siguientes: discriminar la información, explorar, observar patrones, formular y probar conjeturas, comunicar resultados, entre otras (Stein et al., 2007).

Desde las perspectiva de dichos investigadores, las tareas de aprendizaje son importantes por tres razones: (i) la instrucción en clase, por lo general, es organizada y dirigida alrededor de las tareas, (ii) las tareas de aprendizaje en las que los estudiantes se involucran determinan lo que aprenden y cómo lo aprenden y (iii) las tareas de aprendizaje son un medio para que los investigadores realicen estudios y propongan la formulación y organización de planes curriculares (Stein et al., 2007).

Además, este marco conceptual converge en varios puntos con otras aproximaciones didácticas, como es el caso del enfoque de resolución de problemas. Uno de los primeros antecedentes de esta aproximación, lo constituyeron los trabajos de George Polya (1973), quien plantea que dicho proceso de resolución de problemas transita por cuatro pasos o fases: (i) comprender el enunciado de la tarea, (ii) concebir un plan, (iii) ejecutar el plan, (iv) y examinar en forma retrospectiva la solución obtenida.

Otros investigadores han realizado diversas contribuciones a esta aproximación didáctica, entre ellos Alan Schoenfeld (1985), James Hiebert o Richard Lesh, entre otros (Barrera et al., 2021). Schoenfeld, en su libro titulado *Mathematical Problem Solving* (1985) analiza cuatro variables de este proceso: (i) los recursos o conocimientos previos, (ii) las heurísticas, (iii) el control y (IV) los sistemas de creencias.

Las *heurísticas* se refieren a todo el repertorio de técnicas o estrategias generales para la resolución de problemas, en tanto que los recursos incluyen todo aquello que el estudiante conoce previamente, sea correcto o no (Barrera et al., 2021). En cuanto a las creencias, Shoenfeld consideró que forman parte muy importante, junto con la cognición y la práctica, del conocimiento matemático del profesor y del aprendiz, dado que la forma de pensar de un individuo es el resultado de diferentes piezas, entre las que se enumeran: los conocimientos de base, las estrategias, el control y las creencias y prácticas.

En términos generales, la resolución de problemas aporta elementos didácticos para que los estudiantes desarrollen un aprendizaje basado en el descubrimiento, explorando, descubriendo relaciones, realizando análisis, utilizando distintas representaciones, argumentando y comunicando resultados. La ejecución de dichas actividades se puede equiparar al trabajo que desarrolla un matemático profesional (Santos-Trigo, 2016).

2.2. Teoría de registros de representaciones semióticas de Duval

Para Duval (2004, citado en Oviedo et al., 2012), el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de las actividades cognitivas importantes, como son la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos.

De modo que enseñar y aprender matemáticas implica no solamente el desarrollo de dichas actividades cognitivas, sino también el uso del lenguaje natural y de las imágenes, en general de lo que él denominó distintos registros de representación.

Estos distintos registros pueden incluir: números, símbolos, notaciones funcionales, notaciones lógicas, figura, redes, diagramas entre otros. Sin embargo la sola existencia de estas distintas representaciones no garantiza que el estudiante pueda comprender las relaciones entre ellas, se requiere del dominio de las operaciones necesarias para transitar articuladamente entre uno y otro registro.

Para este autor, cada objeto matemático en estudio, al no ser un objeto real, requiere de estas representaciones. Sin embargo, debe poder distinguirse claramente entre el objeto y sus representaciones; y adquirir experticia en transitar entre uno y otro sistema de representación, sin confundirlos con el propio objeto matemático.

Describamos un ejemplo de un objeto matemático, digamos el concepto de número racional (fraccionario). Un registro semiótico asociado puede ser el lenguaje común, y dentro de éste registro existen varias representaciones tales como *un cuarto* o la *mitad de la mitad*. Para este mismo objeto, otro registro semiótico puede ser el lenguaje aritmético, y dos representaciones pueden ser los símbolos ":" o el mismo punto decimal (.), ya que ambos denotan a un racional.

El hecho de que existan diferentes registros y representaciones explica en parte algunas dificultades en el aprendizaje de los objetos matemáticos, y es por ello que Duval consideraba primordial la acción del docente que debe desarrollar la experticia para poder transitar entre los distintos registros y sus representaciones, haciendo correctamente los tratamientos y conversiones entre ellos, y contribuyendo con ello a incrementar la comprensión del objeto (Godino et al., 2016, Oviedo et al., 2012).

2.3. El empleo de las herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas

Con base en la Teoría de la *Mediación Instrumental* (Moreno-Armella, 2018), el empleo de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas puede incidir positivamente en el proceso de aprendizaje (Torres et al., 2022). Una premisa teórica considerada en este trabajo es que cuando se incluye a las herramientas tecnológicas en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, éstas permiten no sólo realizar un mejor trabajo, sino que favorecen formas diferentes de pensar y aprender (Hillmayr et al., 2020).

En forma más profunda, Pea (1985) desarrolló la idea de que las herramientas tecnológicas pueden funcionar como instrumentos de mediación o tecnologías cognitivas, esto es, que ayudan a reorganizar y ampliar el conocimiento matemático. Moreno-Armella (2018) señala en este mismo sentido, que toda actividad cognitiva está estrechamente ligada con la mediación instrumental, en palabras más sencillas, que toda acción orientada al aprendizaje, constituye de hecho una acción instrumental.

Aunque la idea central de este referente teórico es que las herramientas digitales sirven como mediadores en el proceso de construcción del conocimiento, no hay que pensar que la sola presencia de tales herramientas digitales, garantiza buenos resultados, porque todo ello está en función de las características de tales tareas, así como la forma de implementarla por parte del profesor.

Drijvers (2013) identifica tres importantes factores que se promueven con la integración de las herramientas tecnológicas en el aula de clase de matemáticas: el diseño mismo, las acciones del profesor, y el contexto educativo.

El diseño de la actividad incluye elementos como el tipo de software a utilizar, el diseño de cada una de las instrucciones o actividades y la forma de integrar las herramientas digitales.

El rol del profesor se relaciona con el nivel de conocimientos y experiencia acumulados, e incluye su habilidad en el manejo de las herramientas digitales a emplear. Por su parte, en lo que concierne al contexto educativo, Drijvers puntualiza la necesidad de que la herramienta digital empleada se integre apropiadamente a la tarea o situación que se desarrolla, esto es, que ambos elementos se complementen de forma natural, potenciando el alcance de la tarea de aprendizaje.

Para Santos-Trigo (2016), el uso *coordinado* de las herramientas digitales permite potenciar varias destrezas y habilidades: desde el trabajo en equipo para compartir y discutir ideas, el poder representar y explorar los problemas, fomentar la creatividad al facilitar distintas formas de solución, hasta representar y discutir resultados intermedios o finales al resolver el problema.

2.4. La demanda cognitiva de las tareas de aprendizaje

Este marco conceptual fue propuesto por Stein y Smith (1998), y consiste en considerar el tipo de características que requiere una tarea de aprendizaje (TAM) para poder lograr que el estudiante alcance un nivel de comprensión alto, y construya adecuadamente su conocimiento matemático. De este modo, un nivel alto de demanda cognitiva, significa que la tarea permite a los estudiantes ejecutar diversos procedimientos de forma estructurada.

Para las mismas autoras, Stein y Smith (1998), las tareas de aprendizaje como actividades de clase, tienen el propósito de centrar la atención del estudiante en una idea matemática particular o para desarrollar cierta habilidad. Para estos autores, diferentes tareas implican diferentes niveles de demanda cognitiva. En la tabla siguiente se muestra una comparativa entre tareas con baja y alta demanda cognitiva (Tabla 3).

En términos generales, las tareas con alta demanda cognitiva se enfocan en desarrollar un aprendizaje más profundo a través de procesos de reflexión, y discusión donde el rol del estudiante se torna más activo.

Tabla 3. Características de la demanda cognitiva.

Tareas con baja demanda cognitiva	Tareas con alta demanda cognitiva
Procedimientos algorítmicos	Procedimientos no rutinarios, exploración de vías distintas
Memorización	Apoyo de manipulables, diagramas visuales, esto es múltiples representaciones.
No se conectan conceptos ni significados	Conexión robusta de conceptos y significados
Producir una respuesta correcta	Desarrollo del pensamiento matemático, discusión de ideas.

Fuente: Stein y Smith (1998).

Los autores Benedicto, Jaime y Gutiérrez (2015) desarrollan una propuesta para la evaluación de demanda cognitiva, modelo que a partir de la propuesta presentada por los autores Stein y Smith (1998), adaptaron y la emplearon para analizar problemas con patrones geométricos, ya que tienen características asociadas a varios niveles de desempeño. Estas aportaciones presentan elementos importantes para la presente investigación. En la Tabla 4 se muestran los criterios de análisis para clasificarlos en niveles de comprensión.

Tabla 4. Análisis teórico de la demanda cognitiva

Nivel de demanda cognitiva	Tipo de cuestión	Categoría	Características
BAJO Memorización	Recuento directo	Procedimiento de resolución Finalidad Esfuerzo Requerido Contenidos Implícitos Explicaciones Representación de la solución	(1.2) No se resuelven usando algoritmos, sino recurriendo a datos recordados o tomados directamente del enunciado. (1.1) Reproducción de elementos (datos, reglas, fórmulas, etc.) previamente aprendidos, recordados o tomados directamente del enunciado. (1.3) Su resolución con éxito apenas requiere esfuerzo. No son ambiguas. Indican claramente qué hacer. (1.4) No tienen conexión con los conceptos o significado subyacente a los datos, reglas, fórmulas o definiciones que se están aprendiendo o reproduciendo. (1.5) No requieren explicaciones. (1.6) El enunciado utiliza la representación geométrica y su resolución, en caso de representarse, utilizará la aritmética.
	Término inmediato	Procedimiento de resolución Finalidad	(2.1) Son algorítmicas. Indican expresamente qué algoritmo usar o es evidente por el contexto. (2.4) Enfocadas a obtener respuestas correctas pero no a desarrollar la comprensión matemática.

BAJO-MEDIO Algoritmos sin conexiones	Termino próximo	Esfuerzo Requerido Contenidos implícitos Explicaciones Representación de la solución	(2.2) Su resolución con éxito requiere un esfuerzo limitado. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo. (2.3) Existe conexión implícita entre los conceptos o significados subyacentes y los algoritmos usados. A pesar de existir dicha conexión, el estudiante no tiene por qué percatarse de ella para resolver correctamente el problema. (2.5) Explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo usado. (2.6) En su resolución se pueden utilizar múltiples representaciones (aritmética, diagramas visuales, materiales manipulativos, etc.).
MEDIO-ALTO Algoritmos con conexiones	Termino próximo Termino lejano	Procedimiento de resolución Finalidad Esfuerzo requerido Contenidos implícitos Explicaciones Representación de la solución	(3.2) Las cuestiones anteriores de la actividad sirven como sugerencia explícita o implícita de la vía a seguir, que es un algoritmo general con conexiones estrechas con las ideas conceptuales subyacentes. (3.1) Orientan al estudiante a usar algoritmos con el objetivo de que tenga una comprensión más profunda de los conceptos e ideas matemáticos. (3.4) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Se pueden utilizar algoritmos generales, pero al aplicarlos, hay prestar atención a la estructura del patrón. (3.5) Los estudiantes necesitan considerar conscientemente ideas conceptuales que subyacen a los algoritmos para resolver con éxito la cuestión. (3.6) Explicaciones que hacen referencia a las relaciones subyacentes utilizando casos concretos (posiciones particulares de la serie). (3.3) La resolución conecta diversas representaciones. Se representan de varias formas y los estudiantes utilizan aquellas que les llevan a un razonamiento más abstracto.
ALTO Hacer Matemáticas		Procedimiento de resolución Finalidad Esfuerzo requerido Contenidos	(4.1) Requieren pensamiento complejo y no algorítmico. El enunciado no sugiere ninguna forma de resolución. (4.5) Requieren que los estudiantes analicen la actividad y examinen restricciones que puedan limitar posibles estrategias de resolución y soluciones. (4.2) Los estudiantes necesitan explorar y comprender los conceptos, procesos o relaciones matemáticos. (4.6) Requieren un considerable esfuerzo cognitivo. (4.3) Requieren de los estudiantes auto-control y auto-regulación de los propios procesos cognitivos.

		implícitos Explicaciones Representación de la solución	(4.4) Requieren que los estudiantes accedan a conocimiento y experiencias relevantes y los usen adecuadamente durante la resolución de la actividad. (4.7) Explicaciones y demostraciones sobre el término general de la serie. (4.8) En la resolución se utiliza una representación algebraica, que algunas veces puede estar conectada con otras formas de representación.

Fuente: Benedicto et al. (2015)

2.5. Abstracción en contexto

La construcción de conocimiento matemático en estudiantes es de especial interés en educación matemática, un marco teórico que estudia los procesos de construcción de conocimiento matemático abstracto es Abstracción en Contexto ($Abstraction\ in\ Context, AiC$), este referente se consolida bajo dos vertientes, las ideas propuestas por Vygostky, en un enfoque sociocultural, dichas propuestas retomadas y adaptadas como análisis de abstracción, por Davidov (1990, citado en Dreyfus et al., 2015), de esta aportación se deduce que el alumno está influenciado por los instrumentos curriculares y los del entorno social como motivo de aprendizaje en un ambiente de trabajo individual o grupal con la ayuda o mediación docente.

Por otro lado las ideas de Freudental (1991), matemático influenciado por Piaget, aportó algunas de las ideas para la Abstracción Matemática. Una de ellas fue la idea de "matematización vertical". Este concepto se refiere al proceso en el que los estudiantes reorganizan sus conocimientos matemáticos previos, usándolos como bloques para edificar una nueva construcción abstracta.

La matematización vertical la proponen como una actividad para reorganizar las matemáticas construidas (procesos previos de abstracción), y emplearlas hacia una nueva estructura (reorganización vertical) de construcciones previas, dentro de las matemáticas, por medios y tareas orientadas a la resolución de problemas bajo esta estructura matemática.

En el marco teórico AiC referido por los autores Dreyfus et al. (2015), se proponen ideas para que el profesor apoyado de las herramientas matemáticas necesarias lleve a cabo un proceso de motivación en el estudiante, con la propuesta de tareas que involucren en él la necesidad de una nueva construcción de conocimiento, trabajando continuamente sobre un tema bajo diversas perspectivas, abre la posibilidad de una acción constructora que le ayude a entender y emplear con flexibilidad los conocimientos para emplearlos en tareas subsecuentes.
La génesis de una abstracción pasa por tres etapas:

I. Surgimiento de la necesidad de un nuevo constructo
II. Surgimiento de un nuevo constructo
III. Consolidación del constructo

El modelo de análisis AiC se basa en un número limitado de acciones epistémicas, el modelo se basa en las categorías RBC+C y se refieren a los constructos que el estudiante desarrolla: Reconocimiento, Edificación, Construcción y Consolidación por sus siglas en inglés. Estas acciones son observables ya que el alumno expresa de forma verbal, gráficamente u otra manifestación de acuerdo a lo que ha observado o detectado. El signo + antecede al estado de consolidación ya que el estudiante traslada el conocimiento a un contexto diferente de análisis matemático.

El reconocimiento: tiene lugar cuando el alumno reconoce que un constructo de conocimiento previo específico es relevante para el problema que se está enfrentando. Ejemplo concreto de ello cuando el estudiante reconoce los lados de un triángulo rectángulo y que estos tienen relación con un ángulo agudo de referencia.

Edificación: es una acción que comprende la combinación de constructos teóricos reconocidos con el fin de lograr la solución de un problema. Por citar un ejemplo aludiendo a la idea de círculo unitario, el estudiante puede establecer que las hipotenusas de triángulos rectángulos inscritos en un círculo, se asemejan a los rayos de un rin de bicicleta. El estudiante en este constructo no necesariamente tiene que arribar a la idea de círculo unitario.

Construcción: consiste en estructurar, ensamblar las construcciones previas, esto por matematización vertical. Se manifiesta en la presencia del nuevo constructo por parte del alumno. Como ejemplo se puede comentar que el estudiante arriba a la idea de círculo unitario, identificando que el valor de las razones trigonométricas seno y coseno para un valor de ángulo dado se relacionan directamente con el valor de alguno de los catetos e inversamente con el valor de la hipotenusa (no representando dificultad para el cálculo de las razones al ser esta constante con valor de una unidad).

Consolidación: Se refiere a la capacidad por parte de los estudiantes para reconocer progresivamente la relevancia del constructo para manejarlo de forma flexible en otras actividades. Como un ejemplo de ello, el estudiante emplea el círculo unitario, del cual se puede apoyar para calcular el valor de las razones trigonométricas seno y coseno para ángulos dados sin la necesidad de emplear calculadora.

2.6 Aprendizaje con entendimiento

Existe consenso entre la comunidad de educadores, investigadores y profesores de matemáticas sobre la importancia de privilegiar el entendimiento versus la memorización en las clases de matemáticas (Barrera et al., 2021; Barrera y Reyes, 2014). Según estos autores, el entendimiento se considera fundamental en los procesos de aprendizaje, ya que al entender una idea ésta se puede usar y adaptar para resolver problemas, y para abordar otros conceptos y otros métodos.

Barrera y Reyes (2014) definen el aprendizaje con entendimiento como aquel que permite comprender y profundizar en los conceptos, ideas y procesos centrales, además de identificar las relaciones entre estos elementos. Y refiriéndose al término entendimiento, parten de la definición de Hiebert et al. (2000), quienes lo consideran cuando una cosa se relaciona o se conecta con otra ya conocida previamente. Es importante añadir que tales relaciones tienen que ser estructuradas, lo que significa que esas deben permitir profundizar en dichas ideas o conceptos. Estas ideas son acordes con la concepción de las matemáticas como una disciplina donde lo relevante consiste en comprender ideas, conceptos y procesos, así como la forma en que se relacionan entre sí (Campos y Torres, 2022).

En este sentido, de qué significa entender en matemáticas, se relaciona estrechamente con el concepto de comprensión. Algunos autores como Carpenter y otros (1994) definen la comprensión en términos de las conexiones entre lo que ya se conoce y lo nuevo por aprender que una persona puede hacer; pero muchas conexiones no significan necesariamente comprensión, porque “las conexiones particulares entre constructos pueden de hecho representar conceptos erróneos, mientras que la verdadera comprensión de un constructo particular puede requerir que el conocimiento esté conectado de maneras muy específicas” (Carpenter et al., 1994, p. 3). Además, Hiebert et al. (2000) definen la comprensión en términos de acciones o procesos que una persona es capaz de realizar: “Entendemos algo si vemos cómo está relacionado o conectado con otras cosas que sabemos” (p. 4).

2.7 Referentes conceptuales

El sustento teórico que ofrece el marco conceptual para guiar todo el trabajo de investigación y con miras a dar cumplimiento a los objetivos planteados, se articula en tres procesos centrales. En la Figura 11 puede observarse que el proceso es secuencial y como primera etapa se tiene el diseño de las tareas de aprendizaje (TAM) cuyo enfoque sea el de resolución de problemas del contenido matemático razones y funciones trigonométricas seno y coseno, la siguiente etapa consiste en implementar actividades diseñadas por el docente, el entorno y las estrategias que se emplearán abrirán un posible espacio de oportunidad para generar un ambiente cooperativo por parte de los alumnos en el que presenten sus principales hallazgos.

El último proceso es el de evaluación de una TAM y se pretende determinar el grado de compresión en los estudiantes, de los contenidos matemáticos abordados.

Figura 11. Proceso a reproducir empleando el marco conceptual. Elaboración propia

CAPITULO 3. METODOLOGÍA

3.1. Introducción

El trabajo que se desarrolla presenta una estructura de tipo cualitativa, el análisis de la información se analiza a partir de instrumentos de recolección de datos, considerando videograbaciones como primer elemento de análisis, realizadas con cámara de dispositivo móvil y la implementación de registros escritos como segundo elemento que aporta información valiosa recabada de los estudiantes.

Para la elaboración de las pruebas escritas se toma en cuenta el diseño de una secuencia de actividades, con el objetivo de proponer una tarea de aprendizaje matemático “TAM” (Torres et al., 2022), que considere coadyuvar a resolver algunas de las dificultades en la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados en el tema en cuestión.

Dentro del proceso se propone una fase de evaluación de la tarea de aprendizaje, dicha propuesta pretende calificar la incidencia que tiene el instrumento en los estudiantes. De esta manera se pretende indagar la efectividad que presentan los procesos de diseño e implementación; y determinar en qué medida los principios teóricos de referencia se articulan para dar lugar a un proceso de razonamiento y comprensión de los contenidos en los estudiantes. En un trabajo presentado por Torres et al. (2011) se propone una metodología para evaluar el proceso, que en términos generales incluye un sistema de categorización para identificar y describir si la forma en que se desarrollan las tareas permite afirmar si los estudiantes logran una mejor comprensión de los tópicos abordados.

3.2. Características de la investigación cualitativa

La investigación cualitativa se apoya en algunos instrumentos para la recolección de datos, entre ellos video-grabaciones, archivos de audio, entrevistas, registros escritos. En nuestro caso se emplearon registros escritos realizados por el profesor en formato ficha técnica, registros escritos realizados por los participantes mediante hojas de trabajo y video grabaciones. Este tipo de instrumentos son los más usuales en este tipo de investigación, debido a que su propósito es describir a profundidad un fenómeno, que en nuestro caso es el análisis de la implementación de una tarea en el tópico de las funciones trigonométricas. A continuación se describen con más detalle cada uno de los registros empleados para este estudio.

Registros escritos realizados por el profesor en formato ficha técnica. Este instrumento permitió orientar el proceso de instrucción durante las sesiones, además de ser un medio de trabajo que favoreció el desarrollo de las actividades, integrando diferentes registros de representación y favoreciendo el contrastar la información con los instrumentos entregados a los estudiantes.

Registros escritos realizados por los participantes mediante hojas de trabajo. Formato entregado a cada estudiante en el cual a partir de lo observado en cada sesión y de la abstracción que hayan obtenido, registran las ideas relevantes por medio de registro de respuestas a preguntas planteadas, representación geométrica de triángulos rectángulos y registro tabular con la asignación de los criterios analizados en la representación anterior.

Video Grabaciones. La información registrada se almacenó en un dispositivo móvil con capacidad de 128 Gb de almacenamiento, para de esta forma resguardar la información a analizar, siendo prioridad el convertir dicho formato a grabaciones de voz para realizar la trascripción en formato escrito. En tal sentido este recurso permitió triangular la información, por un lado por lo que alumno registra en los formatos escritos y aunado a ello lo que queda registrado en el audio.

3.3. Sujetos de estudio

La tarea de aprendizaje se aplicó a estudiantes de nivel medio superior pertenecientes al programa de estudio de Telebachillerato comunitario, en una comunidad rural, esto en el municipio de Huasca de Ocampo, Hgo. Participan once estudiantes de segundo semestre. Todos los estudiantes egresaron del sistema escolarizado presencial, de dos escuelas diferentes. Una de las instituciones es una secundaria comunitaria y la otra una escuela telesecundaria.

Todos los estudiantes tienen una edad entre los quince y diecisiete años lo cual puede no representar un riesgo en el rezago educativo. Se elige a este grupo de estudiantes con el afán de abordar los contenidos curriculares aprendidos en el nivel de educación básica y complementarlos con los que se abordan en la materia de trigonometría en el plan curricular del programa de estudios de bachillerato.

Las grabaciones se transcribieron en formato digital, al igual que las pruebas escritas y a cada estudiante se le asignó una letra para proteger la identidad personal.

3.4. Diseño de la tarea de aprendizaje

La tarea de aprendizaje matemático se presenta como una estrategia para abordar los objetivos de este estudio, los contenidos curriculares de matemáticas en bachillerato deben abordarse bajo diversos enfoques, Según Duval (2004, citado en Oviedo et al., 2012) el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión (Oviedo et al., 2012; Duval, 2004).

El docente en su rol de mediador busca enriquecer el trabajo en los estudiantes con herramientas que les permita diversificar la forma de aprendizaje y promover el entendimiento de los contenidos matemáticos, producto del enfoque conceptual del profesor. El entendimiento es importante, ya que entender un concepto, idea o resultado, podemos usarlo de manera flexible, adaptarlo para enfrentar situaciones problemáticas y emplearlo como base para aprender cosas nuevas (Barrera y Reyes, 2017; Hiebert et al., 1997;).

Se diseñó una tarea de aprendizaje que incluye tres propuestas didácticas, descritas como actividad de inicio con una duración de cuatro horas, actividad preliminar destinando un total de cuatro horas y finalmente la actividad principal con una duración de cinco horas.

La propuesta se diseñó con base en el análisis de trabajos previos, en este sentido el trabajo de Maknun, Rosjanuardi y Jupri (2019), Renana Altman e Ivy Kidron (2016), Hertel y Cullen (2011), que ofrecen elementos clave para consolidar el diseño. La propuesta parte de un esquema que expresa la secuencia de actividades (ver Figura 12).

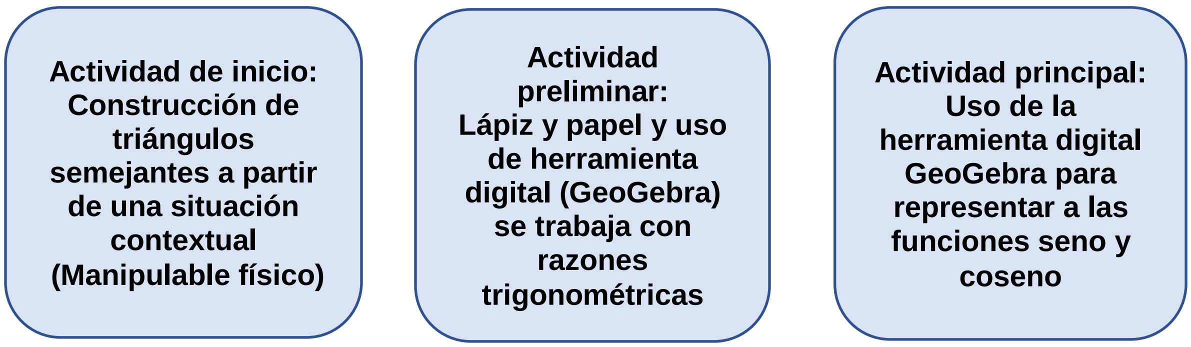


Figura 12. Esquema metodológico general de la tarea de aprendizaje. Elaboración propia

La actividad de inicio diseñada por el profesor consistió en un bloque de dos sesiones de dos horas por cada una, se propuso una actividad de aprendizaje con el propósito de lograr una representación geométrica de triángulos rectángulos semejantes, en el contexto de los manipulables físicos y de ello obtener valores al medir la distancia en cada uno de los segmentos trazados y posteriormente los datos obtenidos permitieron establecer las dos razones trigonométricas de interés en este estudio, por medio del llenado de un registro escrito.

