UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO

Área Académica de Matemáticas y Física
Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON MANIPULATIVOS FÍSICOS: DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

PRESENTA

Oscar Iram Aguirre Alvarez

Director

Dr. Aarón Reyes Rodríguez

Codirector

Dr. Carlos Arturo Soto Campos

Comité tutorial

Dra. Anna Tarasenko
Dr. Isidro Jesús González Hernandez
Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Dr. Carlos Arturo Soto Campos

Mineral de la Reforma, Hgo., México., marzo 2023

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
School of Engineering and Basic Sciences
Área Académica de Matemáticas y Física
Department of Physics and Mathematics

Mineral de la Reforma, Hgo., a 23 de febrero de 2023

Número de control: ICBI-AAMyF/156/2023
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

El Comité Tutorial de la tesis titulada **"Resolución de problemas con manipulativos fisicos: desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de secundaria"**, realizada por el sustentante **Oscar Iram Aguirre Álvarez** con número de cuenta **131690** perteneciente a la **Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Director

Dr. Carlos Arturo Soto Campos
Codirector

Dra. Anna Tarasenko
Miembro del comité

Dr. Isidro Jesús González Hernández
Miembro del comité

Ciudad del Conocimiento
Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: +52 (771) 71 720 00 ext. 2531
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx

Agradecimientos

A las acciones realizadas que me permitieron el privilegio de haber construido tanto durante estos años en compañía y apoyo de mis profesores, compañeros y familia. Mi cosmovisión ha evolucionado, los quiero.

Índice

Resumen

Uno de los problemas de aprendizaje más comunes, identificado por profesores de matemáticas de diversos niveles educativos, se refiere a la falta de comprensión que muestran los estudiantes respecto de los símbolos alfanuméricos, y a la escasa habilidad para operar con tales símbolos en la asignatura de álgebra. Al respecto, se ha reconocido que lo anterior se debe a que las aproximaciones tradicionales de enseñanza no siguen la ruta natural del aprendizaje, que va de lo concreto a lo abstracto. En México la introducción al pensamiento algebraico se realiza en el primer grado de Educación Secundaria, con ideas que son abstractas para los estudiantes, sin que estas tengan algún referente con un menor nivel de abstracción en el que se fundamenten significados asociados a los símbolos alfanuméricos.

El uso de la simbología alfanumérica para representar cantidades indeterminadas, al pasar del lenguaje común al lenguaje simbólico en problemas verbales, es uno de los primeros temas que se revisan al iniciar la Educación Secundaria. Sin embargo, el uso de literales, que representan cantidades indeterminadas, se lleva a cabo como una imposición, ya que no se proporciona un ambiente en el que exista una necesidad *genuina* para que los estudiantes representen números o cantidades indeterminadas mediante literales.

En esta tesis se analiza el efecto de un escenario instruccional que promueve los procesos de generalización y simbolización, a través de actividades de resolución de problemas con patrones y el uso de manipulables físicos, los cuales son elementos identificados en la literatura de investigación como medios adecuados para favorecer el desarrollo inicial de un pensamiento algebraico. Al tener que comunicar generalidades a otras personas, durante el trabajo con patrones, los estudiantes verán la necesidad de utilizar recursos simbólicos para expresar regularidades que aparecen al analizar casos particulares de configuraciones construidas con materiales manipulativos.

Abstract

The most common difficulties related to algebraic thinking, identified by many mathematics teachers in different levels, have to do with a lack of meaning for alphanumeric symbols in the students' eyes and their poor ability to operate such symbols. In this regard, it has been recognized that these problems are rooted on traditional didactical approaches, which do not follow the natural path of learning from concrete ideas to abstract thinking. The introduction to algebraic thought usually begins with ideas that are too abstract for the students, without any concrete reference for algebraic symbols.

Using alphanumeric symbols to represent general quantities during word problems is one of the first topics reviewed in secondary school (grade 7). But in such tasks algebraic notation is identified by students as an external imposition, since instructional settings do not provide an environment in which they have a genuine need to represent those indeterminate numbers or quantities.

This research seeks to analyze the effects of a scenario in which activities involving patterns are considered to be appropriate means to favor the development of both generalization and abstraction processes. Additionally, by having to communicate these aspects to other people, students will understand the need to use symbolic means that express regularities and generalizations obtained by considering particular cases and identifying common aspects that appear in configurations that are constructed from either physical or virtual manipulative materials.

Capítulo 1. El problema de investigación

1.1. Introducción

El objetivo fundamental de la investigación en educación matemática es aportar principios teóricos y prácticos que apoyen el trabajo de los docentes. Particularmente, se busca proponer elementos que apoyen el diseño de tareas y escenarios de instrucción para fomentar un aprendizaje matemático con entendimiento (Hiebert et al, 1997). En esta tesis, consideramos al *entendimiento* como una característica deseable del conocimiento que los estudiantes construyen, al interactuar con objetos matemáticos; sin embargo, puede haber otras características del conocimiento igualmente deseables, tales como un *aprendizaje significativo* (Ausubel, 1977, 2000), *entendimiento relacional* (Skemp, 1978), *razonamiento creativo* (Jonsson, et al., 2014), un *aprendizaje memorístico*, entre otros.

Desde una perspectiva epistemológica constructivista, los estudiantes construyen conocimiento al interactuar con los objetos matemáticos, independientemente de la presencia de un escenario instruccional formal y, por lo tanto, la construcción de conocimiento también es independiente de la presencia de un docente o algún otro agente didáctico. El aprendizaje es producto de los procesos de re-equilibración de las estructuras cognitivas, las cuales fueron desequilibradas por una situación problemática, la cual no pudo asimilarse a los esquemas mentales de una persona (Piaget, 1977). Por lo expresado anteriormente, las acciones didácticas que los profesores llevan a cabo no pueden influir en la construcción de conocimiento, más bien, modifican las características de dicho conocimiento.

Desde una perspectiva de resolución de problemas se busca que los estudiantes desarrollen formas matemáticas de pensar. Particularmente, el *Plan y Programas de Estudio de Secundaria* (SEP, 2017) establece como objetivo desarrollar un pensamiento matemático para resolver problemas. *Pensar matemáticamente* involucra, entre otras cosas: (a) seleccionar y representar información, (b) identificar relaciones entre datos e incógnitas, (c) considerar casos particulares; (d) reconocer y generalizar patrones, (e) formular conjeturas, (f) construir justificaciones, (g) comunicar resultados, (h) plantear nuevos problemas (Barrera et al., 2021). Además, es importante que los estudiantes desarrollen una actitud científica, lo cual implica capacidad para cuestionar, habilidad para buscar información y formarse criterios propios, ser inquisitivo, así como capacidad para construir argumentos y fundamentarlos con evidencia empírica.

A pesar de que en los planes y programas de estudio de secundaria se especifica la importancia de construir formas matemáticas de pensar desde una aproximación de resolución de problemas (SEP, 2017), la experiencia profesional nos ha permitido notar que los contenidos realmente se abordan desde aproximaciones didácticas tradicionalistas, las cuales priorizan la memorización de contenidos; así como el desarrollo de fluidez para aplicar algoritmos y procedimientos rutinarios, sin importar si los estudiantes comprenden las relaciones o conexiones involucradas (Larbi y Marvis, 2016; Morales, 2004). Estas aproximaciones instruccionales están basadas en un aprendizaje por recepción (Ausubel, 1977, 2000) y en la exposición magistral como metodología de enseñanza, cuyos fundamentos filosóficos son empiristas y conductistas. Desde una perspectiva tradicional de enseñanza se considera que los errores cometidos por los estudiantes constituyen fallas del proceso instruccional atribuibles solamente a ellos (Reyes et al., en prensa).

En contraste, destacados matemáticos como Polya (1963), Halmos (1994), Hadamard (1945), entre otros, consideran que la mejor forma de aprender algo es descubriendolo por uno mismo. En este sentido, desde una aproximación didáctica de resolución de problemas se privilegia un *aprendizaje por descubrimiento* (Barrera, et al., 2021). El error es parte natural del proceso de aprendizaje, y constituye una oportunidad para aprender, la retroalimentación que proporciona un docente tiene la finalidad de indicar una ruta de mejora, no criticar ni calificar el conocimiento de un estudiante. Una perspectiva instruccional basada en la resolución de problemas, con material manipulable, puede apoyar el desarrollo de niveles progresivos de abstracción y generalización porque permite a los estudiantes ver y tocar "el problema" mientras asocian a este con un "modelo" concreto (Kelly, 2006).

Existen numerosas definiciones de manipulativos; Kennedy (1986), por ejemplo, los concibe como "objetos que impactan a varios sentidos y que los niños pueden tocar, mover, reorganizar y manipular" (p. 6). Por otra parte, Smith (2005) considera que son objetos físicos que se usan como herramientas de enseñanza para involucrar a los estudiantes en el aprendizaje experiencial. Así, los manipulativos son materiales que los estudiantes pueden usar para dar sentido a conceptos matemáticos, apoyando la construcción de significado mediante referentes "concretos" (Larbi y Mavis, 2016). En Educación Matemática los Manipulativos son conceptualizados por Bartolini y Martignone (2014) como "artefactos utilizados en la educación matemática: los estudiantes los manipulan para explorar, adquirir o investigar conceptos o procesos matemáticos y para realizar actividades de resolución de problemas basándose en elementos perceptibles visuales, táctiles o sensoriales" (p. 365).

Otros autores definen a los manipulativos como objetos que pueden ser manejados por un individuo de una manera consciente, buscando fomentar el pensamiento matemático, estos tienen el potencial de conducir a un desarrollo de ideas o conceptos matemáticos, y para cumplir con este fin deben estar pensados y diseñados para abordar contenidos específicos de la materia (Swan y Marshall, 2010). Bouck y Flanagan (2010) indican que los manipulativos matemáticos son objetos físicos que los estudiantes pueden manipular para explorar e identificar relaciones, regularidades y patrones. Los manipulativos más comunes, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas incluyen, sin que la lista sea exhaustiva: regletas de Cuisenaire, geoplanos, tangrams, figuras geométricas bi y tri dimensionales, ábacos, reglas, escuadras, compases, dados, perinolas, ábacos neperianos, bloques lógicos de Dienes, pantógrafos, pattern block, unifix cubes, teselas algebraicas, torres de Hanói, entre otros, ver Tabla 1.

Tabla 1. Algunos manipulativos físicos y su utilidad en el aprendizaje de matemáticas.

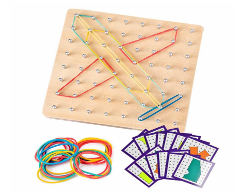
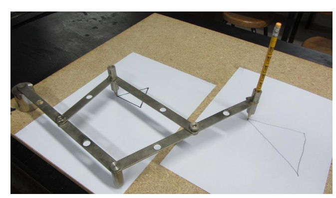
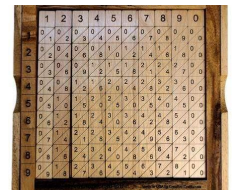
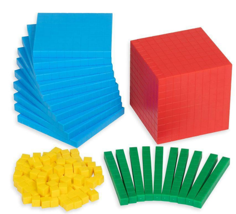
Manipulativo	Utilidad	Imagen
Geoplano	Conceptos geométricos, como área y perímetro, teorema de Pick	
Regletas de Cuisenaire	Suma, resta, multiplicación y división Fracciones Potencias Algunos casos del teorema de Pitágoras	
Bloques de Dienes	Identificar figuras geométricas por sus características y propiedades Clasificar y comparar reconocer variables en elementos de un conjunto.	
Tangram	Introducir conceptos de geometría plana	
Pantografo	Formulación, construcción y comprensión de conceptos geométricos, específicamente el concepto de semejanza	
Dados	Suma, resta, multiplicación y división Cálculo mental Fracciones Estadistica Probabilidad	

Tabla 1. (continuación).

Perinolas	Suma, resta, multiplicación y división Cálculo mental Fracciones Estadistica Probabilidad	
Ábaco neperiano	Dispositivo en el que los productos se reducen a operaciones de suma y los cocientes en restas	
Pattern blocks	Desarrollar habilidades de razonamiento espacial Componer y descomponer Simetría Patrones Tres dimensiones	
Unifix/Snap Cubes	Conteo, cantidad Suma, resta, multiplicación y división Fracciones	
Bloques de base 10	Visualizar de forma concreta, el sistema de numeración decimal Suma, resta, multiplicación y división	
Teselas algebraicas	Factorización Representaciones equivalentes Áreas	

Fuente. Elaboración propia.

Los manipulativos virtuales son representaciones de objetos físicos que se pueden rotar, voltear, agrandar en la pantalla de una tableta, smartphone o la computadora. Su finalidad es apoyar el aprendizaje de una amplia gama de conceptos matemáticos. Los manipulativos virtuales incluyen bloques de base 10 para aprender aritmética, conos, cilindros, bloques y esferas tridimensionales para aprender propiedades geométricas y gráficos bidimensionales para aprender propiedades de ecuaciones o funciones (Satsangi et al., 2018).

Una amplia variedad de manipulativos virtuales se pueden encontrar en la página web de la *National Library of Virtual Manipulatives* (http://nlvm.usu.edu/), desarrollados por la Utah State University. También se destacan los manipulativos virtuales elaborados por el National Council of Teachers of mathematics de los Estados Unidos (https://illuminations.nctm.org/) o por la comunidad de GeoGebra (https://www.geogebra.org), donde diversos usuarios contribuyen en la creación de los manipulativos (e.g. https://www.geogebra.org/m/NPDu3rCm). Otros sitios de manipulativos virtuales son: *The Math Learning Center* (https://www.mathlearningcenter.org/apps), *Mathigon* (https://es.mathigon.org/), entre muchos otros. También hay cuentas de twitter (e.g. @ManipulayAprend) y sitios web en los que es posible encontrar información respecto al uso de manipulativos físicos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (e.g. https://bit.ly/3tqqte1).

En esta tesis se aborda el problema general de identificar cómo una aproximación didáctica de resolución de problemas, basada en actividades con patrones y manipulativos físicos, puede apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico. Este problema es relevante porque en el pensamiento algebraico existen fenómenos que no tienen paralelo en aritmética; por ejemplo, en álgebra, dada la indeterminación de las literales es posible sustituir una literal por otra, lo cual no es posible en aritmética, ya que en aritmética un número no se puede reemplazar por otro diferente. Existen múltiples problemáticas asociadas con el desarrollo del pensamiento algebraico, entre ellas: dar sentido a los símbolos, desarrollar fluidez para operar los símbolos; habilidad para resolver ecuaciones lineales, cuadráticas, sistemas lineales, entre otros (Enfedaque, 1990).

Dado que no es posible abordar todas las problemáticas asociadas con el aprendizaje del pensamiento algebraico en un solo trabajo, esta tesis se centrará en cómo la resolución de problemas de patrones, con uso de manipulativos físicos, puede ayudar a dar sentido a los símbolos y, en general a desarrollar elementos básicos del pensamiento algebraico (Radford, 2010) en estudiantes de secundaria. El uso de manipulativos permite seguir la ruta natural de aprendizaje, que consiste en ir de lo concreto a abstracto (Piaget, 1977), a diferencia de lo que ocurre en las aproximaciones didácticas tradicionales las cuales inician con elementos que son abstractos para los estudiantes (Bruins, 2014; Witzel, 2005). En las aproximaciones didácticas tradicionales se introduce el uso de literales para representar cantidades indeterminadas, en las tareas que requieren pasar del lenguaje común al lenguaje simbólico, como una imposición y no como una auténtica necesidad.

La problemática básica relativa al pensamiento algebraico consiste en dar sentido o significado a las literales, y para lograr este objetivo, las actividades con patrones son útiles, ya que permiten al estudiante identificar regularidades en lo concreto, que posteriormente se generalizan y abstraen, de modo que los símbolos para representar cantidades indeterminadas tienen un referente con un menor nivel de abstracción. Además, la necesidad de comunicar a otros esas regularidades constituye un escenario genuino para usar literales como medio para representar cantidades o números indeterminados.

Argumentamos que el uso de materiales manipulables puede mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas; particularmente porque el uso de tales manipulativos es útil para fundamentar el entendimiento (Witzel y Allsopp, 2007). A pesar de lo anterior, se reconoce que los manipulativos no representan una fórmula mágica, ya que “la comprensión no viaja a través de la punta de los dedos subiendo por el brazo” y que “las ideas matemáticas no residen en materiales de plástico” (Ball, 1992, p. 47).

En la literatura especializada se especifican ciertas condiciones para incrementar la efectividad de los manipulativos, entre las cuales se destaca que: (a) los estudiantes conecten adecuadamente el trabajo con manipulativos con las ideas matemáticas que estos materiales representan; (b) el tiempo de uso sea suficientemente amplio, pero no excesivo; (c) los estudiantes desarrollen representaciones más abstractas a partir del trabajo con manipulativos. Otros autores consideran que un resultado positivo al usar material manipulable requiere de: (a) ligar los conocimientos previos con los nuevos conceptos, (b) enfatizar la comunicación verbal de resultados, y (c) promover experiencias multisensoriales (Witzel y Allsopp, 2007). Los estudiantes construirán representaciones mentales robustas para dar sentido a los conceptos en la medida que los manipulativos, físicos o virtuales, se conectan adecuadamente con el concepto matemático que representan (Boulton-Lewis et al., 1997).

1.2. Revisión de la literatura

En esta sección se realizó una revisión de artículos de investigación que abordan cómo el uso de manipulativos puede promover el desarrollo de un pensamiento algebraico. La revisión tiene la finalidad de reconocer algunos problemas de investigación, así como las perspectivas teóricas y metodológicas utilizadas, además de los resultados obtenidos. A partir de la revisión, el problema de investigación se enmarca en el cuerpo de conocimientos existentes respecto del tema, y se determina cuál es su potencial contribución al saber científico actual.

