UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

TESIS

El aprendizaje del tema de fracciones en alumnos de sexto grado de primaria

Para obtener el título de

Maestro en Ciencias de la Educación

PRESENTA

Daniel Higuera Tinoco

Director

Dr. Octaviano García Róbelo

Codirector

Dra. Cristianne Butto Zarzar

Comité tutorial

Dra. Anna Tarasenko

Dr. Jorge Luis León Gonzales

Pachuca de Soto, Hgo., Diciembre de 2022

No. Of. UAEH/ICSHu/ARACED/MCE/346/2022

Asunto: **Autorización de impresión**

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA U.A.E.H.
P R E S E N T E

El Comité Tutorial de la **TESIS** del programa educativo de posgrado titulado "**El aprendizaje del tema de fracciones en alumnos de sexto grado de primaria**", realizado por el sustentante **Daniel Higuera Tinoco** con **191046** perteneciente al programa de **Maestría en Ciencias de la Educación**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Reciba saludos cordiales.

A T E N T A M E N T E
"AMOR, ORDEN Y PROGRESO"
Pachuca de Soto, Hidalgo, 29 de noviembre de 2022

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES

Mtra. Ivonne Juárez Ramírez
Directora del ICSHu

Dr. Octaviano García Robelo
Director de Tesis

atar

Dra. Anna Tarasenko
Asesor Metodológico

Cristianne Butto Zarzar

Dra. Cristianne María Butto Zarzar
Codirectora

Dra. Maritza Librada Cáceres Mesa
Lectora

Dr. Jorge León González
Suplente

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
DIRECCIÓN DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR
30 NOV 2022
RECIBIDO

11:54
Paola
Isamar
Hedz
Hedz

C.c.p.: Archivo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT)** por haberme dado financiamiento mediante el programa de becas nacionales a estudiantes de posgrado. Sin este apoyo habría sido imposible dedicarle tiempo completo a mis estudios de maestría.

Del mismo modo, agradezco a los contribuyentes mexicanos que son quienes con su responsabilidad civil y aportaciones al erario público, financian no solo dicho programa, sino también a las escuelas públicas y en general al sistema educativo mexicano.

Agradezco a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo y al programa de Maestría en Ciencias de la Educación por brindarme la oportunidad de generar un crecimiento intelectual y como persona a lo largo de estos últimos años.

Agradezco a mi director de tesis, el Dr. Octaviano García Róbelo, por haberme brindado su acompañamiento en esta difícil tarea de escribir mi tesis. Le agradezco por ser una persona comprometida y con una gran empatía hacia quienes le rodean.

Agradezco también a mi co-directora de tesis, la Dra. Cristiaane Butto Zarzar por aceptar asesorarme y orientarme sobre la escritura de mi tesis. Le agradezco, Dra., por haberme ayudado justo cuando el panorama se veía más que gris e incierto que nunca. Con sus consejos, sugerencias y sobre todo, discusiones, me demostró estar muy comprometida con ayudarme a sacar adelante mi trabajo de investigación.

A mi madre y hermano por brindarme su tolerancia y apoyo a lo largo de estos difíciles años.

Finalmente, agradezco al destino y a la suerte por haberme permitido seguir vivo en estos complicados años de pandemia. Se dice fácil, pero al principio de la pandemia y la maestría (2020) se me hacía complicado pensar que a mediados de 2022 pudiera estar presentando y defendiendo mi tesis, pero fue hasta diciembre.

Resumen

Se reporta un estudio sobre el aprendizaje de fracciones con estudiantes de sexto grado de primaria de una escuela pública del estado de Hidalgo. El objetivo de la investigación fue identificar las principales dificultades que presentaron los alumnos de sexto grado de primaria en el aprendizaje de fracciones, posteriormente se diseñó y aplicó una secuencia de actividades y se verificó como avanzaron conceptualmente en dicho contenido escolar. El marco teórico se fundamentó en el modelo recursivo de Thomas Kieren, para el referido autor los números racionales se componen de constructos interrelacionados y el conocimiento de las fracciones se divide en sub-constructos. Este autor propone un modelo que se basa en el conocimiento integral del número racional y en las conexiones entre cada idea. Por su parte, la metodología utilizada fue mixta de tipo concurrente, con un diseño pre-experimental y un estudio de caso instrumental. El estudio fue llevado a cabo en dos fases, la primera tuvo que ver con la aplicación de un cuestionario sobre fracciones. Del mismo modo, la segunda fase del estudio consistió en el diseño y aplicación de una secuencia de actividades para trabajar las ideas matemáticas sobre fracciones. Participaron del estudio 36 alumnos de sexto grado de primaria de una escuela pública del Estado de Hidalgo, México. Los resultados de la investigación revelaron que los alumnos que participaron en la investigación tuvieron dificultades para comprender las ideas de Secuencia de fracciones, ordenamiento de fracciones, trabajo con proporcionalidad, entre otras. Del mismo modo, se pudieron observar que comprenden algunas ideas básicas como la noción de parte-parte y parte-todo, la idea de entero o unidad. Posterior a la aplicación de las actividades se encontró que los alumnos presentaron un mejor nivel de conceptualización matemática, como también en la representación de esas ideas. La secuencia de actividades mostró ser efectiva en la comprensión de las ideas que involucran el concepto de fracciones.

Abstract

A study on the learning of fractions with sixth grade students of a public school in the state of Hidalgo is reported. The objective of the research was to detect the main difficulties that sixth grade students present in learning fractions and how they can be worked on based on the analysis of the way in which they respond to fraction problems. The theoretical framework was based on the recursive model of Thomas Kieren. For its part, the methodology used was mixed concurrent, with a pre-experimental design and an instrumental case study. The study was carried out in two phases, the first had to do with the application of a questionnaire on fractions to the 36 students who participated in it, where the responses of the students were categorized to classify them as high, medium and low understanding of the topic to be able to interview some of them (six) and find out the strategy they used to solve the problems that were presented in the questions. In the same way, the second phase of the study consisted of the design and application of a didactic strategy to work on the mathematical ideas that were most difficult for the students. The results of the research revealed that the students who participated in the research had difficulties from understanding the part-whole relationship that fractions have to making the transition from fraction to decimal. In the same way, it is possible to observe a difficulty of some students who participated in this to conceptualize and assimilate the magnitude of fractional numbers. Returning to the process of transition from fractional to decimal, it was found that the students who presented the best level of knowledge and skills to work on this subject start from assimilating a fractional number as a decimal number. For this reason, it seems important, to explore more about what is difficult for students who have a low level of achievement in the subject of fractions, to explore first, how related the students are to these two subjects (fractions and decimals), as well as asking why even highly literate students seem to have trouble recognizing decimal numbers that have more than three digits to the right of the decimal point.

ÍNDICE

INDICE DE FIGURAS

INDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

El presente es el resultado de una investigación que se realizó con el objetivo de conocer las dificultades que presentan los alumnos de educación primaria en una escuela ubicada en Actopan, México en el aprendizaje de las fracciones.

El llevar a cabo este trabajo de investigación permitió conocer no solo las principales dificultades que presentan alumnos de sexto grado de primaria en su proceso de aprendizaje de fracciones, sino entender, con base en el propio discurso de los alumnos, así como la observación de la forma en que responden ante problemáticas en donde se involucra el razonamiento con números racionales, por qué y de qué manera están presentes estas dificultades.

Avanzar en la indagación de esta área de las matemáticas, permitió aportar nuevos conocimientos, así como abrir posibilidades pedagógicas que permitan promover y asegurar estos conocimientos, que son fundamentales para promover otros conocimientos matemáticos y funciones cognitivas de los niños. Esto como una forma de colaborar para solucionar la problemática que vive la educación básica para el logro del aprendizaje de las matemáticas en México.

De tal manera que en un primer momento estas dificultades se buscaron y detectaron en la literatura ya existente. Es así como se construyó un cuestionario que formó parte del estudio piloto de la presente investigación. Este cuestionario fue aplicado a un universo de treinta y seis alumnos. La intención de este cuestionario fue medir qué tan presentes estaban las dificultades que ya habían sido reportadas en la literatura.

Después, ya como parte del estudio principal, se construyó un segundo cuestionario con base en el presentado por Butto (2013) en su investigación. Esta vez, la intención fue detectar y analizar cuáles y de qué manera eran las dificultades presentes en el aprendizaje del tema de fracciones en el mismo universo de alumnos. Más adelante se aplicaron entrevistas de tipo clínicas al estilo de Piaget.

Del mismo modo, uno de los objetivos de la investigación fue diseñar una intervención didáctica con la que se pudiera trabajar con algunos de los alumnos que demostraron tener bajo nivel de comprensión de la temática con base en los cuestionarios, para verificar y demostrar qué tan conveniente resultó la misma en el trabajo y comprensión del tema. Más adelante se llevaron a cabo entrevistas de tipo clínico pensadas desde el enfoque de Piaget (1960).

En el capítulo 1 se aborda la problemática que da lugar a la presente investigación, es decir, por qué existen dificultades en los alumnos de primaria para comprender el tema de fracciones y más puntualmente, qué problemáticas existen en el contexto nacional. Del mismo modo se hace mención de indicadores tanto nacionales como internacionales de cómo estas dificultades inciden en los puntajes obtenidos en los mismos y en general en el aprendizaje de las matemáticas de los alumnos en México.

Posteriormente en el capítulo 2 se mencionan los aspectos generales de las fracciones y su didáctica. Partiendo desde el origen histórico en el que el hombre hubo de utilizar las fracciones por necesidad de contar algunos elementos, posteriormente se hace una narrativa sobre lo que dicen las teorías del aprendizaje al respecto de la didáctica de fracciones y finalmente se mencionan algunas dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones a nivel primaria que investigaciones recientes han expuesto.

El capítulo 3 está construido con base en las investigaciones que se han realizado sobre este tema previo a la construcción de la presente. Se hace un pequeño recuento de investigaciones nacionales e internacionales donde se mencionan tanto problemáticas como dificultades para el aprendizaje y enseñanza de este contenido escolar.

Previo a la aplicación de los cuestionarios se construyó un marco teórico que diera sustento a la propia investigación, en donde Thomas Kieren es el principal referente del mismo. Bajo la teoría de este autor se pueden clasificar los niveles de comprensión que tiene el hombre sobre los conceptos y conocimientos matemáticos, así como particularmente los procesos en los que interviene el razonamiento cognitivo al trabajar con números de tipo racional. Esto queda expuesto en el capítulo 4 de la presente investigación.

En el capítulo 5 se elaboró un pequeño marco contextual tanto de la escuela donde tuvo lugar esta investigación, así como de los alumnos que participaron en ella. Del mismo modo se habla un poco acerca del libro de matemáticas de la escuela primaria mexicana y de cómo y en qué momento aparece el aprendizaje y trabajo de fracciones en éste.

En el capítulo 6 se expone la metodología que se utilizó en el presente trabajo de investigación, que fue de tipo mixta, pues primero se analiza y describe cuantitativamente lo detectado en los cuestionarios aplicados a los alumnos; del mismo modo, en un corte más cualitativo, se analiza, con base en entrevistas de tipo clínico (Delval, 2001 y Butto, 2013), la forma en que los alumnos respondieron ante los reactivos del segundo cuestionario y el razonamiento que utilizaron para llegar a sus resultados, tanto si este fue correcto o incorrecto. Esto se expone en el capítulo 6 de la investigación

En el capítulo 7 del presente documento se pueden ver los resultados obtenidos tanto en el análisis de los cuestionarios, la fase de entrevistas con los alumnos seleccionados y una prueba post test que se le hizo a los alumnos que participaron en la intervención didáctica.

De tal manera que se puede observar que algunos alumnos presentan dificultades desde la comprensión de la relación parte-todo que tienen las fracciones, concepto que deberías ser aprendido desde el tercer y cuarto grado de primaria y que incide en la capacidad de estos para entender ideas como la expresión de cantidades con números fraccionarios como identificar a las fracciones impropias o mixtas, con lo que los alumnos no pueden comprender que una fracción puede estar expresando una cantidad mayor a la unidad.

Un hallazgo que se encontró en el presente a propósito de las habilidades para comprender el tema de fracciones fue la capacidad de transformar y vincular a estos con los números decimales. De tal manera que un alumno que, en los capítulos seis y siete del presente se explica cómo esta habilidad facilita la comprensión y el trabajo con los números fraccionarios.

Finalmente, el capítulo 8 se construyó con las conclusiones del trabajo de investigación. Es importante mencionar que la principal sugerencia que se hace como resultado de esta investigación es el que la enseñanza de fracciones debería estar construida desde la intención de hacer ver al alumno que las fracciones son, al igual que los números naturales, números más que pueden ser representados en una línea recta.

Como ya se expuso, y con base tanto en la investigación de Castro (2001) como en los hallazgos de esta investigación, es importante trabajar como uno de los objetivos principales en la enseñanza de fracciones, el poder transformar estas en números decimales y viceversa. En la presente investigación se pudo detectar que el alumno tiene mayor capacidad de comprender a las fracciones cuando entiende que una expresión fraccionaria es una división que arrojará un número decimal.

CAPÍTULO 1. Planteamiento del problema

1.1 Problema de investigación

En México, la educación básica está comprendida por tres etapas: preescolar, primaria y secundaria. Desde 1993 los tres niveles son obligatorios en México y estos niveles están diseñados para dirigirse, en general, a una población de entre los cuatro y quince años de edad. Ésta educación básica en México, propone en su naturaleza, un trayecto formativo congruente para desarrollar competencias de tal manera que cuando el estudiante culmine la misma, preferentemente a los quince años, sea como tal, capaz de dar una respuesta eficaz a los problemas cotidianos que enfrenta (Juárez, 2018).

Por lo anterior, se vuelve importante mencionar que justo en el marco de la educación primaria, los campos formativos son el lenguaje y comunicación, pensamiento matemático, exploración y comprensión del mundo natural y social, desarrollo personal y para la convivencia (Juárez, 2018).

Y más particularmente, en el campo formativo del pensamiento matemático, el objetivo es articular y organizar un tránsito entre la aritmética y la geometría, de la interpretación de la información y procesos de medición al lenguaje algebraico, del razonamiento intuitivo al deductivo y de la búsqueda de información a los recursos que utiliza para presentarla.

Por otro lado, es preocupante el bajo nivel de aprovechamiento que existe en México en el nivel básico en el área de matemáticas. Una prueba de esto son las estadísticas de La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) y la prueba PISA (2018), reportan que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, pues si bien es cierto que esta se realiza a jóvenes en promedio tres años más grandes (15 años) que la que tienen los niños al egresar de la primaria (12 años), es un indicador, toda vez que estos problemas de aprovechamiento y aprehensión de conocimientos y habilidades se acumulan en la vida académica de los niños y jóvenes en el país. (Sánchez, 2017).

Es decir, que los alumnos de nivel primaria no comprendan y se apropien correctamente de los contenidos matemáticos estudiados durante la primaria será algo que repercutirá, como se ve más adelante, en su educción secundaria o bachillerato cuando intenten entender otros contenidos matemáticos que usen como base a los aprendidos durante la primaria (Perera y Valdemoros, 2007 y Capilla, 2016).

Regresando a la prueba PISA (2018), ésta señala que más de la mitad de los jóvenes mexicanos que presentaron ésta obtuvieron un puntaje por debajo del promedio obtenido por los países pertenecientes a la OCDE. Esto es una clara señal del rezago de aprendizaje que tienen los jóvenes mexicanos en el área de las matemáticas.

En ésta prueba PISA (2018) se midió el nivel de conocimientos en el área de matemáticas y México quedó ubicado en el lugar número 61 de 78 países que participaron en dicha prueba. De igual modo es importante mencionar que países como Uruguay, Chile, Costa Rica, Perú y Argentina quedaron ubicados en los lugares 58, 59, 63, 64 y 71 respectivamente (Díaz, 2021). Lo anterior es una evidencia de que el rezago en conocimientos matemáticos en los niños y jóvenes es general en la zona latinoamericana ya que los países mencionados mostraron resultados muy similares a los de México.

En el contexto nacional, se pueden analizar los resultados de la prueba PLANEA, en donde es posible apreciar en la prueba llevada a cabo en 2019, los estudiantes de nivel primaria, particularmente los que en ese momento cursaban sexto años, demostraron un bajo nivel de conocimientos. Esta situación quedó de manera muy manifiesta en lo que respecta a las pruebas de conocimientos del área de matemáticas, es decir, hasta el 60% de estos alumnos evaluados (en PLANEA 2019) demostraron estar por debajo de los niveles satisfactorios para los estándares de esta prueba al respecto de los conocimientos matemáticos. Con esto es posible destacar que existe un logro insuficiente de aprendizajes de acuerdo con lo expuesto al principio del presente.

Como prueba de este bajo nivel de aprovechamiento que se detecta gracias a las pruebas de PLANEA, está lo mencionado por el mismo Juárez (2018), quien mencionó que los niños al culminar la educación primaria, en su mayoría, tienen nociones en cuanto a la comparación de números naturales, pero no han desarrollado la capacidad de resolver problemas aritméticos como comparación de cantidades o distribuciones de proporciones.

Hasta aquí, se han mencionado las limitantes que existen en el aprendizaje del área de las matemáticas por parte de los alumnos de primaria en México, particularmente de los que cursan en sexto grado, y como esta carencia en cuanto a la aprehensión y asimilación de los contenidos del área de matemáticas se ve reflejada en las pruebas mencionadas, y además, es evidente que estos retrasos y dificultades que a están presentes en los últimos grados de primaria conllevan a continuar con un mal aprendizaje de los contenidos matemáticos de ciclos posteriores como lo son la educación secundaria (prueba PISA).

Por otro lado, las matemáticas son el cimiento y base de todas las ciencias exactas y estudiar y trabajar con ellas desarrolla en las personas un pensamiento abstracto, inductivo, analógico y deductivo. A su vez el ser deductivo genera y despierta en el hombre el trabajo de pensar. Y al convertirse el hombre en un ser que piensa, deduce y genera estrategias para la resolución de alguna situación problemática, se vuelve en un individuo que pone en marcha los mecanismos que el estudio y trabajo de las matemáticas despertaron en él (Chaler, 2017).

Es por esta importancia que la matemática es la ciencia con mayor nivel de aplicabilidad en la vida cotidiana y profesional. Por esta razón se vuelve necesario el investigar acerca de qué factores pueden ser los que influyan en el nivel de aprovechamiento por parte de los alumnos (Vallejo, 2018).

Uno de los conceptos de mayor importancia en el campo del pensamiento numérico, sobre todo en la educación básica, es el de la temática de las fracciones. Esta importancia radica en el uso tanto en situaciones cotidianas, como por la aplicabilidad que tiene este aprendizaje (de las fracciones) en distintas áreas del conocimiento.

La comprensión operativa del concepto de fracción debe proporcionar la fundamentación en la que se apoyen las operaciones algebraicas que se van a desarrollar posteriormente. Un buen 11 trabajo con las fracciones puede contribuir a que estas operaciones algebraicas no se conviertan en algo sin sentido para los niños (Llinares & Sánchez, 2000).

Es decir, el que un alumno, de nivel básico, como lo es este caso, aprenda a trabajar y operar con números racionales y por ende, con números fraccionarios, permite a este el comprender la naturaleza misma de los números en su relación “parte-todo”. Se vuelve importante entonces, en niveles básicos como la primaria, el aprender a asignar un número a la representación de una parte de un todo.

De tal manera que el primer reto en los proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones está, como lo cita Dávila (2002), en encontrar la manera de llevar este tema tan crucial e importante a las aulas infantiles. Y en un contexto mexicano, según Block (2001), lograr un aprendizaje significativo al respecto de qué son las fracciones y cuál es la forma de operar con éstas cuando el alumno se encuentre ante un problema de tipo matemático.

De hecho, con relación a esto último, es importante recordar que la Secretaría de Educación Pública (S.E.P. 2017), señala la importancia de que los alumnos que egresan de una educación primaria sean capaces de resolver y entender problemas con comparación de cantidades expresadas en términos racionales, así como la capacidad de aplicar esta capacidad de resolución de problemas en otros contextos que no sean los escolares.

Desde esta perspectiva, se entiende la necesidad que tiene la escuela primaria en México para lograr que el alumno no solo memorice la forma de operar con los números fraccionarios o de crear conceptos ambiguos sobre estos, sino de entender a fondo qué son y qué representan este tipo de números y, más importante aún, lograr que todos los aprendizajes que se alcancen (sobre las fracciones y en general del área de matemáticas) en la educación primaria tengan una incidencia en desarrollar habilidades y capacidades del tipo lógico-matemático en los alumnos.

De igual manera, es importante mencionar que, como ya se mencionó anteriormente, una correcta comprensión del concepto, utilidad y operatividad con los números fraccionarios, en general y particularmente en niveles básicos educativos, ayuda a la comprensión de conceptos matemáticos como lo son la estadística, el cálculo e incluso con la comprensión de datos financieros (Perera y Valdemoros, 2007; de Di Pego, 2012 y Capilla, 2016).

En este sentido se vuelve necesario el detectar qué problemática existe en los alumnos de nivel primaria para comprender y trabajar con los números fraccionarios así como con las ideas matemáticas que se relacionan a estos.

De tal manera que, en respuesta a los expuesto hasta este momento, con la presente investigación se pretende exponer las dificultades y problemáticas que se encuentran presentes en los procesos de aprendizaje de los alumnos de sexto grado de primaria en México en la comprensión del número fraccionario y las ideas matemáticas relacionadas con el trabajo con estos. Al mismo tiempo que analizar la veracidad de una intervención didáctica que se centre en atender esas dificultades.

Con base en lo expuesto hasta aquí, es posible dar cuenta de por qué en México se dificultan los proceso de aprendizaje de las fracciones.

En la escuela primaria, estas dificultades comienzan desde el momento en que el alumno no fue capaz de asimilar y comprender qué representaban las fracciones y por ende, no genera un aprendizaje significativo (Pérez, 2008).

A partir de esta situación (no comprender qué representan las fracciones), los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje se desarrollan en un contexto de obstáculos tanto para docente como los alumnos (Moctezuma, 2012).

A propósito de lo anterior, son diversos los autores que han mencionado al respecto de los obstáculos, errores y dificultades a los que se enfrentan docentes y alumnos de nivel primaria en los proceso de enseñanza y aprendizaje de números fraccionarios.

Investigaciones como las de Rodríguez (2017), Godino (1994), Neisser (2004), Esparza y Corona (2017), Perera y Valdemoros (2009) y Cortina et al., (2013) exponen que uno de los principales errores y obstáculos en el aprendizaje de los números fraccionarios es la asimilación del concepto de ese contenido escolar. La literatura reporta que este error generalmente aparece en los grados de tercero y cuarto de primaria.

A partir de mencionar los rezagos y problemas que tienen los alumnos en la escuela en México para trabajar y generar conocimientos del área de matemáticas, se puede comprender como estas también son notorias en el tema de fracciones. Investigaciones como las de Godino et al., (2003) y Quintanilla (2012), se puede observar que los alumnos de nivel básico tienen dificultad al momento de trabajar con números fraccionarios debido a que los alumnos presentan dificultades con los conocimientos matemáticos previos, como lo son los números enteros.

De tal manera que, de acuerdo a los autores mencionados, dada la falta de motivación por parte tanto del alumno para aprender, como del docente para enseñar; existe una dificultad muy marcada al momento de comprender qué significan y qué representan los números fraccionarios para los primeros.

Por otro lado, Quintanilla (2012) señala que los alumnos en México, además de tener dificultades para comprender ideas matemáticas como lo son la igualdad y simplificación de fracciones, estos tienen problemas para ubicar una fracción dentro de una línea numérica. Esto resulta ser un problema cuando toca el momento de trabajar con la transformación de números fraccionarios a decimales y viceversa (Cortadellas, 2016).

Del mismo modo que un obstáculo para trabajar la conversión de fraccionarios a decimales y viceversa, el no aprender correctamente ideas matemáticas relacionadas con la discriminación de la expresión (tamaño) de éstas, incide en la capacidad que pudieran tener los alumnos en proceso educativos más adelantados como lo son la educación secundaria o media superior para entender conceptos como lo son la proporcionalidad y la estadística (Escolano, 2005).

Regresando al contexto de la educación básica en México, investigaciones como las de Camacho (2020), quien trabajó su investigación con alumnos de sexto grado de primaria, señaló que estos presentan dificultades al momento de trabajar con cualquier tipo de números, desde los números naturales, pasando por los números positivos y negativos hasta llegar a los números fraccionarios. Señala el investigador que la dificultad para comprender y poder trabajar con números fraccionarios puede ser consecuencia de no haber llevado a cabo un correcto proceso en el transito del trabajo y enseñanza con números naturales a racionales.

El problema entonces, al trabajar con números fraccionarios en nivel primaria, es que los alumnos presentan además de problemas con los conocimientos previos, una evidente y marcada tendencia a no preocuparse por entender qué carácter tiene un número fraccionario en relación a un entero, ni qué significado tienen los números fraccionarios en esquemas continuos o discretos (Ríos, 2011).

Por su parte, Cortina (2012) señala que en las aulas mexicanas existe una dificultad muy marcada al respecto de cómo los alumnos asimilan los elementos y conceptos del número fraccionario, así como la utilidad que tienen estos al momento de entender la relación que tienen con los números naturales.

Cortina (2012), de hecho, quien basó su investigación en el trabajo con números fraccionarios en alumnos de sexto de primaria en México, señala que estos demuestran dificultad en comprender la relación que guardan los números racionales con los decimales; lo que a su vez conlleva a la ausencia de comprensión al respecto de cómo generar números fraccionarios a partir de una unidad. Es decir, un porcentaje importante de alumnos considera que una fracción es siempre el resultado de contar elementos en un entero perfectamente fracturado.

Con lo expuesto en los últimos párrafos y de acuerdo a las aportaciones de diferentes investigaciones, se puede decir que los alumnos en sexto grado de primaria en México presentan dificultad para entender a una fracción como una relación "Parte-todo". Del mismo modo que esto puede ser consecuencia de una incorrecta planeación al respecto de cómo explicar al alumno que los términos "números naturales" y "números racionales" no son más que una manera de clasificar a los números, y que esto no significa que estos sean dos cosas diferentes. Y que, entonces, ambos números (enteros y racionales) pueden expresarse sin restricción alguna en una línea recta.

Con relación a lo anterior, el propio Cortina (2012) señala la dificultad que tienen los alumnos en México, al comprender a una fracción como el resultado de una división y no una fracturación. Es decir, no comprenden los alumnos que la naturaleza del número "2/5" es dividir "2" entre "5", y por el contrario, como se mencionó en el párrafo anterior, la conciben como el trabajo de encontrar un entero perfectamente divisible entre “5” partes y tomar “2” de esas partes. Esto sin duda alguna, refleja una dificultad para generar números fraccionarios.

De tal manera que, con lo expuesto hasta aquí, se entiende que existen diversas dificultades con los números fracciones y por lo tanto, existe la necesidad de trabajar este contenido escolar con los estudiantes de educación primaria. Del mismo modo, el problema se sitúa en que las formas tradicionales de su enseñanza y es conveniente, no solo estudiar las dificultades que presentan los estudiantes con ese contenido escolar, sino que también ofrecerles a los estudiantes un conjunto de actividades didácticas para que puedan avanzar conceptualmente.

En esta investigación además, es de igual manera necesario exponer cuáles son las dificultades que presentan los alumnos en los procesos de aprendizaje del área de las matemáticas. Por esta razón este trabajo de investigación tiene como objeto de estudio el aprendizaje del tema de fracciones en alumnos de sexto grado de primaria de una escuela de Hidalgo, en México. Al respecto de esto, existe la necesidad manifiesta de que los estudiantes comprendan el concepto de fracción y mejoren su habilidad para resolver situaciones problema relacionadas con el tema.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Identificar las principales dificultades que presentan los estudiantes de sexto grado de primaria en el aprendizaje de fracciones y trabajar una secuencia de actividades didácticas en el aula.

1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar las dificultades en el aprendizaje de fracciones con estudiantes de sexto grado de primaria.
- Diseñar y aplicar una intervención didáctica sobre fracciones en alumnos de sexto grado de primaria.
- Estudiar la viabilidad de la intervención didáctica en el aprendizaje los estudiantes sobre fracciones.

1.3 Preguntas de investigación

- ¿Qué dificultades presentan los estudiantes de sexto grado de primaria en el aprendizaje de fracciones?
- ¿Cuál es el origen de estas dificultades en los alumnos de sexto grado de primaria?
- ¿De qué manera influye una intervención didáctica en el aprendizaje de las fracciones en alumnos de sexto grado de primaria?

1.4 Justificación

Las matemáticas son el cimiento y base de todas las ciencias exactas y estudiar y trabajar con ellas desarrolla en las personas un pensamiento abstracto, inductivo, analógico y deductivo. A su vez el ser deductivo genera y despierta en el hombre el trabajo de pensar. Y al convertirse el hombre en un ser que piensa, deduce y genera estrategias para la resolución de alguna situación problemática, se vuelve en un individuo que pone en marcha los mecanismos que el estudio y trabajo de las matemáticas despertaron en él (Chaler, 2017).

Es por esta importancia que la matemática es la ciencia con mayor nivel de aplicabilidad en la vida cotidiana y profesional. Por esta razón se vuelve necesario el investigar acerca de qué factores pueden ser los que influyan en el nivel de aprovechamiento por parte de los alumnos (Vallejo, 2018). En esta investigación además, es de igual manera necesario exponer cuáles son las dificultades que presentan los alumnos en los procesos de aprendizaje del área de las matemáticas.

Uno de los conceptos de mayor importancia en el campo del pensamiento numérico, sobre todo en la educación básica, es el de la temática de las fracciones. Esta importancia radica en el uso tanto en situaciones cotidianas, como por la aplicabilidad que tiene este aprendizaje (de las fracciones) en distintas áreas del conocimiento.

Por esta razón este trabajo de investigación tiene como objeto de estudio el aprendizaje del tema de fracciones en alumnos de sexto grado de primaria de una escuela de Hidalgo, en México. Al respecto de esto, existe la necesidad manifiesta de que los estudiantes comprendan el concepto de fracción y mejoren su habilidad para resolver con facilidad situaciones problema relacionadas con el tema.

La comprensión operativa del concepto de fracción debe proporcionar la fundamentación en la que se apoyen las operaciones algebraicas que se van a desarrollar posteriormente. Un buen 11 trabajo con las fracciones puede contribuir a que estas operaciones algebraicas no se conviertan en algo sin sentido para los niños (Llinares & Sánchez, 2000).

Es decir, el que un alumno, de nivel básico, como lo es este caso, aprenda a trabajar y operar con números racionales y por ende, con números fraccionarios, permite a este el comprender la naturaleza misma de los números en su relación “parte-todo”. Se vuelve importante entonces, en niveles básicos como la primaria, el aprender a asignar un número a la representación de una parte de un todo.

De tal manera que la problemática en la pedagogía de fracciones está, como lo cita Dávila (2002), en encontrar la manera de llevar este tema tan crucial e importante a las aulas infantiles. Y en un contexto mexicano, según Block (2001), lograr un aprendizaje significativo y que represente oportunidades de desarrollo en el alumno de primaria es complicado.

De hecho, con relación a esto último, es importante recordar que la Secretaría de Educación Pública (S.E.P. 2017), señala la importancia de que los alumnos que egresan de una educación primaria sean capaces de resolver y entender problemas con comparación de cantidades expresadas en términos racionales, así como la capacidad de aplicar esta capacidad de resolución de problemas en otros contextos.

Hasta aquí se vuelve necesario mencionar que una correcta comprensión del concepto, utilidad y operatividad con los números fraccionarios, en general y particularmente en niveles básicos educativos, ayuda a la comprensión de conceptos matemáticos como lo son la estadística, el cálculo e incluso con la comprensión de datos financieros. (Perera y Valdemoros, 2007; de Di Pego, 2012 y Capilla, 2016).

En este sentido se vuelve necesario el detectar qué problemática existe en los alumnos de nivel primaria para comprender y trabajar con los números fraccionarios así como con las ideas matemáticas que se relacionan a estos.

Se hace mención de la S.E.P. porque es esta la dependencia que en México está encargada de crear y regular las condiciones bajo las cuales se hace llegar la educación a la población.

De este modo y en respuesta a lo expuesto hasta este momento, con la presente investigación se pretende exponer las dificultades y problemáticas que se encuentran presentes en los procesos de aprendizaje de los alumnos de sexto grado de primaria en México en la comprensión del número fraccionario y las ideas matemáticas relacionadas con el trabajo con estos. Al mismo tiempo que analizar la veracidad de una intervención didáctica que se centre en atender esas dificultades.

CAPÍTULO 2. Las fracciones: qué son y las dificultades en su didáctica

En el capítulo 2 se expone brevemente un contexto sobre lo que son las fracciones y las dificultades que existen en la didáctica de estas, puntualmente en la educación básica.

De tal manera que en primer lugar se hace mención de cómo el ser humano tuvo la necesidad de medir y expresar cantidades con números fraccionarios. Se menciona al Papiro de Ahmes y la relación que guarda este con los signos de los números fraccionarios; posteriormente se mencionan las diferentes formas en que las fracciones son interpretadas. Finalmente, como ya se mencionó, se mencionan algunas investigaciones que abordan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones y las dificultades a las que se enfrentan los alumnos de nivel básico ante este contenido escolar.

2.1 Orígenes de las fracciones

Los primeros tipos de números construidos de la humanidad fueron los números naturales. Los números naturales son útiles para contar cantidades "naturales" de la naturaleza: Un balón, 5 perros, 15 caballos, etc. Los hombres los utilizaban para contar su ganado, los bienes que intercambiaban con otras personas, etc. Posteriormente, el hombre se dio cuenta que no siempre había sólo cantidades "naturales", también se podía tomar media manzana, un cuarto de una pera, cabra y media; de ahí surgieron los racionales. Las fracciones fueron llamadas “rotos” cuando estas comenzaron a ser utilizadas, posteriormente se les conocía como “quebrados”. Actualmente estas (las fracciones) son llamadas fraccionarios o bien, racionales, que en todo caso significan ración o parte de un todo (Bolívar, 2013).

De acuerdo a Lacher (2017) el término de “número fraccionario” es extensamente completo y no es un concepto en sí, sino un “mega concepto”. Lacher (2017) señala que la necesidad cotidiana del hombre por medir y resolver problemas de longitud, áreas, pesos y volúmenes es lo que dio pie al nacimiento de las fracciones como las conocemos hoy día.

En este sentido, Escolano y Gairín (2005) retoman los conceptos de Bishop

(1999) quien define etimológicamente a los números fraccionarios desde su característica de Parte-Todo, y define esta condición como una necesidad que tiene el ser humano adquirida de las actividades elementales que lleva día a día. Esta necesidad, mencionan los autores, se traduce en cómo encontrar la manera de representar simbólicamente una "repartición". Repartición que de acuerdo a estos autores, no era posible de resolver con los propios números naturales.

2.1.1 La civilización egipcia, primera en utilizar y representar a los números fraccionarios

De acuerdo a Metaute (2017) las fracciones aparecieron en la contextualización humana hace ya casi cuatro mil años (1900 a. C) y fue la civilización egipcia aquella que por primera vez le dio uso a las fracciones, aunque, la autora señala que en aquellas inicios del uso de números fraccionarios los egipcios utilizaban únicamente aquellas fracciones que se conocían como "1/n". Es decir, los egipcios utilizaban fracciones únicamente en donde el numerador era igual a "1".

Entonces los egipcios entendían en un primer momento, de acuerdo a Metaute (2017), los egipcios comenzaron con el uso de "Fracciones unitarias" que era el nombre que se le daba estrictamente a aquellas fracciones que tenían como numerador, estrictamente a la unidad. Aunque, la propia Metaute (2017) señala que Alomoto (2016) ya encontraba que al mismo tiempo que los egipcios utilizaban a las "Fracciones unitarias" utilizaban aquellas fracciones como "2/3", "3/4" y "2/5", es decir, como dice Alomoto (2016) los egipcios utilizaban entonces, fracciones cuyo denominador era fácilmente de asimilar en el pensamiento y abstracción del hombre y que al mismo tiempo, les servía para dividir elementos en partes necesarias.

2.1.3 El Papiro de Ahmes y su relación de signos con los números fraccionarios

Continuando con los hallazgos de Metaute (2017), ella cita a Boyer (1968), quien menciona que los egipcios utilizaban en su momento al jeroglífico para representar al número fraccionario, y basa Boyer C. (1968) este argumento en el papiro de Ahmes que de hecho fue encontrado de 1958 en una ciudad comercial del Nilo por el anticuario escocés Henry Rhind.

Como se muestra en la figura número 1, en el papiro de Ahmes se pudieron detectar entre otras cosas, que los egipcios utilizaban las fracciones como costumbre en sus actividades donde tenían que calcular la "parte/todo".

De acuerdo a Monge (1991), Boyer C. (1968), los egipcios le daban importancia a la fracción "2/3", y esto se veía reflejado en el propio Papiro de Ahmes, en el que de acuerdo con él, los egipcios ya tenían la noción de que "2/3" era de hecho, la suma de dos elementos igualmente expresados como números fraccionarios, estos elementos eran "1/3". Boyer C. (1968) de hecho, detectó que en este papiro los egipcios ya tenían el conocimiento de que ese "2/3" era de igual manera la suma de elementos cuyo denominador tuviera un "6", esto dice él, se veía en una tabla que aparecía en el propio papiro. De hecho, Santillan (2001) proponía y estaba de acuerdo con Boyer (1968) y se dio a la tarea de argumentar esto y detectar los elementos y las formas con las que los egipcios veían a las fracciones y las acotaban en este papiro.

Figura 1 Papiro de Ahmes y la identificación de Santillan (2001).

De igual manera, en relación al papiro, se rescata lo encontrado por Gerván (2013), quien menciona al "jeroglífico de la boca" (Figura 2), el cual significaba "parte de", lo que hoy conoceríamos como numerador. De tal manera que debajo de él, solo se colocaba el denominador. Esta forma de representar a las fracciones dice Giménez (1986) sigue vigente hasta el día de hoy y queda como una de las herencias de la civilización egipcia de cómo se trabajaban los números fraccionarios, vistos por ellos como "parte de". Por su parte menciona Guanaco (2015) esta forma que menciona Giménez (1986) sobre cómo se representaba gráficamente una fracción no solo sigue vigente en la forma en que hoy día representamos a los números fraccionarios sino también tiene influencia sobre el cómo se vincula a la fracción como una división de un todo en donde de acuerdo a Álvarez (2004) el numerador se vuelve el divisor de un todo.

Figura 2. Ejemplo de cómo era utilizado el símbolo de la boca en la representación fraccionaria por la civilización egipcia.

Gervan (2013) también menciona que existían para los egipcios, signos especiales para aquellas fracciones que eran de uso frecuente y que de acuerdo a Alcaraz (2006) fueron aquellos elementos como parte de un todo que originaron que los egipcios tuvieran la necesidad de expresar simbólicamente a las fracciones. Estas fracciones que tenían signos especiales están ilustradas en la figura número 3.

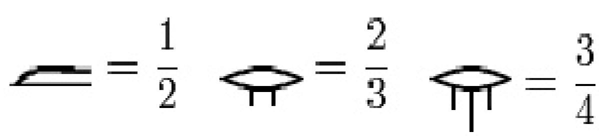


Figura 3. Números fraccionarios que tenían signos especiales por ser de uso frecuente.

2.2 Las interpretaciones de las fracciones

2.2.1 La fracción como parte todo

De acuerdo a Carrillo (2012), la expresión a/b es interpretada como la relación que existe entre dos cantidades específicas. Esto responde a un número que ha de ser dividido en “b” partes iguales, de tal manera que entonces “a” representa al número específico de esas partes iguales que han sido consideradas de ese total.

Retomando a Metaute (2017) quien en su investigación hace referencia de Obando

2006), el término “Parte-Todo” hace referencia a un “continuo discreto” que al igual que Carrillo (2012) lo ve como ese total que ha de ser dividido en partes iguales en donde ha de indicarse esencialmente la relación que existe entre el todo y un número designado de esas partes, lo que conocemos cono numerador. Metaute (2017) señala entonces que la fracción se vuelve una parte en sí y no como tal la relación de ambas cantidades.

Del mismo modo, menciona Metaute (2017) que el conceptualizar la relación “parte-todo” es la forma más lógica de comprender y asimilar las propiedades como lo pueden ser la “Fracción propia” y la “fracción impropia” o las relaciones de equivalencia, así como poder tomar un camino que pedagógicamente lleve a entender cómo es que operan las fracciones, desde el punto de vista de la suma, la resta, o diferentes operaciones en las que se ocupen a las fracciones, incluso, las fracciones algebraicas, donde menciona Metaute (2017) pareciera ser el concepto de fracción no tiene mucha relevancia, pero sí lo tiene desde el punto de vista al ser una “parte-todo” de un término algebraico como lo mencionan Juárez & López (2016).

Por su parte Obando (2003) en esta conformación de la fracción como una “Parte todo” menciona que tomando en cuenta los elementos que originan a conceptualizarse como una “Parte-todo” debe de tomarse en cuenta que su significado dependerá del contexto en que se esté trabajando, de tal manera que para poder comprender pedagógicamente el concepto de fracción el educador deberá tener conocimiento y pausa de diversos conceptos en los que se pueda utilizar esta relación parte todo. Estos diferentes conceptos pueden ser los mencionados por Higuera (2016) en relación al dinero visto como fracción, o los meses o temporadas del año vistos como elemento a considerar fraccionar.

Continúa Obando (2003) señalando que las actividades en el aula cuando se trabaje con números fraccionarios y se pretenda asimilar a estas como “Parte-todo” deben de tener no solo coherencia sino además, cubrir situaciones diversas y que hayan de poder ser ligadas a los aconteceres de la vida cotidiana de los alumnos, especialmente, cuando se hable de niños. De esta manera, el educando tendrá la capacidad de discriminar el contexto y esto tributa a su asimilación conceptual y de operación.

2.2.2 La fracción como cociente.

Retomando a Lacher (2017) y su forma de desglosar los elementos de la fracción vista desde el enfoque "a/b", se puede señalar que este término "a/b" significa el cociente de dos enteros, esto se traduciría en la más elemental de las explicaciones como decir "a" dividido entre "b", así entonces se obtiene la simple operación de dividir un número natural entre otro, siempre que obedezca la regla señalada por Duarte (2015) y este número en entre el que se va a dividir sea diferente de cero.

Con lo anterior entonces se puede entender que la fracción es el resultado de una situación de reparto donde como señala Lacher (2017) "se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir a unidades en partes iguales".

Por su parte Metaute (2017) retoma a Obando (2006) para entender a la fracción como una división misma que ha de arrojar en su cociente a un número racional, este ejemplificado como fracción. De tal manera que sintetiza Metaute en base a lo señalado por Obando (2006) que la fracción es el cociente de dividir un elemento entre otro elemento, esto visto como el elemento que vimos anteriormente, es decir, "a/b".

Así entonces y obedeciendo a los elementos que se han retomado hasta antes de estos últimos párrafos, la fracción es como tal, el resultado de una situación de reparto donde se busca identificar el número que ha de identificarse de acuerdo a Metaute (2017) como el tamaño de las partes resultantes a repartir a unidades en partes iguales, entiéndase con partes iguales como "b". De esta manera es como la fracción misma, señala Metaute (2017) adquiere un valor y no es ya solo un símbolo muerto sino que tiene un porqué de utilizarlo.

Concluye entonces Metaute (2017) que de acuerdo a los autores e investigaciones revisados por ella, es que el significado de fracción como cociente toma importancia. Esto obedece al hecho de que con esta asimilación (la de la fracción como cociente) se toma el camino a la comprensión de los números racionales, específicamente los fraccionarios, como un campo de cocientes, logrando entonces, formalizar la conceptualización de los mismos. Con esta interpretación dice Metaute (2017) se obtiene una forma de comenzar a trabajar en la asimilación de las fracciones en otro tipo de interpretaciones mismas.

2.2.3 La fracción como razón

Señala Lacher (2017) que los números fraccionarios son razones porque simbolizan la relación entre dos cantidades; es decir, la fracción “a/b” es la evidencia de la comparación de entre los valores “a” y “b”.

Para aterrizar un poco este concepto que señala Lacher (2017) podemos entender que el número “5/8” es la razón bidireccional que ha de existir propiamente entre los valores “5” y “8”. De esta manera la razón “5/8” puede ser vista como el número “.625”.

Ya por su parte Metaute (2017) justifica a la fracción como razón desde el argumento de que la generalidad de la interpretación de la fracción como razón consiste en que nos permite comparar cantidades de magnitudes diferentes, mientras que en la interpretación parte – todo en un contexto de medida sólo permite comparar cantidades del mismo tipo.

2.2.4 La fracción vista como un Mega Concepto

Lacher (2017) encuentra elementos en su investigación para ver al término “Fracción” no solo desde un punto de vista como concepto, sino que construye en esta misma investigación el término “mega concepto” y encuentra que Llinares &Sánchez (1997) sustentan a la fracción como mega concepto justificando en que pedagógicamente debe ser enseñada en valor de todos los elementos que la construyen, es decir, aquellas que interpretan a la fracción como “división” y “partición”. Estas formas que menciona Lacher (2017) son ver a la fracción como cociente, como razón, y como operador.

Lacher (2017) concluye de acuerdo a su investigación, la necesidad de educar, es decir, enseñar los conceptos y elementos que conforman a una fracción desde el foco de todas las interpretaciones para poder cubrir con esto todas las perspectivas. Menciona Lacher (2017) a Pujadas & Equiluz (2000) quienes señalan que “mega concepto” significa entender las diferentes situaciones e interpretaciones que generan al propio término.

2.3 Dificultades en el aprendizaje de las fracciones

Para poder comprender acerca de la didáctica de las fracciones es necesario exponer algunas de las dificultades que han detectado investigaciones previas al respecto con la intención de justificar el trabajo de investigación.

Se han seleccionado las siguientes dificultades y se expone a su vez cómo los investigadores que antecedieron a la presente justificaron su descripción.

Antes de proceder a desmenuzar las características de las dificultades que se mencionarán, es importante señalar que después de una revisión de la literatura que hablaba justamente de las dificultades encontradas en el aprendizaje del tema de fracciones en alumnos de nivel primaria, se seleccionaron las siguientes dificultades, bajo las cuales se construyó el primer cuestionario sobre fracciones que sirvió como instrumento piloto de la primera fase de este estudio.

Más allá de que estas dificultades no dieron lugar al instrumento que formó parte del estudio principal, sí sirvieron en primera instancia para, como ya se mencionó, elaborar el primer instrumento. Con este instrumento (el piloto) se pudo observar, sobre todo, qué idea tenían los alumnos al respecto de qué es un número fraccionario, así como el primer acercamiento hacía analizar cómo razonaban ellos ante problemáticas que incluían razonamiento con números fraccionarios.

2.3.1 De ordenamiento

En donde este error puede ejemplificarse señalando que un alumno puede comprender o tener un razonamiento al respecto de que “3/4” es menor que “5/8”, porque este puede razonar que como tal el “4”, es menor que el “5”. Entonces, de acuerdo a la teoría de Fandiño (2009), este error puede trabajarse recurriendo a las fracciones equivalentes, para que en un inicio, el alumno analice la relación que existe primero entre los cuartos y los octavos, y en un segundo momento, comparar el tamaño de “6/8” y “”5/8”.

2.3.2 Al realizar operaciones

Fandiño (2009) menciona que “Cuando se pide formalmente la multiplicación entre fracciones, se obtienen mejores resultados que cuando se propone a través de un gráfico”. En este sentido la literatura muestra que para los alumnos de nivel primaria les es más fácil realizar una multiplicación de fracciones pues, generalmente solo requieren multiplicar ambos denominadores con el numerador contrario. Por otra parte, los alumnos muestran una dificultad al realizar una suma o resta, toda vez que en general, estos cometen el error de sumar ambos numeradores y ambos denominadores.

2.3.3 De reconocimiento de esquemas

Tanto Fandiño (2009), como Murillo (2019), mencionan que generalmente los alumnos presentan problemas al identificar la relación que guarda un número racional, en este caso fraccionario, con un esquema presentado.

De tal manera que cuando se les presenta a los alumnos los siguientes esquemas:

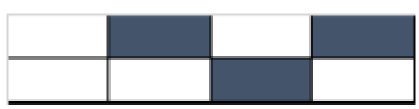


Figura 4. Imagen para el reconocimiento de fracciones en cantidades continúas.

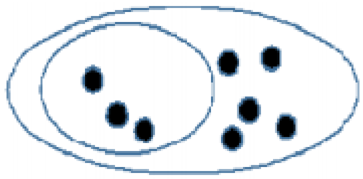


Figura 5 . Imagen para el reconocimiento de fracciones en cantidades discretas.

Del lado izquierdo tenemos representada a la fracción “3/8” de manera continua; en tanto que del lado derecho, aparece la misma fracción representada en un esquema discreto.

La literatura señala que en ambos casos los estudiantes tienden a presentar una dificultad de reconocimiento señalando de hecho, que representan estas imágenes a la fracción “3/5”, es decir, el denominador suelen tomarlo o considerarlo, como el número de elementos no tomados del total.

Importante es señalar que de acuerdo con Murillo, la dificultad y confusión de este tipo, suele ocurrir con mayor frecuencia en las representaciones discretas que continuas.

2.3.4 Al comprender el adjetivo igual

Esta dificultad Murillo (2019) la relaciona con los esquemas discretos en donde el alumno suele no saber cómo interpretar una figura en donde las unidades fracturadas no sean exactamente iguales. Algunos alumnos pueden tener problemas para notar en ilustraciones como la figura 6 que aunque el rectangulo está dividido en partes de diferente forma, estas tienen la misma superficie, por ende, son iguales en tamaño.

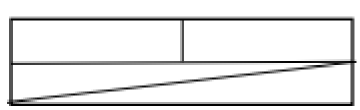


Figura 6. Imagen que propone Fandiño (2009) para evaluar la capacidad de reconocer el adjetivo "igual" en una imagen.

En donde de acuerdo con Fandiño (2009), el rectángulo es "el punto de partida" desde donde se generan las cuatro partes, que de hecho, son iguales. En este sentido, los estudiantes suelen no comprender que las cuatro partes son iguales y por consiguiente, presentan una dificultad para tomar una decisión.

2.3.5 En la gestión de equivalencia

Para ejemplificar esta dificultad se puede mencionar a Butto (2013), quien en su investigación con el trabajo de fracciones en alumnos de sexto grado en la ciudad de México, encontró que los alumnos generalmente muestran problemas al identificar las fracciones en las ilustraciones que no están fracturadas esencialmente en las partes que demanda en denominador.

Un ejemplo de lo anterior es que los alumnos pueden encontrar la fracción "1/3" en una Figura donde por ejemplo, exista un circulo dividido en tres partes iguales; pero se les dificulta iluminar la parte correspondiente a "1/3" si el mismo circulo está fracturado en seis partes iguales.

2.3.6 Al detectar la unidad que generó la fracción

De acuerdo con Fandiño (2009), citado en Murillo (2019), los alumnos presentan dificultad al momento de detectar a la unidad que dio origen a una fracción. Es decir, es más sencillo para los alumnos de primaria reconocer la cuarta parte (1/4) de doscientos, que encontrar cuál es el total de una cantidad cuyo "1/4" es 50.

2.3.7 La equipartición de fracciones como error de enseñanza

De acuerdo con la investigación de Cortina et al., (2013), la equipartición es considerada por los investigadores que trabajan en el campo de la enseñanza de las fracciones, como el medio más apropiado para comenzar con la enseñanza del tema.

Esto se fundamenta, de acuerdo a los autores, con el hecho de que, como tal, las actividades que implican la partición, separación o doblez de objetos divisible pueden resultar significativas con relativa facilidad para los niños, incluso desde edades tempranas.

De tal manera que, las actividades mencionadas en el párrafo anterior se tornan útiles para promover en el educando esos momento de razonamiento consistentes con lo que son las nociones fraccionarias básicas. Entiéndase por nociones básicas de fracciones a lo relativo al tamaño de las fracciones unitarias, es decir, ½ es mayor que ¼; de igual manera que las equivalencias, es decir, 2/7 representa lo mismo que 6/21.

2.4 Aportaciones de la literatura

El capítulo 2 de la presente investigación aportó fundamentos históricos acerca de cómo el hombre tuvo la necesidad de expresar cantidades que no podían ser expresadas con los números naturales; cuáles fueron las civilizaciones pioneras en el uso de los números fraccionarios y de cierta manera, cómo fue evolucionando el concepto y definición misma de estos hasta la actualidad.

Del mismo modo, con base en la revisión de la literatura con la que se construyó este capítulo 2, se expusieron algunas de las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de fracciones que han encontrado investigadores que trabajaron este contenido escolar.

CAPÍTULO 3. Estado del conocimiento

En el presente capítulo se describen los estudios que han retomado el tema de aprendizaje de fracciones, así como las dificultades que se expusieron en los mismos. De manera tal que se inicia el capítulo mencionando las investigaciones más destacadas sobre este contenido escolar. Del mismo modo se hace mención sobre las aportaciones de las investigaciones en cuestión a la presente.

En primera instancia se retoman algunas investigaciones que indagaron cómo se inicia la enseñanza del concepto de los números fraccionarios con alumnos de primaria. Posteriormente se mencionan investigaciones que centraron su trabajo en generar estrategias didácticas para la enseñanza de este contenido matemático. Aquí es importante recordar que la segunda fase de la presente investigación tuvo como objetivo central el diseñar y aplicar una estrategia didáctica para trabajar las ideas matemáticas que se dificultan a los alumnos que participaron en la presente y mejorar su conceptualización de los números fraccionarios.

En este sentido, y a propósito de las ideas matemáticas que se dificultan a los alumnos que participaron en la presente investigación, justo en la segunda parte de este capítulo se exponen algunas investigaciones que detectaron y mencionaron las dificultades más presentes en el aprendizaje de las fracciones en nivel primaria. Del mismo modo, se hace énfasis en investigaciones que mencionaron qué obstáculos están presentes en la enseñanza de este contenido escolar en el contexto nacional (México).

3.1 Investigaciones que han trabajado la construcción del concepto de fracción en alumnos de primaria

Uno de los más grandes referentes de la investigación en la pedagogía de fracciones en nivel básico y en el cómo se trabaja éstas con base en la construcción de su relación “parte-todo” es Obando (2003), quien en su trabajo titulado “La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte todo” detectó no solo algunas bases teóricas sobre las cuales se construye este concepto sino que al mismo tiempo sentenció algunos de los errores que aparecen en los proceso pedagógicos y de aprendizaje al respecto de este tema.

Entonces es importante señalar que esta investigación giró en torno, como ya se mencionó, alrededor de los procesos de enseñanza y aprendizaje que ocurren en la escuela al momento de trabajar con los números racionales. Al mismo tiempo que es importante mencionar que esta investigación se centró en la forma en que en la escuela se trabaja la construcción de la relación “Parte-Todo” que guardan los números fraccionarios y en general los números racionales, como expresión de un número. Al mismo tiempo justificó por qué desarrolló una propuesta didáctica para trabajar la construcción de este concepto a partir de lo que él encontró en esta investigación.

> A través de este trabajo se detectó que la forma actual como se orientan tales procesos en la escuela es fuente de conceptualizaciones erróneas por parte de los estudiantes. Sobre la base de este análisis y apoyada en metodologías propias de la Didáctica de las Matemáticas se desarrolló una propuesta de trabajo mediante la cual se pudieran desencadenar procesos de aprendizaje más significativos en los alumnos (Obando, 2003).

Al mismo tiempo se puede rescatar de dicha investigación que está fundamentada como señala Vallejo (2018), en tres aspectos que abonan al enfoque de la relación “Parte-Todo”. Estos tres aspectos están relacionados con la medida, el tipo de magnitud y el tipo de unidad; en donde se parte de los resultados obtenidos por el investigador de cómo se dio durante su propuesta la conceptualización de la relación “Parte-Todo” por parte de los alumnos que participaron en su intervención.

Bajo la forma en que se desarrolló la investigación en cuestión y la mirada sobre la que se focalizó la misma se pudo desarrollar en los alumnos procesos constructivos de aprendizaje que a su vez tuvieron un carácter de autónomos. Por otro lado, en lo relativo al ordenamiento de facciones y la relación de equivalencia que tienen entre sí dentro de una línea numérica y de manera abstracta permitió a los alumnos construir sus propios procesos cognitivos bajo los cuales identificaron la relación mencionada. Esta misma situación se dio cuando los alumnos trabajaron en la adición de fracciones (Vallejo, 2018).

Finalmente es importante mencionar que en Obando (2003) afirmó que con base en su investigación se demostró que existe una debilidad en cuanto a la conceptualización por parte de los alumnos de la fracción como relación "Parte-todo". Esta debilidad se mostró particularmente, de acuerdo con el investigador, en la capacidad que mostraron los alumnos para identificar los aspectos relativos a la estructura multiplicativa que guardan los números fraccionarios. De tal manera que se presenta en la parte final de la misma, una invitación para que los investigadores de la temática puedan debatir al respecto de qué elementos faltaron por contemplar a su investigación.

