



*Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*  
*Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería.*

---

*Área Académica de Matemáticas y Física*

---

Análisis numérico de las matrices de masa  
de los quarks en un formalismo de texturas  
a través de un algoritmo genético



**DIRECTOR DE TESIS :**

**Dr. Pedro A. Miranda Romagnoli**  
**Dr. Roberto Noriega Papaqui**

Mineral de la Reforma Hgo.  
Diciembre 2022





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería  
School of Engineering and Basic Sciences

Mineral de la Reforma, Hgo., a 24 de noviembre de 2022

Número de control: ICBI-D/1579/2022  
Asunto: Autorización de impresión.

**MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO**  
**DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH**

Con fundamento en lo dispuesto en el Título Tercero, Capítulo I, Artículo 18 Fracción IV; Título Quinto, Capítulo II, Capítulo V Fracción IX del Estatuto General de nuestra Institución, por este medio le comunico que el Jurado asignado a la Pasante de la Licenciatura en Física y Tecnología Avanzada **Aurora Pontón Gallardo Rodríguez**, quien presenta el trabajo de titulación "**Análisis numérico de las matrices de masa de los quarks en un formalismo de textura a través de un algoritmo genético**", después de revisar el trabajo en reunión de Sinodales ha decidido autorizar la impresión del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación, firman de conformidad los integrantes del Jurado:

**Presidente** Dr. Gerardo Hernández Tomé

**Secretario:** Dr. Roberto Noriega Papaqui

**Vocal:** Dr. Pedro Armando Miranda Romagnoli

**Suplente:** Dr. Selim Gómez Ávila

I. A.

Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente  
"Amor, Orden y Progreso"

Dr. Otilio Arturo Acevedo Sandoval  
Director del ICBI



OAAS/YCC

Ciudad del Conocimiento  
Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia  
Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,  
México. C.P. 42184  
Teléfono: 771 71 720 00 ext. 2231 Fax 2109  
direccion\_icbi@uaeh.edu.mx



[www.uaeh.edu.mx](http://www.uaeh.edu.mx)



*Para Megan, Picky y Mag.*



# Agradecimientos

Agradezco a mi familia por ser los principales promotores de mis sueños. A mis padres por siempre desear lo mejor en mi vida e impulsarme a lograr todas mis metas. A mis hermanos gracias por cada una de sus palabras y consejos los cuales me han guiado durante este camino.

A mis amigos por inspirarme a mejorar día con día tanto profesional como personalmente. Gracias por su valentía, por enseñarme a probar nuevas cosas y sobre todo gracias por compartir grandiosos momentos conmigo.

Gracias a las mujeres en la ciencia quienes con mucha dedicación construyen un mundo para todas las que tenemos como anhelo conocer más sobre lo que nos rodea.

Agradezco a mis asesores por la confianza y la paciencia. Gracias por compartirme sus conocimientos, por motivarme y acompañarme en este proceso.

Quiero agradecer a todas las personas que me acompañaron los últimos años, por creer en mí y por ayudarme a levantarme después de cada uno de mis errores, gracias por las oportunidades para empezar de nuevo.



# Resumen

Se realiza un análisis numérico de elementos de las matrices de masa de los quarks, considerando que tienen una estructura de texturas de dos ceros. Los parámetros libres del modelo de texturas utilizado, son acotados al imponer que se reproduzcan los valores experimentales provenientes de la matriz  $V_{CKM}$ , para lo cual se utiliza un criterio de chi cuadrada. A su vez un algoritmo genético es implementado para encontrar, numéricamente, valores de los parámetros que cumplan con el criterio de chi cuadrada. Se analizan los valores numéricos encontrados por el algoritmo.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Sector de Yukawa del Modelo Estándar</b>	<b>11</b>
2.1. Modelo Estándar . . . . .	11
2.2. Sector electrodébil . . . . .	11
2.3. Sector de Yukawa . . . . .	12
2.3.1. Sector de Quarks de Yukawa . . . . .	12
2.4. La matriz de mezcla $V_{CKM}$ . . . . .	14
2.4.1. Valores experimentales . . . . .	15
2.4.2. Parametrización Estándar . . . . .	15
<b>3. Matrices de masa del tipo texturas de 1 cero</b>	<b>17</b>
<b>4. Algoritmo Genético</b>	<b>21</b>
4.1. Población inicial . . . . .	21
4.2. Cruce . . . . .	22
4.3. Mutación . . . . .	22
4.4. Selección . . . . .	23
4.5. Terminación . . . . .	23
4.6. Comportamiento de nuestro algoritmo genético . . . . .	25
<b>5. Resultados</b>	<b>27</b>
5.1. Predicción de los elementos de la matriz $V_{CKM}$ . . . . .	27
5.2. Análisis de $B_u$ y $B_d$ . . . . .	30
5.3. Análisis de $D_u$ y $D_d$ . . . . .	30
5.4. Análisis de $C_u$ y $C_d$ . . . . .	32
<b>6. Conclusiones y perspectivas futuras</b>	<b>33</b>
<b>A. Programa</b>	<b>35</b>
A.1. Vckms.h . . . . .	35
A.2. Vckms.c . . . . .	37
<b>B. Productos</b>	<b>41</b>