Algo importante que se consideró durante la etapa de diseño de este instrumento es que se debía iniciar con un ángulo de referencia diferente de 45 grados esto con la intención de que en el siguiente episodio no se recurriera a un error procedimental de que las razones trigonométricas seno y coseno para cualquier valor de ángulo deben arrojar siempre el mismo resultado.

En la primera sesión se partió de una representación geométrica diseñada en el software GeoGebra, que se observa en el esquema de la Figura 13a, para guiar a los estudiantes en el uso de la herramienta manual (Figura 13b), para este primer acercamiento se consideró un ángulo de referencia con valor 60 grados, se propuso este valor al tener en cuenta que la magnitud de los segmentos sería la adecuada para obtener datos que sirviesen para la actividad posterior. El uso de GeoGebra se justifica debido a que permita visualizar con mayor facilidad la semejanza entre triángulos rectángulos y para poder determinar la magnitud entre catetos, empleando las herramientas que ofrece el software.

La segunda sesión consistió en entregar a los estudiantes hojas de trabajo, en las cuáles registraron las ideas inferidas de la actividad anterior y con los datos obtenidos de las mediciones establecieron las relaciones trigonométricas seno y coseno con el ángulo de referencia. Finalmente se solicitó al estudiante trazar triángulos rectángulos con ángulos de referencia 15, 30 y 45 grados trazados en papel con el uso de juego geométrico e igual se solicitó establecer las razones trigonométricas. El docente orientó a los estudiantes durante el proceso con el instrumento ficha técnica (APÉNDICE C, sesión II) y por su parte ellos trabajaron en el instrumento hoja de trabajo.

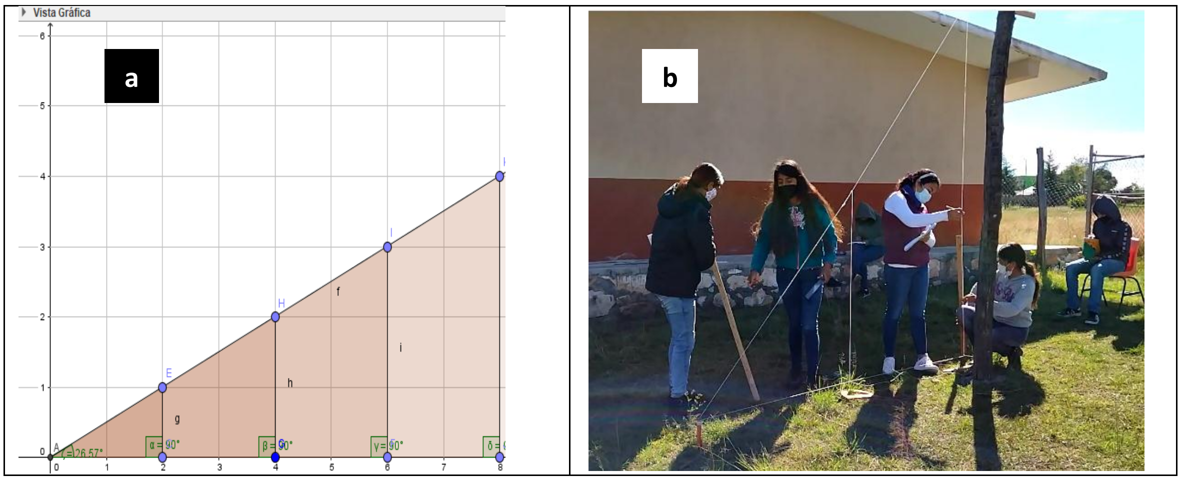


Figura 13. Construcción geométrica “triángulos rectángulos semejantes”(a), contexto físico: uso de manipulables físicos. (b)

El segundo momento propuesto por el docente e identificándolo con el nombre de actividad preliminar, consistió de trabajo en aula de dos sesiones de dos horas cada una, para la primera actividad se trabajó con un entorno de lápiz y papel, los estudiantes reciben el material hoja de trabajo, para concretar la actividad mediante un producto geométrico (Figura 14) y una actividad de registro escrito-tabular (APENDICE C, sesión III) y el docente guía el desarrollo de la actividad con el instrumento ficha técnica.

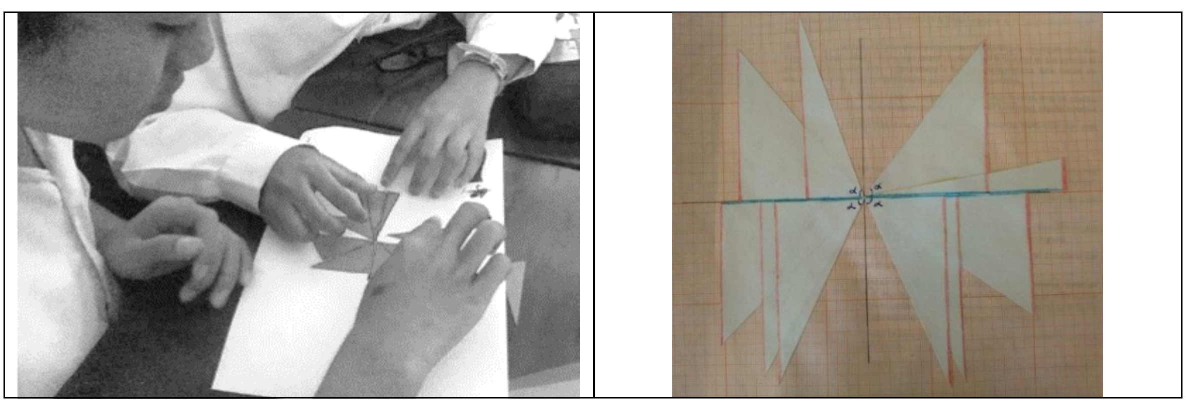


Figura 14. Distribución de triángulos rectángulos con hipotenusa igual a uno y el lugar geométrico que se describen

El propósito de la sesión tres consistió en representar el lugar geométrico que forman los vértices opuestos al ángulo de referencia de 10 triángulos rectángulos semejantes con hipotenusa igual a un centímetro distribuidos en un plano cartesiano y de ello aproximarse a la idea de círculo unitario.

Para la sesión cuatro se recurre al registro de representación mediante el uso de herramienta digital GeoGebra, los estudiantes habían recibido previamente una inducción al uso de la herramienta, que les permitió conocer ciertos elementos del software. Para esta actividad se recurre al registro de representación mediante el uso de la herramienta digita, se construyó una figura denotada con el nombre de "triángulo rectángulo inscrito en círculo de radio uno" (ver Figura 15), este esquema se utilizó como referente para calcular de forma analítica el valor de las razones trigonométricas seno y coseno de 45 grados, la duración de esta actividad fue de dos horas.

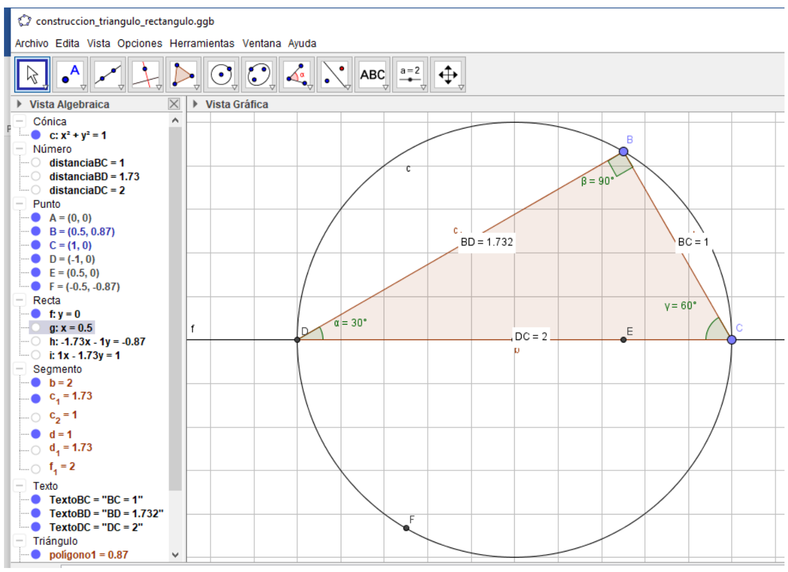


Figura 15. Construcción "triángulo rectángulo inscrito en círculo de radio uno"

El escenario tres identificado como actividad principal, con un total de 2 sesiones, de aquí se desprende la sesión cinco con una duración de tres horas y la sesión seis con duración de dos horas.

La sesión cinco se dedicó principalmente al uso del software GeoGebra por parte de los estudiantes, se realizó la construcción geométrica de un triángulo inscrito en círculo unitario (Figura 16a) se trabajó el concepto de razones trigonométricas para ángulos notables, además de considerar el valor de 0 y 90 grados. Aunado a esto, se extiende la idea de triangulo rectángulo en círculo unitario a triangulo rectángulo inscrito en círculo de radio dos (Figura 16b) y con ello se consolidó el trabajo previamente realizado.

En adición a estas construcciones geométricas, los estudiantes contestaron un formato escrito en el que detallaron el valor de las razones trigonométricas para ambas representaciones.

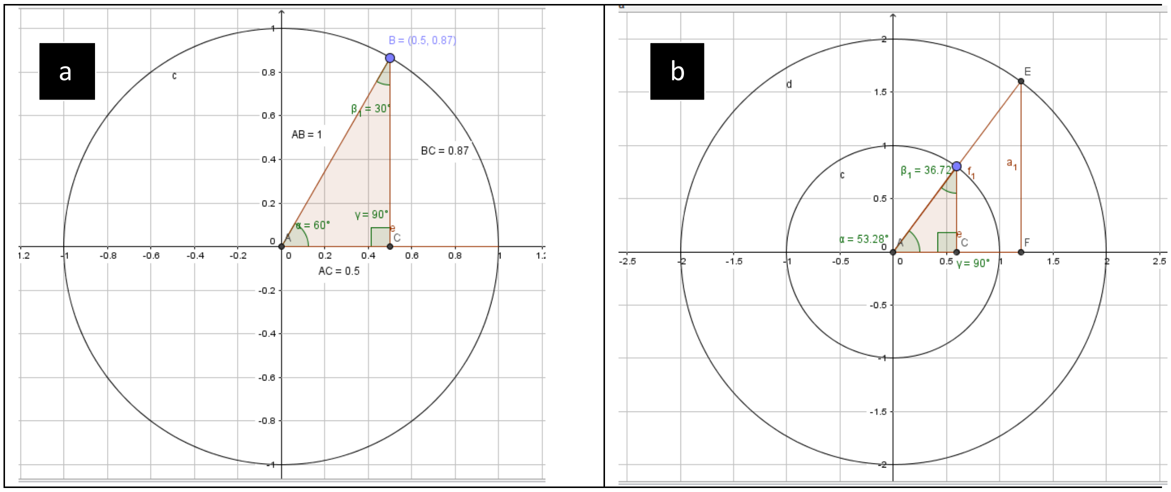


Figura 16. Triangulo rectángulo inscrito en círculo unitario (a) y triángulos rectángulos semejantes inscritos en círculo de radio dos (b)

Finalmente la sesión seis se dedicó a desarrollar y entender el concepto de función trigonométrica, los estudiantes trabajaron en un registro escrito con la intención de acercarlos al significado mediante representación gráfica y tabular. El interés del docente en que los estudiantes representaran las funciones trigonométricas seno y coseno de forma gráfica, con el especial cuidado que se requiere al representar el dominio de la función en términos de números reales, por tal motivo se enfatizó la conversión de grados (representación sexagesimal) a radianes considerando así una función periódica (ver Figura 17).

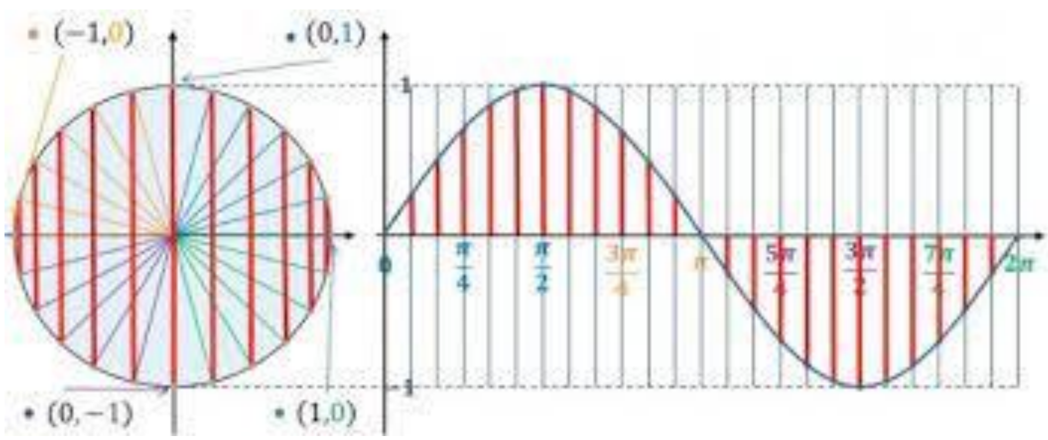


Figura 17. Representación gráfica de la función trigonométrica

CAPÍTULO 4. RESULTADOS Y DISCUSIONES

En este capítulo se analizan los datos presentados por los estudiantes en los formatos hojas de trabajo y se discuten los resultados bajo el enfoque del marco conceptual: Abstracción en Contexto (AiC), el diseño de tareas de instrucción y la aproximación de resolución de problemas, la demanda cognitiva de las tareas**.** Estos procesos se refieren a los principios teóricos que orientan el diseño e implementación de la tarea de aprendizaje así como la repercusión que tiene en el aprendizaje de los alumnos.

4.1. Análisis de la sesión I

El trabajo en campo de la sesión I permitió abordarla por equipos, el docente organizó dos grupos de trabajo, organizándolos de la siguiente manera:

Forma de trabajo	Estudiantes
Equipo 1	E1, E2, E4, E9, E10, E11
Equipo 2	E3, E5, E6, E7, E8

Se analizaron las primeras dos sesiones con el modelo $RBC + C$ que de acuerdo a Dreyfus et al. (2015) la abstracción de conocimiento requiere de una necesidad, surgimiento y consolidación de un constructo.

Las categorías se describen en la Tabla 5. De tal forma que permitieron analizar y documentar los procesos de abstracción de conocimiento.

Tabla 5. Modelo de análisis RBC+C

Categoría	Características
Reconocimiento (R)	Tiene lugar cuando el alumno reconoce que un constructo de conocimiento previo específico es relevante para el problema que se está enfrentando.
Edificación (B)	Es una acción que comprende la combinación de constructos teóricos reconocidos con el fin de lograr la solución de un problema.
Construcción (C)	Consiste en estructurar, ensamblar las construcciones previas, esto por matematización vertical. Se manifiesta en la presencia del nuevo constructo por parte del alumno.
Consolidación (+C)	Consolidación: Se refiere a la capacidad por parte de los estudiantes para reconocer progresivamente la relevancia del constructo para manejarlo de forma flexible en otras actividades.

Fuente: Dreyfus et al. (2015)

La actividad diseñada por el docente tuvo el propósito de acercar a los estudiantes a una actividad de trabajo en campo, el interés en que los estudiantes manipulen herramientas manuales y poder introducir el concepto de razones trigonométricas, permitió que los estudiantes y con observación del profesor llevaran a cabo un modelo de representación geométrica. El esquema físico propuesto, permitió relacionar los segmentos a formato de razones casi proporcionales, los trazos en el trabajo de campo permitieron aproximarse a la razón y proporción entre segmentos. (Figura 18).

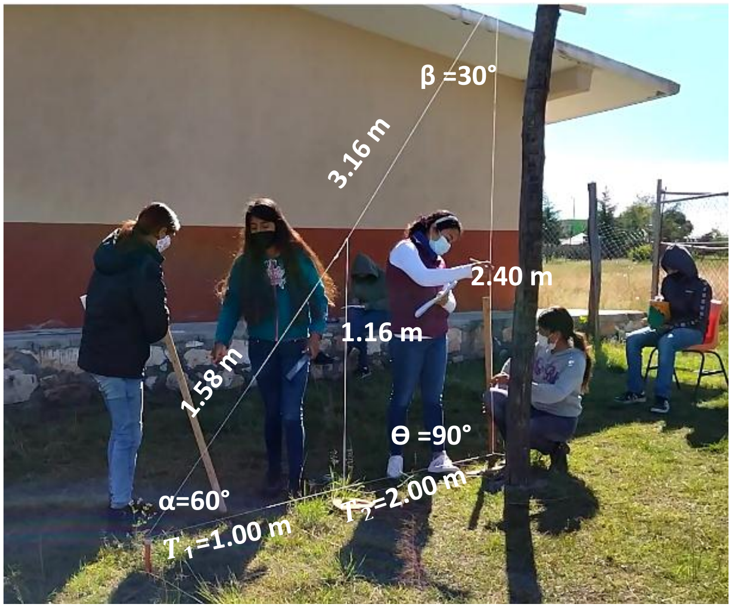


Figura 18. Obtención de magnitud en segmentos de triángulos semejantes, equipo 1

La proyección de triángulos rectángulos semejantes requirió especial cuidado, comenzando con el trazado del segmento horizontal en una superficie completamente irregular.

A continuación se presenta un fragmento del contexto didáctico al que se enfrentaron los estudiantes. El docente en su rol mediador, entrega información en forma de heurísticas para que los estudiantes resuelvan la situación.

P: A ver E6 que ha trabajado en esta cuestión, ¿cómo le haríamos para obtener el mismo nivel de esta estaca hasta este punto de acá?
E6: seria medir de aquí hasta donde llega
P: Ah ok y si esta parte de aquí tiene más altura, el piso está descuadrado
E7: tiene que medir de aquí hasta arriba y lo que mide aquí debe medir lo mismo que de allá al piso

En el dialogo se pretende construir el significado de magnitud y dirección horizontal, el estudiante asume que la superficie es uniforme y que no es necesario realizar la nivelación del terreno.

El estudiante E7 verbaliza que es importante disminuir la longitud del segmento horizontal para así aumentar el valor del ángulo de referencia en el triángulo, situación que no se discute y no se lleva a la reflexión de forma grupal. Los estudiantes presentan dificultad al proyectar triángulos rectángulos semejantes, al no lograr una representación mental de un triángulo rectángulo de magnitudes superiores al establecido, no logran visualizar qué características pudieran desprenderse de ella.

En una etapa siguiente el mismo estudiante E7 no tiene claro si se tiene que disminuir o alargar la estaca, comenta que es necesario alargar la estaca para poder disminuir el ángulo de inclinación. Trata de convencer que ahora los argumentos que presenta son los que se requieren para resolver el planteamiento. En este momento se les presenta un desafío cognitivo, situación que el profesor no les resuelve.

La forma en que logran realizar la representación buscada es manipulando los elementos móviles y comparando la relación entre segmentos e identificando en qué momento se logra aumentar o disminuir el ángulo de inclinación. La estudiante E2 comentó que es necesario disminuir la longitud del segmento horizontal para compensar la longitud vertical a una magnitud que sea alcanzable por los participantes.

Los estudiantes del equipo 2 exhiben dificultad para relacionar unidades de medida para diferentes magnitudes, relacionando la longitud con el valor de grados de forma recurrente.

El Equipo 1 logró transitar por la acción de Reconocimiento, de la tarea desempeñada, pudieron identificar los constructos previos para abordar la situación, argumentando que los contenidos matemáticos necesarios para esta tarea fueron razones y proporciones como las trabajadas en clase, solo que ahora para triángulos rectángulos, formalizando así la primera acción epistémica. Lo anterior se pone en evidencia

Los integrantes del Equipo 2 participaron activamente durante el desarrollo de la actividad, el nivel de acción que desarrollan es Reconocimiento, al igual teniendo claridad del contenido matemático que se abordó.

4.2. Análisis de la sesión II

Para esta sesión se considera el marco teórico AiC como secuencia de actividad con la actividad previa. La información que los estudiantes recabaron a partir de la experiencia de trabajo en campo sirvió como referente para completar el registro escrito solicitado en la hoja de trabajo. Mencionar que para esta sesión los estudiantes trabajaron de forma individual.

El propósito de construir el concepto matemático de razones trigonométricas entre segmentos de triángulos rectángulos semejantes, gracias al empleo del material manipulable se alcanzó en cierto nivel de abstracción que será detallado en este apartado.

Los estudiantes tuvieron la inducción de razones trigonométricas en la sesión anterior, teniendo como experiencia el a ver establecido como ángulo de referencia el valor inicial de 60 grados en el contexto físico. Para el comienzo de esta sesión se tuvo especial detalle en la relación que guardan los catetos de triángulos rectángulos, para valores graduales y descendentes de ángulos: 45, 30 y 0 grados. Considerando que no fue necesario realizar la construcción de las figuras en el contexto físico, solo se tuvo la intención de estimar el valor que toman las razones estudiadas para tales valores de ángulo.

De la experiencia descrita en el párrafo anterior, los estudiantes se dieron cuenta que el cateto mayor no necesariamente corresponde con el cateto opuesto y que el cateto menor no siempre se corresponde con el cateto adyacente.

Para el desarrollo de este apartado, se pidió a los estudiantes recuperaran los datos obtenidos anteriormente y enlazarlos para calcular las razones seno y coseno para triángulos semejantes por medio del llenado de un formato escrito.

El objetivo que se perseguía con este registro es el de relacionar el valor de las razones trigonométricas a un valor establecido de ángulo de referencia, que indistintamente la medida de los segmentos, siendo estos proporcionales, las razones trigonométricas se mantuvieron constantes.

Los estudiantes construyeron significado como un proceso de recurrir a contenidos matemáticos para determinar el valor de razón trigonométrica para el seno y coseno con un valor de referencia establecido de 60 grados. (Ver Figura 19, 20).

Nombre del (la) estudiante: E1 Fecha: 20 de Octubre del 2021

Apartado I. Hallar el valor de las razones trigonométricas seno y coseno para el ángulo de referencia de 60°, para llenar la siguiente tabla debes considerar los valores obtenidos en la representación gráfica que se realizó en la actividad "triángulos rectángulos semejantes"

Valor del ángulo	Cateto menor	Cateto mayor	Hipotenusa	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno
60°	1 m	1.16 m	1.58 m	Seno 60° ≈ 1.16m / 1.58m Seno60° ≈ 0.73	Coseno60° = 1 m / 1.58m Coseno 60° ≈ 0.63
60°	2m	2.40 m	3.16m	Seno60° = 2.40m / 3.16m Seno60° ≈ 0.76	Coseno60° = 2m / 3.16m Coseno60° = 0.63
60°	3 m	3.6	4.74	Seno60° = 3.6 m / 4.74m Seno60° ≈ 0.76	Coseno60° = 3m / 4.74m Coseno60° = 0.63

Figura 19. Respuestas de estudiante E1

Nombre del (la) estudiante: E3 Fecha: 20/10/2021

Apartado I. Hallar el valor de las razones trigonométricas seno y coseno para el ángulo de referencia de 60°, para llenar la siguiente tabla debes considerar los valores obtenidos en la representación gráfica que se realizó en la actividad "triángulos rectángulos semejantes"

Valor del ángulo	Cateto menor	Cateto mayor	Hipotenusa	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno
60°	1m	1.17m	1.59m	Seno = 1.17m / 1.59m Seno 0.73	Coseno = 1 / 1.59 Coseno 0.62
60°	2m	2.37m	3.20m	Seno 2.37m / 3.20m Seno = 0.74	Coseno = 2 / 2.37m Coseno = 0.62
60°	3m	3.51m	4.77m	Seno = 3.51m / 4.77m Seno = 0.73m	3 / 4.77 Coseno = 0.62

Figura 20. Respuestas de estudiante E3

Las respuestas que muestran los estudiantes E1 y E3 dan evidencia del significado que adquiere el entendimiento y que de acuerdo con la articulación de constructos reconocidos, se logró avanzar a la acción de Reconocimiento de acuerdo al modelo de análisis para esta actividad. La muestra total de los resultados se presenta en el Apéndice D.

Estudiantes que lograron finalizar la actividad y que además les favoreció para alcanzar la acción de Edificación: E1, E2, E3, E4, E6, E7, E8, E10, E11. Hasta este momento los alumnos no alcanzan la acción de Construcción, siguiendo el modelo de análisis. Al no formalizar un constructo nuevo, no lograron verbalizar qué ocurre con las razones trigonométricas para un ángulo de 90 grados, esto al no haber manipulado físicamente los catetos para valores de ángulo mayor que 60 grados, en el trabajo en campo y de ello no lograr la comparación entre la magnitud de los segmentos, no hay claridad del valor que toma el seno y coseno.

4.3. Análisis de la sesión III

En esta actividad con duración de dos horas, se trabajó en el contexto del aula, empleando el registro lápiz y papel, los estudiantes trabajaron de forma individual. Los principios teóricos que orientan el proceso de diseño, consolidaron las ideas para el proceso de implementación y reorientación de la tarea de aprendizaje, se hace énfasis en la reestructuración de la tarea, esto por la necesidad de alcanzar el objetivo de construir un lugar geométrico que permitiera arribar a la idea y conceptualización de circulo, acercar al estudiante a la noción de circulo unitario y permitir asignar un nombre genérico a los ejes coordenados, tal es el caso de eje de senos y cosenos.

Para esta actividad se pensó en tomar como referencia la teoría semiótica de representaciones de Duval (2004), la cual tienen como dentro de sus propósitos el establecer alguna tarea cognitiva a través de conceptualización, razonamiento, resolución de un problema, monitoreando diversas rutas de solución.

La tarea que se destacó en este apartado consistió en el tratamiento de un conjunto figuras geométricas llamadas triángulos rectángulos por medio del registro semiótico esquema gráfico.

El primer acercamiento que se tuvo en la actividad, se pidió a los estudiantes que dibujaran 10 triángulos rectángulos semejantes de hipotenusa igual a 1 cm, los recortaron y los distribuyeron en un plano cartesiano. Se hace notar de forma inmediata que los estudiantes no se sintieron cómodos con la actividad, esto ante la dificultad para recortar y manipular los elementos geométricos, el registro de la alumna E11 (Ver Figura 21a) no cumple con las instrucciones marcadas en la hoja de trabajo.

Considerando que el ángulo de referencia debía quedar centrado en el origen del plano, los catetos opuestos al ángulo verse únicamente como segmentos verticales y los catetos adyacentes al ángulo verse como segmentos horizontales y distribuidos únicamente sobre el eje horizontal.