Otros investigadores que han abordado el tema de las fracciones en su relación "Parte-Todo" son Prieto & González (2015) quienes destacan este tipo de conceptualización como base para un paso siguiente que sería la construcción de conceptos más complejos como lo son el concepto de razón, de proporcionalidad e incluso de probabilidad. De igual manera destacan la importancia que guardan las existentes relaciones con sus interpretaciones.

Así mismo, concluyen recomendando buscar una metodología, por parte de los docentes, para trabajar sobre la reconstrucción del todo con la relación que guarda con la fracción. De igual manera, proponen establecer una conexión entre lo verbal y lo pictórico y simbólico de la fracción que permita una mejor asimilación por parte de los alumnos al respecto de qué significado tiene la relación "Parte-Todo" al trabajar con números fraccionarios.

Y a propósito del significado de "Parte-Todo" en el trabajo de los números fraccionarios a nivel básico, López (2012) consideró que de hecho este significado es el más extenso y complejo en la enseñanza de este tema (de fracciones). Además, el investigador hace énfasis en el hecho de tener que trabajar por parte de docentes y alumnos en el manejo de cantidades continuas y discretas.

Por esta razón, resulta más conveniente el no abordar todas las interpretaciones que tiene el número fraccionario al mismo tiempo, sino más bien este proceso debe de llevarse a cabo en las aulas de forma gradual y escalonada. Lo cual se logra de una manera más adecuada acudiendo a las representaciones concretas, a los diagramas, el lenguaje natural y simbólico (López, 2012).

Butto (2013) realizó un estudio para medir el nivel de entendimiento y comprensión de los números fraccionarios que, al igual que el presente objeto de estudio, tuvo como población a intervenir/investigar, alumnos de sexto grado de primaria. Este estudio tuvo como base justamente la aproximación del concepto de fracción en su relación "parte-todo". En este trabajo es importante mencionar que la investigadora construyó un marco teórico bastante enriquecido. De tal manera que, con base en este marco teórico, pudo establecer objetivos claros en su trabajo.

Ya en las conclusiones por parte de su trabajo, Butto (2013) evidenció la dificultad que mostraron los estudiantes para transitar de los números enteros a los números racionales, particularmente los fraccionarios. La autora expuso que esta dificultad estaba presente debido a que los alumnos carecían del entendimiento y trabajo de las relaciones "Parte-todo" y "parte-parte". De igual manera mencionó que otros factores que influían a esta dificultad eran la falta de comprensión por parte de los alumnos al respecto de los conceptos de cociente, razón, operador y medida.

Es importante mencionar que el trabajo de Butto (2013) se centró en identificar las dificultades que tienen y presentan los alumnos al trabajar con el tema de fracciones; particularmente las situaciones que dificultan el aprendizaje de las mismas.

Butto (2013) entonces expone estas dificultades a través de la interpretación que ella hace de sus instrumentos como lo fueron un cuestionario sobre conocimientos de ideas matemáticas relacionadas con el aprendizaje del concepto y magnitud de los números fraccionarios, así como de una entrevista clínica que hace a los alumnos para conocer la forma en que estos reaccionan ante las situaciones problemáticas que plantea en su propio cuestionario.

Finalmente es importante mencionar que la autora señala que, de acuerdo a su trabajo de investigación, una gran parte de los alumnos de primaria en México se encuentran apenas en el nivel inicial del modelo de asimilación de conocimientos matemáticos que expone Kieren.

Este modelo de Kieren será abordado en capítulos posteriores en el presente, sin embargo, es importante mencionar que Butto (2013) mencionó que para que los alumnos pudieran avanzar a etapas más complejas en cuanto a la apropiación del conocimiento matemático que tiene el trabajo con fracciones, es importante que los docentes ofrezcan un modelo conceptual diferente al de parte-todo.

Con lo expuesto hasta aquí en esta parte de la tesis se puede sentenciar la importancia que tiene la relación "Parte-todo" en la práctica y trabajo de los números fraccionarios. Ya desde décadas atrás, Behr (1983) mencionó que la relación "Parte-todo" que guardan los números fraccionarios y la correcta comprensión y entendimiento por parte de los alumnos de este significado, ha de convertirse en piedra angular para la construcción de conocimientos matemáticos posteriores.

Por otro lado, Cornejo (2017) realizó una investigación con el objetivo de detectar una metodología a forma de cuestionario que permita a los alumnos de sexto grado de nivel primaria conocer qué tipo de preguntas y reactivos contribuyen al entendimiento de la fracción en su relación "parte-todo". El investigador concluye con la importancia que tiene en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la temática de fracciones y particularmente en su relación "parte-todo" el docente y las habilidades que él mismo posea.

> Se ha aceptado que el dominio matemático que tenga un profesor sobre el contenido que está abordando, en este caso las fracciones en su faceta parte – todo, permiten la realización de preguntas con un objetivo

> claro y con un alto uso de la matemática al ser formuladas. De ahí la importancia de las preguntas, de ahí la relación intrínseca y directa entre la matemática y el discurso, es decir, entre lo que dice el profesor y la disciplina (Cornejo, 2017).

De igual manera el investigador centra su trabajo en encontrar este tipo de preguntas a modo de un instrumento con carácter científico. Después de terminado su trabajo y, por ende, la elaboración misma de su instrumento que le permitió evaluar el nivel de impacto que guardaban el tipo de preguntas en relación a la construcción del concepto de fracción en su relación "Parte-Todo" por parte de los alumnos con los que intervino, expuso la relación entre poner a prueba el nivel cognoscitivo que presenten los alumnos ante un tema específico y la oportunidad que esto genera de encontrar dificultades en el aprendizaje del mismo.

> El desarrollo de esta investigación reporta que, en el inicio de una clase de matemática, se deben realizar preguntas que tiendan hacia el nivel cognitivo de reproducción, puesto que este tipo de preguntas acercan el conocimiento a los estudiantes y permiten pesquisar dificultades (Cornejo, 2017).

3.1.1 Las dificultades que conllevan la conceptualización de los números fraccionarios

En esta parte se analiza lo encontrado por Esparza & Corona (2017), quienes en un trabajo de investigación han detectado literatura e investigadores cuyo trabajo de igual manera se cimienta en haber detectado las necesidades intelectuales y de desarrollo cognitivo que ha de tener un niño en edad adolescente respecto al aprendizaje y resolución de problemas con números racionales, particularmente fraccionarios.

El trabajo de Esparza & Corona (2017) se encuadra en México, ambos como investigadores de la Benemérita Universidad de Puebla en su desarrollo investigativo acudieron a tesis y ponencias tanto nacionales como extranjeras en donde han detectado una serie de elementos que componen el hilado de condiciones que generan un aprendizaje significativo en materias relacionadas en números racionales, por ello, es importante en esta investigación traerlos a colación y justificar desde la literatura observada por ellos, el porqué y el cómo de esta investigación.

Es entonces que Esparza & Corona (2017 detectan que tiene ya muchos años, incluso décadas, el estudio tanto a nivel nacional como internacional, de los problemas en relación al aprendizaje significativo de números racionales en estudiantes de edades entre 10 y 14 años. Delval (2001) señala que esta es una situación contradictoria en México pues retoma a Escolano (2005) quien demuestra que formalmente este tema y esta situación con "números no enteros" como los llama Streefland (1993) son introducidas en el Curriculum escolar mexicano desde temprana edad, y que esta condición perdura varios ciclos escolares posteriores.

A propósito de lo anterior, Cedillo (2016) señala que en el Curriculum mexicano la enseñanza de fracciones inicia desde un tercer año de primaria, lo que hace que al llegar a la secundaria el estudiante tenga en su haber ya más de tres años de experiencia en este sentido; aunque como lo retoman Alvares & Flores (2008) pareciera no ser tan adecuado introducir esta temática en niños menores a 11 años de acuerdo a la teoría piagetiana (Piaget, 1960).

Señalan entonces Esparza & Corona (2017, existe un problema cuando un alumno llega a sexto año de primaria, pues, de acuerdo al curriculum mexicano (Cedillo, 2016), se tendría la esperanza de que los alumnos de 11 años que llegan a un sexto año de primaria tuvieran solidos esos conocimientos y que al mismo tiempo estos fueran los mínimos requeridos como lo señala Streefland (1993) para poder comenzar con el razonamiento abstracto acorde a los estudiantes de esas edad según las teorías de Piaget (1968) retomadas por Simce (2007).

A partir de esto, Esparza & Corona (2017) señalan existe una notoria serie de dificultades los cuales con dificultad son cubiertos por los docentes mexicanos y que de acuerdo a Ceballos & Murillo (2003) estos errores conceptuales y de asimilación se siguen arrastrando hasta incluso posterior a la educación media superior.

De acuerdo a esta condición, Esparza & Corona (2017) retoman a Silva (2017) quien derivado de una investigación pertinente señala que el primer obstáculo al que han de enfrentarse los estudiantes de aulas mexicanas en relación a los números fraccionarios es justamente el conceptualizar las fracciones.

Perera & Valdemoros (2009) acotan dos preguntas que hemos de hacernos los investigadores educativos a fin de pretender detectar los obstáculos y las dificultades a las que se enfrenta un estudiante preadolescente al momento de conceptualizar las fracciones. Estas preguntas son:

- ¿Cuáles son las preconcepciones que tienen los estudiantes sobre las fracciones?
- ¿Cómo incide el nivel cognitivo de los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones?

Esparza & Corona (2017) entonces encuentran que en el sistema educativo mexicano, en lo sucesivo "SEM", se inicia el proceso de enseñanza-aprendizaje en los números racionales desde tercero de primaria. Esto mismo es comentado y justificado tanto por Caballero (2013) y Cubillo & Ortega (2003) quienes encuentran y justifican la formalidad del contexto de tercer año de primaria para comenzar los procesos de enseñanza-aprendizaje de números fraccionarios.

Trabajos de investigación como el de Caballero (2017) señalan que desde la educación preescolar y con el aprendizaje de recortes y figuras simbólicas ha de ser posible la enseñanza de números racionales en los niños; cabe señalar que para investigadores como Moreno (2017) esta propuesta no tiene justificación. Al igual a juicio personal, no considero pertinente el comenzar la enseñanza de fracciones a tan temprana edad puesto que de acuerdo a las teorías de Piaget (1968) retomadas tanto por

Clarke &Roche (2008) como por Gee (2008) señaladas en el marco teórico de esta investigación, la entrada a la etapa operacional concreta Niaz (1987) es la más indicada para comenzar con el razonamiento de este tipo, y no antes.

3.2 Investigaciones que se centran en la construcción de estrategias didácticas para construir las nociones de “fracción” en alumnos de primaria

Se vuelve importante mencionar en esta parte del documento algunos trabajos de investigación que tuvieron el objetivo de generar justamente una estrategia didáctica que en su momento pretendía impactar en el aprendizaje del tema de fracciones en alumnos de edades similares a las de la población que es objeto de esta intervención.

De tal manera que se puede comenzar mencionando el trabajo de Cogollo (2018), quien elaboró una estrategia para que alumnos de sexto grado de una institución educativa colombiana, tuvieran la oportunidad de aprender a resolver problemas matemáticos donde la fracción se veía involucrada como operador de estos.

Esta estrategia Cogollo (2018) la nombró “Pensar” y la dividió en seis etapas de la siguiente manera:

- Planteamiento del problema (etapa “P”)
- Explicitación de saberes (etapa “E”).
- Negociación para la solución (etapa “N”).
- Solución y socialización (etapa “S”).
- Autoevaluación (etapa “A”).
- Resolver situaciones nuevas (etapa “R”).

El trabajo de Cogollo (2018) trató de elaborar una serie de secuencia de actividades para trabajar cada una de las etapas de la estrategia. EN este sentido, partió de la detección del problema, que era la poca comprensión del tema por parte de los alumnos con los que trabajó, pasando por la explicación de los contenidos socializando estos mismos. Finalmente llevo a cabo la evaluación de su propia propuesta para proponer recomendaciones que dieran opciones a nuevas problemáticas que surgieran a partir del análisis de su trabajo.

En las conclusiones del trabajo se mencionan no solo los objetivos cumplidos y los cuestionables a raíz de la estrategia planteada, sino al mismo tiempo, se abre un debate al respecto de si es o no beneficiosa la innovación de la pedagogía de las fracciones y de las matemáticas en general, con alumnos de nivel primaria, con base en la elaboración de estrategias que tengan objetivo específicos con comunidades específicas.

Hurtado (2012) elaboró una estrategia para la enseñanza del tema de fracciones en alumnos de sexto grado de primaria en una escuela de la ciudad de Bogotá, en Colombia. La cual tuvo como eje principal trabajar con los alumnos el concepto y la naturaleza del término “Fracción”.

El trabajo de Hurtado consistió en la elaboración y planeación de talleres que llevó a cabo dentro de las instalaciones y horario de trabajo de la escuela donde intervino. En las conclusiones de su trabajo la investigadora señaló que es de vital importancia el trabajar con base en la resolución de problemas el tema de las fracciones, no solo como herramienta para la práctica de su operatividad, sino al mismo tiempo, como mecanismo para la apropiación de la magnitud y significancia del número fraccionario.

Al hablar de estrategias didácticas para el aprendizaje de fracciones en alumnos de primaria, se puede hacer mención del trabajo de Murillo (2019), quien elaboró justamente una planeación didáctica con el uso de software específico en el que pretendió trabajar las dificultades que existen al momento de operar con números fraccionarios.

Murillo (2019) en su estado del conocimiento menciona algunos trabajos de carácter investigativo que se desarrollaron en su misma casa de estudios tiempo atrás.

Menciona, por ejemplo, el trabajo de Pinzón (2016), quien elaboró una propuesta didáctica para que alumnos de nivel primario tuvieran la oportunidad de reconocer a la fracción de su naturaleza como “Parte-todo”. Esta propuesta estuvo diseñada con base en actividades lúdicas en donde los alumnos objeto de esta estrategia, que eran de cuarto grado, pudieran manifestar a través de la observación que el propio investigador hizo, las dificultades en el reconocimiento de lo que significa el “fracturar” un entero.

Entonces, Pinzón (2016) diseñó su propuesta lúdica con base en dificultades previamente encontradas en la literatura que reportó y citó en su investigación. Importante mencionar que nunca se menciona en este trabajo si las dificultades encontradas en la teoría coinciden con las encontradas en los alumnos objeto de esta investigación.

Otro trabajo que forma parte del estado de la cuestión de la tesis de Murillo (2019) y que también es un trabajo de investigación que tuvo como eje central la elaboración de una propuesta para el aprendizaje de fracciones en alumnos de primaria, fue el realizado por Sarmiento (2015), en donde se trabajó con la intención de que los alumnos se apropiaron del concepto de fracción con base en la puesta en práctica de talleres.

Sarmiento (2015) concluye en su trabajo de investigación que con las estrategias didácticas de talleres, se permite la relación entre sí de los alumnos y con ello se vuelven partícipes del trabajo colaborativo. Señala también el autor, que con el diseño de estrategias con base en el trabajo en talleres, se crea oportunidades para que los alumnos trabajen con base en las fortalezas que han desarrollado y se ven presentes en ellos.

De igual manera en su trabajo de investigación, Murillo (2019) retoma los trabajos de Rubiano (2012) y Moreno (2016), quienes también elaboraron propuestas didácticas con la intención de innovar en la forma en que han de ser trabajados los números fraccionarios en alumnos de primaria. De modo que en el primero se logró que los alumnos que fueron objeto de esa investigación, identificará e interpretará una fracción de acuerdo al contexto en el que se utilice.

Por su parte Moreno (2016), al igual que Cogollo (2018), centró su trabajo en la intención de que los alumnos objeto de su investigación tuvieran una mejor representación y apropiación de la magnitud del número fraccionario cuando este adquiere un carácter de operador. Moreno concluye en su trabajo de investigación que a los estudiantes se les dificulta utilizar las representaciones con material concreto cuando las cifras de los problemas son mayores.

Con lo expuesto en los últimos párrafos, se vuelve importante retomar el trabajo de Murillo (2019), en el que se puede observar un estado del conocimiento al respecto de trabajos que tienen como objeto el elaborar propuestas didácticas para la innovación de los procesos pedagógicos que tienen lugar con la operación de números fraccionarios. De igual manera su trabajó se centró en realizar una propuesta didáctica para el aprendizaje del tema de fracciones.

Tal propuesta se diseñó con el objeto de que alumnos de educación básica pudieran trabajar las dificultades en el trabajo con números fraccionarios y con esto, construyeran el concepto de una fracción en su relación de "parte-todo".

El trabajo de Murillo (2019) entonces, concluye que la elaboración de pruebas diagnósticas le permitió el reconocer las dificultades a las que se enfrentaban los alumnos, objeto de su investigación, al operar con números fraccionarios. De igual manera menciona la importancia que tuvo el utilizar herramientas tecnológicas para el proceso de enseñanza de números fraccionarios con los alumnos con los que intervino.

> El ambiente de aprendizaje mediado por el "software introducción a las fracciones" como herramienta didáctica permitió a los estudiantes interactuar con el conocimiento de una manera distinta, basadas en experiencias ricas donde se pudo simular el mundo real mediante la interacción con la herramienta didáctica que permitió fortalecer los conocimientos del cuerpo matemático estudiado. (Murillo, 2019, pp. 79)

El trabajo de Murillo (2019) entonces, no solo es mencionado como parte del estado del conocimiento del presente en función de ser una estrategia que intentó impactar en los procesos de enseñanza y aprendizaje que involucran la operación con fracciones, sino al mismo tiempo, sirve como precedente de un trabajo de investigación que pretendió innovar al respecto de cómo y de qué manera se enseñó a operar con fracciones en las aulas de primaria.

Aunque al mismo tiempo hay que mencionar, en el trabajo de Murillo (2019), como en el de la mayoría de los que él menciona y fueron revisados para la construcción del estado del conocimiento del presente, no se visualiza en qué consistió la intervención ni qué elementos la conformaron. Es decir, no queda claro después de leer estos qué actividades se llevaron a cabo, ni cómo se elaboraron las mismas; solo se mencionan por parte de todos estos investigadores, los resultados y conclusiones de las intervenciones.

Otro trabajo de investigación respecto de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el tema de fracciones, es el elaborado por Butto (2013). En esta investigación se trabajó al igual que en el presente, con alumnos de sexto grado de primaria, pero, en el caso de Butto (2013), se llevó a cabo en una escuela de la ciudad de México.

El trabajo de Butto (2013) consistió en crear una estrategia en dónde se trabajó en dos direcciones: una de ellas, la forma que podría ser considerada “tradicional”, en donde se trabajaba con los alumnos mencionados usando un cuaderno y herramientas de escritura como lo son un lápiz; por el otro lado, se contrastaba la forma de los alumnos para aprender fracciones, usando medios interactivos que se aplicaron en función de tomar en cuenta aspectos tanto cognitivos, como matemáticos.

El trabajo de Butto (2013) se centró en describir y analizar las dificultades que presentaban los alumnos de sexto grado de nivel primaria en escuelas del centro del país (México) en el aprendizaje del tema de fracciones De tal manera que, una vez detectadas estas dificultades, la investigadora diseñó y aplicó una secuencia didáctica que consistió esencialmente de dos situaciones; una con el uso de herramientas tradicionales como el lápiz y papel y una segunda en que se trabajaba con recursos interactivos.y verificó los efectos de esa secuencia en el aprendizaje de ese contenido escolar.

La investigadora menciona que los estudiantes que participaron del estudio pudieron algunas dificultadas reportadas en los instrumentos que aplicó para conocer los niveles de comprensión sobre las ideas matemáticas del aprendizaje de fracciones.

Por otro lado, varias investigaciones reportan que los estudiantes se encuentran en la transición del campo de los números enteros hacia el campo de los números los racionales. De acuerdo con Butto (2013) es importante que la escuela considere aspectos al mismo tiempo que diversifique los soportes de representación matemática con el fin de proporcionar un mejor entendimiento de dicho campo conceptual.

En resumen, este fue un estudio cualitativo de tres etapas en el que participaron 26 alumnos de sexto grado de una escuela primaria con niños entre 10 y 12 años de la Ciudad de México. Primero se hizo un cuestionario sobre fracciones y una entrevista clínica individual, posteriormente, se aplicó una secuencia didáctica con lápiz y papel e interactivos libres y por último, se aplicó un cuestionario final de fracciones.

Para la aplicación de la secuencia didáctica en lápiz y papel se utilizó como guía el trabajo de Coxford, et al., (1975), donde se exploran las ideas de: relación parte-parte, parte-todo y formación de la unidad, equivalencia y ampliar la noción de fracción, entre otras ideas que involucran el concepto de fracción.

El cuestionario final exploró ideas matemáticas sobre números racionales que se utilizaron en el cuestionario inicial, pero con una versión distinta para verificar si las actividades de la secuencia didáctica propiciaron un cambio conceptual de las ideas matemáticas.Los datos fueron analizados en cuatro niveles de análisis: acierto, error y no responde, niveles de logro para las fracciones (alto, medio e inicial) y estrategias de resolución de problemas de problemas y análisis clínico.

Respecto a los resultados de la secuencia en papel no se identificó dificultad para la idea de mitad y la ubicación de fracciones propias en la recta numérica pero sí para fracciones impropias. El cuestionario final mostró que, aunque se mantiene la dificultad de comprensión respecto a la ubicación de fracciones propias e impropias sobre la recta numérica, hubo avances respecto al cuestionario inicial, poniendo en evidencia la necesidad de incluir para la enseñanza de fracciones otro modelo conceptual distinto al modelo conceptual parte-todo, que permita dar acceso a ideas conceptuales más elaboradas y facilitar así el acceso a conceptos matemáticos más poderosos.

Del mismo modo, es importante destacar el trabajo de Carrillo et al., (2008), quienes mencionan los elementos que deben contener las estrategias didácticas para el aprendizaje de los números fraccionarios en alumnos de primaria. Los autores realizaron una investigación acerca de cómo en las décadas de los noventas se trabajaba en Chile la enseñanza de las fracciones a partir de la fracturación de enteros generalmente construidos a partir de contextos en los que se desenvuelven los alumnos entre 11 y 13 años de edad. Mencionan entonces, que a partir del nuevo siglo, las estrategias oficiales y no oficiales, se basan en que los alumnos construyan sus propios contextos a partir del aprendizaje en clase de lo que representan los números fraccionarios.

Otro trabajo que retoma una propuesta didáctica para el aprendizaje del tema de fracciones es el de Perera & Valdemoros (2007), señalan que uno de los temas que más se complican en la vida escolar es el de resolución de problemas y operaciones con fracciones, la preocupación principal de los educadores es que éste conocimiento se adquiera, se interiorice y se conserve. Es por esto, continúan los autores, que se vuelve importante y necesario el buscar y detectar una metodología adecuada para su enseñanza, de tal manera que esa importancia y necesidad hace que este tema (el de la didáctica de las fracciones) sea objeto de diversas investigaciones.

Freudenthal(1983) crítica la enseñanza conceptual , acentúa en la enseñanza a partir de problemas de la vida cotidiana

Goffree mencionaba que la vida real como escenario, la interacción entre pares para el aprendizaje y la creación de modelos que puedan ser utilizados por los alumnos.

Streefland tiene diseñado un curso de enseñanza de fracciones y su principal tema son problemas concretos de situaciones reales de la cotidianeidad

Kieren (1983) buscó dar una explicación clara y concreta de lo que es la fracción para que los niños entiendan que a partir del todo (el entero) es que se va dividiendo para poder llegar al entendimiento del concepto. Acentúa el uso de medidas específicas de peso y de tiempo.

Se fusionó el conocimiento teórico de dichos autores para llevar a cabo el estudio doctoral objeto de esta investigación y observamos que llevado al aula es de ayuda para que a los pequeños se les facilite el aprendizaje de las fracciones. Es buena opción poner ejemplos de la vida cotidiana y problematizarlos para lograr que se adquiera de manera más clara lo que es una fracción, igualmente el trabajo en equipo ha favorecido que el aprendizaje sea más claro y que los niños vean desde diferentes perspectivas como se está entendiendo el tema y le puedan dar solución, así como detectar los errores de los otros.

Por lo que desde el análisis de este documento vemos que la hipótesis resultó cierta y se comprobó que el aprendizaje se verá favorecido en un ambiente que conlleve la participación y en donde se incluya a la realidad como base de las problemáticas planteadas, en este caso es para la enseñanza de un tema que de verdad resulta tedioso para educadores y educandos por lo que es de mucha ayuda tener herramientas como estas para su abordaje.

3.3 De las investigaciones con intención de trabajar las dificultades en el aprendizaje de fracciones

Habiendo entonces ya expuesto algo de lo que se ha trabajado en el contexto latinoamericano al respecto del uso de herramientas tecnológica como base para el aprendizaje del tema de fracciones, así como aquellos trabajos de investigación que han pretendido innovar con base en estrategias específicas sobre el cómo aprender fracciones, toca el turno entonces, de revisar la literatura que da el antecedente al presente objeto de estudio al respecto de cuáles son las dificultades al momento de aprender el tema de fracciones a nivel primaria y el sí existe en estos trabajos de investigación una explicación de cómo trabajan estas dificultades.

Se vuelve importante entonces comenzar con el trabajo de Di Pego (2012), pues este tiene como objetivo el analizar la problemática de la pedagogía de fracciones, pero partiendo de la interrogante de si es un problema de enseñanza o de aprendizaje; lo que podría resumirse en una condición de los alumnos o los docentes.

Di Pego (2012) expone la importancia de analizar cuánto aprenden y qué aprenden en la escuela los niños sobre números fraccionarios, se ha detectado la preocupación de cuál es el motivo de que los alumnos no aprendan de la manera esperada, podría ser el modo de enseñanza o será el modo de aprendizaje de los alumnos.

Este artículo propone comparar los aprendizajes curriculares esperados a nivel primario con los desempeños de los alumnos de 1° año del secundario, analizar los errores como medio de conocer el pensamiento matemático desarrollado y establecer las relaciones entre las actividades escolares y los aprendizajes logrados.

El trabajo se enmarca en una perspectiva cualitativa, a partir de este, el autor realiza una prueba matemática en veintitrés escuelas secundarias de la Capital y el interior de la Provincia de La Pampa, evaluando a cuatrocientos treinta y tres alumnos, estos aprendizajes que se esperan lograr en 4º Año de nivel primario, son contenidos que se repiten en 5º y 6º años aunque en distintos niveles de complejidad. Dicha prueba es realizada por una profesora experta en el área matemática y fue sometido el dispositivo a juicio por cinco directores de escuela y dos coordinadores.

Sus resultados son muy significativos, ya que un porcentaje considerable (66%) de los alumnos de 1° Año del secundario evaluados, no han construido los aprendizajes sobre números fraccionarios considerados prioritarios para alumnos de 4º año del nivel primario.

De acuerdo con lo anterior, los alumnos no han construido los atributos básicos de las matemáticas fraccionarias, para analizar los resultados el autor le solicitó a los alumnos gráficos, esquemas o dibujos, ya que afloran los modos de pensar de los estudiantes como lo planteo Giordan (1995), concluyendo que definitivamente que el niño consigue mayor comprensión sobre las fracciones interpretándolas de diferentes maneras,

El resultado que nos muestra en el artículo es la fracción relación parte-todo que consiste en que el alumno toma la fracción como un todo dividido en partes y sus relaciones (3/4 de la barra de chocolate) y la fracción como cociente (dividir tres barritas entre cuatro personas, es decir 3÷4), es una acción de reparto lo cual hace mucho más comprensible y sencillo para el estudiante, pueden jugar de manera esquemática o en dibujos como pizzas, campo, leche, jugos, caramelos, objetos, etc., como medida de capacidad (litro) o de peso (kg), es una compleja presentación de las fracciones que mezcla conceptos y le permite al niño jugar con ellos para su mayor comprensión.

El autor también menciona que el estudiante puede construir la noción del número, esto consiste en la clasificación y la seriación numeral. La construcción de la fracción estaría requiriendo las mismas condiciones que las de la construcción del número natural (seriar- clasificar), pero, a partir de su reconstrucción en un plano superior de organización, que contenga las características propias del número racional.

En el ejemplo del chocolate, el adolescente concibe ¾ como tres unidades divididas en cuatro partes y para representar el ¼ que se ha comido, sombrea las 4 partes de un entero y aplicando el conteo con números naturales obtiene ocho partes que lo llevan a responder "Quedan ocho chocolates".

El alumno no asimila el concepto fraccionario tal cual, entonces se ha concluido que el empleo de esquemas facilita el aprendizaje y aplicación de las fracciones.

De igual manera, el autor concluye que más de la mitad de los estudiantes en los que se realizó la intervención no han logrado el aprendizaje esperado. Pero, no sólo por dificultades asociadas al aprendizaje, sino que existen errores inducidos desde una enseñanza por la presentación global del macro constructo de fracción que ha impedido construir los atributos básicos de ese concepto (la unidad que se parte o reparte en partes congruentes).

La abrumadora presencia de configuraciones perceptivas que ha reemplazado a la acción por la percepción, y la carencia de la evaluación como custodia del aprendizaje, es indispensable las prescripciones de los especialistas, tanto en la formación como en la capacitación docente, sobre la forma de presentación global y simultánea de las distintas dimensiones del concepto de fracción como número racional. El docente no tiene que limitarse para la enseñanza para que el alumno no se encuentre limitado en la forma de aprender.

Con base en lo expuesto hasta aquí, es que se puede volver a exponer las aportaciones teóricas de Murillo (2019), quien, en su trabajo, ya mencionado en el presente, diseña una estrategia basada en el uso de software educativo para combatir dificultades en el proceso de aprendizaje del tema de fracciones. Las dificultades encontradas por él, de acuerdo con la teoría de Fandiño (2009), son las siguientes:

- De ordenamiento.
- Al realizar operaciones.
- De reconocimiento de esquemas.
- Al comprender el adjetivo "Igual".
- En la gestión de equivalencia.
- En trabajar con las figuras no estándar.
- Trabajar la unidad que generó una fracción.

En este sentido, Murillo (2019) menciona haber trabajado con base en el uso del software específico las dificultades que él encontró en la teoría de Fandiño (2009).

Importante volver a señalar que en la tesis de él no se detectó específicamente el cómo trabajó estas dificultades y se limita solo a mencionar que usó el software que él señala para trabajarlas. No se detecta entonces en qué consistió la estrategia, y ni siquiera se alcanzan a observar los avances o resultados de una manera cuantificable resultado de la propia intervención.

Entonces, hasta aquí han sido expuestos siete dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje en el tema de fracciones, que se presentan en alumnos de primaria. Estas han sido solo mencionadas por los investigadores que las expusieron y las trabajaron.

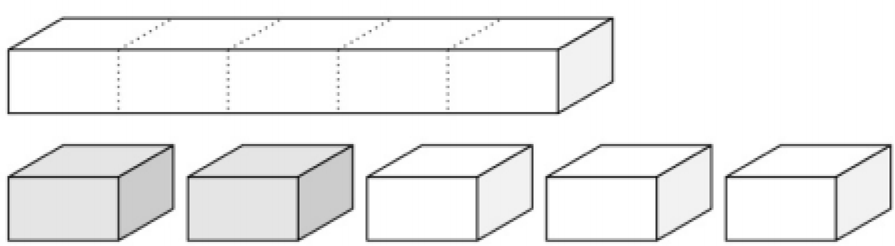
Es importante mencionar que estas dificultades expuestas hasta el momento se vuelven parte importante de la investigación para la elaboración del primer instrumento para recoger información.

Un trabajo que abona al presente al respecto de una dificultad al momento de trabajar con números fraccionarios en alumnos de primaria es el de Cortina et., al (2013), quienes llaman a la equipartición de fracciones, un obstáculo para el aprendizaje de las mismas.

De tal manera que en este artículo elaborado desde las aportaciones teóricas de autores como Kieren (1993) y Freudenthal (1983), en donde se critica al proceso de equipartición enseñado a los alumnos de nivel primaria puesto que de acuerdo con los investigadores, este deja lagunas y vicios en la forma en que han de poder ser aprendidas estas. De acuerdo con Cortina et., al (2013), la equipartición supone el trabajo de igualdad en fracciones, solo cuando estas sean "básicas y de tamaño relativo", como puede ser la relación entre "1/2" y "1/4" o bien, "1/3" y "1/9".

Es así como en el artículo los autores presentan tres imágenes desde dónde se justifica su investigación, partiendo del hecho de como ya se explicó, la equipartición deja ciertos sesgos y lagunas al momento de aprender a trabajar con fracciones.

Figura 7. : Freudenthal (1983) y la problemática de ver a la fracción como objeto.



De acuerdo con las teorías de Freudenthal (1983), para aproximarse al aprendizaje del concepto de “número fraccionario” de una manera concreta es la de “fracturar” un entero. Tal y como se observa en la imagen, cada uno de los elementos de la parte inferior, representan 1/5 de ese entero en la parte superior que ha sido “fracturado”, o bien “cortado”.

Detecta entonces Freudenthal (1983) en este ejemplo que una de las mayores limitantes en la equipartición es que por lo general, el docente o un hipotético libro de texto, tienden a representar a un entero como un objeto susceptible de ser partido fácilmente. Ejemplo de esto sería un pastel, un pedazo de barra u otro tipo de gráfico que por su naturaleza ya, tiende a ser equiparado.

En este tipo de situaciones, señala Freudenthal (1983), no sólo sería posible, sino también tentador para los educandos, llegar a una asociación de las fracciones con una hipotética necesidad de transformar de forma física un objeto. En este sentido, señala Freudenthal (1983), una fracción como 4 /5 implicaría la existencia de cinco pedazos tal y como se representa en la imagen. Y no permitiría al alumno llevar a cabo un proceso abstracto en el que comience asimilando a la “parte-todo” con algo que incluso pudiera no ser físico, como una calificación, como una cantidad, entre otras.

Sentencia Freudenthal (1983), que orientar a los alumnos a asociar a las fracciones con objetos físicos que han de poder ser transformados podría limitar las posibilidades de estos para que en un futuro pudieran comprender las relaciones recíprocas, es decir, por ejemplo que “1” es cinco veces más grande que 1/5, o de hecho, que “2” es cinco veces más grande que “2/5”.

- **Imagen 2: Thompson y Saldanha (2003) y el ver a la fracción como “tanto de tantos”.**

De acuerdo con Clarke y Roche (2009), uno de los principales problemas al aprender fracciones en edades básicas es el que los alumnos “típicamente identifican el denominador como el número de partes en que se corta el entero y el numerador como el número de partes que se toman del entero” (p. 136).

De tal manera que, de acuerdo a la siguiente imagen, de acuerdo a Gould et al., (2006), denominador y numerador son interpretados por los alumnos como el resultado de un conteo y no de un proceso mental abstracto que implique la equipartición de “x” elementos de “x” entero.

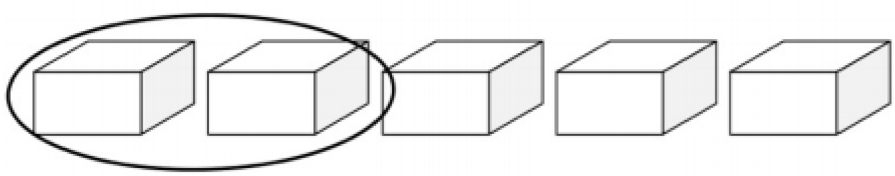


Figura 8. Imagen dos; "la fracción como un tanto de tantos".

Y es así que, Thompson y Saldanha (2003), mencionan que esta forma de concebir las fracciones, o sea, como un simple conteo, es interpretada como “el tanto de tantos”. Señalan entonces los autores que, esta forma de interpretación provoca una naturaleza aditiva y no multiplicativa en el proceso de asimilación e interpretación. O sea que, “2/5” sería interpretado por los alumnos como dos pedazos de ese entero, y dificultará la asimilación respecto de que como tal “2/5” es menor cantidad que “½” del mismo entero. De hecho, es más probable que la expresión “2 /5” genere en los alumnos un razonamiento aditivo; es decir, cuando se agrupan dos elementos de un conjunto de cinco, tres elementos quedan fuera del subgrupo.

- **Imagen 3: La fracción dentro de un entero.**

De acuerdo con las sentencias de Freudenthal (1983) y Thompson & Saldanha (2003) en la siguiente imagen se ilustra a una fracción, es decir, “2/5” de un entero. Se entiende entonces, que la parte a tomar es dos quintas partes de ese total.

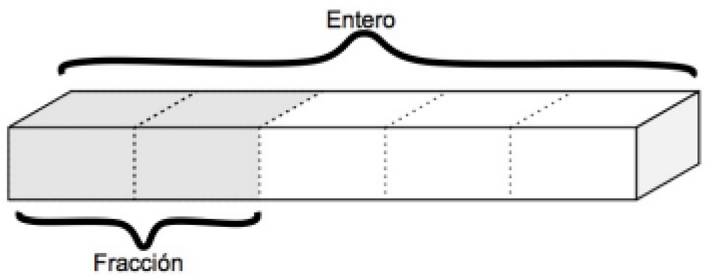


Figura 9. ; "la fracción dentro de un entero"

De acuerdo entonces con Thompson y Saldanha (2003), el problema radica en que tras la Figura 9 de esta imagen los alumnos se podrían predisponer a una situación que de hecho, "conlleva una sensación de inclusión, o sea, que el primer tantos debe estar incluido en el otro tantos" (p. 105).

Freudenthal (1983) concluye entonces que usar la equipartición de objetos es inadecuada en la intención de que los alumnos se apropien de la significancia del número fraccionario en razón de que entiendan que se pueden cuantificar cantidades mayores a uno, como por ejemplo 5/3.

De acuerdo con lo anterior, equiparar un objeto promovería el razonamiento únicamente de cuantificar fracciones propias. Freudenthal (1983) consideró entonces que, para utilizar las fracciones como fuente de los números racionales, se necesitan modelos pedagógicos que conlleven a que los alumnos realicen equivalencias mentales de mayor alcance.

3.4 investigaciones que retoman los obstáculos y errores en la pedagogía de fracciones en México

3.4.1 Obstáculos en el aprendizaje de fracciones en el contexto mexicano

De igual manera en su investigación Esparza & Corona (2017) detectaron que los problemas de reparto son la condición con la que se inicia la educación de números fraccionarios en México. Esta situación continua con los números naturales en las rectas numéricas, así como en las magnitudes continuas (SEP, 2011).

De acuerdo a la investigación de Esparza & Corona (2017) se detecta que en las investigaciones de Fandiño (2014), Rico (1995) y Gil & Marina (2012) se ha encontrado que los estudiantes de primaria en México tienen nociones y conceptos difusos ya incluso antes de comenzar con los procesos formales de enseñanza-aprendizaje de los números fraccionarios. De hecho, la investigación de Fandiño (2014) retomada por Esparza & Corona (2017) evidencia que es necesario continuar con el sentido a lo que se está haciendo en los momentos educativos relacionados con los números fraccionarios.

Esta condición obedece a la forma en que ha de ser representados y retomados los conocimientos previos del estudiante de los que se habla a fin de que este incluso sea capaz de generar su propio conocimiento.

Señalan Esparza & Corona (2017) que pese a que en México, es de cuatro años técnicamente el tiempo que se le dedica a la instrucción y aprendizaje de números fraccionarios en la educación primaria, es notorio que de acuerdo a Cedillo (2016), siguen existiendo obstáculos en el aprendizaje significativo de este tema y que estos obstáculos a su vez son arrastrados incluso hasta niveles superiores. Esto lo explican García & Cabañas (2013) quienes explican en su investigación que esto se ve reflejado incluso en el desagrado a carreras y áreas del conocimiento en las que las matemáticas, así como el razonamiento lógico matemático son necesarias.

Finalmente, Esparza & Corona (2017) retoman estas condiciones a fin de revisar y analizar las dificultades y los obstáculos en el aprendizaje de números fraccionarios y cómo estos han de ser vencidos previamente para construir los cimientos que ayuden a entender estos temas. Según sus aportaciones, estas dificultades han de ser vencidas considerando y analizando la propia práctica docente y el cómo el educador ha de trabajar en la correcta apropiación tanto de los elementos de los números fraccionarios como en los obstáculos cognitivos que estas tienen.

3.4.2 Los obstáculos en los procesos de enseñanza de la forma de operar los números racionales

Kieren (1975) es citado por Fandiño (2014) y muestra evidencia de que la existencia de al menos siete términos para conceptualizar el término de fracción. Señala Fandiño (2014) que esto se conoce como "polisemia" y es la que esconde uno de los problemas en el aprendizaje de los números fraccionarios ya que no da pie a construir el razonamiento con las propias operaciones, sobre todo, como lo señala Cedillo (2016) si el estudiante muestra desagrado y poco interés por el tema desde un primer momento.

Por su parte Freudenthal (1983) declara que el construir el conocimiento de las fracciones a partir de la relación del "parte –todo" no es muy rentable y que ha de limitar la construcción propia del conocimiento así como la propia intención de la didáctica desde un punto de vista fenomenológico así como matemáticamente.

> La didáctica tradicional de la aritmética se limita a este enfoque, mayoritariamente, incluso en el sentido restringido del modelo de la división del pastel. Tras estas divisiones concretas del pastel (únicamente en fracciones propias) se introduce inmediatamente al estudiante en la división de cantidades y valores de magnitudes presentados abstractamente. Esparza & Corona (2017).

Hunting y Pitkenthly (1996) señalan tras sus investigaciones, haber encontrado cuatro métodos constructivos en pro del aprendizaje significativo con los números racionales en estudiantes jóvenes. Estos métodos llamados mecanismos por García (2011), quien logró contextualizarlos y acotarlos, los enumera de la siguiente manera.

- Esquemas de números enteros
- Esquemas de partición.
- La medición de los regímenes y;
- Esquemas de equivalencias.

De acuerdo a García (2011), Hunting y Pitkenthly (1996) demuestra que estos mecanismos han de estar representados y formaran parte de la construcción cognitiva de un niño o preadolescente y estos han de ser utilizados en gran medida por el docente quien en base a estos métodos ha de poder construir sus clases y enfocar su pedagogía en generar un conocimiento que se base a la condición de la cantidad y del número fraccionario. Dice Hunting y Pitkenthly (1996) que cada uno de estos métodos ha de verse acrecentado y potencializado en relación de cada contexto que se halle en la forma de ver las fracciones.

Lamon (2001) por su parte, realizó una investigación relativa a las necesidades y aptitudes que ha de tener previamente construidas un alumno al ingresar a la educación secundaria. Estas necesidades y construcciones en relación al aprendizaje y resolución de problemas con números fraccionarios las detectó señalando que en Estados Unidos de Norteamérica se tiene en los estándares del estado, que la pedagogía de los números fraccionarios ha de consistir en la conjunción misma de los procedimientos que llevaran y construirán el cálculo; es decir, la forma en que algebraicamente ha de ser representada la relación de parte-todo, sin embargo, concluye Lamon (2001), esta forma de asemejar y de contextualizar el número fraccionario en los estudiantes no abona al aprendizaje significativo, sino por el contrario, solo crea más dudas y prejuicios epistemológicos al estudiante.

Por su parte Brown y Quinn (2006) citados por Mahmoud (2013) realizaron a mediados de la década pasada para detectar errores y obstáculos en la asimilación y comprensión por parte de los estudiantes en lo concerniente a los números fraccionarios. Esta investigación encontró en sus conclusiones que la mayoría de los estudiantes tienen errores en la comprensión no solo de cómo se comportan las fracciones cuando estas han de ser puestas a trabajar en función de operaciones, sino que previo a trabajar la adición y resta de las mismas, los alumnos se encuentran errados en la concepción de los propios elementos de las fracciones y el porqué de su naturaleza.

Les cuesta entonces de acuerdo a Brown y Quinn (2006), citados por Mahmoud

(2013), analizar el porqué de un numerador y un denominador al mismo tiempo el 80% de los estudiantes estudiados, no tuvo noción alguna de que ambos elementos, es decir, denominador y numerador son parte de una división que ha de encontrar en su resultado a un número no natural y por ende, no entero.

De acuerdo entonces a Fandiño (2014) estas propias dificultades detectadas en toda la literatura revisada por Señalan Esparza & Corona (2017) se deben a prenociones precedentes y a malos argumentos por parte de los momentos de aprendizaje de los mismos números fraccionarios. Estos malos aprendizajes se presentan como condiciones banales que no fueron bien conceptualizados por los docentes en pro de la óptima asimilación y apropiación de los mismos.

Señalan Esparza & Corona (2017) entonces en relación a esto encontraron que en relación a la literatura retomada por ellos los errores más frecuentes y significativos ocurren al ordenar y comparar las fracciones en relación con los números decimales, es decir, como se ha venido manejando en esta investigación, la conversión de números fraccionarios a decimales y viceversa.

Pero más un importante resulta para esta investigación lo señalado por Esparza & Corona (2017) quienes detectan la situación de la problemática de asimilación entre números fraccionarios a decimales no solo en función de la conversión sino de la propia comparación y la relación entre ellos, es decir, ellos detectan en su investigación que hasta un 90% de los alumnos que egresan de nivel primaria no sería capaz de resolver una suma y/o resta fácil en la que se vieran involucrados un numero fraccionario y un número decimal. Esto mencionan Señalan Esparza & Corona (2017) no abona a una manipulación entre términos de los números racionales y lejos de brindar una oportunidad de triangular un aprendizaje genera dudas y segmenta el constructivismo del conocimiento.

Entonces, Señalan Esparza & Corona (2017) detectaron y declararon que para comprender estos errores hay que juzgar la propia pedagogía de los docentes en México y que esta ha de estar encaminada a tres momentos clave en beneficio del aprendizaje significativo:

a) las propiedades de las fracciones y los diferentes significados del concepto de fracción;

b) los diferentes modelos empleados en la enseñanza, y

c) el manejo operativo de la fracción.

Esparza & Corona (2017) arremeten contra el sistema educativo mexicano y al mismo tiempo señalan que estos errores vistos hasta aquí podrían deberse a un deficiente aprendizaje de hechos, destrezas y conceptos construidos con anterioridad. Justifican esto en lo visto por Rico (1995) quien señaló en su momento, estos errores tienen la partida inicial en la ignorancia de algoritmos, mal manejo en los procedimientos en la aplicación de técnicas y dominio de los símbolos y un desconocimiento inicial de los hechos básicos.

A manera de conclusión no explicita Esparza & Corona (2017) retoman los señalamientos de D`Amore (2003) quien en su momento declaró que estos errores que se han venido señalando previa detección, no necesariamente han de responder a la ignorancia del alumno o al desconocimiento como tal de los argumentos y elementos que componen un momento educativo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los números fraccionarios; sino que más bien, estos errores pueden deberse justamente a una prenoción que preceda al momento educativo, es decir, una forma de asimilación que en su momento dio resultados positivos y llegó a convertirse en aprendizaje significativo para el estudiante.

Más sin embargo, continua señalando D`Amore (2003), este mismo procedimiento o forma de asimilar el conocimiento no siempre es rentable cuando se ha de poner a prueba en otro contexto o momento específico del aprendizaje.

Así entonces, de acuerdo a los argumentos de todos estos autores, estos errores podrían no tratarse de un desconocimiento de origen por parte del estudiante, sino que han de hallar su causa en la ontogénica, en la forma de desarrollar la pedagogía y por supuesto, en esa forma que el propio estudiante tendrá de asimilar epistemológicamente a los números racionales y desglosar los conocimientos a fin de ubicar en el espacio mental a las fracciones no como un tema más de los números racionales sino como el origen y objeto de los propios números racionales.

CAPÍTULO 4. Marco teórico

En este capítulo se presenta el marco teórico de la tesis que es base para la construcción de esta investigación. El marco Teórico está centrado en el modelo recursivo de Kieren (1994). De igual manera en este apartado de la tesis se describe la teoría que sustenta el trabajo de tesis. Se inicia, con la breve descripción del modelo recursivo de Kieren.

Es así que se comienza hablando de la didáctica de las fracciones, por lo que se usa referente teórico a Freudenthal (1983). Esto a propósito de la segunda etapa del presente estudio (diseño y aplicación de una estrategia didáctica).

Finalmente, se aborda la didáctica de las matemáticas y particularmente de las fracciones desde una perspectiva de las teorías del aprendizaje utilizando como principal referente de esta parte a Vygotsky. Del mismo modo se hace mención de los procesos cognitivos que existen en los niños en edad de escolaridad primaria al trabajar con las matemáticas y particularmente con las fracciones.

4.1 Didáctica de las fracciones

Comenzando con el análisis de la didáctica de las matemáticas, hay que mencionar que Brousseau (2000) nombra al término didáctica como el proceso de enseñar en cualquier área del conocimiento como las matemáticas, el arte y otras ciencias. Este proceso según él, parte de la habilidad de un educando para preparar y producir recursos que ayuden a la realización de esta actividad, al mismo tiempo el poder exponer lo referente el cómo una práctica pedagógica ha de incidir en el conocimiento de un educando.

Brousseau (2000), citado por Perera y Valdemoros (2007) menciona que en la actualidad se demanda al docente que este sea capaz de encontrar y seleccionar problemas con los que se pueda promover al alumno para que este adquiera aprendizajes con base en la intención de resolver estos mismos problemas.

Otro autor a quien citan Perera y Valdemoros (2007) es Freudenthal (1983), quien, de acuerdo a la investigación de los primeros, critica la forma tradicional de enseñar matemáticas en las aulas de nivel básico en donde se trabaja con base en el aprendizaje de conceptos. De acuerdo a estos autores, el enseñar conceptos solo tiene efecto en el docente en la forma en que este concibe las definiciones.

Al enseñar de esta manera se ven desvinculada la relación con otros contenidos matemáticos. De esta manera la experiencia del estudiante no se ve fortalecida y por ende los propios conceptos quedan aislados en el mismo alumno. De tal manera que con esto resulta complicado que el alumno sea capaz de dar una solución a problemas de la vida cotidiana, pues nunca practicó ni desarrolló habilidades para que los aprendizajes matemáticos pudieran generar en él mismo una inquietud al respecto de su propia utilidad (Freudenthal, 1983).

4.1.1 La fenomenología de la didáctica de las fracciones de Hans Freudenthal

En el trabajo de Gómez y Figueras (2013) los autores mencionan que Freundenthal (1983) describe al proceso de la didáctica a través de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones. Este contenido escolar, de acuerdo a estos 2 autores, puede ser considerado como un contexto perfecto para explicar las secuencias de la enseñanza.

Estos procesos a los que Gómez y Figueras (2013) llaman “fenómenos” se relacionan cuando los seres humanos realizan alguna comparación o descripción e objetos, se dividen substancias medidas por magnitudes, se distribuyen cantidades entre un “x” número de elementos, o bien, en el propio sistema decimal de medida.

Freudenthal (1983) señaló que las fracciones son un recurso fenomenológico de los números racionales, por lo tanto, las fracciones se constituyen en la elaboración precursora de los números decimales (Valdemorros y Ruiz, 2008).

Freudenthal (1983) propuso modelos didácticos que tuvieron como objetivo la enseñanza de las fracciones. El autor hizo énfasis en los modelos de área y longitud como medios que existiesen en un entorno áulico para ejemplificar las magnitudes, del mismo modo, sugirió que la enseñanza de las fracciones se planeara desde una perspectiva manipulable de los recursos del entorno que se utilizaran.

Es importante mencionar que Freudenthal consideraba que la significancia y oportuna que sea la didáctica con la que sean abordadas las fracciones será factor fundamental del nivel de aprovechamiento que tengan de este contenido escolar los alumnos (Valdemorros y Ruiz 2008; Castro, 2010).

De tal manera que Freudenthal (1983) describe una secuencia para el proceso didáctico de las fracciones partiendo desde entender los procesos aritméticos que se llevan a cabo al trabajar con éstas.

Esta secuencia que propne el autor tiene niveles de escalonamiento a partir de ver a la fracción como un "fracturador", es decir, la fracción es una expresión de la relación parte-todo.En un segundo nivel se encuentran la evolución hacia ver a la fracción como un comparador, es decir, aquí se ve vinculada la idea de magnitud y esa representación que tienen las fracciones como la expresión de una cantidad. Finalmente, la fracción se convierte en "un multiplicador", es decir, cuando una persona es capaz de entender a la fracción como un dilatadorr de una cantidad original.

4.2 Teorías de Thomas Kieren en el trabajo de comprensión del número fraccionario

Ya en relación a la pedagogía de fracciones se vuelve necesario exponer la teoría de Thomas Kieren, pues con base en la revisión de un amplio estado del conocimiento del tema, se puede concluir que las teorías de este autor no solo siguen vigentes, sino que, al mismo tiempo, son las más importantes y concretas en cuanto al querer exponer esta misma teoría.

Kieren reconoce varios constructos intuitivos como la medida, el cociente, operador multiplicativo y la razón. En estos constructos de acuerdo sus teorías, subyace la construcción del concepto de fracción. A lo anterior se suma el quinto constructo intuitivo al que nombra "Parte-todo" que sirve para dar sentido a los cuatro mencionados previamente (Perera & Valdemoros, 2007).

Estos constructos intuitivos se definen de la siguiente manera:

- La relación Parte-todo: es considerada como un todo que puede ser visto como continuo o discreto. Este todo se subdivide en partes señalando la relación que hay entre el entero, o sea, el todo, y las partes que integran al mismo (Kieren, 1980).
- La fracción como medida: A la fracción se le reconoce como el asignar un número que es el resultado de una partición equitativa de una unidad (Kieren, 1980).
- La fracción como cociente: En esta la fracción es el resultado de una operación divisoria (Kieren, 1980).
- La fracción como operador: Tiene el carácter de ser un operador que transforma de un conjunto hacía uno equivalente. Para este caso, se puede hacer referencia de la geometría y cómo esta se puede articular con el razonamiento fraccionario (Kieren, 1980 y Perera & Vademoros, 2007).
- La fracción como razón: Esta consiste en comparar numéricamente dos magnitudes (Kieren 1980).

4.2.1 Modelo matemático Kieren

Del mismo modo, Kieren (1989, 1993 y 1994) ha presentado un modelo dinámico, representado a manera de espiral con el que expone cómo los individuos construyen el conocimiento matemático. De tal manera que con este modelo cada persona puede analizarlo de manera interior y cuestionarse al respecto de cómo construyó sus propios conocimientos.

El modelo se encuentra estructurado en ocho niveles, en los cuales se puede circular, no sólo adelantado, sino también retrocediendo a un nivel interior, con el objetivo de reflexionar, o volver a trabajar acerca de comprensiones previas sobre un concepto matemático (Delgado et al., 2014).

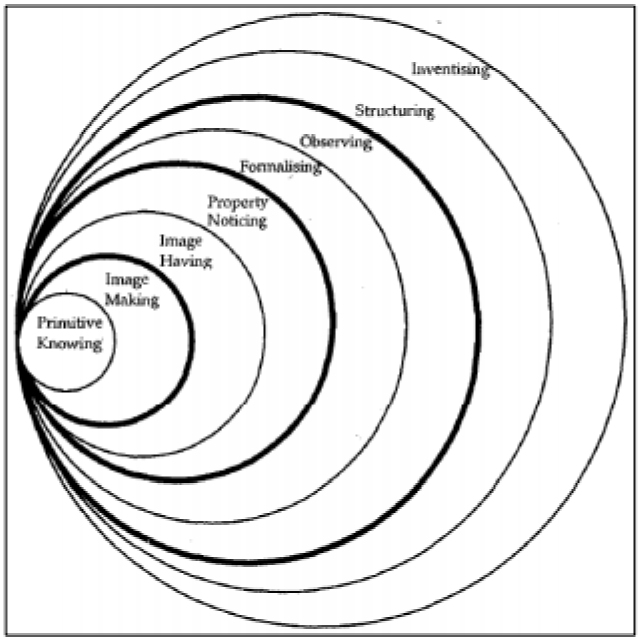


Figura 10. Modelo matemático de Kieren sobre cómo el hombre construye el conocimiento matemático.

De acuerdo con Arenas (2018), el modelo de Kieren (1994) está diseñado bajo un enfoque constructivista, el cual en un principio se basa en la postura de Glasersfeld (1987) sobre la comprensión. El mismo autor define a la comprensión como:

> El organismo de la experiencia se convierte en un constructor de estructuras comunicativas, que pretende resolver dichos problemas conforme el organismo los percibe o los concibe… entre los cuales se encuentra el problema interminable de las organizaciones consistentes [de dichas estructuras] que podemos llamar comprensión (p.7).

Es decir, Kieren (1994) construye la definición de comprensión desde un enfoque constructivista y la fundamentan desde un argumento teórico como un “Proceso continuo de organización de las estructuras del conocimiento” (Pirie y Kieren, 1994, p.166).