Boulton-Lewis et al. (1997) analizaron la contribución de manipulativos físicos en el aprendizaje de ecuaciones de primer grado. El análisis de los datos se basó en *Teorías de Carga Cognitiva* (Cognitive Load Theories), las cuales analizan la *carga de procesamiento* impuesta por las representaciones utilizadas. Según la teoría, el material manipulable reduce el esfuerzo de aprendizaje y facilita el logro de niveles superiores de abstracción. Si los estudiantes no conocen bien las representaciones, símbolos y procedimientos asociados, estos impondrán una mayor carga cognitiva. Por otra parte, si los profesores no son conscientes de la carga de procesamiento, mediante sus acciones pueden disminuir la demanda cognitiva de una tarea. En la investigación participaron 21 estudiantes de octavo grado, de una escuela estatal suburbana de clase media, con altos estándares académicos. Se realizaron entrevistas individuales grabadas en video (30 minutos), antes y después de utilizar el material manipulable, además de grabaciones en el aula. Los objetivos de la investigación fueron: (a) analizar el entendimiento de los conceptos de variable y ecuación, (b) documentar las estrategias utilizadas, y (c) discutir los resultados con base en la carga cognitiva. Se obtuvo evidencia de que es importante aclarar a los estudiantes la función de los manipulativos para lograr el desarrollo de nuevos conceptos y procedimientos. Además, es importante que las tareas sean problemas, en caso contrario, el estudiante realiza operaciones aritméticas mentalmente, en vez de usar los manipulativos.

Burns y Hamm (2011) se interesaron en comparar el efecto de manipulativos físicos y virtuales en la comprensión matemática de estudiantes de primaria. Los participantes en su investigación, quienes contaron con la autorización expresa de sus padres o tutores, estaban inscritos en una escuela grande de una comunidad suburbana. El marco conceptual se basó en constructos de Piaget, Brunner y Skemp, quienes consideran que el desarrollo conceptual sigue una ruta que parte de experiencias concretas (sensoriales) que continúa con formas representacionales cada vez más abstractas. Se utilizó un quasi-experimento basado en un diseño pretest-postest. Los estudiantes se organizaron aleatoriamente de la siguiente forma: 42 estudiantes (23 hombres y 19 mujeres) usaron manipulativos virtuales, mientras que 49 estudiantes (28 hombres y 21 mujeres) usaron manipulativos físicos para abordar el tema de fracciones. Por otra parte, 18 estudiantes (10 hombres y 8 mujeres) usaron manipulativos virtuales y 20 estudiantes (10 hombres y 10 mujeres) utilizaron manipulativos físicos para estudiar el concepto de simetría. Los datos se analizaron estadísticamente, obteniéndose que el tipo de manipulativo no aportó diferencias significativas en el aprendizaje de los estudiantes.

García et al. (2016) elaboraron una propuesta de enseñanza de ecuaciones lineales con balanzas de acrílico. El diseño de la investigación se basó en un estudio de casos, donde participaron cinco parejas de estudiantes de una secundaria pública de Sonora, México. Las tareas se implementaron durante cinco sesiones de trabajo, de tres horas cada una. Estas sesiones se grabaron en video y se recopilaron producciones escritas elaboradas por los estudiantes. Los datos se analizaron con base en los registros de *representación semiótica* de Duval, considerando la articulación de los registros: (a) verbal, (b) tabular, (c) gráfico y (d) algebraico. Los resultados aportan evidencia de que la balanza fue un recurso que incidió positivamente en el aprendizaje de las ecuaciones lineales con una incógnita.

Larbi y Mavis (2016) buscaron determinar la eficacia del material manipulable en el entendimiento de la propiedad distributiva de la suma sobre el producto (factorización). Participaron 56 estudiantes de dos escuelas secundarias en Ghana. Se implementó un quasi-experimento basado en un diseño pretest-postest con un grupo experimental y uno de control. Se enseñaron las mismas unidades de álgebra a cada grupo durante cuatro semanas. Un grupo utilizó unas teselas algebraicas y con el otro se empleó el método expositivo convencional. El marco conceptual se integró con los métodos de enseñanza denominados enfoque de *transmisión* e *interactivo* (Fletcher, 2009). Los datos se analizaron mediante estadísticas descriptivas y la prueba *t* de independencia. Los resultados aportan evidencia de que los estudiantes que utilizaron manipulativos se desempeñaron mejor respecto de los estudiantes del grupo de control. Así, los datos indican que las teselas algebraicas contribuyen al desarrollo del pensamiento algebraico, particularmente, apoyan el entendimiento de la factorización de expresiones algebraicas.

Recientes investigaciones han explorado el efecto de utilizar manipulativos físicos representados y ligados digitalmente, sobre el pensamiento algebraico. En uno de tales trabajos (Reinschlussel et al., 2018) los estudiantes manipularon bloques físicos que representan números o variables, los cuales al colocarse en una pantalla sirven como entrada para un sistema digital. Los participantes fueron 12 estudiantes de secundaria

(14-16 años), con desempeño bajo en álgebra, quienes trabajaron en parejas. Todas las sesiones se grabaron en video (una cámara por pareja). El marco de investigación se construyó a partir de ideas de Bruner y Montessori, quienes argumentan que el uso de objetos físicos permite a los estudiantes abstraer e interiorizar las ideas que se representan con estos. Se concluye que desarrollar un sistema de instrucción que combina materiales físicos y un ambiente digital plantea desafíos tales como la disponibilidad de espacio de pantalla o que los tangibles oculten el contenido de la pantalla. Hay diferencias en términos de interacción física y un sistema combinado, lo que implica un reto al diseñar materiales físicos y virtuales que se vinculen correctamente y no creen confusiones en el usuario.

Satsangi et al. (2018) llevaron a cabo una investigación para determinar el efecto de manipulativos virtuales sobre el entendimiento de estudiantes, con dificultades de aprendizaje, respecto del tema de ecuaciones lineales. En la investigación participaron tres estudiantes hispanos de noveno grado de una institución pública en un área suburbana en los Estados Unidos, con una matrícula de aproximadamente 1900 estudiantes, con predominio de estudiantes hispanos (44%). Todas las sesiones de trabajo se llevaron a cabo durante en sesiones de entre 20 y 30 minutos. El estudio (11 semanas) se estructuró en tres fases: referencia, intervención y mantenimiento. Después de una evaluación diagnóstica los estudiantes ingresaron a la fase de referencia donde resolvieron 10 ecuaciones lineales sin ayuda. Después los investigadores enseñaron a cada estudiante cómo resolver ecuaciones lineales usando una balanza virtual. Todos los estudiantes tuvieron un mejor desempeño al resolver ecuaciones lineales mediante los manipulativos virtuales, en comparación con su desempeño en la fase de referencia.

Otras investigaciones han buscado comprender cómo es que los manipulativos influyen en las estrategias para resolver problemas. Por ejemplo, Pires et al. (2019) propusieron una actividad enfocada en componer y descomponer conjuntos, con la idea de fomentar la comprensión de la numerosidad. Este estudio cuantitativo se basó en un diseño cuasi-experimental. Participaron 64 niños de una escuela pública urbana en Uruguay, de nivel sociocultural medio-alto. Los estudiantes se dividieron en tres grupos: control (CO), interacción virtual (VI) e interacción tangible (TI). El estudio se desarrolló en tres fases: (1) pre-test, (2) intervención didáctica con una duración de 13 días y (3) post-test. Se registró la cantidad y el tipo de bloques que los alumnos utilizaron al resolver los problemas. El marco de investigación se integró con ideas de Montessori y Cuisenaire quienes argumentan que los manipulativos físicos ayudan a comprender los conceptos abstractos mediante operaciones perceptivas no verbales que posteriormente se convierten en símbolos y asociaciones abstractas. Se destaca que los grupos TI y VI difirieron significativamente en el número de bloques utilizados. El grupo VI empleó significativamente menos bloques. Los niños del grupo TI optaron por componer números usando combinaciones variadas, usando más estrategias de composición, lo cual sugiere que los objetos físicos desencadenan el uso de soluciones diversas, generan mejores experiencias de aprendizaje de la numerosidad y fomentan el sentido numérico.

En la línea de investigación orientada al aprendizaje de ecuaciones de primer grado Quispe (2019) buscó determinar si el manipulativo “Bloques Matemáticos” apoya la comprensión de ecuaciones lineales de primer grado en estudiantes de secundaria. Se empleó un quasi-experimento con un diseño pretest-postest. Los participantes fueron dos grupos de estudiantes de tercero de secundaria (12 y 14 alumnos), inscritos en una escuela urbana de nivel socioeconómico medio en Bolivia. El marco de investigación se integró por el concepto de *aprendizaje significativo* de Ausubel (1977, 2000); además de ideas de Piaget y Vygotsky. Se concluye que el uso de los manipulativos mejoró el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado.

Otten et al. (2019) llevaron a cabo una revisión de la literatura referente al uso de balanzas como modelo para enseñar ecuaciones lineales. La revisión tuvo la finalidad de identificar *por qué* se usa el modelo, *qué* modelos se usan, *cuándo* se usan y *qué* resultados de aprendizaje están asociados con su uso. Se revisaron 34 artículos de 22 revistas, obtenidos de una selección inicial de 93 revistas científicas en inglés, evaluadas por pares.

La revisión mostró que el modelo de balanzas, aparentemente simple, es en realidad una herramienta didáctica compleja sobre la que se desconocen muchas cosas; por lo que se necesita investigación adicional para tomar decisiones instruccionales informadas, que permitan determinar en qué contextos y bajo qué condiciones es apropiado usar estos manipulativos en la enseñanza de las ecuaciones lineales.

Algunas investigaciones se han enfocado en los *Manipulativos Tangibles* (MT), los cuales constituyen una combinación de manipulativos físicos y virtuales (Lehtonen et al., 2020). Se diseñó, implementó y evaluó un prototipo de MT denominado *X-is* (bloques de base 10), como medio para apoyar a estudiantes de primaria en la solución de ecuaciones lineales. El marco se estructuró a partir de los siguientes constructos: (a) multimodalidad (tres modos de representación de Bruner); (b) *embodied cognition*, (c) *aprendizaje físicamente distribuido* (physically distributed learning); (d) *aprendizaje por descubrimiento* (discovery learning) de Bruner; y (e) la perspectiva sociocultural de Vygotsky. Los participantes fueron 12 estudiantes de cuarto grado, 12 de quinto, 35 de séptimo y 30 de octavo y noveno grado de una escuela en Finlandia. Además, se incluyó a: (a) un maestro de primaria con experiencia docente entre 10-11 años que había usado moderadamente manipulativos, (b) tres maestros de matemáticas de secundaria con experiencia entre 10 y 27 años; y (c) un maestro de educación especial. Se formaron dos grupos (papel y lápiz vs. manipulativos tangibles). Se utilizó una metodología mixta que incluyó intervenciones de clase, pruebas en papel y lápiz, sesiones de pensar en voz alta (thinking aloud), cuestionarios y entrevistas. Los resultados indican que *X-is* apoyó el aprendizaje de los estudiantes en varios niveles y tuvo un impacto positivo.

El análisis de la literatura permitió identificar la existencia de múltiples investigaciones que apoyan el uso del material manipulable en el proceso de aprendizaje sobre pensamiento algebraico. Se observa que las propuestas donde se usan estos materiales no siempre son exitosas. La mayoría de las investigaciones relacionadas con el uso de manipulables se enfocan en la educación primaria; aunque hay algunas investigaciones que exploran el uso de manipulativos en secundaria, principalmente el uso de balanzas algebraicas para la solución de ecuaciones lineales (Witzel y Allsopp, 2007).

Esta tesis busca vincular el enfoque de resolución de problemas con el uso de manipulativos físicos, con el objetivo de identificar su efecto sobre el desarrollo de un pensamiento algebraico. En la Tabla 2 se resumen elementos relevantes de la revisión de la literatura con la finalidad de obtener una panorámica general del tipo de problemas de investigación abordados, así como los enfoques teóricos y metodológicos empleados para abordar tales problemáticas. En estas investigaciones predomina el uso de actividades con materiales manipulables y patrones, pero casi ninguna se enfoca en proporcionar referentes con un menor nivel de abstracción para la simbología alfanumérica. En todas las investigaciones revisadas, la simbología alfanumérica para representar relaciones entre cantidades indeterminadas se sigue presentando como una imposición para los estudiantes.

Tabla 2. Literatura referente al uso de manipulativos en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas.

Autores	Objetivo	Tema	Grado	Marco teórico/conceptual	Metodología
Boulton-Lewis et al. (1997)	Promover la construcción de significado para los conceptos de variable y solución de ecuaciones lineales	Ecuaciones lineales	Grado 8. Secundaria estatal suburbana de clase media, con altos estándares académicos	Teorías de carga cognitiva	Cualitativa. Entrevistas individuales, videos de interacción en clase. Se buscó identificar categorías en los datos usando el software NUD.IST
Burns y Hamm (2011)	Comparar efecto de manipulativos físicos y virtuales	Fracciones y simetría	Grados 3 y 4	Piaget, Brunner y Skemp. Desarrollo conceptual de lo concreto a lo abstracto	Quasi-experimento. Pretest-postest. Cuantitativa
Larbi y Mavis (2016)	Determinar la eficacia del material manipulable	Propiedad distributiva (factorización)	Secundaria	Enfoque de transmisión e interactivo propuestos por Fletcher	Quasi-experimento. Pretest-postest Cuantitativa
Garcia, Díaz y Vargas (2016)	Promover la comprensión mediante el uso de Balanzas físicas y virtuales	Ecuaciones lineales	Secundaria pública del estado de Sonora	Representaciones semióticas de Duval	Estudio de casos

Tabla 2. (continuación).

Autores	Objetivo	Tema	Grado	Marco teórico/conceptual	Metodología
Reinschlussel et al. (2018)	Vincular manipulativos digitales y concretos para potenciar el aprendizaje	Álgebra elemental	Secundaria, alumnos con dificultades para abordar álgebra	Ideas de Bruner y Montessori sobre la interacción con objetos físicos	Cuantitativa. Estudio de campo con videograbaciones de cada una de las parejas de estudiantes
Satsangi et al. (2018)	Determinar el efecto de manipulativos virtuales sobre el entendimiento de estudiantes con deficiencias de aprendizaje	Ecuaciones lineales	Noveno grado de una institución pública, de una ciudad en Estados Unidos	Estrategía de "enseñanza graduada" para alumnos con problemas de aprendizaje	Estudio estructurado en tres tres fases: referencia, intervención y mantenimiento
Quispe (2019)	Determinar si el manipulativo "Bloques Matemáticos" apoya la comprensión en estudiantes de secundaria	Ecuaciones lineales	Tercer grado de secundaria en una escuela de La Paz, Bolivia	Concepto de Aprendizaje Significativo de Ausubel. Constructivismo, Piaget y Vygotsky	Quasi-experimento. Pretest-postest
Pires et al. (2019)	Comprender la influencia de los manipulativos al desarrollar estrategias para resolver problemas.	Numerosidad composición aditiva, conmutatividad y asociatividad	Secundaria pública en Montevideo, Uruguay	Ideas de Montessori y Cuisenaire sobre el uso de objetos para comprender conceptos abstractos	Quasi-experimento. Pretest-postest. Cuantitativa
Otten et al. (2019)	Identificar *por qué*, *cuáles* y *cuándo* se utilizan los modelos de balanzas para la enseñanza de ecuaciones lineales	Ecuaciones lineales	Educación básica y media	Conceptos de igualdad asociados con la resolución de ecuaciones lineales	Selección y revisión de 34 artículos de literatura donde se involucró el uso de balanzas como enseñanza de ecuaciones lineales
Lehtonen et al. (2020)	Observar el funcionamiento del prototipo *X-is*; una combinación de manipulativos físicos y digitales usados en enseñanza matemática	Ecuaciones lineales	Cuarto, quinto, séptimo, octavo y noveno grado de una escuela de Finlandia	a) Sistemas de representación de Bruner b) Embodied Cognition c) Aprendizaje por descubrimiento de Bruner d) Perspectiva sociocultural de Vygotsky	Análisis de datos mediante métodos cuantitativos y cualitativos

Fuente: Elaboración propia.

1.3. Planteamiento del problema

Mediante la revisión de la literatura se identificó que pocas investigaciones se enfocan en construir referentes para los símbolos alfanuméricos que posean un menor nivel de abstracción. Así, consideramos fundamental el diseño de tareas que vinculen el enfoque de resolución de problemas con el uso de materiales físicos manipulables, de forma que se siga la ruta natural de aprendizaje que va de lo concreto a lo abstracto en álgebra.

1.3.1. Pregunta de investigación y objetivos

Dado las diversas dificultades que se encuentran en el aprendizaje del pensamiento algebraico, es importante abordar el problema básico de dar sentido a los símbolos a partir de actividades con material físico manipulable, con la finalidad de lograr que los símbolos alfanuméricos tengan un referente con un menor nivel de abstracción. Posteriormente, se pueden abordar otras dificultades relacionadas. Así, la pregunta de investigación que orientó esta tesis es: ¿Cómo puede apoyar la resolución de problemas con el uso de manipulativos físicos el desarrollo de elementos básicos del pensamiento algebraico en estudiantes de secundaria cuando abordan ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$?

Objetivo General

Determinar cómo una aproximación didáctica de resolución de problemas con el uso de manipulativos físicos permite que estudiantes de secundaria desarrollen elementos del pensamiento matemático.

Objetivos Específicos

- Implementar actividades de patrones en los que subyace ecuaciones de la forma $ax + b = c$ para identificar los aportes que el material manipulable utilizado para abordarlas otorga al pensamiento matemático de estudiantes de secundaria.