Cabe señalar que se presentó un error procedimental al considerar triángulos rectángulos con dimensiones muy pequeñas, con hipotenusa igual a un centímetro. La actividad no logra el propósito de construir un lugar geométrico que se acerque a la idea de círculo y de ahí no poder recurrir a los siguientes conceptos matemáticos.

Ante la dificultad de lograr una distribución en el plano cartesiano además y no cumplir con el objetivo (ver Figura 21a), la actividad se reorientó y para ello se consideró el mismo principio teórico de representaciones semióticas, sin cambiar de esquema de trabajo, el docente tuvo que abordar en el aula las nuevas condiciones, emplear una escala mayor, cuidando el concepto de razón numérica, se elige la escala 1:10 reforzando la idea de que cada centímetro en escala real se representaría gráficamente como un valor de 10 centímetros.

La distribución de los triángulos rectángulos con hipotenusa igual a 10cm se puede observar el trabajo de la estudiante E11 (Figura 21b).

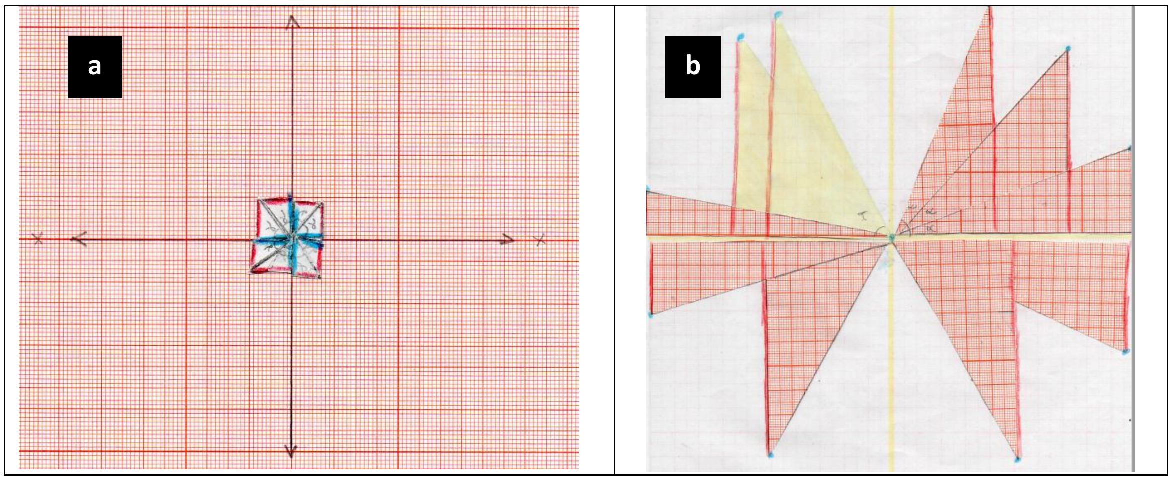


Figura 21. Trabajo desarrollado, estudiante E11 (a) y triángulos rectángulos con hipotenusa igual a 10 cm, misma estudiante (b)

El éxito que se tuvo al mediar la situación con una alternativa de trabajo permitió dar continuidad con la actividad. La idea que se propuso una vez completado el esquema gráfico fue el considerar un registro tabular que favoreciera articular los conceptos matemáticos que el alumno ha ido desarrollando. Lo que se intentó con el llenado de las tablas es que se enfocaran en los detalles de la construcción geométrica, tal es el caso, del patrón geométrico y la trayectoria que siguen las figuras.

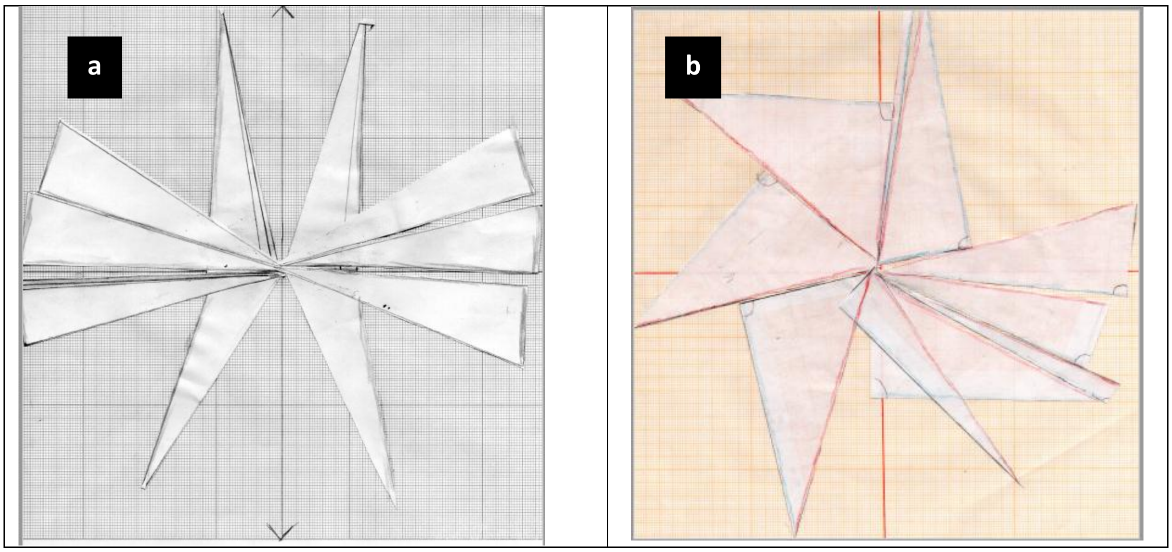
En este contexto los estudiantes refieren la idea de que los ángulos agudos complementarios a alfa en todos los triángulos forman un polígono irregular en otros casos forman una estrella mal hecha, finalmente al proyectar más triángulos sobre el plano hacen referencia de que se forma un circulo.

Los estudiantes E1, E2, E3, E4, E5, E9, E10 en esta actividad logran relacionar los ejes del plano coordenado con el nombre genérico eje de senos y cosenos, que era otro propósito marcado en la ficha de trabajo.

Los estudiantes E3 y E5 tuvieron dificultad para desarrollar la primera aproximación y que además no alcanzaron transitar a la siguiente representación, pese a la estructura que obtuvieron (ver Figura 22) esto se manifestó en dificultad para identificar el lugar geométrico que se forma y llegar al desenlace.

Para evaluar los resultados, se analizó el registro tabular (Tabla 6) que describe el procedimiento que siguieron los estudiantes.

Destacamos que los registros semióticos de representación fueron una alternativa eficaz en el logro de los resultados de esta tarea. De esa manera se consiguió arribar a la idea de círculo unitario y verbalizar que ocurre con el valor de las razones trigonométricas para ángulos distribuidos sobre el eje vertical y horizontal esto con el claro objetivo de nombrar de forma genérica a los ejes del plano cartesiano.



4Figura 22. Resultado de trabajo del estudiante E3 (a) y estudiante E5 (b) en actividad reestructurada

Tabla 6. Características en triángulos semejantes orientados en plano cartesiano

Actividad sesión III	material de estudiantes, considerando registro completo en todos los apartados			
	E1	E2	E3	E9
Identifica el vértice que forma el ángulo alfa en todos los triángulos rectángulos que plasmaste y escribe las semejanzas que encuentras	Todos los vértices intersecan en el origen del plano cartesiano	Es semejante a los demás triángulos porque casi todos están pegados de los mismos lados	Todos los triángulos tienen un punto definido trascendente en el plano cartesiano	En que los ángulos tienen que coincidir con 90 grados
Identifica el vértice que forma el ángulo recto en todos los	Todos los vértices forman un	Casi todos están marcados en la	Todos tienen un ángulo horizontal y	Que el vértice forma

triángulos y redacta las características que tienen en común	ángulo recto, todos los vértices se encuentran en el eje horizontal	orilla todos están en un ángulo de 90 grados	todos dan un ángulo de 90 grados, que es recto	un ángulo de 90 grados
Identifica el ángulo agudo complementario a alfa en todos los triángulos escribe características en común	Forman un ángulo agudo, es el vértice que une la hipotenusa y el cateto opuesto	Complementan a un triángulo, son vértices opuestos, es el vértice que une la hipotenusa	Que forman un ángulo agudo de 90 grados al complementario a alfa y forman una figura geométrica con una sola medida	Las puntitas de los triángulos son un ángulo agudo y que son diagonales
¿A qué lugar geométrico se hace referencia, cuando realizas la unión de los vértices antes mencionados?	Se forma un polígono irregular, un círculo. Al eje horizontal se le llama eje de los cosenos y al eje vertical eje de los senos	Una estrella mal hecha o un circulo, ah un circulo, eje de los cosenos y eje de los senos	Lugar geométrico un cuadrado, polígono regular, eje de los cosenos y eje de los senos	Una estrella es lo que forman los vértices, se aproximaría a un círculo, eje de los cosenos y eje de los senos

4.4. Análisis de la sesión IV

Siguiendo con el análisis toca el turno a esta sesión, cabe mencionar que a partir de aquí y hasta el final de la implementación de actividades el docente no cuenta con otro material de análisis diferente al registro escrito. Esto por no contar con dispositivo de video grabación.

Los estudiantes trabajaron con el software GeoGebra desde sus dispositivos móviles, siguiendo el proceso de construcción que el docente abordó desde su computadora.

Para el proceso se recurrió a la representación “triángulo rectángulo inscrito” que básicamente se toma del teorema I de la medida del circulo de Arquímedes, de la cual se desprende la idea que el diámetro de una circunferencia cual sea y un punto sobre esta, al trazar los puntos se forma siempre un triángulo rectángulo (Figura 23). De esta idea se trabajó con la herramienta digital para determinar una mayor cantidad de triángulos rectángulos al desplazar un punto sobre una circunferencia propuesta con diámetro dos unidades.

En esta actividad se pretendió buscar en los estudiantes el visualizar con la ayuda de mediación instrumental que invariantemente del radio en una circunferencia, el valor de las razones trigonométricas seno y coseno permanece constante. Los estudiantes E3, E5, E7, E8, E9, E10 presentaron dificultad para entender cuál de los segmentos correspondía con la hipotenusa, recurriendo en varias ocasiones a los segmentos definidos como catetos. El software les permitió superar esa dificultad, al observar visualmente diversas representaciones.

La herramienta sirvió como una representación visual dinámica para que los alumnos obtuvieran información a partir de lo trabajado, que para algunos de ellos resultó en algo ya conocido como por ejemplo que la hipotenusa es la base del triángulo y tiene una longitud de dos unidades, siendo esta la de mayor longitud, que la altura corresponde con el valor del radio y con esto establecieron que la figura presenta área máxima y que la suma de los ángulos internos es 180 grados. La distancia de los catetos la obtuvieron empleando la herramienta medición, pero hasta este momento no sabían cómo determinar el valor mediante algún proceso matemático.

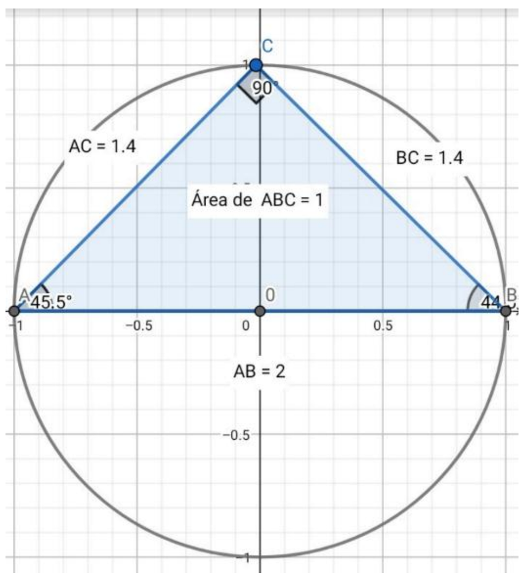


Figura 23. Construcción “triángulo rectángulo inscrito en círculo de radio uno” estudiante E4

A partir de esta estructura se dieron cuenta que dos ángulos son congruentes (Figura 23), pero no se percataron que los lados opuestos a estos ángulos median lo mismo, hasta que utilizaron el software a través de la herramienta “medición” para obtener los valores.

Se trabajó para obtener de forma indirecta el valor que toma el cateto opuesto y adyacente, empleando el teorema de Pitágoras. Obteniendo como respuesta que el valor de los catetos se obtiene como razón $\frac{\sqrt{2}}{2}$ de ahí argumentaron que las razones trigonométricas resulta el mismo valor para dicho ángulo.

Posteriormente observaron casos particulares en representaciones de triángulos rectángulos con valor de ángulo de referencia en 30 y 60 grados para deducir como el teorema puede ayudar a la resolución de estos planteamientos.

Con esta actividad se favoreció el proceso analítico para la calcular las razones trigonométricas de interés en triángulos rectángulos con ángulos de 30, 45 y 60 grados, induciendo en los estudiantes un conocimiento acerca del valor de las razones trigonométricas para estos valores.

Para Torres et al. (2022), el proceso de aprendizaje requiere un conjunto articulado de perspectivas que orienten al profesor en el diseño de actividades y que además se adecuen al constante cambio curricular, promoviendo el empleo de herramientas digitales y de esto se desprende que los estudiantes encuentren estrategias para la resolución de problemas.

La sesión favoreció a los estudiantes al considerar que la herramienta digital les ofreció heurísticas para que ellos buscaran estrategias, en mayor o menor medida, pero ofreciendo soluciones que se sustenten en un razonamiento y por tanto reforzando el aprendizaje.

4.5. Análisis de la sesión V

Para los criterios de análisis en esta actividad se consideró pertinente tomar las características extendidas para la evaluación de la demanda cognitiva (Tabla 4) como modelo de interpretación al propuesto por Stein y Smith (1998), (Tabla 3). Se decidió elegir los criterios extendidos, esto por motivo de brindar un esquema representativo para la evaluar el desempeñaron que tuvieron los estudiantes.

En la actividad, para la primera mitad del tiempo se dio importancia al empleo de la herramienta digital GeoGebra, de ahí se obtuvo un modelo de triángulos rectángulos formados en el primer cuadrante con circunferencias de diferente radio (Figura 24).

Siguiendo con el proceso, del modelo elaborado, se tomaron notas como mediciones de segmentos y ángulos, se registró la información en una prueba escrita (Figura 25).

Posteriormente el resto de la sesión se dedicó a desarrollar una noción hacia función seno y coseno para ángulos mayores a 90 grados.

A continuación se establece un cuadro simplificado con las categorías tomadas del trabajo de Benedicto y colaboradores (2015), mismo que muestra un panorama general de los aspectos y los criterios de consideración.

Nivel de Demanda Cognitiva (D.C)	Estándar	Criterios
BAJO	Memorización	1.1 al 1.6
BAJO-MEDIO	Algoritmos sin conexiones	2.1 al 2.6
MEDIO-ALTO	Algoritmos con conexiones	3.1 al 3.6
ALTO	Hacer Matemáticas	4.1 al 4.6

Los criterios de evaluación dependieron del tipo de entendimiento que adquirieron los estudiantes, de acuerdo a la calidad de sus respuestas. Se presentan a continuación las características para los niveles antes mencionados.

Tabla 7. Niveles de Demanda Cognitiva y criterios, evaluación de la tarea

BAJO-MEDIO	MEDIO-ALTO
(2.1) Son algorítmicas. Indican expresamente qué algoritmo usar o es evidente por el contexto.	(3.1) Orientan al estudiante a usar algoritmos con el objetivo de que tenga una comprensión más profunda de los conceptos e ideas matemáticos.
(2.4) Enfocadas a obtener respuestas correctas pero no a desarrollar la comprensión matemática.	(3.4) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Se pueden utilizar algoritmos generales, pero al aplicarlos, hay prestar atención a la estructura del patrón.
(2.5) Explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo usado.	(3.5) Los estudiantes necesitan considerar conscientemente ideas conceptuales que subyacen a los algoritmos para resolver con éxito la cuestión.
(2.6) En su resolución se pueden utilizar múltiples representaciones (aritmética, diagramas visuales, materiales manipulativos, etc.)	(3.6) Explicaciones que hacen referencia a las relaciones subyacentes utilizando casos concretos (posiciones particulares de la serie).

Fuente: Benedicto et al. (2015).

En cada fragmento que se presenta en seguida, se asigna una categoría de acuerdo al nivel de D.C.

La validez que ha brindado la herramienta digital favorece el manipular la figura geométrica (Figura 24), trazar muchas figuras en un plano coordenado, obtener medidas más aproximadas de ángulos y segmentos, lo cual el diseño en campo es más difícil de obtener datos precisos. Además de no tener la necesidad de cargar con libretas y juego geométrico (APÈNDICE A, estudiante E2). La herramienta digital les permitió diversificar las ideas, buscando detalles que emanan de las representaciones (Ver criterio 3.3. en la Tabla 7).

Los estudiantes logran entender el concepto de razones trigonométricas y su significado en el círculo unitario, con representación de triángulos rectángulos semejantes, en el primer cuadrante del plano coordenado. Comenta la estudiante E1: Porque sus lados son proporcionales, porque manejamos la misma cantidad de decimales y mientras tengamos más decimales nos lanza a un valor más cercano al real.

E2: Siempre y cuando los triangulos tengan semejanza y sus relaciones sean las mismas, no importa 10, 20, 30, 100, 1000 triangulos si son semejantes daran el mismo valor de angulos. (Ver criterio 2.6. en la Tabla 7).

Para formalizar las ideas, el grupo trabajó en un registro escrito dando constancia de la viabilidad de obtener datos con la tecnología digital para que los estudiantes logren conseguir resultados más próximos al valor real de razones trigonométricas para triángulos rectángulos inscritos en circunferencias de diferente radio. (Figura 23).

La mayoría de los estudiantes alcanzan un nivel en el que hacen procedimientos algorítmicos con cierto nivel de entendimiento (Ver criterio 3.1. en la Tabla 7)

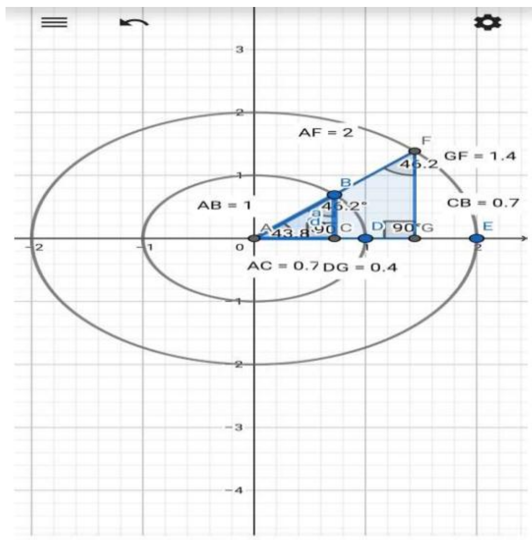
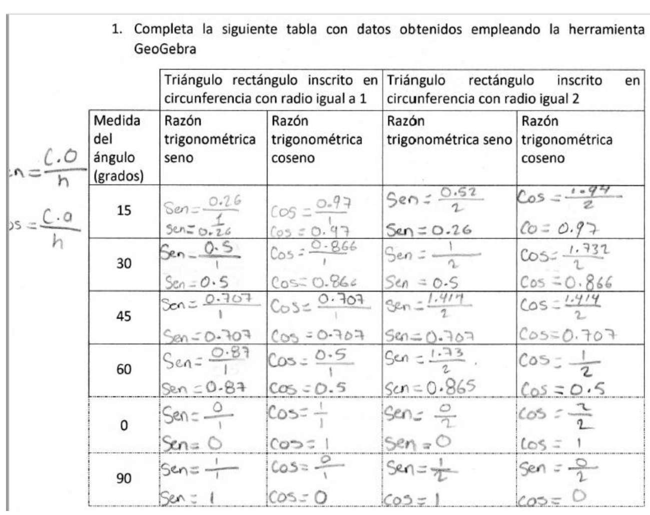


Figura 24. Uso de la herramienta digital en dispositivo móvil, estudiante E11



1. Completa la siguiente tabla con datos obtenidos empleando la herramienta GeoGebra

$Sen = \frac{C.O}{h}$

$Cos = \frac{C.a}{h}$

	Triángulo rectángulo inscrito en circunferencia con radio igual a 1		Triángulo rectángulo inscrito en circunferencia con radio igual 2	
Medida del ángulo (grados)	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno
15	$Sen = \frac{0.26}{1}$ $Sen = 0.26$	$Cos = \frac{0.97}{1}$ $Cos = 0.97$	$Sen = \frac{0.52}{2}$ $Sen = 0.26$	$Cos = \frac{1.94}{2}$ $Co = 0.97$
30	$Sen = \frac{0.5}{1}$ $Sen = 0.5$	$Cos = \frac{0.866}{1}$ $Cos = 0.866$	$Sen = \frac{1}{2}$ $Sen = 0.5$	$Cos = \frac{1.732}{2}$ $Cos = 0.866$
45	$Sen = \frac{0.707}{1}$ $Sen = 0.707$	$Cos = \frac{0.707}{1}$ $Cos = 0.707$	$Sen = \frac{1.414}{2}$ $Sen = 0.707$	$Cos = \frac{1.414}{2}$ $Cos = 0.707$
60	$Sen = \frac{0.87}{1}$ $Sen = 0.87$	$Cos = \frac{0.5}{1}$ $Cos = 0.5$	$Sen = \frac{1.73}{2}$ $Sen = 0.865$	$Cos = \frac{1}{2}$ $Cos = 0.5$
0	$Sen = \frac{0}{1}$ $Sen = 0$	$Cos = \frac{1}{1}$ $Cos = 1$	$Sen = \frac{0}{2}$ $Sen = 0$	$Cos = \frac{2}{2}$ $Cos = 1$
90	$Sen = \frac{1}{1}$ $Sen = 1$	$Cos = \frac{0}{1}$ $Cos = 0$	$Sen = \frac{1}{2}$ $Cos = 1$	$Sen = \frac{0}{2}$ $Cos = 0$

Figura 25. Aproximación a razones trigonométricas con datos obtenidos de GeoGebra, estudiante E5

Llegando a la parte final del análisis, otra situación y no menos importante es el transitar hacia la noción de función trigonométrica. Para la mayoría de los estudiantes (9 de 11 estudiantes) no se consigue el propósito de transitar al entendimiento al referir ángulos mayores a 90 grados, valores ubicados en cuadrantes dos, tres y cuatro del plano cartesiano. A continuación se presenta un fragmento de lo expuesto por una estudiante que se solicita determinar el coseno de cero grados.

Estudiante E11: Porque el cateto opuesto y la hipotenusa se convierten en cero porque desaparecen y el que existe es el adyacente pero no nos sirve para calcular el seno (ver APÈNDICE A). Se observa que la estudiante pierde de vista a la hipotenusa, esta al orientarse sobre el eje horizontal, da por hecho que el valor es cero y no pudiendo relacionarla con el cateto opuesto y adyacente no puede continuar con el proceso para determinar el valor para 180 grados por mencionar un ejemplo. Algunos alumnos no consolidan el proceso algorítmico con la representación visual (Ver criterio 2.5. en la Tabla 7).

Siguiendo con el orden de ideas una vez propuesto el escenario didáctico se tuvo como posibilidad el acercar a los estudiantes al valor que toman las funciones trigonométricas con valor de ángulo orientado sobre los ejes de los planos coordenados, esto con la intención de evidenciar la validez de la razón coseno y seno para valores 0, 90,180, 270 y 360 grados.

La mayoría de los estudiantes calculan el valor del seno y coseno para 0, 90, 180, 270 y 360 grados, valores de ángulos orientados sobre los ejes coordenados, sin embargo no logran determinar el valor las funciones seno y coseno para ángulos de valor 135, 225, 270, 315 grados, al no encontrar la estrategia que les permita una representación de triángulos semejantes en los diferentes cuadrantes y con ello no encontrar equivalencia entre las funciones trigonométricas (Ver criterio 2.4. en la Tabla 7).

Debido a los criterios entonces podemos considerar que los estudiantes transitaron entre el nivel MEDIO-ALTO al nivel BAJO-MEDIO, esto lo afirmamos porque aunque se considera que alcanzaron cierta consolidación en la comprensión en razones trigonométricas, no ocurrió lo mismo en el caso de la noción como funciones trigonométricas.

4.6. Análisis de la sesión VI

En esta última sesión los estudiantes trabajaron en el aula, con la supervisión de un profesor externo, con poco conocimiento del tema, esto con la intención de no recibir ayuda que les permitiera extender sus ideas, por tanto el análisis de la información es una interpretación que se tiene únicamente de registros escritos en formato tabular, aunque se pensó trabajar el esquema gráfico, no se implementó debido a una situación extraescolar.

El objetivo marcado fue lograr un entendimiento de funciones trigonométricas seno y coseno a través de sus representaciones tabular y gráfica. De forma previa el docente abordó mediante trabajo en clase, los conceptos de periodicidad, rango, dominio en números reales, para expresar en términos de valores reales.

Para Barrera-Mora et al. (2021), Santos Trigo (2016). Una de las formas para aprender matemáticas es a través de resolución de problemas, con contenido implícito en el descubrimiento de ideas, enriqueciéndolas con materiales de interés por el contenido, coadyuvando a crear estructuras mentales sólidas. Este marco teórico de resolución de problemas evidencia la aplicación de actividades no rutinarias, con esta idea se faculta al alumnado para que recapitulen ideas previas y puedan consolidar el aprendizaje derivado de las tareas resueltas.

Se entregó a los alumnos una tarea con enfoque en resolución de problemas centrado en las funciones seno y coseno. Para la estudiante E1 el trabajo previo realizado fue útil al calcular las razones trigonométricas y por ello el manejo que tuvo a bien para determinar las funciones con valores múltiplos de 45 (esto en grados), permitiendo separar la idea de grados como medida circular y transitar del concepto de grados hacia radianes como función periódica.

Aprovechamos para mencionar que el objetivo de la actividad para la estudiante E1 no se cumplió debido a que los valores que presentó no corresponden al valor exacto de las funciones, porque empleó unidades decimales y con ello solo se aproximó a los valores reales (ver Figura 26).

La siguiente estudiante E2 quien propuso una aportación más adecuada ya que el orden de ideas que estableció le ayudó a darse cuenta que las expresiones deben cimentarse sobre dominio de variable real (Figura 27). Esta estudiante quizá hubiese completado el registro gráfico cumpliendo así con el objetivo.

Lo expuesto en la hojas de trabajo de los demás estudiantes permitió observar que no logran calcular el valor de las funciones trigonométricas (APENDICE A, sesión VI), el proceso analítico realizado en sesiones anteriores les debió haber permitido extender las ideas. Difícilmente esta porción de estudiantes habría logrado representar las coordenadas para dominio y rango, en el registro gráfico.

Para la mayoría del grupo, el objetivo no se consiguió de acuerdo a los criterios analizados en las hojas de trabajo de los estudiantes, no se alcanza entender el concepto de función trigonométrica, solo se rescatan algunas ideas que no desencadenan en algo concreto, como lo que expuso el estudiante E5 (Figura 28).