Existe entonces, un gran interés por la comunidad educativa y científica en la comprensión práctica de la matemática. Desde distintas perspectivas se puede observar la necesidad de enseñar matemáticas con el objetivo de la comprensión de las mismas. Esta necesidad puede ser visible en las propias conferencias del campo de la Educación Matemática o la misma literatura en el campo de la Psicología que exponen un interés en que las investigaciones educativas se enfoquen hacia el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas con comprensión (Arenas, 2018).

En este sentido, la comprensión de la matemática es definida teóricamente por el autor como:

> La comprensión matemática se puede definir como nivelada (estable) pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión se observa cuando el pensamiento se mueve entre niveles de sofisticación. De hecho, cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por los que están fuera de él (Kieren, 1994. p.8).

4.2.2 Niveles comprensión número fraccionario de Thomas Kieren

Kieren construyó estos niveles con base en la experimentación de la enseñanza con niños de entre 7 y 9 años de edad. Los experimentos que él hizo fueron trabajados con el tema de fracciones, ambientados en un modelo constructivista (Arenas, 2018).

La metodología para la construcción de estos ocho niveles fue recoger datos mediante grabaciones, videos y audios que desarrollaron los niños en cuestión. Del mismo modo, se realizaron entrevistas a los niños, para posteriormente analizar las respuestas en función de los niveles de comprensión matemática que presenta el modelo teórico (Kieren, 1989 y 1994).

Los niveles que permiten conocer la forma en que un estudiante construye el conocimiento son presentados de manera ascendente a continuación:

- Primitive Knowing (PK), refiere a los conocimientos y saberes que tiene un estudiante antes de enfrentarse a un nuevo concepto matemático a estudiar. En este nivel se comienza el proceso de la comprensión matemática. La palabra “Primitivo” en este nivel, no significa que el conocimiento matemático sea bajo, sino que indica un punto de partida para el crecimiento de una comprensión de tipo matemático (Pirie & Kieren, 1994, p. 170).

- Image Making (IM). Con base en los conocimientos y capacidades previas a enfrentarse a una nueva comprensión matemática, el estudiante puede hacer distinciones de concepto u objeto matemático. Estos se refleja, generalmente, en la capacidad de realizar acciones que ayuden a generar un nuevo concepto matemático (Pirie & Kieren, 1994, p. 170).
- Image Having (IH). No se necesita trabajar con ejemplos particulares para que el estudiante sea capaz de emplear una construcción mental sobre el concepto matemático. En este sentido, el estudiante tiene la necesidad de remplazar imágenes asociadas al concepto de una imagen mental del mismo (Pirie & Kieren, 1994, p. 170).
- Property Noticing (PN). Este nivel es alcanzado cuando un estudiante construye propiedades específicas de un nuevo concepto valiéndose de la utilización de las imágenes mentales que ya posee.
- Formalising (F). En esta etapa el estudiante ya es capaz de trabajar el concepto matemático como un objeto formal y no hace referencia a una imagen en particular. “El lenguaje usado para describir un concepto no tiene que ser un lenguaje matemático formal; sin embargo, las descripciones generales suministradas por los estudiantes deben ser equivalentes a la definición matemática apropiada” (Villa, 2011, p.47), (Pirie & Kieren, 1994, p. 170).
- Observing (O). para expresar algoritmos y teoremas, el estudiante realiza conexiones entre conceptos matemáticos que le permitan deducir patrones entre estos.
- Structuring (S). En esta etapa el estudiante es capaz de verificar matemática y lógicamente para justificar una declaración atraves de observaciones formales (Pirie & Kieren, 1994, p. 171).
- Inventing (I). Cuando un estudiante ha alcanzado esta etapa es porque tiene la capacidad de verse desvinculado de la situaciones concretas y determinadas del nuevo

concepto, pues posee ya una comprensión completa de este. “Una persona en este nivel tiene una comprensión estructurada completa y por lo tanto puede ser capaz de romper con los preconceptos que provocaron esta comprensión y crear nuevas preguntas que podrían convertirse en un concepto totalmente nuevo” (Pirie y Kieren, 1994, p. 171).

4.2.3 Los números fraccionarios y los sub-constructos que ayudan a su asimilación

Para obtener un conocimiento integral del número racional es necesario interconectar cada idea que previamente ha de haber sido comprendida. Por esta razón se vuelve necesario conocer acerca de las variables y las relaciones que tienen lugar en el conocimiento de los números racionales (Kieren, 1993).

> … Dicho aprendizaje solo puede ser visualizado a partir de la idea de constructo: y lo define (Kieren) como la acción en la que el sujeto aprehende del mundo un objeto mental y concibe el entendimiento de las fracciones por sub-constructos de los cuales logra reconocer cuatro: relación parte-todo y parte-parte, cociente, razón, operador y medida (Butto, 2013).

´

Con relación a estos sub-constructos, Kieren (1976) señaló la estrecha relación que existe entre la “parte-todo y razón”, pues ambos han sido utilizados para construir el significado de razón. Las fracciones son enseñadas generalmente con la idea de trabajar en la cuantificación de la relación entre una totalidad y un número asignado de partes. De acuerdo con esto, el subconstructo “cociente” también guarda una estrecha relación con la relación “Parte-Todo”; mientras que los subconstructos de medida y de operación están más enfocados a la atención de los racionales como elementos en el álgebra de funciones (Morales, 2014).

De tal manera que, Kieren (1976) con la idea de exponer de una manera gráfica el cómo se comprenden los números racionales, propuso el siguiente esquema conceptual.

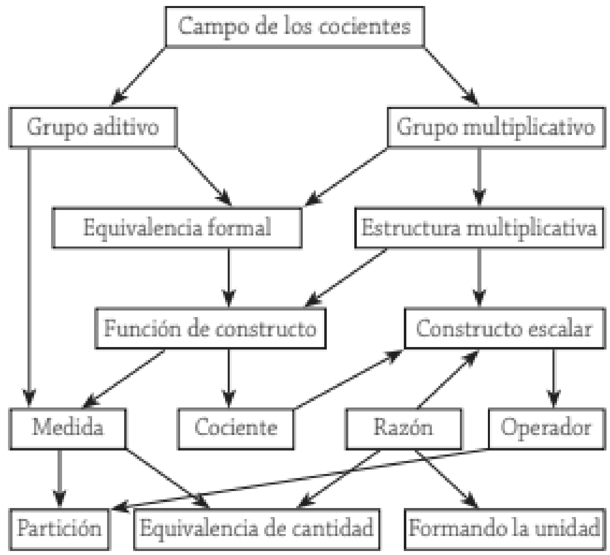


Figura 11. Esquema de Kieren sobre la comprensión de los numeros racionales.

Con base en el anterior esquema se puede observar cómo el pensamiento de los números racionales, de acuerdo con el autor, tiene un orden que, de hecho, se construye con la relación de los factores entre sí.

De acuerdo a esta teoría, el alumno, para poder asimilar la idea de lo que representa un número racional, debe haber trabajado previamente de una manera adecuada con las interpretaciones de los mismos. Debido a que en la escuela se ve a estos como “objetos de cálculo”, los alumnos, en este caso niños y adolescentes, no asimilan interpretaciones importantes del número racional (Kieren, 1976).

El autor menciona que los alumnos jóvenes se enfrentan a una confrontación al operar con los números racionales porque estos deben:

a) Lidiar con la noción de equivalencia;

b) Hacer frente a una operación "+" que en su forma algebraica "funciona" la forma en que lo hace principalmente por razones axiomáticas y ya no es natural;

c) Trabajar en un sistema donde "+" y "x" son dos operaciones distintas, definidas de forma abstracta (estas dos operaciones con racionales son análogo a "agregar" longitudes y componer funciones); y

d) Trabajar con las propiedades, particularmente una noción general de inverso.

Bajo esta misma teoría, el sistema simbólico ofrece un nivel de abstracción del sistema formal “a/b”, pero que al mismo tiempo ve involucrado al sistema informal. De tal manera que es importante partir de una adecuada descripción de los números racionales para poder entender cómo interpretan los estudiantes al mismo contenido matemático (Butto, 2013).

Finalmente, en el aspecto cognitivo, Kieren (1983) propuso dos tipos de mecanismos mentales para que el alumno pueda construir el conocimiento del número fraccionario: desarrollo y constructivo. Donde los primeros se vinculan con la experiencia y se ven identificados con la conservación del todo y el razonamiento proporcional; mientras que el mecanismo constructivo tiene relación con la partición de un entero y la equivalencia como resultado de unidades divisibles (Perera & Valdemoros, 2007).

De acuerdo a lo anterior, existe entonces, un vínculo marcado entre los significados y los mecanismos que tienen los mismos. Con esto el estudiante trabaja mentalmente a lo que Kieren (1983, 1989 y 1994) denominó “matemática intuitiva”.

4.3 El aprendizaje de las fracciones desde las teorías del aprendizaje.

En un trabajo de investigación en el que se pretende abordar el tema de las dificultades en el aprendizaje del tema de fracciones como es el presente, es importante el cuestionar al respecto de qué procesos ocurren mental y cognitivamente en los alumnos al momento de operar con estos. Esto tiene sentido como un proceso en el que las estructuras mentales juegan el papel de mediador entre el entorno del hombre y él (Ruiz, 2013).

En función de que la población objeto de estudio de esta tesis son niños de aproximadamente once años de edad, se menciona a Ormrod (2008) quien señala que el aprendizaje se sitúa a lo largo de la vida del hombre, sin embargo, él da importancia especial a las etapas tempranas ya que en estas, señala el propio Ormrod (2008) el sujeto cuenta con una plasticidad cerebral facilitadora, con la que está más cerca, con un poco de conductismo, a encontrar estructuras mentales que le permitan seguir aprendiendo.

De esta manera se analiza en esta investigación las teorías de Ormrod (2008) y Pozo (2010) quienes en base a sus estudios sobre las formas cognitivas en los sujetos es que concuerdan en que los hombres tienen esencialmente dos maneras de aprender, una llamada por reproducción y otra por comprensión.

En primer lugar, el aprendizaje reproductivo se construye de acuerdo a Ormrod (2008) y Pozo (2010) en base a la memorización de datos y/o mecanización de procedimientos. De hecho, Ruiz (2013) ejemplifica este tipo de aprendizaje con la forma en cómo los niños en la primaria memorizan la suma y resta de fracciones sin asimilar y comprender estas.

Por otro lado, de acuerdo a Ormrod (2008) y Pozo (2010) se encuentra el aprendizaje comprensivo, el cual requerirá un procesamiento respecto de la información que se acerca al alumno y el contexto que se le quiera dar, de tal manera de que en esta asimilación de conceptos e información se trabaje en el pensamiento y razonamiento.

Ya más específicamente en el aprendizaje de fracciones se puede señalar a Parra y Flores (2008) quienes señalaron que así como de manera general con cualquier tipo de aprendizaje como específicamente en el tema de fracciones se vuelve trascendente favorecer y promover la interacción propia entre alumnos de diferente nivel de desarrollo intelectual para que con esto aquellos que se encuentren con menor grado de desarrollo puedan sentirse tanto motivados como apoyados por los más avanzados, situando en un contexto general a todos los alumnos de tal manera que esa forma de trabajar la cognición de cada uno de ellos se vea mezclada y se forme un juicio del alumno respecto de qué es lo que ven sus pares en un tema particular.

4.3.1 Vygotsky y su aproximación al aprendizaje

Vygotsky en su concepción sobre el aprendizaje y el camino que ha de transitar tanto el alumno como el docente se enfoca en una perspectiva sociocultural. De esta manera Vygotsky menciona que el aprendizaje es un proceso construido socialmente y encuentra su origen en el intercambio cultural.

Lo anterior se puede entender en una forma coloquial como esa manera en que un aprendiz nobel habrá de enriquecerse desde la óptica de un segundo sujeto con mayor experiencia u otro enfoque sobre un tema objeto de aprendizaje. Cubero (2005) menciona que el sistema de numeración es algo que se comparte de unos a otros, preferentemente de personas adultas a jóvenes, o sea, niños.

Es en base a esta interacción como lo señala Harry (2009) que los aprendices noveles adquieren noción sobre palabras y con esto construyen conceptos, símbolos y en general, las herramientas cognitivas que les permitirán dar significado al contexto que ha de rodearlos en un periodo determinado. Justamente a este proceso Vygotsky lo llamó "internalización", es decir, dice Harry (2009) una necesidad interna de comprender aquello que es externo, como por ejemplo los signos y los símbolos que construyen un lenguaje.

En este sentido, encuentra Harry (2009) que Vygotsky propuso que el hombre posee una "Zona de desarrollo próximo". Esta se entiende como la forma interna que tiene el hombre para construir el conocimiento de acuerdo a las exigencias que rodean su entorno. Esta forma de procesar la información responde a la forma en que el hombre es capaz de aprender para así poder tener un desarrollo en medio de una sociedad que lo rodea, sugiere el propio Harry (2009). En este proceso sugiere Harry (2009), generalmente obedece a una condición en la que los más adultos apoyan a los aprendices noveles.

De este modo, es que esa condición social en la que los adultos enseñan a los noveles se vuelve fundamental en el desarrollo cognitivo del aprendiz nobel ya que esto le proporciona un andamiaje indispensable con el que puede apropiarse de nuevos conocimientos y habilidades que el contexto en el que se encuentra le han de exigir (Pozo, 2010). De esta manera, sugiere Pozo (2010) la escuela se vuelve en un espacio el que se encuentra un espacio potencial donde han de existir interacciones sociales entre adultos y aprendices noveles, esto se traduce como maestros y alumnos en donde existirá, además, una diversidad de personalidades en los personajes que en ella se encuentren.

4.3.2 Desarrollo cognitivo de los niños en edad de nivel primaria

En general a sexto de primaria los niños ingresan con once años de edad, esta es la generalidad de los diecisiete alumnos del grupo objeto de esta investigación. De acuerdo entonces a las teorías de Piaget se encuentran, aunque en el periodo de las operaciones concretas. Pero por su parte Pozo (2010) menciona que en esta edad los niños se encuentran cognitivamente abriéndose hacia el periodo de operaciones concretas formales. Señala incluso Pozo (2010) la importancia de entender que cada niño arriba a las etapas de Desarrollo cognitivo a su ritmo y a su propio tiempo.

De acuerdo a Prieto (2008) un niño en edad de siete y once años es capaz de utilizar las relaciones causales y cognitivas, con esto el niño es capaz ya de estimar que el número de objetos permanece constante mientras no se distorsiones con adición o resta. Aunque sí vale la pena mencionar que el mismo Pozo (2010) que para que durante esta etapa, es decir, la operacional concreta, el niño puede realizar operaciones mentales generalmente únicamente en presencia de objetos; es decir, Piaget plantea que el niño ha de necesitar materiales concretos como dibujos y/o representaciones gráficas.

Por lo anterior es que Ruiz (2013) menciona que en el contexto del aprendizaje de fracciones se vuelve importante la existencia durante el propio momento educativo de objetos manipulables. Estos materiales de los que habla Ruiz (x) pueden ser de acuerdo a ella misma, rectas numéricas, regletas divididas en distintas partes y otros en general que le permitan al niño realizar comparaciones, equivalencias restas y sumas y otras tantas operaciones antes de como ya se mencionó, arribar a una edad en donde se pueda proceder con procedimientos más formales.

A diferencia de Piaget, Vygotsky se ocupó en investigar el proceso evolutivo de los niños desde el enfoque del proceso de desarrollo cognitivo en base al proceso social y cultural. Harry (2009) menciona que para Vygotsky que justamente este enfoque que ocupó a Vygotsky tiene que ver con la importancia que él le da al sujeto en la investigación y teorías del aprendizaje.

Menciona Ruiz (2013) que la propia pedagogía de fracciones puede tener metodología efectiva si es que existe un andamiaje proporcionado por los adultos.

De acuerdo a Ruiz (2013) este propio andamiaje del que se hace mención se expresaría en la conceptualización de significados de elementos de las fracciones. Entonces, sugiere Ruiz (2013) que para poder arribar a una zona de desarrollo próximo habrá que fomentar el diálogo y el análisis de elementos durante la propia pedagogía de fracciones basadas en las teorías de Vygotsky.

4.3.3 El aprendizaje de las matemáticas y los procesos cognitivos

Señala Ruiz (2013) que la psicología ha contribuido fehaciente y notoriamente en los procesos de aprendizaje, no solo de las matemáticas sino también sobre el lenguaje y la propia memoria. De acuerdo a su investigación Ruiz (2013) pudo rescatar y detectar los grandes avances en el área de la neurociencia en donde esta aporta elementos para entender el funcionamiento del cerebro y su relación con los propios conceptos que ocurren en la mente a través de la cognición misma. Estos procesos, continúa Ruiz (2013) se basan en una compleja función que se diversifica a su vez en otros elementos específicos.

De acuerdo a Cruz (2006) en el pensamiento existen presentes como procesos trabajadores la percepción, la memoria, el lenguaje y la propia resolución de problemas. Da importancia Cruz (2006) al proceso de la percepción para el que se requiere, según él, de memoria y la participación constante de los sentidos humanos, así como de esquemas y estructuras mentales.

Aquí se vuelve importante para poder comprender la lógica de este capítulo, el aclarar que de acuerdo al propio Cruz (2006) el pensamiento y los procesos de intuición, imaginación, memoria, creatividad, lenguaje y la propia percepción son procesos que juegan un papel importante en la propia cognición humana. Y de acuerdo a este autor, es por medio de estos elementos que el hombre ha de poder encontrar un camino en su propio cerebro para procesar la información que lo rodea en el universo y con ello construir el conocimiento humano.

Por esta razón es que Pozo (2010) retomó las teorías de Duncker y Barlett que hablaban del significado, en donde se plantea que el pensamiento del hombre es en esencia una forma para descubrir y seleccionar en base a vivencias pasadas. Bajo este esquema la nueva información puede ser asimilada y transformada en conocimiento significativo.

Señalar que de acuerdo a la investigación de Pozo (2010) él aclara que un esquema es una forma que tiene el cerebro humano para organizar de manera actúa las relaciones pasadas que operan cuando el propio hombre requiere hallar o construir el significado implícito de esa nueva información. En este sentido, la teoría de Gestalt se añade como teoría planteada.

Ya se han retomado hasta aquí los planteamientos de Vygotsky y cabe señalar entonces que, de acuerdo a la lectura de estos mismos, el pensamiento es un proceso mental de orden superior en el que participan otros procesos como el lenguaje, la percepción y la misma memoria. Entonces, de acuerdo a Cruz (2006) el propio pensamiento implica en sí ese proceso de manipulación de los elementos para poder de esta manera por parte del hombre, resolver un problema. Sin embargo, este último planteamiento no es absoluto puesto que pueden en este haber participación de otros elementos mentales propios. Pero, el proceso de pensar sí parte, de acuerdo a Cruz (2006) de la existencia de un problema y entonces de esa necesidad del hombre y la sociedad misma tal vez, de encontrarle una solución o en defecto hipótesis que se puedan explicar cómo no probables a esa resolución.

CAPÍTULO 5. Marco Contextual

En el presente capítulo se describirá el marco contextual sobre el cuál se realizó la presente investigación. De tal manera que se consideró importante mencionar de una manera muy breve el entorno de los estudiantes. Es decir, mencionar la escuela en la que se desarrolló el estudio, así como hablar de los alumnos y sus características sociales y culturales. Lo anterior de una manera muy breve.

De igual manera se exponen las características que tiene el libro de texto de matemáticas de la escuela primaria en México, pues es desde él en donde se puede observar cuándo y de qué modo se dan los procesos de enseñanza y aprendizaje con el tema de fracciones y números racionales en general, en las aulas.

5.1 Población

La población objeto de este proyecto de intervención serían los alumnos de la escuela "Efrén Rebolledo" que cursan el sexto grado de primaria en el periodo escolar 2020-2021.

Desde un primer momento se planeó intervenir con dos de los cuatro grupos de sexto que tiene esta escuela con el objetivo de que los dos grupos que no participaran ayudaran al pilotaje de los instrumentos y de la propia intervención.

De tal manera que se interviene en dos de los cuatro grupos, como ya se mencionó. En total, en ambos grupos hay cincuenta alumnos, con los que se esperaba contar en un primero momento; y de hecho, en un principio los padres de familia se mostraron animados a participar en este proyecto.

Sin embargo, en una reunión virtual con los padres de familia, llevada a cabo por los integrantes de cada grupo por separado, solo un total de veintitrés padres mostraron una intención por participar en la intervención.

Con la característica de que todos son niños nacidos en el año de 2009 y no se presentan datos de alguna discapacidad física o mental. Lo que sí se detectó es que casi la mitad de estos niños viven solo con su madre y carecen de padre, ya sea por abandono de este o por migración laboral.

A propósito de la pandemia y de las condiciones actuales en las que se vive, o sea, esta modalidad de clases a distancia para evitar los brotes por la enfermedad COVID-19 que afecta al orbe entero, se hizo una entrevista con los padres de familia y propios alumnos para conocer el contexto que tienen respecto de qué elementos tienen y qué desventajas manifiestan para poder acceder a las clases en línea y para realizar los propios trabajos.

En esta encuesta se detectó que solo siete de los veintitrés alumnos cuenta con internet en casa y tiene entera disposición para cumplir en tiempo y forma con los trabajos solicitados. Otros ocho alumnos manifestaron tener problemas para conectarse pues carecen de conexión a internet en casa, además de que seis de esos ocho alumnos ni si quiera cuenta con un equipo de cómputo que les permita elaborar los mismos.

5.2 Marco geográfico y contextual de la escuela

La escuela primaria “” Efrén Rebolledo” se encuentra ubicada en el centro de la ciudad de Actopan Hidalgo y obedece a una condición de escuela de turno matutino. Los niños que estudian en esta escuela en general son hijos cuyos padres no tienen el nivel de estudios de licenciatura.

En una encuesta elaborada por la propia directora de la escuela, se encontró que el 75% de los padres de los niños de esta escuela solo cuenta con el nivel máximo de segundo de secundaria. De ese 75% la mitad incluso no accedió en algún momento a la secundaria.

5.2.1 Escudo de la escuela

Figura 12. Escudo de la escuela "Efrén Rebolledo".

5.2.2 Clave de la escuela.

- 13DPR1438Q

5.3 El libro de matemáticas en México y su referencia a los números fraccionarios

Es importante para comprender en contexto en el que se da el proceso de aprendizaje del tema de fracciones en los alumnos de primaria, el revisar el libro de texto gratuito de matemáticas que otorga la S.E.P. a los estudiantes de nivel primaria desde el primer grado hasta el sexto.

Importante señalar que la intención de esta revisión a los libros de texto de matemáticas tuvo como objeto en primer lugar revisar al libro de sexto año y su contextualización con las fracciones, sin embargo, por la magnitud y diversidad de contextos del tema de fracciones, se decidió revisar al libro de matemáticas en grados previos al sexto con el fin de entender y analizar los antecedentes al libro de sexto grado.

5.3.1 Los libros de matemáticas de tercero, cuarto y quinto grado y su trabajo con números fraccionarios

En el tercer grado las fracciones aparecen en el tercer bloque del propio libro en donde se observa un trabajo con fracciones de uso común, es decir, “1/4”, “1/2” entre otras. Básicamente en este momento se trabaja con representaciones gráficas como círculos y cuadros a repartir en partes iguales, como se ha revisado en esta tesis.

Ya para cuarto grado el libro de matemáticas contextualiza a las fracciones desde el primer bloque y continua durante los cinco bloques. En este libro ya se propone los aprendizajes colaborativo vistos de igual manera como la parte de un todo. En los bloques finales de este libro se trabaja la repartición de cantidades atreves de fracciones y de igual manera ya se trabaja la identificación de “mayor que”, “menor que”, lo que supone un trabajo de entendimiento de tamaño de fracciones.

A diferencia de los dos anteriores, el libro de matemáticas de quinto año trabaja ya en la igualdad de denominadores al mismo tiempo que los números decimales se contextualizan con unidades de volumen como litro y decilitro entre otros.

En este mismo quinto grado ya se trabaja la ubicación de las fracciones en rectas.

5.3.3 El libro de matemáticas de sexto grado y las fracciones

La población objeto de estudio de esta tesis es un grupo de sexto año por lo que es importante revisar al libro de matemáticas de sexto año a fin de comprender cómo y cuándo aparecen los trabajos con números fraccionarios y aquellos que proponen la repartición de un todo, como lo son los decimales y porcentuales, que de acuerdo a la clasificación de Yepes (2018), quien propone a los números porcentuales como equivalentes en forma de repartir a un todo a las fracciones.

Entonces cabe señalar que en el libro de matemáticas de sexto año las fracciones aparecen en los cinco bloques, lo que sugiere entonces, son revisadas a lo largo y ancho de todo el ciclo escolar.

Su aparición y forma de ser vistas y trabajadas se desglosa de la siguiente manera bloque por bloque:

- Primer bloque: Las fracciones se utilizan para relacionar las unidades de medida como hectómetro y kilómetro. De igual manera se contextualiza a los números decimales como la parte de unidad de distancia. En la parte final de este bloque es cuando aparecen los números porcentuales y se trabaja con estos repartiendo totales.

- Segundo Bloque: para este momento se trabaja con la construcción de asimilación de números fraccionarios y decimales a través del trabajo en rectas numéricas. Ya para este bloque entonces se tiene como principal objetivo equiparar a los números decimales con fracciones.

- Tercer Bloque: Se continúa trabajando el entendimiento de los números racionales en base a rectas numéricas al mismo tiempo que se trabaja con unidades de distancia para contextualizar a los mismos.

- Cuarto Bloque: Los números fraccionarios y decimales se trabajan en base a contextualización de unidades de volumen.

- Quinto Bloque: Ya en la parte final del libro de matemáticas se puede observar problemas relacionados a contextualizar unidades de medida en proporciones que son fraccionarias y decimales.

CAPÍTULO 6. Marco metodológico

En el presente capítulo se describe la metodología que se utilizó en la presente investigación. Iniciando desde el tipo, diseño y alcances de la misma, así como un sustento teórico que justifica el por qué y para qué se utilizó la metodología elegida.

6.1 Tipo de investigación

La metodología elegida para el presente estudio es de tipo mixta toda vez que el estudio implica combinar los enfoques cualitativo y cuantitativo a lo largo del mismo.

De tal manera que de acuerdo con Hernández (2018), la intención de este tipo de estudios es analizar los datos recogidos a lo largo de la investigación desde la mirada cuantitativa y cualitativa, lo que implica un ejercicio de correspondencia entre ambos tipos de metodología, que a su vez, se justifiquen desde la misma intención de la investigación.

Para explicar lo expuesto en los párrafos anteriores es necesario citar a Hernández (2003) quien señala que las investigaciones de tipo mixtas:

(…) representan el más alto grado de integración o combinación entre los enfoques cualitativo y cuantitativo. Ambos se entremezclan o combinan en todo el proceso de investigación, o, al menos, en la mayoría de sus etapas (…) agrega complejidad al diseño de estudio; pero contempla todas las ventajas de cada uno de los enfoques. (p. 21)

Es decir, en esta investigación se medirá el nivel de respuesta que tienen los alumnos en la temática de fracciones utilizando, por cierto, un cuestionario elaborado por Butto (2013) y que, a fin de ser actualizado y ampliar las ideas matemáticas a medir en los mencionados alumnos, se rediseñó agregando, restando y replanteando reactivos.

Entonces, con este cuestionario mencionado, se miden datos cuantitativos con los alumnos y se toma como base para el siguiente paso en la investigación.

Este segundo paso, consistió en aplicar una entrevista clínica individual con alumnos seleccionados y detectados con base en el cuestionario, con una entrevista clínica. Es así como con esta entrevista clínica se pretende analizar, de acuerdo con Delval (2001), el cómo reaccionan los alumnos ante una situación problemática planteada. Es decir, la intención de la entrevista clínica a desarrollar con los alumnos seleccionados es entender y exponer porqué y de qué manera actúan y/o responden a las ideas matemáticas planteadas en el cuestionario sobre fracciones.

La intención principal es indagar acerca del cómo piensan los alumnos y qué entienden o qué no entienden al momento responder al cuestionario de fracciones.

Por la razón de exponer la forma en que responden y piensan los alumnos ante las situaciones expuestas en el cuestionario es que la investigación adquiere una metodología de tipo cualitativo. Es así como al presentar los tipos de investigación cualitativo y cuantitativo se vuelve mixta.

Es importante señalar que aun cuando ambos tipos de investigación están presentes en el estudio. Se observa una preponderancia cualitativa pues, más importante que saber el nivel de respuesta que tienen los alumnos ante el cuestionario para indagar sobre las fracciones es el saber, qué estrategias elaboran para responder al cuestionario de fracciones.

De igual manera se vuelve necesario exponer que el tercer momento de la investigación, tiene como objetivo diseñar y aplicar una intervención didáctica con los alumnos seleccionados. Es justo por la ruta que tiene la investigación; es decir, los tres pasos que son el aplicar el instrumento construido con base en el presentado por Butto (2013); realizar una entrevista clínica con los alumnos seleccionados en función de la revisión del cuestionario y; aplicar una intervención didáctica a los alumnos para trabajar una secuencia didáctica sobre fracciones y verificar la viabilidad de la misma, que se vuelve necesario el trabajar bajo una metodología de tipo mixta.

Y es que de acuerdo con Collins et al., (2006), el trabajar con una metodología mixta da una mayor fidelidad del instrumento certificando que éste sea adecuado y útil, así como que se mejoren las herramientas disponibles; al mismo tiempo que asegura de una mejor manera la confiabilidad de una intervención en un proceso como éste.

6.1.1 Diseño

Para la presente se ha elegido trabajar con un diseño concurrente toda vez que de acuerdo con Pereira (2011), este tipo de diseño permite la aparición de una u otra metodología a lo largo de la misma investigación.

De tal manera que, así como se expuso anteriormente, dadas las etapas de la investigación, la metodología cuantitativa será la primera en ser utilizada, mientras que la metodología cualitativa, además de ser la metodología predominante durante esta investigación, aparecerá en una segunda fase de la investigación.

Esta naturaleza lineal de la forma en que han de ser utilizadas las metodologías es lo que permite justificar, de acuerdo con lo expuesto por la misma Pereira (2011), al diseño de la metodología como "Anidado concurrente" pues la metodología cualitativa tiene la prioridad en cuanto al análisis de los datos, siendo que la metodología cuantitativa a usar en esta investigación se vuelve una antesala de la propia metodología cualitativa.

Así mismo, importante mencionar que la presente corresponde a un diseño concurrente toda vez que aunque se utilizarán instrumentos diferentes para cada una de las dos metodologías a utilizar, los datos recogidos desde ambas metodologías serán analizados de una manera simultánea en las conclusiones de la misma investigación.

6.1.2 Estudio de caso instrumental

En la investigación educativa, como en la mayoría de la investigación en ciencias sociales, se tiene un interés particular en los individuos. De tal manera que, de cierta forma y hasta cierto punto, los hombres tienden a ser semejantes en algunas características; más también existen características que los hacen diferentes entre sí. Es así como al realizar una investigación puede interesar lo que los hace comunes, como aquellas situaciones y características que los diferencian entre sí (Stake, 2010).

Con base en lo anterior se trabaja en la presente investigación como un estudio de caso instrumental, de acuerdo a lo que el autor mencionado señala pues, al seleccionar alumnos de alto, medio y bajo nivel de comprensión sobre el tema de fracciones para realizarles una entrevista clínica y una intervención didáctica, se está pretendiendo el analizar y estudiar casos particulares con el objetivo de trabajar en el objeto más que en el proceso de la misma investigación.

Del mismo modo, la metodología para esta investigación corresponde a tipo instrumental colectivo pues, de acuerdo con Muñiz (2014), el objetivo de este tipo de casos es estudiar dos o más casos para fundamentar la generalidad de un fenómeno o teoría, los casos que se seleccionan en este tipo de estudios pueden ser similares o diferentes, ya sea para entender las concordancias o las variantes entre los casos.

Al entrevistar a diferentes alumnos y respondiendo cada uno de ellos a la característica de tener un alto, medio o bajo nivel de conocimiento y habilidad para trabajar el tema de fracciones, se pretende llegar a un consenso al respecto de qué o cuál manera de pensar los hace diferentes en su manera de responder a las problemáticas planteadas en el cuestionario.

6.1.3 Estudio descriptivo

En su primera etapa, es decir, en la aplicación de cuestionarios para conocer qué tan presentes están las dificultades al momento de aprender y operar con números fraccionarios como para medir las dificultades que aparecen al momento de trabajar con las ideas matemáticas que rodean el concepto de número fraccionario, el estudio es de tipo descriptivo.

Este tipo de estudios son aquellos donde ante la recogida de información, quien investiga no altera ni interviene en estas. Es decir, únicamente existe la tarea de recoger y analizar la información (Hernández et al., 2003).

Como se mencionó, la intención de esta primera etapa de la investigación tiene que ver con recabar información al respecto de cómo responden los alumnos ante situaciones problemáticas donde se trabaja con números fraccionarios o ideas que se relacionan con este concepto.

De tal manera que, justo en este primer momento por un lado se presentarán resultados de manera descriptiva para constar estadísticamente qué tan presentes están, tanto las dificultades reportadas en el estado del conocimiento al momento de trabajar con números fraccionarios, como las dificultades para entender y responder a las ideas matemáticas que se presentan en el segundo instrumento

6.2 Tipo de investigación educativa

6.2.1 La investigación educativa como elemento de la investigación social.

Se comienza este capítulo justificando el propio proceder de la intervención como un acto social que ha de ver involucrado en él la justa acción que se da en un entorno social como lo es el propio contexto educativo. Porque más allá de que derivado de la actual pandemia que vive el planeta, las clases tengan que trabajarse por medios informáticos, continúa siendo el tomar clases, aunque ya no sean presenciales, un hecho social.

Entonces se puede señalar que de acuerdo a Moreno (2017) la investigación social es un ejercicio que, a lo largo de los años, particularmente los últimos veinte años, ha facilitado observar, escuchar y hasta sentir la realidad de los fenómenos sociales. Menciona el propio Moreno (2017) que gracias a los trabajos en investigaciones sociales se han podido ampliar los horizontes de comprensión y con este trabajo mismo se ha dado una reestructuración al propio sentido que tiene el hombre y sus acciones en el entorno que lo rodea.

Con lo anterior entonces se comprende que en base a la investigación social se ha pretendido encontrar y responder qué es, para qué sirve y cómo ha sido tema de debate desde los albores de la humanidad, pues la respuesta al qué condiciona la forma o los procedimientos en que se hará y el alcance científico y social que podría tener.

Finalmente se puede rescatar la conclusión de Moreno (2017) al respecto de que la investigación social tiene la demanda de buscar en primera instancia las preguntas adecuadas para comprender la forma en que el hombre ha de entender el entorno que lo rodea y las propias prácticas sociales en las que participa; así como en segunda instancia el objetivo primordial de dar las respuestas a esas eventuales preguntas con el fin de proponer en el mejor de los casos, acciones dirigidas hacia la sociedad y el hombre en particular a fin de ver mejorado el acto social y obtener mejores beneficios de estas propias prácticas.

Es de acuerdo entonces, hasta lo aquí revisado que se justifica esta investigación/intervención desde la óptica de la investigación social toda vez que se pretende con la misma el entender cómo los niños objeto de este estudio, que cursan el sexto de primaria, entienden y reaccionan ante la intervención planteada aquí mismo.

De tal manera que, el analizar cómo reaccionan las aptitudes y actitudes de los niños hacia el entendimiento y asimilación de los elementos y usos de números fraccionarios en base a una metodología que use las herramientas informáticas es que se busca medir un hecho social que es la propia pedagogía y la conducta de los propios participantes en este objeto de estudio.

6.2.2 La estrategia en la investigación educativa

De acuerdo al propio Aravena (2006) es el fundamento filosófico del investigador el que condiciona la metodología a usar en un objeto de investigación.

Sin embargo, de acuerdo a los aportes mismos de los propios autores aquí presentados, el propio proceso que se plantea y trabaja para llevar a cabo una investigación ha de ser el propio canal bajo el cual el investigador ha de acercarse a aprender y aprehender algo. De esta manera, el sujeto conocedor de cierta realidad, que es el propio investigador, se vuelve importante pues será quien determinará los canales hacia los que ha de dirigirse la investigación en pro de responder el qué, cómo, cuándo y para qué de la investigación.

En este sentido y continuando con la investigación educativa como objetivo de una investigación social, se retoma a Aravena (2006) quien menciona que, para elegir las estrategias por parte del investigador con el objeto de aprender y aprehender un acto social es necesario elegir correctamente las decisiones respecto a la selección del fragmento de la propia realidad que será objeto de estudio por parte del investigador.

Continúa Aravena (2006) señalando que la investigación educativa como esa rama de la investigación social enfrenta el desafío de dar al universo respuestas y con esto ofrecer un conocimiento que no es de sentido común. Este conocimiento nuevo, continua Aravena (2006) se genera con relación a partes o fragmentos de la realidad en la cual se interconecta el propio fenómeno, de tal manera que este fenómeno ha de poder ser observado desde muchas teorías diferentes.

6.3 Población

La población de la presente investigación como ya se mencionó en el marco contextual del presente, constó de 36 alumnos de entre 11 y 12 años de edad que hasta el mes de julio de 2021 cursabam el sexto grado de primaria.

Se tuvo acceso a dos grupos de sexto grado de la escuela en la que se intervino, por razón de la pandemia y del confinamiento, no se tuvo acceso al total de cincuenta alumnos que conformaban ambos grupos. La población entonces, dadas las condiciones por el confinamiento, se limitó al número de alumnos ya mencionado anteriormente.

6.4 Técnicas e instrumentos de investigación

En el presente objeto de estudio se trabajó con técnicas de investigación de campo y experimentales. Las técnicas de campo son aquellas en donde el investigador recoge la información con una información directa y de manera personal. Del mismo modo, las técnicas experimentales responden a aquellas donde el investigador controla una situación y recoge y analiza la situación con base en lo que él ha propuesto (Maya, 2014).

Lo anterior se justifica el hecho de que en un primer momento se procedió a realizar la aplicación de cuestionarios para medir los conocimientos y dificultades en el tema de fracciones con los niños. Del mismo modo se aplicaron entrevistas clínicas al estilo de Delval (2001) para conocer y analizar la forma en la que piensan y responden los alumnos a los que se les aplicaron los cuestionarios ante las situaciones problemáticas planteadas.

Finalmente se recoge información que deriva de una intervención didáctica diseñada con base en lo detectado en las primeras fases del estudio. De tal manera que con esto se justifica la parte experimental de las técnicas de investigación que se utilizaron en el presente.

Respecto a los instrumentos para recoger información en el presente trabajo de investigación se señala que se utilizaron dos cuestionarios que, como ya se planteó anteriormente, se realizaron para medir qué tan presentes estaban las dificultades en el aprendizaje del tema de fracciones reportadas en el estado de la cuestión, así como medir las dificultades que presentaban los alumnos para trabajar y entender las ideas matemáticas que se relacionan con el trabajo de los números fraccionarios.

Un tercer instrumento utilizado fue lo que ya se mencionó en párrafos anteriores: la entrevista clínica realizada a alumnos seleccionados del total de treinta y seis a los que se les aplicaron los cuestionarios.

Un cuarto instrumento utilizado fue el diario de campo que se registró durante la intervención didáctica que se les ofreció a los alumnos.

Entonces, en contexto los instrumentos para este proceso de investigación fueron los siguientes:

- Cuestionario para medir conocimientos y dificultades en el aprendizaje del tema de fracciones encontradas en el estado del conocimiento. (Cortina et al., 2013 y Murillo, 2019).
- Cuestionario sobre fracciones propuesto por Butto (2013) para medir las dificultades que presentan los alumnos al momento de responder a las ideas matemáticas que se relacionan con el entendimiento y concepto del número fraccionario.
- Entrevista clínica individual De acuerdo a Delval (2001) que se aplicó a un número de alumnos seleccionados del total de estudiantes que participaron del estudio.
- Diario de campo para anotar las observaciones realizadas durante la intervención didáctica que se ofreció a alumnos seleccionados del total con el que se ingresó al campo con los cuestionarios.

En este sentido, una descripción más detallada y específica de las técnicas e instrumentos de investigación llevados a cabos en el presente se da en la siguiente parte de la tesis.

6.5 Etapas y descripción de la investigación

6.5.1 Etapa 1: Elaboración y aplicación de los cuestionarios

Antes de comenzar a presentar la forma en que se construyeron los cuestionarios y el momento en que se aplicaron los mismos, así como la intención de estos, es importante mencionar que estos se aplicaron de manera virtual.

La metodología para su aplicación consistió en hacerles llegar a los padres de familia de los alumnos que participaron en este proceso de investigación el cuestionario en formato digital. Posteriormente ellos lo imprimieron y previa solicitud, no le permitieron el acceso a estos a los alumnos.

De tal manera que en una video llamada los alumnos se presentaron y respondieron el cuestionario para poder ser observados mientras lo hacían. Esta fue la manera más parecida a haber ido a la escuela con los cuestionarios impresos y pedirles a los alumnos que los respondieran.

Lo anterior es en respuesta a la actual condición de confinamiento que se vive por la pandemia. De tal manera que, al tener que atender a la demanda de distanciamiento social, se implementó la estrategia expuesta para evitar poner en riesgo a los alumnos y a sus familias.

Importante también mencionar que a los padres de familia se les hizo mención de que los alumnos no serían evaluados con los cuestionarios. Es decir, se les hizo saber que la forma en que respondieron éstos no incidirá en la calificación de sus hijos de alguna materia de su programa escolar. Con esto, se buscó la honestidad a la hora de responder por parte de los alumnos y así que las respuestas fueran objetivas.

6.5.1.1 Primer cuestionario

Como ya se ha descrito en el presente, el primer momento de esta investigación fue la elaboración de cuestionarios que permitirán medir los conocimientos y dificultades de los alumnos objeto de esta investigación al respecto del tema de fracciones.

En este sentido para el presente se realizaron y aplicaron dos cuestionarios. El primero de ellos se elaboró a partir de lo encontrado en el estado de la cuestión; más específicamente, las dificultades que reportaron tanto Cortina et al., (2013) y Murillo (2019).

Hasta este momento las dificultades habían sido mencionadas de manera separadas y no como ahora que se presentan como parte que dio pie a la elaboración del primer instrumento para medir conocimientos en los alumnos objeto del presente. Estas dificultades son las que se mencionan a continuación:

- De ordenamiento (Murillo, 2019).
- De operación (Murillo, 2019).
- De reconocimiento de esquemas (Murillo, 2019).
- Reconocer el adjetivo igual en situaciones concretas (Murillo, 2019).
- Reconocer la unidad que generó una fracción (Murillo, 2019).
- De la equipartición de fracciones (Cortina et al., 2013).

De tal manera que el cuestionario constó de diecinueve preguntas en donde las primeras seis no se abordaron las problemáticas encontradas, sino que más bien se utilizó ese espacio para descubrir de qué manera tenían construido los alumnos en cuestión el concepto de fracción y si tenían la noción de los elementos que componían a la misma.

Para medir la capacidad que tenían los alumnos para ordenar y ubicar las fracciones de acuerdo al tamaño que representan se elaboraron dos preguntas en donde la primera tenía que ver directamente con una lista de fracciones que ellos debían ordenar; la segunda ubicar una fracción en una línea recta numérica.

Después se realizaron dos preguntas más en donde tenían que responder a sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de fracciones para medir que tan presente estaba la dificultad de operación.

Dos preguntas más se elaboraron para conocer de qué manera los alumnos sabían reconocer la parte fraccionaria en esquemas. Para ello se ilustraron dos figuras divididas en partes iguales que a su vez fueron parcialmente sombreadas pidiéndoles representaran fraccionariamente a la parte sombreada.

En lo que respecta a la dificultad de reconocimiento de adjetivo igual en situaciones concretas de Murillo (2019) se presentaron dos preguntas en donde se exponían enteros divididos en partes iguales. Estas partes iguales causarían confusión a los alumnos al no estar presentados de una manera uniforme en forma, aunque sí en volumen. El objetivo de los reactivos era ver qué tan capaces eran los alumnos de reconocer que las partes divididas eran de igual tamaño.

Para medir la dificultad que los alumnos tenían para encontrar una unidad que generó una fracción se procedió a elaborar dos preguntas planteadas como problemas en las cuales se exponía un número que era equivalente a una parte de un entero; los alumnos debían encontrar ese entero. Con esto se pretendió ver la capacidad de razonamiento para entender que se puede encontrar el entero a partir del fraccionario.

Para medir qué tan presente estaba la problemática de equipartición identificada por Cortina et al., (2013) se elaboraron dos preguntas en donde los alumnos debían repartir e ilustrar enteros. Estas preguntas se elaboraron con base en las ilustraciones presentadas por los autores en su artículo.

Del mismo modo, en medio de todos los reactivos del cuestionario se plateó una pregunta en donde se pedía a los alumnos realizar un trabajo de simplificación. La idea era ver qué tan capaces eran de responder ante esta situación.

En resumen el contenido del primer cuestionario quedó dividido de la siguiente manera:

Tabla 1. Número de reactivos por dificultad matemática en el primer cuestionario.

Número de reactivos por dificultad matemática en el primer cuestionario.

Intención del reactivo	**Número del reactivo**
De concepto y elementos del número fraccionario	1 y 2
De tipo y representación	3, 4, 5 y 6
De dificultad de Ordenamiento y ubicación.	7 y 8
De dificultad de operación.	9 y 10
De dificultad de reconocimiento de esquemas.	11 y 12
De dificultad para reconocer el adjetivo “igual” en situaciones concretas.	13 y 14
Del trabajo de simplificación.	15

De la dificultad de reconocer número que generó la fracción.	16 y 17
De la dificultad de equipartición.	18 y 19
Murillo (2019) y Cortina et al., (2013)	

El instrumento fue construido después de recibir críticas y aportes de diversos investigadores en la temática de pedagogía de las matemáticas, así como particularmente investigadores que trabajaron específicamente el tema de fracciones. Algo interesante a mencionar es que se contó con la colaboración del Dr. Marco Antonio Feria Uribe, quien en su momento dirigió el trabajo de investigación de Murillo (2019).

El instrumento fue piloteado con otros dos grupos de sexto de primaria diferentes a los que participaron en este proceso de investigación. El mismo está presentado en el apartado de anexos del presente documento.

Es importante mencionar que a pesar de arrojar datos interesantes, el cuestionario pareció en su momento muy ambiguo y de poco aporte a los objetivos de esta investigación. Por ello se optó por aplicar el segundo cuestionario.

5.5.1.2 Segundo cuestionario

Tiempo después de haber diseñado y haber sido criticado y validado por investigadores especialistas en el tema, se procedió a pensar y diseñar un segundo cuestionario.

De tal manera que se decidió utilizar el cuestionario que utilizó Butto (2013) en su trabajo de investigación. Se optó por este porque, como ya se ha mencionado con anterioridad, aborda y evalúa las dificultades que presentan los alumnos de nivel primaria al responder a las problemáticas de las ideas matemáticas que se relacionan con el trabajo de los números fraccionarios.

El cuestionario de Butto (2013) demostró abarcar una gran gama de ideas matemáticas además de estar construido y pensado con base en un marco teórico de Kiren (1993) y su modelo de comprensión matemático.

Una vez que se tomó la decisión de utilizar el cuestionario de la investigadora en cuestión como base del que se rediseñaría para la presente investigación se agregaron reactivos que abordaron el reconocimiento de tipo de fracciones, la forma de operar con éstas y la capacidad de los alumnos para reconocer el tránsito de los números fraccionarios a decimales.

Al cuestionario de Butto (2013) se le restaron algunos reactivos como el de ordenamiento de fracciones en línea recta numérica dado que esta idea matemática ya había sido abordada en el primer cuestionario.

Del mismo modo es importante mencionar que, aunque se utilizó como base el cuestionario de Butto (2013) y algunos reactivos fueron tomados tal cual y venían en su instrumento, algunos reactivos fueron adaptados al contexto cultural y actual delos alumnos de primaria.

La relación de las ideas matemáticas que se tocaron en los reactivos presentados en el segundo cuestionario se presenta de la siguiente manera:

Tabla 2. Reactivo de acuerdo a la idea matemática explorada

Reactivo de acuerdo a la idea matemática explorada

Idea matemática	**Número de reactivo**
Idea de Mitad.	1
Idea de Entero	2
Idea de fracciones en cantidades continúas.	3
Idea de representación de fracciones propias e impropias.	4
Idea de fracciones en cantidades discretas.	5
Idea de reconocimiento de fracciones equivalentes.	6
Idea de Secuencia de fracciones.	7
Idea de representación de fracciones en línea no numérica	8

Idea de ordenamiento de fracciones de manera ascendente.	9
Idea de suma y resta de fracciones.	10
Idea de multiplicación y división de fracciones.	11
	12
Idea de trabajo con proporcionalidad.	13
Idea de partición.	14
Idea de escala.	15
Idea de operación con porcentuales.	16
Idea de reconocimiento de tipo de fracción.	17
Idea de transformación de decimal a fraccionario.	

Después de ser evaluado el cuestionario fue piloteado al mismo par de grupos con los que se piloteó el primero; posteriormente se aplicó a los alumnos que participaron en este proceso de investigación.

El cuestionario está expuesto en el apartado de anexos del presente documento.

6.5.2 Etapa2: Entrevistas clínicas con los alumnos

Posterior a la aplicación de los cuestionarios se procedió a aplicar una serie de entrevistas a algunos de los alumnos que participaron en la fase uno. Para este proceso y faceta de investigación se eligió trabajar con la entrevista clínica.

La entrevista clínica tiene la intención de identificar la manera en que piensan los individuos ante una situación específica. Con la entrevista clínica se puede describir cómo los niños piensan, entienden y actúan frente a una situación problemática (Delval, 2001 y Butto, 2013).

De tal manera que la intención de entrevistar de forma clínica a los alumnos seleccionados tuvo la intención de analizar la manera en que ellos razonaban ante las situaciones problemáticas expuestas en el segundo cuestionario.

Aquí es muy importante hacer una pausa y mencionar que esta entrevista clínica se realizó solo con base en el segundo cuestionario que, como ya se mencionó párrafos atrás, estaba mejor construido y tenía un mayor sustento teórico e investigativo.

El segundo cuestionario constaba de diecisiete preguntas como ya se expuso previamente. En este sentido se hizo un análisis del mismo y, paralelo a este análisis, se procedió a identificar el nivel de comprensión de las ideas matemáticas abordadas en el mismo de los alumnos.

De este modo se identificaron a los alumnos de alto, medio y bajo nivel de comprensión. Esto ayudó a seleccionar a seis alumnos que pudieran participar en el proceso de entrevistas clínicas.

En total se entrevistó a seis alumnos, considerando a dos alumnos de nivel alto, dos de nivel medio y dos de nivel bajo. La intención de esta discriminación fue el prever encontrar algo que pudiera ser presentado en los resultados del presente. Es decir, se pretendía exponer las diferentes maneras de responder de los alumnos y con esto, ver que tan diferente era la manera en que pensaban y razonaban ante una situación problemática.

El tiempo de duración de las entrevistas osciló entre media y una hora. Durante las mismas se cuestionó a los alumnos de forma general, es decir, la forma de responder a algunos reactivos se les preguntó a todos, en tanto que para cada uno de ellos hubo preguntas específicas.

Es importante mencionar también que los primeros alumnos fueron entrevistados una semana después de haberles aplicado el cuestionario de fracciones; en tanto que por cuestiones ajenas a la voluntad de la investigación, el último alumnos fue entrevistado hasta cuarenta y cinco días después de aplicados los cuestionarios.

En este sentido fue importante considerar que los alumnos a los que se les aplicó la entrevista con un tiempo considerablemente lejano a la fecha de aplicación tenían que ser familiarizados con el cuestionario que ellos respondieron.

Es importante mencionar lo anterior pues, las primeras cinco entrevistas fueron realizadas de manera virtual; es decir, con la ayuda de video llamadas. Sin embargo, la última entrevista fue realizada de manera presencia y previo a comenzar con la misma, se le entregó al alumno una copia impresa de su cuestionario pidiéndole que lo volviera a leer y que no intentara darles una nueva respuesta a las preguntas, sino que por el contrario, intentara recordar por qué había respondido lo que respondió en su momento.

Cabe mencionar que la forma en que se aplicaron las entrevistas, es decir, de manera virtual, responde a la situación actual que se vive por el confinamiento a causa de la pandemia mundial. Por ello se optó por hacer las entrevistas por video llamada. Aunque en el caso del último alumno entrevistado se hizo presencial, pero tomando en cuenta todas las medidas y recomendaciones de la secretaria de salud.

Posteriormente de realizadas las entrevistas y haber documentado estas, se procedió a la transcripción de las mismas para su posterior análisis e interpretación de los datos. La transcripción de las entrevistas está presentada en la parte de anexos del presente.

6.6 Del procedimiento para el análisis de datos

Una vez llevados a cabo la aplicación de los instrumentos, así como las facetas del proceso de investigación, se procedió al análisis de los datos recogidos para su interpretación y que estos pudieran ser expuestos en los capítulos posteriores del presente.

De tal manera que en el caso de los cuestionarios se hace una exposición descriptiva al respecto de los resultados encontrados, centrándose en señalar cuáles son las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas más presentes en los alumnos que participaron en el presente estudio; al igual que también exponer que ideas matemáticas cuesta más trabajo a los alumnos trabajar y responder.

Posteriormente se procede a interpretar los cuestionarios de una manera más analítica con lo que se pretende, a través del discurso mismo de la tesis, exponer de una manera más detallada y argumentativa cuáles son las dificultades en el aprendizaje de las fracciones en alumnos de primaria y qué es lo que, en el caso particular de los alumnos de bajo nivel de comprensión, tienden a responder ante las problemáticas expuestas.

En el caso de las entrevistas el procedimiento fue diferente pues no fue cien por ciento artesanal el procedimiento para analizar la información recogida.

Para las seis entrevistas que se realizaron a los alumnos se utilizó el software Atlas.ti con el que se puede hacer un análisis de los discursos. Es decir, el propósito de utilizar este programa fue encontrar en las entrevistas esos argumentos en común que tuvieron los alumnos, tanto los del mismo nivel de comprensión del tema como entre alumnos de diferente nivel.

Es importante mencionar que, como se ha dicho hasta aquí, la intención de entrevistar a los alumnos seleccionados tuvo que ver con identificar la manera de razonar de estos y describir la forma en que responden ante situaciones problemáticas como las que se les presentaron. Sin embargo, además de todo esto, es importante hacer un análisis de qué características y procedimientos tuvieron los alumnos de alto nivel de comprensión que los de bajo no, y con base en esto poder sacar conclusiones, incluso previo a la construcción de la intervención didáctica.

Finalmente se hace el análisis de la intervención didáctica llevada a cabo con los alumnos seleccionados para la misma. En este sentido, se hace una comparativa entre pruebas pre y post test con la intención de medir el cambio resultante a partir de la experimentación, que en este caso es la intervención.

De tal manera que para ello se les aplicó a los alumnos por segunda vez el segundo cuestionario construido a partir de las ideas matemáticas que se relacionan con el trabajo de fracciones.

Cabe mencionar que se aplica el mismo examen toda vez que del día que se les aplicó por primera vez a la segunda vez que se les aplicó pasaron más de seis meses con lo que los alumnos no pudieron pasar por un proceso de memorización pues ni si quiera les fueron presentados los resultados ni se les hizo saber si contestaron bien o más aun, qué reactivos contestaron bien y cuáles no.

CÁPITULO 7. Resultados de los cuestionarios y entrevistas

7.1 Resultados encontrados en los cuestionarios

En estricto sentido la primera etapa de la investigación fue la elaboración y aplicación de cuestionarios; por ello en este momento se procede a exponer los resultados de la aplicación de los mismos. Cabe mencionar que se comienza con una exposición descriptiva en donde se menciona estadísticamente lo detectado en los cuestionarios.

Como ya se mencionó, esta investigación se basó en su primera etapa en la aplicación de dos cuestionarios. En este sentido, uno de ellos correspondió a una etapa de prueba piloto que a la postre permitiría aplicar el segundo cuestionario que sería el primer paso del experimento principal.

7.1.1 Estudio piloto

En su momento, en el apartado de metodología se mencionó que el primer cuestionario a aplicar con los alumnos que participaron en esta investigación constó de diecinueve preguntas. Una vez que, de hecho, estas preguntas ya han sido desglosadas al respecto de qué intención tenía cada una de ellas, a continuación, se presentan los resultados de haber aplicado dicho cuestionario a los treinta y seis alumnos.