- Implementar actividades de patrones en los que subyace ecuaciones de la forma $ax + b = c$ para identificar las construcciones mentales y operatividad procedimental que desarrollan estudiantes de secundaria al abordar las tareas con material manipulable.

1.4. Justificación de la investigación

La realización de esta tesis resulta relevante porque el entendimiento de los símbolos y las representaciones abstractas es la base para la comprensión de diversos fenómenos naturales o sociales (Larbi y Mavis, 2016). Además, en secundaria es importante que los estudiantes sean capaces de resolver problemas que involucran el uso de símbolos algebraicos lo cual, a su vez, incluye: (a) identificar y discriminar entre cantidades concretas e indeterminadas, (b) representar simbólicamente relaciones entre dichas cantidades, (c) interpretar la igualdad como una equivalencia entre expresiones simbólicas, y (d) operar expresiones simbólicas para resolver problemas (SEP, 2017).

Vincular el enfoque de resolución de problemas y la implementación de material físico manipulable, puede brindar una oportunidad a la enseñanza para lograr que los estudiantes aprendan matemáticas con entendimiento y desarrollen formas matemáticas de pensar. Finalmente, la posibilidad de potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes que inician la educación secundaria (grado 7) es un aspecto que continúa generando interés en el campo de la educación matemática. En particular, las actividades que hacen uso de manipulativos físicos, así como la identificación y generalización de patrones son clave para promover el desarrollo de pensamiento algebraico en su fase inicial.

Capítulo 2. Marco de investigación

2.1. Introducción

En el capítulo se explica en qué consiste un marco de investigación, se exponen los diferentes tipos de marco y sus características. Además, se describe y justifica el marco conceptual de este trabajo, el cual está integrado por dos componentes, la primera de ellas enfocada en el diseño e implementación de tareas, y la segunda en constructos que permitieron analizar e interpretar la información empírica. Un constructo es una abstracción que no puede observarse directamente, pero que es útil para interpretar datos empíricos y para la construcción de teoría (Ary et al., 2009).

Una investigación científica debe estar sustentada en una estructura de ideas que oriente todas las fases del proceso de investigación, denominada marco de investigación. Un marco está formado por constructos (conceptos teóricos) que permiten fundamentar y justificar las acciones que se desarrollan durante la investigación. La rigurosidad de una investigación cualitativa generalmente se determina mediante la congruencia entre el marco de investigación, las preguntas, la metodología y los resultados (Bhattacharya, 2017).

Eisenhart (1991) ha identificado tres diferentes marcos de investigación: teóricos, prácticos y conceptuales. Un marco práctico es aquel que guía la investigación mediante lo que funciona. En este caso, el fundamento de la investigación es la experiencia práctica del investigador. Un marco práctico tiene la desventaja de ofrecer resultados sesgados, ya que no toma en cuenta otras perspectivas, y se restringe al conocimiento generado con base en la práctica profesional y en ocasiones con los puntos de vista ofrecidos por la opinión pública. Los marcos prácticos casi no se utilizan, porque sus resultados son muy limitados, ya que son aplicables solamente a situaciones locales en cuanto a circunstancias, condiciones y contexto, no son susceptibles de generalización (Einsehart, 1991).

Un marco teórico sigue los principios y procedimientos de una teoría formal de manera estricta. Si se utiliza este tipo de marco, el investigador debe seguir las formas de argumentación y experimentación aceptadas o prescritas por la teoría seleccionada. Una de las problemáticas más relevantes asociadas con un marco teórico es que los resultados son, generalmente, acomodados por el investigador al contexto de la teoría (Einsehart, 1991).

El tercer tipo de marco es el conceptual, que se caracteriza por integrarse mediante ideas o constructos de diferentes modelos o perspectivas teóricas, las cuales deben ser compatibles para permitir su integración en un todo estructurado. Un marco conceptual es flexible, porque puede adaptarse a las necesidades particulares de cada problema de investigación. Los marcos conceptuales integran constructos provenientes de distintas fuentes, así como resultados prácticos derivados de la experiencia personal del investigador o de investigaciones previas. Eisenhart (1991) argumenta que un marco conceptual es "una estructura esquelética de justificaciones, en lugar de una estructura esquelética de explicaciones" (p. 210). Un marco conceptual está integrado por argumentos que justifican *por qué* el investigador hace lo que hace. Algunos educadores matemáticos sugieren que estructurar el marco de una investigación en torno a más de una perspectiva teórica puede orientar y justificar, de mejor manera, las acciones ejecutadas en cada una de las diferentes fases del proceso investigativo (Barrera y Reyes, 2018).

2.2. Elementos del marco conceptual

El marco que sustenta esta tesis está integrado por dos componentes, una de ellas referida al diseño de tareas, adoptando a la resolución de problemas como aproximación didáctica; y la segunda está integrada por constructos relacionados con el pensamiento algebraico (Filloy y Rojano, 1989; Kieran, 1992; Radford, 2010). Esta segunda parte del marco tiene el objetivo de orientar el procesamiento e interpretación de la información empírica que permita responder a la pregunta de investigación.

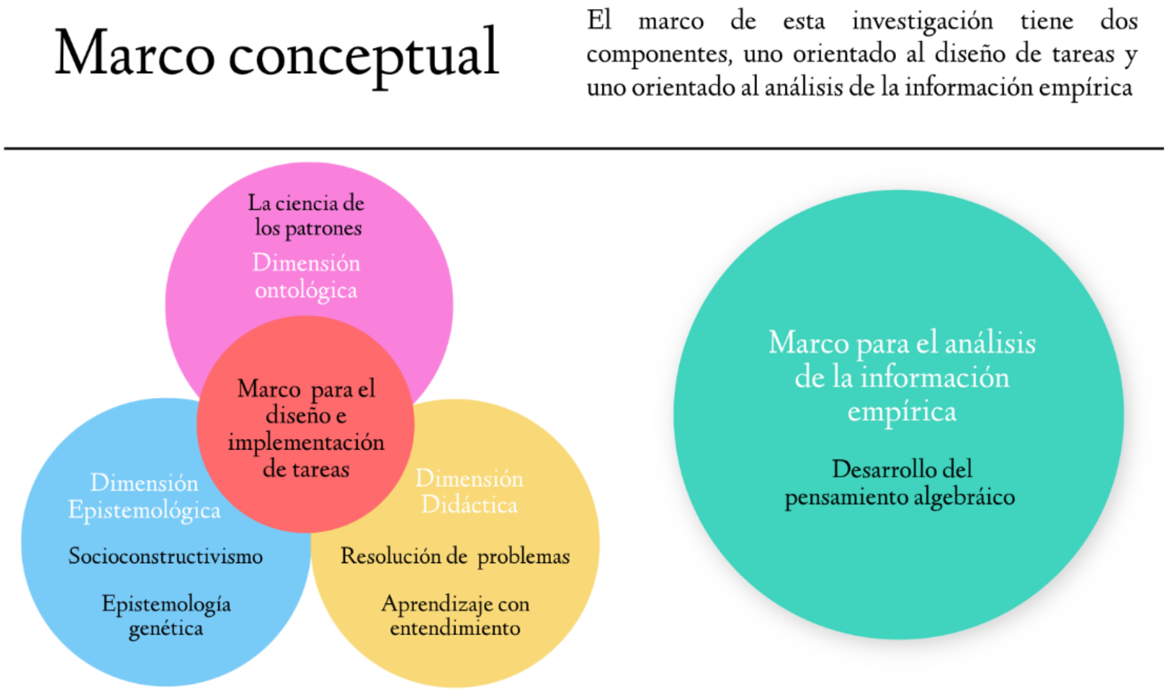


Figura 1. Representación gráfica del marco conceptual (elaboración propia).

2.3. Componentes para el diseño e implementación de tareas

Esta parte del marco se basa en la perspectiva de resolución de problemas como aproximación didáctica, y tiene la finalidad de orientar el proceso de diseño e implementación de las tareas. La dimensión didáctica permite establecer cuáles son las características del conocimiento o aprendizaje, que construyen los estudiantes, que consideramos adecuadas o deseables, así como los mecanismos y las estrategias didácticas que permiten lograr tales características. Esta dimensión se fundamenta y complementa, a su vez, en otras dos dimensiones, una dimensión ontológica y otra dimensión epistemológica. La dimensión ontológica incluye adoptar una posición respecto de lo que son las matemáticas, mientras que la dimensión epistemológica explica cuál es la postura que se adopta respecto de lo qué es el conocimiento y cómo se aprende matemáticas.

2.3.1. Dimensión ontológica

La ontología es una rama de la filosofía que estudia cuestiones relativas al “ser”. La ontología impacta en la educación matemática ya que el trabajo docente requiere de adoptar e idealmente, explicitar una postura respecto a qué consideramos como matemáticas y lo que significa aprender la disciplina. La pregunta ¿qué son las matemáticas?, es de carácter filosófico y por ello tiene una amplia gama de posibles respuestas. En un extremo de la gama, las matemáticas se conciben como una ciencia acabada, en la que no hay más por descubrir y dónde predomina el método deductivo. En el otro extremo, las matemáticas son la ciencia de los patrones; una ciencia cuyo objetivo es identificar regularidades en los números, en el espacio, en las formas, en el azar. Las teorías matemáticas explican las relaciones entre patrones produciendo estructuras duraderas, las aplicaciones matemáticas utilizan estos patrones para explicar y predecir fenómenos naturales, así como la creación y desarrollo de las herramientas que el ser humano construye día a día (Steen, 1988).

Considerar a las matemáticas como la ciencia de los patrones implica una posición didáctica en la que la enseñanza de las matemáticas debe ir más allá de aplicar reglas, fórmulas y procedimientos rutinarios. Se pretende que el estudiante desarrolle una forma de pensar que relaciones los objetos matemáticos con aspectos de la vida cotidiana, comprender y proponer diferentes representaciones, entender el porqué del funcionamiento y validez de los algoritmos y procedimientos rutinarios, además de comunicar ideas, establecer conexiones y formular nuevos problemas (Barrera y Reyes, 2018).

2.3.2. Dimensión epistemológica

La epistemología es la rama de la filosofía interesada en cuestiones sobre el conocimiento, sobre la generación y validación de éste. Para esta investigación los aspectos epistemológicos se articulan desde el socioconstructivismo y la epistemología genética de Piaget. La *epistemología genética* explica cómo se transita de un estado de menor conocimiento a un estado de mayor conocimiento. El ser humano posee dos funciones mentales primordiales: la organización y la adaptación. La organización está encargada de combinar, ordenar, recombinar y reordenar las conductas, sucesos y pensamientos en sistemas lógicos coherentes. La adaptación es el proceso mediante el cual se realizan ajustes o adaptaciones debidas al entorno (Woolfolk, 2010).

El pensamiento humano se organiza mediante estructuras mentales denominadas esquemas, las cuales son bloques de información respecto de ciertos objetos y acciones que se pueden ejecutar sobre estos objetos. Los esquemas nos permiten resolver problemas. Uno de los descubrimientos de mayor relevancia de Piaget es que la génesis de todo el conocimiento humano son los esquemas sensoriomotores; por ejemplo, las acciones de presionar y asir. Cuando un bebé percibe algo en la palma de su mano la cierra. A partir de este esquema sensoriomotor el bebé irá desarrollando nuevos esquemas, como el de tomar una sonaja para agitarla. Desde una perspectiva piagetiana, las experiencias concretas, permiten sentar las bases para desarrollar conceptos matemáticos abstractos.

La adaptación o ajuste se estructura a partir de cuatro procesos cognitivos donde el ser humano utiliza sus esquemas mentales para dar sentido a los fenómenos de su entorno (asimilación, acomodación, equilibrio o desequilibrio y reequilibración). La asimilación ocurre cuando una situación del entorno es perfectamente explicable o comprensible mediante alguno de los esquemas que el individuo posee, o haciendo pequeños cambios o variaciones a ese esquema, si el esquema, en su forma actual, permite afrontar la situación problemática se da un correcto sentido de equilibrio, ya que los procesos de organización y ordenamiento han sido efectivos. En caso que una situación problemática no pueda asimilarse a los esquemas, se genera un desequilibrio al no disponer de herramientas adecuadas para enfrentarla. El desequilibrio requiere crear nuevas estructuras mentales mediante un proceso de acomodación. La acomodación involucra crear, a partir de los esquemas existentes, un nuevo esquema que sea capaz de asimilar la información del problema que se presenta, si el nuevo esquema logra dar un sentido y resolver el problema, se habrá logrado un reequilibrio y, en consecuencia, la ampliación y mejoramiento de las estructuras mentales de la persona.

Así, Piaget sugiere que una oportunidad para el crecimiento cognitivo se presenta cuando nuevas experiencias o situaciones problemáticas no pueden enfrentarse usando los esquemas existentes. El impulso por recuperar el equilibrio da como resultado un mayor esfuerzo por encontrar una solución, lo que lleva a la acomodación de los esquemas existentes y la construcción de otros nuevos. Una de las principales implicaciones didácticas de la epistemología genética es que para favorecer y sustentar el proceso de desarrollo cognitivo resulta relevante crear deliberadamente oportunidades de conflicto cognitivo como una estrategia instruccional (Peled y Suzan, 2011).

El *socioconstructivismo* expresa que el conocimiento se construye mediante un proceso de interacción social entre las estructuras mentales de diversos individuos, de forma que el entorno aporta las herramientas culturales que moldean las características de dicho conocimiento (Woolfolk, 2010). Estas herramientas culturales, que pueden ser físicas o psicológicas (signos, símbolos, lenguaje), funcionan como mediadores entre el sujeto y el objeto del conocimiento. Lo anterior implica que la manera en que una persona construye conocimiento depende de las herramientas y las estructuras cognitivas que el individuo posee. Una de las premisas de una aproximación sociocultural es que “el pensamiento depende del habla, de los significados del pensamiento y de la experiencia sociocultural del estudiante” (Vygotsky, 1987, p. 120). Los estudiantes utilizan el lenguaje como herramienta mediadora en la resolución de problemas, permitiéndoles construir su propia comprensión del mundo físico y social. Se pretende dar cuenta de cómo los estudiantes utilizan las herramientas culturales; el lenguaje y el material manipulable (como producciones culturales) para moldear las características del conocimiento que se construye al abordar las tareas de instrucción.

La aproximación sociocultural de Vygotsky es relevante para este trabajo, particularmente el *principio de mediación instrumental*, el cual establece que todo acto cognitivo está mediado por el uso de herramientas e instrumentos, materiales o simbólicos, lo que trae como consecuencia, que el tipo de herramientas utilizadas durante el proceso de aprendizaje determinan las características del conocimiento construido (Moreno y Waldegg, 2002). El principio de mediación instrumental implica que no hay actividad cognitiva al margen de la generación y uso de representaciones. Así, las características de un nuevo conocimiento dependen de las representaciones que se utilizan durante el proceso de construcción.

2.3.3. Dimensión didáctica

La didáctica es una rama de la pedagogía que se interesa en las prácticas de enseñanza. A su vez, la enseñanza se refiere al conjunto de acciones encaminadas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes (Ball, 2008). La dimensión didáctica se refiere a crear condiciones para que los estudiantes *aprendan matemáticas con entendimiento* (Hiebert et al., 1997). Algunos autores como Uljens (1997) consideran que la didáctica es la ciencia de la enseñanza y el aprendizaje.

> La etimología de la palabra alemana y sueca *Didaktik* muestra que esta proviene del griego διδάσκειν (didáskein). En su forma activa se refiere a la enseñanza, presentación, clarificación, e instrucción. En su forma pasiva significa aprender, ser enseñando. Además, hay un significado intermedio del término; aprender por uno mismo, adoptar; es decir, *aus sich selbst lernen, sich aneignen*. Posteriormente, el sustantivo derivado del verbo διδαξής (didaxis), el cual significa enseñanza, instrucción. (Uljens, 1997, p. 31)

En el enfoque de resolución de problemas, como perspectiva didáctica, los contenidos matemáticos son un medio para generar situaciones problemáticas (y promueven un desequilibrio cognitivo) las cuales favorecen el desarrollo de aspectos esenciales del pensamiento matemático. Los elementos del pensamiento matemático incluyen explorar relaciones, modelar, buscar distintos procesos de solución, comprender y utilizar diferentes representaciones, formular conjeturas, comunicar resultados, plantear preguntas o interrogantes (Barrera y Reyes, 2018; Cai y Nie, 2007). Por otra parte, la función principal de un docente es guiar y apoyar la actividad de los estudiantes, particularmente al promover los procesos de reflexión y comunicación de ideas (Santos-Trigo, 2011); así como proporcionar sugerencias, en la forma de heurísticas, para ayudar a los estudiantes a superar posibles dificultades al enfrentar las situaciones problemáticas propuestas.

Uno de los objetivos de este trabajo es identificar elementos que ayuden a explorar y fomentar el entendimiento matemático de los estudiantes. Entender significa construir conexiones robustas entre un conocimiento nuevo y los esquemas mentales que se poseen, y que tienen lugar a partir de los procesos de reflexión y comunicación de ideas llevados a cabo durante la resolución de problemas (Hiebert et al. 1997). La construcción del entendimiento requiere que los estudiantes transiten reiteradamente por ciclos de cuatro etapas (acción, observación, formulación de conjeturas y justificación de resultados) no necesariamente secuenciales (Figura 2). En la fase de acción se identifican los datos relevantes y se representa física o mentalmente esta información, se comprenden símbolos y conceptos abstractos sólo después de experimentar las ideas en un nivel concreto (Woolfolk, 2010). En la fase de observación se reconocen las relaciones existentes entre los datos e incógnitas, creando un proceso de reflexión acerca de lo observado. En la fase de formulación de conjeturas, mediante la observación de regularidades, se pretenden generalizar los resultados. En la fase de justificación de resultados se deben comunicar, al contexto de aprendizaje, las conjeturas y los argumentos que las sustentan.