E1 04/03/2022

6. Completa el siguiente registro con ayuda de las construcciones geométricas que has realizado empleando el software GeoGebra. Realiza las conversiones a valor de radián

Angulo α (grados)	Ángulo α en radianes	Senα	Cosα	Par ordenado (ángulo radianes, seno α)	Par ordenado (ángulo radianes, coseno α)
0	0π rad	0	1	$(0\pi, 0)$	$(0\pi, 1)$
45	$\frac{1}{4}\pi$ rad	0.7071	0.7071	$(\frac{1}{4}\pi, 0.7071)$	$(\frac{1}{4}\pi, 0.7071)$
90	$\frac{1}{2}\pi$ rad	1	0	$(\frac{1}{2}\pi, 1)$	$(\frac{1}{2}\pi, 0)$
135	$\frac{3}{4}\pi$ rad	0.7071	-0.7071	$(\frac{3}{4}\pi, 0.7071)$	$(\frac{3}{4}\pi, -0.7071)$
180	π rad	0	1	$(\pi, 0)$	$(\pi, 1)$
225	$\frac{5}{4}\pi$ rad	-0.7071	-0.7071	$(\frac{5}{4}\pi, -0.7071)$	$(\frac{5}{4}\pi, -0.7071)$
270	$\frac{3}{2}\pi$ rad	-1	0	$(\frac{3}{2}\pi, -1)$	$(\frac{3}{2}\pi, 0)$
315	$\frac{7}{4}\pi$ rad	-0.7071	0.7071	$(\frac{7}{4}\pi, -0.7071)$	$(\frac{7}{4}\pi, 0.7071)$
360	2π rad	0	1	$(2\pi, 0)$	$(2\pi, 1)$

Apartado II. Realizar la representación gráfica de la función seno y coseno en el plano cartesiano

Figura 26. Funciones trigonométricas, registro escrito estudiante E1

04/03/2022

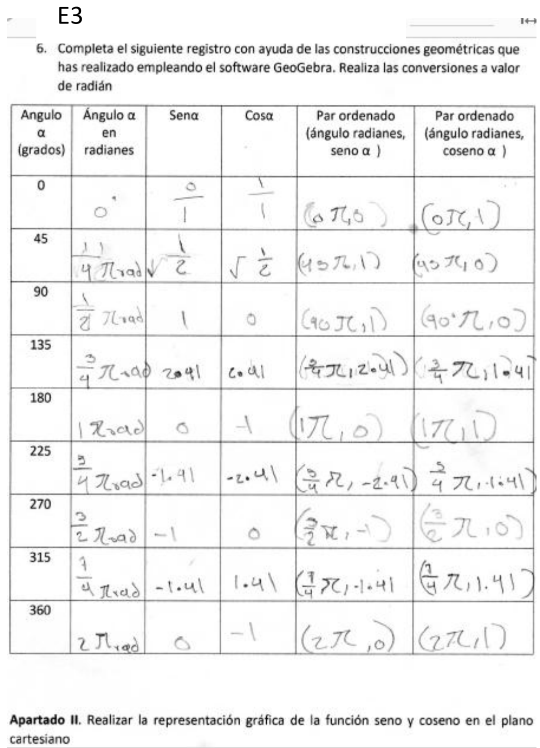
E2

6. [illegible] e las construcciones geométricas que has realizado empleando el software GeoGebra. Realiza las conversiones a valor de radián

Angulo α (grados)	Ángulo α en radianes	Senα $\frac{co}{h}$	Cosα $\frac{ca}{h}$	Par ordenado (ángulo radianes, seno α)	Par ordenado (ángulo radianes, coseno α)
0	0π rad	0	1	$(0\pi, 0)$	$(0\pi, 1)$
45	$\frac{1}{4}\pi$ rad	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{1}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{1}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2})$
90	$\frac{1}{2}\pi$ rad	1	0	$(\frac{1}{2}\pi, 1)$	$(\frac{1}{2}\pi, 0)$
135	$\frac{3}{4}\pi$ rad	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{3}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{3}{4}\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
180	π rad	0	-1	$(\pi, 0)$	$(\pi, -1)$
225	$\frac{5}{4}\pi$ rad	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{5}{4}\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{5}{4}\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
270	$\frac{3}{2}\pi$ rad	-1	0	$(\frac{3}{2}\pi, -1)$	$(\frac{3}{2}\pi, 0)$
315	$\frac{7}{4}\pi$ rad	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{7}{4}\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{7}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2})$
360	2π rad	0	1	$(2\pi, 0)$	$(2\pi, 1)$

Apartado II. Realizar la representación gráfica de la función seno y coseno en el plano cartesiano

Figura 27. Funciones trigonométricas, registro escrito estudiante E2


E3

6. Completa el siguiente registro con ayuda de las construcciones geométricas que has realizado empleando el software GeoGebra. Realiza las conversiones a valor de radián

Angulo α (grados)	Ángulo α en radianes	Senα	Cosα	Par ordenado (ángulo radianes, seno α)	Par ordenado (ángulo radianes, coseno α)
0	0°	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$(0\pi, 0)$	$(0\pi, 1)$
45	$\frac{1}{4}\pi$ rad	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$(45\pi, 1)$	$(45\pi, 0)$
90	$\frac{1}{2}\pi$ rad	1	0	$(90\pi, 1)$	$(90°\pi, 0)$
135	$\frac{3}{4}\pi$ rad	2.41	0.41	$(\frac{3}{4}\pi, 2.41)$	$(\frac{3}{4}\pi, 1.41)$
180	1π rad	0	-1	$(1\pi, 0)$	$(1\pi, 1)$
225	$\frac{5}{4}\pi$ rad	-1.41	-2.41	$(\frac{5}{4}\pi, -2.41)$	$(\frac{5}{4}\pi, -1.41)$
270	$\frac{3}{2}\pi$ rad	-1	0	$(\frac{3}{2}\pi, -1)$	$(\frac{3}{2}\pi, 0)$
315	$\frac{7}{4}\pi$ rad	-1.41	1.41	$(\frac{7}{4}\pi, -1.41)$	$(\frac{7}{4}\pi, 1.41)$
360	2π rad	0	-1	$(2\pi, 0)$	$(2\pi, 1)$

Apartado II. Realizar la representación gráfica de la función seno y coseno en el plano cartesiano

Figura 28. Funciones trigonométricas, registro escrito estudiante E5

Para realizar una reflexión de las actividades descritas anteriormente, cabe mencionar que el debilitamiento de los procesos matemáticos recae fuertemente en los trabajos que se dan solo en el aula, transitar a múltiples representaciones como el contexto físico y el uso de herramientas digitales, favorece procesos de pensamiento que posteriormente el estudiante puede emplear con flexibilidad en otros medios, ejemplo de esto es la longitud que un estudiante puede estimar como mediciones indirectas, tal es el caso de la anchura de un rio y que además puede emplear el recurso de razones trigonométricas.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Una de las preguntas que se buscó responder en esta investigación era ¿Cuáles son los referentes teórico-metodológicos que orientan el diseño de tareas de aprendizaje que promuevan el entendimiento de las funciones seno y coseno?

Se consideró como recurso importante las representaciones semióticas de Duval, dado el enfoque de las actividades, empleando como primer registro el uso de manipulables físicos para ir integrando elementos que dieran solidez al estudio y diversificar las propuestas en que los estudiantes se apoyaron para lograr un mejor aprendizaje.

El diseño también se centró en el empleo de lápiz y papel como un segundo registro empleado en el aula, y finalmente el recurso de la herramienta digital, que contribuyó de forma importante para que los estudiantes dedujeran aspectos de la tarea de aprendizaje matemático, en concreto, el diseño de actividades permitió integrar los registros tabular y gráfico, facilitando que lograran identificar que al variar el ángulo de inclinación de referencia en un triángulo rectángulo, se alude a la idea de construcción geométrica de triángulos rectángulos semejantes.

El referente conceptual del diseño de una tarea de aprendizaje matemático y la aproximación de resolución de problemas, aportaron características a las tareas, tales como el proceso inquisitivo que el profesor utilizó para ir guiando las actividades, la interacción que se fomentó entre los estudiantes, las heurísticas que el profesor empleó para las tareas, principalmente. Todas estas actividades involucraron en gran medida la participación de los estudiantes, tal como ocurrió, en los tres momentos marcados como procesos inicial (sesión uno y dos), preliminar (sesión tres y cuatro) y principal (sesión cinco y seis).

El enfoque de resolución de problemas fue el eje central para el diseño de la TAM, dicha orientación permitió centrarse en actividades donde los estudiantes emplearon recursos matemáticos aprendidos en el aula tal como procedimientos y algoritmos, pero además emplearon estos aprendizajes para formular conjeturas a partir de observar patrones en figuras geométricas y de ello, socializar con sus compañeros de grupo, los principales hallazgos obtenidos. En suma, el diseño de la TAM consideró la secuencia de las tres etapas mencionadas previamente, con lo que se pretendió coadyuvar a una mejor comprensión en el proceso de resolución de problemas de la tarea de aprendizaje.

Otro elemento que se consideró incluir en el diseño de la TAM, fue el referente al marco de la demanda cognitiva (Stein y Smith 1998), este recurso pretendió fortalecer las actividades para incidir en constructos con media a alta demanda cognitiva y para tal efecto se utilizó como apoyo, manipulables físicos, el escenario de lápiz y papel y el empleo de diagramas visuales, estos vistos como múltiples representaciones, que se utilizaron en las sesiones uno, dos, tres y cuatro. En este orden de ideas, por dar ejemplo del empleo de manipulables, se diseñaron las actividades para aplicarlas en el contexto real, donde los estudiantes se apoyaron de herramientas manuales para realizar una construcción geométrica obtenida del instrumento hoja de trabajo.

Continuando con otro ejemplo, el empleo de diagramas visuales se abordó al trabajar los estudiantes con la manipulación de instrumentos escolares, en el contexto de lápiz y papel. Los diagramas estuvieron pensados para que en adición, las actividades se enriquecieran con el uso de la herramienta GeoGebra. Tomando en cuenta las características de la demanda cognitiva también se pretendió alcanzar una conexión robusta de conceptos y significados, además del desarrollo de pensamiento matemático, con la discusión de ideas. Esto se hizo para las sesiones cuatro, cinco y seis, que se diseñaron para que los estudiantes pudieran recuperar conocimiento previo y discutir ideas de forma grupal y finalmente conectaran el contenido de razones trigonométricas en círculo unitario, con una concepción del seno y coseno como funciones trigonométricas.

Otro referente del marco teórico-metodológico considerado fue el de *abstracción en contexto,* -AiC- (Dreyfus et al., 2015) con las características: reconocimiento, edificación, construcción y consolidación. Muestra de ello se establece en las actividades propuestas en la sesión de inicio, cuya intención fue ir gradualmente transitando entre los niveles de reconocimiento a edificación, para posterior a ello abordar la acción epistémica de construcción, este último constructo se pretendió alcanzar con las actividades de la sesión denominada preliminar.

En adición al referente anterior, se consideró dentro del diseño, la acción de consolidación, cuya intención fue que los estudiantes presentaran aprendizajes, esto en la sesión principal, denotando que en la actividad seis mostraran hallazgos previos, esto a través del llenado de un registro tabular, el mapeo de coordenadas de variables definidas como números reales, el establecimiento del dominio y rango de las funciones seno y coseno, así como el registro gráfico es que se solicitó como producto final.

Es así que, considerando estos resultados, se puede establecer que el primer objetivo específico de este trabajo de investigación, que nos habla acerca de identificar y emplear distintos elementos teórico-metodológicos provenientes de los marcos teórico-conceptuales empleados en Didáctica de la Matemática, nos permite afirmar que se cumplió de forma satisfactoria. Lo anterior, en virtud de haber incluido en el diseño de la tarea de Aprendizaje, algunos de estos principios, para robustecer la estructura de la tarea, y en específico puede identificarse su empleo en las tres actividades o fases que conforman la TAM.

La segunda pregunta planteada al inicio de este estudio, tiene relación con la etapa de implementación de la tarea ¿Cómo realizar la implementación de una tarea de aprendizaje diseñada para tal propósito?

Algunas de las características de este estudio consistieron en abordar el enfoque de resolución de problemas para las diferentes etapas, apoyándose de más de una sola representación o tipo de registro. La actividad de inicio cuya extensión fueron las sesiones uno y dos, con énfasis en el uso de manipulables físicos se cumplió de forma satisfactoria, esto al consolidar el contenido matemático de cociente entre números, abriendo la oportunidad de que se relacionara el valor de un ángulo para calcular la razón trigonométrica seno o coseno, vistas como el cociente entre un cateto y la hipotenusa. El trabajo permitió abordar de forma suficiente el concepto matemático de razones trigonométricas ya que se logró caracterizar de forma precisa las figuras geométricas semejantes. Esta actividad alcanzó despertar cierto grado de interés en los estudiantes y una buena ayuda que a bien tuvieron para abordar la tarea de forma detallada.

Para la denominada actividad preliminar, que correspondió a la sesión de trabajo número tres se trabajó con el registro tabular y gráfico (actividad a lápiz y papel), esta actividad buscaba establecer la forma en cómo se relacionaban los lados de un triángulo rectángulo orientado sobre los ejes de un plano coordenado, considerando que el eje horizontal se corresponde con el cateto adyacente de cualquier triángulo rectángulo representado sobre este, y a su vez el cateto opuesto se orienta sobre el eje vertical, de ello se buscaba una representación geométrica construida a partir de los vértices opuestos al ángulo de referencia para arribar al concepto de círculo unitario.

De la actividad anterior el objetivo se logró de manera parcial, esto porque los estudiantes recibieron una inducción por parte del docente al emplear una segunda representación de triángulos rectángulos con hipotenusa igual a 10 cm (que inicialmente se inició con 1 cm), lo que favoreció un mejor entendimiento. Otro indicador que permitió determinar el grado de cumplimiento del objetivo fue que los alumnos no especificaron a qué otro nombre aluden los ejes coordenados del plano cartesiano, si conociendo el valor de las razones trigonométricas para valores de ángulos orientados sobre los ejes coordenados (cero y noventa grados), no hubo respuesta concreta de parte de los estudiantes, no resultando evidente el eje de los cosenos (horizontal) y eje de los senos (vertical).

En referencia al principio del uso de herramientas digitales para la actividad principal, sesión cuatro, el uso del software GeoGebra coadyuvó a favorecer el desarrollo de conceptos matemáticos, porque les permitió visualizar patrones en figuras geométricas, como pudo corroborarse cuando algunos estudiantes se percataron de que el valor de las razones trigonométricas se mantuvo constante, ya que el resultado no varía al cambiar la magnitud de los segmentos proporcionales de triángulos rectángulos inscritos en circunferencias de radio de cualquier valor. El propósito de la actividad se cumplió, al caracterizar el valor de las razones seno y coseno para el primer cuadrante del plano coordenado.

Para la sesión cinco, la herramienta digital se empleó como recurso para resolver casos particulares (razones trigonométricas en triángulos inscritos en circunferencias de radio uno y radio dos). Además favoreció en formular conjeturas, los estudiantes argumentaron que independientemente del valor del radio de la circunferencia, las razones se mantuvieron constantes. Resaltando la importancia del empleo del software, los estudiantes identificaron también atributos de triángulos rectángulos con ángulos notables (15, 30 y 45 grados), esto coadyuvó en realizar un cálculo analítico con este tipo de triángulos, logrando calcular el valor numérico de los catetos e hipotenusa (como valor racional), estas magnitudes permitieron abordar el concepto de ángulos con valor en radianes, con su correspondiente valor en sexagesimal.

En referencia al constructo conceptual de la demanda cognitiva, se considera que en su mayoría, los estudiantes alcanzan el nivel de demanda cognitiva MEDIO-ALTO (ver Tabla 4), cuya categoría, representación de la solución, en la característica 3.3, la resolución conecta diversas representaciones, estas ideas se alcanzaron bajo diversas circunstancias, da cuenta de ello cuando los estudiantes emplearon un razonamiento abstracto, esto en la secuencia número uno, donde fueron generando ideas al tratar con triángulos semejantes y que además se percataron que invariantemente al mover un ángulo agudo, ubicado sobre la base de la construcción geométrica, se generaba un número determinado de triángulos rectángulos con lados proporcionales.

Dando seguimiento a las ideas planteadas anteriormente, los estudiantes se percataron de que el ángulo agudo debe ser mayor que 0 ° pero menor que 90° para seguir manteniendo los criterios que ellos conocían acerca de la construcción geométrica de triángulos rectángulos.

Continuando con los argumentos, otra situación que permitió determinar el nivel de demanda cognitiva en la actividad preliminar, se observó cuando al conjeturar las ideas de razones trigonométricas, construyeron triángulos rectángulos semejantes en círculos de diferente radio, y con esto los estudiantes alcanzaron el nivel de demanda MEDIO-ALTO, esto puede constatarse de los argumentos establecidos en la Tabla 4, cuya categoría denominada esfuerzo requerido, el criterio 2.2 especifica que, la resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo, además considera que el estudiante puede utilizar algoritmos generales, pero al aplicarlos, hay prestar atención a la estructura del patrón.

En torno al referente teórico AiC durante esta etapa de implementación de la tarea, se pueden destacar algunos elementos; la tarea de aprendizaje de la sesión dos y tres permitió destacar que los estudiantes alcanzaron un nivel de abstracción en contexto al trabajar en la situación de contexto de lápiz y papel y con el uso de la herramienta digital. Los estudiantes en su mayoría alcanzaron el nivel de Reconocimiento (Dreyfus et al., 2015). Muestra de ello cuando los estudiantes recuperan contenidos matemáticos previamente abordados, siendo estos pertinentes para resolver el problema de razones trigonométricas.

Argumentando los resultados obtenidos en torno al referente teórico del uso de herramientas digitales, podemos destacar que el empleo del software GeoGebra para la secuencia de actividades número dos, permitió a los estudiantes trazar un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia de radio dos, formalizando la idea de que independientemente del valor del radio, las razones trigonométricas se conservan, los alumnos realizaron operaciones aritméticas para calcular el valor de las razones seno y coseno.

Concretamente, la secuencia de actividades diseñadas para la sesión seis tuvo el propósito de que el estudiante pudiera transitar hacia el entendimiento de función trigonométrica, apoyándose de la representación de círculo unitario. De este modo se pretendió romper con las dos ideas o concepciones separadas propuesta por Bressoud (2010), para abordar estos contenidos.

En este sentido durante la sesión descrita anteriormente los estudiantes lograron entender el concepto de función periódica, solo en círculo unitario, realizando la representación en GeoGebra, la transición que se pretendía alcanzar, hacia la idea de función con variables representadas en el plano coordenado, como números reales, no se comprendió totalmente, esto porque los estudiantes solo realizaron la conversión de valores en grados sexagesimales hacia valores como números reales (radianes) pero menores que 2π

Una de las dificultades a las que se enfrentaron la mayoría de los estudiantes tuvo relación con la representación de las razones seno y coseno para ángulos mayores que 90 grados, al no conseguir una estrategia de representación gráfica, como triángulos rectángulos semejantes plasmados en los diferentes cuadrantes. No lograron transitar completamente hacia la noción de función seno como una expresión de variable real.

Para dar respuesta al segundo objetivo específico de esta investigación, dónde se planteó aplicar la TAM diseñada en un grupo de estudiantes de primer grado de Telebachillerato, con la finalidad de incidir en un mayor entendimiento de las funciones trigonométricas seno y coseno. Se concluye que la secuencia de actividades contempladas de la tarea de aprendizaje sí lograron potenciar algunos elementos considerados por los distintos referentes teórico-metodológicos empleados: algunos de estos elementos consistieron en propiciar los procesos de reflexión tanto individuales como colectivos, identificar distintos registros de representación, los momentos de intervención del docente para guiar la secuencia de actividades contempladas, movilizar los conocimientos previos de los estudiantes, así como fomentar la búsqueda de diferentes rutas de solución, la discusión y comunicación de resultados, entre otras.

Sin embargo, es necesario acotar que de la misma forma, no pudo concretarse en forma completa o satisfactoria la última actividad planificada (que involucró las sesiones cinco y seis), dónde se esperaba un cambio en la concepción del seno y coseno, transitando desde la noción del seno y coseno como razones entre los dos lados de un triángulo rectángulo, hacia la noción que reconoce su naturaleza como funciones de variable real, empleando para ello el software de GeoGebra. Aunque se estuvieron trabajando las representaciones tabular y gráfica, no se completó el análisis para ángulos mayores a 360 grados, quedando inconclusos algunos aspectos que requerían mayor atención, como la naturaleza periódica de dichas funciones, su dominio y rango, entre otros aspectos.

Este propósito resultaba medular, debido a que uno de los supuestos que también se desprendió de la revisión de la literatura y que fue retomado como una idea central en esta investigación, era que varias de las dificultades para el entendimiento de la naturaleza de las funciones trigonométricas seno y coseno, provenía precisamente de estudiar por separado las nociones de razón y función. Debido a esta razón, es que el diseño inicial de la TAM intentó articular en forma secuencial todos esos elementos para romper precisamente con la dualidad razón-función que es señalada en la literatura previa como una de las causas en los problemas de aprendizajes de dichas funciones trigonométricas.

Para el planteamiento de la tercera pregunta de investigación ¿Cómo realizar la evaluación de los resultados obtenidos al implementar la actividad propuesta con un grupo de estudiantes de primer grado de Telebachillerato?

Para contestar a la pregunta se consideró importante el empleo de los referentes teóricos abstracción en contexto y demanda cognitiva de las tareas de aprendizaje.

Algunos elementos de la teoría de Abstracción en Contexto se vieron reflejados en la tarea de aprendizaje, como es el caso de los criterios necesarios para abordar la actividad, avanzando en el reconocimiento de conceptos matemáticos e ideas útiles para dar solución al problema y para poder resolver las actividades posteriores. Cabe hacer mención que el referente conceptual permitió la evaluación del desempeño de los estudiantes para la actividad de inicio, marcada como sesión uno y dos, pero para las actividades posteriores ya no se vio favorecido debido a que las actividades secuenciales estuvieron orientadas al entendimiento de los procesos como razones y funciones, más que al desempeño que pudiera tener el estudiante desde el principio hasta el final de una actividad.

En forma análoga, y con base en los resultados obtenidos se observó en algunos estudiantes, de los rasgos clasificados por Benedicto et al. (2015), en relación con el constructo de la demanda cognitiva. Concretamente se pudo corroborar que algunos de esos estudiantes pudieron tener un desempeño observado dentro de la transición que se dio entre los niveles MEDIO-ALTO y nivel BAJO-MEDIO de demanda cognitiva, se debió en gran medida al manejo que tuvieron de las razones trigonométricas y algunas carencias en la comprensión como funciones trigonométricas, ya que los estudiantes mostraron evidencia de procesos que están descritos en los criterios de esas dos categorías.

El tercer objetivo de esta investigación se relaciona con la evaluación de la TAM al haber sido implementada con un grupo de estudiantes. Se puede afirmar que este objetivo se cumplió de manera parcial, un posible argumento es que algunos estudiantes presentaron dificultad para formular ideas que les ayudaran a transitar a la noción de función trigonométrica, por tal motivo se buscó la categorización del desempeño en cuanto demanda cognitiva, considerando un aspecto que lograra la identificación de los logros alcanzados.

Con base en lo expuesto en los párrafos previos, la evaluación general de la fase de implementación se completó solo en forma parcial, como puede corroborarse en la sección del análisis de resultados. En términos de la demanda cognitiva alcanzada, se obtuvo que solo una parte del grupo pudo lograr un nivel de desempeño situado entre los niveles MEDIO-BAJO y MEDIO-ALTO, lo que implica que los estudiantes fueron capaces de utilizar procedimientos, estableciendo algunas conexiones. En particular pudieron utilizar algunos conceptos e ideas previos, utilizar distintas representaciones, o identificar algunos patrones.

Sin embargo, no se logró acceder a procesos de conexión más robustos que a su vez permitieran al estudiante el desarrollo de un nivel de demanda cognitiva mayor, que se situara en el nivel ALTO clasificado por Benedicto (2015), y Stein y Smith(1998).

En términos de la Teoría del Aprendizaje en Contexto (AiC), se puede concluir que varios de los estudiantes lograron desarrollar un desempeño dentro de la etapa denominada reconocimiento; y solamente avances parciales en las etapas restantes que considera este modelo teórico: edificación, construcción y consolidación. El reconocimiento se evidenció debido a que identificaron constructos e ideas previos, con los cuáles intentaron resolver las actividades planteadas.

En suma, resulta importante recordar la importancia que tiene el diseño e implementación de tareas de aprendizaje (TAM) para el aula de clase (Torres et al., 2022); dónde se le permita al estudiante en general explorar, analizar, discriminar, explicar, y en general adoptar un rol más activo; lo que puede contribuir a mejorar la comprensión o entendimiento de los temas o tópicos que se abordan en la clase de matemática. Resulta necesario, sin embargo, completar un recurso como: diseño-implementación-evaluación de las tareas de aprendizaje propuestas, con la finalidad de poner aprueba la efectividad y/o pertinencia de las mismas.

El proceso de evaluación en este caso, quedó como una primera aproximación, un ejercicio incompleto que pudiera dar paso a trabajos posteriores que se centraran en estructurar un esquema de evaluación más sistemático, y como resultado se podría incidir en mejoras al diseño e implementación de las tareas.

REFERENCIAS

Bibliografía

Altman, R., y Kidron, I. (2016): Constructing knowledge about the trigonometric functions and their geometric meaning on the unit circle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. DOI: 10.1080/0020739X.2016.1189005

Aray, C., Guerrero, Y., Montenegro, L. y Navarrete, S. (2020). La superficialidad en la enseñanza de la trigonometría en el bachillerato y su incidencia en el aprendizaje del cálculo en el nivel universitario. *Rehuso*, *5(2)*, 68-76. https://doi.org/10.5281/zenodo.6812219

Barrera-Mora, F., Reyes, A., Campos, M., y Rodríguez, C. (2021). Resolución de problemas en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. *Pädi, Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingeniería del ICBI*, 9 (especial), 10-17.

Barrera-Mora, F., y Reyes-Rodríguez, A. (2017). Tareas con diversas soluciones, estructura conceptual en profesores de matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 19(1), 110-122.

Barrera-Mora, F., y Reyes-Rodríguez, A. (2014). Sobre el aprendizaje con entendimiento en matemáticas. *Revista Pädi, 2(3)*, DOI:10.29057/icbi.v2i3.525.

Bressoud, D. M. (2010). Historical reflections on teaching trigonometry. *Math Teach, 104(2)*, 106-112.