En este sentido, la primer pregunta realizada a los alumnos era al respecto de qué concepto tenían ellos de los números fraccionarios. Se clasificó así la respuesta que daban los alumnos de la siguiente manera:

Tabla 3. Principales tipos de respuestas del concepto de fracción

Principales tipos de respuestas del concepto de fracción

Entiende la fracción como	**Número de alumnos**
Como el resultado de la división de dos números	14
Como la parte de un todo	12
Los definen mencionando “fracciones”	8
No tiene concepto o idea de qué son	2
Total	**36**

Es decir que el 39% de los alumnos tiene la noción y la idea de que un número fraccionario es el resultado de dividir a dos números; en tanto que otro 33% hace una referencia al hecho de que las fracciones están reflejando la parte de un entero o todo. Claramente en algunas de las respuestas que de este tipo se puede ver que lo mencionado por Cortina et al., (2013) se encuentra presente al mencionar la problemática que tienen los alumnos de niveles básicos al razonar a una fracción como el resultado de la división de un entero en partes iguales.

Del mismo modo, un 23% de los alumnos comete el error de definir algo usando lo definido para hacer referencia. Es decir, ante la pregunta de qué entendían por números fraccionarios respondían argumentando que se trataban de números fraccionarios.

Finalmente, solo dos de los treinta y seis alumnos que respondieron el cuestionario no tuvieron concepto alguno de los números fraccionarios.

Algunos de los ejemplos de cada una de las clasificaciones de las respuestas que los alumnos dieron se presentan a continuación.

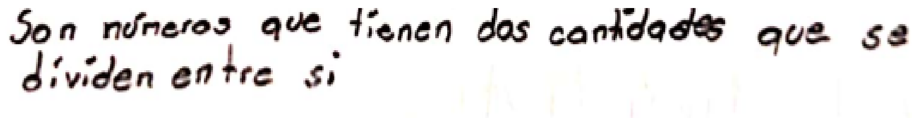


Figura 13. Ejemplo de la respuesta de un alumno que entiende una fracción como el resultado de la división de dos números.

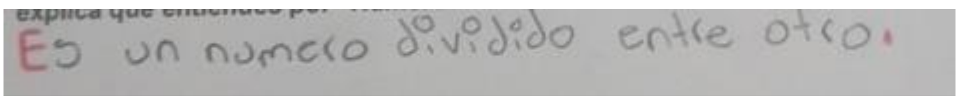


Figura 14. Ejemplo de la respuesta de un alumno que entiende una fracción como el resultado de la división de dos números.

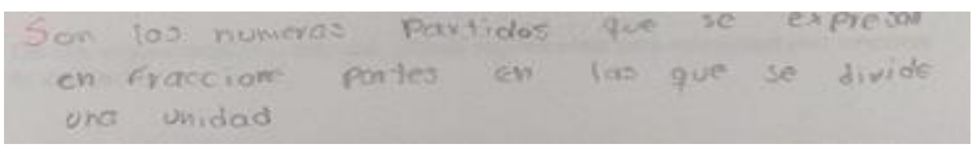


Figura 15. Ejemplo de la respuesta de un alumno que conceptualiza a la fracción como la parte de un todo.

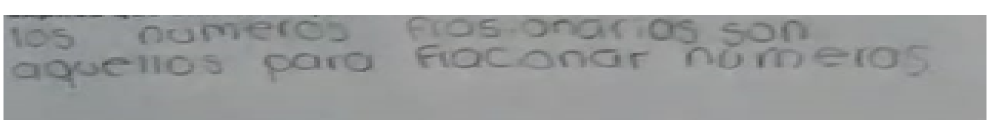


Figura 16. Ejemplo de la respuesta de un alumno que define a la fracción haciendo referencia al término fracción.

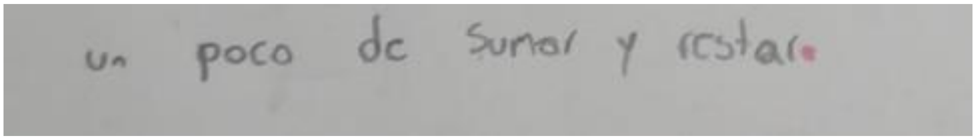


Figura 17. Ejemplo de la respuesta de un alumno que demuestra no tener un concepto de los números fraccionarios.

En el segundo reactivo del cuestionario se presentaba una pregunta en donde tenían que identificar numerador y denominador de un número fraccionario que se les presentó (cinco novenos). El 83% de los alumnos no presentó problema para identificar las partes del número fraccionario y solo el 17%, es decir, seis de los alumnos confundieron estas partes. Lo que demuestra que existe una noción aceptable de los elementos de la fracción.

Los reactivos cuatro, cinco y seis del cuestionario tenían que ver con el reconocimiento del tipo de fracciones. Se les presentaba a los alumnos una lista de fracciones y, según fuera el caso, ellos tenían que identificar a qué tipo de fracción pertenecía cada una de estas. De tal manera que la clasificación de acuerdo a cómo respondieron se presenta a continuación

Tabla 4. Clasificación de los alumnos de acuerdo a la manera en que reconocieron el tipo de fracción expuesta en el cuestionario.

Clasificación de los alumnos de acuerdo a la manera en que reconocieron el tipo de fracción expuesta en el cuestionario

Alumnos que…	**Número de alumnos**
Reconocieron perfectamente fracciones propias, impropias y mixtas.	22
Reconocieron bien las fracciones propias, pero tuvieron problema al diferenciar entre las mixtas e impropias.	8
Reconocieron bien alguna de las tres, pero fallaron en las otras dos.	2

No respondieron o no reconocieron bien ninguna de las tres.	4
Total	**36**

Una vez más, en términos generales los alumnos respondieron bien ante la interrogante expuesta. El 61% de ellos respondió perfectamente a los tres reactivos y hasta el 73% de los alumnos identifica a una fracción propia. De acuerdo al análisis del cuestionario, el mayor problema presente en los alumnos es reconocer a la fracción mixta.

Para los reactivos siete y ocho se atendió a la dificultad expuesta por Murillo (2019) que habla del ordenamiento y ubicación de ordenamiento. Aunque el reactivo número ocho se basó en ubicar una fracción en una línea recta numérica, la intención del mismo es analizar si el alumno podía ordenar fracciones y en un segundo momento ubicar esta, de acuerdo a su tamaño, en una línea recta.

La forma en que respondieron a este par de interrogantes se expone en la siguiente tabla:

Tabla 5. Clasificación de los alumnos de acuerdo a la manera en que respondieron a los reactivos siete y ocho del cuestionario

Clasificación de los alumnos de acuerdo a la manera en que respondieron a los reactivos siete y ocho del cuestionario

Forma de responder de los alumnos	Número de alumnos
Ordenaron correctamente las fracciones y supieron ubicar la fracción presentada en la línea recta numérica.	2
Ordenaron bien las fracciones, pero no pudieron ubicar a la fracción en la línea recta numérica.	7
Ubicaron bien la fracción en la línea recta numérica, pero no pudieron ordenar las fracciones.	5

No respondieron a una o las dos preguntas o ambas la tuvieron mal.	22
Total	**36**

De tal manera que la dificultad reportada por Murillo (2009) respecto a la capacidad de ordenar fracciones está muy presente en los alumnos que participaron en el estudio. Solo el 25% de ellos fue capaz de ordenar las fracciones de manera ascendente como se pedía en el reactivo siete, y de esos, solo dos alumnos fue capaz de ubicar una fracción en una línea recta numérica.

Es importante mencionar que el 61% de los alumnos no fue capaz de responder al ordenamiento de fracciones ni a la ubicación de una de estas en una línea recta. Se nota una clara falta de comprensión de los alumnos al respecto del tamaño de una fracción en comparación con otra, así como de la relación que guarda con un entero.

Para los reactivos nueve y diez del cuestionario se abordó la dificultad de operación de la que habla Murillo (2019) en su trabajo. Cabe mencionar que para este estudio piloto solo se cuestionó a los alumnos sobre sumas y multiplicaciones de fracciones. La forma en que ellos han respondido a estas preguntas se expone en la siguiente tabla:

Tabla 6. Clasificación de los alumnos de acuerdo a la manera en que respondieron a los reactivos nueve y diez.

Clasificación de los alumnos de acuerdo a la manera en que respondieron a los reactivos nueve y diez

Forma de responder de los alumnos	**Número de alumnos**
Respondieron de manera correcta a las sumas y multiplicaciones de fracciones con menos de un error en los seis ejercicios presentados.	6
Respondieron bien a al menos dos ejercicios de suma, pero erraron al menos dos ejercicios de multiplicación	8

Respondieron bien a al menos dos ejercicios de multiplicación, pero erraron en al menos dos ejercicios de suma.	14
Respondieron mal en al menos dos ejercicios de suma y dos ejercicios de multiplicación o bien, no respondieron nada.	8
Total	**36**

En este sentido, se tomó como manera correcta de responder cuando los alumnos respondieron bien a dos ejercicios de tres presentados en cada reactivo. Solo el 16% de los alumnos respondió bien ante los ejercicios de suma y multiplicación. Mientras que llama la atención que el 55% de los alumnos pudo responder de manera correcta a los ejercicios de multiplicación contra un 38% que pudo responder correctamente las sumas.

Aquí es importante hacer una pausa para recalcar esta situación en la que contrario a lo que supondría la lógica de la dificultad de sumar y multiplicar, los alumnos respondieron de mejor manera a las multiplicaciones de fracciones que a las sumas. Más adelante, en el análisis de resultados del estudio principal de esta investigación se tocará con mayor precisión esta situación y de por qué, de acuerdo a las entrevistas, los alumnos parecen tener mayor facilidad para multiplicar que sumar fracciones.

En la parte media del cuestionario se abordó la dificultad expuesta por Murillo (2019) en relación al reconocimiento de esquemas.

Aquí se vuelve importante mencionar que en el reactivo once se presentó la imagen de un rectángulo dividido en ocho partes que a su ve estaba iluminado en tres de esas partes. Se les pedía subrayar la fracción que representaba la parte iluminada del rectángulo habiendo como respuestas 3/8, 3/5 y 5/3; esto en relación a como planteaba el autor la propia dificultad.

En el reactivo doce por el contrario solo se les presentó la imagen de un círculo dividido en ocho partes de las cuales se iluminaron cinco y se pidió, esta vez sin ofrecer una opción múltiple, que mencionaran el numero fraccionario que representaba la parte fraccionaria.

La clasificación de acuerdo a como respondieron los alumnos ante este par de reactivos que abordaban la dificultad de igualdad en situaciones concretas (Murillo, 2019) se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 7. Clasificación de los alumnos de acuerdo a la manera en que respondieron a los reactivos once y doce.

Clasificación de los alumnos de acuerdo a la manera en que respondieron a los reactivos once y doce

Forma de responder de los alumnos	Número de alumnos
Respondieron correctamente a los dos reactivos.	32
Respondieron correctamente al reactivo once, pero mal al reactivo doce.	2
Respondieron mal o no respondieron a ninguno de los dos reactivos.	2
Total	**36**

Con base en lo encontrado en este par de reactivos se puede notar que el reconocer las expresiones fraccionarias en cantidades continuas no les fue tan complicado a los alumnos que participaron en esta investigación. Solo dos alumnos respondieron mal o no contestaron a ambas preguntas, en tanto que hasta el 94% fue capaz de responder correctamente a al menos una de las dos preguntas presentadas.

Lo que sí se puede mencionar es el hecho de cómo los alumnos que erraron en el reactivo doce generalmente respondieron como se presenta a continuación.

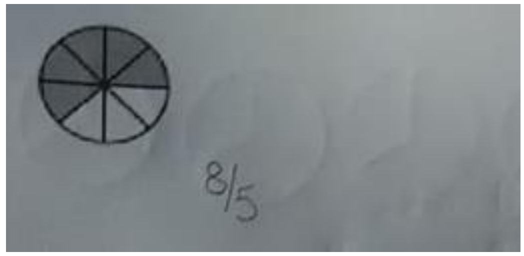


Figura 18. Ejemplo de la respuesta de un alumno que se equivoca al reconocer una fracción en cantidades continúas.

Queda en evidencia que el alumno entiende y reconoce los números ocho y cinco que forman parte de la fracción a expresar, pero tiende a confundir la ubicación de estos respecto de la línea divisora.

Ya en el estudio principal se aborda con mayor detenimiento esta situación y con ayuda de la entrevista se clarifica el por qué los alumnos responden de la manera que responden ante esta situación de las fracciones en cantidades continuas.

Además, en el estudio principal este tipo de reactivos que se les presenta a los alumnos se encuadra bajo la idea matemática de fracciones en cantidades continuas.

De esta manera, en los reactivos trece y catorce de este cuestionario se intentó identificar qué tan presente estaba la dificultad de "reconocimiento del adjetivo igual en situaciones concretas" (Murillo, 2019). De esta manera en el reactivo 13 se presentó a los alumnos una imagen en la que había tres rectángulos, todos divididos en cuatro partes iguales. Y justamente la pregunta era que el alumno mencionara cuáles de los tres rectángulos estaban divididos en cuatro partes de igual área.

En la pregunta catorce se presentaban otros tres rectángulos divididos en cuatro partes de igual área en donde ahora se le pedía a ellos responder cuál o cuáles no estaban divididos en partes de igual área.

Para el análisis de estas preguntas no es necesario el presentar una tabla pues hay que mencionar que ninguno de los treinta y seis alumnos respondió bien a las dos preguntas. De hecho, solo una alumna pudo responder de manera correcta la pregunta trece, en tanto que solo un alumno pudo responder bien la pregunta catorce; en ningún caso respondió bien alguno de los alumnos las dos preguntas.

Importante mencionar que, de acuerdo al primero y segundo cuestionario, ambos alumnos que se mencionan en el párrafo anterior tienen un nivel de comprensión de la temática de fracciones muy por encima del promedio de sus compañeros.

Lo que sí cabe en el análisis de este par de reactivos es la situación en la que este par de alumnos que, como ya se dijo mostraron niveles de conocimiento muy superiores a sus compañeros, respondieron bien y mal la pregunta catorce respectivamente, a partir de identificar que el tercer rectángulo estaba dividido de manera poco usual.

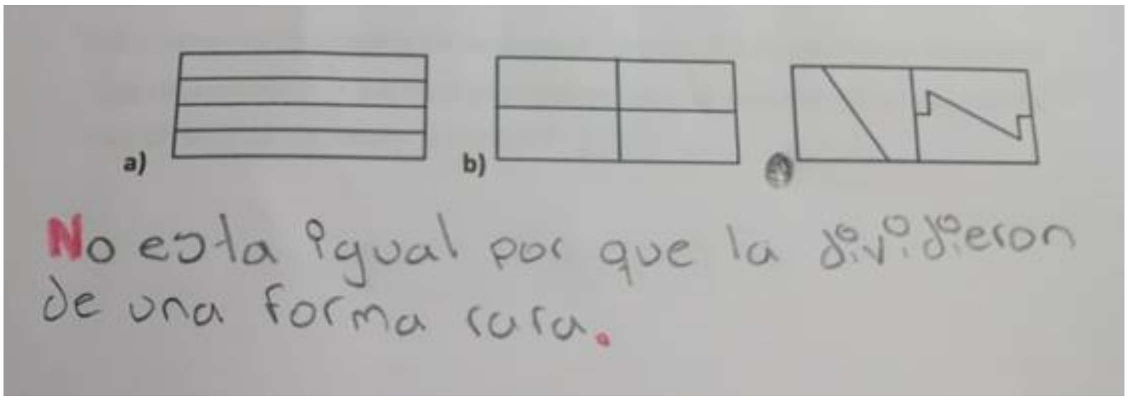


Figura 19.

Aquí se puede observar como la alumna menciona que el rectángulo tres está dividido en partes de área no igual partiendo del hecho de que la forma en que están divididas las cuatro partes no parece serle familiar o al menos presentar una uniformidad.

Ahora esto se puede contrastar contra el único alumno de los treinta y seis que respondió correctamente a este reactivo.

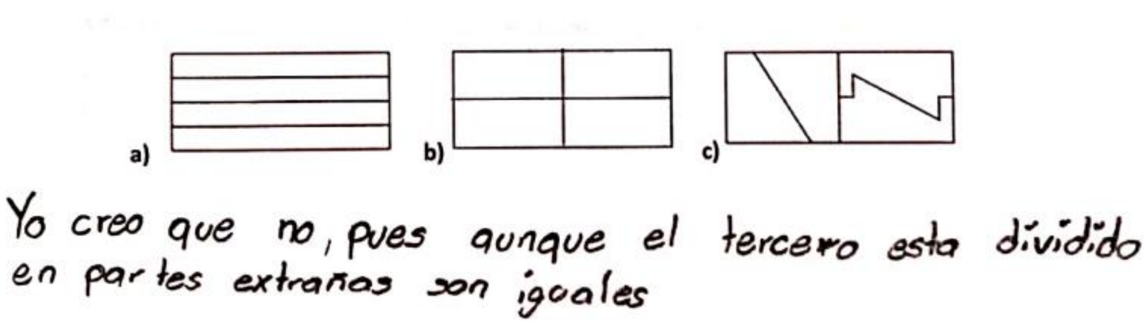


Figura 20. La respuesta equivocada de una alumna ante el cuestionamiento de cuál de los tres rectángulos no está dividido en partes de área igual.

Aunque en la pregunta trece el alumno se confundió, para esta pregunta catorce el alumno, más allá de poner atención en lo poco comunes que son las formas en que han sido divididas las cuatro partes del tercer rectángulo, pudo reconocer que estas son de igual área.

Esta sin duda alguna es la más presente de todas las dificultades que expuso Murillo (2019) pues ningún alumno pudo responder correctamente a ambos reactivos.

De tal manera que de acuerdo a lo recopilado en estos cuestionarios, los alumnos presentaron una dificultad marcada para identificar una parte fraccionaria del área de una imagen si esta no está dividida de manera uniforme.

En el reactivo número quince se tocó el tema de la simplificación de fracciones. En este sentido, se enlistaron seis números fraccionarios con la intención de que los alumnos encontraran su equivalente más simple. De tal manera que la clasificación de acuerdo al número de ejercicios que pudieron responder fue la siguiente:

Tabla 8. Clasificación de acuerdo a cómo respondieron la pregunta número 15 los alumnos.

Clasificación de acuerdo a cómo respondieron el reactivo número quince los alumnos.

Forma de responder de los alumnos	Número de alumnos
Simplificó correctamente las seis fracciones, llegando además, a su expresión más simple.	4
Simplificó correctamente todas las fracciones, pero en al menos un caso no llegó a la expresión más simple.	3
Simplificó bien y llegó a la expresión más simple en al menos tres fracciones, pero no a las seis, habiendo encontrado la expresión más simple en todas las que simplificó.	2
Simplificó bien al menos tres fracciones, pero no las seis y en al menos una de las tres primeras no llegó a la expresión más simple.	14

Simplificó bien una o dos fracciones habiendo o no llegado a la expresión más simple de ellas.	5
No pudo simplificar bien ninguna fracción y mucho menos llegar a la expresión más simple, o en su caso, no hizo por responder el ejercicio.	8
Total	**36**

Claramente existe una dificultad en los alumnos para simplificar las fracciones. Más allá de que este fue un cuestionario que perteneció al estudio piloto, sí es importante mencionar que desde este momento se evidenciaba ya una carencia del conocimiento al momento de realizar este tipo de ejercicios.

Solo el 19% de los alumnos que participó en esta investigación pudo, en este momento de la misma, simplificar el total de las fracciones enlistadas; mientras que el 22% de los alumnos no pudo simplificar al menos una de las fracciones y mucho menos llegar a la expresión más simple de la misma.

Un caso interesante fue el de la alumna "G1-11" quien mostró poder simplificar las fracciones cuyo numerador y denominador era múltiplo de diez. Sin embargo, parece realizar el mismo procedimiento para las demás, es decir, utiliza las decenas como el número resultante.

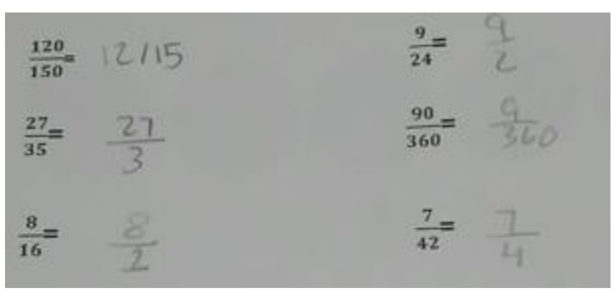


Figura 21. La respuesta de la alumna G1-11 al simplificar fracciones.

En este caso, la fracción $\frac{12}{15}$ la construyó a partir de retirar los ceros a $\frac{120}{150}$; lo mismo pareciera ser intentó hacer en la fracción $\frac{90}{360}$ donde diera la impresión de que solo olvidó "retirar" el cero a 360.

Sin embargo, como ya se dijo, evidencia esta alumna que su razonamiento para simplificar es el de colocar el número de las decenas en el resultado, más allá de que no es constante con lo que hace. Así como esta alumna, se detectaron al menos cuatro alumnos que, de igual manera a ella, intentaban simplificar simplemente colocando el número que aparecía en las decenas como resultado de la simplificación.

Para los reactivos dieciséis y diecisiete se abordó la dificultad para reconocer el número que dio origen a una fracción (Murillo, 2019).

En este caso solo se presentaron dos problemas (uno en cada reactivo) en donde se les exponía a los alumnos una cantidad a partir de la cual debían encontrar la parte entera, siendo que la primera se expresaba en términos fraccionarios. La manera de clasificar las respuestas de los alumnos a estos dos problemas se evidencia en la siguiente imagen.

Tabla 09.. Clasificación de los alumnos de acuerdo a la manera en que respondieron a los reactivos dieciséis y diecisiete

Clasificación de los alumnos de acuerdo a la manera en que respondieron a los reactivos dieciséis y diecisiete

Forma de responder de los alumnos	**Número de alumnos**
Respondieron correctamente a los dos problemas	22
Respondieron correctamente a solo un problema	8
Respondieron equivocadamente o no respondieron nada en los dos problemas	6
Total	**36**

La forma en que se presentaron los problemas no permite mucho el análisis de los mismos reactivos. Y es que en el primer problema solo tenían que encontrar la parte entera a partir de mencionarles que “200” era $\frac{1}{4}$ de un total, para lo que la mayoría, de los que respondieron bien, multiplicó 200 por 4 y llegó al resultado de 800. Algunos incluso no evidenciaron su operación en la hoja del cuestionario y parecen haber llegado al resultado de manera mental.

Solo en casos muy contados los alumnos los alumnos intentaron ejemplificar cómo llegaron al resultado.

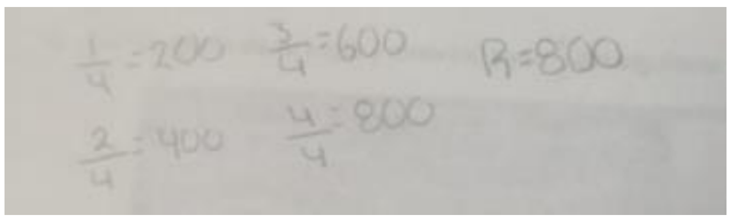


Figura 22. La respuesta del alumno G2-05 a la pregunta número dieciséis.

Finalmente, en los reactivos dieciocho y diecinueve se investigó acerca de qué tan presente estuvo la dificulta de equipartición como error que reportaron Cortina et al., (2013). Justamente se utilizaron algunas imágenes de su artículo para elaborar este par de reactivos.

La forma de presentar estos reactivos no ofrece mucho para un análisis descriptivo pues técnicamente treinta y dos de los treinta y seis alumnos respondieron bien a la pregunta. Aquí más bien cabe el hacer un análisis respecto de la manera diferente de responder de los alumnos.

En este reactivo (el 18) se les pedía dividir los cinco círculos entre las tres personas que se ilustraban utilizando los colores. La imagen que se rescató del artículo proponía el modelo donde los círculos ya habían sido divididos en tercios, por ello esta tarea resultó más sencilla para los alumnos.

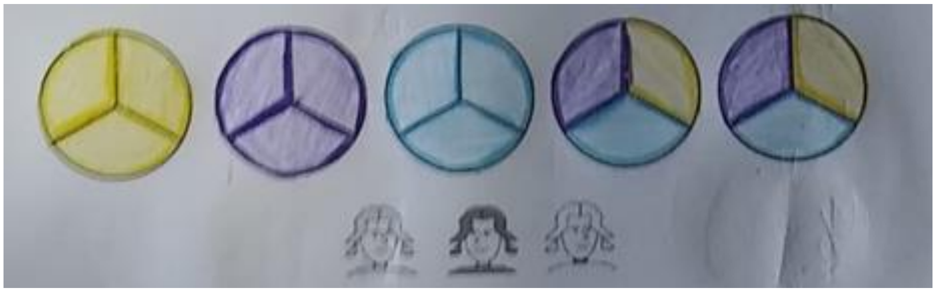


Figura 23. La respuesta del alumno G1-03 la pregunta dieciocho

Figura 24. La respuesta del alumno G2-16 la pregunta dieciocho.

Sin embargo, sí se puede observar como en los dos ejemplos que se presentan, el primer alumno asignó un círculo a cada persona y los últimos dos los repartió cada uno entre las tres personas. La segunda alumna en cambió, repartió cada una de las terceras partes a cada una de las tres personas.

Se presentan estos dos ejemplos para hacer un vínculo de este reactivo con los de reconocimiento de tipo de fracción (4-6). Y es que el primer alumno se presenta aquí no tuvo problema para identificar las fracciones propias, impropias y mixtas, mientras que la segunda alumna no respondió nada o respondió incorrectamente en las tres preguntas en cuestión.

De tal manera que, se puede notar como en el caso del primer alumno, pudo identificar una parte entera y una parte fraccionaria en un número; siendo el número en cuestión la parte proporcional que le tocaba a cada persona. Mientas que en el caso de la segunda alumna esta se limitó a sumar las partes fraccionarias de cada entero que se dividió a las tres personas.

Hay que reconocer que quizás se habrían encontrado otro tipo de resultados si los círculos presentados a los alumnos no hubieran estado fracturados en partes iguales y a ellos hubiera correspondido hacer este trabajo.

En el reactivo diecinueve y tal y como lo ejemplificaron Corina et al., (2013) en su artículo, solo había que fracturar un rectángulo presentado a los alumnos e iluminar la parte correspondiente a 4/5 del mismo. A este reactivo solo dos alumnos no supieron responder. Hubo que reconocer entonces, que este reactivo no ofrecía mucho para un análisis y por ende, al mismo proceso de investigación.

De esta manera se pudo evidenciar a partir del análisis de este cuestionario que las dificultades más presentes en los alumnos que participaron en esta intervención fueron las de reconocer en adjetivo igual en situaciones concretas, donde ningún alumno pudo responder correctamente a los dos reactivos y, la dificultad de ordenamiento justificada también en la ubicación de las fracciones en línea recta. Esto último demostró entonces que a los alumnos les costaba trabajo, al menos hasta este momento de la investigación, reconocer la relación que tienen las fracciones con la unidad.

Así entonces dadas las lagunas y poco alcance del mismo instrumento este se consideró solo como un estudio piloto, aun así, ofreció bases al proceso de investigación al respecto no solo de qué intención tendría el segundo cuestionario, sino de qué es lo que debía preguntarse y que se esperaría de esas preguntas a realizar a los alumnos durante las entrevistas clínicas realizadas a estos.

7.1.2 Estudio principal

Como parte del estudio principal, el cual tuvo como objetivo el comprender y analizar las habilidades y dificultades que presentan los alumnos de primaria al momento de aprender el tema de fracciones y la forma en que estos responden ante problemáticas donde se trabajan las ideas matemáticas que tienen relación con el concepto de fracción, se aplicó a los alumnos que participaron en tal investigación, un segundo cuestionario.

Este segundo cuestionario se reelaboró a partir del que Butto (2013) utilizó para su trabajo de investigación. Como ya se mencionó previamente, esta reelaboración consistió en actualizar algunos reactivos a un contexto más presente, así como el eliminar y agregar algunos reactivos.

Es importante mencionar que los dos reactivos que se agregaron tuvieron la intención, primero de reconocer qué tanta noción tenían los alumnos del tipo de fracción que se les presentaba, es decir, si estas eran propias, impropias o mixtas. De igual manera, el último reactivo de este cuestionario aplicado a los alumnos tuvo la función de reconocer qué tan presente estaba en ellos la capacidad para convertir un número fraccionario a decimal.

De tal manera que, como ya se comentó, este segundo cuestionario se construyó con diecisiete preguntas. En este sentido una vez que los alumnos respondieron este, se procedió a la revisión de ellos. El primer análisis de los mismos fue únicamente estadístico, es decir, solo se buscó identificar si los alumnos acertaban o no a los reactivos para poder hacer un análisis general del mismo cuestionario.

7.1.2.1 Descripción del cuestionario inicial de fracciones

A continuación, se hace la descripción del cuestionario inicial sobre fracciones que fue aplicado a 36 alumnos de sexto grado de primaria. El objetivo del cuestionario de fracciones fue conocer el nivel de conocimientos de cada uno de los estudiantes sobre el contenido matemático del tema de fracciones. En este instrumento se exploraron 17 ideas matemáticas y se describen a continuación en la tabla 10.1

7.1.2.2 Aplicación del cuestionario

La aplicación del cuestionario de fracciones se realizó en línea debido a la pandemia por COVID-19 que se vivía cuando fue llevado a cabo el estudio. De manera tal que, posterior al acercamiento con las autoridades de la escuela, se tuvo una reunión por video llamada con los padres de los alumnos que participaron en el estudio con la finalidad de explicarles cuál sería el procedimiento para aplicar el instrumento.

Una vez acordada la cita con los docenes y padres de familia, se procedió a hacerles llegar el instrumento a los padres por correo electrónico para que ellos imprimieran el mismo y se lo entregaran a los alumnos no antes del mismo día de la aplicación de este. Es decir que se pidió a los padres que los alumnos no pudieran ver el cuestionario para que las respuestas fueran objetivas y espontáneas.

A continuación, en la tabla 10.1 se describen las ideas matemáticas abordadas en dicho cuestionario.

Tabla. 10 Ideas matemáticas sobre fracciones

Número de pregunta	Idea matemática.	Solicitud de la pregunta
1	**Idea de mitad**	Reconocer, de una lista de figuras dada, aquellas que tuvieran sombreada la mitad de ellas.
2	**Idea de Entero**	Reconocer, de una lista de figuras dadas, aquellas que estuvieran sombreadas por completo.
3	**Fracciones en cantidades continuas**	Asignar un número fraccionario a la representación de figuras.
4	**Representación fracciones propias e impropias.**	Ilustrar con la figura de su elección una lista de fracciones dada.
5	**Fracciones en cantidades discretas**	En una lista de imágenes, señalar con un número fraccionario, que parte de esas listas de figuras estaban encerradas en un círculo.

6	**Reconocimiento fracciones equivalentes**	Relacionar imágenes cuya parte sombreada representara la misma cantidad, es decir, fracciones equivalentes.
7	**Secuencia de fracciones equivalentes.**	Continuar secuencias de fracciones equivalentes de una lista dada.
8	**Representación de fracciones en recta no numérica.**	Ubicar una lista de fracciones dadas en una línea recta.
9	**Ordenamiento de fracciones de manera ascendente.**	Enlistar, de acuerdo al tamaño de estas, seis fracciones dadas.
10	**Suma y resta de fracciones**	Responder a una lista de suma y resta de fracciones.
11	**Multiplicación y división de fracciones**	Responder a una lista de multiplicaciones y divisiones de fracciones.
12	**Trabajo con proporcionalidad**	Responder a un problema donde se planteaba una situación de discriminación de cantidades de proporciones diferentes.
13	**Idea de partición**	Responder a un problema donde se planteaba el discriminar dos cantidades que habían sido repartidas.

14	**Idea de escala**	Responder a un problema en donde se planteaba el razonar las distancias de un mapa que estaba dado en escala.
15	**Operación con porcentuales**	Responder a un problema en donde se planteaban cantidades de dinero que debían ser desglosadas con base en el uso de porcentajes.
16	**Reconocimiento tipo de fracción**	En una lista de fracciones dada, reconocer qué tipo de fracción era cada una de ellas (mixta, propia e impropia).
17	**Transformación de decimal a fraccionario**	Convertir números decimales a fraccionarios.

La aplicación del cuestionario sobre fracciones se llevó a cabo en dos sesiones. Estas sesiones fueron realizadas por video llamada y el proceso consistió en que los alumnos respondieran el cuestionario frente a su cámara para poder observarlos respondiéndolo además de que, en caso de haberla, responder a las dudas que tuvieran sobre el mismo. En la primera sesión se aplicó el cuestionario a 16 alumnos y en la segunda a 20.

En cada una de las dos sesiones, una vez que todos los alumnos tenían respondido su cuestionario se les pidió tomarle fotografía a cada una de las hojas de este y enviar las mismas, vía electrónica. Es así como se guardó la evidencia de las respuestas de cada uno de los alumnos para su análisis.

7.1.2.3 Análisis de los cuestionarios

El análisis de los cuestionarios se llevó a cabo en tres etapas. La primera consistió, en verificar las respuestas de los alumnos y observar cuántos de ellos dejaban las respuestas sin responder.

Para la segunda etapa del análisis de los cuestionarios se procedió a la clasificación de los algunos de acuerdo al nivel de conceptualización matemática que tuvieron en el cuestionario de fracciones. Esto consistió en, una vez analizado en acierto y error de cada una de las respuestas de todos los alumnos, categorizar a estos de acuerdo al número de aciertos que tuvieron.

Es decir que se clasificó a los alumnos como de nivel alto, medio e inicial.

La tercera etapa consistió en agrupar las respuestas de los alumnos al cuestionario mediante categorías de resolución de problemas. Se agruparon las respuestas de acuerdo a las estrategias de la resolución de problemas.

Esta categorización tuvo el objetivo de agrupar las respuestas de los estudiantes de acuerdo a la estrategia que los alumnos seguían para resolver las preguntas del cuestionario.

EL cuestionario estuvo construido a partir de abordar 17 ideas matemáticas; una pregunta por cada una de ellas. De tal manera que para cada una de las preguntas se encontraron de tres a cinco categorías de resolución de problemas señaladas y descritas

Los resultados de la evaluación al cuestionario se presentan en la siguiente tabla 11:

Tabla 11. Resultados de la evaluación del segundo cuestionario sobre fracciones a los alumnos.

Número de reactivo	***Idea matemática***	***Acertaron***	***No acertaron***	***No respondieron***	***% de error***
1	**Idea de mitad**	25	9	2	30.56
2	**Idea de Entero.**	22	11	3	38.89
3	**Fracciones en cantidades continuas.**	19	14	3	47.22

4	**Representación fracciones propias e impropias.**	21	14	1	41.67	
5	**Fracciones en cantidades discretas.**	23	13	0	36.11	
6	**Reconocimiento de fracciones equivalentes.**	33	3	0	8.33	
7	**Secuencia de fracciones equivalentes.**	8	12	16	77.78	
8	**Representación de fracciones en recta no numérica.**	14	15	7	61.11	
9	**Ordenamiento de fracciones de manera ascendente.**	4	25	7	88.89	
10	**Suma y resta de fracciones.**	18	15	3	50.00	
11	**Multiplicación y división de fracciones.**	25	10	1	30.56	
12	**Trabajo con proporcionalidad.**	4	29	3	88.89	
13	**Idea de partición.**	24	10	2	33.33	

14	**Idea de escala.**	22	12	2	38.89	
15	**Operación con porcentuales.**	20	12	4	44.44	
16	**Reconocimiento tipo de fracción.**	16	20	0	55.56	
17	**Transformar de decimal a fraccionario.**	5	24	7	13.88	

De acuerdo a esta revisión es como se procedió a determinar qué ideas matemáticas eran las que más se les dificultaba a los alumnos en cuestión y con las cuales se podría plantear no solo una entrevista, sino al mismo tiempo, una intervención con los mismos.

De tal manera que, con base en la última tabla presentada, las ideas matemáticas que mayor dificultad costaron a los alumnos fueron las siguientes:

- Secuencia de fracciones equivalentes.
- Representación de fracciones en línea recta.
- Ordenamiento de fracciones.
- Suma y resta de fracciones.
- Trabajo con proporcionalidad.
- Reconocimiento de tipo de fracción.
- Transformación de decimal a fraccionario.

Entonces, con lo hasta aquí revisado se pudo constatar qué ideas matemáticas se le dificultaban de forma general a los treinta y seis alumnos que participaron en este proceso. Paralelo a esto, se hizo la revisión de cada uno de los alumnos para apreciar qué ideas matemáticas se le dificultaban y facilitaban. De esta manera también, se pudo hacer una categorización de los alumnos de alto, medio y bajo nivel de conocimiento del tema de fracciones.

A continuación se muestra la evaluación del cuestionario de dos alumnos de alto nivel de comprensión de la temática trabajada en el cuestionario.

Tabla 12. Análisis de la forma de responder de un alumno ante las ideas matemáticas plateadas en el cuestionario.

Alta comprensión de la magnitud, utilidad y representación de los números fraccionarios.						
Alumno	**Pregunta**	**Idea matemática**	**Acertó**	**No acertó**	**No respondió**	**Respuesta**
	1	Idea de mitad	x			Reconoce perfectamente la idea de mitad.
	2	Idea de Entero.	x			Reconoce perfectamente la idea de entero.
	3	Fracciones en cantidades continuas.	x			Expreso perfectamente la fracción que correspondía al gráfico mostrado.
	4	Representación fracciones propias e impropias.	x			Ilustró de manera adecuada las fracciones expuestas.
	5	Fracciones en cantidades discretas.	x			No tuvo problema alguno en reconocer las fracciones representadas gráficamente.
	6	Reconocimiento de fracciones equivalentes.	x			Identificó a las fracciones equivalentes de manera correcta.
	7	Secuencia de fracciones equivalentes.	x			Completó de manera correcta todas las secuencias presentadas en el problema.
G2-19	8	Representación de fracciones en recta no numérica.	x			Ordenó de manera correcta y con uso de regla, las fracciones en la línea recta.

9	Ordenamiento de fracciones de manera ascendente.	x			Ordenó las fracciones de manera correcta; pero más aún, ilustró a las mismas y posteriormente las convirtió a decimales para hacer más sencillo el ordenarlas.
10	Suma y resta de fracciones.	x			Operó de manera correcta y simplificó las respuestas.
11	Multiplicación y división de fracciones.	x			Operó de manera correcta y simplificó las respuestas.
12	Trabajo con proporcionalidad.	x			Respondió correctamente, aunque no expuso cómo llegó al resultado.
13	Idea de partición.	x			Para responder, literalmente realizó una división en ambos casos expuestos. La manera en que él llegó al resultado fue expresando las cantidades en forma de decimales.
14	Idea de escala.	x			Para llegar al resultado, su razonamiento fue un escalonamiento de cantidades.
15	Operación con porcentuales.	x			Calculó la porcentualidad de las cantidades y en función de eso, resolvió la problemática expuesta.
16	Reconocimiento tipo de fracción.	x			Reconoce el tipo de fracción.
17	Transformar de decimal a fraccionario.	x			Para resolver la transformación expresó los números en fracciones como centésimos, decimos y milésimos y posteriormente realizó y expuso, un procedimiento de simplificación. Sin embargo, tuvo problemas para convertir el número expresado en milésimas y al igual

						que la mayoría, pensó que se trataba de una fracción impropia.

Tabla 13. Análisis de la forma de responder de un alumno ante las ideas matemáticas plateadas en el cuestionario.

Alta comprensión de la magnitud, utilidad y representación de los números fraccionarios.						
Alumno	**Pregunta**	**Idea matemática**	**Acertó**	**No acertó**	**No respondió**	**Respuesta**
	1	Idea de mitad	X			Reconoció perfectamente la idea de mitad.
	2	Idea de Entero.	X			Reconoció perfectamente la idea de entero.
	3	Fracciones en cantidades continuas.	X			Acertó a indicar con un número fraccionario la cantidad representada en la imagen.
	4	Representación fracciones propias e impropias.	X			Sabe diferenciar entre fracciones propias e impropias y representar gráficamente a las mismas.
	5	Fracciones en cantidades discretas.	X			Reconoció el cómo representar con número fraccionario a cantidades discretas.
	6	Reconocimiento de fracciones equivalentes.	X			Reconoció a las fracciones equivalentes.
	7	Secuencia de fracciones equivalentes.	X			Supo mencionar tres fracciones equivalentes de los cuatro ejercicios que se pidieron.
	8			X		

		Representación de fracciones en recta no numérica.				En este caso, no se comprendió lo que quiso exponer en su representación en la gráfica.
G1-06	9	Ordenamiento de fracciones de manera ascendente.	X			Supo reconocer el orden de las fracciones, aunque no acató del todo la indicación.
	10	Suma y resta de fracciones.	X			Sabe operar suma y resta de fracciones.
	11	Multiplicación y división de fracciones.	X			Sabe operar multiplicación y división de fracciones.
	12	Trabajo con proporcionalidad.	X			Acertó a la pregunta, aunque no manifestó qué razonamiento utilizó para responder a la misma.
	13	Idea de partición.	X			Supo entender la proporción que se repartía en la indicación; del mismo modo, supo discriminar el tamaño de la proporción.
	14	Idea de escala.	X			Acertó a la respuesta, aunque no manifestó qué procedimiento utilizó para llegar al resultado.
	15	Operación con porcentuales.	X			Reconoció lo que representa un número porcentual; del mismo modo, trabajar el porcentaje en función del entero.
	16	Reconocimiento tipo de fracción.	X			Reconoce el tipo de fracción expuesta.
	17	Transformar de decimal a fraccionario.	X			Supo transformar de decimal a fraccionario, aunque, de hecho, tuvo problema al convertir una

						fracción con más de dos números decimales.

Con base en las anteriores dos tablas se puede ver que en la investigación hubieron alumnos con capacidad de atender a las respuestas de manera oportuna y no presentaron dificultad alguna para entender el cuestionario así como para razonar las preguntas que en él estaban.

Del mismo modo, ahora se presenta el análisis de los cuestionarios de dos alumnos que fueron catalogados, a partir justo de este análisis, como alumnos de mediana comprensión.

Tabla 14. Análisis de la forma de responder de un alumno ante las ideas matemáticas planteadas en el cuestionario.

Mediana comprensión de la magnitud, utilidad y representación de los números fraccionarios.						
Alumno	**Pregunta**	**Idea matemática**	**Acertó**	**No acertó**	**No respondió**	**Respuesta**
	1	Idea de mitad	x			Reconoció perfectamente la idea de mitad.
	2	Idea de Entero.	x			Reconoció perfectamente la idea de entero.
	3	Fracciones en cantidades continuas.	x			Acertó a indicar con un número fraccionario la cantidad representada en la imagen; además, las simplificó.
	4	Representación fracciones propias e impropias.	x			Sabe diferenciar entre fracciones propias e impropias y representar gráficamente a las mismas.
	5	Fracciones en cantidades discretas.	x			Reconoció el cómo representar con número fraccionario a cantidades discretas.
	6		x			

		Reconocimiento de fracciones equivalentes.				Reconoció a las fracciones equivalentes.
	7	Secuencia de fracciones equivalentes.		x		Al parecer, solo fue incrementando de uno en uno el denominador y numerado.
	8	Representación de fracciones en recta no numérica.	x			En este caso, no se comprendió lo que quiso exponer en su representación en la gráfica.
G1-05	9	Ordenamiento de fracciones de manera ascendente.	?	?		Dibujó cuatro líneas rectas dentro de la línea recta para pretender ubicar a cada fracción.
	10	Suma y resta de fracciones.	x			Sabe operar suma y resta de fracciones.
	11	Multiplicación y división de fracciones.		x		Notoriamente tuvo problemas para comprender la lógica de cómo operar este tipo de ejercicios.
	12	Trabajo con proporcionalidad.	x			Acertó a la pregunta, aunque no manifestó qué razonamiento utilizó para responder a la misma.
	13	Idea de partición.		x		No entendió la pregunta, solo menciona que a las niñas le tocaron tres pizzas, y eso es más que una pizza, que es lo que le tocó a los niños.
	14	Idea de escala.			x	No respondió.
	15	Operación con porcentuales.	x			Respondió bien, pero no indicó procedimiento.

	16	Reconocimiento tipo de fracción.	x			Reconoce el tipo de fracción expuesta.
	17	Transformar de decimal a fraccionario.	x			Respondió bien, pero no simplifica la respuesta. De tal manera que los resultados que propone son reconocer a las fracciones como décimas, centésimas y milésimas.

Tabla 15. Análisis de la forma de responder de un alumno ante las ideas matemáticas planteadas en el cuestionario.

Mediana comprensión de la magnitud, utilidad y representación de los números fraccionarios.						
Alumno	**Pregunta**	**Idea matemática**	**Acertó**	**No acertó**	**No respondió**	**Respuesta**
	1	Idea de mitad	x			Reconoció perfectamente la idea de mitad.
	2	Idea de Entero.	x			Reconoció perfectamente la idea de entero.
	3	Fracciones en cantidades continuas.		x		Reconoce la fracción cuando solo hay un entero fracturado, pero al presentar más de uno se confunde.
	4	Representación fracciones propias e impropias.		x		Vuelve a manifestar confundirse cuando la fracción es de tipo impropia e ilustra un solo entero.
	5	Fracciones en cantidades discretas.		x		Confunde la parte tomada (numerador) del entero (Numerador).
	6		x			

		Reconocimiento de fracciones equivalentes.				Reconoció a las fracciones equivalentes.
	7	Secuencia de fracciones equivalentes.	x			Continuó las secuencias de forma correcta y perfecta.
	8	Representación de fracciones en recta no numérica.			x	No hizo nada.
G1-15	9	Ordenamiento de fracciones de manera ascendente.		x		Casi responde de manera acertada, pero vuelve a manifestar problema para comprender la magnitud de una fracción impropia.
	10	Suma y resta de fracciones.		x		Al realizar las restas tiene una confusión en la manera de operar, pues opera como si fueran divisiones (cruzada); al sumar, suma numeradores y divisores.
	11	Multiplicación y división de fracciones.		x		Multiplicaciones y divisiones por igual las opera de manera cruzada.
	12	Trabajo con proporcionalidad.		x		Erró la pregunta y no manifestó cómo resolvió la misma.
	13	Idea de partición.	?	?		Respondió técnicamente bien, pero su razonamiento fue que tres pizzas es más que una sola pizza.
	14	Idea de escala.			x	No respondió.
	15	Operación con porcentuales.	x			Respondió bien, pero no indicó procedimiento.

	16	Reconocimiento tipo de fracción.	x			Reconoce el tipo de fracción expuesta.
	17	Transformar de decimal a fraccionario.	x			Respondió bien, pero, también muestra problema para reconocer las milésimas; se ancla en las centésimas. Irónicamente, aquí sí reconoció la fracción impropia que, de hecho, planteó mal.

Con base en la lectura de la evaluación de la manera de responder de este par de alumnos de mediana comprensión de la temática se puede observar que están presentes las dificultades para trabajar y responder ante ideas matemáticas como el ordenamiento de fracciones de manera ascendente, la suma y resta de fracciones y el trabajo con proporcionalidad.

De igual manera, es notorio como el número de aciertos respecto del el par de alumnos de alto nivel de comprensión sobre la temática del cuestionario es considerablemente menor. Aunque estos dos alumnos en términos generales, al igual que el resto de alumnos que se clasificó como alumnos de mediana comprensión, no presentaron problemas para entender ideas como la de mitad, entero y otras ideas que podrían clasificarse dentro del nivel primitivo de comprensión matemático, sí presentan dificultad al entender la relación que guarda una fracción con la unidad.

Es decir, los alumnos presentan problemas, por ejemplo, para ordenar las fracciones, porque, al menos con lo revisado hasta este momento (los cuestionarios) no comprenden, como ya se mencionó, la relación de un número racional y una unidad. Esto puede observarse de manera más detallada cuando este tipo de alumnos (los clasificados en el nivel medio de comprensión de la temática de fracciones) presenta problemas para representar y ubicar una fracción en una línea recta numérica o no numérica.

Finalmente se presentan dos ejemplos del análisis del cuestionario de dos alumnos de bajo nivel de comprensión de la temática de fracciones.

Tabla 16. Análisis de la forma de responder de un alumno ante las ideas matemáticas planteadas en el cuestionario.

Baja comprensión de la magnitud, utilidad y representación de los números fraccionarios.						
Alumno	**Pregunta**	**Idea matemática**	**Acertó**	**No acertó**	**No respondió**	**Respuesta**
	1	Idea de mitad		x		Solo encierra las ilustraciones que, al margen de la parte sombreada, presentan una división simétrica.
	2	Idea de Entero.		x		No reconoció como entero a la imagen que no es una figura geométrica reconocible.
	3	Fracciones en cantidades continuas.		x		Al margen de no poner atención al contar las partes en que se dividió un entero, no se entiende el porqué de su respuesta.
	4	Representación fracciones propias e impropias.		x		Al representar las fracciones impropias divide el entero entre la cantidad que indica el numerador, y el denominador lo considera la parte tomada de la fracción. Es decir, tiende a pensar que el número más grande debe ser el que divida a la unidad.
	5	Fracciones en cantidades discretas.		x		Puede reconocer la parte que se pide tomar a partir de exponer una fracción, pero no puede reconocer la fracción que representa la parte tomada de un universo.
	6	Reconocimiento de fracciones equivalentes.		x		No queda claro cuál fue su razonamiento o si solo fue un erro visual.
	7	Secuencia de fracciones equivalentes.		x		Pudo completar la secuencia de 1/3, pero en las demás no se entendió que quiso explicar.

	8	Representación de fracciones en recta no numérica.		x		Solo se alcanza a entender que numeró la recta, pero no ubicó nada en ella.
G1-01	9	Ordenamiento de fracciones de manera ascendente.		x		Se limitó a ubicar las fracciones en dos columnas, pero no se comprendió lo que quiso hacer.
	10	Suma y resta de fracciones.		x		Suma numerador y numerador; suma denominador y denominador.
	11	Multiplicación y división de fracciones.		x		No se entiende qué lógica utilizó para responder.
	12	Trabajo con proporcionalidad.		x		Respondió mal y no expresó que procedimiento utilizó para responder.
	13	Idea de partición.	x			Técnicamente respondió bien, pero al explicar su respuesta, únicamente dice que al ser más pizzas les "alcanza más".
	14	Idea de escala.		x		Expuso cómo resolvió el ejercicio, pero no queda claro, y obviamente, no llegó al resultado.
	15	Operación con porcentuales.		x		Vuelve a explicar su razonamiento, el cual, de hecho, la lleva a responder equivocadamente. Pero además, se nota claramente cómo divaga entre sus ideas.
	16	Reconocimiento tipo de fracción.		x		No reconoce el tipo de fracción.
	17			x		Muestra una tendencia a pensar que el número expresado en el decimal es un denominador. Lo más curioso

		Transformar de decimal a fraccionario.				es que ella no supo ilustrar gráficamente las fracciones impropias; pero más allá de no reconocer milésimas, supo expresar una fracción impropia.

Tabla 17. Análisis de la forma de responder de un alumno ante las ideas matemáticas planteadas en el cuestionario.

Baja comprensión de la magnitud, utilidad y representación de los números fraccionarios.						
Alumno	**Pregunta**	**Idea matemática**	**Acertó**	**No acertó**	**No respondió**	**Respuesta**
	1	Idea de mitad		x		Tiende a pensar que un medio solo es representado cuando la figura está dividida en dos.
	2	Idea de Entero.		x		No se alcanza a entender qué tipo de razonamiento tuvo.
	3	Fracciones en cantidades continuas.		x		No se entiende qué hizo para entender el problema y responderlo.
	4	Representación fracciones propias e impropias.		x		Al representar gráficamente, considera a la cantidad más grande como el número en que hay que fracturar los enteros.
	5	Fracciones en cantidades discretas.		x		No reconocía la relación que existe entre una cantidad tomada de un universo.
	6	Reconocimiento de fracciones equivalentes.	x			Supo completar la secuencia de equivalencias.
	7				x	No hizo nada.

		Secuencia de fracciones equivalentes.				
	8	Representación de fracciones en recta no numérica.			x	No hizo nada.
G2-16	9	Ordenamiento de fracciones de manera ascendente.	x			Respondió bien, aunque no explica procedimiento.
	10	Suma y resta de fracciones.		x		En algunas operaciones realiza bien el procedimiento, pero en otras confunde las operaciones.
	11	Multiplicación y división de fracciones.	x			Responde de manera correcta.
	12	Trabajo con proporcionalidad.			x	No hizo nada.
	13	Idea de partición.			x	
	14	Idea de escala.			x	
	15	Operación con porcentuales.	x			Responde bien, pero no explica el procedimiento.
	16	Reconocimiento tipo de fracción.		x		No reconoce el tipo de fracción.
	17				x	No hizo nada.

		Transformar de decimal a fraccionario.				

En el puntual caso de estos dos alumnos que se presentan y que claramente, de acuerdo al número de aciertos que demostraron tener en el cuestionario, tienen un bajo nivel de conocimiento sobre la temática de fracciones, queda en evidencia entonces que, en con el primer alumno no pudo ser capaz de responder bien, más que a una pregunta. En el caso del segundo alumno, pudo responder bien algunos reactivos, aunque en un segundo momento de la investigación se pudo conocer mejor porqué respondió aparentemente bien a esos reactivos.

Ahora bien, se han presentado estos seis análisis de los cuestionarios justo porque, como se explicó en el apartado metodológico del presente, una segunda fase de esta investigación consistió en realizar entrevistas del tipo clínico (Delval, 2001) a seis alumnos: dos de nivel alto, dos de nivel medio y dos de nivel bajo. Son estos seis casos que se mostraron, los alumnos seleccionados para pasar a la fase de las entrevistas.

Es importante aclarar que la presentación de los resultados obtenidos en los cuestionarios aplicados a los alumnos seleccionados para la fase de entrevistas se expone en este momento del documento justo porque ese análisis corresponde a los resultados mismos que arrojó el propio cuestionario.

Hasta este momento entonces, se han presentado los resultados cuantitativos del cuestionario a los alumnos. Toca el turno de revisar los cuestionarios de una manera más analítica en función de interpretar las respuestas que dieron los alumnos.

En el reactivo uno, por ejemplo, se solicitaba a los alumnos el encerrar, de las figuras dadas, aquellas que representara la parte iluminada la mitad. Uno de los alumnos catalogados como de baja comprensión y que fue seleccionado para entrevista dio la siguiente respuesta:

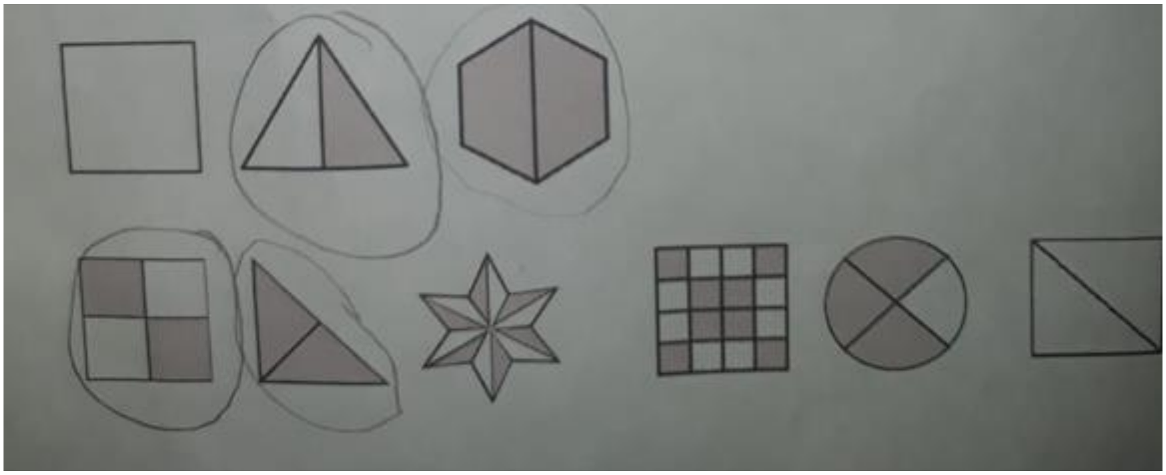


Figura 25. Respuesta de un alumno de bajo nivel de comprensión a la idea de mitad.

Se puede observar entonces que, al ser general en los alumnos de bajo nivel de comprensión de la temática de fracciones con base en el número de reactivos del cuestionario, los alumnos de este tipo suelen reconocer la idea de mitad únicamente en las figuras cuyo caso han sido fracturadas a la mitad y no iluminadas como lo pedía el propio reactivo.

Ocurrió algo parecido en el reactivo dos donde se le pidió a los alumnos el marcar (encerrar) las figuras cuya parte sombreada representara el entero de cada figura.