Figura 2. Ciclo para observar el desarrollo del entendimiento matemático (Téllez, 2020).

2.4. Marco para la construcción y análisis de los datos

En esta sección se describen los constructos que orientaron el proceso de transformar la información en datos y que permitirán el análisis de los mismos. Los constructos teóricos para lograr este fin se refieren a elementos centrales del pensamiento algebraico.

2.4.1. Pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico es una forma particular de pensar matemáticamente, Radford (2010) identificó tres elementos interrelacionados que distinguen al pensamiento algebraico. El primero se refiere a un sentido de indeterminación propio de objetos algebraicos (incógnitas, variables, parámetros, indeterminadas). En segundo lugar, se encuentra el manejo analítico de los objetos indeterminados, el cual se refiere a que se opera a los símbolos considerando que son conocidos tales valores con la finalidad de obtener condiciones necesarias y suficientes para su existencia, para posteriormente trabajar hacia atrás y encontrar los valores específicos. La tercera característica se refiere al modo simbólico para designar a tales objetos (verbal, alfanumérico, etcétera).

Dos constructos básicos para esta investigación son *sentido numérico* (number sense) y *pensamiento algebraico* (algebraic thinking), ya que la comprensión que un estudiante tiene sobre los números y las operaciones, así como la fluidez y flexibilidad para utilizarlos en la solución de problemas, es un antecedente indispensable para desarrollar los elementos básicos del pensamiento algebraico, que consisten en la capacidad para pensar acerca de cantidades indeterminadas, y sus diversas formas de representarlas (Radford, 2010).

Uno de los componentes fundamentales del pensamiento algebraico es la habilidad para generalizar resultados a partir de la observación de regularidades presentes en casos particulares. Los casos particulares suponen una primera instancia para comprender el comportamiento de los números y sus relaciones lo cual permitirá a partir de casos concretos, abstraer regularidades y generalizarlas (Butto y Rojano, 2010).

Es común que en la educación escolarizada el aprendizaje del álgebra inicie a partir de actividades de naturaleza algorítmica, donde se introduce simbología y reglas operativas de las representaciones alfanuméricas, las cuales parecen distintas de aquellas que se aplican a los números reales, a través de una imposición. Es decir, se hace una distinción entre la aritmética y álgebra lo cual provoca una separación artificial entre estas disciplinas, omitiendo el hecho de que en ambos casos, la operación de números tanto determinados como indeterminados, representados por literales, se lleva a cabo a partir de los axiomas de campo de los números reales (Barrera y Reyes, 2016; Molina et al., 2004).

En este sentido, el pensamiento algebraico constituye una forma particular de entender las matemáticas y de extender su conocimiento hacia la generalidad de fenómenos tal como lo hacen los matemáticos (Schoenfeld, 1994; Windsor, 2010). La población en general sostiene una concepción restringida en la que entender álgebra consiste en operar expresiones simbólicas. Un docente que sostiene esta concepción desconoce que este tipo de instrucción fomentará un entendimiento superficial del pensamiento algebraico. El entendimiento del álgebra requiere tiempo para desarrollarse y sobre todo que se propongan tareas que fomenten la observación de las relaciones numéricas, justificar procedimientos, modelar problemas, describir patrones y representar simbólicamente la generalidad (Kaput y Blanton, 2000).

Capítulo 3. Metodología

3.1. Introducción

Este trabajo se abordó desde un *enfoque cualitativo*, el cual se caracteriza porque la información recolectada consiste principalmente en palabras que expresan ideas o significados, aunque la información puede presentarse en forma de imágenes, dibujos, fórmulas, gestos, etcétera. La investigación cualitativa estudia los fenómenos en sus contextos o ambientes naturales; además es interpretativa, pues intenta encontrar sentido o significado a la información que proviene de un fenómeno (Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P., 2014).

La investigación cualitativa tiene diversas funciones, entre ellas apoyar la identificación de patrones de significado mediante los cuales se pueda entender un fenómeno y formular teorías iniciales, hipótesis o conjeturas sobre su funcionamiento. La investigación cualitativa desempeña un papel importante en el desarrollo científico, particularmente en la génesis de teorías porque emplea un enfoque inductivo (Trochim et al., 2016). En resumen, la investigación cualitativa permite capturar la riqueza de la complejidad de los fenómenos y profundizar en por qué las cosas funcionan como lo hacen, mediante la realización de indagaciones a profundidad a partir de unos pocos casos.

De acuerdo con Kazdin (2016), la investigación cualitativa es una aproximación a la experiencia humana centrada en: (a) narrativas, (b) descripciones, (c) interpretaciones, (d) contextos y significados. El objetivo general de la investigación cualitativa es describir, interpretar y comprender los fenómenos de interés. El proceso para lograr este objetivo consiste en estudiar y analizar con profundidad la experiencia contextualizada de los participantes, y transmitir cómo esa experiencia se siente, se percibe, y el significado que tiene para aquellos cuya experiencia se está describiendo.

3.2. Diseño de la investigación: no experimental (estudio de caso)

Un estudio de caso involucra un examen profundo de una sola o algunas pocas personas. El objetivo de un estudio de caso es proporcionar una descripción completa y precisa del caso. El beneficio principal de un estudio de caso es que describe detalladamente un fenómeno en forma contextual. Los estudios de caso requieren de un volumen considerable de información, de modo que las conclusiones están basadas en un conjunto amplio y detallado de información, en relación con los estudios de tipo experimental o quasi-experimental (Marczyk, 2005).

Para Kazdin (1982) las principales características de un diseño basado en estudios de caso son: (a) se estudia intensivamente un individuo, familia, grupo, o institución que pueda concebirse como una unidad; (b) la información se aporta en forma narrativa muy detallada; (c) se busca transmitir los matices del caso, incluidos contextos, influencias externas y detalles idiosincrásicos.

El diseño basado en estudios de caso no es nuevo, Wilhelm Wund consideraba que la investigación a profundidad de uno o unos pocos sujetos es adecuada para entender las sensaciones y percepciones; de forma que sus investigaciones se basaron en reportes introspectivos de procesos psicológicos. Otro ejemplo es el de Ebbinghaus, quien investigó sobre la memoria humana, con él mismo como sujeto de estudio. Particularmente, se interesó en el aprendizaje y la recuperación de sílabas sin sentido mientras alteraba las condiciones de entrenamiento (Kazdin, 1982, 2016).

De acuerdo con Stake (2005), cuando se decide estructurar una investigación como estudio de caso se está tomando una decisión con respecto a qué estudiar. Un médico estudia a un niño porque el niño está enfermo. Los síntomas del niño tienen un carácter tanto cuantitativo (temperatura, presión arterial) como cualitativo (coloración de la lengua, tipo de malestares). Los registros del médico respecto del estado de salud del niño son más cuantitativos que cualitativos. El trabajador social estudia al niño porque padece negligencia parental. Los "síntomas" de la negligencia parental tienen un carácter tanto cuantitativo (grado de desnutrición) como cualitativo (signos o señales de maltrato). Los registros que mantiene el trabajador social son más cualitativos que cuantitativos, así que la elección de un estudio de caso no determina si la investigación es cuantitativa o cualitativa.

Para Bassey (1999) hay al menos tres categorías de estudio de caso en la investigación educativa: (a) estudio de caso orientado a la búsqueda y validación de teoría (theory-seeking and theory-testing case study), (b) estudio de caso narrativo y panorámico (storytelling and picture-drawing case study) y (c) estudio de caso evaluativo (evaluative case study). Para este autor, el resultado de un estudio de caso orientado a la búsqueda y validación de teoría debe ser un argumento valioso y convincente que respalde una generalización difusa. Estas generalizaciones difusas aparecen a partir del estudio de las singularidades y típicamente argumentan que lo que se encontró en una singularidad es posible, probable, o improbable se encuentre en otras situaciones similares.

De acuerdo con Eisenhardt (1991), los casos múltiples son útiles para crear teoría porque permiten la replicación y extensión entre casos individuales, entendiendo el término replicación en el sentido de que los casos individuales pueden usarse para la corroboración independiente de proposiciones. Esta corroboración ayuda a los investigadores a percibir patrones más fácilmente y a eliminar asociaciones casuales, ya que al considerar diferentes casos es posible detectar aspectos complementarios de un fenómeno. Al integrar patrones individuales, el investigador puede dibujar una imagen teórica más completa de un fenómeno.

3.3. Diseño de las tareas

En esta sección se describen con detalle los procesos de diseño e implementación de cada una de las tareas que abordaron los participantes. También se explica cómo ambos procesos están basados en el marco conceptual correspondiente, justificando de la forma más detallada posible el por qué las cosas se hicieron como se hicieron.

Retomamos los lineamientos para el diseño de tareas propuestos por Castañeda (2021), los cuales están basados en tres dimensiones (ontológica, epistemológica y didáctica) consideradas en el marco conceptual. Para esta autora, cada tarea está integrada por cuatro elementos, (i) un objetivo instruccional; (ii) un problema base para orientar la actividad de los estudiantes; (iii) hipótesis sobre las rutas o caminos que podrían tomar los estudiantes al abordar las tareas y, finalmente, (iv) un conjunto de preguntas, mediante las cuales se estructuró la actividad que el instructor o docente llevaría a cabo para apoyar al estudiante en la resolución de problemas. A continuación, se describen las características consideradas para el diseño de las tareas (Castañeda, 2021):

1. Los *problemas base* de cada tarea representan un reto intelectual y no únicamente dificultades procedimentales o de cálculo. Los problemas base están orientados a que los estudiantes lleven a cabo, preponderantemente la identificación de patrones y de relaciones entre objetos matemáticos.

2. Tanto los problemas base como las preguntas utilizadas para apoyar la actividad del estudiante son útiles para promover los elementos del pensamiento matemático, así como el desarrollo de una actitud inquisitiva y favorecer el establecimiento de conexiones entre ideas y conceptos matemáticos. Al respecto, como los elementos del pensamiento matemático incluyen realizar observaciones, formular conjeturas y justificar resultados, en la mayoría de las tareas se está promoviendo el descubrimiento de relaciones nuevas para

los estudiantes, lo cual es congruente con el hecho de que la resolución de problemas es una aproximación didáctica basada en el descubrimiento.

4. Dado que consideramos que el aprendizaje es un proceso social, cuyas características están determinadas por las producciones culturales que se utilizan en una comunidad de práctica, y dentro de la cual se desarrollan significados o entendimientos considerados-como-compartidos. Además, se promovió el uso sistemático de manipulativos, como producciones culturales que permiten moldear las características del conocimiento que los estudiantes construyen.

5. Para organizar el proceso de instrucción se tomó como base el ciclo básico para observar el desarrollo de entendimiento matemático (Figura 2), el cual tiene una estrecha relación con el proceso de resolución de problemas (cuatro fases de Polya) y tiene como fundamentos, algunos elementos relacionados con la estructura y el funcionamiento del cerebro (Zull, 2002).

6. Se tomó en consideración el hecho básico de que el conocimiento se genera de lo concreto hacia lo abstracto, así que el ciclo básico para el desarrollo de entendimiento matemático inicial a partir de acciones que se desarrollan sobre los objetos matemáticos, considerando que lo concreto y lo abstracto son conceptos relativos que dependen de los conocimientos previos de las personas.

7. Se buscó que fuera posible resolver las tareas por diferentes rutas o caminos, ya que se ha reconocido que el identificar múltiples soluciones es fundamental para el desarrollo de conexiones matemáticas.

3.4. Descripción del material manipulativo

El material se diseñó pensando en fichas que pudiesen representar cantidades determinadas e indeterminadas, el material del cual están hechas es MDF (tablero de fibra de densidad media), de seis milímetros de grosor, cortadas con láser. Las usadas en este estudio son: representación de un valor indeterminado, una X color rosa por un lado y color azul por el otro; representación de unidades, círculos de un centímetro y medio de diámetro de colores rosa y azul; representación de signo de igual, de suma y resta, las formas convencionales de cada signo, de colores rosa y azul.

Imagen 1. Fotografía del material concreto manipulable diseñado y utilizado para la investigación.

3.5. Descripción de las tareas

Tal como se explica en el marco conceptual, el aprendizaje con entendimiento no se desarrolla de manera repentina, sino mediante el tránsito de ciclos sucesivos de acción, observación, formulación de conjeturas y justificación de resultados (Barrera y Reyes, 2016). Se diseñaron dos tareas, las cuales se implementaron con un equipo de tres alumnos de primer grado (11 años) de una escuela secundaria del municipio de Mineral de la Reforma, Hidalgo. Cada tarea se aplicó en una sesión de hora y media. Se proporcionó a los estudiantes una hoja de trabajo (donde se explican las acciones que los estudiantes deben llevar a cabo, y las preguntas que deben responder), y una ficha técnica al instructor (donde se proporcionan indicaciones y sugerencias para apoyar al docente quien implementa la tarea). Las hojas de trabajo de ambas tareas, así como la ficha técnica se encuentran en los apéndices B, C y D.

Imagen 2. Presentación del enunciado que expone el problema base de las tareas diseñadas.

El enunciado del problema base de ambas tareas es el siguiente: Tu mejor amiga dejó su mochila olvidada en tu casa, en la mochila vienen sus libretas y su celular. Tú sabes que ella tiene una conversación en WhatsApp donde ¡tu crush le confiesa cosas súper importantes sobre ti!, pero ella no quiere decirte lo que tu crush le ha contado. El teléfono tiene contraseña PIN, que es de cuatro dígitos, y para poder conocer este PIN existen instrucciones que tu amiga escribió en una libreta en caso de qué se le olvidara la contraseña, y, casualmente, ¡la libreta también está en su mochila!

3.6. Participantes en la investigación

Los tres participantes están inscritos en el primer grado (grupos diferentes a, b y c) de una misma secundaria general en el municipio de Mineral de la Reforma, en el estado de Hidalgo, México. El equipo conformado por los tres estudiantes fue el caso que se estudió en esta tesis. Cada estudiante tiene un profesor distinto en la asignatura de matemáticas. Por ser menores de edad, se solicitó por escrito la autorización a sus padres o tutores (el oficio de autorización se encuentra en el apéndice E) para que participaran en una actividad diseñada para el desarrollo del pensamiento algebraico. En el oficio de autorización que firmaron los responsables de los menores se comunicó que durante las filmaciones de audio o video, así como al recolectar las producciones escritas de los estudiantes, los nombres y rostros de los estudiantes quedarían omitidos para evitar el reconocimiento de los participantes o escuela de procedencia. También se informó que al ser una actividad extraescolar, esta no afectaría de forma negativa la evaluación o calificación de los estudiantes en alguna de sus materias. Las solicitudes de autorización firmadas se encuentran resguardadas por el instructor que implementó las actividades.

3.7. Proceso de implementación

Antes de la implementación final y con la finalidad de identificar las ventajas y desventajas de la tarea, se implementó con una estudiante de quinto grado de primaria, quien no había revisado de forma previa ideas relacionadas con el pensamiento algebraico (se describe la actividad en el apéndice F). Después de la aplicación preliminar de la tarea, el diseñador contó con observaciones de un educador matemático, con 13 años de experiencia, sobre la pertinencia de algunos enunciados en las hojas de trabajo y actitudes del instructor quien implementó la actividad (se presenta la primera versión de la tarea en el apéndice A).

La implementación final se llevó a cabo en dos sesiones de una hora y media cada una, de manera presencial en un aula de matemáticas. El propósito de la actividad fue observar y analizar la pertinencia de la actividad al buscar que los estudiantes desarrollaran algunos elementos del pensamiento algebraico y, más generalmente, que aprendieran matemáticas con entendimiento. El trabajo tanto de los alumnos como del instructor se orientó a partir de las hojas de trabajo. El docente escuchó con atención los comentarios e ideas que los estudiantes expresaron.

La primera fase de la tarea tuvo el objetivo de explorar y lograr que los estudiantes construyan significados pertinentes asociados con el signo igual, representar un valor indeterminado, el concepto de números consecutivos y su posible generalización, así como el uso de la simbología algebraica para expresar una ecuación de la forma $ax + b = c$. La segunda fase de la tarea está diseñada con el objetivo de que los alumnos identifiquen qué indicaciones pueden realizar al trabajar con números indeterminados además den razón y sentido a las indicaciones que ellos mismos han identificado como coherentes y válidas al hallar el valor de una incógnita en una ecuación de la forma $ax + b = c$.

3.8. Instrumentos de recolección, procesamiento y análisis de la información

La información empírica de esta investigación se recolectó mediante grabaciones en video del proceso de resolución de problemas llevado a cabo por estudiantes de secundaria. Se contó además con las producciones escritas de los estudiantes. Posteriormente, los videos se transcribieron y a partir de dichas transcripciones es que se llevó a cabo el análisis de la información. El primer paso para la reducción de la información, consistió en subrayar en las transcripciones aquellos párrafos que proporcionan información respecto de la influencia de la aproximación de resolución de problemas y de los manipulativos físicos en los procesos cognitivos asociados con el pensamiento algebraico. La unidad de análisis fueron las líneas de texto de cada una de las transcripciones de los videos (estas se encuentran de forma digital en el apéndice G). Por otra parte, las categorías de análisis se determinaron a partir de los tres elementos básicos que constituyen el pensamiento algebraico: (1) sentido de indeterminación, (2) manejo analítico de los objetos indeterminados, y (3) modo simbólico de designar a los objetos indeterminados.

Capítulo 4. Resultados

En este capítulo se exponen los resultados derivados del análisis de la información empírica. Se describe cómo los estudiantes abordaron la tarea “El mensaje de tu crush” y se identifican los elementos del pensamiento algebraico que promovió el uso del material manipulable.