Benedicto, C., Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. *Departamento de Didáctica de la Matemática*. Universidad de Valencia.

Campos, M. y Torres, A. (2022). El proceso inquisitivo como un elemento central en la resolución de problemas: una tarea sobre cuadriláteros. En: Hernández, I.A. y E. Juárez (eds.). *Tendencias en la Educación Matemática 2022*, (pp. 66-83). Comunicación científica.

Cañadas, M., y Castro, E. (2022). Errores en la resolución de problemas matemáticos de carácter inductivo. *Investigación en el aula de matemáticas*. Universidad de Granada

Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Oliver, A. y Wear-ne, D. (1994). Teaching mathematics for with learning understanding in the primary grades. National Center Research in Mathematical Sciences Education. Madison: Wisconsin.

Cuevas-Ramírez, M. 2021. Antecedentes y bases de la trigonometría. *Logos Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 2. 8, 16 (jul. 2021*), 24-25.

Daros, W. (2002). *Enfoques*. Revista de la Universidad Adventista del Plata Vol. 14 Núm. 1 Pág. 73-112.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: the context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23, 167-180.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., y Schwarz, B. (2015). The Nested Epistemic Actions Model for Abstraction in Context: theory as methodological tool and Methodological Tool as Theory. *In Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education examples of Methodology and Methods,* 185-217. http://doi:10.1007/978-94-017-9181-6

Drijvers, P. (2013). Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn't). *PNA, 8(1)*, 1-20.

Fernández, J. (2010). Unidad didáctica: trigonometría. *Máster en formación al profesorado de enseñanza secundaria*. Universidad de Granada.

Franchi, L., Hernández, A., (2004). Tipología de errores en el área de geometría plana. Universidad de los Andes. Mérida. Venezuela. Educere, vol. 8.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrectht: Kluwer Academic Publishers.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2003). Fundamentos del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas para maestros. *Matemáticas y su Didáctica para maestros*. Proyecto: edumat-maestros.

Godino, J., Wilhelmi, M.R., Blanco, T.F., Contreras, A., y Giacomone, B. (2016). Analisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: registros de representación semiótica y configuración onto semiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemáticas*, 10, 91-110.

Gutiérrez, A., y Fiallo, J. (2009): Enseñanza de la trigonometría con ayuda de SGD. *En T. Recio (Ed.)*.Geometría dinámica (pp. 147-171). Madrid España: Anaya.

Gutiérrez, D. (2016). Sistemas de geometría dinámica como herramientas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de trigonometría en educación secundaria. *Tesis de maestría, facultad de educación*. Universidad de Cantabria, disponible en: https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/10391/GutierrezGalloDaniel.pdf?sequence=1

Hallinan, C., y Sandford, L. (2019). *The Math Book. GB: Dorling Kindersley, Ltd*.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., y Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32(2).* http:// doi: 10.2307/749673

Hertel, J., Cullen, C. (2011). Teaching Trigonometry: a Directed Length Approach. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*. At: Reno, NV.

Hibert, J., Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., Oliver, A. y Human, P. (2000). Making sense: teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth: Heinemann

Hillmayr, D., Ziernwald, L., Reinhold, F., Hofer, S., y Reiss, K. (2020). The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis. *Computers and Education, 153*, 103897. DOI: 10.1016/j.compedu.2020.103897

Hoachlander, G. (1997). Organizing mathematics education around work. In L. A. Steen (Ed.). *Why Numbers Count: Quantitative Literacy for Tomorrow's America* (pp. 122–36). New York: College Entrance Examination Board.

Kendal, M., & Stacey, K. (1998). Teaching trigonometry. *Australian Mathematics Teacher*. University of Melbourne, Australia.

Maknun, C., Rosjanuardi, R., y Jupri, A. (2019). From ratios of right triangle to unit circle: an introduction to trigonometric functions. *Journal of Physics Conference Series, 1157(2):022124*. http:// doi:10.1088/1742-6596/1157/2/022124.

Mateus, A., (2013). *Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo*. Universidad Nacional de Colombia

Montalvo, R. (2012). Historia de la trigonometría y su enseñanza. *Tesis de licenciatura en matemáticas*. Facultad de Ciencias físico-matemáticas. Benemérita Universidad de Puebla. Disponible en: https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/RosalbaMontalvoAntolin.pdf

Moreno-Armella, L. (2018). Enfoques emergentes en la educación matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 13 (17)*, 179-192.

Oviedo, L., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemáticas. *Revista Aula Universitaria,* 29-36.

Ortiz, A. (2005). Historia de la matemática. Vol. 1. *Sección matemática*. PUCP

Pea, R. D. (1985). Beyond Amplification: Using the computer to recognize mental functioning. *Educational Psychologist, 20(4),* 167-182.

Polya G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton University Press: Princeton.

Renana, A., e Ivy K. (2016). Constructing knowledge about the trigonometric functions and their geometric meaning on the unit circle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47, 10-13.

Rodríguez, W. (1998). Actualidad de las ideas Pedagógicas de Jean Piaget y Lev S. Vygotsky: invitación a la lectura de los textos originales. *Actas del Encuentro Nacional de Educación y Pensamiento*. Universidad de Puerto Rico. Vol. V

Rondero, C., Campos, M., Torres, A., y Acosta, J. A. (2018). Un acercamiento a la relación pitagórica a través del cálculo de termas. *European Scientific Journal, 14 (6)*, 58. https://doi.org/10.19044/esj.2018.v14n6p58.

Sánchez, H. (2014). *Las funciones trigonométricas seno y coseno a partir de sus aplicaciones. Maestría en la enseñanza de las ciencias exactas y naturales*. Universidad Nacional de Colombia.

Santos-Trigo, L. M. (2016). La resolución de problemas matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. *Cuadernos de investigación y Formación en Educación Matemática, 11 (15)*, 333-346.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press: Orlando.

Secretaría de Educación Pública (2017). *Planes de Estudio de Referencia del Componente Básico del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior.* Secretaría de Educación Pública. https://bit.ly/2Rayx2O

Stein, M. K., Remillard, J. y Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F.K. Lester (Ed.) S*econd handbook of research on mathematics teaching and learning*. Macmillan: New York, pp.319-369.

Stein, M. K., y Smith, M. S. (1998). *Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. Mathematics teaching in the middle school, 3,* 268-275.

Stewart, I. (2009). *Historia de las matemáticas en los últimos diez mil años*. Madrid: Crítica

Struik, D.J. (1994). *Historia concisa de las matemáticas*. México: IPN.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some padework at the foundations of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sépulveda (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 45-64). Morélia, Mexico: PME.

Torres, A., Campos, M., Reyes, A., y Soto, C. A. (2022). *Diseño de tareas con tecnología: entre investigación y docencia. Boletín Científico Pädi, 9 (18)*, 29-34. https://doi.org/10.29057/icbi.v9i18.7133

Torres, A., Reyes, A. y Barrera, F. Procesos de diseño e implementación de tareas de aprendizaje matemático con alta demanda cognitiva, Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Trabajo 203 (en línea), Estado de México, México, 4,5 y 6 de mayo 2011. http://www.uaeh.edu.mx/sistema_investigacion/funciones/bajarArchivo_web.php?producto=3817&archivo=T orres-Reyes-Barrera-2011.pdf Acceso 11 de agosto (2012).

Torres-Corrales, D. y Montiel-Espinosa, G. (2021). Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer grado de ingeniería. *Educación matemática,* (33), 202-232*.* https://doi.org/10.24844/EM3303.08.

Zubieta, J.K. (2018). *Tipificación de errores y dificultades en el desarrollo de las funciones trigonométricas en estudiantes de grado décimo*. Universidad Pedagógica Nacional.

APÈNDICE A: TRANSCRIPCIÓN DE REGISTROS ESCRITOS

Transcripción de información presentada por estudiantes a lo largo de las pruebas implementadas durante las sesiones

Nomenclatura
E1= estudiante 1
E2= estudiante 2
E3= estudiante 3
E4, etc.

Se consideraron solo algunos de los registros escritos entregados por los estudiantes como material transcrito para el análisis. Para ver el material completo de todas las sesiones revisar el APENDICE D.

Actividad preliminar sesión III

Construcción de lugar geométrico, triángulos rectángulos plasmados sobre plano cartesiano

a) Identifica el vértice que forma el ángulo alfa en todos los triángulos rectángulos que plasmaste y escribe las semejanzas que encuentras
b) Identifica el vértice que forma el ángulo recto en todos los triángulos y redacta las características que tienen en común
c) Identifica el ángulo agudo complementario a alfa en todos los triángulos escribe características en común

E1:

a) Todos los vértices intersecan en el origen del plano cartesiano
b) Todos los vértices forman un ángulo recto, todos los vértices se encuentran en el eje horizontal
c) Forman un ángulo agudo, es el vértice que une la hipotenusa y el cateto opuesto

Se forma un polígono irregular, un círculo. Al eje horizontal se le llama eje de los cosenos y al eje vertical eje de los senos

E4:

a) Que todos se intersecan en un solo punto en el origen del plano
b) Que todos van en consecutivo y están en el eje horizontal
c) Forman un ángulo agudo

Se forma un polígono irregular, un círculo. Al eje horizontal se le llama eje de los cosenos y al eje vertical eje de los senos

E10:

a) Que hay un punto donde todos los triángulos intersecan
b) Que forma un ángulo de 90 grados y se encuentra de forma horizontal
c) Que es el vértice opuesto y se encuentra de forma vertical

Lugar geométrico un circulo, polígono regular, eje de los cosenos y eje de los senos

E3:

a) Todos los triángulos tienen un punto definido trascendente en el plano cartesiano
b) Todos tienen un ángulo horizontal y todos dan un ángulo de 90 grados, que es recto
c) Que forman un ángulo agudo de 90 grados al complementario a alfa y forman una figura geométrica con una sola medida

Lugar geométrico un cuadrado, polígono regular, eje de los cosenos y eje de los senos

E5:

a) Se intersecan en el origen
b) Se encuentra en el eje horizontal
c) El cateto adyacente es vertical

Se forma un tipo de circunferencia, figura es circunferencia, eje de los cosenos y eje de los senos

E9:

a) En que los ángulos tienen que coincidir con 90 grados
b) Que el vértice forma un ángulo de 90 grados
c) Las puntitas de los triángulos son un ángulo agudo y que son diagonales

Una estrella es lo que forman los vértices, se aproximaría a un círculo, eje de los cosenos y eje de los senos

E2:

a) Es semejante a los demás triángulos porque casi todos están pegados de los mismos lados
b) Casi todos están marcados en la orilla todos están en un ángulo de 90 grados
c) Complementan a un triángulo, son vértices opuestos, es el vértice que une la hipotenusa

Una estrella mal hecha o un círculo, ah un círculo, eje de los cosenos y eje de los senos

Actividad preliminar sesión IV

Construcción geométrica triángulos rectángulos inscritos en circunferencia

Actividad de triangulo rectángulo con ángulo notable de 45 grados se realizó una construcción geométrica proyectada por el profesor

E1: argumenta que se forma un triángulo rectángulo, en cualquier posición que se coloque el punto sobre la circunferencia

E4: Se forma un triángulo rectángulo ya que uno de sus ángulos no cambia al realizar el desplazamiento sobre la circunferencia, solo cambia el tamaño de los catetos

E7: argumenta que se trata de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 2 grados. Dificultad para calcular área y perímetro

E10: triangulo rectángulo que cambian los valores de los ángulos al mover los puntos de la circunferencia. Dificultad para calcular área y perímetro

E11: Se forma un triángulo rectángulo porque siempre tiene un ángulo recto no importa donde se coloque el punto

E3: El punto sobre la circunferencia se desplaza para aumentar el tamaño del triangulo

E5: triangulo rectángulo aumenta y disminuye en 90 grados a varios más grados

E9: se traza un triángulo rectángulo cuando se mueve el punto sobre la circunferencia que no cambia la hipotenusa que es 90 grados ni tampoco el cateto opuesto ni el cateto adyacente que es 45 grados

E2: un triángulo rectángulo que se mueve de lugar, cambian sus medidas sus catetos e hipotenusa

Actividad principal sesión V

Triángulos rectángulos semejantes inscritos en circunferencias de diferente radio

1.- complementar la tabla con datos obtenidos de GeoGebra
2.- ¿Qué pasa con las relaciones trigonométricas si se realiza la medición en un triángulo con radio diferente de uno?
3.- ¿Debería cambiar el valor de estas razones para un triángulo inscrito de radio mayor a los analizados?
4.- ¿Si los lados de los catetos son de diferente magnitud, porque resulta el mismo valor de las razones trigonométricas?
5.- ¿Con los resultados obtenidos puedes obtener una conclusión?

6.- Menciona algunas ventajas o desventajas de emplear la herramienta digital en comparación con el trabajo realizado en el diseño en campo para calcular las razones trigonométricas

E1:

1.-

Medida del ángulo (grados)	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno
15	$\text{Seno } 15° = \frac{C.O}{h} = \frac{0.26}{1} \simeq 0.26$	$\text{Coseno } 15° = \frac{C.a}{h} = \frac{0.97}{1} \simeq 0.97$	$\text{Seno } 15° = \frac{C.O}{h} = \frac{0.52}{2} \simeq 0.26$	$\text{Coseno } 15° = \frac{C.a}{h} = \frac{1.93}{2} = 0.965$
30	$\text{Seno } 30° = \frac{C.O}{h} = \frac{0.5}{1} \simeq 0.5$	$\text{Coseno } 30° = \frac{C.a}{h}$ $\frac{0.866}{1} \simeq 0.866$	$\text{Seno } 30° = \frac{C.O}{h} = \frac{1}{2} \simeq 0.5$	$\text{Coseno } 30 = \frac{C.a}{h} = \frac{1.732}{2} \simeq 0.866$
45	$\text{Seno } 45° = \frac{C.O}{h} = \frac{0.71}{1} \simeq 0.71$	$\text{Coseno } 45° = \frac{C.a}{h} = \frac{0.707}{1} \simeq 0.707$	$\text{Seno } 45° = \frac{C.O}{h} = \frac{1.41}{2} \simeq 0.705$	$\text{Coseno } 45° = \frac{C.a}{h}$ $\frac{1.414}{2} \simeq 0.707$
60	$\text{Seno } 60° = \frac{C.O}{h} = \frac{0.87}{1} \simeq 0.87$	$\text{Coseno } 60° = \frac{C.a}{h} = \frac{0.5}{1} \simeq 0.5$	$\text{Seno } 60° = \frac{C.O}{h} = \frac{1.73}{2} \simeq 0.865.$	$\text{Coseno } 60° = \frac{C.a}{h} = \frac{1}{2} \simeq 0.5$
0	$\text{Seno } 0° = \frac{C.O}{h}$ $\frac{0}{1} \simeq 0$	$\text{Coseno } 0° = \frac{C.a}{h}$ $\frac{1}{1} \simeq 1$	$\text{Seno } 0° = \frac{C.O}{h} = \frac{0}{2} \simeq 0$	$\text{Coseno } 0° = \frac{C.a}{h}$ $\frac{2}{2} \simeq 1$
90	$\text{Seno } 90° = \frac{C.O}{h}$ $\frac{1}{1} \simeq 1$	$\text{Coseno } 90° = \frac{C.a}{h}$ $\frac{0}{1} \simeq 0$	$\text{Seno } 90° = \frac{C.O}{h}$ $\frac{2}{2}\ 1$	$\text{Coseno } 90° = \frac{C.a}{h}$ $\frac{0}{2} = 0$

2.- Se mantienen igual al realizar los cálculos, siempre y cuando sean proporcionales
3.- No, si el triángulo con el que se va a trabajar es proporcional a los triángulos que anteriormente analizamos
4.- Porque sus lados son proporcionales, porque manejamos la misma cantidad de decimales y mientras tengamos más decimales nos lanza a un valor más exacto
5.- Que se pueden crear círculos con diferente radio pero si los triángulos inscritos crecen de forma proporcional el valor de las razones trigonométricas no cambia
6.- Que se puede manipular mejor la figura y ser más precisos. Trabajando con diseño en campo es más difícil para obtener las medidas de ángulos y lados

E4:

1. Completa la siguiente tabla con datos obtenidos empleando la herramienta GeoGebra

	Triángulo rectángulo inscrito en circunferencia con radio igual a 1		Triángulo rectángulo inscrito en circunferencia con radio igual 2	
Medida del ángulo (grados)	Razón trigonométrica seno $= \frac{C.O}{H}$	Razón trigonométrica coseno $= \frac{C.a}{H}$	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno
15	$\mathrm{Sen}\,15^\circ = \frac{0.26}{1} \approx$ 0.26	$\mathrm{Cos}\,15^\circ = \frac{0.97}{1} \approx$ 0.97	$\mathrm{Sen}\,15^\circ = \frac{0.52}{2} \approx$ 0.26	$\mathrm{Cos}\,15^\circ = \frac{1.73}{2} \approx$ 0.965
30	$\mathrm{Sen}\,30^\circ = \frac{0.5}{1} \approx$ 0.5	$\mathrm{cos}\,30^\circ = \frac{0.866}{1} \approx$ 0.866	$\mathrm{sen}\,30^\circ = \frac{1}{2} \approx$ 0.5	$\mathrm{cos}\,30^\circ = \frac{1.732}{2} \approx$ 0.866
45	$\mathrm{sen}\,45^\circ = \frac{0.71}{1} \approx$ 0.71	$\mathrm{cos}\,45^\circ = \frac{0.707}{1} \approx$ 0.707	$\mathrm{sen}\,45^\circ = \frac{1.41}{2} \approx$ 0.705	$\mathrm{cos}\,45^\circ = \frac{1.414}{2} \approx$ 0.707
60	$\mathrm{sen}\,60^\circ = \frac{0.87}{1} \approx$ 0.87	$\mathrm{cos}\,60^\circ = \frac{0.5}{1} \approx$ 0.5	$\mathrm{Sen}\,60^\circ = \frac{1.73}{2} \approx$ 0.865	$\mathrm{cos}\,60^\circ = \frac{1}{2} \approx$ 0.5
0	$\mathrm{Sen}\,0^\circ = \frac{0}{1} \approx$ 0	$\mathrm{Cos}\,0^\circ = \frac{1}{1} \approx$ 1	$\mathrm{sen}\,0^\circ = \frac{0}{2} \approx$ 0	$\mathrm{Cos}\,0^\circ = \frac{2}{2} \approx$ 1
90	$\mathrm{Sen}\,90^\circ = \frac{1}{1} \approx$ 1	$\mathrm{cos}\,0^\circ = \frac{0}{1} \approx$ 0	$\mathrm{Sen}\,90^\circ = \frac{2}{2} \approx$ 1	$\mathrm{cos}\,90^\circ = \frac{}{2} \approx$ 0

2.- Tienen el mismo valor ya que son proporcionales ambos triángulos, si estos no son proporcionales tendríamos diferentes valores

3.- No, ya que debe ser proporcional a los anteriores

4.- Porque sus lados son proporcionales por su ángulo de referencia, los decimales nos ayudan a encontrar un valor más cercano en ambos catetos

5.- Las relaciones trigonométricas y los triángulos rectángulos nos ayudan a checar si estos son proporcionales o en que fallamos

6.- Nos ayudan a tener medidas más exactas, medir ángulos, trazar muchos triángulos en un solo plano

E7:

1. Completa la siguiente tabla con datos obtenidos empleando la herramienta GeoGebra

	Triángulo rectángulo inscrito en circunferencia con radio igual a 1		Triángulo rectángulo inscrito en circunferencia con radio igual 2	
Medida del ángulo (grados)	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno
15	Sen = $\frac{0.26}{1}$	cos = $\frac{0.97}{1}$	sen = $\frac{0.52}{2}$ sen = 0.16	cos = $\frac{1.94}{2}$ cos = 0.97
30	Sen = $\frac{0.5}{1}$	cos = $\frac{0.866}{1}$ cos = 30° ~ 0.866	sen = 30° = $\frac{1}{2}$ = 0.5	cos = $\frac{1.932}{2}$ cos = 0.866
45	Sen = $\frac{0.701}{1}$ sen 45° = 0.701	cos = $\frac{0.707}{1}$ cos 45° = 0.707	sen 45° = $\frac{1.414}{2}$ = 0.707	cos 45° = $\frac{1.414}{2}$ 0.707
60	sen = $\frac{0.87}{1}$ sen 60° = 0.87	cos = $\frac{0.5}{1}$ cos 60° = 0.5	sen 60° = $\frac{1.73}{2}$ sen = 0.865	cos 60° = $\frac{1}{2}$ cos = 0.5
0	sen 0° = $\frac{0}{1}$ sen = 0	cos 0° = $\frac{1}{1}$ cos = 1	sen 0° = $\frac{0}{2}$ sen = 0	cos 0° = $\frac{2}{2}$ cos = 1
90	sen = $\frac{1}{1}$ sen = 1	cos = $\frac{0}{1}$ cos = 0	sen = $\frac{1}{2}$ sen = 1	cos = $\frac{0}{2}$ cos = 0

2.- Que tanto como los lados de un cuadrado tienen que ser igual al radio
3.- No, porque no le afecta en nada ya que son proporcionales al de un triángulo pequeño al de uno grande no cambia en nada
4.- Porque su radio no cambia y lo que cambia será el de los ángulos, se mueven y cambian de grados
5.- Que nos dan un resultado aproximado aunque tenga más decimales
6.- Porque podemos tener las razones trigonométricas seno y coseno de diferentes ángulos del triángulo y nada más tenemos que buscarlo sin tener que dibujarlo

E10:

1. Completa la siguiente tabla con datos obtenidos empleando la herramienta GeoGebra

	Triángulo rectángulo inscrito en circunferencia con radio igual a 1		Triángulo rectángulo inscrito en circunferencia con radio igual 2	
Medida del ángulo (grados)	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno
15	sen 15° = $\frac{0.26}{1}$	cosen $\frac{0.97}{1}$	sen $\frac{0.52}{1}$	cose $\frac{0.94}{1}$
30	sen = $\frac{0.75}{1}$	cosen = $\frac{0.866}{1}$	sen 0.732	cose $\frac{0.8.66}{1}$
45	sen = $\frac{1.414}{1}$	cosen = 0.707	sen 0.75	cosen $\frac{1.414}{1}$
60	sen = 1.74	cosen = 0.87	sen = -0.57	cosen = 0.5
0	sen = $\frac{0}{1}$	cosen = $\frac{0}{1}$	sen = $\frac{0}{2}$	cosen = $\frac{1}{2}$
90	sen $\frac{1}{1}$	cose = –	sen = –	cosen = –

2.- Sigue teniendo el mismo valor de ángulos
3.- No, porque son proporcionales
4.- Porque sus lados son proporcionales
5.- Si porque no cambian el decimal
6.- Que no se hacen los ángulos en la libreta y es más rápido trabajar en herramienta digital

E11:

1.-

1. Completa la siguiente tabla con datos obtenidos empleando la herramienta GeoGebra

	Triángulo rectángulo inscrito en circunferencia con radio igual a 1		Triángulo rectángulo inscrito en circunferencia con radio igual 2	
Medida del ángulo (grados)	Razón trigonométrica seno C.O ÷ hip	Razón trigonométrica coseno C.a ÷ hip	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno C.a ÷ hip
sen 15°	sen 15° = $\frac{0.26}{1}$ sen 15° = $\frac{C.O}{hip}$ = $\frac{0.26}{1}$ ≈ 0.26	cos 15° = $\frac{0.97}{1}$ cos 15° = $\frac{C.a}{hip}$ = $\frac{0.97}{1}$ ≈ 0.97	sen 15° = $\frac{0.52}{2}$ sen 15° = $\frac{C.O}{hip}$ = $\frac{0.52}{2}$ ≈ 0.26	cos 15° = $\frac{1.93}{2}$ cos 15° = $\frac{C.a}{hip}$ = $\frac{1.93}{2}$ ≈ 0.965
30°	sen 30° = $\frac{0.5}{1}$ sen 30° = $\frac{C.O}{hip}$ = $\frac{0.5}{1}$ ≈ 0.5	cos 30° = $\frac{0.886}{1}$ cos 30° = $\frac{C.a}{hip}$ = $\frac{0.886}{1}$ ≈ 0.886	sen 30° = $\frac{1}{1}$ sen 30° = $\frac{C.O}{hip}$ = $\frac{1}{1}$ ≈ 1	cos 30° = $\frac{1.732}{2}$ cos 30° = $\frac{C.a}{hip}$ = ≈ 0.886
45°	sen 45° = $\frac{0.71}{1}$ sen 45° = $\frac{C.O}{hip}$ = $\frac{0.71}{1}$ ≈ 0.71	cos 45° = $\frac{0.707}{1}$ cos 45° = $\frac{C.a}{hip}$ = $\frac{0.707}{1}$ ≈ 0.707	sen 45° = $\frac{1.41}{2}$ sen 45° = $\frac{C.O}{hip}$ = $\frac{1.41}{2}$ ≈ 0.705	cos 45° = $\frac{1.414}{2}$ cos 45° = $\frac{C.a}{hip}$ = $\frac{1.414}{2}$ ≈ 0.707
60°	sen 60° = $\frac{0.87}{1}$ sen 60° = $\frac{C.O}{hip}$ = $\frac{0.87}{1}$ ≈ 0.87	cos 60° = $\frac{0.5}{1}$ cos 60° = $\frac{C.a}{hip}$ = $\frac{0.5}{1}$ ≈ 0.5	sen 60° = $\frac{1.73}{2}$ sen 60° = $\frac{C.O}{hip}$ = $\frac{1.73}{2}$ ≈ 0.865	cos 60° = $\frac{1}{2}$ cos 60° = $\frac{C.a}{hip}$ = $\frac{1}{2}$ ≈ 0.5
0°	sen 0° = $\frac{0}{1}$ sen 0° = $\frac{C.O}{hip}$ = $\frac{0}{1}$ ≈ 0	cos 0° = $\frac{1}{1}$ cos 0° = $\frac{C.a}{hip}$ = $\frac{1}{1}$ ≈ 1	sen 0° = $\frac{0}{2}$ sen 0° = $\frac{C.O}{hip}$ = $\frac{0}{2}$ ≈ 0	cos 0° = $\frac{2}{2}$ cos 0° = $\frac{C.a}{hip}$ = $\frac{2}{2}$ ≈ 2
90°	sen 90° = $\frac{1}{1}$ sen 90° = $\frac{C.O}{hip}$ = $\frac{1}{1}$ ≈ 1	cos 90° = $\frac{0}{1}$ cos 90° = $\frac{C.a}{hip}$ = $\frac{0}{1}$ ≈ 0	sen 90° = $\frac{2}{2}$ sen 90° = $\frac{C.O}{hip}$ = $\frac{2}{2}$ ≈ 1	cos 90° = $\frac{0}{2}$ cos 90° = $\frac{C.a}{hip}$ = $\frac{0}{2}$ ≈ 0