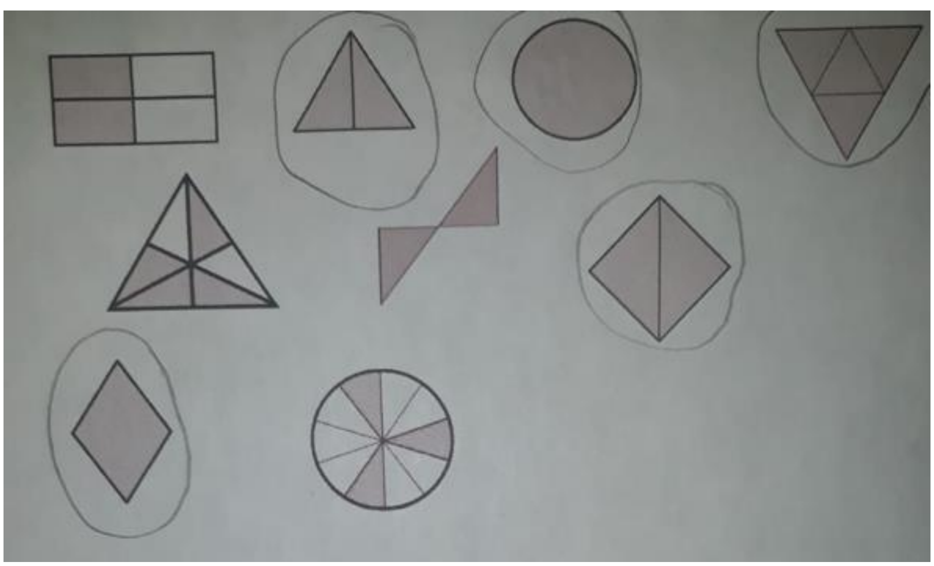


Figura 26. Respuesta de la alumna G1-05 a la idea de entero.

De tal manera que se puede observar que el alumno, que en este caso era una niña de doce años, reconoció bien técnicamente todas las figuras cuya parte sombreada representaba el entero, sin embargo, no pudo identificar aquellas figuras de orden no canónico, es decir, que no le eran familiares.

Un hallazgo importante que ofreció el análisis de este cuestionario fue el reactivo número cuatro, en donde se le pedía a los alumnos ilustrar las fracciones. En este sentido, casi el sesenta por ciento de los alumnos fue capaz de representar tales fracciones. A continuación, se presenta la forma de responder de la alumna “G1-04” quien fue de las más destacadas en cuanto a número de reactivos respondidos de manera correcta en el cuestionario.

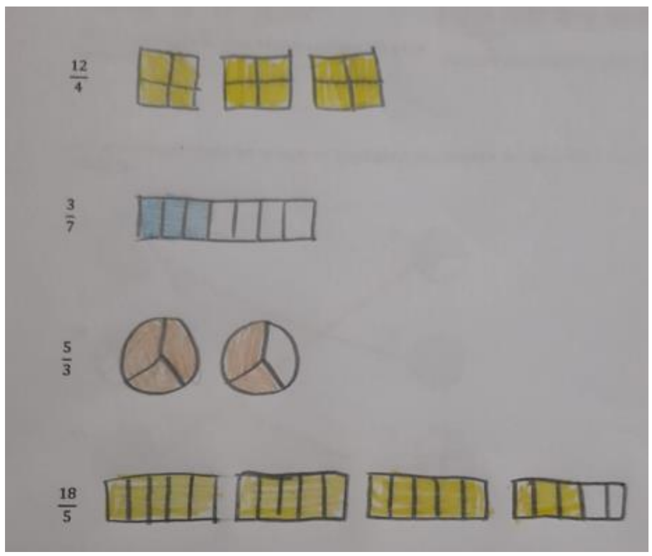


Figura 27. Respuesta de la alumna G1-04 a la representación de fracciones.

La alumna respondió bien ante esta idea matemática (representación de fracciones) y puede verse entonces, como el presentar disposición a responder este tipo de cuestionamientos está relacionado con otros reactivos del mismo cuestionario.

Ejemplo de ello es la respuesta de esta alumna en los reactivos ocho y nueve del cuestionario en donde tenía que representar las fracciones en una línea recta y ordenar una lista de fracciones respectivamente.

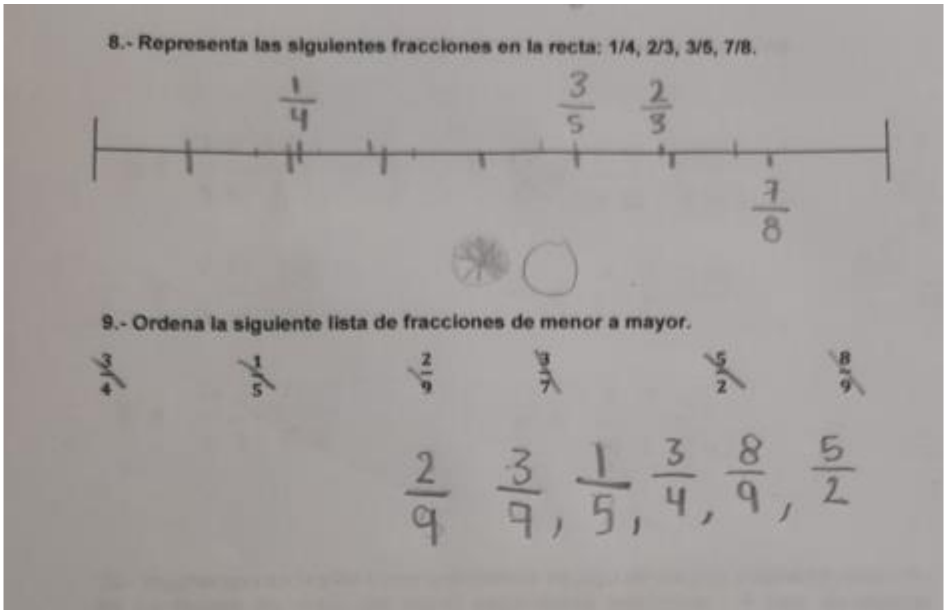


Figura 28. Respuesta de la alumna G1-04 a la representación de fracciones en línea recta y al ordenamiento de las mismas de manera ascendente.

Se puede observar que, aunque en el reactivo nueve no responde del todo bien pues le faltó ubicar la fracción “1/5” en su lugar, esto puede deberse a una simple confusión que es muy común en donde al ver un “5” ella pudo confundirlo con “1/2” lo que explicaría el por qué lo ubicó entre “3/9” y “3/4”. Además, es importante mencionar que, en el estudio piloto, esta alumna fue de las dos que pudo responder correctamente esta idea matemática en el reactivo siete.

Lo anterior, es decir, el entender que su respuesta fue una simple confusión y no un error de razonamiento se ve en el reactivo ocho donde pudo perfectamente representar las fracciones en la línea recta. Vemos, de hecho, que en este reactivo ella se apoya de realizar una Figura con la que presumiblemente se apoye para entender el tamaño de las fracciones.

Lo anterior se menciona para relacionar el razonamiento que tienen los alumnos para representar las fracciones y después ubicar a estas por su tamaño como se hace en los reactivos ocho y nueve. Es decir, un alumno, como en el caso de G1-05 que puede entender cómo ilustrar fracciones propias e impropias, es capaz de ordenar las fracciones de acuerdo a su tamaño y la relación que guarden con la unidad.

Ahora bien, del otro lado están los alumnos como el caso de G1-15, quien al intentar representar las fracciones respondió de la siguiente manera.

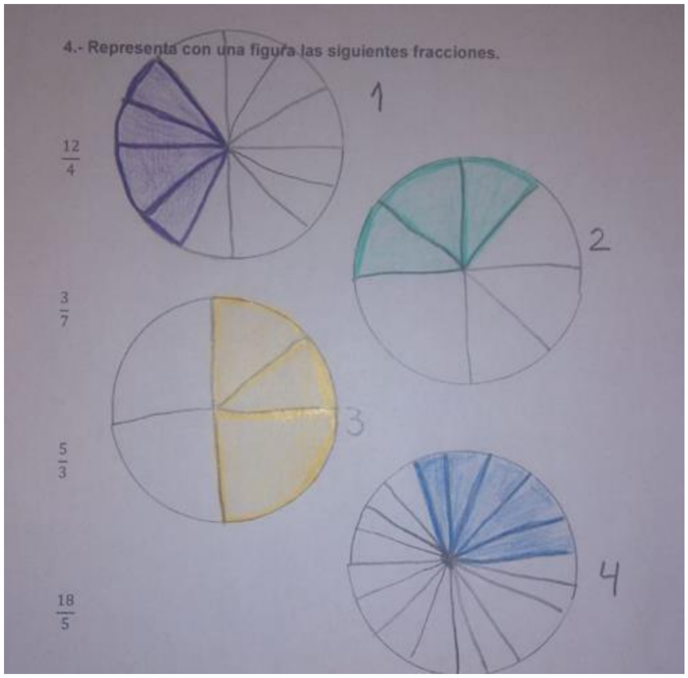


Figura 29. Respuesta del alumno G1-15 a la representación de fracciones.

Del mismo modo, se puede observar que de las cuatro fracciones que se les pedía representar, tres eran impropias, es decir, mayores a la unidad. En este caso, este alumno de bajo nivel de comprensión ilustró bien la fracción impropia, mientras que las otras tres, de tipo impropio no las respondió bien.

Y es aquí donde hay un hallazgo importante en esta investigación, pues se puede observar que, como en el caso de este alumno, la mayoría de los que equivocaron esta respuesta, tienden a considerar como el número de partes a fracturar del entero al número más grande y no al denominador.

Si se observa bien, la fracción propia la representó bien porque, obviamente al ser propia, en denominador es mayor que el numerador; en tanto que en las fracciones impropias, al ser más grande el numerador, es este el que uso como base para fracturar el entero como ya se mencionó.

Ejemplo de esto es otra respuesta de otro alumno de bajo nivel de comprensión como lo es G1-11 quien técnicamente respondió de la misma manera que G1-15.

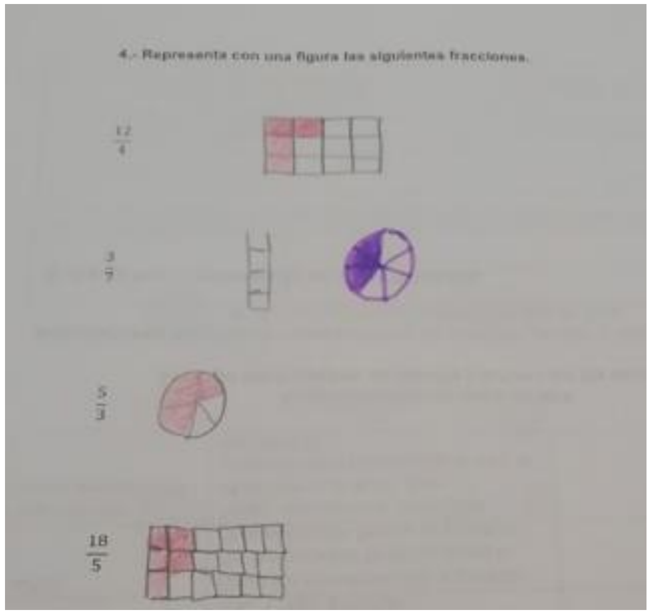


Figura 30. Respuesta del alumno G1-11 a la representación de fracciones.

Queda demostrado que, aunque esta idea matemática representada en el reactivo cuatro del cuestionario no tuvo un nivel tan alto de error en general por los alumnos, sí se nota una clara tendencia por los alumnos que no pudieron responderla de manera correcta hacia no comprender que una fracción puede representar una cantidad mayor a la unidad y por ende, buscan, al momento de representarla, fracturar el entero de acuerdo al número más grande que aparezca en la fracción y no al denominador.

Con base en el análisis del razonamiento que se hizo con la alumna G1-05 respecto a la forma de responder el reactivo cuatro y como este se ligó a la comprensión de los reactivos ocho y nueve del mismo cuestionario, se presenta la relación que tienen estos mismos reactivos, pero en el alumno G1-15, quien erró totalmente el reactivo cuatro.

El alumno entonces no respondió el reactivo ocho, o sea, dejó totalmente en blanco ese espacio. Sin embargo, aquí vemos la forma de responder del reactivo número nueve, es decir, la idea matemática de ordenamiento de fracciones.

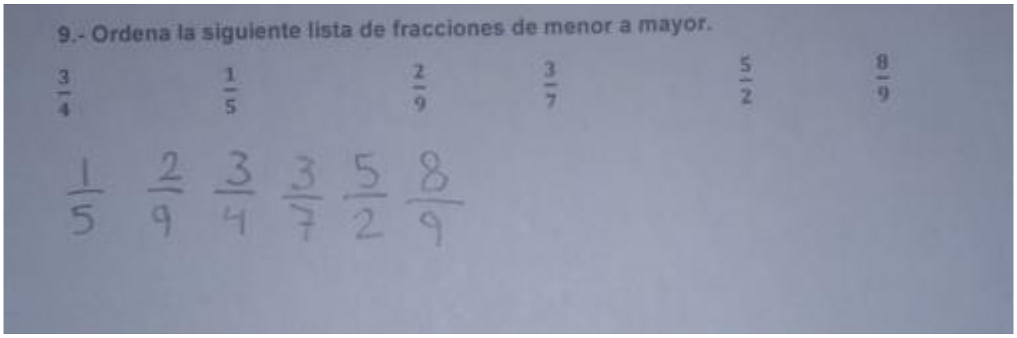


Figura 31. Respuesta del alumno G1-15 al ordenamiento de fracciones.

Aquí es muy importante entender, pues, así como en el caso de G1-05 quien entiende la naturaleza divisoria de las fracciones y por ello identifica la naturaleza no solo propia e impropia de las fracciones, sino a su vez mixta y con base en esto puede ordenar a las fracciones de acuerdo a su tamaño; en el caso de G1-15 al no responder el reactivo que tenía que ver con la línea recta y por su forma de responder el reactivo nueve, de ordenamiento de fracciones, se puede ver que él no entiende la naturaleza divisoria de las fracciones.

En este sentido, este alumno ordenó las fracciones de acuerdo al numerador, en donde para él “1/5” es las más chica y “8/9” es la más grande porque el uno es el número más chico que había en los numeradores de las seis fracciones presentadas, en tanto que ocho era el más grande en esa misma presentación.

De tal manera que este alumno demuestra no poder haber respondido de manera correcta los reactivos cuatro, ocho y nueve en función de que no tiene la capacidad de razonar a la fracción en su naturaleza divisoria y él solo ve números.

En cuanto a los reactivos diez y once en donde se trabajaban las operaciones con fracciones, sumas y restas y multiplicaciones y divisiones respectivamente, contrario a lo que se podría suponer con el hecho de que en la educación primaria se aprende primero a sumar y restar y después a multiplicar y dividir, los alumnos presentaron mayor problema para sumar y restar que para multiplicar y dividir.

Hasta este momento del estudio entonces, no era posible entender por qué los alumnos mostraban mayor problema al sumar y restar fracciones que al dividir y multiplicar estas; sin embargo, en el análisis de las entrevistas sí fue posible el entender por qué sucedió esta situación.

Entonces del mismo modo, se vuelve importante mencionar que el reactivo número doce, es decir, la idea de proporcionalidad, fue la que, junto al ordenamiento de fracciones, más costó trabajo a los alumnos responder, sin embargo, al haber sido una respuesta en donde se ofrecían cuatro posibles respuestas, los alumnos no desarrollaron su razonamiento en la hoja; sin embargo, esta idea matemática y el cómo razonaron los alumnos, tanto los que respondieron bien como los que respondieron mal, sí se puede analizar en las entrevistas.

Algo similar ocurre con el reactivo trece en donde se abordaba la idea matemática de partición. En este caso, en el análisis descriptivo del reactivo, hasta el 66% de los alumnos respondió de una manera adecuada, sin embargo, al haber representado una situación donde los alumnos tenían que dividir unidades, en esta casos pizzas entre dos grupos, en este caso niñas y niños, y en donde entonces, la pregunta ofrecía solo dos posibles respuestas, claramente se notó que algunos alumnos únicamente atinaron a la respuesta por una condición circunstancial más que por un correcto razonamiento de la misma.

A continuación, se presenta la forma en que un alumno respondió no solo de manera correcta a este reactivo, sino que su razonamiento es el acertado.

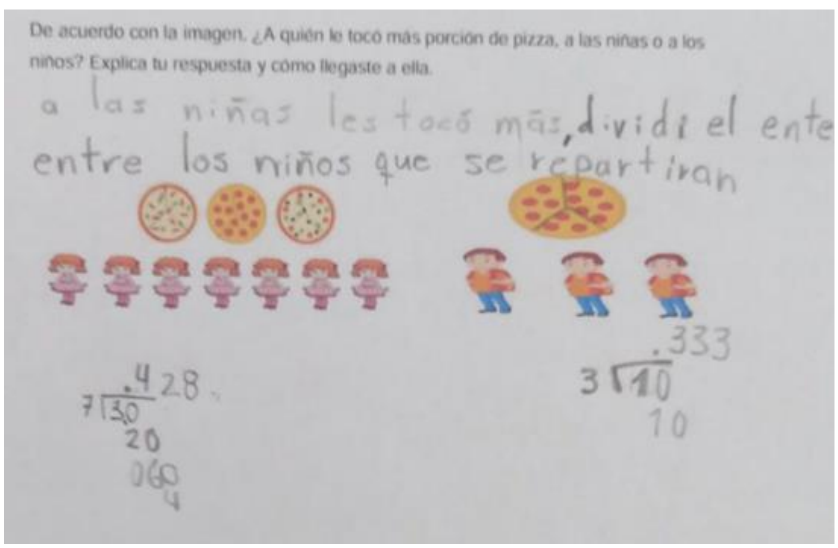


Figura 32. Respuesta del alumno G2-19 a la idea de partición.

Vemos entonces como el razonamiento de este alumno, que en este caso es G2-19, quién, por cierto, participó en la fase de entrevistas, buscó la respuesta a partir de la división de los enteros, en este caso pizzas, entre los grupos a los que serían divididos. De tal manera que, bajo esta lógica treinta dividido entre siete es más grande que uno dividido entre tres.

Aquí entonces se vuelve a evidencia como el entendimiento de los números no solo fraccionarios sino en general de los números racionales como el resultado de una división puede ofrecer una mayor comprensión sobre el tamaño y la discriminación entre estos.

Esta parte es muy importante pues con base en los hallazgos del cuestionario de este alumno en particular y con lo ofrecido por él en la entrevista, se pudo diseñar parte de la intervención didáctica que es la tercera fase de esta investigación y en la que, por cierto, participaron alumnos de baja comprensión de la temática.

Ahora bien, se presenta con la siguiente imagen como un alumno respondió de manera adecuada, pero no con base a entender y razonar la pregunta sino al hecho de que, como ya se dijo, este reactivo ofrecía una respuesta prácticamente binaria.

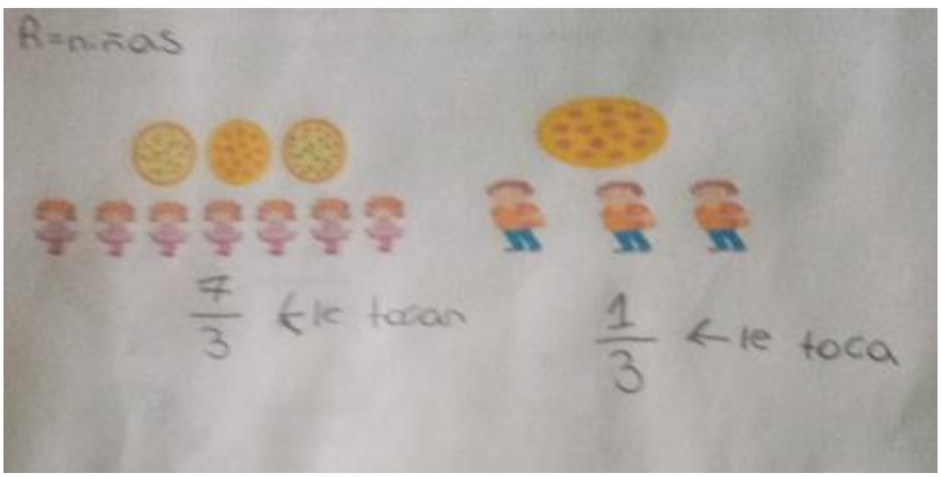


Figura 33. Respuesta del alumno G2-03 a la idea de partición.

En este caso el alumno G2-03 responde técnicamente de manera correcta, pero según él, a las niñas les tocó 7/3 de pizza, siendo que lo correcto era 3/7.

La alumna G1-14 también responde de manera correcta, pero se presenta su respuesta para poder analizarla.

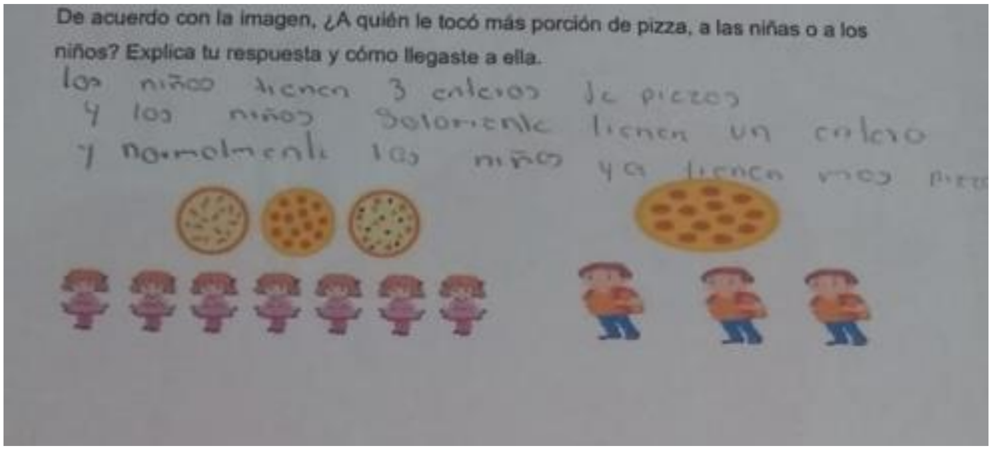


Figura 34. Respuesta de la alumna G1-14 a la idea de partición.

Como una gran parte de los alumnos, respondieron que a las niñas les tocó más pizza por el hecho de que tres es mayor a uno. Por ende, este tipo de alumnos respondió técnicamente bien a la pregunta, pero con base en un mal razonamiento de la misma.

Finalmente es interesante la respuesta de alumnos como G2-02, quien, aunque respondió mal a la pregunta de a qué grupo le tocó más pizza, si a las niñas o a los niños, su forma de buscar la respuesta parece tener una mayor comprensión de la idea de partición que otros alumnos que, aunque respondieron bien, no fue gracias a la correcta comprensión de la idea abordada en este reactivo.

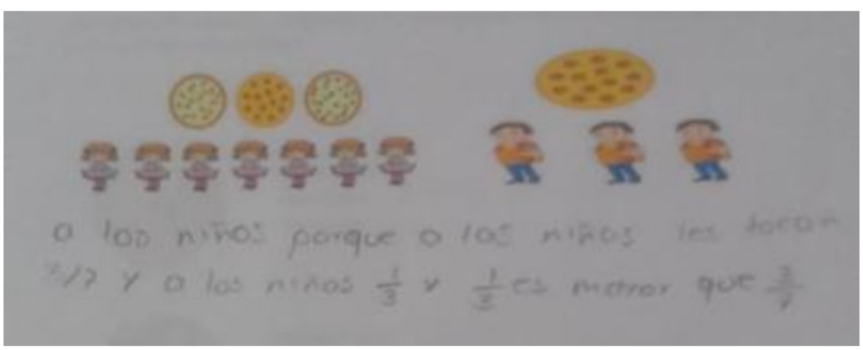


Figura35. Respuesta del alumno G2-02 a la idea de partición.

Es decir, este alumno entendió que a las niñas les tocaba 3/7 de pizza y a los alumnos 1/3, pero bajó la lógica de él, 1/3 es más grande que 3/7. Entonces, su error no fue el entender cómo se trabaja la idea de partición, sino más bien de ordenamiento de las fracciones.

Entonces, aunque se dijo que bajo el análisis meramente descriptivo de este reactivo, la mayoría de los alumnos respondió de manera correcta, bajo el análisis que se presentó solo nueve de los treinta y seis alumnos, es decir, 25%, pudo responder de manera correcta a este reactivo con base en la comprensión de la idea de partición y la correcta discriminación entre el tamaño de los números fraccionarios, como fue en el caso de G2-19, de los números decimales.

El reactivo número quince del cuestionario abordó la idea matemática de operación con porcentuales. En este reactivo se presentaba un problema en el que, de acuerdo al precio de unos balones y el descuento que de ofrecía por cada uno de ellos, el alumno debía decidir qué balón era el más barato.

De tal manera que en este ejercicio había tres balones con diferentes precios y descuentos. La mayoría de los alumnos respondió de manera adecuada a este reactivo, sin embargo, es interesante la forma en que alumnos como G1-09 se equivocaron.

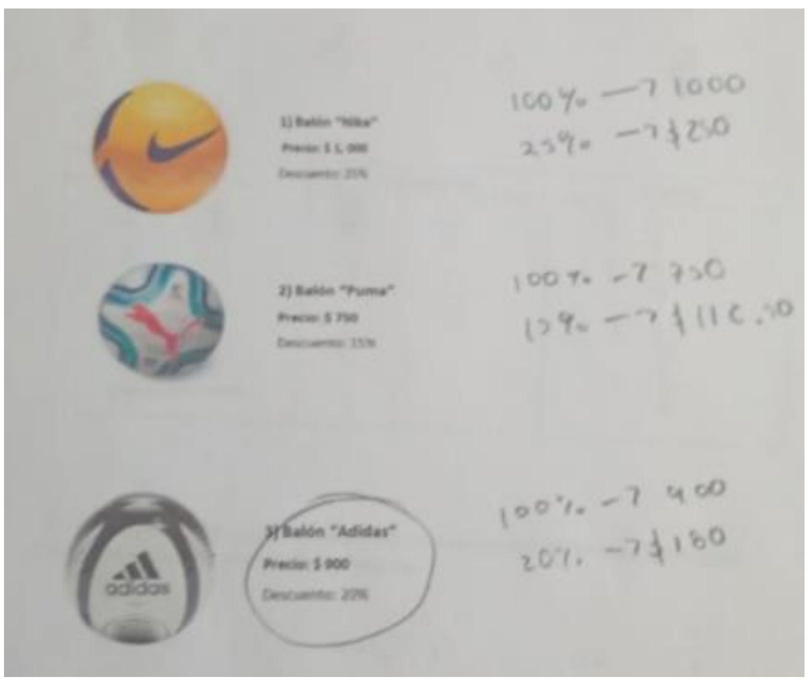


Figura 36. Respuesta del alumno G1-09 a la idea de porcentaje.

En este sentido, el alumno claramente utilizó una regla de tres para encontrar el porcentaje de descuento de cada balón, sin embargo, no tomó una buena decisión.

Caso diferente el del alumno G2-20 quien con base en la siguiente imagen calculó bien el precio final de cada balón, pero parece haber entendido mal la pregunta e indicó qué balón era el más costoso y no en más barato.

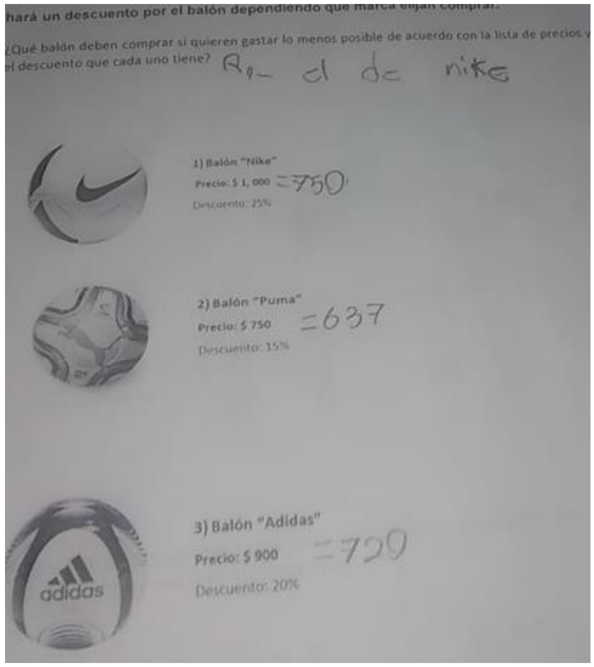


Figura 37. Respuesta del alumno G2-20 a la idea de porcentualidad.

Otros alumnos respondieron en función de calcular qué balón ofrecía mayor descuento y no repararon en descontar este al precio inicial y tomar una decisión a partir de ver que balón finalmente costaba menos.

De tal manera que, bajo la revisión y análisis de este reactivo, se puede observar que la idea de comprensión de porcentajes en general está bien aprendida por los alumnos pues la gran mayoría supo calcular el descuento que tenía cada balón. Pareciera ser que lo detectado con este reactivo es que los alumnos presentan dificultad para entender lo que leen.

El reactivo dieciséis del cuestionario demostró que los alumnos presentan una clara dificultad para reconocer el tipo de fracción; sin embargo, esto no se consideró un problema pues podría tratarse solo de la falta de practica o incluso de no haberlo aprendido o estudiado en algún momento. No se realizó análisis alguno al respecto de este reactivo pues, aunque fue de los que más error tuvieron por parte de los alumnos, como ya se dijo, no hay mucho qué abordar al respecto.

Finalmente, el reactivo diecisiete sí ofrece un material interesante para el análisis pues en este se abordó la idea matemática de transformación de decimal a fraccionario.

En este sentido, para que un alumno pueda entender las ideas de ordenamiento de fracciones y su representación en la línea recta, así como en general la relación que guardan estos con la unidad, la mejor manera es entender y vincular al número fraccionario con un número decimal (Castro, 2001).

Es más fácil reconocer que “.42” es más grande que “.33” que “3/7” es mayor que “1/3” como quedó demostrado en el reactivo número trece de este cuestionario.

De tal manera que incluso en la intervención didáctica que se llevó a cabo con los alumnos seleccionados, el trabajo de decimal a fraccionario se vio más como un objetivo final que como una idea matemática más a abordar.

Más allá de que solo siete alumnos no hicieron esfuerzo alguno por responder este reactivo, solo cinco del total de treinta y seis pudieron responder correctamente este reactivo.

Este reactivo evidenció, más allá de la falta de comprensión de esta idea matemática, que algunos alumnos al realizar la conversión de, por ejemplo, el número “.75”, consideraron al siete como numerador y cinco como denominador. Es decir, ofrecieron respuestas a este ejercicio del tipo “7/5”.

Pero el hallazgo más importante de este reactivo es la falta de trabajo por parte de los alumnos con números decimales que tienen más que centésimos; es decir, números con más de dos dígitos a la derecha del punto decimal.

Y es que en este reactivo se presentaron cinco decimales que llegaban solo a centésimos y un número que tenía hasta la parte de los milésimos. Este número era el ”.125”. de los treinta y seis alumnos que participaron en esta investigación, solo la alumna G2-06 pudo responder “1/8” a la transformación de este decimal.

Llama la atención que incluso los alumnos con mejores resultados en el cuestionario equivocaron la respuesta. G2-19 respondió con “1/5”. Otros alumnos de alto nivel de comprensión como G1-06 y G2-12 respondieron “1 ¼”.

Esto último manifiesta que los alumnos están acostumbrados a trabajar únicamente con números decimales que se expresen en centésimos y al ver tres números después del punto decimal, en lugar de verlo como milésimo, incluso los alumnos de alto nivel de comprensión de la temática de fracciones piensan que el “1” es parte de un número entero ya que los decimales no pueden ser representados más allá de los centésimos.

7.2 De las entrevistas

Como segunda faceta del proceso de investigación se llevaron a cabo entrevistas de tipo clínico con los alumnos con el objetivo de conocer cómo reaccionaban estos ante las problemáticas presentadas a ellos en el segundo cuestionario y bajo qué razonamiento respondían (Delval, 2001).

De tal manera que, como ya se ha manifestado en este documento, los alumnos seleccionados para entrevistas fueron seis; seleccionando a dos de nivel alto de comprensión, dos de nivel medio de comprensión y dos de nivel bajo de comprensión. Esto en función de la cantidad de respuestas correctas que tuvieron en el cuestionario de diecisiete reactivos.

De tal manera que gracias a este tipo de entrevista se pudo observar qué dificultades estuvieron presentes en los alumnos que participaron en el proceso de esta investigación.

Ejemplo de esto es la entrevista que se le hizo a una alumna de nivel bajo quien como se presentó en la figura X, declaró haber encerrado las figuras que encerró porque estas estaban divididas a la mitad:

Entrevistador: _ "En la pregunta uno a ti se te pedía encerrar las figuras cuya parte iluminada representara ½. ¿Me podrías decir por qué encerraste las figuras que encerraste?".

Alumno: _ "es que tú nos dijiste que hiciéramos lo que venía en las indicaciones de cada pregunta".

Entrevistador: _ "De acuerdo, ¿Y cuál era la indicación? Explícame por qué encerraste las que encerraste".

Alumno: _ "Bueno, la instrucción nos dijo que debíamos encerrar como las figuras que estuvieran coloreadas a la mitad; por eso encerré esas cuatro".

Entrevistador: _ "¿Consideras que ambos triángulos están sombreados en ½?".

Alumno: _ "Bueno, el de abajo está iluminado todo, pero como está partido a la mitad, cuenta como si fuera un medio".

Entrevistador: "Gracias".

Una respuesta parecida dio la otra alumna de nivel bajo de comprensión (G2-16) al cuestionarle al respecto de por qué había encerrado ambos triángulos. Ella respondió argumentando "tenía una raya en medio y por eso es un medio".

Esta es la forma en que esta alumna respondió al reactivo:

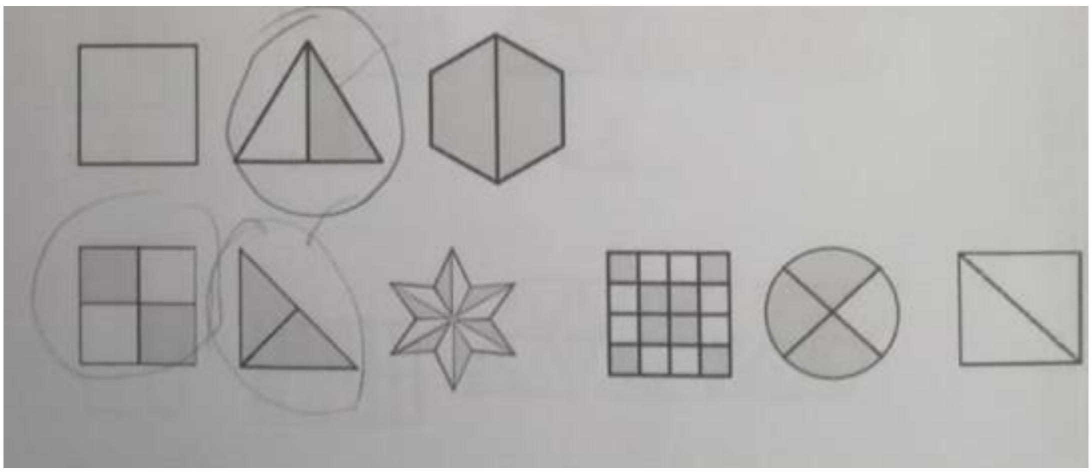


Figura 38. Respuesta de la idea de mitad de la alumna G2-16.

Sin embargo, cuando a esta alumna se le cuestionó por qué no encerró el último cuadrado que estaba también dividido a la mitad ella mencionó no haber encerrado ese porque no tenía nada de sombra.

Resulta interesante entonces, el ver cómo estas alumnas consideraron que las imágenes cuya parte sombreada representada un medio, eran aquellas fracturadas en dos partes independientemente de qué tanto estaban sombreadas, sin embargo, en ambos casos, no encerraron el ultimo cuadrado que también estaba dividido en dos porque carecía de parte sombreada alguna.

Y es que pareciera haber una clara dificultad para representar las fracciones en los alumnos que participaron en esta intervención, al menos en aquellos que obtuvieron un nivel bajo de comprensión de acuerdo al número de reactivos del cuestionario.

En este sentido, a propósito de la pregunta número tres, en donde se les pedía a los alumnos expresar con una fracción la parte sombreada de unas figuras presentadas, es interesante ver el proceso que hacen para encontrar numerador y denominador.

La alumna G1-01 responde en el cuestionario de la siguiente manera:

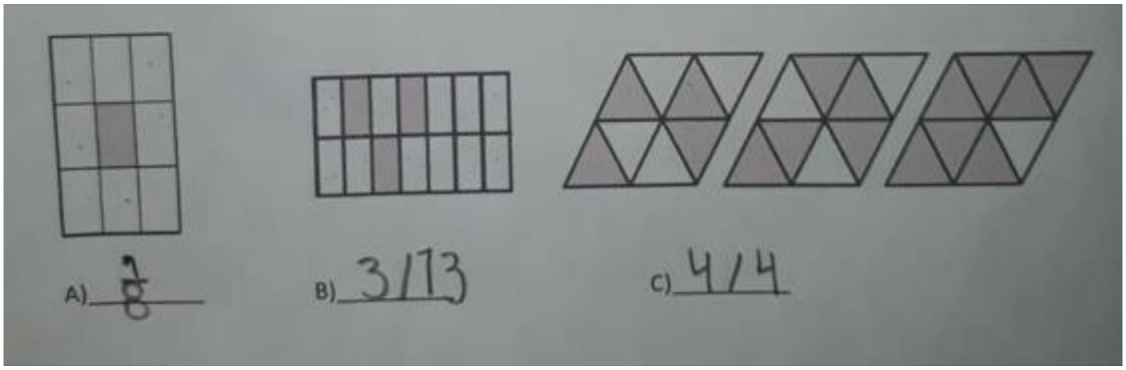


Figura 39. Respuesta de la alumna G1-01 a la idea de representación de fracciones.

En entrevista la alumna respondió de la siguiente manera:

Entrevistador: _ "En la pregunta número tres se te pedía expresar con una fracción la parte sombreada de cada figura. ¿Me podrías decir, por favor, qué procedimiento seguiste para llegar a la respuesta que diste?".

Alumno: en el de arriba va el número que está pintado y en el de abajo el que no está pintado.

Entrevistador: _ "¿Cómo que el que está y no pintado, hija? A ver, explícamelo, por favor, con el inciso "a"".

Alumno: _ "Sí… o sea, mire, en el punto "a" es un "cuadrote" en donde hay uno pintado y ocho que no están pintados".

Este tipo de razonamiento al momento de responder este reactivo fue muy común en los alumnos que participaron en este proceso. Entonces se puede los alumnos tienen problemas para entender la relación "parte-todo" que tienen las fracciones, las cuales de acuerdo con los propios libros de texto, se trabajan desde tercero y cuarto grado de primaria.

Del mismo modo y como ya se había expuesto en el análisis de los cuestionarios, esta dificultad para comprender la relación parte-todo que tienen las fracciones queda demostrada también en el reactivo número cuatro donde se pedía ilustrar las fracciones presentadas.

Esta es la manera en que la alumna G2-16 respondió en el cuestionario:

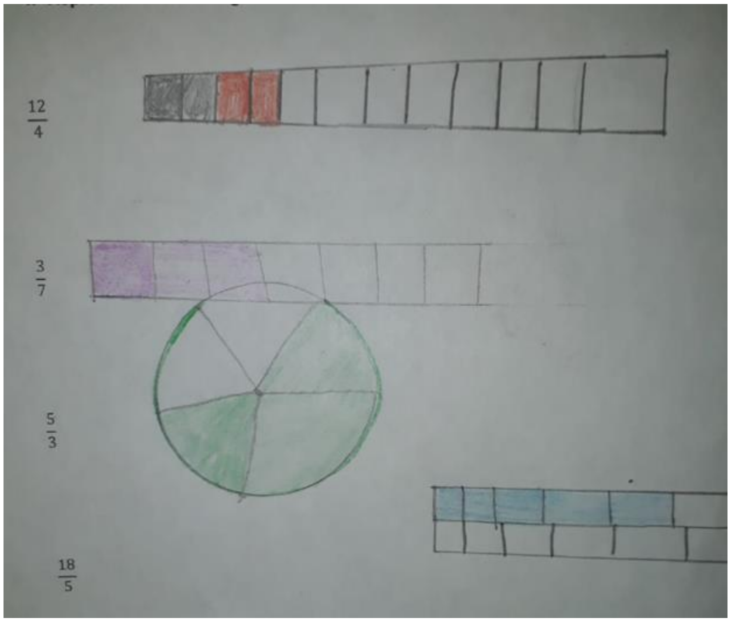


Figura 40. Respuesta de la alumna G2-16 a la expresión de fracciones.

Volvemos a ver, así como en los casos que ya se habían presentado, que algunos alumnos demuestran problema al encontrar numerador y denominador de una fracción. Cuando se le cuestionó a la alumna el por qué respondía de tal manera, ella respondió así.

Entrevistador: _ "¿me podrías decir, por favor, en la fracción 12/4 por qué lo dibujaste así'?".

Alumno: _ "porque tú nos pediste que dibujáramos un dibujo que estuviera dividido en doce partes iguales y que coloreáramos cuatro partes… eso es lo que yo entendí".

Entrevistador: _ "En la fracción 3/7 tú divides un rectángulo en siete partes e iluminas tres, ¿Por qué lo hiciste así?".

Alumno: _ "Ah, porque ahí había que dividirlo en siete y colorear tres pedazos".

Entrevistador: _ "¿Por qué dividirlo en siete?"

Alumno: _ "Porque el siete es el más grande… ni modo de dividirlo en tres y colorear siete… es como que me faltarían".

Entrevistador: _ "Muy bien, en la de 5/3 veo que dibujaste un círculo. A ver, dime en cuántas partes lo dividiste, cuántas iluminaste y por qué".

Alumno: _ "No importa que sea un círculo; lo dividí en cinco porque es el más grande y coloreé tres pedazos porque es el número más chico… digamos que es obvio lo que nos pediste que hiciéramos; el examen se me hizo muy fácil".

Entonces, más que una dificultad para reconocer la relación parte-todo que tienen las fracciones, los alumnos manifestaron dificultad para comprender que una fracción puede expresar una cantidad superior a la unidad y tienden a pensar que las partes en que ha de ser fracturado un entero se determinan en función de cuál es el número más grande en la fracción, pues, en su lógica de ellos, no puedes iluminar más partes de las que tienes. Claramente entonces, no existe para este tipo de alumnos, la idea de que una fracción puede ser resultado de más de un entero fracturado.

Es entonces importante analizar como los alumnos con problemas para comprender el tema de fracciones ven a estos como dos números y no como el resultado de una división.

Prueba de esto es la respuesta que dio la alumna G1-01 cuando en el cuestionario se le pidió representar una lista de fracciones en una línea recta.

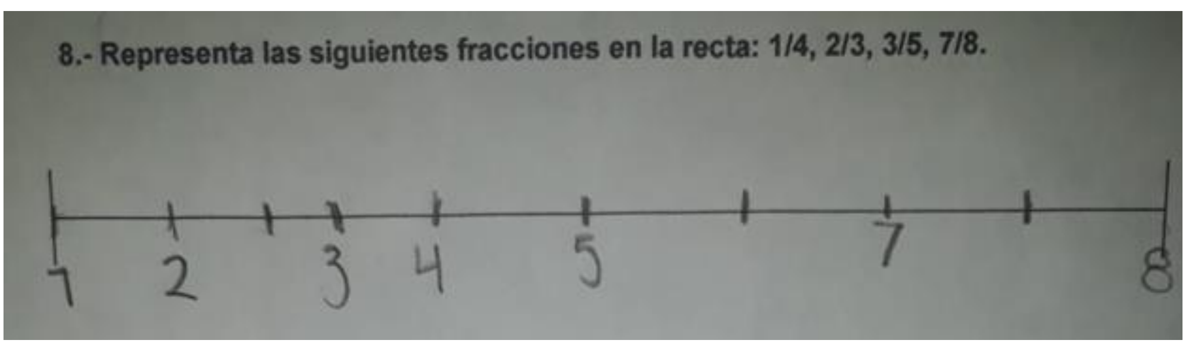


Figura 41. Forma en que la alumna G1-01 representa las fracciones en una línea recta.

En la entrevista, cuando se le cuestionó al respecto ella comento lo siguiente:

Entrevistador: _ "¿me podrías decir, por favor, porqué respondiste así en la pregunta número ocho?"

Alumno: _ "Eso también era fácil porque solo partí la línea en ocho partes porque ocho era el número más grande… a cada raya le di un número, pero no había ni seis ni nueve; por eso esos dos números no los puse".

Claramente se puede ver que la alumna ubicó los ocho números que se presentaron en las cuatro fracciones. Es decir, ella no trabajo bajo el razonamiento de representar o ubicar una fracción en una línea recta de acuerdo al tamaño de la misma, sino que ella solo ve números y los ordena de manera ascendente.

Esto se ve reflejado aún más cuando a la misma alumna se le cuestionó al respecto de su respuesta en el reactivo número nueve, la cual fue la siguiente:

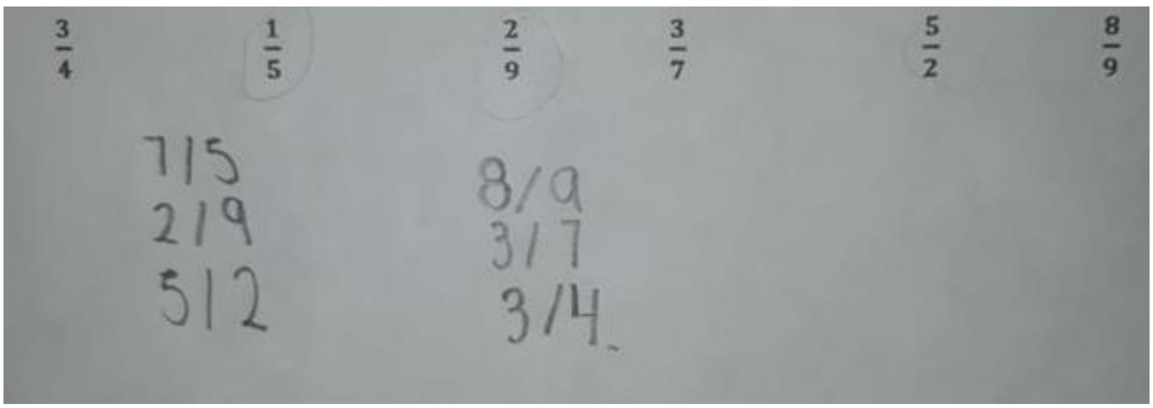


Figura 42. Forma en que la alumna G1-01 ordena una lista de fracciones.

Entrevistador: _ "en la pregunta nueve se te pedía ordenar las fracciones, ¿me podrías decir porque respondiste de la manera qué respondiste?... es decir, me gustaría saber cómo hiciste para ordenarlas".

Alumno: _ "Tú dijiste de menor a mayor, por eso las ordené, así como me lo pediste".

Entrevistador: _ "Muy bien. Pero, por favor, explícame en qué te basaste para ordenarlas así".

Alumno: _ "Es que cinco más dos es siete y dos más nueve son once… y sí te das cuenta, el de arriba la suma es doce".

Entonces con esto uno entiende que la alumna en cada fracción sumó los dos números y con base en ese resultado los ordeno de menor a mayor. Pasó lo mismo con la segunda columna de números pues tres más cuatro son siete en tanto que nueve más ocho son diecisiete. Entonces, queda demostrado que este tipo de alumnos en una fracción ve solo dos números y no los vincula ni como la parte de un todo, ni mucho menos alcanza a entender la naturaleza divisoria ya lo que expresan los mismos.

Se evidencia entonces que este tipo de alumnos no comprenden lo que representa y expresa una fracción, pues incluso alumnos de nivel medio como G1-05 mostraron dificultad al realizar sumas y restas de fracciones.

De hecho, ya se había expuesto la situación de que algunos alumnos pudieron responder correctamente a la multiplicación y división de fracciones, pero no así a la suma y resta de estas.

La entrevista a la alumna G1-05 nos ofrece una explicación de por qué ocurre esta situación.

Entrevistador: _ "¿Me podrías decir cómo se hace una suma y resta de fracciones?".

Alumno: _ "Una suma se hace multiplicando el numerador y el denominador de la otra fracción. Por ejemplo (en 4/3 más 3/5) cuatro por cinco serían veinte y siete por tres serían veintidós… veintiuno, veintiuno, perdón".

Entrevistador: _ "¿Y en las multiplicaciones y divisiones de fracciones?".

Alumno: _ "La multiplicación se hace… ah, no. Teníamos que multiplicar el mismo numerador por el mismo numerador… de la fracción; y el mismo denominador…

…¿En la división? Tenía que multiplicar el numerador por el denominador de la otra fracción… el resultado… el resultado lo tenía… Por ejemplo, si tengo 5/3 y 2/7, tengo que multiplicar el cinco por el siete, me da treinta y cinco y; tengo que multiplicar el tres por el do y serían seis".

De tal manera que queda demostrado que a estos alumnos se les facilitó más recordar cómo realizar una división y multiplicación de fracciones que la suma y resta de las mismas por el hecho de que para las primeras recordaban más un proceso mecánico en donde se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador o, en el caso de las divisiones, de manera cruzada. En tanto que para las sumas y restas se busca un común denominador, el cual no saben buscar pues este es un proceso más complicado que implica entender la magnitud y significancia de las fracciones.

Por otro lado, en lo que respecta a las habilidades, se analiza la entrevista realizada tanto al alumno G1-06 como al alumno G2-19, quienes obtuvieron los mejores rankings en el segundo cuestionario.

Prueba de esto es que ambos alumnos respondieron correctamente al reactivo doce donde se expuso un ejercicio donde hay dos jarras de diferente tamaño, pero con la misma proporción de jugo de naranja y agua simple. La pregunta era saber qué jarra tenía un sabor más fuerte a naranja.

Al cuestionar a uno de los alumnos por qué de su respuesta, dio el siguiente argumento.

Entrevistador: _ "… tú respondiste el inciso número tres, donde decías que la mezcla "a" y "b" tienen el mismo sabor".

Alumno: _ "Porque son equivalentes las fracciones. En la primera jarra son ¾ y en la segunda… son 6/8".

Entrevistador: _ "De acuerdo. Entonces, ¿Tú para entender qué proporción de sabor a naranja tenía cada jarra asignaste un número fraccionario?"

Alumno: _ "Así es".

Entrevistador: _ "¿Podrías expresar en números porcentuales la cantidad de naranja que tiene la primera jarra?".

Alumno: _ "La jarra número uno tiene 75%".

Entrevistador: _ "Muy bien, ¿Podrías expresar, con números decimales, la cantidad de naranja que tiene la jarra número dos?".

Alumno: _ "A ver… Serían… creo que igual, .75".

Con lo expresado por este alumno queda manifestado que este alumno al poder entender la naturaleza divisoria de las fracciones puede expresar con estas cantidades proporcionales dadas. Del mismo modo, tiene la facilidad para transitar de fraccionarios a decimales y porcentuales.

Esta situación de entender a las fracciones como el resultado de una división también lo representó muy bien el alumno G2-19, quien para resolver los reactivos ocho y nueve del cuestionario, es decir, las ideas de representación en línea recta y ordenamiento de fracciones, se apoyó de realizar divisiones como se muestra a continuación:

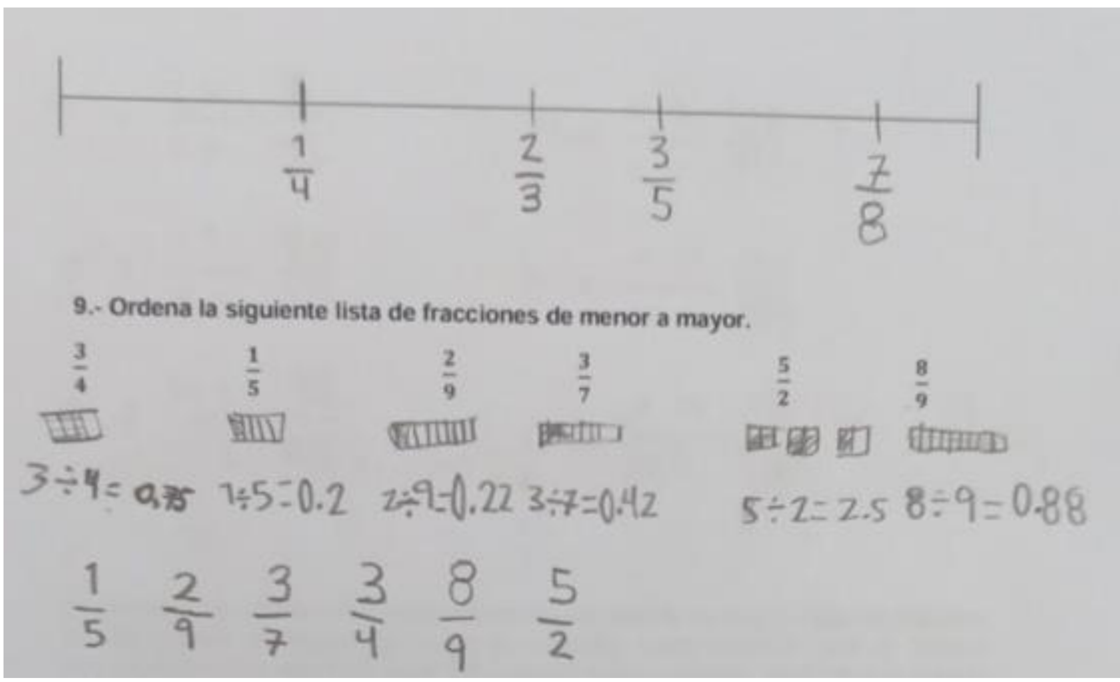


Figura 43. Manera de responder del alumno G2-19 en la representación de fracciones en línea recta y ordenamiento de fracciones.

En el momento de entrevistarlo el alumno expresó lo siguiente:

Entrevistador: _ "En el reactivo número ocho se te pedía representar en una línea recta una lista de fracciones, ¿Podrías decirme cómo hiciste para realizar este ejercicio"??

Alumno: _ " ...lo que yo hice fue dividir los dieciséis centímetros de la línea entre cuatro y después ubiqué la fracción ¼. Lo mismo hice con las demás, dividí los dieciséis centímetros entre tres y lo multipliqué por dos y así ya encontré donde estaba la de 2/3…".

Entrevistador: _ "En la pregunta nueve se te pedía ordenar una lista de fracciones. Dime por favor qué es lo que hiciste para realizar el ejercicio".

Alumno: _ "Si, miré, si se da cuenta, dividí el… el… el numerador de cada fracción entre el denominador. Por ejemplo, *en la primera me dio .75, y así en cada una".*

Entrevistador: _ "Muy bien, Rodrigo. Entonces, ¿Qué hiciste después de dividir numerador entre denominador de cada fracción?"

Alumno: _ "Ya dependiendo de lo que me diera en cada división es como dije cuál era más chiquita y cuál más grandota".

Aquí entonces, vemos que el alumno no solo comprende la naturaleza divisoria de las fracciones, sino que hace uso de esa división para ordenarlos de manera ascendente con base en su expresión decimal. Esta forma de vincular a los números fraccionarios con los decimales a partir de la división del numerador entre el denominador lo manifiesta este mismo alumno en el reactivo número diecisiete, donde respondió de la siguiente manera.

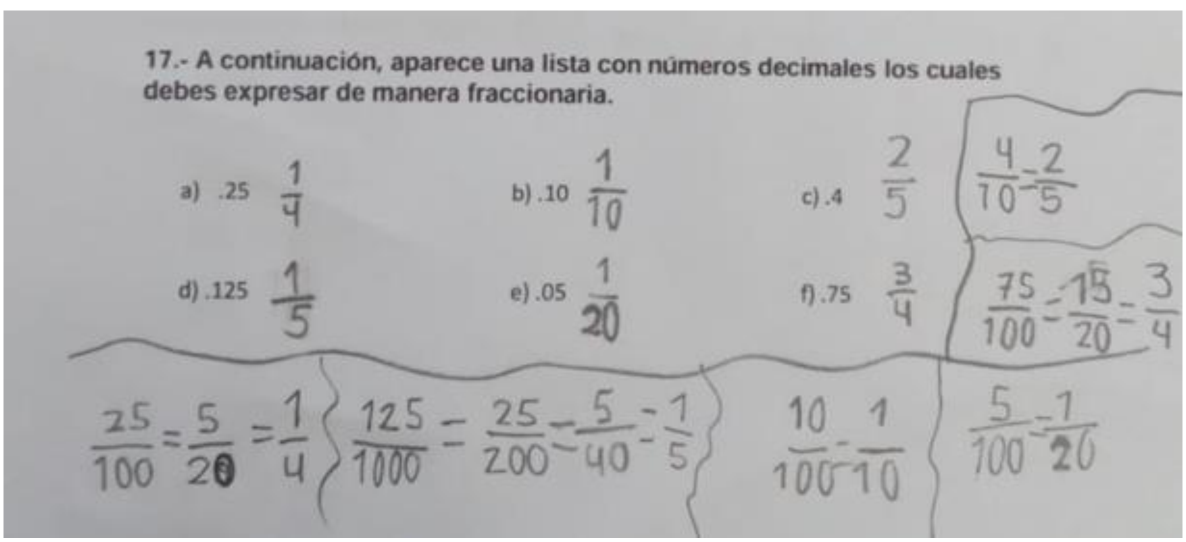


Figura 44. Manera en que el alumno G2-19 transforma de decimal a fraccionario.