4.1. Primera sesión de la tarea “El mensaje de tu crush”

En esta sección se analiza con detalle cómo se llevó a cabo la primera etapa de la tarea, con el objetivo de observar las aportaciones de la resolución de problemas y el uso del material manipulable en el desarrollo de los elementos del pensamiento algebraico en alumnos de secundaria. Con este fin se identificaron categorías que permiten observar individualmente acciones o enunciados que pueden dar cuenta de la contribución que la tarea tuvo en el desarrollo de elementos del pensamiento algebraico en los estudiantes. Se hace una presentación de estas categorías y la evidencia empírica que sustenta las afirmaciones. Los tres estudiantes abordaron la tarea usando una hoja de trabajo y el acompañamiento del instructor. La primera sesión tuvo una duración de una hora y diecisiete minutos.

La tarea se diseñó con el objetivo de explorar las nociones que los estudiantes tienen sobre el signo igual, la idea de representar una valor indeterminado, el concepto de números consecutivos y su posible generalización, y al uso de la simbología algebraica para expresar una ecuación de la forma $ax + b = c$. Es importante mencionar que los números que se encuentran al final de los extractos de las transcripciones, indican el número de línea de la transcripción en la que inicia el extracto correspondiente.

4.1.1. Sentido de indeterminación

En esta subcategoría se buscó identificar ideas de los estudiantes respecto a cómo representar un valor desconocido. Es importante mencionar que, si bien los estudiantes al momento en que se realizó la tarea asistían al primer grado de educación secundaria, ya habían tenido acercamientos breves abordando el tema de ecuaciones lineales.

> **Instructor:** ¿Cómo puedes representar un número desconocido?.
> **Alumno 3:** Con una x.
> **Instructor:** ¿Por qué una x?.
> **Alumno 3:** Para marcar la incógnita.
> **Instructor:** ¿Por qué una x?, ¿por qué no la representas con un caballo o con un sacapuntas o con un plumón? [mientras coloca un caballo de madera de ajedrez, un sacapuntas y un plumón en la mesa de trabajo].
> **Alumno 3:** Porque la x es más fácil para representarla.
> **Instructor:** ¿Por qué es más fácil para representarla?.
> **Alumno 1:** Se puede utilizar cualquier cosa o representación de esa cosa.
> **Instructor:** Muy bien alumno 1 ¿cuando haces operaciones con números conocidos o desconocidos, en que las haces?, ¿en dónde las realizas esas operaciones?.
> **Alumno 1:** En la libreta.
> **Instructor:** Entonces, tú haces operaciones en tu libreta, ¿cuándo haces operaciones en tu libreta, si nosotros vamos a hablar de incógnitas, cúal de estas te va a ser más fácil de escribir? [Mientras apunta a un plumón, una x de madera, un sacapuntas y un caballo de ajedrez que ha colocado en la mesa]
> **Alumno 1:** La x.
> **Instructor:** Alumno dos, ¿crees que tenga algo que ver eso entonces con que las incógnitas las representemos con una letra?.
> **Alumno 2:** Si.
> **Alumno 3:** Si, porque la x es…
> **Instructor:** Es rápida de escribir (33).

En el párrafo previo se identifican dos ideas importantes, el alumno 3 observa que se utilizan letras para representar valores desconocidos por la facilidad de su escritura y el alumno uno identifica que se puede usar cualquier objeto o su representación para designar valores desconocidos, siempre y cuando exista la intención y sea del conocimiento de los individuos. Los alumnos observan que la literal x representa un valor no conocido. Posteriormente, se puede observar cómo el alumno 3 identifica que el signo de igual permite determinar el valor de la literal; es decir, identificaron la idea de equivalencia.

4.1.2. Manejo analítico de los objetos indeterminados

Damos cuenta de cómo los alumnos operan las representaciones simbólicas, observando que asumen se trata de una cantidad y al cumplir ciertas condiciones se encontrarán valores específicos para esta, el alumno observa que el valor está determinado por el signo de igual, así que asigna un valor específico y realiza la operación necesaria para hallar el resultado de cada una de las expresiones señaladas. Posteriormente, el alumno 3 concibe que en este caso cada una de las equis de madera representa el valor de cinco unidades, así que cada equis que se agregue se habrá de sumar a la cantidad anterior señalada, de esta forma se da un acercamiento a comprender que las literales se operan de la misma forma que los números determinados.

> **Instructor:** [Señala $x = 3$, que está al centro de la mesa].
> **Alumno 1:** [Señala las expresiones $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$], tres, tres más uno, tres más dos y tres más tres.
> **Instructor:** Di el número completo.
> **Alumno 3:** Tres, cuatro, cinco, seis (260).
> **Instructor:** Vamos a representar la primera columna que nos dice que equis igual a cinco [mientras coloca la expresión $x = 5$ en el centro de la mesa con el material manipulable].
> **Alumnos 1, 2 y 3:** [Los tres alumnos comienzan a hacer sus representaciones con el material manipulable en la mesa de trabajo y los tres dejan la expresión $x + x + 1 = 11$].
> **Instructor:** ¿En esa expresión es correcto lo que dice en la primera que equis vale cinco?.
> **Alumno 2:** Si, Si cada equis vale cinco pues equis más equis es cinco más cinco, más uno es once (331).

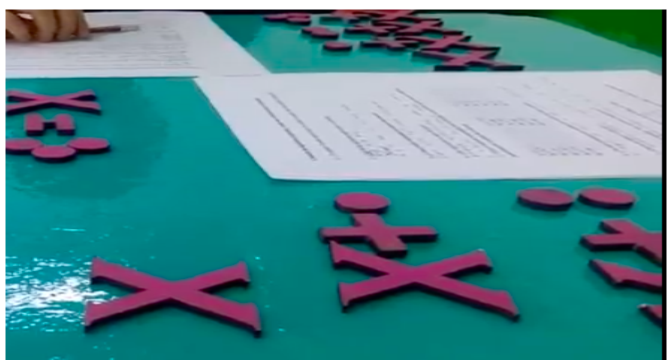


Imagen 3. Representación de tres números consecutivos realizada por los alumnos utilizando material concreto manipulable.

4.1.3. Modo simbólico de designar objetos indeterminados

Los alumnos en sus clases de matemáticas habían revisado el tema de ecuaciones lineales y por ello, cuando se preguntó la forma en que se puede representar un número desconocido, ellos mencionaron que con una equis al mismo tiempo que tomaban una x del material manipulativo. Los alumnos 1, 2 y 3 presentan simultáneamente dos formas de expresar números indeterminados, en este caso utilizan equis físicas y reafirman la indeterminación de esos números verbalizando las construcciones realizadas. Posteriormente, introducen el signo de igual y utilizan el material manipulable para representar ambos miembros de una ecuación de la forma $ax + b = c$.

> **Alumno 2:** [Forma las expresiones x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ y las nombra mientras va colocando el material manipulable], un número desconocido, un número desconocido más uno, un número desconocido más dos, un número desconocido más tres (251).
> **Alumnos 1, 2 y 3:** [Colocan el signo de igual y juntan veintisiete fichas, colocándolas después del signo de igual, dejando la construcción $x + x + 1 + x + 2 = 27$].
> **Instructor:** Muy bien alumno 3 léeme esa expresión que acabas de realizar.
> **Alumno 3:** Equis, más equis más uno, más equis más dos igual a veintisiete [mientras va señalando cada una de las expresiones que verbaliza] (440).

Imagen 4. Material concreto utilizado por los alumnos para representar una ecuación lineal de la forma $ax + b = c$.

4.1.4. Generalizar resultados a partir de casos particulares

Una de las características principales que permiten observar el desarrollo del pensamiento algebraico es la habilidad de reconocer en los casos particulares el comportamiento de los números y sus relaciones, permitiendo abstraer regularidades y generalizarlas, el alumno 3 no habla de un número consecutivo en particular, más bien, logra observar una condición presente en los números consecutivos y hace referencia de esta característica.

El instructor asigna distintos valores a equis y pregunta el valor de las expresiones formadas por los alumnos en cada uno de los casos, la razón es que busca los alumnos observen diferentes números consecutivos y puedan reconocer las características de estos y de la representación que se está utilizando para abordar cada uno de los casos en específicos, los alumnos 1, 2 y 3 observan que la construcción algebraica de números consecutivos $x,\ x+1,\ x+2$ sirve para representar cualquier grupo de números enteros consecutivos que cumplan cierta condición, en este caso es asignar previamente un valor a equis. Cabe observar que esta generalización partió de observar diversos casos particulares.

> **Instructor:** ¿Qué cambia de este número a este número? [Mientras señala 1, 2 y 3 círculo de material manipulable que los alumnos han colocado].
> **Alumno 3:** Cambia una unidad [señala el uno y el dos]. El número consecutivo es el que va detrás o delante de otro (138).
> **Instructor:** [presenta diversos casos donde $x = 5$, $x = 1$, $x = 70$, $x = 71$, $x = 60$, $x = 1000$ etc. y señala las construcciones $x,\ x+1,\ x+2,\ x+3$].
> **Alumnos 1, 2, y 3:** [Mencionan en voz alta una vez que el instructor señala las construcciones] cinco, seis, siete, ocho; uno, dos, tres, cuatro; setenta, setenta y uno, setenta y dos, setenta y tres; setenta y uno, setenta y dos, setenta y tres, setenta y cuatro; sesenta, sesenta y uno, sesenta y dos, sesenta y tres; mil, mil uno, mil dos, mil tres, etc. ¿Qué podemos hacer con estas equis chicos?
> **Alumno 3:** Hablar de cualquier número consecutivo.
> **Instructor:** ¿Cuál es la función de las equis?
> **Alumno 3:** La función de las equis es representar cualquier valor (281).

4.1.5. Aportes de la resolución de problemas con material manipulable

En esta categoría se han buscado elementos que permitan dar cuenta que tipo de aportaciones hace el material manipulable a la tarea y al entendimiento de los alumnos, el alumno 3 puede observar la proporción que cada valor de equis representa de la cantidad total, observando a la literal como un conjunto de números, por lo tanto, cada que se agregue una equis se deberá agregar el mismo conjunto de números que ya ha sido designado con anterioridad.

Los manipulativos facilitaron el proceso de “aislar” el valor de cada una de las equis, es como observar individualmente cada una de las incógnitas, se observa individualmente el valor de cada una, esto gracias a que cada una de las “equis” manipulables se considera como un ente individual, independiente una de otra y no como el símbolo ax el cual no tiene esa misma interpretación para los estudiantes que inician en el estudio del pensamiento algebraico.

Instructor: Representen la expresión que aparece en la primera columna.
Alumno 1: Equis igual a cinco [mientras los tres alumnos colocan $x = 5$].
Instructor: ¿Cómo será el valor de dos equis? [mientras coloca otra equis, $x\,x =$].
Alumno 2: Diez [mientras los tres alumnos colocan cinco círculos más, $x\,x = 10$].
Instructor: ¿Tres equis? [mientras coloca otra equis, $x\,x\,x =$].
Alumno 3: Quince [mientras los tres alumnos colocan cinco círculos más $x\,x\,x = 15$] (103).
Instructor: A ver si sabemos que equis vale cinco entonces es [señala una x].
Alumno 3: “Cinco”, [el instructor coloca otra equis sobre la primera señalada] “diez”, [coloca otra equis sobre las otras dos señaladas],“quince”; [coloca tres fichas] “dieciocho” (344).

Imagen 5. Material concreto utilizado por los alumnos para determinar el valor de “cada x”.

Tabla 3. Resultados de la primera sesión de la actividad “El mensaje de mi crush”

El mensaje de mi crush.
Primera sesión

Categoría	Resultados
Sentido de indeterminación propio de objetos algebraicos (incógnitas, variables)	El alumno 3 expresa que las letras se utilizan para representar valores desconocidos por la facilidad en la escritura. También comenta que el signo igual permite determinar las operaciones necesarias para determinar el valor de la incógnita. Reconoció que el signo igual indica la idea de equivalencia. El alumno 1 identifica que se puede usar cualquier objeto o su representación para designar valores desconocidos, siempre y cuando exista esa intención y sea del entendimiento común de los usuarios.
Manejo analítico de los objetos indeterminados, operar literales considerando que representan valores determinados con la finalidad de obtener condiciones necesarias y suficientes para su existencia, y lograr así los valores específicos	El signo igual permite identificar las operaciones necesarias para determinar el valor de la incógnita. Posteriormente, el alumno 1 al hacer la operación indicada determina los valores específicos de x. El alumno 3 observa que sustituyendo el valor cinco en cada equis la ecuación tiene correcto sentido, es decir, representa un enunciado verdadero. Realizando las sumas correspondientes en el primer miembro de la ecuación.
Modo simbólico de designar a tales objetos (verbal, alfanumérico, tangibles)	Ante la necesidad de designar un valor desconocido los alumnos toman una equis del material manipulativo. Los alumnos 1, 2 y 3 presentan simultáneamente dos formas de expresar números indeterminados, en este caso utilizan material tangible y reafirma la indeterminación de esos números verbalizando las construcciones realizadas. Posteriormente introducen el signo de igual y utilizan el material manipulable para representar ambos miembros de una ecuación de la forma $ax + b = c$.

El mensaje de mi crush. Primera sesión	
Categoría	**Resultados**
Generalizar resultados a partir de la observación de regularidades presentes en casos particulares	El alumno 3 observa una condición de los números consecutivos y hace referencia a esta característica, sin mencionar explícitamente el término "número consecutivo". Los alumnos 1, 2 y 3 observan que las expresiones x, $x+1$, $x+2$ sirven para representar cualquier grupo de tres números consecutivos. Para determinar este conjunto de números basta con asignar un valor determinado para equis.
Concepción del signo de igual	El alumno 2 observa la condición necesaria para el uso del signo igual cuando se trabaja con números conocidos. El alumno 3 propone que en este caso el signo de igual es lo que determina el valor de la incógnita.
Aportes del material manipulable	El alumno 3 al observar la proporción que corresponde a cada equis respecto de la cantidad total c. El material permite "aislar" el valor de cada una de las equis, observar individualmente cada una de las incógnitas permite determinar el valor de cada una de ellas, en lugar de observar el total del valor únicamente.

Fuente. Elaboración propia.

4.2. Segunda sesión de la tarea "El mensaje de tu crush"

En esta sección se analiza con detalle cómo se llevó a cabo la segunda etapa de la tarea, con el objetivo de observar las aportaciones de la resolución de problemas y el uso de material manipulativo físico en el desarrollo de elementos del pensamiento algebraico en alumnos de secundaria. De la misma manera que en la primera sesión de la tarea se identificaron categorías que permiten observar individualmente acciones o enunciados que pueden dar cuenta de la contribución que tuvo en el desarrollo de elementos del pensamiento algebraico en los alumnos. Se hace una presentación de estas categorías y los resultados observados en cada una de ellas. Los tres estudiantes abordaron la tarea guiados con sus hojas de trabajo y el acompañamiento del instructor, esta primera sesión tuvo una duración de una hora y cinco minutos.

La tarea está diseñada con el objetivo de encontrar la manera de operar adecuadamente además que los alumnos den razón y sentido a las indicaciones que ellos mismos han identificado como coherentes y válidas al hallar el valor de una incógnita en una ecuación de la forma $ac + b = c$.

4.2.1. Sentido de indeterminación

El alumno 1 entendió que la literal representa un valor, que deben existir ciertas condiciones para que ese valor pueda ser determinado, que en esta situación todas las condiciones para conocer el valor específico están dadas y que el símbolo igual está designando el valor de la incógnita.

> **Alumno 1:** [Representa con el material $x = 8$] ¿Cuál es el valor de la x? El valor de la equis sería ocho porque ya no hay más signos que resolver entonces por lo tanto el valor de la derecha es igual al valor de la izquierda [refiriéndose y señalando ambos miembros de la ecuación] por lo tanto el valor de la equis equivaldría a ocho, equis es ocho (196).

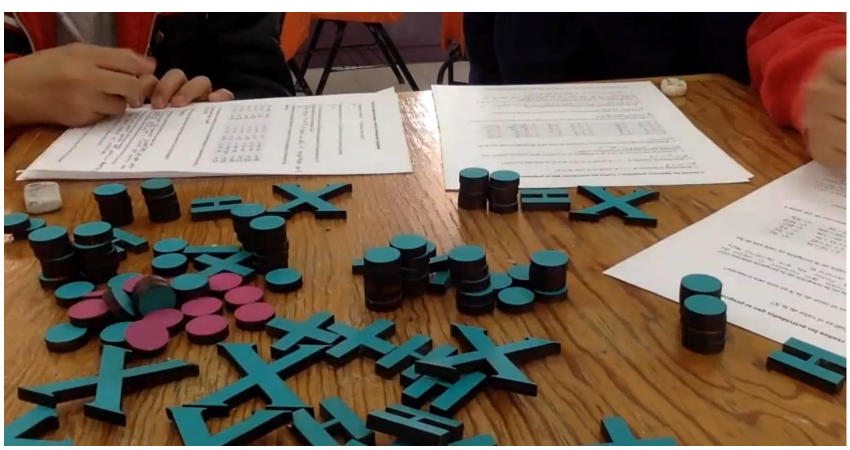


Imagen 6. Representando el valor de una incógnita con fichas que representan unidades.

4.2.2. Manejo analítico de los objetos indeterminados

El alumno 3 reconoce una operación de resta al operar las cantidades y de este modo pudo encontrar el valor específico de la incógnita en esta ecuación. El alumno 1 identificó la diferencia entre dos cantidades y menciona que restando b de c se encuentra el valor de equis. El estudiante reconoció que partiendo de un "valor desconocido" y sumando cuatro unidades obtenemos ocho unidades, por lo que el valor desconocido es igual a la diferencia de las cantidades conocidas. Los alumnos observaron que, en este caso específico, la división es la operación requerida para determinar el valor de la incógnita. Los alumnos observan al coeficiente a cómo la cantidad de equis o la cantidad de "incógnitas". Reconocen que deben "repartir" en partes iguales la cantidad c entre el número de x. Los alumnos comprenden qué repartir c requiere una división, por lo que expresan que la regla para resolver $ax = c$ consiste en realizar la división c/a.