2.- Siguen siendo iguales si los segmentos son proporcionales
3.- No, solo los valores aumentarían y solo si son proporcionales
4.- Porque son proporcionales uno de otro, los lados y los ángulos son proporcionales de un triángulo a otro.
5.- Que si los lados de los triángulos son proporcionales o mejor dicho si el triángulo es semejante al otro, los ángulos y distancias también lo son
6.- Ventaja es que con la herramienta no tenemos la necesidad de hacer cálculos y se nos facilita más las mediciones y los trazos

E3:

1.- Estudiante no completa este registro
2.- Son iguales sus angulos mientras que los lados son proporcionales
3.- No, porque mientras sean proporcionales no cambian los resultados
4.- Porque su radio no cambia y los catetos siguen teniendo el mismo valor
5.- Que nos da un resultado aproximado aunque tenga mas decimales
6.- Ventaja es que puedes saber sus porcentajes seno y coseno de un angulo y en diseño de campo es que no te salen los porcentajes que te pide

E5:

1. Completa la siguiente tabla con datos obtenidos empleando la herramienta GeoGebra

	Triángulo rectángulo inscrito en circunferencia con radio igual a 1		Triángulo rectángulo inscrito en circunferencia con radio igual 2	
Medida del ángulo (grados)	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno
15	Sen $= \frac{0.26}{1}$ Sen $= 0.26$	Cos $= \frac{0.97}{1}$ Cos $= 0.97$	Sen $= \frac{0.52}{2}$ Sen $= 0.26$	Cos $= \frac{1.94}{2}$ Co $= 0.97$
30	Sen $= \frac{0.5}{1}$ Sen $= 0.5$	Cos $= \frac{0.866}{1}$ Cos $= 0.866$	Sen $= \frac{1}{2}$ Sen $= 0.5$	Cos $= \frac{1.732}{2}$ Cos $= 0.866$
45	Sen $= \frac{0.707}{1}$ Sen $= 0.707$	Cos $= \frac{0.707}{1}$ Cos $= 0.707$	Sen $= \frac{1.414}{2}$ Sen $= 0.707$	Cos $= \frac{1.414}{2}$ Cos $= 0.707$
60	Sen $= \frac{0.87}{1}$ Sen $= 0.87$	Cos $= \frac{0.5}{1}$ Cos $= 0.5$	Sen $= \frac{1.73}{2}$ Sen $= 0.865$	Cos $= \frac{1}{2}$ Cos $= 0.5$
0	Sen $= \frac{0}{1}$ Sen $= 0$	Cos $= \frac{1}{1}$ Cos $= 1$	Sen $= \frac{0}{2}$ Sen $= 0$	Cos $= \frac{2}{2}$ Cos $= 1$
90	Sen $= \frac{1}{1}$ Sen $= 1$	Cos $= \frac{0}{1}$ Cos $= 0$	Sen $= \frac{1}{2}$ Cos $= 1$	Sen $= \frac{0}{2}$ Cos $= 0$

2.- Tiene el mismo valor, ya que no cambia
3.- No, porque sí son proporcionales
4.- Porque sus lados son proporcionales e igual los números decimales igual nos ayudan
5.- Se dan los resultados
6.- Se evita uno de estar midiendo con el transportador y regla

E9:

1. Completa la siguiente tabla con datos obtenidos empleando la herramienta GeoGebra

	Triángulo rectángulo inscrito en circunferencia con radio igual a 1		Triángulo rectángulo inscrito en circunferencia con radio igual 2	
Medida del ángulo (grados)	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno
15	Sen 15° = $\frac{0.26}{1}$	$\frac{\text{Cos}}{0.97}$	$\frac{\text{Sen}}{1.23}$	$\frac{\text{Cos}}{0.93}$
30	Sen 15 = 0.56	Cos . 1.21	Seno . 1.732	Cos . 8.66
45	Sen. 0.99	cos . 0.49	sen 0.105	cos 0.5
60	sen = 0.87	cos = 0.288	Sc = 0.57	Cos 0.8
0	Sen = $\frac{0}{1}$	Cos = $\frac{1}{1}$	Sc = $\frac{0}{2}$	Cos = $\frac{2}{2}$
90	Sen $\frac{1}{1}$	cos = $\frac{2}{1}$	$\frac{3}{0}$	Cos. 1.2

2.- No cambian los ángulos, siguen teniendo el mismo valor
3.- Si, va dependiendo de su valor
4.- Los decimales son los que nos basan o que den el mismo resultado de los catetos
5.- Que en base a la construcción de la figura podemos encontrar sus valores dependiendo del radio que tenga
6.- Que no se hacen los ángulos en la libreta, es más rápido

E2:
1.- Estudiante no completa este registro
2.- Siempre y cuando los triangulos tengan semejanza y sus relaciones sean las mismas, no importa 10, 20, 30, 100, 1000 triangulos si son semejantes daran el mismo valor de angulos
3.-
4.- Por la proporcionalidad de los lados, con una mayor cantidad de decimales hace que tengamos un valor mas exacto
5.- Ya observamos que la semejanza o proporcionalidad son las que influyen en los triangulos aunque
6.- Una seria el no estar cargado de reglas, libretas, tambien nos ayuda a emplear

Actividad principal sesión VI

Función trigonométrica seno y coseno para ángulos notables, ángulos mayores a 90 grados y ángulos orientados sobre los ejes coordenados

1.- ¿Para qué valor de ángulo la función seno o coseno toma el valor de uno?
2.- ¿Por qué el seno de cero es igual a cero?
3.- ¿En qué otros valores de ángulo el seno es igual a cero?
4.- ¿Por qué el coseno de cero es igual a uno?
5.- ¿En qué otros valores de ángulos el coseno es igual a cero?

E1:
1.- Cuando el valor del ángulo es 0, 90, 180, 270 y 360 grados. Esto a consecuencia de que el valor de los catetos va variando en cuanto cambia el ángulo
2.- Porque al medir cero el ángulo, el cateto opuesto también mide cero y al dividir el cateto opuesto sobre la hipotenusa da como resultado cero
3.- Con los ángulos 180 y 360 grados porque el cateto opuesto va a tener una longitud de cero
4.- Porque al dividir el cateto opuesto sobre la hipotenusa da como resultado uno
5.- En los ángulos 90 y 270 grados porque el cateto adyacente es cero y al dividirlo sobre la hipotenusa arroja un valor de cero

6. Completa el siguiente registro con ayuda de las construcciones geométricas que has realizado empleando el software GeoGebra. Realiza las conversiones a valor de radián

Angulo α (grados)	Ángulo α en radianes	Senα	Cosα	Par ordenado (ángulo radianes, seno α)	Par ordenado (ángulo radianes, coseno α)
0	0π rad	0	1	$(0\pi, 0)$	$(0\pi, 1)$
45	$\frac{1}{4}\pi$ rad	1.41	1.41	$(\frac{1}{4}\pi, 1.41)$	$(\frac{1}{4}\pi, 1.41$
90	$\frac{1}{2}\pi$ rad	1	0	$(\frac{1}{2}\pi, 1)$	$(\frac{1}{2}\pi, 0)$
135	$\frac{3}{4}\pi$ rad	2.41	1.41	$(\frac{3}{4}\pi, 2.41)$	$(\frac{3}{4}\pi, 1.41)$
180	π rad	0	1	$(1\pi, 0)$	$(1\pi, 1)$
225	$\frac{5}{4}\pi$ rad	-1.41	-2.41	$(\frac{5}{4}\pi, -1.41)$	$(\frac{5}{4}\pi, -2.41)$
270	$\frac{3}{2}\pi$ rad	-1	0	$(\frac{3}{4}\pi, -1)$	$(\frac{3}{4}\pi, 0)$
315	$\frac{7}{4}\pi$ rad	-1.41	1.41	$(\frac{7}{4}\pi, -1.41)$	$(\frac{7}{4}\pi, 1.41)$
360	2π rad	0	-1	$(2\pi, 0)$	$(2\pi, -1)$

E4:

1.- En el coseno de cero y seno de uno da igual a uno ya que son números positivos, al igual que el seno de 360 grados. Coseno y seno de 270 grados están ubicados en los números negativos y dan -1

2.- Ya que cuando dos fragmentos se unen el C.O es igual a cero, la hipotenusa es igual a uno

3.- En 180 grados pasa lo mismo con el cateto opuesto, es cero

4.- Ya que el cateto adyacente toma el valor de uno, la hipotenusa es uno, al dividir 1/1

5.- En 90, 270 y 360 grados ya que al unirse con la recta su cateto adyacente es igual a cero

6. Completa el siguiente registro con ayuda de las construcciones geométricas que has realizado empleando el software GeoGebra. Realiza las conversiones a valor de radián

Angulo α (grados)	Ángulo α en radianes	Senα $\frac{co}{h}$	Cosα $\frac{ca}{h}$	Par ordenado (ángulo radianes, seno α)	Par ordenado (ángulo radianes, coseno α)
0	0π rad	0	1	(0π, 0)	(0π, 1)
45	$\frac{1}{4}\pi$ rad	1.41	1.41	($\frac{1}{4}\pi$, 1.41)	($\frac{1}{4}\pi$, 1.41)
90	$\frac{1}{2}\pi$ rad	1	0	($\frac{1}{2}\pi$, 1)	($\frac{1}{2}\pi$, 0)
135	$\frac{3}{4}\pi$ rad	2.41	2.41	($\frac{3}{4}\pi$ rad, 2.41)	($\frac{3}{4}\pi$, 2.41).
180	π rad	0	- 1	(π, 0)	(π, -1)
225	$\frac{5}{4}\pi$ rad	-2.41	2.41	($\frac{2}{4}\pi$, -1.41)	($\frac{5}{4}\pi$, 2.41)
270	$\frac{3}{2}\pi$ rad	-1	0	($\frac{3}{2}\pi$, -1)	($\frac{3}{2}\pi$, 0)
315	$\frac{7}{4}\pi$ rad	1.41	-1.41	($\frac{7}{3}\pi$, 1.41)	($\frac{7}{3}\pi$, -1.41)
360	2π rad	0	- 1	(2π, 0)	(2π, -1)

E7:
1.- Seno y coseno toma el valor de 1 y -1
2.- Porque todo número dividido por cero da cero 0/1=0
3.- Sería en 180 grados
4.- Porque el coseno es cero y la hipotenusa uno 0/1=1
5.- en 360 grados

6. Completa el siguiente registro con ayuda de las construcciones geométricas que has realizado empleando el software GeoGebra. Realiza las conversiones a valor de radián

Angulo α (grados)	Ángulo α en radianes	Senα	Cosα	Par ordenado (ángulo radianes, seno α)	Par ordenado (ángulo radianes, coseno α)
0	0	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$(0\pi, 0)$	$(0\pi, 1)$
45	$\frac{1}{4}\pi$ rad	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(45\pi, 1)$	$(45\pi, 0)$
90	$\frac{1}{2}\pi$ rad	1	0	$(90^\circ\pi, 1)$	$(90^\circ\pi, 0)$
135	$\frac{3}{4}\pi$ rad	2.41	2.41	$(\frac{3}{4}\pi, 2.41)$	$(\frac{3}{4}\pi, 1.41)$
180	π rad	0	1	$(\pi, 0)$	$(\pi, 1)$
225	$\frac{5}{4}\pi$ rad	-1.41	-2.41	$(\frac{5}{4}\pi, -2.41)$	$(\frac{5}{4}\pi, 1.41)$
270	$\frac{3}{2} 2\pi$	-1	0	$(\frac{3}{2}\pi, -1)$	$(\frac{3}{2}\pi, 0)$
315	$\frac{7}{4} 2\pi$ rad	-1.41	1.41	$(\frac{7}{4}\pi, -1.41)$	$(\frac{7}{4}\pi, 1.41)$
360	2π rad	0	-1	$(2\pi, 0)$	$(2\pi, -1)$

E10:

1.- valor de cero para 270 grados

2.- Porque la línea es horizontal y esto implica que el seno es igual a cero

3.- En cero y 180 grados

4.- Porque al dividirlo entre la hipotenusa es igual a uno

5.- 90, 180 y 270 grados

6. Completa el siguiente registro con ayuda de las construcciones geométricas que has realizado empleando el software GeoGebra. Realiza las conversiones a valor de radián

Angulo α (grados)	Ángulo α en radianes	Senα	Cosα	Par ordenado (ángulo radianes, seno α)	Par ordenado (ángulo radianes, coseno α)
0	0°	$\frac{0}{1}$ 0	$\frac{1}{1}=1$	(0π, 0)	(0π, 1)
45	$\frac{1}{4}\pi$ rad	1.41	1.41	($\frac{1}{4}\pi$, 1.41)	($\frac{1}{4}\pi$, 1.41)
90	$\frac{1}{2}\pi$ rad	0	1	($\frac{1}{2}\pi$, 1)	($\frac{1}{2}\pi$, 0)
135	$\frac{3}{4}\pi$ rad	2.41	1.42	$\frac{3}{4}\pi$, 2.41)	($\frac{3}{4}$ 1.42)
180	π rad	0°	1	(π, -1)	(π, -1)
225	$\frac{5}{4}\pi$ rad	-1.41	-2.41	($\frac{5}{4}\pi$, -1.41)	($\frac{5}{4}\pi$ - 2.41)
270	$\frac{3}{2}\pi$ rad	1	0°	($\frac{3}{2}\pi$, -1)	($\frac{3}{2}\pi$, 0)
315	$\frac{7}{4}\pi$ rad	-1.41	1.41	($\frac{7}{4}\pi$, -1.41)	($\frac{7}{4}\pi$. 1.41)
360	2π rad	0	1	(2π, 0)	(2π, 0)

E11:

1.- Menciona el valor de las funciones trigonométricas para valor de ángulo ubicados sobre los ejes

2.- Porque el cateto opuesto y la hipotenusa se convierten en cero porque desaparecen y el que existe es el adyacente pero no nos sirve para calcular el seno

3.- Para 0, 180 y 360 grados

4.- porque la hipotenusa es uno y el cateto adyacente también es uno, si se dividen da uno

5.- para 90 y 270 grados

E3:
Logra identificar cuando el coseno y seno toman el valor de cero, no identifica cuando valen uno

E5:
Logra identificar cuando el coseno y seno toman el valor de cero, no identifica cuando valen uno

APÈNDICE B: TRANSCRIPCIÓN DE GRABACIONES DE AUDIO

Transcripción de la sesión del 14 de octubre de 2021

P= Profesor
E= Estudiantes
E1= estudiante 1
E2= estudiante 2
E3= estudiante 3, E4, etc.

P: Buen día ¿cómo les va?
E: Bien y ¿a usted?
P: ¿Contentas, contentos?
E1: Si mucho
P: Entonces como les había comentado esta es la primera actividad, de tres actividades es la actividad de inicio, en esta vamos a trabajar una construcción geométrica que les estoy presentando aquí. ¿Qué podemos observar, que hay dentro de esa construcción geométrica? ¿Alguna idea?
E1: un triángulo dividido en diferentes dimensiones
P: ¿Alguien más? Ok entonces voy a empezar con esta idea de lo que es la trigonometría, ¿ustedes han escuchado esta rama de las matemáticas que es la trigonometría?
E2: No
¿Alguna vez la habías escuchado?
E1: Yo si
P: Ok bueno, la trigonometría es la rama de las matemáticas, hace más de treinta años por ahí una persona que se encargó de publicar un artículo, se llama Stelle Macciotta, es italiana por el nombre me suena como italiana, entonces ella lo que propuso que la trigonometría pues bien pudiera llamarse la rama o disciplina de medir de aquí para allá, sale entonces ¿qué quiere decir eso de medir de aquí para allá? Sale entonces ¿qué quiere decir eso de medir de aquí para allá? Significa que podemos calcular una distancia desde un punto de inicio hasta un punto de llegada, sale y ante esa pregunta ¿Cuál es la distancia?

Surge esta idea de cómo podemos encontrar, calcular esa distancia y para ello de que hacemos uso pues de trazos, líneas y segmentos, sale se hace uso de estos elementos geométricos para poder determinar las distancias y aparte de que tiene como implícito la trigonometría, pues el uso de ángulos, sale cuando nosotros hacemos concurrir o en otras palabras eh conectar los diferentes segmentos pues se forma propiamente lo que es un polígono simple, el polígono simple de tres lados. ¿Alguien me puede apoyar cual es el polígono más simple de tres lados?

E1: triangulo

¿Por qué?'

E1: porque es la figura con la que cuenta con, ¿qué tiene menos lados?

P: y ¿cuantos ángulos internos?

E1: Tres

P: Tres ángulos internos verdad, entonces la trigonometría ahora ya conectando esta idea del triángulo, pues es la rama de las matemáticas que se encarga de la medida del triángulo sale, trigonometría medida del triángulo. Y para obtener esa medida se hace uso de segmentos y ángulos y los ángulos ¿de qué forma me pueden apoyar? Pues el poder determinar la dirección de un objeto sale, antiguamente los, las diferentes culturas egipcias, griegas y más antes de ellas, la Mesopotamia, babilonios, estos personajes pues eh... Utilizaban el triángulo para obtener diferentes mediciones.

Ahorita les voy a platicar más o menos tres aplicaciones del triángulo y este ustedes me van a dar su punto de vista referente a estas ideas, pero particularmente estamos trabajando el triángulo rectángulo, sale ya observábamos que el triángulo rectángulo tiene un ángulo de noventa grados y los demás varían de acuerdo a las dimensiones de sus catetos sale, entonces la primera idea que se empleaba en la antigüedad era el poder determinar la altura, la distancia que hay de la base a la punta de una montaña, sin necesidad de escalarla, ustedes se imaginan como llevaban a cabo todas esas mediciones?.

Pues aplicando el triángulo rectángulo, entonces tiene muchas aplicaciones, una facultad de poder de poder aplicarlo en contextos para resolver problemas en contextos prácticos sale, por ejemplo pues si nosotros eh proyectamos una imagen en lo que es la altura de la montaña podemos proyectar una imagen de forma horizontal y después tratar de concretar esos dos segmentos mediante la hipotenusa, verdad y ya estaríamos formando un triángulo rectángulo, ahora yo creo que ustedes en secundaria vieron también alguna aplicación del triángulo rectángulo, más o menos si recuerdan alguna aplicación?

Parecida similar, algo que ustedes hallan… que se imaginen, ¿algún problema que hayan resuelto mediante la aplicación de triángulos rectángulos?, a ver los hombres apóyenme. Alguna idea, ¿qué más podemos calcular de forma indirecta sin necesidad de subirse a la montaña, que otros objetos podemos medir?

E3: Una pirámide

P: exactamente, ¿qué más?

E1: un edificio
P: Lo que a veces en las escuelas se hace es tratar de determinar la altura de un poste, ¿sí o no? Y eso digamos que a una determinada hora del día el sol proyecta una sombra y nosotros podemos visualizar que se proyecta un triángulo rectángulo, entonces no hacemos uso madamas de ese elemento, lo que se hace es compararlo con otro objeto por ejemplo al lado ponemos un pedacito de madera o algo que este recto, que sea vertical y ahí también va a proyectar una sobra que es proporcional a la sombra del poste.

Verdad, entonces aquí podemos… en este objeto pequeño que si está al alcance de nosotros podemos medir sus catetos y su hipotenusa y ahora si poder establecer una proporción como la que ya hemos trabajado en clase, establecer una proporción para encontrarse ese segmento que esta que aparece como incógnita, sale una aplicación, la segunda que quiero comentarles es que en el siglo VI allá en Grecia, ahora sí que lo Griegos siempre tuvieron una gran influencia en cuanto al desarrollo de las matemáticas, en el álgebra, la geometría y también en la trigonometría, entonces eh en el siglo VI allá en Samos Grecia, el gobernante de esa época, se me fue el nombre, lo traía fresco en la mañana, ahorita me tengo que acordar, este solicitó que se hiciera, que se excavara un túnel en una montaña, entonces digamos que él, la idea que tenía es que a través de ese túnel se hiciera un pasadizo en el cual le permitiera llevar el agua de un lado a otro.

Sale pues… imagínense que en esa época en el año 500 antes del 600, como es que como lo hacían, no tenían herramientas sofisticadas como ahora vea, hoy por ejemplo están los rayos laser que inclusive te pueden medir la distancia hasta un segmento hasta donde toque el láser, ya te da la medida ahí en el dispositivo, hoy se cuenta con esa tecnología, pero antes se tuvo que hacer uso de la trigonometría para el desarrollo de la topografía, entonces como le hicieron en esa época, el encargado de esta obra fue el arquitecto Eupalinos.

Se construyó el túnel de Eupalinos, el cual tiene una, este durante cerca de mil años tuvo aplicación ese túnel, tenía 1036 metros de largo y qué es lo que hicieron eh pues el método ingenioso de geometría consistía en excavar aquí en el extremo de la montaña y en el otro extremo, otros vinieron también picando la piedra, porque todo era a pico y pala, entonces se fueron excavando hasta que coincidieron en el mismo punto.

Entonces se dan cuenta de la maravilla que hicieron estos personajes y una de las hipótesis que se plantea es que ellos para poder determinar la altura construyeron un acueducto, un canal de agua, desde un extremo hasta el otro extremo. Qué pasa cuando colocamos agua en una manguera y las mantenemos a un mismo nivel ¿qué va a ocurrir con ellas? Las llenamos de agua y están al mismo nivel las mangueras, pues el agua se va a mantener algo así como a la misma distancia, cuando en una manguera una sube y la otra baja pues el agua se empieza a desparramar de un lado, porque esto me está diciendo que está a diferente nivel.

Se dan cuenta como una cosa tan sencilla, nos da una referencia tan importante, entonces imagínense que ese tiempo pues no había mangueras o dispositivos como los que tenemos ahora, pues lo que tuvieron que hacer fue un canal y entonces lo llenaron de agua y vieron si a este extremo se le desparrama el agua quiere decir que tenemos que subir un poquito la altura, hasta que ya las alturas el agua ya estuviera equilibrada en un extremo y otro, sale de esa forma dijeron ya tenemos el nivel del cual vamos a comenzar.

Ahora si lo que hicieron pues fue que este al hacer uso del triángulo rectángulo para tener una distancia dirigida, es decir que esa altura no se desviará. Si hubo variación de a lo mejor que les gusta un metro porque si también no se contaba con una precisión exacta, pero fue mínima la desviación que hubo al momento de encontrarse, ¿si explico? Entonces coincidieron prácticamente cerca del punto en el cual los constructores pues terminaron esa obra gracias al ingenio de las matemáticas, entonces este eh (tose) esa es una de las maravillas que hubo en la antigua Grecia en Samos.

El triángulo rectángulo pues lo fueron aplicando en diferentes proporciones de tal forma que les permitió obtener una distancia dirigida, todo fue gracias a la aportación o al descubrimiento del triángulo rectángulo verdad y ya por darles otro ejemplo pues está el uso el método de triangulo rectángulo para obtener razones trigonométricas, ¿ustedes habían escuchado ese término de razones trigonométricas?
E: No
P: razones como tal si habían escuchado, razones y proporciones verdad entre números, pero ya razones trigonométricas el asunto cambia, entonces que pasa con las razones trigonométricas, pues que se hace uso de triangulo rectángulo para obtener el seno y el coseno de un ángulo.

Sale, vamos ahhh… a lo mejor ahorita me suena el seno y el coseno mediante también, razones también se pueden obtener de forma indirecta ya sean los catetos o la hipotenusa, entonces son muchas las aplicaciones que tiene un triángulo rectángulo, yo ya les di tres ejemplos: calcular distancias de forma indirecta, la aplicación que se hizo en el túnel de Eupalinos, y el cálculo de razones trigonométricas. ¿En cuál creen que nos vayamos a centrar para poder realizar esta construcción geométrica?
E4: Túnel de Eupalinos

P: creo que si es un poquito ambiciosa la idea, creo que necesitaríamos tener muy buenas bases de trigonometría. Nos vamos a ir con la tercera opción que es el de razones trigonométricas, ahorita lo que se va a trabajar es el diseño con un ángulo de inclinación.

No vamos a hacer muchos porque no nos daría tiempo de eh trabajar con muchos ángulos de inclinación, solo vamos a trabajar con el de 60°, entonces lo que vamos a hacer es primero pues eh hacer uso de estos materiales que tenemos aquí, que es un martillo, unos clavos, es un marcador, es este hilo el que se utiliza en la construcción, agua para llenar la manguera, juego geométrico, un pedazo de madera, para poder tener el segmento vertical, una estaca que yo en este caso conseguí un cincel, porque ya ven que luego las estacas se clava y se rompen o no se mantiene fijas, entonces el cincel se tiene esa característica, si se mantiene fijo y esta escuadrita o estaquita que me va a permitir determinar un ángulo de 90 °

¿Por qué será importante considerar el ángulo?
E: inaudible
P: Entonces no vamos a trabajar con ningún otro triangulo sino con el triángulo rectángulo, entonces a ver si me apoya E5 y su equipo, clavando esta estaca, vamos a, eh me falto el flexómetro, a ver si lo veo por aquí. No, entonces con el metro vamos a medir una distancia de aproximadamente 3m de ese punto a cualquier otro, ya sea no necesariamente que sea vertical u horizontal, puede ser en diagonal, sale entonces porque es importante considerar que vamos a tener la estaca como un punto inicial y ese otro punto como llegada para poder trazar un segmento, entonces el equipo mida tres metros a partir del tronco hacia donde quieran, aja pueden dirigirlo hacia acá.

E5: Donde esté más limpio, no
P: exactamente donde esté más limpio, a ver si quieres apóyate con el clavo para ir marcando
E5: inaudible
P: Aja uno, dos. Está un poquito desviado pero no importa nos dé un poquito más de tolerancia de los tres metros, entonces ahí vamos a dejar una tolerancia como de… ahí mismo clava la estaca que sería el cincel… a ver si ya no se mueve, clávala otro poquito porfa
E4: martillando
P: entonces a ver E5 apóyame, vas a sujetar la cuerda a lo que es el tope del cincel, a ver como haces el amarre, ¿tiene su chiste vea? Porque no nada más de… porque ese es acerado y se resbala. ¿Si sabes a la albañilería E5?
E6: No
P: híjole pues a ver si aprendes a al menos sacar el nivel para un piso, ahorita ya con esto sacaríamos el nivel de un piso, ¿sí o no chicas?