Al cuestionarlo al respecto él respondió así:

Entrevistador: _ "En la pregunta diecisiete se te pide convertir números decimales a fraccionarios. Explícame, por favor, cómo hiciste para responder esta pregunta".

Alumno: _ “Es lo mismo, profe”.

Entrevistador: _ “¿Cómo lo mismo, Rodrigo?”

Alumno: _ “Sí, mire, nada más divido el numerador entre denominador y así”.

Entrevistador: _ “A ver, explícame, por ejemplo, ese procedimiento en el inciso “a””.

Alumno: _ “Sí, mire, son veinticinco centésimos, por eso divido veinticinco sobre cien”.

Entrevistador: _ “Muy bien, pero veo que no respondiste 25/100, sino que ¼, ¿Por qué?”

Alumno: _ “Ah, es que los simplifique. Mire, abajo hago una como viborita con la simplificación de cada una de las fracciones”.

El alumno vuelve a manifestar la naturaleza divisoria no solo de las fracciones, sino de los racionales en general. De manera que él entiende que, por ejemplo, “.4” es igual a dividir cuatro entre diez; el trabajo que él hace después tiene que ver con la simplificación de la fracción que él mismo ya ubicó.

Finalmente, en esta situación de convertir el decimal a fraccionario, lo cual de acuerdo a la teoría, es un proceso con el que se evidencia la capacidad de entender y comprender la magnitud y significancia de los números fraccionarios y racionales en general (Castro, 2001), se puede rescatar lo respondido por el también alumno de nivel alto G1-06, quien pese a ser alumno sobresaliente en este tema, se confundió en el último reactivo al convertir el número “.125” en “1 ¼” y no en “1/8”.

Entrevistador: _ “¿Por qué en el inciso “d” dijiste que “?125” era igual a un entero y ¼”?”

Alumno: _ “Porqué para mí 100 es el entero, es decir, como es “.125” ya había pasado del entero. Entonces, yo puse el entero y el 25, que es lo que sobraba, era ¼”.

Queda manifestado entonces, que aun los alumnos con niel alto de comprensión en el tema tienen la idea de que los números decimales solo se pueden expresar hasta centésimas. Por eso, cuando ven un número con tres dígitos después del punto decimal, razonan a este como mayor a la unidad, pues, de acuerdo a lo expresado por este último alumno, cien es una unidad.

Las entrevistas entonces ofrecieron una mirada hacia como razonaron los alumnos, tanto de bajo nivel, como medio y alto, ante las problemáticas expuestas en el cuestionario. Es importante señalar entonces que, esta manera de razonar y de explicar el pensamiento no habría sido posible solo con el análisis del cuestionario, sino que a través de la entrevista y de escuchar al alumno, se pudo entender la forma misma en que ellos llegaron a una respuesta a partir de cómo entendieron el mismo ejercicio.

CAPÍTULO 8. Resultados de la intervención didáctica

En el presente capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir de la aplicación de una intervención didáctica que corresponde a la segunda etapa del estudio.

Se inicia con la descripción de la secuencia didáctica, en qué consistió, quiénes participaron y qué tiempo duró la misma. Del mismo modo se describe la forma en que fue aplicada esta la intervención didáctica). Finalmente se presentan, como ya se expuso, los resultados y conclusiones obtenidos a partir de dicha intervención.

8.1 Descripción de la intervención didáctica

La intervención didáctica consistió en una secuencia de 13 actividades llevadas a cabo con tres de los alumnos que, de acuerdo con los cuestionarios de fracciones llevados a cabo en el estudio principal y secundario, demostraron tener dificultades en la comprensión del concepto, magnitud y forma de operar de los números fraccionarios.

Es importante señalar que el criterio para seleccionar a los tres alumnos no fue únicamente el que obtuvieran un puntaje bajo en los cuestionarios de fracciones que se obtuvieron, sino que paralelo a la planeación de las actividades a llevar a cabo durante la secuencia didáctica, hubo que hacer contacto con los padres de los alumnos que obtuvieron un nivel bajo en los cuestionarios. De tal manera que los alumnos que participaron lo hicieron bajo el consentimiento y colaboración de sus padres.

La intervención didáctica, como ya se mencionó, se construyó a partir de una secuencia de 13 actividades para fortalecer en los alumnos la comprensión del concepto de número fraccionario, así como la magnitud y forma de operar con éste. En este sentido, una vez llevado a cabo en análisis del cuestionario de fracciones que correspondía al estudio principal, se decidió construir la secuencia didáctica tomando en cuenta las siguientes ideas matemáticas:

- Mitad
- Simplificación de fracciones
- Trabajo con fracciones en cantidades discretas

- Equivalencia de fracciones
- Representación de fracciones en línea recta no numérica
- Representación de fracciones en línea recta numérica
- Ordenamiento de fracciones de manera ascendente
- Suma y resta de fracciones
- Conversión de fraccionario a decimal y de decimal a fraccionario.

En este sentido, fueron nueve las ideas matemáticas seleccionadas a trabajar, la mayoría de ellas porque fueron las ideas que, de acuerdo con los cuestionarios aplicados a los alumnos, se dificultaron más a estos, tales como la idea de equivalencia de fracciones o suma y resta de fracciones. Por otra parte, se agregaron algunas ideas matemáticas considerando eran importantes para que el alumno se familiarizará con el trabajo de fracciones, tales como la idea de mitad.

Y justo a propósito de esa familiarización, las primeras cuatro actividades se diseñaron para que el alumno se familiarizara con un material didáctico llamado "regletas de Cuisenaire". Material que sirvió de apoyo a lo largo de la realización de la mayoría de las restantes nueve actividades.

Con el fin de medir la viabilidad de la aplicación de esta secuencia didáctica se culminó con una sesión final en donde los alumnos realizaron un cuestionario de fracciones similar al que hicieron en un primer momento para el estudio principal.

El cuestionario final que, de hecho, solo se aplicó a los tres alumnos mencionados, consistió en 17 preguntas con las mismas ideas matemáticas que el cuestionario aplicado en un principio. Aunque los reactivos en general no fueron los mismos, las ideas matemáticas abordadas en cada uno de los 17 reactivos fueron las mismas.

En este sentido se presenta en la tabla 17.1 el número de actividades llevadas a cabo así como la relación que guardan con las ideas matemáticas a trabajar durante la secuencia didáctica y la descripción de la actividad realizada por los alumnos.

Tabla 18. Actividades didácticas llevadas a cabo en la intervención

Número de actividad.	Idea matemática u objetivo de la	Descripción de la actividad realizada

	actividad.	por el alumno.
1	**Familiarización con las regletas de Cuisenaire.**	Los alumnos construyeron una figura a su gusto con las regletas con el objetivo de familiarizare con el tamaño y colores de las mismas.
2	**Discriminación de las regletas por tamaño.**	Se pidió a los alumnos que identificaran cuántos tamaños diferentes de regletas había. Las ordenaron de menor a mayor para identificar por su tamaño y color.
3	**Aprender a representar las fracciones a partir del uso de las regletas.**	Se dio una lista de fracciones a los alumnos para que las representaran con el uso de las regletas a partir del número que indicaban.
4	**Construcción de enteros a partir del uso de fracciones.**	Los alumnos armaron enteros a partir del uso de trozos de papel que representaban las fracciones de ½, ¼, 1/8, 1/16, entre otras.
5	**Idea de Mitad.**	Los alumnos trabajaron en reconocer la mitad de en figuras canónicas y no

		canónicas a partir de la parte sombreada que se mostraba en ellas.
6	**Simplificación de fracciones.**	Los alumnos trabajaron la simplificación de fracciones a partir de encontrar una metodología para esto.
7	**Fracciones en cantidades discretas.**	Los alumnos trabajaron en expresar con fracciones cantidades dadas a partir de cantidades discretas.
8	**Equivalencia de Fracciones.**	Los alumnos tuvieron la oportunidad de discriminar entre dos metodologías para poder reconocer si las fracciones son equivalentes.
9	**Representación de fracciones en línea recta no numérica.**	Los alumnos representaron fracciones en líneas rectas no numéricas.
10	**Representación de fracciones en línea recta numérica.**	Los alumnos representaron fracciones en líneas rectas numéricas.
11	**Ordenamiento de fracciones.**	Los alumnos trabajaron en el ordenamiento de las fracciones con base en su

		tamaño a partir de dos metodologías diferentes.
12	**Suma y resta de fracciones.**	Los alumnos trabajaron en encontrar un común denominador en fracciones con denominador diferente con el objetivo de poder operar éstas.
13	**Conversión de fraccionario a decimal y de decimal a fraccionario.**	Los alumnos trabajaron en la conversión entre decimales y fraccionarios. Del mismo modo, trabajaron en la comprensión de la fracción como una división.

De tal manera que del total de las 13 actividades con las que se construyó la secuencia didáctica, las primeras tres tuvieron el objetivo de la familiarización con el tamaño de las regletas y por tanto, se llevaron a cabo durante la primera sesión de la intervención que tuvo carácter de introductoria.

La actividad cuatro, por el contrario, tuvo la intención de que los alumnos recordaran la magnitud del trabajo con números fraccionarios a partir de familiarizarse con la idea de que una fracción no es “algo que se agarra de un entero que ha sido dividido en partes iguales”. Más adelante se explicará más a fondo esta actividad, por ahora solo es importante que quede claro que esta actividad también fue previa a abordar las ideas matemáticas que se expusieron con anterioridad.

De tal manera que, de la actividad cuatro a la 13 se abordaron las nueve ideas matemáticas que, como ya se dijo, los alumnos demostraron tener dificultad para responder a ellas con base en el cuestionario de fracciones.

Es importante mencionar antes de proceder a describir los resultados obtenidos de la secuencia didáctica, que para cada una de las ideas matemáticas abordadas en las actividades a realizar durante la intervención, así como de las primeras cuatro actividades de familiarización con las regletas de Cuisenaire y demás, se llevó a cabo una exposición por parte del investigador y aplicador de los instrumentos.

Esta exposición consistió en explicar a cada uno de los alumnos cómo abordar las ideas matemáticas y en general las actividades. La secuencia didáctica se construyó abordando cada una de las ideas matemáticas desde una perspectiva diferente a la que tuvieron los alumnos en sus clases regulares de primaria. El objetivo principal era que ellos mismos se cuestionaran al respecto de qué hacer en caso de encontrarse ante una problemática como la que se estaba abordando.

8.2 Aplicación de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica que se llevó a cabo con los alumnos que participaron en ella se llevó a cabo de una manera presencial, de tal manera que se tuvieron un total de 22 sesiones en las que algunas veces se contaba con un solo alumno o en otras con dos de ellos.

Es importante mencionar que por la situación de la contingencia que se vivió durante la aplicación de la intervención esta se llevó a cabo con las medidas pertinentes, del mismo modo que desde un principio se dispuso que solo habría dos alumnos como máximo por sesión.

De tal manera que, dado que los horarios y fechas para intervenir tuvieron que ser adaptados a la disposición de los alumnos, se aplicaron las secuencias de tal manera que, hubiera un solo alumno o dos por sesión, ningún alumno se perdiera de alguna de las 13 actividades diseñadas.

Importante es mencionar que previo a la aplicación de cada una de las actividades que formaron parte de la secuencia didáctica, se les impartió a cada uno de los tres alumnos una pequeña sesión introductoria con el objetivo recordar a estos conceptos básicos de los números fraccionarios como los elementos de una fracción y los tipos de fracción (mixta, propia e impropia), así como la forma en que las fracciones podían ser representadas gráficamente.

8.2.01 Actividad 1: Familiarización con las regletas de Cuisenaire

Como ya se mencionó, la primer actividad tuvo que ver con la familiarización de los alumnos con las regletas de Cuisenaire. De tal manera que a cada uno de ellos se pidió tocarlas y observarlas; sacarlas del recipiente en donde estaban. De igual manera, se les indicó a los alumnos construyeran una figura con las regletas. Para esta figura se les aclaró que simplemente utilizaran su imaginación. Finalmente dibujaron en una hoja la figura que construyeron.

En la figura 45 se muestra una figura construida por uno de los niños.

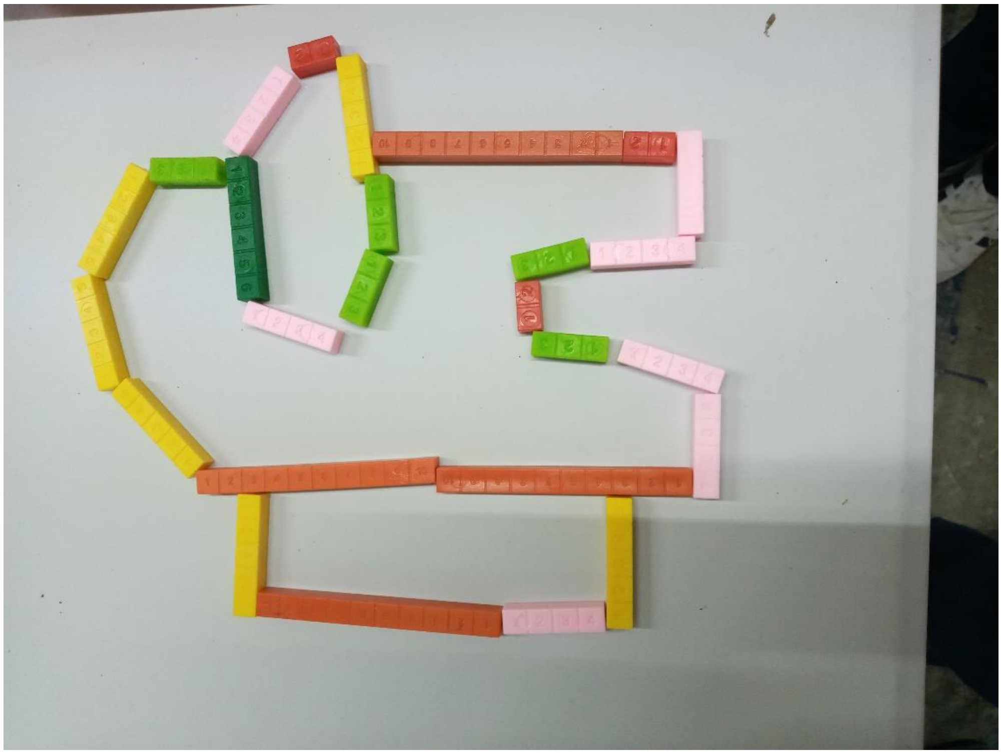


Figura 45. Forma en que un alumno decidió utilizar las regletas para construir una figura.

8.2.02 Actividad 2: Discriminación de las regletas de Cuisenaire por tamaño

Para esta actividad se pidió a los alumnos reconocieran que en el juego de regletas había diferentes tipos de tamaño y que cada tamaño de las mismas tenía un color en particular que la hacía diferenciarse de las demás. De tal manera que la actividad solicitada a ellos fue ordenar las regletas por tamaño a fin de que reconocieran los diez tipos de tamaño y el color que representa a cada una de ellas.

8.2.3 Actividad 3: Representación de fracciones con el uso de las regletas de Cuisenaire

Una vez que los alumnos reconocieron el tamaño y color de las regletas, se les pidió representar una lista de fracciones dada con el uso de las mismas.

Para esta actividad hubo acompañamiento del aplicador con el objetivo de, mediante un ejemplo práctico, explicar de qué manera se tenía que representar las fracciones dadas.

La fracción ejemplificada por el aplicador fue la de ¾, en donde brevemente se enseñó a los alumnos que esta sería representada usando la regleta que tenía el número 3 como numerador y la que tenía el número 4 como denominador.

Esta actividad fue muy bien asimilada por los alumnos pese a que dos de ellos tuvieron problema para representar a la fracción impropia que había en la lista dada pues, dicho por ellos mismos, no supieron qué hacer cuando el numerador era más grande que el denominador. Ante esta situación el aplicador procedió a explicarles que si el numerador era más grande que el denominador debían expresarla así.

8.2.04 Actividad 4: Construcción de enteros a partir del uso de fracciones

Con la intención de que los alumnos reconsiderasen la idea de que un entero es un "tanto de tantos" como lo mencionan Cortina et, al. (2013), se procedió a llevar a cabo esta actividad número cuatro.

Esta actividad consistió en pegar en la mesa de trabajo una hoja cuadrada de color blanco de 400 centímetros de superficie. A continuación se mostró a los alumnos una serie de pedazos de hojas de colores los cuales, mediante la exploración guiada por el aplicador, ellos detectaron equivalían a una parte fraccionaria de la hoja blanca pegada a la mesa.

Los tamaños de estos pedazos de papel que además eran de colores, eran de ½, ¼, 1/8, 1/16, 1/3, 1/6, 1/9 y 1/12 con relación a la hoja blanca pegada en la mesa.

De tal manera que se solicitó a los alumnos construyeran otra hoja de las mismas dimensiones a partir del uso de estos pedazos. En total, cada alumno hubo de construir tres hojas, pero la condición que se les puso fue que para la primera debían utilizar al menos tres diferentes tamaños de pedazos de hojas de colores; para la segunda debieron utilizar al menos cuatro tamaños diferentes y, finalmente, para la tercer hoja debieron utilizar al menos una vez un pedazo de hoja de 1/3.

Los alumnos mostraron un poco de dificultad para construir sus enteros, pero particularmente tuvieron problemas para armar el primero de ellos. En promedio tardaron hasta diez minutos en armar la primer hoja. Sin embargo, pareciera ser que a partir del trabajo de razonamiento de armar la primer hoja, las otras dos les fueron más fáciles de armar, aun en la hoja en la que debían utilizar el pedazo de 1/3 mostraron mayor disposición a culminar con la actividad.

Es importante mencionar que se solicitó a los alumnos representaran aritméticamente lo que habían trabajado. El aplicador explicó a los alumnos qué es lo que se solicitaba: realizar en la libreta de trabajo la suma de cada una de las fracciones que ayudaron a construir sus enteros.

En la imagen 46 se muestra como uno de los alumnos construyó su hoja que representaba sus tres enteros a partir del uso de diferentes tamaños de pedazos. El alumno incluso fue capaz de demostrar aritméticamente cómo construyó su entero a partir de los trozos de papel dados. El alumno sumó las cantidades en fracciones que representaban a cada trozo de papel con el que construyó uno de sus enteros observando y haciéndole énfasis por parte del aplicador que el resultado era “uno”.

Figura 46. Manera en que uno de los alumnos que participó en la secuencia didáctica construyó sus enteros a partir del uso de los trozos de hojas dados.

8.2.05 Actividad 5: Idea de mitad

Para esta actividad se expusieron diferentes figuras geométricas, tanto canónicas como no canónicas a los alumnos. Estas figuras estuvieron sombreadas parcialmente, de tal manera que se expuso cuales sí y cuáles no, estaban sombreadas a la mitad de sus superficies.

Cabe mencionar que, en general y con base en los cuestionarios aplicados a los alumnos, no tuvieron problema para reconocer la mitad en figuras canónicas, pero ya incluso con el apoyo de las entrevistas, se pudo observar que los alumnos tuvieron dificultad con las figuras no canónicas al serles complicado el encontrar la mitad de la superficie en éstas.

Tras la exposición los tres alumnos mostraron resultados positivos en la actividad que se les aplico que consistió en el reconocimiento de la mitad tanto en figuras de tipo canónico como no canónico.

8.2.06 Actividad 6: Simplificación de fracciones

Para esta actividad se les expuso a los alumnos la metodología a utilizar para simplificar una fracción. Es importante mencionar que por parte del aplicador fue importante el hacerles ver cómo pese a que dos fracciones eran diferentes expresaban la misma cantidad, tales como ½ y 2/4. Esto se representó gráficamente en el pizarrón del aplicador.

Entonces se procedió a explicar a los alumnos como para simplificar las fracciones se debía dividir tanto numerador como denominador por un mismo número a fin de expresarlas de la manera más simple posible.

Para el trabajo de esta actividad se expusieron a los alumnos tanto fracciones simplificables como no simplificables con el objetivo de que ellos se familiarizaran con la discriminación entre ambos tipos de fracciones.

En la imagen 47 se muestra como un alumno realizó la simplificación de las fracciones que se le dieron en la actividad a realizar por ellos. En la imagen 48 se puede observar qué respuesta dio el alumno cuando se le cuestionó al respecto de qué procedimiento utilizó para simplificar la lista de fracciones dada. El alumno recurrió a dividir tanto numerador como denominador por un número primo.

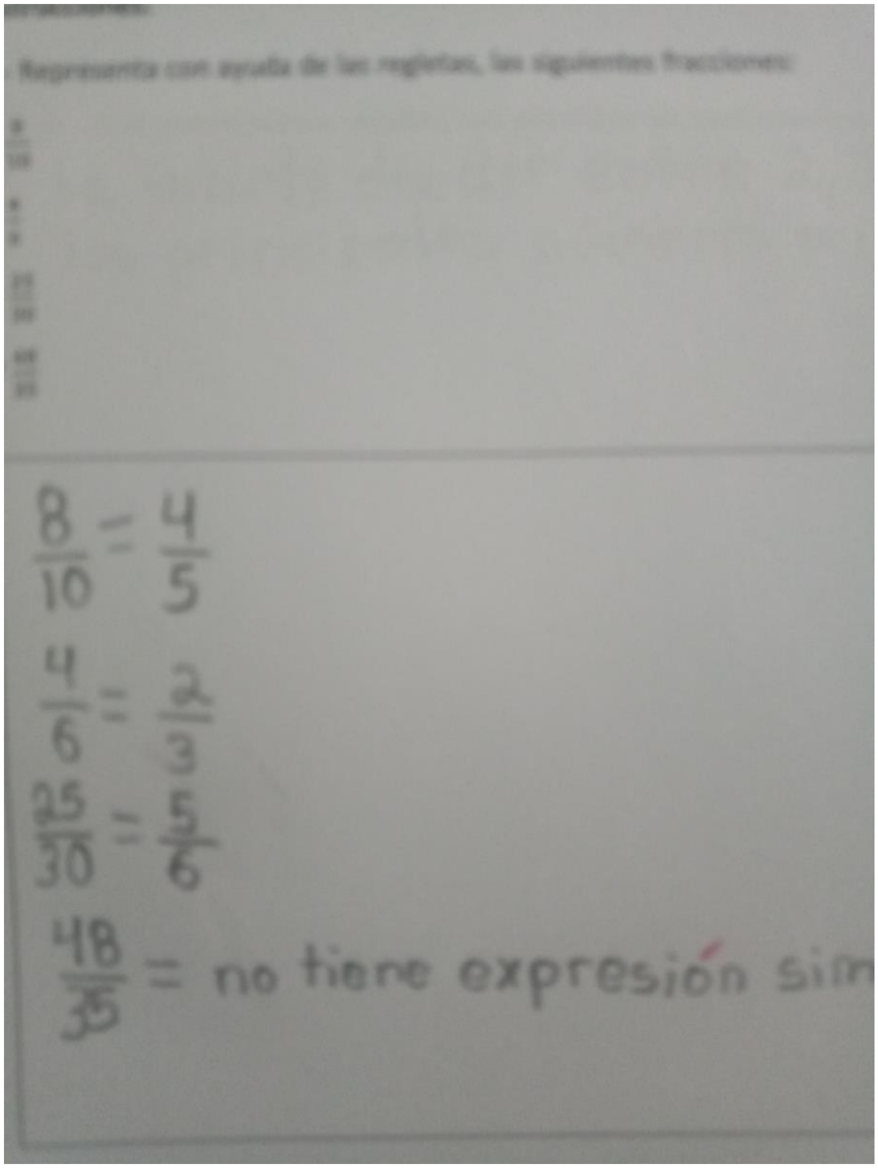


Figura 47. Forma en que un alumno respondió al trabajo de simplificación de fracciones.

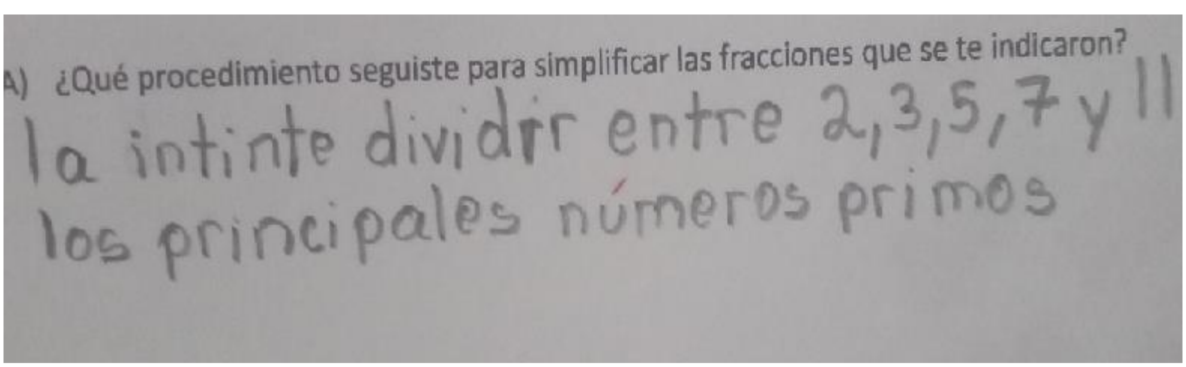


Figura 48. Procedimiento para responder a simplificación de fracciones.

8.2.07 Actividad 7: Idea de Fracciones en cantidades discretas

Para esta actividad el aplicador expuso el cómo expresar las cantidades con fracciones. Uno de los ejemplos que se utilizó fue el utilizar sus grupos de primaria como referencia del ejercicio. de tal manera que cuando, por ejemplo, uno de ellos manifestó que en su grupo de primaria habían un total de 35 alumnos, de los cuales 23 eran niños y 12 eran niñas, se le expuso como se podía expresar que 23/35 de los alumnos de su grupo eran niños.

Otro ejemplo a utilizar durante la exposición del aplicador tiene que ver con la condición de que había dos alumnos en la sesión. De tal manera que se podía decir que 2/3 partes de las personas que había en el aula en ese momento eran niños, así como que 1/3 eran adultos. Así mismo se ejemplificó el hecho de que 2/3 partes de los presentes en el aula eran hombres (el aplicador y un alumno) y solo 1/3 de los que estaban presentes eran mujeres.

Usando este tipo de ejemplos y otros gráficos en el pizarrón es como el aplicador tuvo la intención de que los alumnos entendieran como las fracciones sirven para expresar proporciones.

Los alumnos respondieron perfectamente a la actividad que se les pidió realizar para verificar su aprendizaje de la misma. Y, de hecho, cuando se le pidió explicar a una de las alumnas qué procedimiento utilizó para responder a la actividad que se les dio donde debían encerrar con un círculo, como se muestra en la imagen 49, la cantidad de figuras que representara la fracción que se les dio (1/3), ella respondió diciendo el total de figuras (9) lo dividió entre tres y con ello "hizo que ese grupo fuera 1/3" (fig. 49).

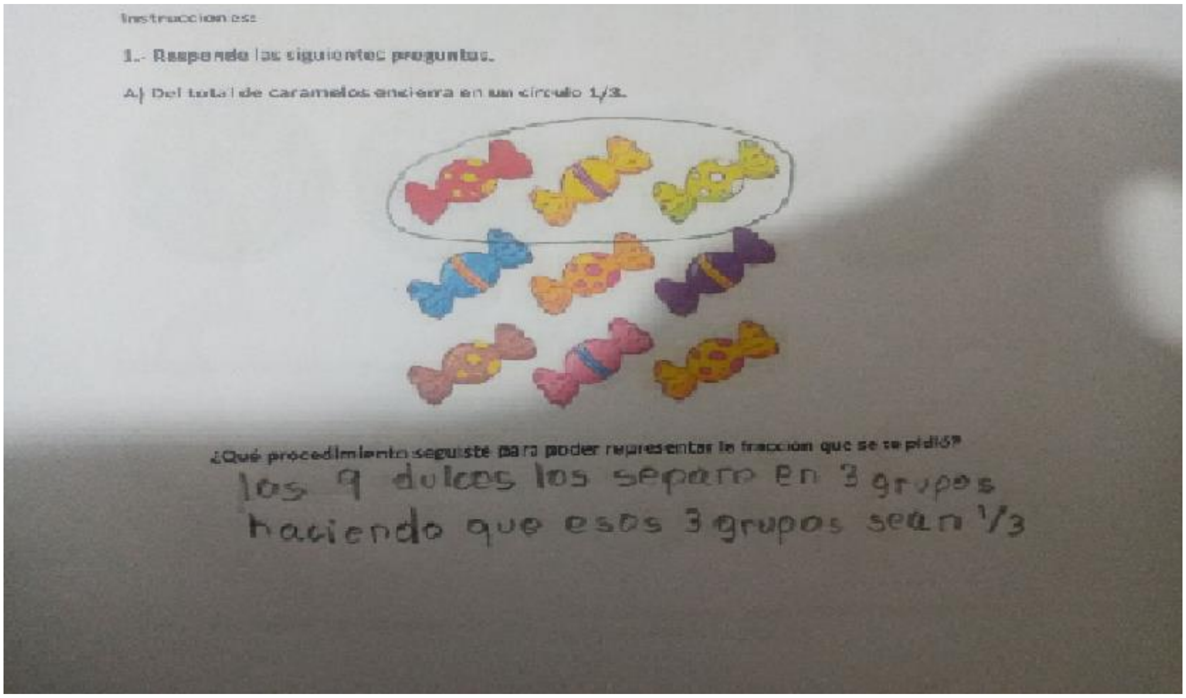


Figura 49. Forma en que una alumna respondió a la actividad de fracciones en cantidades discretas.

8.2.08 Actividad 8: Equivalencia de fracciones

Para esta actividad el aplicador expuso dos metodologías a realizar para reconocer si dos fracciones eran equivalentes. La primera fue la de representar las fracciones gráficamente mediante el uso de cuadriláteros; la segunda fue la del ejercicio de la verificación mediante la multiplicación de numerador por denominador de cada una de las dos fracciones.

La segunda forma en que se enseñó a los alumnos a responder esta actividad consistió en explicarles que al multiplicar el numerador de la primer fracción por el denominador de la segunda fracción y hacer lo mismo con los respectivos otros denominadores y numeradores y que al obtener un mismo resultado en ambas multiplicaciones, las dos fracciones, son equivalentes.

Los alumnos mostraron mayor disposición a trabajar esta actividad mediante la multiplicación de las partes de la fracción pues en palabras de ellos “es más rápido hacer las multiplicaciones que estar haciendo el dibujo”.

Otra forma en que se les mostró a los alumnos a responder a esta actividad fue la de dividiendo el numerador entre el denominador y que, cuando en ambos casos de las fracciones que están siendo analizadas de si son o no equivalentes, el resultado sea el mismo, las fracciones son equivalentes.

Los alumnos entendieron este método y sirvió como antecedente de lo que serían los ejercicios de conversión de fraccionario a decimal, pero sí mostraron mayor disposición trabajar la actividad multiplicando numerador por denominador de ambas fracciones.

8.2.09 Actividades 9 y 10. Ubicar fracciones en línea recta numérica y no numérica

En este par de actividades los alumnos hubieron de ubicar un par de listas dadas (una en cada actividad) en una línea recta. En la actividad nueve fue en una línea recta sin numerar y en la actividad diez una línea recta numerada.

Es importante mencionar que en el cuestionario sobre fracciones este tipo de ejercicios se les dificultó mucho a los alumnos. Del mismo modo es importante mencionar que en el cuestionario sobre fracciones solo había un reactivo que tocaba la idea de la línea recta no numérica.

Tras explicar a los alumnos cómo resolver este tipo de problemas, el que la línea recta fuera o no numérica pareció no tener importancia pues, ellos manifestaron (figuras 50 y 51) usar la misma metodología para resolver estas actividades. Es decir, primero medían el tamaño de las rectas (numérica o no numérica) y posteriormente dividían estas (las rectas) a partir del denominador que había en cada fracción dada y posteriormente ubicaban la fracción con base en contar el numerador a partir de la división previa.

En la figura 50 se puede observar que un alumno respondió correctamente a esta actividad y cuando se le pidió explicar cómo resolvió esta actividad mencionó haber utilizado la metodología expuesta en el párrafo anterior. Esto es apreciable en su discurso aunque para él haya sido difícil explicarlo.

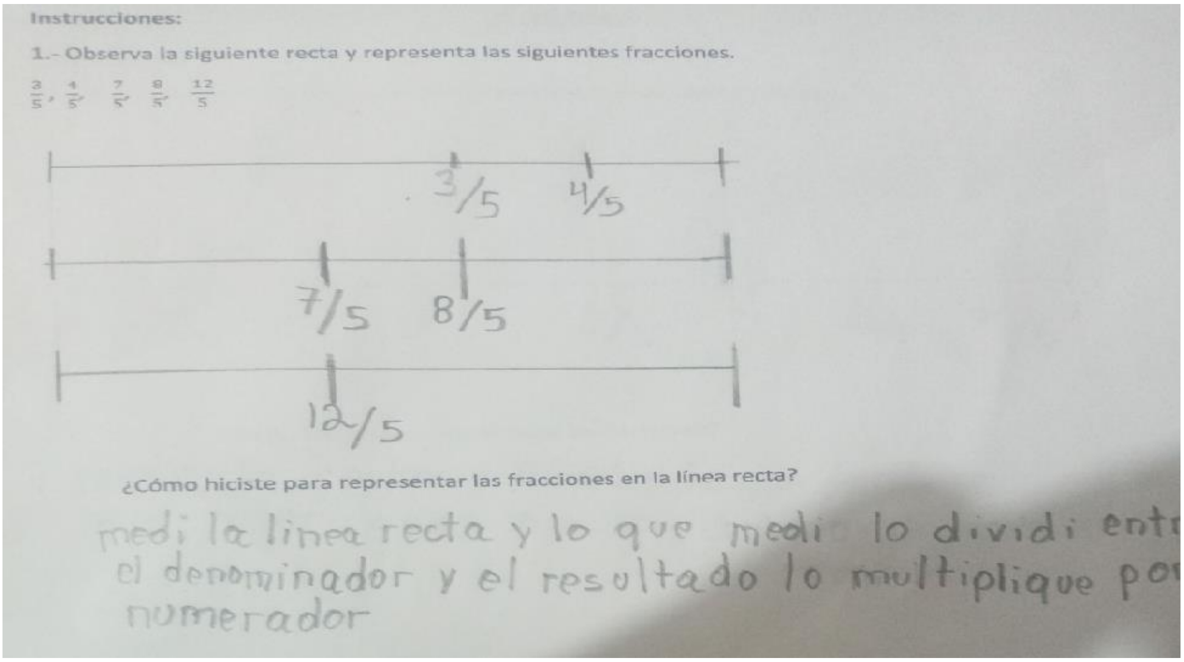


Figura 50. Forma en que un alumno respondió ante la actividad de ubicar fracciones en línea recta no numérica y cómo justificó su respuesta.

Por otro lado, en la figura 51 se puede observar como otro alumno respondió correctamente a la actividad de ubicar fracciones en una línea recta numérica. Es interesante como este alumno justifica su respuesta cuando se le pidió explicar la metodología que empleo para responder, pes él mencionó haber convertido las fracciones impropias en mixtas (figura 51) para poder ubicar a las fracciones mayores a la unidad. Aunque su discurso es corto y su forma de ubicar las fracciones consistió en utilizar colores para señalar sus respuestas, tiene coherencia lo que realizó y lo que justificó en sus respuestas.

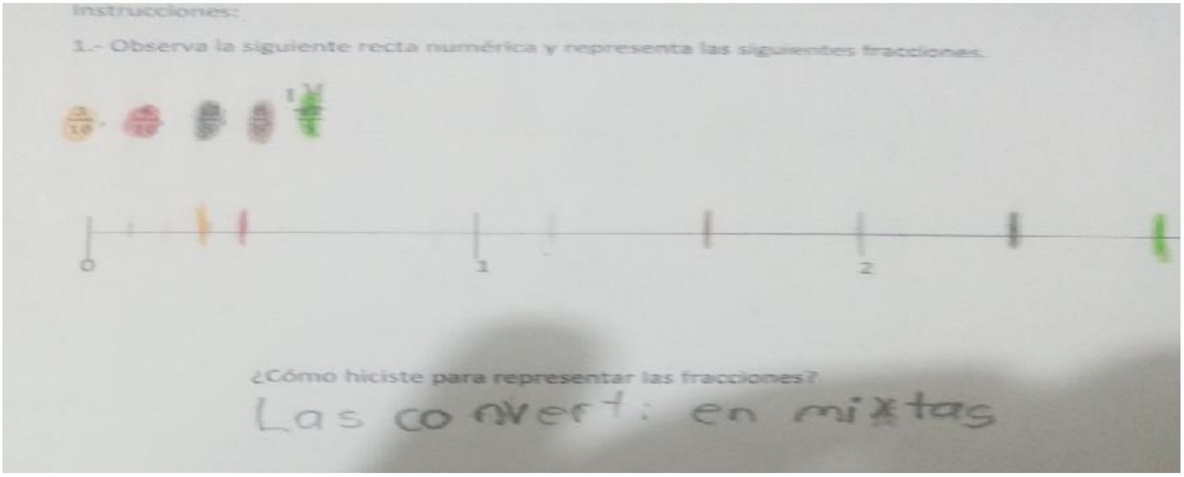


Figura 51. Forma de responder por parte de un alumno a la actividad de ubicar fracciones en línea recta numérica y cómo justificó su respuesta.

8.2.1 Actividad 11: Ordenamiento de fracciones

Para esta actividad los alumnos debían ordenar, de acuerdo a su tamaño, una lista de fracciones dada. En la actividad se les pidió ordenar las fracciones de manera ascendente.

Para esta actividad el aplicador expuso a los alumnos que la mejor manera de diferenciar el valor de cada fracción es convertir a estas en número decimal. Los alumnos mostraron disposición a dividir numerador entre denominador para obtener un número decimal y con esto comenzar el trabajo de discriminación entre los números resultantes.

De cierto modo ya se había mencionado que en la literatura estaba reportado que para un alumno es más fácil discriminar el tamaño de un número decimal que de un número fraccionario y con esta actividad quedó demostrado. En el cuestionario aplicado a los alumnos meses atrás esta es una de las ideas matemáticas que no solo más se les dificultó, sino que en muchos casos ni si quiera se observó que tuvieran idea de cómo responder a la pregunta.

De tal manera que pareció que después de demostrarle a los alumnos que una fracción es una división estos tuvieron facilidad para comprender justamente a la fracción como una razón (Castro, 2001).

Así entonces, los alumnos pudieron realizar el ordenamiento (ascendente) de las fracciones tal y como se mientras en la figura 52, donde el alumno ordenó las fracciones justo a partir de realizar la división de numerador entre denominador de cada una de ellas y obtener un numero decimal.

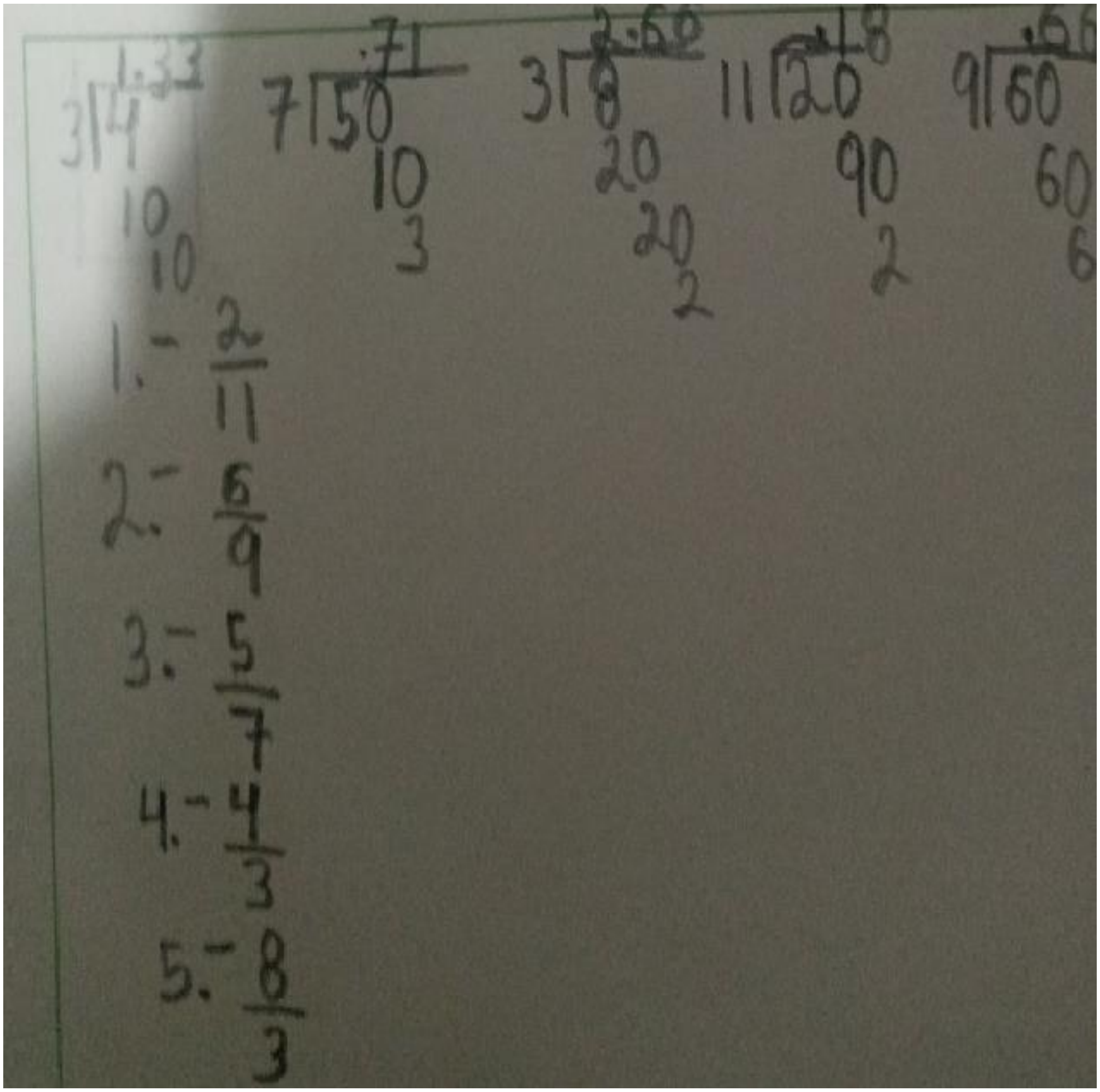


Figura 52. Forma en que un alumno realizó un ordenamiento de fracciones.

Es evidente que después de analizar la forma en que los alumnos respondían al ejercicio de ordenar fracciones antes y después e la exposición que hubo en la actividad 11 de la secuencia didáctica es más fácil para ellos discriminar el tamaño de un número decimal que un número fraccionario. Y queda claro también que los alumnos asimilaron de manera correcta el realizar la división de numerador entre denominador para obtener el número a ordenar.

Aquí es importante mencionar que aunque mostraron disposición a entender esta actividad y la forma en que les fue explicada. Dos de los alumnos que participaron aun tuvieron problemas para ordenar los números decimales. En estricto sentido, hubo de ser necesario explicarles y retomar la idea de los décimos, centésimos, milésimos y demás. De esta manera los alumnos pudieron entender por ejemplo, porque .3 es más grande que .27, aunque su prenoción antes de participar en la secuencia didáctica les indicaba lo contrario dado que 27 es más grande que 3.

8.2.11 Actividad 12: Suma y resta de fracciones

Es importante comenzar mencionando que fue interesante, después de analizar los cuestionarios sobre fracciones respondidos por los alumnos, ver que a estos, en general, se les dificultó más sumar y restar fracciones que multiplicarlas y dividirlas.

Ya se ha expuesto que después del análisis de los cuestionarios y de sus respuestas en las entrevistas, se pudo observar que esto lo anterior se debió a que muchos de los alumnos memorizan la metodología para multiplicar y dividir fracciones que solo consiste en multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador y multiplicar numerador por denominador y denominador por numerador respectivamente. De tal manera que esto fue una clara señal de que muchos alumnos carecían de una comprensión del tema, específicamente acerca de cómo encontrar un común denominador que les permitiera operar (sumar y restar) fracciones y de qué representa este mismo común denominador.

De tal manera que para esta actividad la labor del aplicador consistió únicamente en explicar de qué manera conseguir un común denominador y cómo operar las fracciones a partir de este ejercicio.

Los alumnos respondieron muy bien a esta actividad y todos mostraron entender la idea que representaba el encontrar un común denominador. Parece ser que el problema que tuvieron en el cuestionario sobre fracciones para responder a estos ejercicios es que no habían prestado atención a clases cuando se tocó este tema.

Entonces a partir de esta actividad surge el cuestionamiento de si los propios docentes que están enfrente de aula saben o tienen idea de la importancia que tiene un común denominador para operar fracciones o solo repiten una metodología en la que se multiplican y/o dividen las partes (números) que hay en dos fracciones que se están operando.

8.2.12 Actividad 13: Conversión de fraccionario a decimal y viceversa

Para la actividad final que consistió en trabajar la conversión de números fraccionarios a decimales y viceversa se procedió retomar el ejercicio de dividir numerador entre denominador para obtener un decimal. Y para convertir de decimal a fraccionarios colocar en el numerador al número dado y en el denominador el número 100, 1000 o cualquiera que fuera el caso. En la figura 53 se observa cómo los alumnos respondieron bien ante este ejercicio y asimilaron bien cómo, por ejemplo, .0345 es igual a 345/10000.

Por su parte, en la figura 54 se puede observar como un alumno convierte los números fraccionarios a decimales a partir de la dividir numerador entre denominador. Esto queda evidenciado cuando en esta misma figura al cuestionarle sobre cómo realizar esta conversión él menciona realizarlo atravesó de esta metodología.

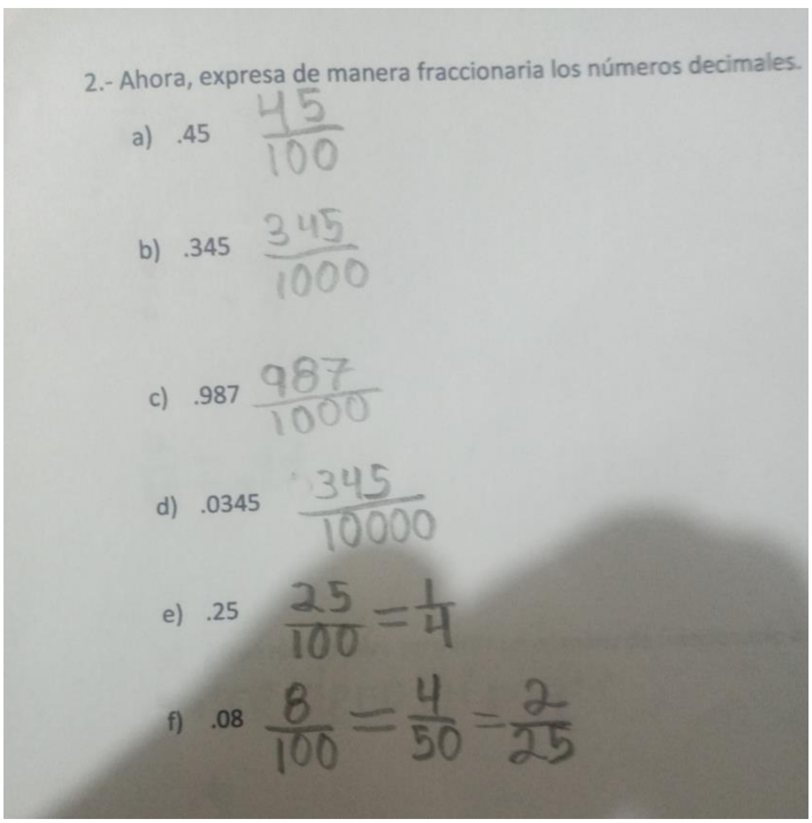


Figura 53. La forma en que un alumno convirtió los decimales a fracciones.

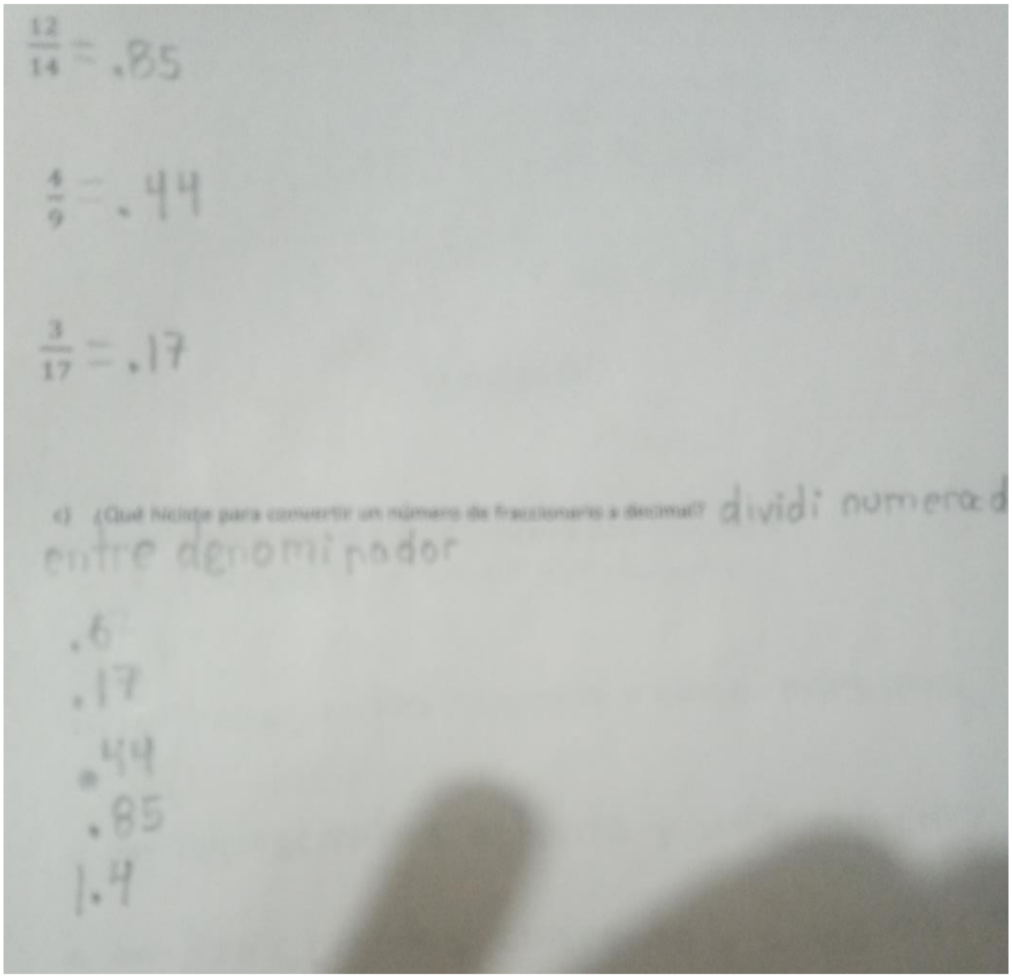


Figura 54. Un alumno justifica cómo convierte las fracciones en decimales.

El alumno incluso ordena de manera ascendente, sin que se le haya pedido, la lista de fracciones dada convertida a decimales (Figura 54). Es evidente que el haber hecho ver a los alumnos que una fracción es una división en donde el numerador se convierte en el dividiendo y el denominador en el divisor hizo que los alumnos vincularan de mejor manera a un número fraccionario con un número+ decimal que es más fácil de ubicar en una imaginaria línea recta.

8.3 Resultados obtenidos a partir de la secuencia didáctica

Algunos de los resultados principales obtenidos durante la secuencia didáctica fueron, por ejemplo, el observar como a los alumnos, tal vez por la edad que ya tenía, se les hacía tedioso el trabajar la regletas de Cuisenaire. Del mismo modo, en palabras de ellos mismos, apoyarse de las regletas para el trabajo de ideas como la suma y la resta y la equivalencia de fracciones "*era una pérdida de tiempo porque era más rápido hacerlo en una hoja de papel*", "*(las regletas) solo me hacían sentir como niño chiquito y siento que solo me confundían*", "*Se sentían un poco desesperados al sentir que se les obligaba a utilizar ese juguete para niños*".

Puntualmente, por ejemplo, al realizar la actividad de suma y resta de fracciones se pudo observar que los alumnos tardaron más en responder apoyándose de las regletas de Cuisenaire que pidiéndoles utilizar un método tradicional en donde encontraran un común denominador para operar las sumas y restas ocurrió lo mismo con la idea de simplificación de fracciones donde al apoyarse de las regletas los alumnos mostraron un poco de enojo y frustración al tener que ir transformando las fracciones dadas apoyándose de más y más piezas de la regletas, a diferencia de cuando, después de haberles explicado el procedimiento de simplificación a partir de la división de numerador y denominador por un mismo número hasta detectar el punto en que ya no fueran divisibles, realizaron el ejercicio sin problema alguno.

Se puede señalar sin duda, que uno de las situaciones descubiertas más importantes durante la intervención fue el hecho de que los alumnos mostraron un mejor entendimiento de las ideas de ubicación de fracciones en línea recta numérica y no numérica y de ordenamiento de fracciones a partir de la exposición por parte del investigador y aplicador de los instrumentos, en dónde se abordó el entender a una fracción como el resultado de una división.

Es decir, en la idea de ubicación de fracciones en línea recta, por ejemplo, cuando se aplicó en cuestionario y se llevaron a cabo las entrevistas a alumnos de medio y bajo nivel de entendimiento del contenido escolar de fracciones, quedó evidente que algunos alumnos, incluyendo los tres a quienes se les aplicó la secuencia didáctica, no tenían idea alguna de cómo llevar a cabo la actividad y solo se limitaron a ubicar los números que aparecían en los denominadores y numeradores de las fracciones dadas en la línea recta a partir, en el mejor de los casos, de la discriminación de los números naturales que veían.

Diferente entonces, fue la respuesta que dieron cuando se les pidió ubicar las fracciones en líneas rectas después de haber sido trabajados con ellos la idea de convertir la fracción a decimal a partir de realizar la división.

Quedó claro que, los alumnos entendieron mejor qué tenían que hacer para ubicar las fracciones después de realizar la conversión como ya se dijo y dividir la línea recta fuera numérica o no numérica en cuantas partes fuera necesario a partir del resultado de la conversión.

Lo mismo ocurrió en la idea de ordenamiento de fracciones de manera ascendente y descendente, es decir, de la más pequeña a la más grande y viceversa. Cuando se aplicó el cuestionario de fracciones, los alumnos de medio y bajo nivel de entendimiento de ésta idea matemática demostraron tener razonamientos de solo ordenar a veces de acuerdo a el número que hubiese en el numerador o denominador; incluso, como ya se expuso en su momento, algunos alumnos sumaban numerador y denominador de cada fracción y luego con base en esa suma ordenaban de menor a mayor.

Aquí quedó aún más evidente que los alumnos tuvieron un mejor entendimiento de en qué consistía ordenar ascendente o descendentemente las fracciones a partir de convertir las fracciones en decimales para posteriormente discriminarlas por su tamaño. Y es que, aunque en las actividades reportadas en la tesis las fracción.

Aquí es importante mencionar que, aunque los alumnos pertenecían dos grupos diferentes cuando cursaban el quinto y sexto de primaria, manifestaron nunca haber trabajado la transformación de decimal a fraccionario para ubicar en una línea recta o para ordenar las mismas fracciones.

La última actividad de la secuencia didáctica fue la de transformación de fraccionario a decimal y decimal a fraccionario en done, quedó manifestado que a partir del trabajo de transformación de fraccionario a decimal con base en una división trabajado en las ideas mata temáticas previas los alumnos mostraron un claro avance en entender el trabajo de transformación de fraccionario a decimal aun cuando el tema no había sido visto en la secuencia didáctica aún.

Diferente fue el proceso de transformación de decimal a fraccionario donde al cuestionarles al respecto de cómo realizarlo no supieron contestar con claridad. Entonces se expuso la forma de trabajar este proceso comenzando con el exponer a los alumnos como leer números decimales.

Es decir, se les explicó cuándo llamar decimos, centésimos, milésimos y demás a los números a partir del número de dígitos que hubiese a la derecha del número decimal. Del mismo modo, fue importante el explicar a los alumnos por qué los ceros a la derecha en los números decimales no tienen valor; es decir, por ejemplo, explicar el por qué “.85” es igual a “.8500”. Del mismo modo, importante fue explicar a los alumnos como la discriminación de los números decimales se da a partir de comparar sus decimos, después sus centésimos y así consecutivamente.