> **Alumno 3:** Por qué si a ocho [señalando las ocho fichas de c] le resto uno [señalando la ficha de b] entonces da el valor de siete que debe valer [señalando la equis de madera] más uno y me da el resultado de ocho (24).
> **Alumno 1:** Necesitábamos conocer el valor de equis, entonces tenía qué pensar a qué número si se le agrega cuatro es igual a ocho, entonces eso me llevó a hacer una resta de ocho menos cuatro es igual a cuatro. Y cuatro más cuatro es igual a ocho, entonces la equis por lo tanto equivale a un cuatro (51).
> **Instructor:** ¿Qué operación utilizaron, aquí para resolver esta? [señalando $2x = 8$].
> **Alumnos 1, 2 y 3:** Una división.
> **Instructor:** Crea una regla para conocer el valor de la incógnita [en el caso $ax = c$].
> **Alumno 1:** Repartir el total entre la cantidad de equis [señalando a "c" en la ecuación $3x = 18$, y repartiendo 6 fichas a cada "x"].
> **Alumno 2:** Dividir el número conocido entre la incógnita [mientras señala c y a] (251).

4.2.3. Modo simbólico de designar objetos indeterminados

El alumno 1 utiliza dos representaciones para confirmar el resultado de su razonamiento, mientras verbaliza las operaciones que efectúa mentalmente va señalando y operando el material manipulable. De este modo puede comprobar si las ideas que expresa son correctas o el enunciado representado por la ecuación cumple las condiciones para ser una proposición verdadera.

> **Instructor:** [Los alumnos representan con el material manipulable las ecuaciones. $x + 1 = 10$ y $x + 4 = 6$]. Listo, ¿cuánto vale equis en la primera?
> **Alumno 1:** Nueve. Utilizando el mismo procedimiento, equis más uno igual a diez [mientras señala la representación hecha con el material manipulable]. Entonces, qué número más uno [señala la x] es igual a diez. Nueve [mientras señala la x] más [mientras señala el signo de $=$] uno [señala la unidad] es igual [mientras señala el signo de $=$] a diez [señala las diez fichas del material que corresponden a c] (94).

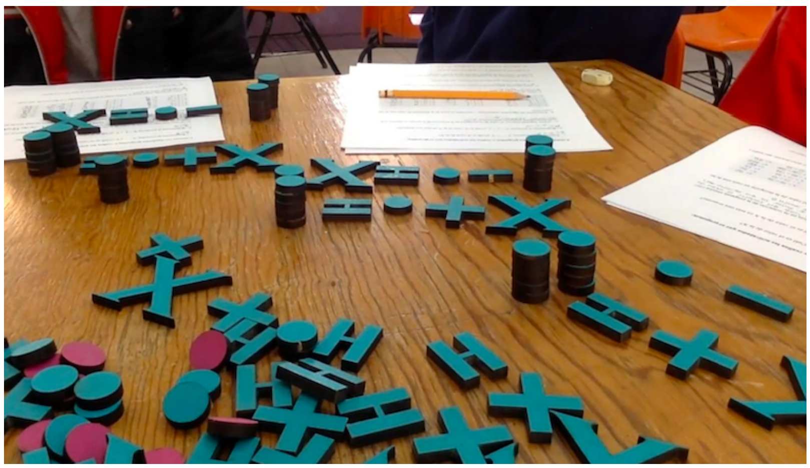


Imagen 7. Diferentes representaciones que determinan el valor de una incógnita.

4.2.4. Generalizar resultados a partir de casos particulares

Una de las características principales que permiten observar el desarrollo del pensamiento algebraico es la habilidad para identificar comportamientos generales de los números y sus relaciones a partir de casos particulares, permitiendo llevar a cabo procesos de abstracción, generalización y simbolización. El alumno 3 no habla de un número consecutivo en particular, más bien, logra observar una condición presente en los números consecutivos y hace referencia a esta característica. Este mismo alumno percibe que las operaciones realizadas; en particular una resta y el reparto de *c* entre la cantidad de equis para obtener el valor de la incógnita, son los procedimientos requeridos para resolver una ecuación de la forma $ax + b = c$. Los estudiantes han identificado ciertas reglas que no pueden expresar de forma general, sin embargo, están en la ruta del proceso de generalización.

> **Alumno 3:** ¿Crees que las reglas que acabas de descubrir te permitan encontrar el valor de la incógnita? Inténtalo. Sí creo que se puede. Hay que ver la regla y con eso se debe de poder.
> **Alumno 1:** Pues si es una ecuación parecida sí se debe poder (283).
> **Alumno 3:** A veintisiete le restamos el número conocido del lado izquierdo, o sea veintisiete menos tres porque estaba sumando entonces debemos restar veintisiete menos el tres y eso es lo que va a quedar [deja la ecuación $x\,x\,x = 24$].
> **Alumno 2:** Pues entonces ya solo le damos a cada equis el valor que le corresponde [separa las equis y las alinea en forma vertical del lado izquierdo del signo igual, después cuenta y coloca ocho fichas frente a cada una de las equis] (309).
> **Alumno 1:** Ocho, porque a cada equis le tocan ocho fichas [mientras señala los montones frente a cada equis] (313).

4.2.5. Aportes del material manipulable

La representación permite al alumno tomar y manipular la cantidad c, representada por las fichas del material manipulable. Toma una parte de c y la asigna a b, para igualar la cantidad de b (y así eliminar esta cantidad de ambos lados de la igualdad). Por lo tanto, la cantidad restante corresponde a x. La operatividad de las cantidades que se puede obtener con el material manipulable proporciona una visión de correspondencia entre los elementos que integran la ecuación. El alumno 3 buscaba las palabras para expresarse y el instructor interpretó que se refería a las facilidades que otorga el material manipulable, en este caso el apoyo que brinda para observar las proporciones del total c que corresponden a x y a b.

El alumno 2 visualizó una forma de representar la ecuación de un modo distinto, buscando dar el valor correspondiente a la incógnita, así que utilizó el material para mover los signos y cantidades y representar la ecuación de un modo distinto, de la ecuación $x + 4 = 6$ movió el símbolo de igual y de suma transformándola en $x = 4 - 6$ parece que el valor de la incógnita no es el mismo pero cuando escuchamos el razonamiento del alumno que lee la construcción de derecha a izquierda; seis menos cuatro es igual a dos, equis es igual a dos, . la ecuación adquiere sentido y validez.

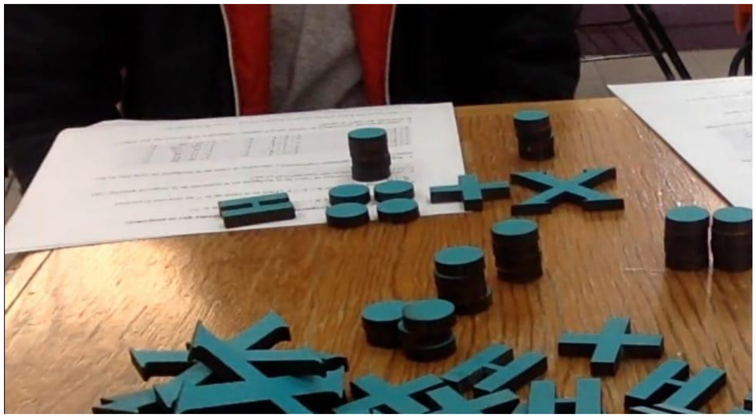


Imagen 8. Esta representación hecha por uno de los alumnos permite observar la forma en que un alumno visualizó el valor de la incógnita, asignando una "parte de c a x".

El material manipulable permite que el estudiante observe una correspondencia entre c y el número total de x, ya que al colocar físicamente cada una de las equis se puede apreciar que a cada x le corresponde una proporción del total c. También permitió observar al coeficiente a como la cantidad de x o la cantidad de incógnitas del material manipulable, reconocen que deben "repartir" en partes iguales la cantidad c entre el número de x.

Alumno 2: Aquí, estos cuatro son los mismos que estos, y aquí esto que sobra, que es el resultado de esto [Toma cuatro de las ocho fichas que están a la derecha del signo igual y las coloca debajo de las cuatro fichas que están a la derecha del signo igual, y posteriormente coloca las cuatro fichas restantes abajo de la equis, expresando que esas cuatro fichas representan el valor de la equis]. (75).
Alumno 3: Mmmm es sencillo de hacer [refiriéndose al párrafo anterior] aunque, sí es igualmente sencillo, es rápido también, aunque para cualquier persona, pues es…
Instructor: Es sencillo porque tenemos ahorita el manipulable, quién sabe si no teniéndolo sea sencillo (84).
Alumno 2: Yo [Mientras mueve el material]:
$x + 4 = 6$ Quita los signos de más y de igual
$x = 4 - 6$ Coloca en su lugar los signos de igual y de resta.
Más o menos así [y señala la ecuación que ha realizado, $x = 4 - 6$] seis menos cuatro es igual a dos [señalando de derecha a izquierda el material manipulable, $6 - 4 = x$] (108).
Alumno 2: Yo dividí este montón [refiriéndose a las ocho fichas que forman c] y cada montón vale lo de una x [colocando las equis de madera debajo de cada montón de cuatro fichas] (205).
Alumno 1: Repartir el total entre la cantidad de x [señalando a "c" en la ecuación $3x = 18$, y repartiendo 6 fichas a cada "x"].
Alumno 2: Dividir el número conocido entre la incógnita [mientras señala c y a] (262).

Tabla 3. Resultados de la segunda sesión de la actividad "El mensaje de mi crush"

El mensaje de mi crush. Segunda sesión.	
Categoría	Resultados
Sentido de indeterminación propio de objetos algebraicos (incógnitas, variables)	El alumno 1 comprende que la literal representa un valor determinado, aunque desconocido. También reconoce que existen ciertas condiciones para que ese valor pueda determinarse. Además, identificó que todas las condiciones para conocer el valor de la incógnita se encuentran especificadas en la ecuación y que el símbolo de igual especifica las operaciones necesarias para encontrar el valor de la incógnita.
Manejo analítico de los objetos indeterminados, operar considerando que representan valores con la finalidad de obtener condiciones necesarias y suficientes para su existencia, y lograr así determinar el valor de la incógnita	El alumno 3 reconoce que es necesario efectuar una resta para encontrar el valor específico de equis en esta ecuación. El alumno 1 calcula la diferencia entre dos cantidades y menciona que restando b de c, se encuentra el valor de la incógnita. Partiendo de un "valor desconocido" y sumando cuatro unidades obtenemos ocho unidades, el valor desconocido es igual a la diferencia de las cantidades conocidas. Los alumnos interpretan al coeficiente a cómo la cantidad de equis o la cantidad de "incógnitas" (en asociación con el material manipulable), reconocen que deben "repartir" en partes iguales la cantidad c entre el número de x. Los alumnos comprenden qué repartir c requiere una división. Así, para resolver la ecuación $ax = c$ es necesario dividir c/a.
Modo simbólico de designar a tales objetos (verbal, alfanumérico, tangibles)	El alumno 1 utiliza dos representaciones para verificar sus ideas, mientras verbaliza las cantidades y operaciones que efectúa mentalmente, va señalando el material manipulable en el mismo orden, de este modo puede comprobar si sus ideas son correctas o el enunciado, expresado mediante la ecuación, cumple las condiciones necesarias para ser verdadero.

Generalizar resultados a partir de la observación de regularidades presentes en casos particulares	El alumno 3 percibe que los procedimientos que se han realizado de restar para obtener el valor de x y repartir en partes iguales c entre las equis para obtener el valor de la incógnita serán procedimientos requeridos siempre que la ecuación a resolver sea de la forma $ax + b = c$. Han creado ciertas reglas que no pueden en este momento definir en términos generales; sin embargo, se encuentran en la ruta para generalizar estos procedimientos.
Aportes del material manipulable	La representación permite al alumno tomar y manipular c, toma una parte de c e iguala la cantidad de b y la asigna a b, por lo tanto la cantidad restante corresponde a x. La facilidad para operar los símbolos con el material manipulable proporciona una visión de correspondencia entre los elementos que integran la ecuación. El alumno 3 buscaba las palabras para expresarse y el instructor interpretó que el alumno se refería a las facilidades que otorga el material manipulable, en este caso la facilidad de observar la proporción de c que corresponden a la cantidad de x y a b. El alumno 2 visualiza una forma de representar la ecuación de un modo distinto, buscando encontrar el valor de la incógnita, así que utiliza el material para mover los signos y cantidades y representar la ecuación de un modo distinto. Su ecuación a pesar de no ser correcta, si es leída considerando la forma en que el estudiante la menciona, entonces adquiere sentido. Menciona los números y signos de derecha a izquierda mientras los va señalando, seis menos cuatro es igual a dos, equis es igual a dos. El material manipulable permite que en un caso como este el usuario observe una relación de correspondencia entre c y el número total de x, ya que al colocar físicamente cada una de las x se puede apreciar que a cada x le corresponde una cantidad igual del total de c. El material permite a los alumnos observar al coeficiente a como la cantidad de x o la cantidad de una misma incógnita, reconocen que deben "repartir" en partes iguales la cantidad c entre el número de x.

Fuente. Elaboración propia.

Capítulo 5. Discusión y conclusiones

5.1. Introducción

En esta sección se sintetizan los resultados de la investigación. Se lleva a cabo una discusión de los resultados, comparando lo que se obtuvo con lo obtenido por otras investigaciones semejantes. Se identifican fortalezas y debilidades del estudio. Finalmente se bosqueja algunas líneas futuras de investigación.

5.2. Respuesta a las preguntas de investigación

La pregunta de investigación de esta tesis es: ¿Cómo puede apoyar la resolución de problemas con el uso de manipulativos físicos el desarrollo de elementos básicos del pensamiento algebraico en estudiantes de secundaria cuando abordan ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$?

Con base en los resultados, la respuesta a la pregunta es la siguiente: Se identificó que al abordar tareas diseñadas desde una aproximación didáctica de resolución de problemas los estudiantes son capaces de contemplar regularidades en el comportamiento de valores concretos e indeterminados, esto les brinda la oportunidad de observar, analizar y proponer formas de operar las cantidades presentadas de una forma pertinente obteniendo condiciones necesarias y suficientes para su existencia y validez, esto mediante un ciclo en el cual los propios estudiantes pueden verificar, analizar y evaluar las metodologías que ellos construyeron. Lo anterior implica una ruta de aprendizaje distinta a la exposición magistral, los estudiantes trabajaron y operaron las cantidades mientras verificaron la pertinencia de los procedimientos y lograron comprender el significado de las representaciones que utilizaron. Por ejemplo, fueron capaces de asociar significado a los componentes (parámetros, incógnita, signos de relación y de operación) en una ecuación lineal de la forma $ax + b = c$.

Con el análisis de la información se logró dar cuenta que el material manipulable permite al estudiante percatarse de una relación entre las cantidades determinadas e indeterminadas, mientras manipularon las fichas hicieron diferentes construcciones que permitieron observar de un modo distinto las representaciones hechas con papel y lápiz, los resultados presentados aportan evidencia que el material manipulable permitió a los estudiantes asignar a los símbolos un referente con menor nivel de abstracción. En las siguientes conclusiones se observa que el uso de las fichas caso permitió que los estudiantes asignaran significado a los componentes de una ecuación lineal de la forma $ax + b = c$.

Se abordaron ecuaciones de la forma $ax + b = c$ en dos momentos, el primero cuando$a = 1$ asignando a los parámetros b y c distintos valores, la posibilidad de operar manualmente el material permitió a los estudiantes dar sentido operativo a expresiones del tipo "tomar una parte de c igual al valor de b". Al igualar una parte de c con b se pudo observar que la cantidad restante o que no se usa de c equivale al valor de la incógnita x, comprendiendo la relación entre las cantidades determinadas e indeterminadas. Manipular las representaciones numéricas determinadas e indeterminadas mediante las fichas permitió que los estudiantes visualizaran la igualdad entre el primer y segundo término de la ecuación; "fragmentaron" c en dos partes, una de esas partes para equilibrar con el valor de b, la otra parte debía ser igual a la incógnita, siendo este valor igual a x encontrando su valor numérico mediante una forma de visualización distinta a la otorgada convencionalmente donde $c - b = x$.

Al mover las representaciones de signos y cantidades el estudiante 2 construyó una ecuación errónea desde una perspectiva general; al escuchar su explicación la ecuación adquiere sentido y validez, de la ecuación $x + 4 = 6$ movió el símbolo de igual y de suma transformándola en $x = 4 - 6$ parece que el valor de la incógnita no es el mismo pero cuando escuchamos el razonamiento del alumno que lee la construcción de derecha a izquierda; seis menos cuatro es igual a dos, equis es igual a dos, esto revela que el alumno está construyendo significado para los símbolos algebraicos y el material manipulable es una herramienta que le permite observar y construir diferentes representaciones de una forma casi instantánea.

En el segundo momento se abordaron ecuaciones de la forma $ax + b = c$, cuando $b = 0$ y asignando al coeficiente a distintos valores, los estudiantes fueron capaces de identificar una relación de correspondencia entre ax y c observando que "el resultado" (como ellos llamaban a c) se debe repartir equitativamente entre el número de "equis" (coeficiente a). El hecho de manipular el material físico otorgó a los estudiantes la oportunidad de observar al coeficiente de la variable como un conjunto de equis entre las cuales debía repartirse proporcionalmente la cantidad conocida que representa el "total" de incógnitas. Es importante reconocer que la dinamicidad que permite el material manipulable otorga una visión de correspondencia entre los valores que forman la ecuación.