E: risas
P: A ver E6 que ha trabajado en esta cuestión, ¿cómo le haríamos para obtener el mismo nivel de esta estaca hasta este punto de acá?
E6: seria medir de aquí hasta donde llega
P: Ah ok y si ¿esta parte de aquí tiene más altura, el piso está descuadrado?
E7: tiene que medir de aquí hasta arriba y lo que mide aquí debe medir lo mismo que de allá al piso
P: la cuestión es que si el piso está así, está de bajada, ¿qué va a pasar?
E8: tiene que venir con la manguera
P: exactamente tenemos que hacer uso de la manguera y eso ¿cómo E8?
E8: llenarla de agua
P: Ok entonces la llenamos de agua, le vamos a echar un poquito más de agua para que se desparrame y saque todas las burbujas. ¿Si se dan cuenta? Ahí no se alcanza a llenar porque está a desnivel la manguera, se dan cuenta si la subo ya va a empezar a subir el nivel, quiere decir que ahí ya más o menos están equilibradas, entonces las juntamos y la vamos a llenar de agua para que… más o menos vamos a sacar un nivel, las muevo, muevo una, muevo otra de tal forma que las burbujas se mantengan a la misma altura, porfa ayúdame a marcarle, bien donde termina la burbuja, donde termina el agua, que se vea bien la línea.

Sale pues entonces ahora apóyenme, vamos a estirar la manguera y vamos a volver a llenarla de agua hasta donde coincidan las marcas, te debes dar cuenta en algo, debes colocar la marca en donde está o llega al hilo… nos quedó un poquito estirada, tráeme la jarra del agua, llénale más o menos hasta la marca, ¿más o menos ahí está al nivel?
E8: menos, poquito menos
P: ¿me subo o me bajo? A ver voy a bajar un poquito
E1: si de hecho
P: ¿subo o bajo?
E3: tantito para arriba
E1: mas, mas, ahí
P: si se dan cuenta esta marca ya coincide con el agua y allá también, entonces aquí tenemos… veamos, E5 pásame un clavo, ahí avalo porfa más o menos a la altura de la marca. Ahí está más o menos verdad
E: clavando

P: entonces en teoría es lo que se hace verdad para poder sacar el nivel, pero ¿qué pasaría si lo dejáramos así como dice su compañero, si a partir de aquí hacia arriba mido 10cm y en el otro extremo mido del piso hacia arriba 10cm?
E8: va a quedar descuadrado
P: entonces ya con esto garantizo que este segmento trae el mismo nivel. Algún voluntario que me ayude a amarrarlo, el hilo amárralo en la punta del clavo, más o menos que quede bien tenso, eso es todo, inaudible…

Entonces ahora lo que hicimos fue colocar la base de mi triangulo que va a ser propiamente uno de los catetos verdad, sale ahora hacia arriba tengo que garantizar generar mi ángulo recto, ¿de dónde lo puedo trazar, de allá o de acá?
E1: de ahí
P: me facilita más de acá porque tengo como referencia esta (se refiere a la base de apoyo en la cual se puede medir un ángulo recto desde la base) allá no tengo ninguna referencia, este me va a servir como referencia, si se dan cuenta también está descuadrado, entonces lo que voy a hacer es que voy a clavar un pedazo de madera para sacar el segmento a partir de aquí, se dan cuento si yo trazo un segmento de aquí por ejemplo hasta acá entonces ya no me va a dar el ángulo de 90 y yo tengo que sacar un segmento recto más o menos a este nivel, si lo pego acá ya no va a dar un ángulo de 90, sale entonces a ver uno de los equipos apóyeme, midan un ángulo de 90 (en la estaca de madera de referencia) para que a partir de ahí me vaya hacia arriba, con este transportador de madera.

Vamos a ver si este método físico, método práctico sirve para lo que queremos realizar ¿cómo se les ocurre que midamos el ángulo? Deben considerar que a partir del segmento que ya tengo en la base trazar un segmento hacia arriba cuya inclinación sea de 90 en cierta forma quiero hacer una escuadrita
E1: orientar el transportador en la punta del clavito (en la parte superior se fija un clavo a una tabla anclada a un soporte con forma irregular, como punto de llegada
P: el clavo moverlo sobre la tabla hasta que de la inclinación, ahí hay que fijarlo. Ahora corran el hilo, ahí está más o menos tenso. ¿Para qué me estoy apoyando de este pedazo de tabla?
E7: inaudible
P: Ahorita ya puedo desplazarme de un lado para otro dependiendo si requiere más inclinación
P: Veamos ahora los 60 grados nos interesan para la medición, si no nos diera los 60 grados ¿Qué tendríamos que hacer?
E7: correr la estaca para acá (se refiere a que tiene que alargar el segmento adyacente al ángulo de referencia)
P: A ver con el transportador de madera, mídanle, no cambia. Nos hace falta subir un poquito más (a ver si subes la… aja muévela hacia arriba. Nos da menos de 40
E7: Es que está más largo, quiere más cerrada la estaca, ¿no?
P: ¡mande!
E7: Yo digo que quiere más cerrada la estaca

P: Es que tú dices que vayamos cerrando la estaca (disminuir la longitud del segmento que es base del triángulo) ¿crees que si aumentemos el valor del ángulo?
E7: Yo digo que si
P: Entonces lo que tenemos que hacer es subir esta tabla (cateto opuesto al ángulo de referencia), subirla a lo mejor que será un medio metro.
E2: Les digo una cosa, ¿no sería mejor que la pusiéramos más abajo?

E7: No pero el nivel de tu piso
E2: No, no pero me refiero al ángulo por aquí (se logra una menor inclinación) para que cierre más el segmento
P: Pero ¿qué pasa si bajo más este segmento?
E2: Cerraría mas
E7: Yo digo que pues...
P: ¿Qué va a pasar con ese ángulo?
E5: No va a haber nada de ángulo
E7: va a medir menos profe, hasta bajó más. Yo digo que recorra la estaca
P: ¿Por qué?
E4: Yo digo que porque lo único que baja es la longitud del segmento y el ángulo sigue quedando igual

P: Así ya parece triangulo isósceles, A ver suéltale un poquito ahí libérale, eso
E5: ¿le suelto?
P: Sí poco a poquito, mas, mas, ahí
E6: No, ahí ya creció más de los 60
E5: Todavía le falta
E2: Ahí ya mide como 45
E7: Entonces mídele, como quieres que sepa, si…
E: ¡45 profe!
E7: Ahí ya mide como dos metros y medio (longitud horizontal) profe
E3: No, ya casi lo tres
E7: Por eso y si subes un poco más, puede que de los 60
P: Pero ya no voy a alcanzar, entonces ¿qué pasa si jalamos la estaca más para acá? (alargar la longitud) vamos a jalar la estaca, nos vamos a desplazar unos 50 centímetros para acá ¿Qué va a ocurrir si muevo la estaca más para acá? Ahora si enrédale ese el hilo ahí. Ahora sí ahí tenemos que obtener 90 grados, ¿te da los 90 grados?
E2: casi
E7: Yo digo que entre más recorran la estaca más te va a dar

P: ¿Listo?
E2: Le falta, sigue dando lo mismo, siento que hay que recorrer más la estaca
P: A ver recórrela otro poquito
E7: ¿Por aquí?
P: Por ahí esta bueno. Ahora si veamos este… ahí mero ahí mero
E7: creo que ahora ya se pasó profe, no jajaja
P: no te preocupes
E7: Ya sabemos que tenemos que recorrerlo un poquito más, ¿cuánto tiene?
E2: ¡Espérate!
E7: ¿Qué es lo que está mal profe?
P: Lo que está mal es que están midiendo mal

E7: La E2
E2: Es que profe le digo una cosa, no sube no se eleva hacia acá, solo va recorriendo el hilo, sigue dando lo mismo, es que aquí solo va recorriendo el hilo
E7: Se me hace que es el nivel de allá abajo
E3: No, eso quiere más largo y eso quiere más alto, que esté el ángulo que esté más ancho
P: entonces si movemos la estaca, en cierta forma este segmento se va acercando (inaudible) y el ángulo se va (inaudible)

P: entonces repartimos este segmento en dos segmentos proporcionales, el primero a 1 metro de distancia y el otro a dos metros, perdón el primer segmento aquí tenemos 2 metros lo repartimos entre 2, da 1 metro, entonces amarramos aquí (a mitad del recorrido) entonces el segmento que voy trazar a partir de aquí que sea para paralelo con este (segmentos verticales) ¿qué característica tiene este segmento que voy a trazar aquí?
E: no responden
P: Este segmento en relación con este ¿qué característica va a tener?
E7: 90 grados
P: Va a ser de 90 grados el ángulo, pero en relación al segmento ¿qué va a ocurrir?
E5: Va a ser la mitad, ¿no?
P: Pero no hablemos en esos términos de mitad, habíamos hablado acerca del…
E1: ¿Va a ser proporcional?

P: va a ser proporcional ¿Por qué?
E1: Bueno porque aquel avanzo y este también
P: Aja exactamente, son directamente proporcionales verdad, si a uno le afecta la medida, entonces quiere decir que el otro también varía su longitud. Bueno a ver entonces amarramos E2. Entonces a ver recuperando un poquito la información de lo que hicimos en este trazo ¿Qué pasa si voy variando la distancia de la estaca?
E4: ¿va cerrando?
E5: El ángulo va abriendo
P: El ángulo va abriendo, ¿qué significa eso de abrir o cerrar? ¿Disminuye o aumenta?
E4: seria que aumenta la medida del ángulo
P: Si la estaca la desplazo hacia afuera ¿qué va a pasar con este ángulo de referencia?
E4: disminuye
P: Va a medir menos verdad y ¿qué va a pasar con estos catetos? ¿En qué forma crecen o decrecen?
E: martillando
P: Buena para la chamba E2, ¡que bárbara! Bueno entonces apoye ahora E8 midiendo el ángulo, ya su compañera le va a dar la inclinación.

E2: confío más en E2, veamos E2 mídele tu
E7: con el chiquito (transportador de plástico)
P: Pega el transportador al hilo vertical, pégalo ¿ahí está alineado?
E2: El marcador por favor
E7: gira un poquito más E2
P: ábrelo un poquito, ligeramente unos milímetros hacia tu izquierda, izquierda, otro poquito
E2: ¡Ya profe!
P: Ahí está, ahora si
E2: ¿le amarro profe? (trazando segmento vertical, proporcional al cateto opuesto del ángulo de referencia)
P: Si por favor. Ahora si tenemos la configuración de dos triángulos rectángulos, entonces E9 señálame el primer triangulo rectángulo, ¿uno que observes? Señálame todo el contorno con tu mano. Marca todo el triángulo ¿Cómo, cual es el que visualizas?
E9: Esa es la hipotenusa
P: Esa es la hipotenusa
E9: Y aquí tenemos el cateto adyacente
P: cateto adyacente, aquí tenemos el primer triangulo rectángulo verdad
P: El siguiente a ver E10
E10: Sería todo esto ¿no? (señala el contorno del polígono formado por 4 lados)
P: Aquí propiamente pues no obtenemos un triángulo rectángulo, verdad
E10: no

P: sale, entonces les comentaba que si movemos la estaca hacia afuera, este segmento crece (segmento horizontal) y este segmento eh ¿crece o disminuye? ¿Qué pasaría si desplazo esa estaca 1 metro más allá, qué va a pasar con este segmento? (segmento vertical)
E1: se va a hacer más pequeño
P: más pequeño, bueno con el ángulo ¿Qué va a pasar?
E1: igual disminuye
P: Disminuye verdad, entonces lo que hicimos ahorita fue acercar la estaca para ir compensando e ir haciendo mayor ese ángulo verdad, ahora si lo que van a hacer ahorita en su libreta, pues van a tratar de representar el primer triangulo, un dibujito y van a medir sus catetos y van a medir su hipotenusa y después en el segundo triangulo que es el de mayor longitud van a medir sus catetos, el cateto menor, cateto mayor y su hipotenusa. Siempre el cateto menor lo consideramos como cateto a, cateto que tiene mayor longitud como b y siempre esta va a ser hipotenusa. Por equipos van a medir los segmentos y los anotan (medir segmentos de construcción geométrica real)
E1: El triángulo 2 mide 1 metro el cateto a, el cateto b mide 1.16 e hipotenusa 1.58
P: Aja y ¿el ángulo?

E2: 60 grados, 90 grados y 30 grados
P: ok muy bien
E2: y los ángulos de este miden lo mismo
P: Y este que es el triángulo más grande ¿es el triángulo uno?
E2: Triangulo 1, cateto b mide 2.4, el cateto a mide 2 metros, la hipotenusa mide 3.16
P: ¿Y cuál es su ángulo de inclinación?
E1: 60 grados. 60,90 y 30
P: Ok muy bien
Equipo 2 realizando mediciones
P: Bueno pues entonces ya terminamos de realizar la configuración en la parte de afuera, la idea era lograr construir 3 triángulos rectángulos ahora quiero preguntarles ¿qué tienen en común o qué tienen en diferencia estos que se presentan aquí? (triángulos trazados en pizarrón), alguien que guste participar levantando la mano, semejanzas o diferencias entre el triángulo 1 y triangulo 2
E2: ¿En común?

P: En común o diferente
E2: En común pues que tienen lo mismo en medida de ángulos
P: ¿Cuáles medidas de ángulos?
E2: O sea los del ángulo recto de 90 grados, el teta y el de b, ambos lo tienen
P: ¿ambos?
E2: Aja porque ambos siempre se forman en un cateto a y un cateto b
P: ¿Cuál es el ángulo que comparten ambos triángulos?
E2: El ángulo recto de… ah el de 60; P: El de 60 grados verdad

Transcripción de la sesión del 20 de octubre de 2021

P: Entonces comparten un ángulo en común, este que es de 60 grados y les dejé por ahí una tarea recuerdan que les deje una tarea, que buscaran el alfabeto griego, entonces a este ángulo de referencia lo podemos llamar con la primera letra del alfabeto griego, alfa (trabajan sobre la construcción geométrica de triángulos rectángulos semejantes) alfa con valor de 60.

Ya después dijo su compañera E4 algo bien interesante que comparten este ángulo alfa para ambos triángulos y la característica es que estos ángulos no cambian su magnitud (hace mención de ángulos congruentes) estos ángulos miden 90, estos miden 60 y por la propiedad del triángulo se tiene que los tres deben de medir 180, los tres ángulos internos, por tanto este va a valer 30, vamos a llamarlo beta para no decir que es el mismo este que ese le voy a llamar beta prima (se refiere a los ángulos congruentes) no sé si habían escuchado ese termino

E: no
P: quiere decir que tienen la misma medida pero no estamos hablando del mismo ángulo, si me explico. Beta y beta prima, uno es del triángulo 1 y el otro angulo es del triángulo 2 y ahora si de los triángulos theta igual a 90 y theta prima también, tienen la misma medida pero no estamos hablando del mismo ángulo, entonces ¿qué relación hay entre este triángulo y el triángulo más grande? Alguien que quiera participar levantando la mano
E1: son iguales
P: Eso de decir son iguales pues cuando te dicen que son iguales quiere decir que son de la misma forma y tamaño.

E2: son semejantes
P: exactamente son triángulos semejantes, ahora ya complementando más esa idea ¿de qué tipo de triángulos estamos hablando?
E: triángulos rectángulos
P: triángulos rectángulos ahora lo que comentaste (refiriéndose a E1:) semejantes lo único que va a ser diferente uno de otro ¿qué va a ser?
E6: su tamaño
P: bien su tamaño, quiere decir que lo único que va a variar es la magnitud de sus lados, me explico. Por tanto si aquí yo hiciera la proyección de estos segmentos (proyecta los segmentos de los triángulos semejantes) ¿qué pasaría con el triángulo 3, qué características va a tener? Referente a los lo anteriores que ya abordamos
E2: más grande

P: ¿más grande en qué sentido?
E2: más grande en que aumenta el tamaño de sus lados
P: semejantes en que van a tener un ángulo de 90 grados, otro de 30 grados, theta dos prima, beta dos prima ¿y el ángulo que comparten en común?
E2: este de 60 grados
P: el ángulo alfa, el de referencia. Y así tengamos n cantidad de triángulos vamos a seguir teniendo el ángulo de referencia, es el mismo para todos los triángulos y ahora bien por equipos van a pasar a colocar la medida de los catetos y la hipotenusa con respecto a la actividad que realizamos afuera. Deben colocar el valor de cada hipotenusa
E: estudiantes trabajando por equipos colocando el valor de cada segmento

P: La verdad más contento no puedo estar porque creo que la actividad nos favoreció mucho porque nos aproximamos a algo que ahorita les voy a comentar, nos ayuda bastante porque cuando yo lo hice en casa las medidas me salieron muy disparejas y ya lo que estoy viendo ahorita es que nos aproximamos más a una, a valores más cerrados, sale favoreciendo a un contexto más de proporcionalidad, entonces ahora el término que voy a introducir es el de seno y coseno y bueno se preguntaran que es eso, son razones trigonométricas, el triángulo rectángulo es el método, se llama método del triángulo rectángulo para calcular el seno y el coseno, pero queda limitado ahorita vamos a ver porque queda limitado para cierta medida de ángulos por ejemplo el seno de qué, tenemos que tener como referencia el ángulo que estamos considerando común para todos los triángulos

E2: el seno de 60

P: el seno de alfa que es el que se comparte verdad

E2: si

P: entonces seno de alfa porque este ángulo va a ser alfa, aquí se llama 60, pero en forma general lo vamos a llamar seno de alfa o puede llamarse beta, teta o el nombre que le quieran poner al ángulo, ahora como se va a calcular, ahora fíjense bien aquí tenemos este ángulo de referencia, para el triángulo uno (triángulo de menor proporción), para el triángulo dos, para el triángulo tres, para el triángulo n va a ser la medida del cateto opuesto, ¿Cuál sería su cateto opuesto?

E7: 30 grados

P: Ah pero estamos hablando independiente a eso, este si es ángulo pero lo que vamos a tener acá son magnitudes reales, distancias, es decir aquí tengo que trabajar con distancias no con ángulos porque, a ver ¿los catetos en qué medida los obtuvieron?

E6: distancia

P: Distancia, en una magnitud y entonces no podemos hablar de cateto opuesto hablando en grados verdad, tenemos que ser congruentes cuando vamos a pedir un kilo de azúcar, no pedimos un litro de azúcar, sale a eso me refiero. El cateto opuesto al ángulo alfa, si nosotros visualizamos la magnitud de estos segmentos (se refiere a los catetos opuesto y adyacente del triángulo) ¿quién sería el menor y quien el mayor longitud?

E6: el cateto menor es el de menor longitud

P: ok dice E6 que el cateto de menor longitud es el cateto opuesto y el cateto de mayor longitud es el cateto adyacente, entonces en relación a este triángulo ¿Quién sería el cateto opuesto? (declarando que el cateto de menor longitud es a y el de mayor longitud es b)

E1: cateto b

P: ese sería mi cateto opuesto o cateto b y esta magnitud para poder obtener el seno del ángulo lo voy a dividir entre su hipotenusa, la hipotenusa del triángulo 1…

E2: Es 1.58 m

P: lo voy a llamar hipotenusa en forma general, está por ejemplo es hipotenusa 1, hipotenusa 2, pero en general es hipotenusa, sale entonces para poder obtener el valor del seno de un ángulo tengo que dividir lo opuesto entre su hipotenusa y para poder obtener el valor del coseno pues va a seguir siendo la misma hipotenusa pero en la parte del numerador va a ser… ¿este segmento en relación al ángulo, como se llama? Si este es opuesto este ¿Cómo se llamara?

E4: adyacente

P: de acuerdo este adyacente al ángulo porque no está en forma opuesta, por ejemplo cuando nos tomamos de la mano, observar, vengan para acá (la persona que queda en medio tiene a cada lado una persona que a su vez son adyacentes a él), adyacentes al ángulo pues hay de dos sopas que sea la hipotenusa, pero no puede ser adyacente esta es hipotenusa, el adyacente seria el que está al lado contrario, ahora si con esa idea el ángulo recto si tiene dos lados adyacentes que son el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente, esos serían sus lados adyacentes, me explico, los que están lado a lado, los que en cierta forma generan el ángulo recto se les llaman catetos , sale a esta a final de cuenta no se le puede llamar cateto porque es esta a final de cuentas es la hipotenusa no cambia su nombre. Entonces va a ser el cateto adyacente sobre también la hipotenusa y con esas dos ecuaciones trigonométricas nos vamos a enfocar, hay más por ejemplo ¿qué otra conocen?
E1: Eh la tangente

P: Tangente verdad, esas tres se les llaman razones trigonométricas directas porque a partir de ellas se pueden obtener otras tres que son las inversas, es la cotangente, la secante y la cosecante, pero con que estudiemos esas dos (refiriendo al seno y coseno) por el momento con que vayamos adentrándonos y rascándole un poquito a profundidad para ver que podemos entender de estas razones trigonométricas, porque razones pues porque estamos aplicando el método del triángulo rectángulo, sale ahora la pregunta que les voy a lanzar. ¿Qué pasa si este ángulo disminuye a 30 grados, que va a pasar con los catetos a y b?
E4: la magnitud de sus lados va a ir creciendo y el ángulo disminuyendo
P: Exactamente este es el ángulo que va a ir disminuyendo si vamos bajando el cordón, vemos que el ángulo de referencia va disminuyendo, ¿Qué va a pasar con el cateto puesto?
E7: disminuye

P: ¿Qué pasa con este cateto? (el lado adyacente)
E2: aumenta
P: Para poder generar el triángulo rectángulo, hagan de cuenta que este (cateto opuesto) se va desplazando por acá de este lado, si hacemos la proyección que este lado de este cordón va a quedar como por aquí, si así lo visualizamos, me explico, cae como por aquí y para poder formar el triángulo rectángulo pues tengo que garantizar que aquí halla un ángulo recto, entonces ¿qué va a pasar con este segmento? (cateto adyacente)
E2: aumenta
P: el cateto opuesto disminuye, si se dan cuenta disminuyo su longitud y el cateto adyacente aumenta
E2: Pero también puede ser al revés ¿no profe?
P: Ah en que situación
E2: en que puede disminuir el cateto de abajo

¿Cómo disminuiría?
E2: Haga de cuenta que en la actividad que hicimos comenzamos considerando tres metros y al final terminamos midiendo dos
P: ¿Cómo podemos hacer que este aumente (cateto opuesto) y que este disminuya (cateto adyacente)?
E2: Si aumentamos o disminuimos la altura del cordón
P: exactamente si aumentamos, si subimos el cordón quiere decir que le vamos a dar más inclinación, si lo inclinamos mas ¿qué va a pasar con el cateto opuesto?
E: aumenta
P: ¿y con este cateto?
E: disminuye
P: Se dan cuenta, ahora vamos a tener una situación donde nos enfrentemos donde el ángulo se vaya haciendo más pequeño, más pequeño, entonces ya visualizaríamos otro triangulo rectángulo pero los catetos pues ya este… si el cateto opuesto, si el ángulo se acerca a cero, el cordón lo baje hasta que por ejemplo el ángulo sea 5 grados, ¿qué va a pasar con el cateto opuesto?
E3: inaudible

P: Y entonces el cordón ya viene a caer hasta como por acá, se dan cuenta y esta distancia ya es muy pequeña ¿y qué va a pasar con el cateto adyacente?
E6: va a ser más largo
P: Más largo, tiene que alcanzar a este punto para poder formar al triangulo rectángulo. Entonces ya nos quedamos con estas razones trigonométricas, ahora lo que vamos a hacer, van a hacer uso de su transportador, de su regla
E5: Profe ¿entonces el seno y el coseno se van a dividir entre la hipotenusa?
P: siempre. Entonces por ejemplo aquí les pudo a ver dado 0.734 redondeado pues si por ejemplo este valor que es 0.734 el valor que más se aproxima redondeado es aproximadamente igual a 0.73 si este fuera mayor a 5 (se refiere al últimos digito) la cifra anterior aumenta en una unidad, sale si es menor que 5 esta cantidad se mantiene, no cambia. Por ejemplo si fuera 6, esta la aumentamos en una unidad quedaría aproximadamente igual a 0.74
E2: Profe ¿así sería la de seno?
P: seno de 60, a ver ¿Quién es el opuesto? Tienes 1.16 entre la hipotenusa que es 1.58 es igual, la división, ¿tiene más decimales?
E2: si jeje

P: Entonces aquí tenemos que tener cuidado, bueno está bien
E2: ¿y en la otra profe en la del coseno tengo que dividir esta por esta?
P: No, es adyacente y está siempre va a ser hipotenusa nunca va a cambiar, no le podemos llamar ni opuesto ni adyacente esta va a ser hipotenusa, adyacente va a ser aquel que está a su costado
E2: entonces ¿tengo que dividir esta por esta?
P: Adyacente entre hipotenusa

E2: Por eso
P: No es este por este es este entre este
E2: Bueno por eso, seria dividir este entre este (cateto opuesto entre hipotenusa) y en la otra sería este y este (señala cateto adyacente e hipotenusa)
P: ok muy bien
Ruido en el salón

Transcripción de la sesión del 11 de febrero de 2022

P: Ahora bien porque me interesa que consideremos este triángulo de 45 grados en ángulo alfa, que va a pasar con, ¿si ese ángulo alfa mide 45, este cuanto va a medir?
E4: 90 grados (señala el ángulo recto)
P: Por tanto este ángulo de acá arriba ¿Cuánto va a medir?
E4: 45 grados
P: Y si yo eh realizo una, de acuerdo a estos ángulos ya no es necesario estar midiendo, este… los segmentos, porque hay una característica muy importante en el triángulo de 45 grados ¿Cuánto mediría su cateto opuesto a este ángulo? (ángulo alfa)
E: no responden

P: A ver si ese ángulo es de 45 y este segmento es de 1 metro (cateto opuesto), por tal motivo este ángulo de 45, ¿Cuál va a ser el opuesto? ¿Cuánto va a medir su lado opuesto?
E: no responden
P: Si prácticamente estamos considerando que esta misma proyección es la misma que tengo reflejada acá
E1: mediría un metro
P: ¿están de acuerdo que mediría un metro?
Silencio

P: prácticamente es la misma proyección, si nosotros viéramos este triángulo de 45 grados y lo giráramos, prácticamente coincidiría este mismo ángulo con ese mismo ángulo y este lado coincidiría con este, ¿me explico? Entonces independientemente cual sea la medida de este cateto va a ser la misma medida que ese otro cateto, quien lo determina pues el ángulo, el ángulo de inclinación, 45 y 45, por tal motivo ¿Qué va a pasar con el seno y coseno de 45?
E1: van a dar el mismo resultado
P: ¿estás de acuerdo E9?
E9: Si
P: ¿Por qué?
P: A ver dame un ejemplo, eh dándole un valor a este lado por ejemplo de tres metros (cateto puesto)

E9: ¿y los ángulos son de 45 grados?
P: de 45 grados
E9: La suma de los ángulos es 180 y el cateto opuesto es de 3 metros y la hipotenusa
P: Y la hipotenusa que no sabemos su valor, pero por ejemplo te puede dar 3 sobre equis, sale tres sobre equis y el seno de 45 es igual a tres sobre equis, para poder determinar el valor de la hipotenusa tendríamos que medirla verdad, yo les puedo decir un valor cualquiera pero entonces no se ajustaría a lo que es el triángulo rectángulo de 45 grados, cuando este y este tienen una medida, es una medida en particular para la hipotenusa y estos cambian y estos cambian entonces la hipotenusa va a cambiar también, entonces la hipotenusa vale equis, entonces ¿el coseno de 45 cómo quedaría?
E: tendríamos que determinar cuál es el valor del cateto (cateto adyacente)

P: Y es necesario saberlo, si ya sabemos que este ángulo mide 45, es la misma proyección que tenemos allá
E9: tres sobre equis
P: El resultado del seno y el coseno para un ángulo de 45 grados, nos da el mismo resultado
P: ¿Por qué E5?
E5: Al tener triángulos con ángulos iguales pero lados semejantes
P: ¿Cómo que sean diferentes? Cuando el triángulo rectángulo es de 90 grados y el ángulo alfa ¿de qué valor es?
E5: de 45 grados

P: estamos trabajando con el de 45 grados, acuérdense
E5: ¿El seno y el coseno se van a dividir entre la hipotenusa?
P: siempre
E2: y en el coseno tengo que dividir esta por esta (hipotenusa entre cateto)
P: No, es adyacente, acuérdense que está siempre va a ser hipotenusa, esa nunca va a cambiar, no la vamos a llamar nunca ni cateto opuesto ni adyacente, esta va a ser hipotenusa, adyacente va a ser aquel que está al costado.
Los estudiantes exhiben dificultades para hacer uso de las razones trigonométricas para determinar el seno y coseno de 90 grados

APÈNDICE C: TAREA DE APRENDIZAJE MATEMÀTICO

Actividad de inicio

Ficha técnica

Sesión I

Nombre de la actividad: construcción geométrica de triángulos rectángulos semejantes

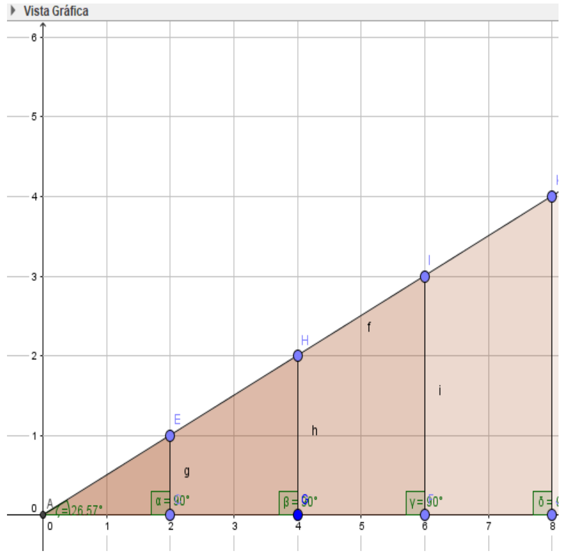
Propósito: El profesor presenta una actividad que se desarrolla en el contexto real, enfocando la actividad previa que se realiza a lápiz y papel al contexto donde el estudiante emplea los elementos previamente abordados para estructurar la noción de entendimiento acerca de la razón trigonométrica seno y coseno

Enunciado de la actividad: EL profesor presenta la actividad “construcción de triángulos rectángulos semejantes”, la cual consiste en formar una secuencia de triángulos rectángulos semejantes, empleando herramientas manuales empleadas en construcción e inicialmente en topología, instrumentos como la plomada de punta (usada para nivelación de superficies, así como transportar un punto de referencia a otro extremo). Es necesario tener a la mano hilo para nivel, estacas de madera, manguera para nivel e instrumentos de medida: transportador, regla o escuadra o flexómetro. La actividad queda registrada en formato video, para uso posterior por parte de los estudiantes.