Esto último se consideró importante luego de ver cómo en el cuestionario de fracciones la mayoría erró al momento de convertir los decimales a fracciones y en donde, incluso los alumnos de alto nivel de comprensión del tema, mostraron dificultad para leer decimales como “.125” donde quedó claro posterior a las entrevistas que la mayoría de los alumnos que participaron en este estudio aunque comprendieran el ejercicio de transformación de decimal a fraccionario, al ver un decimal con más de dos dígitos consideraban que este era mayor a la unidad.

Y es aquí donde nuevamente se observó dificultad en los alumnos al momento de trabajar. Es decir, dos de los tres alumnos que participaron en la secuencia didáctica mostraron frustración en un principio al serles explicado por qué “.12” es menor que “.8”.los alumnos parecían estar incomodos con esto pues, de acuerdo con ellos, el 12 es más grande que el ocho, por ende, .12 debía ser más grande que .8.

Entonces se insistió en el reconocimiento de los décimos, centésimos, milésimos y demás en los números decimales. Básicamente la exposición se centró en hacer ver a alumno que el que un número tuviera más de dos o tres dígitos después del punto decimal no lo hacía ser mayor a la unidad. Y que, además de lo anterior, no por tener más dígitos después del punto decimal un numero era mayor o menor que otro, sino que, como ya se expuso antes, la discriminación en cuanto al tamaño de los números decimales debía partir observar primero el número de los décimos, después el de centésimos consecutivamente.

Otro importante resultado que se desprende del proceso de investigación, particularmente de la secuencia didáctica llevada a cabo, tiene que ver con la actividad cuatro donde se le pedía al alumno que formara enteros a partir del uso de fracciones de un pedazo de papel.

En esta actividad una hoja cuadrada de cartulina de un área de 400 cm2 pegada a la mesa de trabajo simbolizaba un entero que, como ya se dijo, debía ser reconstruido a partir del uso de estos pedazos de hoja que representaban las fracciones.

De manera tal que los alumnos ubicaban los pedazos de acuerdo al número de veces que estos cabían en el entero. Es decir, si cabían 47 veces, el pedazo de hoja representaba ¼, por ejemplo.

Cabe destacar que para esta actividad se les indicó que debían armar tres enteros más a partir del uso de esos pedazos de fracciones y que no podían utilizar más algún pedazo de ½ o ¼; de mismo modo de que debían utilizar al menos tres tamaños diferentes de trozos de papel para armar sus enteros.

Esta actividad tiene importancia porque tanto en el primer cuestionario como a lo largo de la presentación con ellos, los alumnos (particularmente los tres que participaron en la secuencia) manifestaban tener la idea de que una fracción es “lo que agarramos de un entero dividido en partes iguales”. En este sentido, pareció importante comenzar haciéndole ver al alumno que una fracción no es inequívocamente el resultado de una entero que ha sido dividido en partes iguales.

Lo anterior lo explicaba Cortina., et al (2013) como ese error en la didáctica de fracciones cuando el alumno considera que una fracción es un “tanto de tantos”. Aquí entonces se demuestra que, quizás debido a que no hay un correcto tránsito de la explicación de la representación de los fracciones desde el tercero al sexto grado en la educación primaria, los alumnos de sexto pueden seguir considerando a las fracciones como un “pedazo de un objeto partido en partes del mismo tamaño”. Y es que, considerando que los alumnos ya tenían 12 años y habían terminado la primaria, era importante abandonaran esta idea.

Incluso, en la primer sesión donde, además de trabajar con las regletas, hubo una contextualización por parte del aplicador respecto al tipo de fracción y los elementos que componían a la misma, de manera que esta primer sesión los alumnos la tomaron por separado, sin embargo, los tres tuvieron un discurso bastante parecido cuando se les preguntó qué eran las fracciones: algo que se agarra de un entero dividido en partes iguales.

Al terminar la actividad cuatro y después de que los alumnos consiguieran armar sus tres enteros y de que se les pidió demostrar aritméticamente porque los trozos de papel que representaban una fracción que ellos eligieron sumaban la unidad, se les cuestionó a los alumnos si consideraban que una fracción era “algo que se agarraba de un entero en partes iguales”. Uno de los alumnos permaneció en silencio mientras los otros dos sí dijeron cambiar su opinión. De hecho, el que pareció tuvo mayor avance a partir de la secuencia didáctica dijo que “No es algo dividido en partes iguales porque puedes estar agarrando algo es que es más grande o más chico que las otras partes en que se partió el entero”.

Más allá de que este último alumno demostró seguir teniendo la idea de que una fracción es el resultado de partir o quebrar un objeto físico, claramente mostró un avance al entender que un entero, o en este caso, una unidad como se pretendía que vieran a la hoja de 20 por 20, no debía ser fracturado en partes estrictamente iguales para ser una fracción.

Finalmente, es importante mencionar qué avances hubo al aplicar un cuestionario final que, como ya se explicó, tenía características similares al que se les había aplicado meses atrás.

Aquí es importante mencionar y volver a repetir que para la secuencia didáctica hubo flexibilidad de tal manera que los alumnos y los padres y/o tutores de los alumnos pudieran acomodar los horarios a su conveniencia. Cabe mencionar esto justamente para decir que, en promedio, de la primera sesión a la sesión para la aplicación del cuestionario final pasaron aproximadamente seis semanas.

Lo anterior se menciona con la finalidad de defender la objetividad de los resultados obtenidos de este último cuestionario. Es decir, se trata de aclarar que no se aplicó el cuestionario a los pocos días u horas de haber tenido la intervención con ellas. Quizás solo los resultados en el cuestionario final de los reactivos de las ideas matemáticas de suma y resta de fracciones y de conversión de decimal a fraccionario y viceversa pudieron haberse visto influenciados por la reciente intervención que se tuvo con esas ideas matemáticas con los alumnos pues tuvo un promedio de cinco días.

De tal manera que los resultados una vez llevada a cabo la secuencia didáctica con los alumnos fue positiva. Solo una de los tres alumnos no obtuvo un resultado de 17 aciertos en el cuestionario de 17 reactivos. La alumna solo tuvo 13 aciertos y parece seguir teniendo problemas con la transformación de fraccionario a decimal, con la ubicación de fracciones en línea recta, trabajo con proporcionalidad, así como el reconocimiento de la fracción que expresan figuras no canónicas.

Pero es importante mencionar que la alumna tuvo buen resultado en el reactivo correspondiente al ordenamiento de fracciones y al operar fracciones. En el caso de las sumas y las restas demostró entender que para ello debía buscar un común denominador para operar.

Un dato curioso es que esta alumna en ideas matemáticas que no se abordaron en la secuencia didáctica como la representación de fracciones o la idea de partición obtuvo un resultado positivo; acertó a estos dos reactivos. Esto es señal de que cuando un alumno se apropia de una mejor idea respecto a lo que representan las fracciones y de cómo se expresan las mismas, abandonó la idea de que una fracción se debe representar dividiendo un entero (circulo o cuadrado) en el número de partes dependiendo qué número se más grande si el numerador o denominador. En este sentido, la alumna aprendió a representar correctamente las fracciones impropias.

Por otro lado, los otros dos alumnos obtuvieron un puntaje de 17 aciertos en 17 reactivos. Y no solo eso, sino que en esta ocasión, pudieron expresar en términos fraccionarios de manera correcta a aquellos números decimales con más de tres dígitos a la derecha del punto decimal.

Del mismo modo, ambos alumnos aprendieron a representar las fracciones impropias, así como también respondieron bien a la suma y resta de fracciones.

En concreto, la alumna que participó en la secuencia didáctica pasó de obtener dos aciertos en el primer cuestionario a tener 13. Por su parte, los alumnos que obtuvieron 17 aciertos en el cuestionario final habían obtenido cinco y ocho aciertos cuando se les aplicó meses atrás el primer cuestionario. Importante mencionar que en las ideas matemáticas de ordenamiento de fracciones y ubicación en línea recta ambos alumnos habían respondido mal en el primer cuestionario; por el contrario, en el segundo cuestionario, no solo respondieron de manera correcta, sino que en su desarrollo se notó que utilizaron la división como base para trabajar los ejercicios.

En resumen, los la secuencia didáctica tuvo éxito y pareciera que esto fue en gran parte resultado de haber llevado a cabo la actividad cuatro y a haber hecho ver a los alumnos a una fracción como el resultado de una división. Como se señaló al principio del documento, es más fácil discriminar el tamaño de un número decimal que de una fracción.

El resultado más importante fue no solo que dos de los tres alumnos obtuvieran puntaje perfecto en el segundo cuestionario, sino que se logró que estos se fueran con el concepto de que una fracción no es “un tanto de tantos” sino que se trata solo de un número que expresa una cantidad y que esta cantidad puede ser mayor a la unidad, aunque por su edad contexto escolar, los alumnos le sigan llamando “entero”.

CAPÍTULO 9. Conclusiones

9.1 Conclusión de acuerdo con los objetivos

En este capítulo se cierra con las principales conclusiones que se encontraron en el presente trabajo de investigación.

A partir del análisis a los cuestionarios y las entrevistas realizada, primero a los treinta y seis alumnos que participaron en este proceso de investigación y después a los seis seleccionados para entrevistas, se puede señalar que se dio cumplimiento al primer objetivo de investigación fue identificar las dificultades en el aprendizaje de fracciones con estudiantes de sexto grado de primaria.

De tal manera que se concluye que, tomando como base las ideas matemáticas que se dificultaron a los alumnos, así como el discurso que dieron cuando se les realizaron las entrevistas, los alumnos que demostraron tener bajo rendimiento en la comprensión de las fracciones tienen dificultad para comprender el significado de las fracciones, así como la representatividad de las mismas.

Este tipo de alumnos manifiestan no haber asimilado de manera correcta la idea de Parte-todo que tienen las fracciones, del mismo modo, se puede observar que el transito que ellos tuvieron en grados anteriores, respecto al trabajo y aprendizaje de números naturales hacia números racionales es muy pobre y poco significativo. Estas consideraciones, que reflejan niveles bajos de aprendizaje/entendimiento, pueden repercutir en la dificultad para comprender y aprender otros conocimientos matemáticos más complejos, como pueden ser el álgebra y la estadística.

Estos dos hallazgos (de no comprender la relación parte-todo de las fracciones y la dificultad para lograr el proceso correcto en la transición de los números naturales a los racionales) se relacionan entre sí, pues también es evidente que como resultado de no comprender la relación parte-todo los alumnos al pedírseles, por ejemplo, representar con un dibujo las fracciones, busquen fracturar un entero ilustrado a partir de reconocer el número más grande en la fracción, sin importar si este es numerador o denominador.

Ocurrió lo mismo al solicitarles discriminaran por su tamaño a las fracciones, ya fuera en una línea recta o de manera ascendente; los alumnos con dificultad para comprender las fracciones respondieron a partir de reconocer los números que había en las fracciones, no a la fracción en sí.

Los alumnos que presentaron esta dificultad para la interpretación de la representación de las fracciones tuvieron problemas también para trabajar la suma y la resta de fracciones. Es decir, se les dificulta entender el significado de las fracciones, como consecuencia, carecen de estrategias y estructuras conceptuales relacionadas con las fracciones cuando se les pide sumar y/o restar éstas. Es decir, no buscan un mínimo común divisor. Esto es también indicador de que los alumnos no comprendieron la relación parte-todo de las fracciones; en contra parte, los alumnos que demostraron tener una comprensión de las fracciones, manifestaron buscar un común denominador entre dos fracciones al momento de sumar y restar.

Queda claro entonces que las dificultades que manifiestan los alumnos para comprender y trabajar con fracciones subyacen desde un concepto erróneo o parcial de la relación parte-todo cuando les fue enseñada en tercero y cuarto de primaria. Una buena asimilación de ésta claramente permite a los alumnos razonar de mejor manera cuando se les pide trabajar con fracciones.

De tal manera que, con base en el primer objetivo de esta investigación que trata de identificar qué dificultades presentan los alumnos de nivel primaria para comprender y trabajar con el tema de fracciones y relacionar las ideas matemáticas que se relacionan con este trabajo se puede declarar que, de acuerdo con los cuestionarios que se aplicaron a los alumnos, las teorías de Fandiño (2009) quien es mencionado y analizado en el trabajo de Murillo (2019) coinciden en gran medida con los resultados encontrados en el presente trabajo de investigación en donde intervinieron treinta y seis niños de sexto grado de primaria.

Un primer problema que presentaron los niños participantes fue la dificultad a la que Fandiño (2009) y Murillo (2019) le llama de ordenamiento, en donde de acuerdo con ellos los alumnos con problemas para comprender este tema suelen pensar que un ordenamiento se da a partir de los números que se encuentren en las fracciones presentadas a ellos. Sin embargo, con base en este trabajo de investigación, en donde no solo se presentó una prueba, es decir, un cuestionario al alumno, sino que se entrevistó a los mismos para conocer de qué manera pensaban con base en la teoría de Delval (2001), se puede mencionar que los alumnos que tienen esta dificultad para comprender las fracciones no solo vinculan el orden o el tamaño de estas con base en el numerador.

Es decir que también en algunos casos, como se evidenció en el segundo cuestionario aplicado a los treinta y seis alumnos que participaron en esta investigación, suelen asignar el orden de acuerdo al número que se encuentra en el denominador. De tal manera que, de acuerdo a la revisión del cuestionario y analizando las respuestas de los alumnos que respondieron mal ante un ordenamiento, hasta un 40% (diez de veinticinco) de los alumnos que equivocaron en esta idea matemática ordenan con base en el número que aparece en el denominador contra el 36% que ordenó con base en el numerador.

El resto de los alumnos que equivocaron en esta idea matemática no ordenaron con base en el numerador o denominador, sino que utilizaron alguna otra lógica, algunas que incluso no se alcanzaron a entender. Pero sí es importante recordar y volver a exponer el caso de la alumna que ordenó las fracciones con base en la suma que había entre numeradores y denominadores.

En este sentido queda claro que, como lo mencionó Ávila (2019), los alumnos que presentan problemas para comprender el tema de fracciones suelen no haber tenido un adecuado tránsito en el concepto de los números naturales y los racionales. De tal manera que, la gran mayoría de los alumnos que equivocaron con esta idea matemática demostraron tener la dificultad de ordenamiento señalada; esta dificultad se da entonces por no haber tenido clara la diferencia entre un número natural y un racional.

Una segunda dificultad que se encuentra expuesta en el capítulo cuatro de esta investigación es la de realizar operaciones. Por esto, en el primer cuestionario que se aplicó a los alumnos se propusieron reactivos con sumas y multiplicaciones, pues, de acuerdo con Fandiño (2009), los alumnos demostraban mayor problema para multiplicar que para sumar pues al momento de realizar las sumas, tienden a sumar numeradores y denominadores.

Esta dificultad también fue detectada en esta investigación con base en el análisis del estudio principal en donde en el cuestionario se colocaron dos reactivos de multiplicación y división y suma y resta respectivamente.

Del mismo modo, los alumnos demostraron tener mayor dificultad para realizar operaciones como sumas y restas que para las multiplicaciones y divisiones. De acuerdo con el análisis de los cuestionarios y cómo respondieron los alumnos, así como a las entrevistas en donde se les preguntó al respecto, queda manifestado que ellos no solo suelen equivocarse por sumar numeradores y denominadores, sino que intentan repetir la metodología de las multiplicaciones y/o divisiones y multiplican numeradores entre sí o con los denominadores opuestos.

Con esto queda evidenciado que los alumnos con dificultades para comprender el tema de fracciones no terminaron por entender la relación parte-todo de una fracción, pues de haber entendido esto, en la suma de fracciones, por ejemplo, entenderían que se trata de un proceso de adición en donde invariablemente, el resultado tiene que ser mayor a cualquiera de las dos fracciones que se están sumando.

Además, es importante recalcar que el no presentar dificultades para multiplicar y/o dividir no es gracias a que los alumnos con dificultad en el aprendizaje de fracciones entiendan estas ideas y razonen el procedimiento. Simplemente esa situación se da por la mecanización y memorización del procedimiento. Incluso alumnos que supieron responder bien a las multiplicaciones de fracciones equivocaron en las divisiones porque, el vez de multiplicar denominador por numerador opuesto, multiplican numeradores y denominadores entre sí; es decir repiten la metodología delas multiplicaciones con las divisiones.

Cuando a un alumno de mediano nivel de comprensión se le cuestionó sobre por qué, a diferencia de con los números naturales, en la multiplicación de fracciones el resultado de la multiplicación es un número más pequeño, este no supo responder y manifestó nunca haber reparado en ello. Entonces, pareciera que hay un área de oportunidad al poder trabajar con los alumnos la significancia que tiene el resultado de una multiplicación o también incluso, de una división de fracciones.

Del mismo modo, la tercera dificultad expuesta en el capítulo cuarto del presente, es decir, la de reconocimiento de esquemas, no se vio presente de manera significativa en los alumnos que participaron en esta investigación. Esto de acuerdo a los dos cuestionarios aplicados a estos, en donde incluso en segundo se vincula a este tipo de dificultad con el trabajo de ideas matemáticas de reconocimiento de fracciones en cantidades continuas y discretas. Fueron entonces, pocos los alumnos que manifestaron tener dificultad con este tipo de ideas.

Lo que sí se puede señalar es que, aunque más de la mitad de los alumnos supo responder a la idea matemática de fraccionamiento en cantidades continuas, aquellos que se equivocaron manifestaron determinar el denominador por el número de elementos que no estaban señalados dentro del entero. De tal manera que, como en el cuestionario se les exponía una figura dividía en nueve partes y donde solo una de estas estaba sombreada, el numerador lo reconocieron como “1”, es decir, la parte sombreada, pero el denominador lo reconocieron como el “8”, es decir, las partes que no estaban sombreadas.

Con base en lo anterior, este hallazgo sí es muy coincidente con lo reportado por Fandiño (2009) y lo detectado en el presente con base no solo en el cuestionario, sino en las propias entrevistas.

En lo que respecta a la dificultad para reconocer el adjetivo igual de la que habla Fandiño (2009) se puede declarar que casi el total de los alumnos tuvieron dificultad para responder el reactivo expuesto en el primer cuestionario. De tal manera que esta dificultad se analizó bajo las preguntas una y dos del segundo cuestionario donde se pedía a los alumnos encerrar las figuras que cuya parte sombreada representara un medio y un entero respectivamente.

De tal manera que los alumnos que mostraron dificultad para responder a estos reactivos no solo razonan en función de en cuántas partes está dividido el entero y no qué tan sombreada está, sino que además tienen la necesidad de encontrar un patrón canónico en las figuras para poder determinar en cuántas partes está dividida alguna figura.

Al respecto de la dificultad de equivalencia se puede mencionar que con base en el análisis del segundo cuestionario los alumnos no demostraron dificultad, en términos generales, para reconocer la equivalencia de fracciones expresada con figuras, contrario a los resultados de Buto (2013), los alumnos reconocieron por ejemplo que,1/2 es equivalente a 2/4. Menos del diez por ciento de los alumnos manifestó tener problema con esta idea matemática.

En lo que sí manifestaron tener dificultad es en encontrar una secuencia equivalente a una fracción. Esto con base en el reactivo siete del segundo cuestionario donde apenas el 28% de los alumnos pudo resolver este ejercicio.

De tal manera que, los alumnos manifestaron ser capaces de identificar una equivalencia representada con figuras, pero no son capaces de encontrar una fracción que sea equivalente a una que se les expone. Una vez más, se manifiesta la incapacidad por parte de los alumnos para entender la naturaleza divisoria de las fracciones.

En lo que respecta a la dificultad de "encontrar la unidad que generó la fracción" que menciona Fandiño (2009) se puede exponer que esta no estuvo tan presente ni en los primeros dos problemas que se presentaron a los alumnos en el primer cuestionario, ni el reactivo catorce del segundo cuestionario donde se expuso un problema con la idea de escala.

Es de llamar la atención que ante problemas de este tipo no hayan tenido, en términos generales, problemas para encontrar una respuesta. Tal vez las investigaciones de Fandiño (2009) y el propio Murillo (2019) hayan sido más exhaustivas y debido a no encontrarse en condiciones de confinamiento hayan podido explorar más al respecto de esta dificultad.

Del mismo modo cabe señalar que en los problemas que se elaboraron para abordar esta idea matemática y dificultad, tanto en el segundo como en el primer cuestionario, se expusieron ejercicios en los que fácilmente al presentar, por ejemplo, la fracción ¼, los alumnos simplemente tuvieron que multiplicar por cuatro la primer cantidad presentada y con esto llegar a la conclusión de cuál fue el entero en un primer momento. Tal vez de habérseles presentado problemas donde se les planteara en un inicio fracciones con numerador mayor a "1" ellos habrían tenido un mayor problema para identificar por cuál número multiplicar y encontrar el resultado.

Finalmente, la última dificultad expuesta en el marco teórico del presente es la de la equipartición de fracciones y específicamente que los alumnos conciben a la fracción como un "tanto de tantos", así como entender que una fracción se encuentra dentro de un entero (Cortina et al., 2013).

Con base entonces en el análisis del segundo cuestionario se puede observar en el reactivo cuatro que esta dificultad estuvo presente en los alumnos que demostraron tener bajo nivel de comprensión del tema de fracciones en esta investigación.

Y es que, al momento de ilustrar las fracciones presentadas a ellos, este tipo de alumnos solía fracturar la imagen que ilustraban con base en el número más grande, no importando si este era numerador o denominador. Es decir, en el ejercicio donde tenían que ilustrar la fracción “5/3”, ellos dibujaban un cuadrado o circulo que fracturaban en cinco unidades y posteriormente iluminaban tres de esas partes.

Entonces es aquí donde lo detectado en las entrevistas, donde ellos manifestaron responder así porque no consideraban correcto el dividir el entero en tres partes y luego no poder iluminar cinco, siendo que, por lógica, ellos solo tenían tres partes.

De este modo queda demostrado que, de acuerdo con Cortina et al., (2013), el enseñar a los alumnos que una fracción se encuentra siempre dentro de un entero, no les permite transitar hacia el trabajo de las fracciones impropias y mixtas donde estas expresan un número mayor a la unidad.

Incluso durante la intervención didáctica, uno de los alumnos al preguntarle qué era una fracción mencionó que esta era “los partes que agarramos de un entero que está dividido en partes iguales”. Los alumnos entonces, en muchos casos, siguen queriendo encuadrar a una fracción como algo que se encuentra dentro de un entero que ha sido dividido en partes exactamente iguales y solo requiere el trabajo de contar ese número de partes que expresa la fracción; no entienden la relación de un número racional y una unidad.

Y es justo a propósito de esto último que se puede abordar el segundo objetivo de la presente investigación en donde se pretende exponer y analizar ya no cuáles dificultades están presentes sino por qué.

En este sentido vemos en este último análisis que parte del porqué de las dificultades tiene que ver con la forma en que ha sido expuesto este tema a los alumnos que participaron en la investigación.

Y es que, en el primer cuestionario, al preguntarles a los alumnos su concepto de fracción, más de la tercera parte de ellos dieron una respuesta en donde demuestran concebir a la fracción como la parte de un entero y en la mayoría de los casos, este entero lo entienden como algo dividido en partes iguales.

De un mismo modo se puede señalar que la dificultad para operar las fracciones se nota relacionada con la manera en que se les ha enseñado a los alumnos a realizarlas. Más que la metodología misma, es decir, en el caso de multiplicaciones y divisiones, por ejemplo, de multiplicar numeradores y denominadores según sea el caso, el error pareciera ser no se le explica a los alumnos la significancia que tienen los resultados de tales operaciones.

Claramente los alumnos buscan la manera de memorizar los procedimientos y, cuando es el caso de sumar y restar no operan bajo la lógica de buscar un denominador en común y con esto, trabajar la equivalencia de fracciones para encontrar la forma en que se pueda sumar y restar a partir de encontrar una equivalencia en donde exista el mismo numerador.

Otra de las razones por la que algunos alumnos manifiestan tener problemas para comprender el tema de fracciones es porque estos no entienden la relación que guarda un número racional, particularmente un fraccionario, con la unidad. Por esto muchos alumnos tuvieron problema para ordenar una lista de fracciones del mismo modo que para representar una fracción dentro de una línea recta.

De tal manera que para que un alumno comprenda y sea capa de discriminar una fracción de otra con base en el tamaño de ambas, es necesario que este pueda entender primero la relación que tiene cada una con la unidad.

Y es aquí donde se encuentra un área de oportunidad para la pedagogía de las fracciones en México. Y es que tal y como lo señala Castro (2001), es necesario instruir al alumno sobre las ventajas que ofrece el comprender y realizar transiciones de fraccionarios a decimales, toda vez que estos no solo ofrecen una mayor facilidad para ordenar de acuerdo a un tamaño, sino que ayudan a comprender la relación que tiene un número racional y la unidad.

La propuesta entonces que se hace en el presente es enseñar y hacer entender a los alumnos que una fracción es una división y que esta división tiene como resultado un número racional que puede o no, en el caso de tratarse de fracciones impropias, tener un número natural a la izquierda del punto decimal. En este modo, el alumno puede comprender y entender un tamaño de una fracción y con esto, del mismo modo discriminar entre dos o más fracciones de acuerdo a su tamaño.

Pero aquí es importante entonces, analizar porque incluso los alumnos de alto nivel de comprensión del tema de fracciones y que demuestran no tener dificultad para transformar de decimal a fraccionario presentan la idea de que después del punto decimal solo existen hasta centésimos.

Con base en lo analizado en los cuestionarios y en las entrevistas, queda manifestado que los alumnos piensan que los números decimales solo pueden ser contados del uno al noventa y nueve y que una vez llegando al número cien, este se convierte en un entero.

En una de las sesiones de la intervención pedagógica, cuando se trabajaba sobre la naturaleza divisoria de las fracciones y con la cual ellos podían ordenar y representar en línea recta las fracciones, uno de los alumnos demostró estar inconforme cuando se le corrigió al decirle que “.12” era mayor que “.8”. En este sentido, para el alumno ocho doce es mayor que ocho, por ende, “.12” debería ser mayor que “.8”.

Queda demostrado que, tal vez resultado de estar acostumbrado a trabajar con unidades de medida como metros y centímetros, los alumnos consideran que una unidad no puede ser dividida en más partes que cien. Pasa lo mismo al entrar en un contexto del dinero, es decir, los alumnos conocen los centavos. De tal manera que los precios siempre están expresados o en pesos o bien en centavos. Por esta razón, puede ser posible que los alumnos consideren que después de un punto decimal solo puede haber hasta cien unidades.

Como ejemplo de lo anterior es que están acostumbrados a ver que un producto cuesta, por ejemplo “4.95”, es decir, ellos saben que, por tan solo cinco centavos, el producto no costó cinco pesos. Esto justifica por qué cuando ven números decimales con más de dos dígitos a la derecha del punto decimal suelen tener problemas para entender estos.

Por otro lado, regresando a la situación donde el alumno manifestó no estar de acuerdo con que “.8” es mayor que “.12” es porque se nota una clara tendencia a ver a ese “.8” como si se tratase de ocho centésimas. Es decir, el alumno al escuchar “punto ocho” piensa que se trata de ocho unidades de un total de cien. En este caso, el alumno se siente más cómodo y entiende mejor el ejercicio si se le pregunta qué es más grande si “.80” o “.12”, en donde al ver un ochenta sí es capaz de entender que este es más grande porque ochenta es mayor a doce.

Es claro entonces que existe un área de oportunidad, la cual se aprovechó en la intervención didáctica de la presente, para enseñar a los alumnos el trabajo con números decimales y su relación con números fraccionarios a partir de exponer a estos la existencia y significancia de los décimos, centésimos, milésimos y demás números que aparecen después del punto decimal y que los alumnos dejen de pensar en la idea de que un número decimal existe solo entre una y noventa y nueve unidades.

Respecto a los objetivos dos y tres de esta investigación que fueron diseñar y aplicar una intervención didáctica sobre fracciones en alumnos de sexto grado de primaria y estudiar la viabilidad de esta intervención didáctica, se puede concluir que se alcanzaron ambos objetivos en vista de que con los resultados obtenidos a partir del segundo cuestionario de fracciones aplicado a los tres alumnos que participaron en la investigación, los cuales fueron positivos, se puede determinar que fue viable el diseñar la intervención didáctica con base en las ideas matemáticas en las que los alumnos tuvieron problemas.

Queda demostrado entonces que a partir del objetivo dos, diseñar una secuencia didáctica con base en las ideas matemáticas que se dificultaron a los alumnos y apoyado de actividades específicas ayuda al alumno no solo a comprender mejor estas ideas matemáticas abordadas, sino que contribuye a su mejor comprensión de la significancia y magnitud del número fraccionario, es decir, contribuye a ampliar su conocimiento y concepto matemático de las fracciones.

Y es que a partir de que se llevó a cabo con los alumnos la actividad de construir un entero con base en el uso de pedazos de papel que expresaban una parte del todo (de un entero que era un pedazo de hoja cuadrada de 400 centímetros de superficie), los alumnos construyeron mejor su idea de lo que significaban la fracciones. De cierto modo, esta actividad sirvió para que los alumnos abandonaran la idea de que “un entero es lo que se agarra de un entero que ha sido dividido en partes iguales”. Ahora el alumno fue capaz de ver que la unidad no siempre es fracturada en partes exactamente iguales.

Fue oportuno entonces, el incorporar actividades que no estuvieran estrictamente relacionadas con las ideas matemáticas del cuestionario de fracciones a la secuencia didáctica.

Justo a partir de diseñar y verificar la viabilidad de esta secuencia didáctica se puede señalar que, el éxito que tuvo esta con base en el cotejo del cuestionario aplicado antes y después de la intervención didáctica a los alumnos, se debe en gran parte a la intención que tuvo esta secuencia didáctica de hacer ver y entender a los alumnos la relación parte-todo que tienen las fracciones.

Justo a partir de esta intención, los alumnos fueron capaces de discriminar a las fracciones por su tamaño, ya fuera en ubicar a estas en una línea recta numérica o no numérica o en un ejercicio de ordenamiento descendente o ascendente. Los alumnos también aprendieron al mismo tiempo a representar las fracciones con dibujo. El avance más importante en este sentido fue que en los tres casos los alumnos supieron representar las fracciones impropias. Al mismo tiempo relacionando cada actividad con la otra y encontrando el momento oportuno no solo para intervenir con una u otra actividad, sino de retroalimentar las mismas, los alumnos demostraron tener un mejor entendimiento de lo que significa la equivalencia de fracciones, así como el ejercicio de secuencia de fracciones.

Hasta aquí se puede concluir que, el realizar un diagnóstico en niños con dificultades de problemas de aprendizaje en las fracciones o del conocimiento matemático permite identificar con precisión tales dificultades y que éstas puedan ser la base para diseñar unidades didácticas que ayuden a superar estas dificultades y asegurar un aprendizaje significativo en ésta área con tantos índices de niveles de dificultad tanto para el alumno como para el docente.

9.2 Aportaciones de la investigación

9.2.1 Teóricas

Los resultados de la investigación sugieren que los antecedentes utilizados para la misma como lo son los trabajos de Kieren (1983), Cortina et. al (2013), Murillo (2019), Castro (2001) entre otros, fueron una marco teórico y referencial adecuado para la propia investigación.

Puntualmente como lo señalan Cortina et. al (2013) los alumnos con problemas para comprender las fracciones tuvieron un incorrecto tránsito en el aprendizaje de los números naturales y racionales. De tal manera que del mismo modo y como lo señalaron Murillo (2019) y Fandiño (2014), los alumnos necesitan comprender los conceptos que están trabajando, así como el lenguaje.

Y es que aquí se puede mencionar brevemente que, con base en lo detectado en la presente investigación, tanto la enseñanza como el aprendizaje de las fracciones a nivel primaria es algo que en México se dificulta mucho. Así lo expusieron diversos investigadores en sus trabajos (Godino et al., 2003; Moctezuma, 2012 y Quintanilla, 2012).

Se puede mencionar entonces, que, con base en el análisis de las respuestas y discursos de los alumnos que participaron en este proceso de investigación y respaldado en las aportaciones teóricas que ya se mencionaron, algunos alumnos presentan dificultad para comprender las fracciones porque tuvieron un adecuado trabajo al transitar de números naturales a fraccionarios y porque en los primeros años que se enseñan las fracciones en la educación primaria en México (tercero y cuarto grado) estos (los alumnos) no se apropiaron correctamente de la relación "parte-todo" que hay en los números fraccionarios.

En este sentido se detecta que muchos alumnos no comprender el significado no solo de lo que representa una fracción, sino de sus propios elementos como lo son el numerador y el denominador. Se vuelve un problema entonces que los alumnos los sigan llamando "el de arriba" y "el de abajo", para referirse a estos.

Y es justo a partir de este problema que presentan la mayoría de los alumnos para no comprender correctamente lo que representan numerador y denominador que es que hay que reconsiderar las aportaciones de Kieren (1980, 1983), quien menciona la importancia de entender a una fracción como una razón; es decir, una división de dos números.

Y es entonces que se vuelve a mencionar la importancia de que los alumnos sepan convertir números fraccionarios a decimales y viceversa.

Y es que, a partir de los resultados detectados en las últimas actividades de la secuencia didáctica aplicada durante esta investigación, se puede dar certeza de que los alumnos que participaron en ella tuvieron una mejor disposición a discriminar por tamaño, es decir, por el valor que expresan, los números fraccionarios una vez que aprendieron a convertir estos a decimales.

Este resultado que se menciona respecto a que los alumnos tienen mayor facilidad para reconocer cuál número es mayor o menor a partir de convertir a la fracción en decimal concuerda mucho con lo expuesto por Castro (2001) en su trabajo.

Castro (2001) criticó en su momento lo habitual que se ha convertido el enseñar los decimales posterior a la enseñanza y aprendizaje de las fracciones. Sugiere él que podría ser beneficioso para el aprendizaje de los alumnos que la enseñanza de las fracciones se lleve a cabo posterior a la enseñanza de los decimales, sin embargo, con base en los resultados de esta investigación y de la observación que se hizo a la secuencia didáctica, se puede señalar que la enseñanza de las fracciones y los decimales pueden ser llevadas a cabo de manera paralela.

Justo a partir de este vínculo que puede haber en el aprendizaje de los números decimales y fraccionarios es que se puede mencionar la importancia que tiene para esta sugerencia lo expuesto por Kieren (1983) en donde a partir del aprendizaje de la relación “parte-todo” es que se llega al concepto de una fracción como operador y como razón.

Se puede mencionar entonces, que, a partir de lo expuesto por los trabajos de diferentes investigadores, se puede encontrar una justificación hacia trabajar de manera paralela las fracciones y los decimales a partir de ver a estas últimas como un operador o resultado de una división, es decir, como una razón. Justo a partir de esta idea es que se puede observar cómo un número fraccionario puede convertirse en un número decimal, lo que entonces, se vuelve en un argumento perfecto para justificar la enseñanza de ambos números (fraccionario y decimal) de manera paralela.

9.2.2 Sociales

En cuanto a los beneficios que se pueden aportar para los participantes de esta investigación es que cada estudiante tuvo la oportunidad de revisar los conocimientos que tiene, así como las dificultades en el momento de resolver los reactivos sobre las fracciones, que de alguna manera en el momento de participar en la solución de las actividades didácticas que se desarrollaron, se pudo promover estos conocimientos.

De igual forma, tantos las situaciones didácticas que desarrollo el autor de esta tesis, cómo la aplicación del cuestionario (Butto, 2003), amabas pueden ser utilizados para evaluar y promover este conocimiento en niños en situaciones de aprendizaje similar.

9.2.3 Metodológicas

Se aporta un modelo de investigación que junto el cuestionario de fracciones y la entrevista a los alumnos, indaga de manera precisa el conocimiento y dificultades que pueden tener los alumnos en este campo de las matemáticas.

Esta investigación proporciona un cuestionario y una entrevista validadas para nuevas y futuras investigaciones que facilite el trabajo de un investigador y que contribuya para el análisis del conocimiento en el niño sobre las fracciones.

En el campo de la didáctica se aportan nueve actividades didácticas que ya fueron diseñadas, aplicadas y validadas; de tal modo que pueden ser un fundamento para el desarrollo de la didáctica en esta área.

9.3 Recomendaciones

Con base en los resultados obtenidos a partir de la investigación y de la observación a las diferentes etapas del estudio como lo fueron la aplicación de cuestionarios sobre fracciones, las entrevistas de tipo clínico a algunos alumnos seleccionados, así como la secuencia didáctica que se llevó a cabo con tres alumnos que mostraban dificultad para comprender las fracciones, se pueden aportar diversas sugerencias, tanto a futuras investigaciones como a las practicas pedagógicas de los docentes.

9.3.1 Recomendaciones a la investigación

La principal recomendación que se hace a futuras investigaciones que aborden el tema del aprendizaje de fracciones, particularmente a nivel primaria, es considerar la importancia que tiene el aprendizaje del número decimal paralelo al de las fracciones.

Quedó demostrado a través de las aportaciones teóricas a este trabajo de investigación que los números decimales pueden ser enseñando de manera paralela a los fraccionarios a partir de enseñar en concepto de los segundos como razón. Es decir, se puede hacer investigación sobre el aprendizaje de fracciones focalizando la importancia que el comprender que una fracción es una operación entre dos números que aparecen en el numerador y denominador de las mismas.

Del mismo modo, a partir de los resultados de esta investigación y de lo que se detectó durante la secuencia didáctica, queda demostrada la importancia de que los alumnos sepan convertir un número fraccionario a decimal.

A partir de estos argumentos es que se sugiere y se recomienda indagar al respecto del vínculo entre fracciones y decimales para construir una mayor referencia teórica que justifique la importancia de este vínculo.

Así entonces, se sugiere del mismo modo investigar al respecto de qué dificultades aparecen en el aprendizaje de los números decimales. Puntualmente se puede indagar sobre porqué algunos alumnos, incluso de alto nivel de comprensión de las matemáticas y los números fraccionarios, como fue el caso de lo que se encontró en esta investigación, tienden a pensar que un número decimal que tiene más de tres dígitos a la izquierda del punto decimal es un número mayor a la unidad.

Como ejemplo de lo anterior se puede señalar que de acuerdo a lo encontrado en los cuestionarios de fraccione aplicados a los alumnos, muchos de ellos señalaron que el número .125 era equivalente a un entero y ¼.

Algo pasa en la enseñanza de los números decimales que muchos alumnos parecen pensar un número decimal existe solo entre .01 y .99, es decir, que no pueden existir tres números después el punto decimal.

Por lo anterior se sugiere, como ya se señaló, investigar al respecto de cómo razonan los alumnos que cometen este tipo errores al ver a un número decimal de las condiciones que se mencionó.

Una sugerencia más para futuras investigaciones que aborden el tema, podría ser el indagar más al respecto de porqué a los alumnos les cuesta tanto trabajo encontrar un común denominador, particularmente cuando deben operar fracciones.

Es importante investigar si esta dificultad incluso puede deberse a la práctica de enseñar a operar fracciones a partir de la memorización de pasos a seguir para llegar a un resultado.

Es evidente bajo los resultados de esta investigación que los alumnos intentan, en muchos casos, repetir metodologías para encontrar resultados. Por ejemplo y como pasó con muchos de los alumnos que participaron en esta investigación, recuerdan que para multiplicar fracciones se multiplican numeradores y denominadores entre sí, lo que les lleva a pensar que para sumar deben sumar numeradores y denominadores entre sí.

Queda claro que el detectar qué problemas tienen los alumnos para encontrar un común denominador que permita operar (suma y resta) las fracciones ayudaría a una mejor conceptualización de la fracción como una razón.

Es importante también indagar el conocimiento de las fracciones con los alumnos que no tienen problemas, que permite conocer como lo entienden, que procedimientos y conceptos tienen acerca de estos, cuáles son sus estrategias de solución y comprensión con la fin de adaptarlas en situaciones didácticas y/o programas que permiten fortalecer estos conocimientos y competencias en niños que pueden tener problemas para aprenderlos.

A partir del regreso a clases presenciales se sugiere se realice investigación dentro de las aulas, se considere el uso y efectividad de material didáctico, concreto o hasta el uso y diseño de software que facilite y apoye los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones. En estas futuras investigaciones es necesario complementar estudios desde las percepciones y creencias de las docentes acerca de la enseñanza y aprendizaje de las fracciones en el niño.

Finalmente se sugiere también realizar una investigación como esta pero con un número mayor de alumnos y de diferentes escuelas. Incluso podría hacerse en alumnos de diferente ciudad o trabajar la educación comparada y revisar cómo es el aprendizaje de las fracciones en México y en otros países de Latinoamérica y de otras latitudes del orbe.

9.3.2 Recomendaciones a la práctica pedagógica

Como resultado del análisis de los cuestionarios sobre fracciones, de las entrevistas a los alumnos, así como de la observación que se hizo durante la secuencia didáctica a las ideas y conocimientos que tenían los alumnos antes de participar en esta investigación, se pueden aportar algunas sugerencias a los docentes de nivel primaria sobre la manera de enseñar el trabajo con fracciones.

El primero y más importante s que se debe tener más cuidado y empeño cuando los alumnos deban aprender la idea “parte-todo” que es la base del aprendizaje de fracciones.

En México este concepto de la relación “parte-todo” se enseña a los alumnos en los grados de tercero y cuarto de primaria. Es aquí entonces donde los profesores, de acuerdo a las recomendaciones que se dan, pueden detenerse un poco para analizar si los alumnos están comprendiendo esta idea.

Así mismo se sugiere a los docentes procurar que cuando se trabaje la operación de fracciones, como son suma, resta, multiplicación y división, no se inculque a los alumnos la idea de que hay que memorizar un procedimiento para repetirlo cuántas veces sea necesario durante el curso.

Ya se expuso la importancia que tiene el que los alumnos sean capaces de encontrar un común denominador, pero sería importante que este común denominador no lo vieran como el resultado de multiplicar ambos denominadores, sino más bien como ese número que al ser múltiplo de ambos denominadores, permite una operatividad más rápida.

Del mismo modo se sugiere tanto a docentes como autoridades educativas y demás, ser más honestos y hacer una crítica hacia qué tanto saben los docentes que están en las primarias de México al respecto de las fracciones y si son capaces realmente de enseñar estas ideas matemáticas.

Sí es importante mencionar que, aunque la enseñanza y aprendizaje de números fraccionarios no es todo en la materia de matemáticas a nivel primaria, sí es una idea matemática junto a la de los números decimales que son base para el aprendizaje de conceptos e ideas matemáticas con un mayor grado de dificultad. Por ello, se vuelve importante el indagar al respecto de qué tanto saben los docentes sobre las fracciones, así como de los números decimales.

Lo anterior se puede resumir en esta necesidad que hay en México de evaluar a los docentes sobre qué nivel de comprensión y de dominio tienen sobre el área de conocimiento de las matemáticas y puntualmente sobre los temas e ideas que tiene que trabajar frente a los alumnos.

Se sugiere entonces, posterior a esta evaluación y dependiendo de los resultados tanto generales como particulares de los docentes, llevar a cabo una capacitación que les permita ejercer una mejor labor y con esto, que los alumnos tengan un mayor grado de aprovechamiento no solo en el aprendizaje de fracciones, sino en general de todos los conceptos matemáticos que se aprenden en la primaria.

Esta evaluación y capacitación se sugiere a partir de que la educación primaria en México, tanto en el área de matemáticas como en todas las áreas del conocimiento que se abordan en ésta (en la educación primaria en México) es un derecho para las y los niños mexicanos. Por esto, tanto docentes, como autoridades educativas, deben llevar a cabo acciones para que los alumnos en México tengan un mayor grado no solo de aprovechamiento, sino de comprensión en los temas vistos en la escuela y que estos les permitan enriquecerse personal, cultural e intelectualmente.

REFERENCIAS:

Acero, I. D. M. (2017). *La investigación social, un acercamiento a lo cotidiano.* Revista electrónica de Investigación Educativa, 19(4).

Aravena, M., Kimelman, E., Micheli, B., Torrealba, R., y Zúñiga, J. (2006). *Investigación educativa* I. Universidad Arcis, Chile.

Ausubel, D., & Novak, J. (1983). Psicología Educativa. Un Punto de Vista Cognoscitivo. México. Trillas, 3.

Barallobres, G. (2016). *"Diferentes interpretaciones de las dificultades de aprendizaje* en matemática. Educación Matemática." 28(01). https://doi.org/10.24844/em2801.02

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). *"Rational number concepts. En R. Lesh* y M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes." Nueva York: Academic Press.

Bishop, Alan J. (1999). "*Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.*" Barcelona, Paidós.

Block, D Y Solares, D. (2001). "Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo." Educación Matemática.

Brousseau, G., 2000. *"Educación y didáctica de las matemáticas. Educación Matemática"* 12(1), 5-38.

Brown, A. K., Quinn, M. A., Karim, Z., Conaghan, P. G., Peterfy, C. G., Hensor, E., Wakefield, R. J., O'Connor, P. J., & Emery, P. (2006). *Presence of significant synovitis in rheumatoid arthritis patients with disease-modifying antirheumatic drug-induced clinical remission: Evidence from an imaging study may explain structural progression. Arthritis and Rheumatism*, 54(12). https://doi.org/10.1002/art.22190

Butto, C. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes. Horizontes Pedagógicos, 15(1).

Castro Martínez, E., & Castro Martínez, E. (2001). E*nseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil.* Comercial Grupo ANAYA, SA.

Cantoral Uriza, R., & Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: una visión de su evolución. RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 6(1).

Capilla, R. M. (2016). Habilidades cognitivas y aprendizaje significativo de la adición y sustracción de fracciones comunes. Cuadernos de Investigación Educativa, 7(2). https://doi.org/10.18861/cied.2016.7.2.2610

Carbajal, A. (2005). Reseña de" Estrategias docentes para un aprendizaje significativo" de Frida Díaz Barriga Arceo y Gerardo Hernández Rojas. Tiempo de Educar, 1(1).

Carrillo Yalán, M. E. (2012). Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar matemática quinto grado de educación primaria.

Castilla Pérez, F. (2013). La teoría del desarrollo cognitivo de Piaget aplicada en la clase de primaria. Universidad de Valladolid.

Cedillo-Osornio, J.L. (2016*). El concepto de equivalencia de fracciones en la educación primaria mexicana entre 1960 y 2011*. Tesis de Maestría en Desarrollo Educativo no publicada. México:Universidad Pedagógica Nacional.

Cerda , J. fernandez, M. Meneses, J. (2014). *Propuesta didáctica con enfoque constructivista para mejorar el aprendizaje significativo de las matemáticas*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática.

Cerda, J. (2010). *Hacia un programa de autorregulación del pensamiento lógico formal en el aprendizaje de las Matemáticas*. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid (España). Inédita

Cerda, J. fernandez, M. Meneses, J. (2014). *Propuesta didáctica con enfoque constructivista para mejorar el aprendizaje significativo de las matemáticas.* Revista Iberoamericana de Educación Matemática.

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). *Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. Educational Studies in Mathematics*, 72(1). https://doi.org/10.1007/s10649-009-9198-9

Cobos, M. L. (2012). *Los Números Fraccionarios y el Aprendizaje del álgebra-Edición Única.*

Cogollo Martinez, J. (2018). *Estrategia "pensar": Resolución de problemas que involucran la fracción como operador*. Bogotá: Universidad Externado de Colombia.

Collins, K. M. T., Onwuegbuzie, A. J., & Jiao, Q. G. (2006). *Prevalence of Mixed-methods Sampling Designs in Social Science Research.* Evaluation & Research in Education, 19(2), 83–101. http://doi.org/10.2167/eri421.0

Colmenares E., A. M. (2012). Investigación-acción participativa: una metodología integradora del conocimiento y la acción. Voces y Silencios. Revista Latinoamericana de Educación, 3(1). https://doi.org/10.18175/vys3.1.2012.07

Conde, A. (2009). *Un Acercamiento a Las Fracciones Por Medio De La Música : Un Problema De Enseñanza Y Aprendizaje*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 24.

Córdoba, F. (2013). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería* (Doctoral *dissertation*).

Cortina et. al. (2013). *La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones*. Educación Matemática, 25(2).

Cortina, J. L., Zúñiga, C. y Visnovska J. (2013). *La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones.* Educación Matemática.

Coxford A. Ellerbruch L. (1975). Fractional Number. In: Payne J.N. (ed.) (1975). Mathematics Learning in early chilhood. Reston (Va): NCTM.

Crespo, C. (2009). *El aula de matemática, hoy: una mirada desde la docencia y la investigación en matemática educativa*.

Cubillo, C., & Ortega del Rincón, T. (2003). *Análisis de un modelo didáctico para la enseñanza/aprendizaje del orden de las fracciones.* Educación Matemática, 15(2).

Cubillo, C., & Ortega, T. (2003). *Análisis de un modelo didáctico para la enseñanza/aprendizaje del orden de las fracciones*. Educación matemática, 15(2), 55-75.

D'Amore, B. (2004). *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética. Uno. Revista de Didáctica de Las Matemáticas.,* 35.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). *Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la Didáctica de la Matemática.* Actas Del Segundo Congreso International Virtual Sobre El Enfoque Ontosemiótico Del Conocimiento y La Instrucción Matemáticos, 2007.

Dávila, M. (2002). *Las situaciones de reparto para la enseñanza de las fracciones: aportes para la elaboración de un estado del conocimiento*. Tesis de Maestría. México.: Cinvestav-Departamento de Investigaciones Educativas.

Delgado Caballero, A. O. (2013). *Uso de invariantes en la apropiación del concepto de fracción, en alumnos. RPP*, (20). https://doi.org/10.21555/rpp.v0i20.1737

Delgado Caballero, A. O. (2013). *Uso de invariantes en laapropiación delconcepto de fracción, en alumnos.* Revista Panamericana de Pedagogía, 20. https://doi.org/10.21555/rpp.v0i20.1737

Delgado Caballero, A. O. (2013). *Uso de invariantes en la apropiación del concepto de fracción, en alumnos*. Revista Panamericana de Pedagogía, 20. https://doi.org/10.21555/rpp.v0i20.1737.

Delprato, M. (2005). *Educación de adultos ¿saberes matemáticos previos o saberes previos a los matemáticos?* Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 8(2).

Delprato, M. (2005). *Educación de adultos ¿saberes matemáticos previos o saberes previos a los matemáticos?* Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 8(2).

Delval, J. (2001). *Aprender en la vida y en la escuela Segunda edición: 2001* (reimpresión). Ediciones Morata, S.L.(2006) Mejía Lequerica, 12.28004 - Madrid

Delval, J. (2001). *Descubrir el pensamiento de los niños: Introducción a la práctica Del método*.

Diaz, F., & Barriga, Y. (2002). *Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo: una interpretación constructivista.* McGraw Hill.

Díaz-Pinzón, J. (2016). *Soporte técnico de simulación phet en la enseñanza y aprendizaje de fracciones equivalentes*. Revista De Investigaciones Universidad Del Quindío, 28(2), 31-41. https://doi.org/10.33975/riuq.vol28n2.6

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española, 9.

Escolano, R., & Gairín, J. M. (2005). *Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria*. Revista Iberoamericana De Educación Matemática, 1.

Fandiño, M. I. (2009). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. Bogotá. Colombia*: Editorial Magisterio.

Fandiño, M. I. (2015). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. Tendencias En La Educación Matemática Basada En La Investigación*, 1.

Fazio, L. K., Bailey, D. H., Thompson, C. A., & Siegler, R. S. (2014). *Relations of different types of numerical magnitude representations to each other and to mathematics achievement. Journal of Experimental Child*

Psychology, 123(1). https://doi.org/10.1016/j.jecp.2014.01.013

Frech, A., & Damaske, S. (2013). *Pisa 2015 Draft Science Framework*. Journal of Health and Social Behavior, 53(4).

Freudenthal, H. (1983). *Fracciones. Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. En Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* Textos seleccionados. Capítulo 5.

Gagné, R. *Las condiciones del aprendizaje*. Madrid. (Ed.) Aguilar.

García, I., & Cabañas-Sánchez, G. (2013). *El concepto de fracción en situaciones de medición,división y la relación parte-todo con estudiantes de nivel medio superior.* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Gee, J. P. (2008). *A sociocultural perspective on opportunity to learn Assessment, equity, and opportunity to learn.* Nueva York: Cambridge University Press.

Gerván, Héctor Horacio (2013). *De la Aritmética al Álgebra Escolar. Análisis de actividades desde un punto de vista semiótico peirceano*. Revista de Educación Matemática, 28(3), 15-32.

Gilardo, A. G. (2010). *El número con el juego entra.* Medellin, Colombia: Tesis de maestría, universidadde Medellin.

Gimenez, Joaquin (1986). *Una aproximación didáctica a las fracciones egipcias. Números.* Revista de Didáctica de las Matemáticas, 14, 57-62.

Giordan, Andre. (1995). *Los orígenes del saber: de las concepciones personales a los conceptos científicos*. Sevilla: Diada Editores

Godino, J., & Batanero, C. (1994). *Significado institucional y personal de los objetos matemático*s. Recherches En Didactique Des Mathématiques, 14(3).

Gould, P., L. Outhred & M. Mitchelmore.(2006). *One-third is Three-quarters of*

Onehalf. En P. Grootenboer, R. Zevenbergen y M. Chinnappan (eds.), Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australiasia.

Hernández Gracia, J. F. (2003). T*ipos de Investigación. Boletín Científico de La Escuela Superior Atotonilco de Tula,* 5(9). https://doi.org/10.29057/esat.v5i9.2885.

Hincapié, C. (2011). *Construyendo El Concepto De Fracción Y Sus Diferentes Significados, Con Los Docentes De Primaria De La Institución Educativa San Andrés De Girardota.* Universidad Nacional de Colombias.

Hurtado, O. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el grado sexto.* Tesis de maestría no publicada. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Bogotá, Colombia.

Jauregui y Fernandez 2009). *Risa y aprendizaje: el papel del humor en la labor docente.* (Revista Interuniversitaria de Formación Del Profesorado, 23(3).

Jonassen, D. H. (2000). *El diseño de entornos constructivistas de aprendizaje. Diseño de La Instrucción: Teorías y Modelos : Un Nuevo Paradigma de La Teoría de La Instrucción,* 76, 77.

Kemmis, S., McTaggart, R., & Nixon, R. (2014). *The action research planner: Doing critical participatory action research. In The Action Research Planner: Doing Critical Participatory Action Research.* https://doi.org/10.1007/978-981-4560-67-2

Kieren, T. (1983). Partitioning, *Equivalence and the Construction ofRational Number Ideas. Proceedings ofthe Fourth International Congress on Mathematical Education.*

Kieren, T. (1992*). Rational and Fractional Numbers as Mathcmatical and Personal Knowledge: Implications for Currículum and Instruction. En G.*

Leinhardt, R. Putnam y R. Hattrup (Eds.), Analysis of Arithmetic far Mathematics Teaching.

Kieren, T. (1993). *Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding*. En *Rational numbers: An integration of research.*

Kieren, T. E. (1988). *Personal Knoweldge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En: J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and Operations on the MIddle Grades.*

Lamon, S. (2001). *Presenting and representing: From Fractions to Rational. En A. Cuoco,. (Ed),* The roles of representation in school mathematics.

León Pérez, H. (1999). *Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto. RELIME.* Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 2(1).

López, G. (1997). L*os esquemas como facilitadores de la comprensión y aprendizaje de textos.* Universidad Del Valle, 25.

López, L. P. H. (2011). *Desarrollo cognitivo y motor*. Editorial Paraninfo.

Mahmoud, Y. (2013). *The Relationship Between the Learning Styles of Students in Grades Five and Six and Their Held Misconceptions About Dividing Fractions* Based on Kolb's Model.

Maya Pérez, E. (2014). *Métodos y Técnicas de investigación. Una propuesta ágil para la presentación de trabajos científicos en las áreas de arquitectura, urbanismo y disciplinas afine*. In Familia. Revista de Ciencias y Orientación Familiar (Issue 9).

Metaute Mesa, M. (2017). *Una propuesta de aprendizaje significativo para entender el concepto de fracción como parte del todo, con alumnos de sexto grado, del sector rura*l. En Amalfi. Tesis de Maestría, Universidad cooperativa de Colombia.

Meza, A., & Barrios, A. (2010). *Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las*

Fracciones. Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Minerva, C. (2008). *El juego como estrategia en el aula. Mérida, México*: Tesis de Maestría.

Moctezuma, N. (2012). *El problema de las matemáticas al aplicar fracciones en niños de sexto grado de primaria. México, Distrito federal*: Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional.

Morales, C. P. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la institución educativa San Andrés de Girardota.* Facultad de Ciencias.

Murillo Moreno, A., & Ceballos Urrego, L. (2013). *Las prácticas de enseñanza empleadas por docentes de matemáticas y su relación con la resolución de problemas mediados por fracciones*. Revista Científica, 2. https://doi.org/10.14483/23448350.6553

Murillo Moreno, A., & Ceballos Urrego, L. (2013). *Las prácticas de enseñanza empleadas por docentes de matemáticas y su relación con la resolución de problemas mediados por fracciones.* Revista Científica, 2. https://doi.org/10.14483/23448350.6553

Murillo, P, L. (2019). *El uso de software educativo en aprendizaje de las fracciones en su relación parte – todo. Bogotá:* Universidad Externado de Colombia.