Como se explicó en la sección de revisión de la literatura, pocos trabajos se enfocan en el problema básico de dar sentido a los símbolos algebraicos, lo cual significa lograr que tales símbolos tengan un referente con menor nivel de abstracción. Por otra parte, los estudios revisados utilizan material manipulativo y tareas diferentes a las utilizadas en este trabajo de tesis, por lo que hay pocos elementos de comparación. En los trabajos revisados los resultados se exponen de una forma bastante general, y expresan que el material manipulativo o virtual fue de utilidad para que los estudiantes comprendieran la solución de ecuaciones lineales, sin especificar qué elementos específicos del pensamiento algebraico se promovieron y por qué. Por el contrario, en este trabajo se identifican algunos de estos aspectos que permitieron que los estudiantes; por ejemplo, asignar significado al coeficiente de la incógnita, o determinar por qué debían realizar ciertas operaciones para determinar el valor de x.

5.3. Alcances y limitaciones del trabajo

Siendo una investigación de carácter cualitativo realizada con un pequeño grupo de estudiantes de secundaria no es posible generalizar los resultados, no obstante es un aporte significativo para personas interesadas en la didáctica de las matemáticas ya que se muestra un camino en el cual los estudiantes pueden descubrir, comprender y construir conexiones robustas y con entendendimiento sobre las relaciones existentes entre los valores determinados e indeterminados presentes en una ecuación de tipo $ax + b = c$. Con el objetivo de trazar un posible camino para futuras investigaciones que aporten más datos relevantes en esta línea se realiza un listado de algunos aspectos que constituyeron algunas limitaciones y no fueron abordados en este trabajo:

1. Abordar más casos de ecuaciones de la forma $ax + b = c$, ya que en esta tesis únicamente se abordaron situaciones donde los parámetros a, b y c fueron positivos. Es importante analizar las diferencias de comprensión o dificultades que los alumnos puedan presentar cuando a, b y c representan cantidades negativas.

2. Los profesores de la escuela donde se implementaron las tareas no tienen un acercamiento continuo al trabajo con material manipulable ni utilizan un enfoque de enseñanza constructivista, lo que implicó cierta dificultad para el instructor que implementó la tarea, ya que intervino en momentos donde debía permitir que los alumnos analizarán con mayor detenimiento las problemáticas a las que se enfrentaban.

3. Sería relevante implementar la misma tarea con estudiantes en diferentes contextos, rural-urbano, o que asistan a diferentes subsistemas de secundaria (secundaria general, secundaria técnica, telesecundaria, secundaria abierta).

4. Como lo indica la perspectiva sociocultural, se obtuvo evidencia de que el tipo de material manipulable determina los significados que el estudiante construye para los símbolos algebraicos. En este caso, el material utilizado permitió construir un significado particular para el coeficiente de la incógnita. En este contexto, sería deseable implementar actividades donde se utilicen diferentes tipos de manipulables con la finalidad de determinar si los significados que los estudiantes construyen, asociados a cada tipo de material se complementan. En este mismo sentido, se pueden llevar a cabo investigaciones longitudinales, y no solo transversales, con la finalidad de observar la evolución de los entendimientos que los estudiantes generan a través del tiempo.
5. Crear un grupo de control donde se pueda comparar el beneficio del uso de material manipulable con el ambiente de papel y lápiz.

5.5. Reflexiones finales

El presente trabajo aporta herramientas que me permiten observar con más detalle los elementos necesarios para otorgar las características que considero, con bases sólidas, importantes al conocimiento que mis estudiantes construyen. Los resultados obtenidos me permiten identificar el enfoque de resolución de problemas y el uso de material físico manipulable como instrumentos que promueven el desarrollo de elementos básicos del pensamiento algebraico en estudiantes de secundaria. El aporte de este trabajo implica un hallazgo más para robustecer el conocimiento que existe sobre la implementación de tareas bajo los preceptos mencionados, y es una ruta a seguir para pensar en un proyecto que me permita estudiar e investigar en el siguiente nivel de posgrado, ya que he observado una mejora significativa en mi desempeño como profesor de matemáticas a partir de que comencé a estudiar esta maestría, con esto pretendo tener mayores herramientas que me permitan tener un mejor desempeño docente.

Se observa una brecha existente entre la investigación en educación matemática y la práctica diaria en el salón de clases. Existen ideas fundamentales como el entendimiento o la construcción del conocimiento que no se comprenden adecuadamente por la mayoría de los profesores de matemáticas, y lo mismo ocurre con el papel de la investigación y las teorías epistemológicas o didácticas en la práctica docente. Para mí todo lo anterior era desconocido, pero considero importante pensar en una forma de transmitir este conocimiento a profesores que se encuentran frente a grupo; se acerquen, visualicen, analicen y utilicen estas herramientas, que los nuevos hallazgos en la didáctica de la matemática lleguen a los maestros que están en las aulas con los alumnos directamente.

REFERENCIAS

Ary, D., Jacobs, L. C., Sorensen, C., y Razavieh, A. (2009). *Introduction to research in education* (8th edition). Beltmont, CA: Cengage Learning.*

Ausubel, D. P. (1977). The facilitation of meaningful verbal learning in the classroom. *Educational Psychologist, 12* (2), 162–178.*

Ausubel, D. P. (2000). *The acquisition and retention of knowledge: A cognitive view*. Dordrecht: Springer.*

Ball, L. D. (1992). Magical hope: Manipulatives and the reform of mathematics education. *American Educator, 16* (2), 14–18.*

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, J. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389–407.*

Barrera-Mora, F., y Reyes-Rodriguez, A. (2016). Design technology-based tasks for enhancing mathematical understanding through problem solving. In L. D. Uden (Ed.), *Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 183–192).*31

Barrera Mora, F., Reyes Rodriguez, A., Mendoza Hernández, J. G. (2018). Estrategias de cálculo mental para sumas y restas desarrolladas por estudiantes de secundaria. *Educación Matemática, 30* (3), 122–150.*22

Barrera-Mora, F., Reyes-Rodriguez, A., Campos-Nava, M., y Rodriguez-Alvarez, C. (2021). Resolución de problemas en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. *PADI Boletín Científico de Ciencias e Ingenierías del ICBI, 9* (especial), 10–17.*7

Bartolini, M. G., y Martignone, F. (2014). Manipulatives in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 365–372). New York, NY: Springer.*

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open University Press.*

Bhattacharya, K. (2017). *Fundamentals of qualitative research. A practical guide*. New York: Routledge.*

Bouck, E. C., y Flanagan, S. M. (2010). Virtual manipulatives: What they are and how teachers can use them. *Intervention in School and Clinic, 45*(3), 186–191.*

Boulton-Lewis, G., Cooper, T., Atweh, B., Pillay. H., Wilss. L., Mutch. S. (1997). Processing loads and the use of concrete representations and strategies for solving linear equations. *Journal of Mathematical Behavior, 16* (4), 379–397.*

Bruins, B. E. (2014). *The effectiveness of manipulatives in a high school algebra II class*. Unpublished Master Thesis. Eastern Kentucky University.*

Burns, B. A., & Hamm, E. M. (2011). A comparison of concrete and virtual manipulative use in third- and fourth-grade mathematics. *Virtual Manipulatives in Mathematics, 111* (6), 256–261.*

Cai, J., & Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: research and practice. *ZDM Mathematics Education, 39*, 459–473.*

Castañeda Vargas, A. (2021). *Diseño de tareas con tecnologías digitales desde una perspectiva de resolución de problemas*. Tesis de Maestría, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.*

Eisenhart, M. A. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education researchers. In R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 202–219).

Eisenhardt, K. M. (1991). Better stories and better constructs: The case for rigor and comparative logic. *Academy of management review, 16* (3), 620–627.

Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. SUMA, 5 (1), 23–34.*

Filloy, E., y Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9* (2), 19–25.

Fletcher, J. A. (2009). Learning algebraic concepts through group discussion. *Journal of Science and Mathematics Education, 4*, 31- 47.

Garcia, P., Díaz, J., Vargas J. (2016). El uso de Manipulables para propiciar la comprensión del significado de ecuaciones lineales en la escuela secundaria. *Epistemus, 20* (10), 55–61.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. New York: Dover.

Halmos, P. R. (1994) What is teaching? *The American Mathematical Monthly, 101* (9), 848–854.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ª ed.). México: McGraw-Hill.

Hiebert, et al. (1997). *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Kaput, J. J., y Blanton, M. L. (2000). Algebraic reasoning in the context of elementary mathematics: Making it implementable on a massive scale. Reporte de Proyecto financiado por Office of Educational Research and Improvement (ED). Washington.

Kazdin, A. E. (1982). *Single-case designs: Methods for clinical and applied settings*. New York: Oxford University Press.

Kazdin, A. E. (2016). *Research design in clinical psychology*. Boston, MA: Pearson.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In Douglas A. Grouws (Ed.), *The handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York: MacMillan & National Council of Teachers of Mathematics.

Larbi, E., y Mavis, O. (2016). The Use of Manipulatives in Mathematics Education. *Journal of Education and Practice, 7*(36), 53–61.

Lehtonen, D., Machado, L., Juitsenlahti, J., Perkkilä, P. (2020). The Potentials of tangible technologies for learning linear equations. *Multimodal Technologies And Interaction, 4* (77), 1–34.

Lerman, S. (2014). *Encyclopedia of Mathematics Education*. New York, NY: Springer.

Lerman, S. (2020). *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd Edition). New York, NY: Springer.

Marczyk, G., DeMatteo, D., y Festinger, D. (2005). *Essentials of research design methodology*. Hoboken, NJ: John Wiley y Sons.

Otten, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Veldhuis, M. (2019). The balance model for teaching linear equations: a systematic literature review. *International Journal of STEM Education, 6* (30), 1–21.

Peled, I., y Suzan, A. (2011). Pedagogical, mathematical, and epistemological goals in designing cognitive conflict tasks for teacher education. In O. Zaslavsky, & P. Sullivan (eds.), *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics. Tasks to enhance prospective and practicing teacher learning* (pp. 73-87). New York: Springer.

Polya, G. (1963). On learning, teaching and learning teaching. *The American Mathematical Monthly, 70*, 605–619.

Piaget, J. (1977). *Epistemología genética*. Argentina: Solpus.

Quispe, E., (2019). Bloques Matemáticos como Material Didáctico para la Resolución de Ecuaciones de Primer Grado con Estudiantes de Tercero de Secundaria del Centro de Multiservicios Educativos CEMSE 2019. Universidad Mayor de San Andrés Centro Psicopedagógico y de investigación en Educación Superior. La paz. Bolivia.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4* (2), 37–62.

Reinschlussel, A., Alexandrovsky, D., Doring, T., Kraft, A., Braukmuller, M., Janben, T., Reid, D., Vallejo, E., Bikner-Ahsbahs, A., Malaka, R. (2018). Multimodal algebra learning: From math manipulatives to tangible user interfaces. De Gruyter Oldenbourg. 17 (3), 201–209.

Santos-Trigo, M. (2011). La educación matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 6* (8), 35–54.

Satsangi, R., Hammer, R., Hogan, C. D. (2018). Studying virtual manipulatives paired with explicit instruction to teach algebraic equations to students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly, 41* (4), 227–242.

Schoenfeld, A. H. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Berkeley, CA: Routledge.

Secretaría de Educación Pública [SEP] (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas. Educación Secundaria. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. México: SEP.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher, 26* (3), 9–15.

Smith, S. S. (2005). *Early childhood mathematics* (3rd ed.). Boston: Pearson Education.

Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. In N. K. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *The SAGE handbook of qualitative research, 3rd edition* (pp. 443–466). Thousand Oaks, CA: SAGE.

Swan, P., y Marshall, L. (2010). Manipulative materials. *Australian Primary Mathematics Classroom, 15* (2), 13–19.

Téllez López, J. L (2020). *Relación entre el sentido numérico y pensamiento algebraico en el bachillerato*. Tesis de Maestría, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Uljens, M. (1997). *School didactics and learning*. East Sussex: Psychology Press.

Vygotsky, L. S. (1987). The genetic roots of thinking and speech (originally published in 1934). In R. W. Rieber & A. S. Carton (eds.), *Problems of general psychology* (Vol. 1, pp. 101-120). Nueva York: Plenum.

Windsor, W. (2010). Algebraic thinking: A problem solving approach. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 665–672). Fremantle: MERGA.

Witzel, B. (2005). Using CRA to teach algebra to students with math difficulties in inclusive settings. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal, 3*, 49-60.

Witzel, B. S., y Allsopp, D. (2007). Dynamic concrete instruction in an inclusive classroom. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13* (4), 244–248.

Zull, J. E. (2002). *The art of changing the brain. Sterling*. VA: Stylus.

APÉNDICES

APÉNDICE A. Primera versión de la tarea "El mensaje de mi crush"

Hoja de trabajo

Nombre del estudiante: ____

Actividad: Encontrando valores desconocidos.

Introducción: Se les proporcionará a los estudiantes el material manipulable, mientras se explica que las "x" pueden representar un número desconocido. Los círculos pueden representar unidades y los signos de operaciones les permitirá hacer las operaciones que ellos consideren pertinentes.

Enunciado del problema: Imagina que tu amigo (a) dejó su teléfono olvidado en tu casa y tú sabes que tiene una conversación con tu crush donde hablan sobre ti, y no te ha querido decir que comentan en esa conversación. Obviamente tiene contraseña PIN que es de cuatro dígitos, y para poder conocer este PIN existen instrucciones que escribió en su libreta, en caso de qué se le olvidara, y tú tienes esa libreta. Las instrucciones dicen lo siguiente:

"Para recordar mi contraseña debo encontrar tres números consecutivos (que en este momento desconozco) cuya suma es 27, y al colocar estos números consecutivos uno junto al otro, ordenándolos del menor al mayor podrás volver a entrar a tu teléfono."

¿Crees qué exista una forma de poder encontrar el PIN de cuatro dígitos para poder acceder al teléfono?

Contesta las siguientes preguntas y realiza las actividades:

1.- ¿Qué representa un signo de igual?

2.- ¿Cómo puedes representar un número que no conoces?

3.- ¿Por qué se te ocurre representarlo así?

4.- Representa con el material manipulable cada una de las columnas, posteriormente completa las columnas.

x = 5	x =	x =
2x = 10	2x = 20	2x = 2
3x = 15	3x =	3x = 3
4x =	4x = 40	4x =
5x =	5x =	5x = 5
6x = 30	6x = 60	6x =

5.- ¿Por qué consideras que cambian los valores en cada columna?

6.- ¿Qué es lo que significa “tres números consecutivos"?

7.- Representa con el material manipulable cada una de las columnas, posteriormente completa las columnas.

$x = 5$	$x = 10$	$x = 1$
$x + x + 1 = 11$	$x + x + 1 = 21$	$x + x + 1 = 3$
$x + x + 1 + x + 2 =$	$x + x + 1 + x + 2 =$	$x + x + 1 + x + 2 =$
$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 =$	$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 =$	$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 =$

8.- Realiza un esquema donde puedas observar gráficamente (en una tabla o dibujos) la información que conoces del problema.

9.- ¿Existe alguna forma de representar con el material manipulable las instrucciones para encontrar el PIN del teléfono?

10.- En caso de ser así, presenta el material y menciona que podrías hacer para encontrar el número del PIN

11.- ¿Qué percibes al mover y tocar el material manipulable mientras trabajas?

APÉNDICE B. Segunda versión de la tarea El mensaje de mi Crush

Nombre del o la estudiante: ____

Fecha: ____

Tu mejor amiga dejó su mochila olvidada en tu casa, en la mochila vienen sus libretas y su celular. Tú sabes que ella tiene una conversación en WhatsApp donde ¡tu crush le confiesa cosas súper importantes sobre ti!, pero ella no quiere decirte lo que tu crush le ha contado. El teléfono tiene contraseña PIN, que es de cuatro dígitos, y para poder conocer este PIN existen instrucciones que tu amiga escribió en una libreta en caso de qué se le olvidara la contraseña, y, casualmente, ¡la libreta también está en su mochila!

Intenta encontrar el PIN de cuatro dígitos para poder leer el mensaje de tu Crush.

Contesta las siguientes preguntas y realiza las actividades que se proponen:

1.- ¿El número 4 puede representar otro número o puede valer otra cantidad distinta de 4?

2.- ¿Cuál de las siguientes expresiones es correcta?

4 = 4 4 = 10 4 = 2

¿Por qué?

3.- ¿Cómo puedes representar un número desconocido?

4.- ¿Qué representa un signo de igual?

5.- Utiliza el material manipulable para representar las siguientes expresiones por columnas, posteriormente completa las columnas.

x = 5	x =	x =
2x =	2x = 20	2x = 2
3x = 15	3x =	3x =
4x =	4x = 40	4x =
5x =	5x =	5x = 5
6x = 30	6x = 60	6x =

6.- ¿Por qué consideras que cambian los valores en cada columna?

7.- ¿Qué es un número consecutivo?

8.- ¿Qué es lo que significa “tres números consecutivos"?

9.- Representa tres números consecutivos con las fichas circulares.

10.- ¿Cómo se representa el consecutivo de cualquier número, es decir el número siguiente de un número desconocido?

11.- Representa con el material manipulable cada una de las columnas, posteriormente completa las columnas.

$x = 5$	$x = 10$	$x = 1$
$x + x + 1 = 11$	$x + x + 1 = 21$	$x + x + 1 = 3$
$x + x + 1 + x + 2 =$	$x + x + 1 + x + 2 =$	$x + x + 1 + x + 2 =$
$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 =$	$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 =$	$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 =$

12.- Realiza un esquema donde puedas observar gráficamente (en una tabla o dibujos) la información que conoces del problema.