Indicaciones durante el proceso de la actividad

1.- El docente ofrece un relato, exponiendo como idea principal la importancia del uso de triángulos rectángulos, además de ofrecer elementos que consoliden la noción.

2.- Se da a conocer la intención de la actividad a realizar, así como los materiales que se necesitan para el cometido, enfatizando en que se reproducirá de forma física la construcción geométrica de la siguiente figura:



3.- Moverse a un espacio abierto que ofrezca una superficie plana y un ambiente adecuado

4.- Marcar un punto de referencia y clavar una estaca, colocando una marca 5 cm por encima del suelo.

5.- Con el uso del flexómetro medir una distancia de separación de 3 metros entre la estaca y un segundo punto de referencia, ahí clavar la segunda estaca.

6.- Empleando la manguera para nivel, se pretende trasladar el nivel de la estaca 1 a la estaca 2, donde el nivel de agua contenido en la manguera sirve como referencia para referenciar el nivel que ha de marcarse en la segunda estaca.

7.- Se sujeta un tramo de hilo desde la marca del punto de inicio hasta la marca que se obtuvo en el momento siguiente.

8.- A partir de la estaca 2 se fija un tubo de forma que este sea perpendicular al segmento horizontal. Para garantizar el ángulo de 90° el estudiante orienta el tubo hasta obtener la medida deseada, fijar el tubo y evitar que se mueva.

9.- Con la construcción que se tiene hasta el momento, es posible identificar un ángulo recto y 2 segmentos que lo forman (lados adyacentes). Para lograr terminar de formar el triángulo es necesario trazar la hipotenusa, para ello se sujeta un tramo de hilo desde la base del punto 1 hasta una altura máxima de 2 metros que va de la base del punto 2 corriendo por la superficie vertical del tubo.

10.- Sujetar bien los cordones unidos a las estacas y el tubo.

11.- Con la plomada de punta obtener un segmento vertical, considerar como punto de partida la hipotenusa y punto de llegada el segmento horizontal. Con la idea anterior generar un total de tres segmentos perpendiculares a la superficie y todos distribuidos a lo largo de la hipotenusa.

12.- Con la construcción geométrica formada, permitir al estudiante que identifique los distintos triángulos rectángulos.

13.- Se solicita al estudiante que obtenga la medida de los ángulos internos de los triángulos con la ayuda de un transportador

13.- Se pide al estudiante que con la ayuda del flexómetro mida la longitud de cada uno de los lados de los triángulos observados, la información la registra en una libreta.

14.- Registrar la información en una tabla elaborada por los estudiantes, que permita identificar la magnitud de cada segmento

15.- Representar mediante razones la relación entre segmentos y determinar si existe proporcionalidad en los triángulos rectángulos

16.- Seguir con el estudio de las razones trigonométricas seno y coseno del ángulo de referencia

Actividad de inicio

Hoja de trabajo

Sesión II

Nombre del (la) estudiante: Fecha:

Apartado I. Hallar el valor de las razones trigonométricas seno y coseno para el ángulo de referencia de 60°, para llenar la siguiente tabla debes considerar los valores obtenidos en la representación gráfica que se realizó en la actividad “triángulos rectángulos semejantes”

Valor del ángulo	Cateto menor	Cateto mayor	Hipotenusa	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno
60°					

Apartado II. Con el uso de transportador, regla o escuadra, realiza el esquema de cada triángulo rectángulo que se solicita en la tabla siguiente, considerar que a partir del dibujo que realices obtendrás medidas que te permitirán calcular el valor de las razones trigonométricas seno y coseno

Angulo	Esquema de triángulo rectángulo para ángulo de referencia	Cateto menor	Cateto mayor	Hipotenusa	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno
15°						
30°						
45°						

Nombre del (la) estudiante:
Fecha:

Apartado III. Las preguntas siguientes incluyen la razón trigonométrica seno y coseno para un ángulo dado.

1. ¿Puedes con el método de triángulo rectángulo determinar el valor de seno y coseno de 0°, explica?

2. ¿Puedes con el método de triángulo rectángulo determinar el valor de seno y coseno de 90°, explica?

3. ¿Al aumentar el valor del ángulo de referencia, cambia el valor de la razón trigonométrica, si/no por qué?

4. ¿Cambia el valor de la razón trigonométrica al variar la longitud de los lados adyacentes al ángulo recto, si/no por qué?

5. ¿para qué valor de ángulo de referencia, la magnitud de los catetos es la misma, justifica tu respuesta?

6. ¿cuál es el valor de coseno y seno para ángulo cuyo valor es 100°, puede cubrirse esta explicación con el método del triángulo rectángulo, explica?

Actividad preliminar
Ficha técnica

Sesión III

Objetivo: Aproximarse a la noción de círculo unitario, empleando el registro de representación a lápiz y papel y el contexto de herramientas digitales.

Justificación: Existe una dicotomía entre la trigonometría del triángulo con ángulo recto y la trigonometría del círculo unitario, esta última empleada con la finalidad de que se permita interrelacionar el concepto y que funja como pegamento para enlazar las dos ideas, ya que de función trigonométrica poco se enfatiza.

Posibles obstáculos epistemológicos: triangulo rectángulo, ángulo recto, ángulos agudos, plano cartesiano, razones trigonométricas seno y coseno (por definición), ángulos notables

Recursos didácticos para desarrollar la actividad: hoja milimétrica, lápiz, color rojo, azul, transportador, regla.

Etapa 1: Relacionar los catetos de un triángulo rectángulo a los ejes de un plano coordenado, y facilitar el tránsito hacía la relación entre círculo y los valores de la función

* Se le pide al estudiante que dibuje 10 triángulos rectángulos, todos diferentes y con hipotenusa igual a 1

* Coloca el símbolo de (α) siempre el mismo símbolo para un ángulo de referencia en cada triángulo (en alguno de los dos ángulos agudos internos del triángulo rectángulo).

* Trazar un plano cartesiano con sus respectivos ejes, horizontal y vertical. Considerar que el punto de intersección es el origen.

* Recorta los triángulos independientes y colócalos sobre el plano cartesiano, tomar en cuenta que el vértice en el ángulo agudo de referencia de cada triángulo debe quedar centrado en el origen del plano cartesiano, de tal forma que los catetos opuestos en cada triángulo deberán verse como segmentos verticales y los catetos adyacentes se verán solo como segmentos horizontales únicamente.

* Se le pide al estudiante que remarque con el mismo color, todos los lados opuestos al ángulo de referencia, marcar de color rojo los lados opuestos

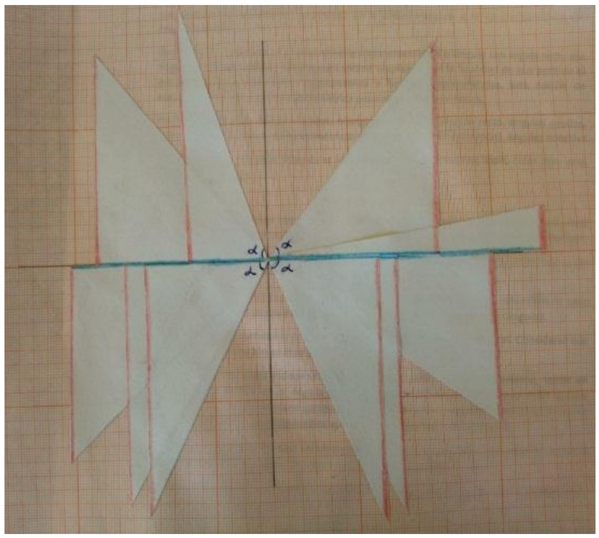
* El estudiante marca de color rojo todos los lados opuestos al ángulo de referencia del triángulo rectángulo

* El estudiante marca de color azul todos los lados adyacentes al ángulo de referencia del triángulo rectángulo

* Se le pide al estudiante que marque un solo eje para los lados de color rojo y un eje para los lados de color azul.

* Pedir que identifique a los ejes marcados de color rojo y azul, asignar un nombre para cada uno de ellos, de acuerdo a la construcción geométrica que realizó el estudiante.

* El docente orienta el proceso de instrucción, sin evidenciar el trabajo que se requiere, la siguiente imagen es un referente para el docente.



Actividad preliminar
Hoja de trabajo

Sesión III

Nombre del (la) estudiante: ________________________ Fecha: ___________

Apartado I. Relacionar los catetos de un triángulo rectángulo a los ejes de un plano coordenado, y facilitar el tránsito hacía la región geométrica que se forma

1. Identifica los elementos que se te solicitan y con la información recabada completa la tabla

a) Identifica el vértice que forma el ángulo alfa en todos los triángulos que plasmaste sobre el plano cartesiano y escribe las semejanzas que encuentras	b) Identifica el vértice que forma el ángulo recto en todos los triángulos y redacta las características que tengan en común	c) Identifica el vértice que forma al ángulo agudo complementario a alfa, en todos los triángulos y escribe características en común

2. De la tabla anterior, del inciso c) ¿Qué lugar geométrico se forma al unir todos los vértices descritos?

3. Si se colocarán un número muy grande de triángulos rectángulos sobre el plano coordenado ¿A qué tipo de figura se hace referencia?

4. Para dar un significado al eje horizontal del plano cartesiano ¿De qué otra forma lo podemos nombrar?

5. ¿De qué otra manera podemos nombrar al eje vertical del plano cartesiano?

Actividad preliminar
Ficha técnica

Sesión IV

Objetivo: EL estudiante manipula el software GeoGebra y emplea una construcción geométrica para obtener atributos correspondientes a triángulos rectángulos

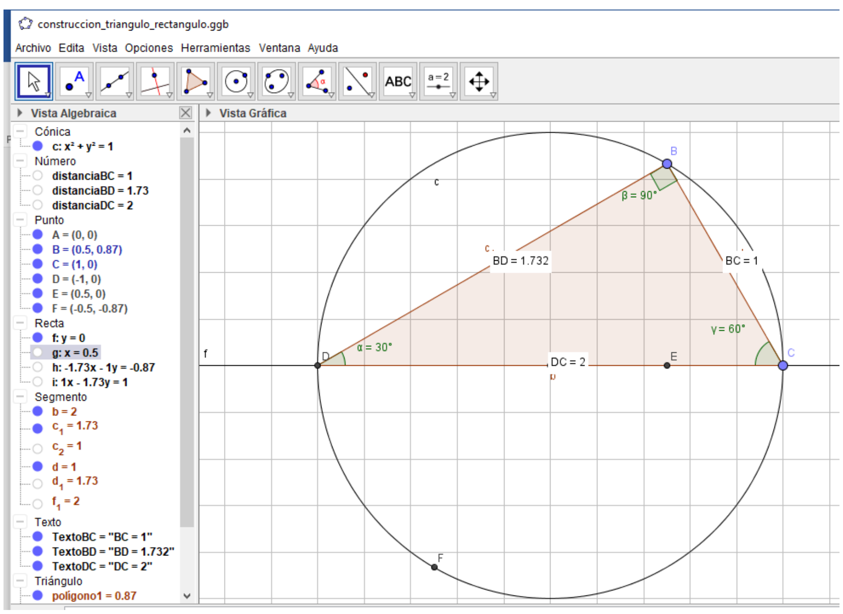
Posibles obstáculos epistemológicos: altura de un triángulo, área de un triángulo, perpendicular

* Construir una circunferencia con radio igual a uno, en el entorno dinámico del software GeoGebra, trazar un diámetro en la circunferencia con cualesquiera dos puntos, esta a su vez será uno de los lados de un polígono que se formará

* Ubicar un tercer punto sobre la circunferencia y se desplace a través de esta, unir los tres puntos empleando la herramienta polígono.

* Emplea la herramienta ángulo del panel GeoGebra para medir el valor de cada ángulo formado en la construcción geométrica dentro del círculo unitario.

* La figura geométrica tiene una característica que se mueve sobre la circunferencia. Ver la siguiente imagen como referencia



* Un elemento que permite determinar el valor de la magnitud entre un punto a otro es la pestaña "distancia o longitud" y se ubica dentro del mismo panel donde localizaste la herramienta "ángulo" para este fin tienes que elegir un punto de partida y un destino y con ello el programa estima una medición o distancia entre dos puntos.

* Configurar el valor de los segmentos a tres cifras decimales, con la finalidad de aproximarse a un valor es la intención. Los parámetros a variar se realizan desde el panel “propiedades”, dando click derecho al valor a configurar, seleccionar la pestaña “texto” y en la casilla “redondeo” seleccionar la opción indicada. La configuración de estos valores es de utilidad para tal propósito.

* Repite el procedimiento anterior para cada medición que desees configurar

* Puedes modificar el nombre a cada ángulo, editándolo en las propiedades de cada elemento, para ello emplea la pestaña “Renombra” para que cada ángulo se ajuste a las necesidades propias para el análisis.

Actividad preliminar
Hoja de trabajo

Sesión IV

Nombre del (la) estudiante: Fecha:

Apartado II. Responde los cuestionamientos que se te plantean apoyándote de la herramienta GeoGebra para observar el camino que te lleve a la solución y en cada pregunta presenta tus argumentos

1. ¿qué tipo de triángulo es el que se traza al mover el vértice que se desplaza sobre la circunferencia? ¿Mueve el punto sobre la circunferencia y argumenta que ocurre con las construcciones geométricas?

2. ¿Cuáles son las coordenadas del punto más alto en la figura geométrica? ¿hay más de una coordenada? Escribe tu respuesta con valor en grados

(_ , _) ; (_ , _)

3. ¿Qué valor de coordenadas te permiten obtener el área máxima de la figura? Realiza los cálculos necesarios para llegar al resultado

4. ¿Las coordenadas propuestas en la pregunta anterior te permiten calcular el perímetro máximo del polígono? Argumenta tu respuesta

Actividad principal
Ficha técnica

Sesión V

Etapa I. Trabajar la definición de seno y coseno de un ángulo, para triángulos rectángulos formados en el primer cuadrante con circunferencias de diferente radio. Emplear la herramienta GeoGebra.

* Se pide al estudiante que trabaje con el software y que construya una circunferencia de radio igual uno, ubicada con centro en origen del plano cartesiano.

* Para tal fin se elige la opción circunferencia con centro y radio. Elegir el centro del plano coordenado del software como origen o punto de partida y para la circunferencia elegir un radio igual a uno.

* Marcar un punto cualquiera sobre la circunferencia y trazar un segmento que va de él origen hasta el punto marcado.

* En este apartado se hace uso de un recurso que lleva por nombre perpendicular y se localiza en la barra de herramientas. Su uso consiste en obtener una recta que sea perpendicular al eje horizontal y que además interseque al punto sobre la circunferencia.

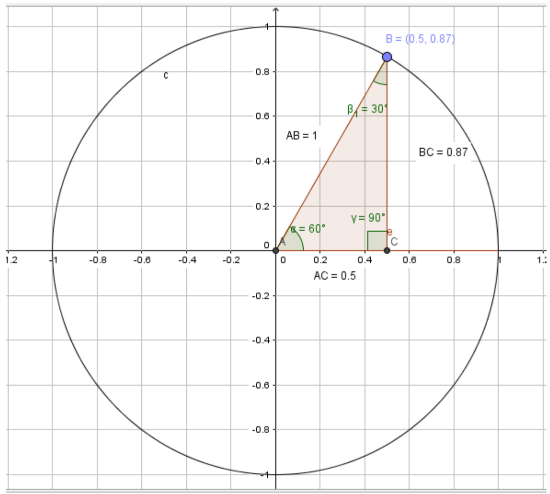
* Marcar con un punto la intersección entre el eje horizontal y la recta perpendicular. Ya puedes formar un segmento desde el origen hasta este punto formado.

*Termina de completar los segmentos que forman al polígono de tres lados

* Ya tienes los tres segmentos del polígono ubicados en el plano cartesiano, ahora emplear la herramienta polígono para completar la figura. Y con ello formar un triángulo rectángulo inscrito en la circunferencia de radio igual a uno.

*Emplea la herramienta ángulo para formar los ángulos internos y que se pueda monitorear cada valor, para modificar características ir a la pestaña propiedades en cada pestaña se muestran atributos que podrás visualizar de acuerdo a las necesidades. Seleccionar la opción ángulo entre 0° y 180 °

*Se le solicita que ubique el ángulo de referencia (α) el cual tiene el atributo de acuerdo a elección personal, de estar centrado en el origen. La siguiente imagen muestra la representación geométrica.

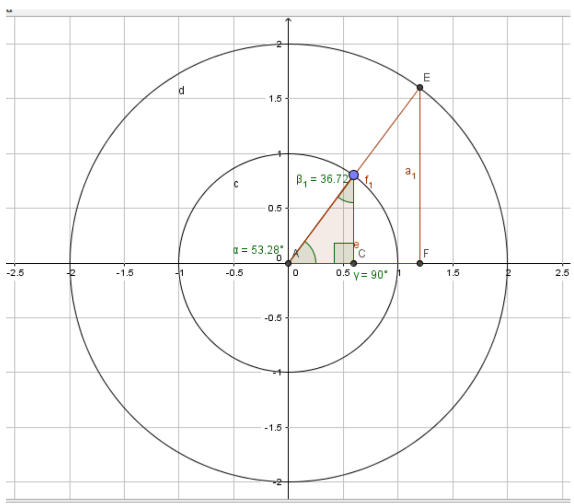


* Con el mismo esquema que se inicia, ahora se solicita que forme una circunferencia con radio igual a dos, centrada en el origen y la intención es formar un triángulo rectángulo semejante inscrito.

* Proyectar los segmentos de la primera representación, es importante hacer uso de trazos que garanticen la proyección

*Tomar como referencia el triángulo rectángulo inscrito en la circunferencia de radio igual a uno, se toma como base para dirigir el segmento hipotenusa, de tal manera que dos de sus vértices formen parte del lugar geométrico de la segunda representación, y posteriormente se solicita que proyecte los lados del triángulo a la circunferencia de radio mayor, para construir un triángulo rectángulo semejante.

* Sirva la siguiente representación como ejemplo



* Apoyándote de las herramientas de medición del programa, estima el valor de cada segmento

* Estima el valor del seno y coseno del ángulo de referencia para el triángulo de menor radio, repite el procedimiento para el triángulo de radio mayor

*Se concluye que invariantemente al radio de la circunferencia, el valor de las razones es el mismo para un determinado valor de ángulo.

* Una vez que se ha finalizado la construcción, se prosigue construir una tabla que relacione el valor de ángulo con la relación de los catetos, posterior a ello se enfatiza en la conversión de grados a radianes y se realiza la conversión de los ángulos propuestos, los resultados se escriben en la tabla.

Actividad principal
Hoja de trabajo

Sesión V

Nombre del (la) estudiante: ____________________ Fecha: ____________

Apartado I. Trabajar la definición de seno y coseno de un ángulo, para triángulos rectángulos formados en el primer cuadrante con circunferencias de diferente radio. Emplear la herramienta GeoGebra

1. Completa la siguiente tabla con datos obtenidos empleando la herramienta GeoGebra

	Triángulo rectángulo inscrito en circunferencia con radio igual a 1		Triángulo rectángulo inscrito en circunferencia con radio igual 2	
Medida del ángulo (grados)	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno	Razón trigonométrica seno	Razón trigonométrica coseno
15				
30				
45				
60				
0				
90				

2. ¿Qué pasa con las relaciones trigonométricas si se realiza la medición en un triángulo con radio diferente a uno?

3. ¿Debería cambiar el valor de estas razones para un triángulo inscrito de radio mayor a los analizados? Justifica tu respuesta

4. ¿Si los lados de los catetos son de diferente magnitud, porque resulta el mismo valor de las razones trigonométricas?

5. ¿Con los resultados obtenidos puedes obtener una conclusión?

6. Menciona algunas ventajas o desventajas que resultan del emplear la herramienta digital en comparación con el trabajo realizado en el diseño en campo para calcular las razones trigonométricas seno y coseno de un ángulo

Actividad principal
Ficha técnica

Sesión VI

Etapa I. A través de una construcción geométrica en el software GeoGebra el estudiante traza triángulos rectángulos sobre una circunferencia de radio igual a uno, de lo cual le pueda obtener datos que le permitan realizar un análisis de las relaciones trigonométricas seno y coseno, y poder emplear estos datos para construir el significado de función trigonométrica, a través de sus representaciones tabular y gráfica

Posibles obstáculos epistemológicos: conversión de grados a radianes, par ordenado, dominio y rango de una función, periodicidad de la función

Introducir el término radián como la medida de un ángulo central que interseca un arco s de longitud igual al radio del círculo.

La medida del ángulo se realiza en sentido contrario para valores positivos y el valor negativo del ángulo se considera en sentido a las manecillas del reloj

Para diferentes valores de alfa se estima el valor de la función seno y coseno

Que el estudiante observe donde la función tiene un valor de cero y uno y cuestionarle para que logre argumentar porque situación ocurre esto (en algunos triángulos el ángulo colapsa y no hay cateto opuesto o cateto adyacente)

Recuperar los valores de pares ordenados seno y coseno, colocarlos en una tabla en un archivo de GeoGebra, para poder construir la gráfica

Emplea las relaciones trigonométricas seno y coseno que ya previamente has abordado y toma como referencia el valor de cada ángulo, así como las medidas de los segmentos para determinar

Con esta tabla construir la gráfica del ángulo en radianes contra las funciones seno y coseno

Identificar la variable independiente y dependiente, qué valores toma cada una de ellas

Periodicidad de la función, identificar seno y coseno equivale a cero y uno

Si la gráfica se extiende hacia el lado negativo del origen, la función toma valores negativos

Porqué la amplitud de la función va desde menos uno hasta uno

Actividad principal
Hoja de trabajo

Sesión VI

Nombre del (la) estudiante: ___________________ Fecha: _______________

Apartado I. Determinar el valor de la función trigonométrica seno y coseno para ángulos notables y valores de ángulos orientados sobre los ejes coordenados

1. ¿Para qué valor de ángulo la función seno o coseno toma el valor de 1 y -1?

2. ¿Por qué el seno de cero es igual a cero? Argumenta tu respuesta

3. En que otros valores de ángulos el seno es igual a cero

4. ¿Por qué el coseno de cero es igual a uno? Argumenta tu respuesta

5. En que otros valores de ángulos el coseno es igual a cero

6. Completa el siguiente registro con ayuda de las construcciones geométricas que has realizado empleando el software GeoGebra. Realiza las conversiones a valor de radián

Angulo α (grados)	Ángulo α en radianes	Senα	Cosα	Par ordenado (ángulo radianes, seno α)	Par ordenado (ángulo radianes, coseno α)
0					
45					
90					
135					
180					
225					
270					
315					
360					

APÈNDICE D: HOJAS DE TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES

Para conocer los instrumentos de trabajo resueltos por los estudiantes, además encontraras los audios grabados en las sesiones, visitar el siguiente sitio web:

https://drive.google.com/drive/folders/1VmdO6aVK37RAk2UDvUZulJm0HMIyHg1S?usp=sharing