Narvaez, J. (2010). *Risa y aprendizaje: el papel del humor en la labor docente. Revista Interuniversitaria de Formación Del Profesorado*, 23(3).

Niaz, M. (1987). *Mobility-fixity dimension in Witkin's theory of field-dependence/independence and its implications for problem solving in science. Perceptual and Motor Skills*, 65(3), 755–764. https://doi.org/10.2466/pms.1987.65.3.755

Niaz, M. (2006). *Estilo cognoscitivo y su importancia para la enseñanza de la* *ciencia.* Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 5(2). https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5142

Obando, G. (2003). *La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo*. Revista EMA, 8(2).

Palacios, P. D. (2014). *Reflexiones en torno al valor pedagógico del constructivismo.* En Ideas y Valores.

Parra, Miguel; Flores, Rosa del Carmen (2008). *Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones.* Educación Matemática, 20(1), pp. 31-52 .

Perdomo Rodríguez, W. (2016). *Estudio de evidencias de aprendizaje significativo en un aula bajo el modelo Flipped Classroom*. Edutec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa, 55. https://doi.org/10.21556/edutec.2016.55.618

Pereira Pérez, Z. (2011). *Los diseños de método mixto en la investigación en educación: Una experiencia concreta.* Revista Electrónica Educare, 15(1). https://doi.org/10.15359/ree.15-1.2

Perera, P. B., y Valdemoros, M. E. (2007). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria*. Investigación En Educación Matemática XI.

Pérez, L. (2008). *Las fracciones como facilitadoras o limitantes del aprendizaje matemático,* tesis de maestría en la Universidad Pedagógica Nacional. México, DF.

Piaget, J. Inhelder, B y Szemiska, A (1960). *The Child`s Conception of Geometry. New York, Estados Unidos: Harper & Torchbooks*.

Pinilla Fandiño, M. I. (2015). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. Tendencias En La Educación Matemática Basada En La Investigación,* 1.

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). *A review of recent research in the area of* *initial fraction concepts. In Educational Studies in Mathematics* (Vol. 30, Issue 1). https://doi.org/10.1007/BF00163751

Prieto Hernández, D. P., González, V., & Stiff, M. (2015). *Propuesta de una secuencia de actividades sobre interpretación de la Fracción como parte-todo en contextos continuos y discretos, a partir de la propuesta de Sáenz.*

Pruzzo de Di Pego, V. (2012). *Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza?* Pilquen - Sección Psicopedagogía, 8.

Quintanilla Gatica, M. (2012). *Investigar y evaluar competencias de pensamiento crítico (CPC) en el aula de secundaria*. Alambique: Didáctica de Las Ciencias Experimentales, 70.

Rico, L. (1995). *Conocimiento Numérico y Formación del Profesorado. Granada*: Universidad de Granada.

Rico, L. (1995). *Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas*. Educación Matemática: Errores y Dificultades de Los Estudiantes, Resolución de Problemas, , Evaluación e Historia.

Ríos, Y. (2011). *Concepciones sobre las fracciones en docentes en formación en el área de matemática.* Omnia.

Rizo Cabrera, C., & Campistrous Pérez, L. (2015). Fracciones y números fraccionarios en la escuela elemental: el caso de la escuela primaria cubana. Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática, 0(12).

Rosselli, M. (2003). *Maduración Cerebral Y Desarrollo Cognoscitivo*. Revista Latinoamericana En Ciencias Sociales, Niñez y Juventud, 1(1).

Rubiano Navia, S. (2012). *La fracción, su relación parte todo y sus diferentes representaciones*. [Recurso electrónico]. Bogotá: Universidad Externado de Colombia.

Silva, A. (2017). *Propuesta didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje de* *los números racionales en el grado 601 del colegio miguel Antonio Caro I.E.D J.M. a través de la teoría de las situaciones didácticas.* Universidad Libre, Bogotá, Colombia.

Simce (2007). *Niveles de logro 4º Básico, Lectura y Educación Matemática*, Gobierno de Chile: Ministerio de Educación.

Simón, E. A., & Indurría, J. V. (2010). Desarrollo cognitivo y motor. Editex.

Solé, I., & Coll, C. (1999). *Los profesores y la concepción constructivista.* El Constructivismo En El Aula.

Stake, Robert E. (2010). *Investigación Cualitativa: El estudio de cómo funcionan las cosas. New York: The Guilford Press.* Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 3(3).

Streefland, L. (1993). “Fractions: A realistic approach. In Rational Numbers: An Integration of Research”.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). “Fractions and multiplicative reasoning.” En Research companion to the Principles and Standards for School Mathematics.

Valdemoros, M. (1993). “La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él.” Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

Valdemoros, M. (1997). *Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones: estudio de caso. Educación Matemática*, México, Iberoamérica.

Valdemoros, M. (2001). *Las fracciones, sus referencias y los correspondientes significados de la unidad. Estudio de casos*. Educación Matemática, México, Iberoamérica.

Valdivé Fernández, C., & Andonegui, M. (2004). *El Dominio de las Operaciones de Adición y Sustracción con fracciones.* Revista Paradigma, 15(1).

Vallejo, B, Z. (2018). *Propuesta pedagógica para fortalecer la comprensión del concepto de fracción (parte-todo) en el grado quinto.* Fundación Universidad del Norte, Colombia.

Vygotsky, L. S. (1964). *Acción, Pensamiento y Lenguaje. Mente y Cerebro*. 1956.

Yepes, M. T. (2004). *Propuesta de un taller de juego como estrategia de reforzamiento en la enseñanza de operaciones básicas y fracciones en niños de educación básica. Caracas, Venezuela*: Tesis de Maestría, Universidad abierta cetro local metropolitano

ANEXOS

Primer cuestionario de fracciones

Cuestionario a alumnos.

Nombre____

Edad: ___________ **Grado:** _______ **Grupo**: _______ **Código**: __________

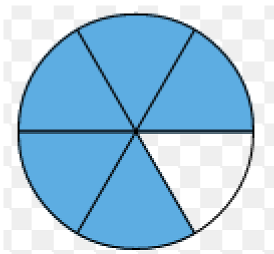
Instrucciones:

- Lee detenidamente cada uno de los siguientes reactivos y responde correctamente.
- Algunos reactivos tienen opción múltiple y otros no. Responde adecuadamente según sea el caso.
- En el caso que sea necesario, puedes apoyarte usando tus colores y juego geométrico.

1.- De acuerdo con lo que has aprendido en tus clases de matemáticas, explica qué entiendes por “Números fraccionarios”

2.- Menciona cuál es el numerador y denominador en la fracción $\frac{5}{9}$, explica tu respuesta.

3.- ¿Qué fracción representa la parte coloreada del siguiente círculo?



4- La fracción $\frac{1}{3}$, es…

a) Menor que la unidad

b) Igual que la unidad

c) Mayor que la unidad.

5.- De las siguientes fracciones, ¿Cuáles representan una cantidad por encima de la unidad?

a) $\frac{3}{8}$

b) $1\frac{4}{5}$

c) $\frac{8}{2}$

6.- Elige la opción que represente una fracción impropia.

d) $\frac{3}{8}$

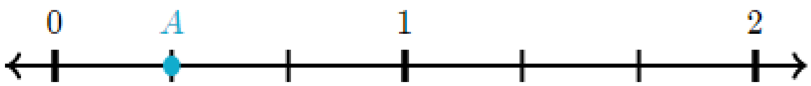
e) $1\frac{4}{5}$

f) $\frac{8}{12}$

7.- Observa la siguiente lista de fracciones y ordénalas de menor a mayor.

$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{3}{7}$

8.- ¿Qué fracción representa la posición del punto “A” en la recta numérica?



9.- Por favor resuelve las siguientes multiplicaciones.

1. $\frac{2}{5} \cdot \frac{8}{9} =$

2. $\frac{8}{5} \cdot \frac{15}{22} =$

3. $\frac{14}{9} \cdot \frac{3}{7} =$

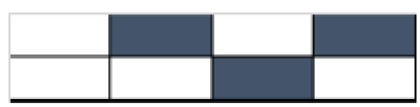
10.- Resuelve las siguientes sumas de fracciones.

1. $\frac{7}{10}+\frac{3}{4}=$

2. $\frac{5}{6}+\frac{3}{20}=$

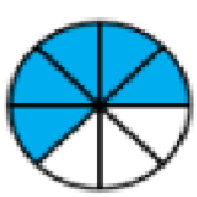
3. $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=$

11-. Observa la siguiente imagen y señala qué opción representa a la parte sombreada de la misma.

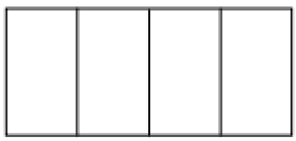
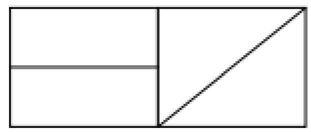
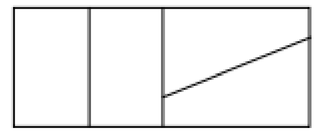


a) $\frac{3}{8}$ **b)** $\frac{3}{5}$ **c)** $\frac{5}{3}$

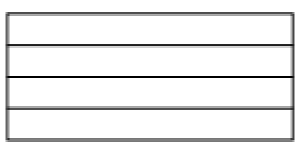
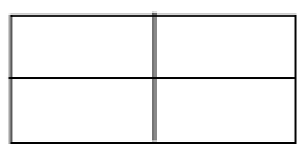
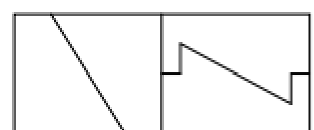
12.- ¿Qué fracción representa el área coloreada en azul del siguiente círculo que ha sido dividido en partes iguales?



13.- De las siguientes imágenes, subraya aquellas que consideres, están divididas en 4 partes de igual área.

a)  b)  c) 

14.- Menciona si a tu parecer, alguna de las siguientes imágenes no está dividida en 4 partes de área igual. Explica tu respuesta.

a)  b)  c) 

15.- Simplifica las siguientes fracciones:

$\frac{120}{150}$= $\frac{9}{24}$=

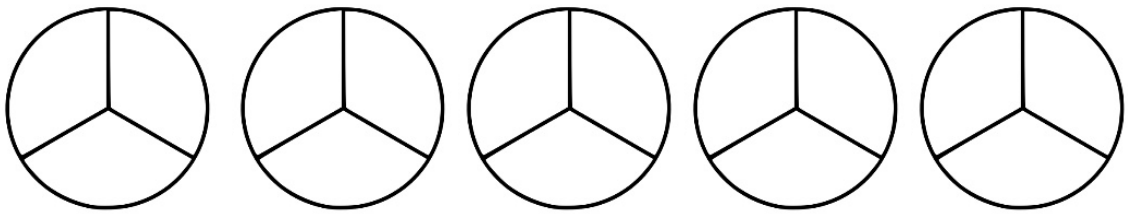
$\frac{27}{35}$= $\frac{90}{360}$=

$\frac{8}{16}$= $\frac{7}{42}$=

16.- Juan saca de su cartera un billete de 200 pesos. Si ese billete representa $\frac{1}{4}$ del total de lo que hay en su cartera, ¿Cuánto tiene en total Juan en esa cartera?

17.- Jenny va de camino de su casa al parque. Ella ha caminado 25 metros, que representan $\frac{1}{5}$ del total del camino hacia la escuela. ¿Cuántos metros hay de la casa de Jenny al parque?

18.- Colorea los siguientes círculos de tal manera que sean divididos entre tres personas en partes iguales.



19.- Con la ayuda de tu regla y colores, pinta $\frac{4}{5}$ del siguiente cuadro.

Segundo cuestionario (Estudio principal)

Cuestionario sobre fracciones construido a partir del elaborado por Butto (2013)

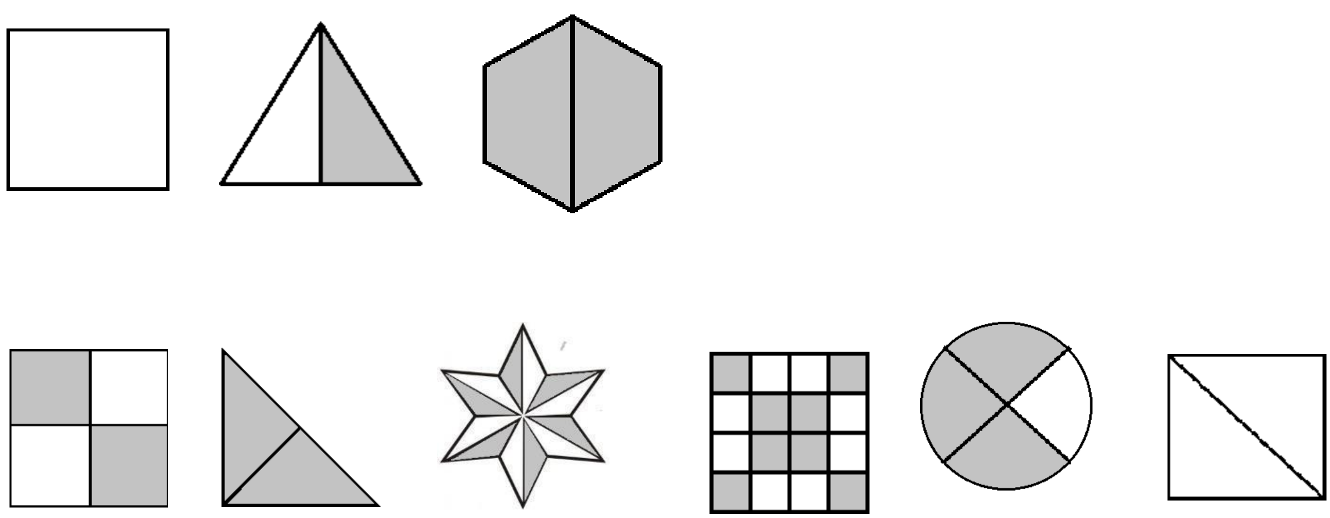
Cuestionario sobre fracciones

Nombre____

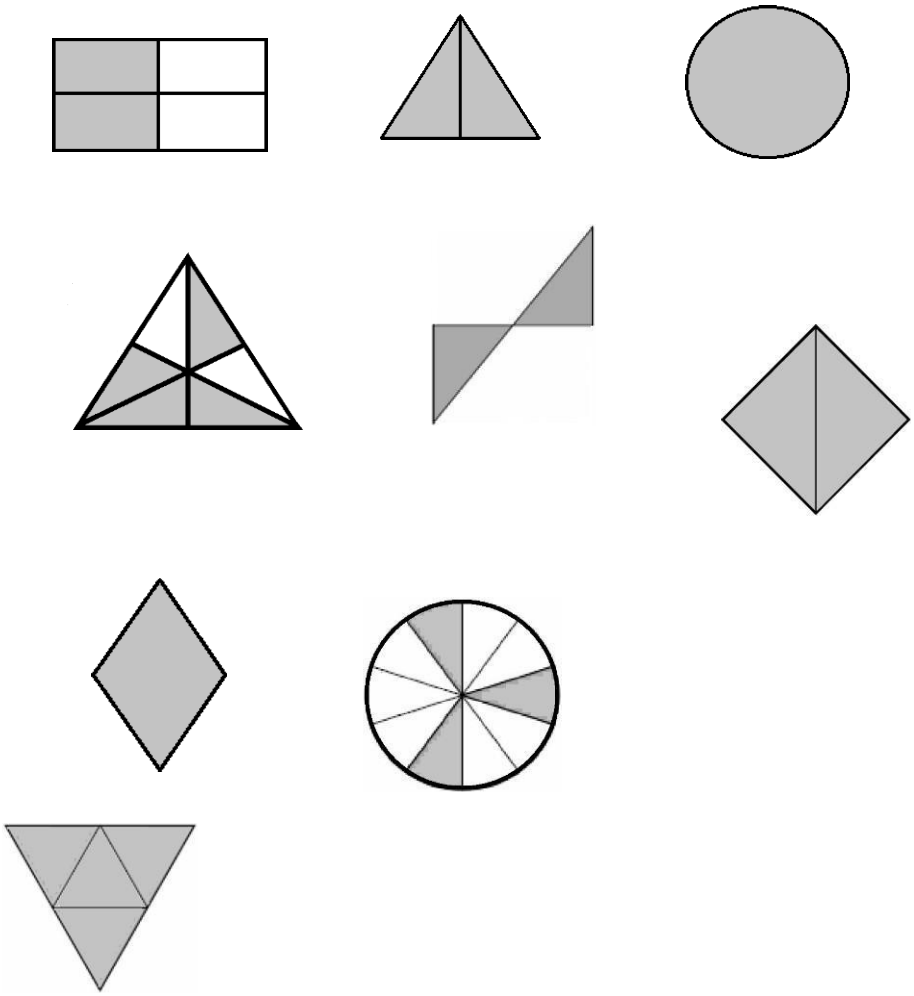
Edad:_________Grado:________Grupo:___________Código: __________

Instrucciones: Responde de la manera que consideres correcta a las preguntas que se te presentan a continuación. Puedes utilizar tu juego geométrico y colores si así lo consideras.

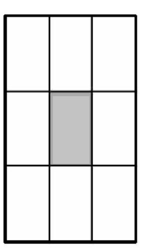
1.- Encierra en un círculo las figuras cuya parte sombreada representa una mitad.



2.- Encierra en un círculo las imágenes cuya parte sombreada represente un entero.

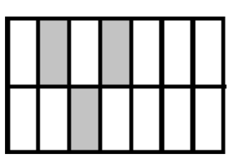


3.- Señala que fracción representa la parte sombreada de cada una de las siguientes imágenes.

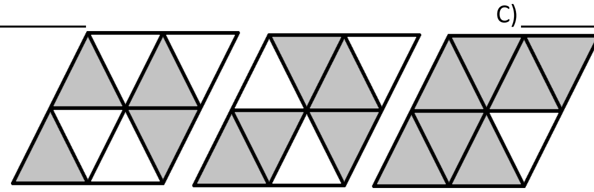


A)___________

B)___________



C)___________



4.- Representa con una figura las siguientes fracciones.

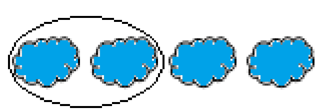
$\frac{12}{4}$

$\frac{3}{7}$

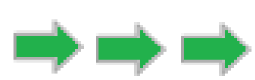
$\frac{5}{3}$

$\frac{18}{5}$

5.- Observa las siguientes imágenes y responde como se te indica.



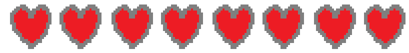
Del total de nubes, ¿qué fracción representa la parte encerrada? __



Del total de flechas, encierra en un

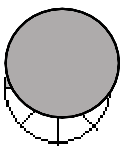
círculo $\frac{1}{3}$

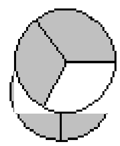
Del total de estrellas, ¿qué fracción representa la parte encerrada? __



Del total de corazones, encierra $\frac{3}{8}$.

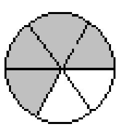
6.- Une con una línea las imágenes cuya parte sombreada representen la misma fracción.

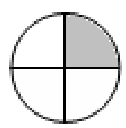

A)

D)


B)

E)


C)

F)


7.- Observa como en el ejemplo de “1/2” se presenta una secuencia de fracciones equivalentes; con base en eso, resuelve los demás ejercicios.

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{3}{4}$ —

1

.

4

1

.

5

8.- Representa las siguientes fracciones en la recta: 1/4, 2/3, 3/5, 7/8.

9.- Ordena la siguiente lista de fracciones de menor a mayor.

$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{8}{9}$

10.- Resuelve las siguientes sumas y restas de fracciones.

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$

b) $\frac{2}{7} + \frac{1}{3} =$

c) $\frac{5}{9} - \frac{1}{4} =$

d) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} =$

e) $\frac{4}{7} + \frac{3}{5} =$

f) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} =$

11.- Resuelve las siguientes multiplicaciones y divisiones de fracciones.

1 $\frac{2}{5} \cdot \frac{8}{9} =$

2 $\frac{7}{9} : \frac{11}{4} =$

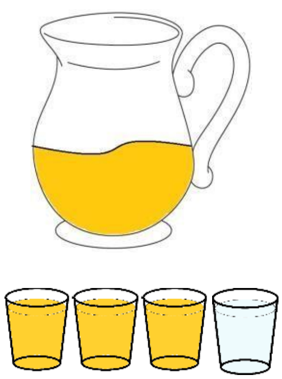
3 $\frac{14}{9} \cdot \frac{3}{7} =$

4 $\frac{8}{5} \cdot \frac{15}{22} =$

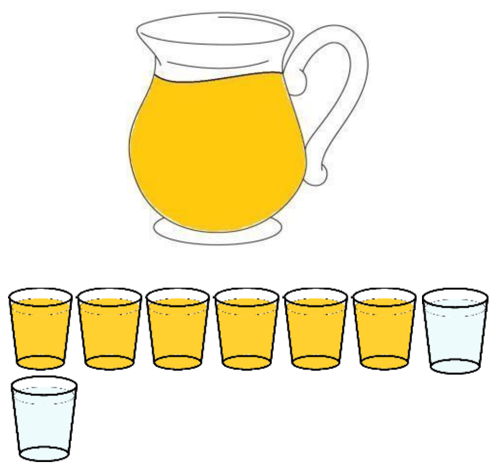
5 $\frac{4}{25} : \frac{12}{5} =$

6 $\frac{3}{10} : \frac{18}{5} =$

12.- Imagina que se te pide hacer una mezcla de jugo de naranja y agua en una jarra. En las figuras de abajo, los vasos anaranjados representan el jugo de naranja concentrado y los azules el agua. De acuerdo a las imágenes, selecciona la oración que creas que es verdad.



A



B

1) La mezcla A tiene un sabor más fuerte a naranja que la mezcla B.
2) La mezcla B tiene un sabor más fuerte a naranja que la mezcla A.
3) La mezcla A y la mezcla B tienen el mismo sabor a naranja.
4) No sé qué mezcla tiene el sabor más fuerte a naranja.

13.- Observa la siguiente imagen que representa la forma en que se repartieron las pizzas en un salón de clases. Se hicieron dos grupos; uno de niñas y otro de niños.

De acuerdo con la imagen, ¿A quién le tocó más porción de pizza, a las niñas o a los niños? Explica tu respuesta y cómo llegaste a ella.

14.- En la dirección de la escuela “Efrén Rebolledo” hay un mapa a escala de la ciudad de Actopan. La directora de la escuela señala que 5 centímetros del mapa equivalen a 200 metros de distancia real. La secundaria “Miguel Hidalgo” se encuentra en el mapa a 20 centímetros de la primaria “Efrén Rebolledo”. ¿Cuál es la distancia real entre ambas escuelas?

15. Un grupo de niños quiere comprar un balón de fútbol y para ello acuden a una tienda para ver los precios.

El dueño de la tienda les menciona el precio de cada balón de acuerdo con la marca de este. Además de esto, les dice que, por tratarse de alumnos de primaria, les hará un descuento por el balón dependiendo qué marca elijan comprar.

¿Qué balón deben comprar si quieren gastar lo menos posible de acuerdo con la lista de precios y el descuento que cada uno tiene?

1) Balón "Nike"

Precio: $ 1, 000

Descuento: 25%

2) Balón "Puma"

Precio: $ 750

Descuento: 15%

3) Balón "Adidas"

Precio: $ 900

Descuento: 20%

16. Agrupa las siguientes fracciones como se te pide en la tabla.

$\frac{3}{4}$ $\frac{12}{5}$ $\frac{9}{6}$ $3\frac{2}{3}$ $\frac{11}{8}$

$2\frac{3}{5}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{1}{3}$ $4\frac{1}{6}$

$\frac{2}{7}$ $\frac{13}{5}$ $2\frac{1}{3}$ $\frac{2}{12}$ $\frac{12}{8}$

Propia s	Impropias	Mixta s

17.- A continuación, aparece una lista con números decimales los cuales debes expresar de manera fraccionaria.

a) .25 b) .10 c) .4

d) .125 e) .05 f) .75

Ejemplos de las entrevistas

Entrevista a alumno de alto nivel de conocimientos.

Entrevistador: Daniel Higuera. Alumno: G1-06
Entrevista: 1 Edad: 12 años
Fecha Entrevista: 21/06/2021 Curso: Sexto año.
Vídeo: 1 Nivel de conocimientos: Alto
Pregunta.

# Pregunta.	Solicitud Pregunta.	Entrevista	Respuestas
3	Se le pide al alumno representar con una fracción la parte sombreada. En lugar de escribir 16/8 escribió 16/24.	En la pregunta tres se te pide representar con una fracción la parte sombreada de cada imagen. ¿Por qué respondiste de esa manera el inciso “c”?	Porque… lo que hice fue contar los cuadritos iluminados y de ahí el numerador… y de la parte en que están divididos por el denominador.
		Es decir… es un solo entero dividido en 24 partes	No… no porque no llega a ser ni un entero.
		De acuerdo, la fracción no llega a ser ni un entero, pero el entero ilustrado, ¿en cuántas partes está dividido?	Entre seis… No es cierto, entre ocho.
		Bueno, algunos de tus compañeros igual a ti; algunos otros la respondieron como 16/8 ¿Crees que ellos tengan razón?	Bueno, y o creo que sí porque en sí las figuras son tres octavos... Pero, como son tres figuras de ocho, yo creo que se debe responder veinticuatro en lugar de ocho.
		¿Entonces cuál crees que sea la correcta, 16/24 o 16/8?	Yo creo que las dos tienen cierta razón, pero me voy más por 16/24.
		Muy bien; gracias, Jeziel.	

7	Se continua con secuencia de fracciones equivalentes. El alumno respondió de manera perfecta. El instinto durante la entrevista me llevó a indagar sobre si entiende la relación entre fraccionarios y decimales.	En la pregunta siete se te pedía continua cuatro secuencias de acuerdo con el ejemplo que se te presentó. ¿Podrías explicarme cómo continuaste la secuencia de ¾?	Lo que hice fue multiplicar por dos el denominador y el numerador por cada sucesión.. por ejemplo en la segunda era 6/8 y así sucesivamente. Lo que hice fue, prácticamente, utilizar la tabla del dos… Lo multipliqué todo por dos y simplemente me dio eso.
		¿Piensas que los tres números que colocaste son equivalentes a ¾?	… Sí.
		De acuerdo. ¿Podrías convertir ¾ a decimales?	Sería eh… Sí, se puede… Serían .75
		Muy bien. ¿Y los otros tres números que colocaste los podrías convertir a decimales?	Sí, 1/3 serían .33 y algo; ¼ serían .25 y; 1/5 serían .2
		De acuerdo, pero, me refería a los tres números que colocaste en la secuencia de ¾… ¿Podrías convertirlos a decimales?	(El alumno murmura como haciendo operaciones mentalmente) Creo que todos se pueden, a ver serían 6/8… serían, equivale a… eh, igual serían .75.
		¿Y el que sigue?	El otro sería... ¿Cuánto dice, 19/12’
		Creo que escribiste 9/12 y te habías equivocado y pusiste el nueve encimado del 1.	Sí es cierto, serían… (El alumno vuelve a murmurar como haciendo la operación

			en su cabeza) Igual, .75, me parece.
		Muy bien, ¿Y el tercero?	¿Es 12/16, no?
		Sí.	(Una vez más, el alumno murmura como resolviendo en su cabeza) Igual, .75.
		De acuerdo. Una pregunta ¿Antes de que te preguntara, no habías pensado que, si eran equivalentes, tenían que ser los tres .75?	No, no, no lo había pensado… hasta ahorita.
		Muy bien, Jeziel.	
8	El alumno tenía que ubicar cuatro fracciones en una línea recta no numérica. La forma en que lo hizo no queda clara y parece no haber entendido para nada lo que tenía que hacer.	Aquí me gustaría, por favor, que me dijeras cómo ubicaste las fracciones en la línea recta. Explícame cuál fue tu lógica.	Primero lo que hice fue, con mi regla, medir lo que medía la línea y ya de ahí sacar… Por ejemplo si medía, no me acuerdo cuánto medía; creo que medía 16 cm. Entonces yo… me basé en los 16 cm para ir colocando la fracción en los centímetros que más o menos de acercaban a esa… a esa… a esa fracción.
		De acuerdo. Entonces, suponiendo que medía 16 cm, ¿Por qué ubicaste ahí 7/8?	7/8… (el alumno murmura como haciendo un ejercicio en

			su mente) Creo que ahí me equi… no… sí, creo que ahí me equivoqué. Si medía 16, entonces se dividía entre 8… 16 entre 8 a 2. Era más o menos por la mitad.
		De acuerdo. ¿Y la de ¼?	No. Sí me equivoqué; 7/8 era casi al final, era casi al final… porque se llena casi el entero con 7/8.
		La de ¼ ¿la ubicaste de la misma manera?	Sí, a de 1/4 , esa creo que sí estoy bien… porque esa la coloqué en cuatro, en cuatro centímetros.
		Ah, de acuerdo. ¿y la de 3/5?	Creo que eran… lo dividí entre cinco y ya de ahí… eh, saqué más o menos eh… entre cinco y ya de ahí sumé tres veces las quintas partes; es decir, multipliqué una quinta parte por tres y eso me dio el resultado; eso fue lo que yo hice.
		Me imagino que lo mismo con 2/3	Sí, fue lo mismo que hice con todas. Pero, ya vi que con 7/8 me equivoqué.
		¿Consideras que te equivocaste con 7/8?	Sí.

		¿Y con las demás?	Con las demás me parece que… tengo una media duda con 2/3; porque creo era más adelante. Porque es 2/3, es más de la mitad. Es decir que me equivoque. Igual 3/5, es más de la mitad, por eso creo que también ahí me equivoqué. O sea, que la única que yo considero está correcta es ¼.
		De acuerdo, ¿Tu razonamiento, entonces, para entender que estuviste mal, es que las tres fracciones están por encima de la mitad?	Sí.
		¿Y por qué crees que te hayas equivocado, Jeziel?	Porque estaba como nervioso. Porque yo no era muy bueno con las fracciones. Yo supongo que por no leer o por contar mal lo hice mal.
		De acuerdo. Muy bien, Jeziel.	
9	Se pide ordenar de manera ascendente una lista de fracciones. El alumno ordena bien, pero de manera descendente.	En la pregunta nueve se te pedía ordenar las fracciones presentadas. ¿Crees que respondiste bien?	A ver era de me… otra vez me equivoqué; era de menor a mayor. Yo las ordené creo que de mayor a menor. Sí, las ordené de mayor a menor. Ahí también estoy mal.

		¿Por qué piensas que te equivocaste?	Porque 5/2 es casi tres enteros entonces, no puede ser la menor. En este caso la menor serían 2/9. Por eso, yo creo que lo hice al revés. Otra vez, lo mismo por no haber leído bien; por hacerlo rápido.
		O sea, ¿Piensas que la razón por la que te equivocas es porque no te detienes a leer la pregunta?	Sí, yo considero que es por eso.
		Muy bien, Jeziel.	
10	Suma y resta de fracciones. El alumno responde de manera correcta; solo comete errores al simplificar. Comienzo cuestionándole en una suma donde simplificó de manera correcta para pasar a una en donde él se equivocó simplificando.	En la pregunta “10” tú tenías que hacer suma y resta de fracciones. Me gustaría que me dijeras si piensas que estás bien en la pregunta “a”.	A ver, la resta d efracciones creo que es de manera cruzada (murmura operaciones); entonces... yo considero que sí está bien.
		Muy bien, Jeziel. Ahora, ¿Podrías revisar el inciso “f”?	(Murmura operaciones) Sí, la respuesta son 30/27 igual a un entero y 3/9, estoy bien.
		¿Consideras que está bien?	Sí.
		Porque tú respondiste 30/27	Sí, creo que estoy bien.
		De acuerdo, ¿La parte entera son 27/27, verdad?	Sí. Ya con 30 superas la parte entera.
		¿Cuántos te sobran entonces?	Son 3. 30 menos 27 es igual a 3.

		¿Tres qué?	Tres, tres novenos.
		De acuerdo. Muy bien, Jeziel.	
12	Se expone un ejercicio donde hay dos jarras de diferente tamaño, pero con la misma proporción de jugo de naranja y agua simple. La pregunta era saber qué jarra tenía un sabor más fuerte a naranja. El alumno respondió de manera correcta.	En la pregunta número doce se te pedía señalar que jarra tenía un sabor más fuerte a naranja. ¿Porqué respondiste que ambas tienen el mismo sabor? En este caso, tú respondiste el inciso número tres, donde decías que la mezcla “a” y “b” tienen el mismo sabor.	Porque son equivalentes las fracciones. Porque en la primera son ¾ y en la segunda son (murmura pensando), son 6/8. En la primera son ¾ y en la segunda son 6/8. Es decir, 3 es equivalente con el 6 y 4 con el 8. Ese fue mi procedimiento.
		De acuerdo. Entonces, ¿Tú para entender que proporción de sabor a naranja tenía cada jarra le asignaste un número fraccionario?	Así es.
		Muy bien, Jeziel. ¿Podrías expresar en números porcentuales la cantidad de naranja que tiene la primer jarra?	La jarra número uno (murmura pensando) tiene… 75%.
		Muy bien, ¿Podrías decirme, en números decimales, la cantidad proporcional de naranja que tiene la jarra “B”?	A ver (Murmura pensando), Serían… creo que igual, .75.
		Muy bien, Jeziel.	
13	Se cuestiona sobre la idea de partición. Un ejemplo en el que había que dividir tres pizzas entre siete niñas y una pizza entre tres niños	En la pegunta trece se te pedía responder a qué grupo le tocaba más pizza, si a las niñas o a los niños. ¿Por qué respondiste que a las niñas?	A la niñas, a ver, a las niñas son (murmura pensando). Son siete niñas y les toca repartirse tres pizzas; a los niños son

	y responder a qué grupo le tocó más pizza.		tres y les toca repartirse solo una pizza. Lo que hice fue repartir la pizzas en séptimos y darle una rebanada a cada niña, y le toca a 3/7 a cada niña. Y a los niños solamente les toca 1/3. Pero, si miramos cómo se dividen los séptimos es más que 1/3.
		¿Qué es más que 1/3?	¿Cómo? No entiendo la pregunta.
		Es que me dijiste “si miramos lo de las niñas es más que 1/3”, pero, ¿a qué te refieres con “es más de 1/3”?	A la pizza de los niños. Como la pizza de los niños está dividida en tercios. Creo que 3/7 es mayor que 1/3.
		De acuerdo, entonces, ¿Tu razonamiento fue matemático en el sentido de decir que 3/7 es mayor que 1/3?	Más que matemático, fue visual. Porque lo que hice fue dividir las pizzas. Ahí creo que se ven las pizzas, cómo las dividí. Y lo que hice fue imaginarme en mi cabeza, darle 3/7 de pizzas a las niñas y 1/3 de pizza a los niños… y me dio que a las niñas les tocaba más pizza.
		Muy bien Jeziel. Oye, algunos de tus compañeros respondieron también que a las	Pienso que tienen razón porque tres pizzas es mayor que una pizza, pero lo que no se

		niñas, pero ellos justificaron diciendo que era porque tres pizzas es más que una pizza. ¿Qué piensas de ese razonamiento de tus compañeros?	percataron es que en las partes que se van a dividir en las niñas son siete y, las partes que se van a dividir en los niños son tres. Es decir, sí está bien su repuesta porque creo yo, que es a las niñas, pero no razonaron bien en el término de decir en qué fracción les tocaba. Ahí creo yo que lo que tenían que hacer es, prácticamente lo mismo que yo, que es dibujar y imaginarme en mi cabeza como se podía solucionar… era haciendo la equivalencia.
		De acuerdo. Muy bien, Jeziel.	
14	Idea de escala donde se pide calcular los metros reales de dos puntos en un mapa justo en función de la escala que se presenta. Se tenía que hacer un trabajo de regla de tres. El alumno responde de manera adecuada, pero no colocó desarrollo en la hoja.	(Le leo al alumno tal cual el problema? ¿Por qué respondiste que 800 metros?	Primero, creo que estoy mal, otra vez por no leer bien. Y eran 8000 metros, no 800. (El alumno murmura operaciones) El caso es que estoy mal, otra vez, por no haber leído bien o no poner atención.

		A ver, Jeziel. Vamos a detenernos un segundo. ¿Consideras que estás mal?	Sí.
		A ver, Jeziel. ¿Consideras que cuando te pregunto, sobre alguna de tus respuestas, es porque estás mal?	Eh, no en todas. Por ejemplo, en las sumas y restas, no considero que esté mal. Pero, en algunas sí considero que estoy mal; por ejemplo esta y una anterior que era la de…
		¿La recta?	Aja, la recta. Exacto.
		Muy bien, pero ¿Consideras que en ésta estuviste mal?	Sí.
		Una pregunta, ¿A cuánto equivale cada centímetro en el mapa… en metros?	Equivale… equivale a cuarenta metros, perdón.
15	Idea de Porcentaje. Se pedía calcular la cantidad porcentual de tres precios de un producto similar. Este porcentaje equivalía a un descuento. En función de ese porcentaje, decidir qué producto comprar con la consigna de gastar lo menos posible.	En la pregunta quince se te pedía decidir qué balón comprar de acuerdo con el precio y descuento de cada uno de ello, entendiendo que la idea era ahorrar lo más posible. ¿Por qué dijiste que había que comprar el balón “PUMA”(el segundo)? ¿Te acuerdas del problema?	Eh, no; vagamente no.
		¿Crees poder razonarlo ahorita?	Sí. A ver, el precio son 750, el descuento es el 15%. Ahí, entonces, lo que yo hice creo era…(el niño murmura operando mentalmente) no, no me acuerdo, la verdad.
		Muy bien. Un favor, Jeziel: cuando hables procura hablar, no más	750 pesos.

		fuerte, sino que al decir algo se entienda; no te lo guardes para ti. Expresa tu idea, no te preocupes si estás bien o mal; no pasa nada. Entonces, vamos a repetir la pregunta. Se te presentaban tres balones: ● Uno cuesta mil pesos y tiene un descuento de 25% ● El otro cuesta 750 pesos y tiene un descuento del 15%. ● El tercero costaba 900 pesos y tenía un descuento del 20%. En est sentido, ¿Podrías decirme cuál era el precio del balón Nike (el primero)?	
		¿Y del balón “PUMA” (segundo)?	Creo que lo que anoté era el descuento. Sí, eso fue lo que hice.
		¿lo que anotaste arriba de cada balón?	Sí… a ver. Sí, era el descuento, 100% era el descuento. Entonces el valor final del balón “Puma” era de (murmura operaciones) 637.5

		¿Y el balón "Adidas"?	Era de… 820 pesos.
		Y en función de eso, ¿Cómo respondiste?	Lo que hice fue sacar el descuento y el descuento restarlo al precio original y de todos, el más barato me pareció que fue el "Puma".
		De acuerdo. Ahora, una pregunta, Jeziel. ¿Por qué eso no lo desarrollaste en la hoja?	Porque, prácticamente lo hice mental. Se me hizo un poco más sencillo, por ejemplo, en el primer balón, como eran 1000, fácil el descuento; como son 250, es un número cerrado y que tiene "0". Es lo más sencillo; a mi parecer, es lo más sencillo. También lo mismo con el balón "Adidas"; lo que hice fue sacar, o sea, dividir, 900 entre 10 y tocaba a 90. Esos 90 los multiplique por 2 y me salió 180; esos 180 los resté de 900 y así sucesivamente.
		De acuerdo. Entonces, ¿todas las operaciones las hiciste en tu mente? Es decir, ¿no ocupaste	No, no ocupé otra cosa… más que… la mente… ahí hice los ejercicios.

		otra hoja u otra libreta que no fueran las horas del examen?	
		De acuerdo. ¿y por qué haces los ejercicios en tu mente? ¿Te sientes más seguro o sientes que ahorras tiempo?	Las dos porque a veces se me hace más fácil decir los resultados en mi mente. Aunque me tarde un poquito más o aunque me tarde menos, me gusta más hacerlos en la mente. Ya después si veo que me estoy tardando lo hago en otra hoja, pero me gusta más hacerlo con la mente; se me hace más práctico.
		Muy bien, Jeziel. ¿Has tenido algún problema con alguno de tus maestros? O sea, que te regañen o te llamen la atención.	Sí.
		¿Te han regañado o te han dicho algo?	En todos los grados me ha pasado eso.
		¿A qué te refieres en todos los grados, Jeziel?	Desde primero hasta finales de quinto me ha pasado eso. A mí los problemas me gusta hacerlos mental y me piden que con datos; que haga las restas, que haga las sumas, las multiplicaciones y todo eso. Y yo ya lo tengo en mi mente. Es decir, me tardo más haciendo las

			operaciones que yo contestando porque ya lo tengo rápido.
		¿Y qué piensas de tus maestros cuando te regañan o te llaman la atención?	No, pues no me queda de otra más que hacerlo. Si me dieron unas indicaciones lo tengo que hacer aunque se me haga más cómodo de esa manera.
		De acuerdo, Jeziel. Vamos muy bien.	
17	Convertir de decimal a fraccionario. El alumno respondió muy bien, pero, ".125" lo convirtió como 1 ¼. Es decir, la lectura que él le dio es de 1.25.	En la pregunta diecisiete, que es la última del cuestionario, se te pide convertir de decimal a fraccionario. ¿Qué estrategia o procedimiento utilizaste para responder?	Equivalencias. Equivalencias simplemente. Lo que yo hice fue… el entero para mí es 100.
		Ok.	De esos cien me basé en todo. Por ejemplo, en ".25", en 1/4, perdón. Lo que hice fue ¼ dividirlo en enteros. ¡A ver! No me di a entender, perdón.
		No te preocupes.	Voy a intentar explicarlo otra vez.
		Sí.	Ese .25 fue, lo que hice, dividir en cien… en cien partes… bueno, eso se me hace sencillo porque yo me baso en el 100; no me baso en un

			número más que en el 100. Lo que yo hago con 25… lo que yo hago con .25 es equivalente con el cien y… Es que no, no puedo, no me puedo dar a entender bien.
		Muy bien. No te preocupes. Di lo que pienses, no te preocupes.	A ver, a ver, ¿Cómo lo explico? Lo que yo hago es… ¿Cómo lo hago? Es que… no sé ni cómo lo hago… es como que ya lo tengo en la mente y ya…
		Ok, lo tienes en la mente, lo tienes en la mente no sabes cómo explicarlo, ¿verdad?	No, no, no lo puedo explicar muy bien en este momento.
		No te preocupes. Solo quería conocer esta parte en la que dices, “yo lo puedo trabajar en mi mente, pero explicarlo me cuesta trabajo o me cuesta hacer entender a los demás, cómo yo lo pensé”.	Un poco, un poco.
		En el inciso “c” dijiste que “.10” es igual a “1/10”, ¿Por qué?	Porque lo que yo hice, otra vez con el 100, dividirlo en 10 partes y esas diez partes, el equivalente era 1/10.
		Muy bien, Jeziel. Ahora dime, ¿Por qué en el inciso “d” dijiste	Porqué para mí 100 es el entero, es decir, como es “.125” ya había pasado del entero.

		que ".125" era igual a un entero y ¼"?	Entonces, yo puse el entero y el 25, que es lo que sobraba, era ¼.
		Muchas gracias, Jeziel.	

Entrevista a alumno de mediano nivel de conocimientos.

Entrevistador: Daniel Higuera. Alumno:G1-05
Entrevista: 2 Edad: 12 años
Fecha Entrevista: 23/06/2021 Curso: Sexto año.
Vídeo: 2 Nivel de conocimientos: Medio

# Pregunta	Solicitud	Entrevistador	Alumna
2	Idea de entero. La alumna entiende la relación del entero en función de la parte sombreada, pero solo en figuras canónicas y no reconoció la figura no canónica, aunque esta también estaba sombreada totalmente.	En esta pregunta número dos se te pedía encerrar con un círculo las figuras que, de acuerdo con su parte sombreada, representaran un entero. En este sentido, ¿Podrías indicarme por qué encerraste las que encerraste?	Porque en la parte del triángulo, eran dos mitades coloreadas, significa que era un entero. En el círculo, estaba todo el círculo coloreado… (Inaudible).
		Muy bien, hija. Con base en lo que me respondiste, ¿Me podrías decir por qué no encerraste esta figura (señalo la no canónica)?	Porque… pensé que no era un entero.
		¿Por qué pensabas que no era un entero?	(Falla la conexión y no alcanzo a escuchar lo que tiene que decirme)
3	Se le pide al alumno representar con una fracción la parte sombreada.	En la pregunta tres se te pide representar con una fracción la parte sombreada de cada imagen. ¿Por qué	Porque puse 16/8, porque… habían 16 partes sombreadas y en cada cuadrito, había 8.

	Contesta perfectamente. La figura con más de un entero la representa 16/8	respondiste de esa manera el inciso “c”, hija?	
		De acuerdo; muy bien. En cada cuadrito había 8. Algunos de tus compañeros respondieron 16/24 en esta misma pregunta, ¿Qué opinas de eso?	No sé si me equivoqué.
		Tú no te preocupes, Danna Tú solo dime lo que opinas de la respuesta que dieron otros compañeros tuyos. Tú respondiste 16/8, tus compañeros respondieron 16/24. No te preocupes en si te equivocaste o no. Solo dime lo que pienses de la respuesta de ellos.	No sé si la respuesta de mis compañeros estuviera mal o bien.
		Muy bien. No te pongas nerviosa, Danna. Y procura no apagar tu micrófono para que no pierda lo que me dices, hija.	Sí, profe.
7	Se pedía continuar con secuencia de fracciones equivalentes. No se nota alguna lógica en la respuesta de la alumna.	En la pregunta siete se te pedía continuar cuatro secuencias de acuerdo con el ejemplo mostrado. ¿Cómo entendiste que debía realizarse el ejercicio? ¿Qué procedimiento utilizaste?	Que ahí en el de 1/3 iban de… ½ en 1/2… En la de ¾ también… iban de ½ en ½.
		A ver, explícame eso de “1/2 y ½”	Porque en el de 1/3, para seguir la sucesión tenía que poner ½.

		¿A qué te refieres con "tenía que poner ½"?	Porque en el ejemplo iba de ½, 2/4, 3/6 y vi que… o sea, iba de ½ en ½.
		De acuerdo. Y por ejemplo, en esta de 1/3 ¿Por qué pusiste después 2/5?	¿En la… cuál?
		En la de 1/3, ¿Por qué respondiste después 2/5?	Ah no perdón…. Creo que… Creo que ahí me equivoqué.
		¿Por qué piensas que te equivocaste?	¿Porque en las demás iba de un medio?
		De acuerdo.	
8	Ubicar en línea recta no numérica las fracciones ¼, 2/3, 3/5 y 7/8.	Mira, aquí se te pedía representar en la línea recta cada una de estas fracciones: ¼, 2/3, 3/5 y 7/8. Me gustaría me dijeras porque las representaste como las representaste.	Las líneas más grandes representaban dónde acababan. En ¼ puse tres líneas y ya ahí ubiqué la fracción donde la ponía. (La alumna dividió la recta en cuatro partes para en cada una de ellas, dibujar una línea recta y ahí ubicar a cada una de las fracciones solicitadas).
		Eso quiere decir que las líneas grandes indican donde comienza y termina cada fracción.	Sí, profe.
		¿No pensaste en representar todas las fracciones en la misma línea recta?	No… (la alumna ríe)
		¿Se te hizo más fácil hacerlo así?	(ríe) Creo que sí.
		Muy bien, Danna.	

9	Se pide ordenar de manera ascendente una lista de fracciones. No se alcanza a notar qué lógica utilizó la alumna para responder.	Mira, Danna. En esta pregunta número nueve se te pedía ordenar de menor a mayor las siguientes fracciones. ¿Sí entendiste el ejercicio?	Sí, Profe.
		Muy bien. ¿Podrías decirme cómo las ordenaste? ¿Cómo las entendiste?	Porque ¾ es una fracción muy chica y pues sigue 8/9, porque cuando… me imaginé cómo iba a ser la representación en dibujito. Y vi que era más chica.
		De acuerdo, hija. Aquí entonces, de acuerdo con lo que hiciste, ¿2/9 es mayor que 5/2?	Eh… sí.
		¿Cómo explicas eso? Dices que en tu cabeza te imaginabas un dibujo…	Porque hice el dibujo.
		¿Lo hiciste en otra hoja?	Aja.
		Muy bien, Danna.	
10	Sumas y restas de fracciones. En términos generales la alumna respondió bien.	En esta pregunta número 10 se te pedía hacer sumas y restas de fracciones. En el inciso “e” no terminaste de responder, ¿Te acuerdas por qué?	(ríe) se me había olvidado responder el número.
		¿Me podrías decir cómo se hace una suma y resta de fracciones?	Una suma se hace multiplicando el numerador y el denominador de la otra fracción. Por ejemplo (en 4/3 más 3/5) cuatro por cinco serían veinte y siete por tres serían veintidós…

			veintiuno, veintiuno, perdón.
		Gracias.	
11	Multiplicaciones y divisiones de fracciones.	¿Y en las multiplicaciones y divisiones de fracciones?	En las multiplicaciones…
		¿Sí te acuerdas cómo se hacen?	Sí, sí me acuerdo cómo se hacen.
		¿Cómo se hacen?	La multiplicación se hace… ah, no. Teníamos que multiplicar el mismo numerador por el mismo numerador… de la fracción; y el mismo denominador.
		¿Multiplicador por multiplicador, denominador por denominador?	Sí… Ándele… así.
		¿Y en la división, Danna?	¿En la división? Tenía que multiplicar el numerador por el denominador de la otra fracción… el resultado… el resultado lo tenía… Por ejemplo, si tengo 5/3 y 2/7, tengo que multiplicar el cinco por el siete, me da treinta y cinco y; tengo que multiplicar el tres por el do y serían seis. Entonces, me salen 35/6 y lo tengo que… lo tengo que… En ese resultado, si es una fracción mixta, lo tengo que…
		Se te fue la palabra, Danna.	(Ríe) Sí.
		¿Pero sí entiendes lo que tienes que hacer?	Sí.

		¿Lo tienes que… simplificar?	(Ríe) Ándele, sí, eso.
		Muy bien, Danna.	
12	Se sitúa un problema en el que se presentaba, mediante un dibujo, una situación en donde dos jarras habían sido llenadas con jugo de naranja y agua. La primera jarra se llenó con tres vasos de jugo y uno de agua; la segunda jarra se llenó con seis vasos de jugo y dos de agua. La pregunta era qué jarra tenía un sabor más fuerte a naranja. La alumna respondió bien, señalando que ambas jarras tenían el miso sabor.	Aquí estaba expuesto un problema en el que tenías que señalar qué jarra tenía un sabor más fuerte a naranja. ´Me podrías decir porque dijiste que ambas jarras tenían el mismo sabor?	Porque… en la jarra uno… ¿Tenía dos vasos de agua, verdad?
		No… tenías solo uno. A lo mejor no alcanzas a ver. En la primer jarra tenías tres vasos de naranja y un vaso de agua; en la segunda jarra tenías seis vasos de naranja y uno dos de agua.	Porque en las dos mezclas tenías más vasos de naranja que de agua.
		¿Más vasos de naranja que agua simple?	Sí.
		¿Por eso tú piensas que tienen el mismo sabor?	(Solo me ve)
		¿Utilizaste algún método matemático para responder a esta pregunta?	Lo hice en dibujo.
		¿Un dibujo?	En la jarra "A" (la primera) puse un cuadro con cuatro espacios… ahí hice… hice ¾.

		¿Y para la jarra "b"?	En la jara "B"… hice un círculo con ocho espacios… y seis vasos de naranja… y eso fue a 6/8.
		¿Entonces las expresaste de manera fraccionaria?	Sí.
13	se cuestiona sobre la idea de partición. Un ejemplo en el que había que dividir tres pizzas entre siete niñas y una pizza entre tres niños y responder a qué grupo le tocó más pizza. La alumna responde bien, pero escribe su justificación que no se alcanza a leer por cómo mandó la evidencia.	En esta pregunta se te pide señalar a quién le tocó más pizza, si a las niñas o a los niños. Tú dices que a las niñas, aunque la hoja que me mandaste no se ve bien. ¿Me Podrías decir por qué dijiste que a las niñas les tocó más pizza?	Porque vie el dibujo de las pizzas y en cuántas partes estaban partidas… No me acuerdo en cuántas partes estaban partidas. Entonces vi cuántas niñas había y dividi en partes iguales la pizza para las niñas. Y con los niños hice lo mismo. Entonces vi que le tocaba más a las niñas.
		De hecho, las pizzas no estaban divididas; la división la hiciste tú.	(Rie) ah, sí es cierto.
		Pero, dime cómo hiciste esa división.	¿Esa división?
		Esa repartición, perdón. Por ejemplo, aquí en las pizzas de las niñas veo que hiciste unas líneas, ¿Qué significaban las líneas?	Signíficaba… significaba cuántas partes había en la pizza.
		¿Y cuántas partes había, perdón?	No recuerdo cuántas partes había… Creo que habían seis en cada pizza.
		De acuerdo. Entonces, perdón. ¿Por qué respondiste que a las niñas?	La pizza está dividida entre seis; entonces a las niñas les toca de tres pizzas. La pizza de los niños está dividida entre seis también

			y les toca de dos pizzas a los niños.
		Muy bien, Danna.	
14	Idea de escala donde se pide calcular los metros reales de dos puntos en un mapa justo en función de la escala que se presenta. Se tenía que hacer un trabajo de regla de tres. La alumna no respondió.	¿Me podrías decir por qué no respondiste?	Mande.
		¿Te acuerdas de la pregunta catorce’	No.
		Ok. En la pregunta catorce tenías que hacer… Presta atención a lo que te voy a leer, ¿vale? (Leo textualmente el problema). ¿Por qué no respondiste?	Esa se me olvidó responderla, porque… pasé para responder otra pregunta.
		¿Podrías darme la respuesta ahorita?	No.
15	Idea de Porcentaje. Se pedía calcular la cantidad porcentual de tres precios de un producto similar. Este porcentaje equivalía a un descuento. En función de ese porcentaje, decidir qué producto comprar con la consigna de gastar lo menos posible.	En la pregunta quince se te pedía elegir qué balón comprar de acuerdo al precio y al descuento que se hacía, entendiendo que la idea era ahorrar lo más posible. ¿Por qué elegiste el balón “¿Puma”, Danna?	Porque… el balón estaba en $750 y el descuento era del 15%. Entonces yo hice… yo vi cuánto era el quince por ciento. Y de ahí vi cuál era el balón más económico. También chequé el balón “Nike” y el balón “Adidas”.

		Muy bien. Pero dime, por ejemplo, ¿Cómo checaste el precio final del balón Nike?	(La alumna coge lápiz y cuaderno y demora haciendo operaciones) Esa parte ya se me olvidó.
		¿Ya se te olvidó?	Estoy recordando cómo lo hice.
		¿Tenías otra hoja a parte para ir desarrollando los problemas?	(Ríe) la estoy buscando.
			Ya no la tengo, profe.
		No te preocupes.	
17	Convertir de decimal a fraccionario. La alumna responde perfectamente. Las fracciones las expresa en decimos, centésimos y milésimos.	Mira, en esta pregunta se te pedía convertir de decimal… se te presentaban seis número decimales y los tenías que convertir a fraccionarios. ¿Me podrías decir qué hiciste para resolverlo?	Ok. En la pregunta “a” son “.25”, entonces le puse veinticinco… le puse veinticinco… le puse veinticinco…
		¿Centésimos?	Sí.
		A ver, explícame, por ejemplo, cómo resolviste la “e” (.05)	Ahí le puse 5/100 porque hay dos números. Y si hay dos números son centésimos, si hay tres números son milésimos.
		Ah, ok. A propósito de eso, en esta de “.125” ¿cómo la expresaste?	125/1000
		Explícame, por favor, eso de que lo contestas en función de cuántos números tiene. En esta, por ejemplo, de “.4”…	Como solo tiene un número, es de decimos. Entonces es 4/10

		Ah, ok. Cuando es un número es de decimos, ¿Cuándo es de dos’	Centésimos.
		¿Y de tres?	Ahí son Milésimos.
		Ok, ahora vamos a ver éste inciso “d”, que es de “.125” y tú respondiste 125/1000. Y es que, algunos de tus compañeros respondieron 1 entero y ¼. ¿Qué piensas de la respuesta de ellos?	Porque ellos lo hicieron en fracción mixta.
		Ah de acuerdo. Y tú lo hiciste, ¿en fracción?	Propia.
		¿Piensas que está bien o mal su respuesta?	Está bien porque ellos simplificaron la respuesta.
		Muy bien, Danna. En este momento dejo de compartir… al mismo tiempo dejo de… (grabar).	