13.- ¿Por qué se te ocurrió representarlas así?

14.- ¿Existe alguna forma de representar o modelar con el material manipulable las instrucciones para encontrar el PIN del teléfono?

15.- ¿Con esta información que tenemos hasta ahora es posible resolver el problema?

16.- En caso que tu respuesta haya sido que aún no es posible resolver, ¿qué crees que haga falta?

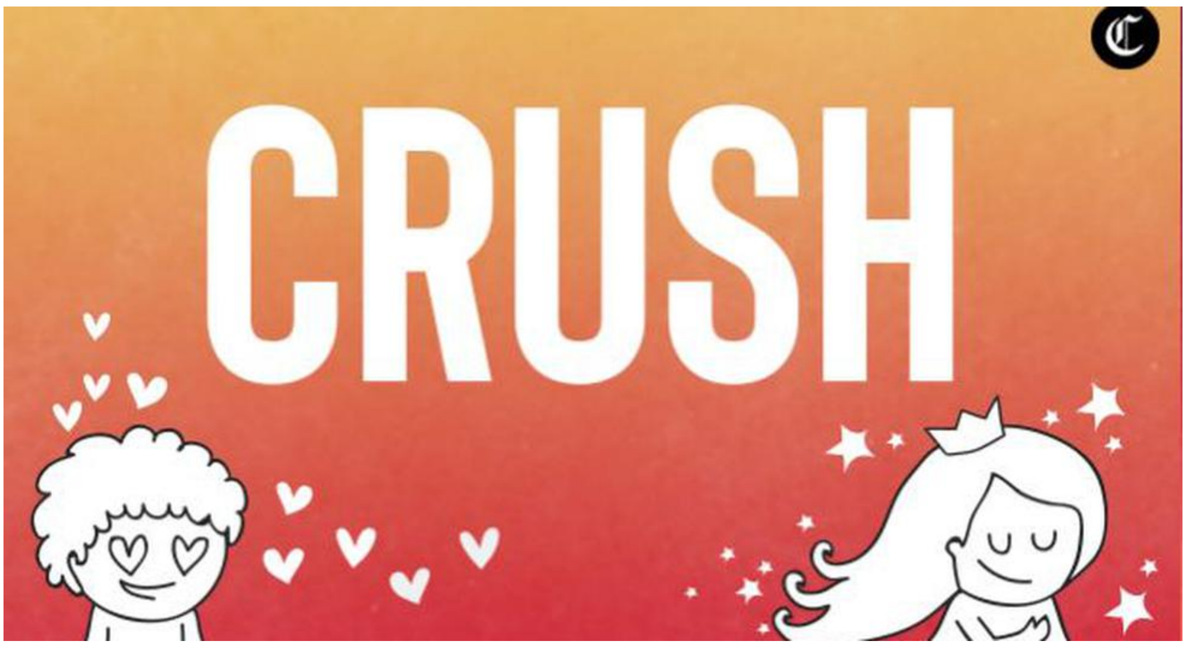
17.- ¿Qué percibes al mover y tocar el material manipulable mientras trabajas?

APÉNDICE C. Segunda parte de la tarea “El mensaje de mi crush”

Nombre del o la estudiante: ____

Fecha: ____

¡Recuerda que estás a punto de leer todo lo que tu crush piensa sobre ti!, ya tienes una expresión o una forma de acomodar los números conocidos y desconocidos que te puede ayudar a encontrar ese PIN que necesitas.



Vas a encontrar la forma de manipular o mover los números para solucionar la expresión que ordenaste X + X+1 + X+2 = 27, así lograrás conocer el PIN y ver la conversación.

Nota interesante:

La forma en que ordenaste los números conocidos y desconocidos la sesión pasada son expresiones matemáticas llamadas ecuaciones y contienen dos cantidades equivalentes o que valen lo mismo, la cantidad que está a la izquierda del signo de igual y la cantidad que está a la derecha del signo de igual, poseen al menos un número desconocido que se representa con una letra llamada incógnita, variable o literal.

Contesta las siguientes preguntas y realiza las actividades que se proponen:

1.- Representa con el material manipulable la ecuación X + 1 = 8. ¿Cuál es el valor de la X?

2.- Representa con el material manipulable la ecuación X + 4 = 8. ¿Cuál es el valor de la X en esta otra ecuación?

3.- ¿Cómo lograste conocer el valor de la incógnita en la ecuación de la pregunta anterior (2)? ¿Utilizaste alguna operación matemática? ¿Cuál?

4.- Cuando consideres que te convenga utiliza el material manipulable para representar las siguientes expresiones y encontrar el valor de la incógnita en cada una de las ecuaciones.

x + 1 = 10	x=	x + 1 = 2	x=	x + 10 = 50	x=
x + 4 = 6	x=	x + 4 = 8	x=	x + 15 = 45	x=
x + 1 = 9	x=	x + 1 = 11	x=	x + 15 = 30	x=
x + 3 = 12	x=	x + 3 = 8	x=	x + 60 = 120	x=
x + 2 = 10	x=	x + 2 = 4	x=	x + 100 = 200	x=
x + 2 = 6	x=	x + 2 = 8	x=	x + 25 = 50	x=

5.- ¿Qué operación matemática se realiza entre el número conocido y el desconocido que están a la izquierda del signo de igual?

6.- ¿Qué operación debes realizar entonces quieres conocer el valor de la incógnita?

7.- En esa operación ¿qué números intervienen y por qué es así?

8.- Con las respuestas de las preguntas anteriores crea una regla para conocer el valor de la incógnita cuando hay un número conocido que se le está sumando.

9.- Representa con el material manipulable la ecuación X = 8. ¿Cuál es el valor de la X?

10.- Representa con el material manipulable la ecuación 2X = 8. ¿Cuál es el valor de la X en esta otra ecuación?

11.- ¿Cómo supiste el valor de la incógnita en la ecuación de la pregunta anterior (10)? ¿Utilizaste alguna operación matemática? ¿Cuál?

12.- Cuando consideres que te convenga utiliza el material manipulable para representar las siguientes expresiones y encontrar el valor de la incógnita en cada una de las ecuaciones.

2x = 10	x=	2x = 80	x=	2x = 30	x=
2x = 6	x=	10x = 60	x=	2x = 4	x=
3x = 9	x=	100x = 100	x=	3x = 150	x=
4x = 12	x=	4x = 16	x=	4x = 120	x=
5x = 10	x=	50x = 100	x=	5x = 100	x=
6x = 6	x=	x = 60	x=	6x = 60	x=

13.- ¿Qué es lo que implica que haya un número conocido junto a un número desconocido?, ¿Qué operación matemática se realiza entre un número conocido y un número desconocido que están juntos?

14.- ¿Qué operación debes realizar entonces si del lado izquierdo del signo de igual hay un número desconocido junto a un número conocido y del lado derecho del signo de igual hay un número conocido para conocer el valor de la incógnita?

15.- En esa operación ¿qué números intervienen y por qué es así?

16.- Con las respuestas de las preguntas anteriores crea una regla para conocer el valor de la incógnita cuando del lado izquierdo del signo de igual hay un número desconocido junto a un número conocido y del lado derecho del signo de igual hay un número conocido.

17.- Escribe la ecuación que representa la forma en que podemos encontrar los cuatro dígitos del PIN que te permitirán desbloquear el celular de tu amiga y revisar la conversación.

18.- ¿Crees que las reglas que acabas de descubrir te permitan encontrar el valor de la incógnita? Inténtalo!!!

19.- ¿Crees que el material manipulable te ayudó de alguna manera?, ¿Cómo?

APÉNDICE D. Ficha técnica

Actividad: Encontrando valores desconocidos.

Introducción: Se les proporcionará a los estudiantes el material manipulable, mientras se explica que las “x” pueden representar un número desconocido. Los círculos pueden representar unidades y los signos de operaciones les permitirá hacer las operaciones que ellos consideren pertinentes.

Enunciado del problema: Imagina que tu amigo (a) dejó su teléfono olvidado en tu casa y tú sabes que tiene una conversación con tu crush donde hablan sobre ti, y no te ha querido decir que comentan en esa conversación. Obviamente tiene contraseña PIN que es de cuatro dígitos, y para poder conocer este PIN existen instrucciones que escribió en su libreta, en caso de qué se le olvidara, y tú tienes esa libreta. Las instrucciones dicen lo siguiente:

“Para recordar mi contraseña debo encontrar tres números consecutivos (que en este momento desconozco) cuya suma es 27, y al colocar estos números consecutivos uno junto al otro, ordenándolos del menor al mayor podrás volver a entrar a tu teléfono.”

¿Crees que exista una forma de poder encontrar el PIN de cuatro dígitos para poder acceder al teléfono?

Población objetivo: Estudiantes de primer grado de secundaria.

Elementos del pensamiento matemático que se busca desarrollar: Identificación de patrones, generalización de resultados, uso de diferentes representaciones.

Conexiones: Ecuaciones lineales.

Indicaciones o sugerencias durante el proceso de implementación (se llevarán a cabo dependiendo del momento en cuanto el instructor considere pertinente expresarlas):

Una vez que el estudiante leyó el enunciado del problema, con la finalidad de verificar si entendió el enunciado se le puede preguntar ¿Cuáles son los datos? ¿Qué es una incógnita? ¿Cuál es la incógnita en este caso? ¿Qué se le pide obtener?
Exponer algún caso donde se indique lo que un signo de igualdad representa, por ejemplo si un kilo de azúcar vale 10 pesos entonces podemos expresar que:
Kilo de azúcar = $ 10
Al organizar los datos de la tabla preguntar a los estudiantes qué operaciones hicieron para encontrar la solución.
Indicar que las literales pueden obtener distintos valores, dependiendo de la ecuación o situación en que se esté trabajando.
Presentar un problema parecido con una dificultad menos, buscando que el alumno lo adecue al problema inicial:
¿Cómo puedes representar dos números consecutivos cuya suma es 3? ¿Cómo puedes representar dos números consecutivos cuya suma es 13?

Heurísticas útiles durante el proceso de implementación (incluyendo sugerencias específicas):

Organizar la información. Proporcionar la tabla necesaria y pedir que posteriormente ellos realicen las operaciones adecuadas.

Otorgar el material manipulable necesario. Así como sugerencias para su uso, al intentar representar la información.

Elaborar una figura. Otorgar a los alumnos las figuras o esquemas necesarios y pedir que establezcan relaciones.

Observar un problema con menor dificultad. Que permita al estudiante visualizar una posible vía de solución y adecuarla posteriormente al problema inicial.

APÉNDICE E. Oficio de autorización para la participación de los estudiantes

Mineral de la Reforma, Hidalgo a los __ días del mes de ____ de ___.

Oficio dirigido a padres o tutores de estudiantes para solicitar permiso de que sus hijos o tutorados participen en el proyecto de investigación.

Estimado C. ______________________________, tutor del estudiante __________________________. El que suscribe, profr. Oscar Iram Aguirre Álvarez, docente de Matemáticas de la Escuela Secundaria __________________________, solicito autorización para que su hijo participe en la realización de una actividad diseñada para el aprendizaje del álgebra.

Los datos derivados de dicha actividad (una grabación en video y hojas de trabajo), se utilizarán en la realización de una tesis, a través de la cual pretendo obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica, por la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Dicha tesis se enmarca dentro del proyecto de investigación "Diseño de tareas de aprendizaje enfocadas al desarrollo del pensamiento algebraico", el cual está coordinado por los Doctores __________________________ y _____________________, profesores investigadores del Área Académica de Matemáticas y Física de la UAEH, uno de quienes funge como director de tesis.

Es importante mencionar que durante, y después del proceso de recolección de la información nos ceñiremos a las normas éticas y de confidencialidad establecidas en la séptima edición del Manual de Estilo de la American Psychological Association. Lo anterior significa que en durante la grabación de video nunca se harán tomas del rostro de sus menores hijos y que, en la redacción de la tesis o posibles artículos de investigación derivados, se asignará un seudónimo a los participantes, con el fin de que no se pueda identificar de qué escuela o persona se trata. También nos comprometemos a que los vídeos únicamente serán revisados por el Prof. Aguirre y por el director y el codirector de tesis, quien en este caso es el Dr. ____________________________, también profesor-investigador de la UAEH, que no se harán públicos por ningún medio y que permanecerán bajo el resguardo de los coordinadores del proyecto en las instalaciones de la UAEH.

Con la finalidad de que puedan ustedes verificar el cumplimiento de los compromisos anteriores, les haremos llegar por escrito, las ligas electrónicas o copias de los documentos que se publiquen ya sea formato digital o en papel, respectivamente.

El que usted proporcione el permiso o no, para que su hijo participe en la actividad referida no afectará negativamente su evaluación en el curso, ya que la participación es completamente libre y voluntaria, y usted tiene derecho a suspender el permiso en el momento que lo desee, sin tener que dar explicación alguna. La profra. ________________________, docente de matemáticas del grupo donde está su hijo inscrito, proporcionará cierto valor positivo, por la disponibilidad a realizar la actividad, en el momento en que evalúe y asigne una calificación a ______________. Es importante mencionar que la realización de la actividad no implica ningún riesgo de daño físico o psicológico para el participante.

Agradecemos sinceramente la atención prestada al presente comunicado. Saludos cordiales.

Una vez leída la comunicación, proporcionó autorización para que mi hijo participe en la realización de la actividad para el aprendizaje del álgebra

____

C. ______________________________

APÉNDICE F. Implementación previa a sujeto X

Transcripción de la sesión de trabajo (estudiante x)

Se le proporcionó al sujeto la hoja de trabajo junto con el manipulativo y se le pidió leer las instrucciones.

Respuestas del número de pregunta:

1.- El sujeto respondió sin ningún tipo de pregunta o duda.

2 y 3.- El sujeto preguntó por qué se utilizan letras cuando no se sabe el valor de un número, el instructor le preguntó que cuántos números se podían representar con el número 4 a lo que ella respondió qué únicamente el número 4. El instructor preguntó cuántos números se pueden representar con una letra a lo que el sujeto respondió que cualquier número. El mismo sujeto comentó que se utilizan letras ya que permiten representar cualquier número.

4.- El sujeto llenó el cuadro haciendo el comentario que en la primera columna la **x** iba de 5 en 5, en la segunda columna iba de 10 en 10 y en la tercera columna iba de 1 en 1, diciendo que probablemente era la tabla del 5, la tabla del 10 y la tabla del 1 (es una forma distinta de representar dichas tablas, nunca lo había visto así).

5.- El sujeto respondió sin ningún tipo de pregunta o duda.

6.- El sujeto preguntó al instructor que quería decir la pregunta, a lo que respondió que es un número consecutivo y el sujeto contestó "un número que va siguiente al otro" (creo que debería preguntar primero qué es un número consecutivo).

El sujeto representó tres números consecutivos con los manipulativos como se presenta en la imagen.

El instructor preguntó qué números eran, a lo que el sujeto contestó que el 1, 2 y 3; preguntando el instructor ¿y si quisiera representar cualesquiera números consecutivos, el 8, 9, 10 utilizando una **x**?,

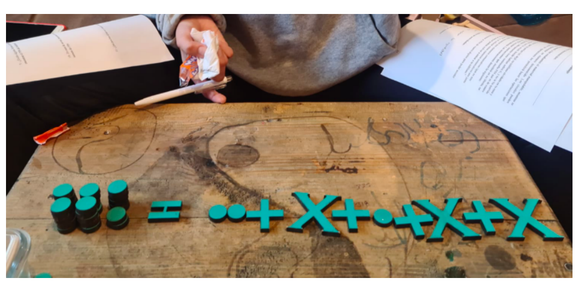
Respondió que deberían ser tres x ya que estas pueden tener el valor que se necesite.

El instructor le preguntó si la x puede valer 8, 9 y 10 al mismo tiempo y el sujeto colocó de la siguiente manera los manipulables.

El instructor preguntó qué entonces qué otros números podrían representar esta forma en que había colocado el material, a lo que el sujeto respondió después de pensarlo unos 5 minutos que podrían ser cualquier número y los dos siguientes de ese número.

Preguntó el instructor si podrían ser el 1000,1001 y 1002 o el 50, 51 y 52. A lo que el sujeto contestó que podrían ser cualquier número y sus dos siguientes.

8.- El sujeto respondió que no sabía qué dibujo o esquema realizar. El instructor le mencionó que podrían ser números, que primero los representara con el material, que debía estar en una sola fila todos los números y el signo de igual, que no olvidara que cada círculo de madera representa la unidad. El sujeto preguntó cómo debía quedar a lo que el instructor le mencionó que es lo que representaban las del lado izquierdo las tres X y los tres círculos y que es lo que representaban los 27 círculos. El sujeto contestó que la suma de las **x** y los tres puntos debían ser igual a los 27 círculos. Y después colocó el material de la siguiente manera.



9.- El sujeto respondió sin ningún tipo de pregunta o duda.

10.- El sujeto respondió sin ningún tipo de pregunta o duda.

11.- El sujeto respondió sin ningún tipo de pregunta o duda.

¿Usted qué opina de la actividad y de lo que sucedió?

Creo que hasta aquí la actividad es correcta, con quizá algunos pequeños cambios. Pero no logro ver un camino de cómo lograr que el alumno construya por sí mismo la forma de resolver una ecuación. Comenzaré a buscar la forma de resolver una más sencilla y si lo logro le aviso doc.

APÉNDICE G. Transcripción de las grabaciones en video

Con la finalidad de ahorrar papel durante el proceso de impresión de la tesis, las transcripciones de las videograbaciones se pueden consultar, en formato electrónico, en:

https://drive.google.com/drive/folders/1ncLEqy3t_GoPeM8mGh0iUKK0Sc3OUy9G?usp=sharing