# Índice de figuras

1.1. Tabla periódica de partículas elementales. . . . .	8
4.1. Ejemplo de población inicial donde los individuos son Padre 1 y Padre 2. . . . .	22
4.2. Ejemplo de cruce de individuos . . . . .	22
4.3. Ejemplo de mutación aleatoria de individuos. . . . .	23
4.4. Evaluación de las soluciones candidatas para determinar la selección de la nueva generación . . . . .	23
4.5. Nueva generación de individuos conformada por el descendiente 1 mutado de la figura 4.3 y el descendiente 2 de la figura 4.2. . . . .	24
4.6. Diagrama de flujo del algoritmo genético donde $\chi^2$ es la función objetivo. . . . .	24
4.7. Gráfica que muestra el número de iteraciones para converger a la solución deseada. . . . .	25
5.1. Predicciones genéticas para $V_{ud}$ y $V_{cd}$ . . . . .	28
5.2. Predicciones genéticas para $V_{cs}$ y $V_{tb}$ . . . . .	29
5.3. Predicciones genéticas para $V_{ts}$ y $V_{td}$ . . . . .	29
5.4. Aproximación elíptica (b) en contraste a $B_u$ (a) en el plano $A_u - B_u$ . . . . .	30
5.5. Gráfica de $B_u$ (parte de arriba) y $B_d$ (parte inferior). Las subfiguras a) y c) muestran todo el rango de valores teóricos permitidos de $B_u$ y $B_d$ . Las subfiguras b) y d) muestran solo la región que reproduce $V_{CKM}$ encontrados por el algoritmo genético. . . . .	31
5.6. Gráfica de $D_u$ (parte de arriba) y $D_d$ (parte inferior). Las subfiguras a) y c) muestran todo el rango de valores teóricos permitidos de $D_u$ y $D_d$ . Las subfiguras b) y d) muestran solo la región que reproduce $V_{CKM}$ encontrados por el algoritmo genético. . . . .	31
5.7. Gráfica de $C_u$ (parte de arriba) y $C_d$ (parte inferior). Subfiguras a) y c) muestran todo el rango de valores teóricos permitidos de $C_u$ y $C_d$ . Las subfiguras b) y d) muestran solo la región que reproduce $V_{CKM}$ encontrados por el algoritmo genético. . . . .	32
B.1. Poster presentado en el LXIV Congreso Nacional de Física. . . . .	41
B.2. Artículo aceptado en la revista Pădi. . . . .	42
B.3. Póster presentado en el LXV Congreso Nacional de Física. . . . .	43



# Capítulo 1

## Introducción

... al fin y al cabo,  
algo tuvo que surgir en algún momento  
de donde no había nada de nada...  
El jardín del Edén

*Abrió el sobre y sacó una nota igual que la primera. ¿De dónde viene el mundo?, ponía. No tengo la más remota idea, pensó Sofía. Nadie sabe esas cosas, supongo.*  
-El mundo de Sofía.

Fue así como la protagonista de esta historia, Sofía, una niña noruega a pocos días de cumplir 15 años inicia un curso de Filosofía por correspondencia con un profesor desconocido. Preguntas como ¿Quién eres? y ¿De dónde viene el mundo? le ayudan a Sofía a recuperar su capacidad de asombro por este extraño y misterioso mundo en que vivimos.

Bastantes personas alrededor del mundo de diferentes civilizaciones, épocas y lugares han creado formalismos teóricos y algunos de ellos basados en sustentos matemáticos que van encaminadas a resolver las preguntas en cuestión. Los Físicos de partículas se han obstinado en formular modelos matemáticos que den una respuesta a las siguientes preguntas ¿de qué están conformados los objetos que nos rodean? ¿cuáles son los constituyentes fundamentales de la materia?

El modelo aceptado y verificado con una muy alta precisión experimental, que describe a esta rama de la física es el muy famoso y conocido Modelo Estándar (ME) de las partículas fundamentales. El ME es una teoría cuántica de campos fundada en el grupo de simetría  $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ , la cual describe las interacciones fuerte, débil y electromagnética de las partículas elementales. Este modelo presenta a la materia a partir de los sectores bosónico y fermiónico. El sector fermiónico contiene a los quarks y leptones, los cuales se estructuran en tres familias según la masa de cada partícula, por otro lado, se tiene el sector bosónico el cual contiene a los bosones de norma y al bosón de Higgs. En la figura 1.1 se puede observar como está organizado el contenido de materia en el ME.

A partir de esto, es natural preguntarse ¿por qué existen tres y no otro número de familias? o ¿por qué la jerarquía en el espectro de masa de las partículas es tan pronunciado? La comprensión total del peculiar espectro de masas y mezclas de las partículas fermiónicas elementales sigue siendo uno de los problemas actuales de la Física de Partículas conocido como el *problema del sabor*.

En esta área de la ciencia, se utiliza la palabra sabor para denominar a cada tipo de fermión, existiendo por lo tanto 12 tipos diferentes de sabores: el sector de quarks tiene los sabores  $u, c, t, d, s$  y  $b$ ; el sector de leptones los correspondientes sabores  $e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu$  y  $\nu_\tau$ .

En el Modelo Estándar a primer orden (nivel árbol), bosones neutros (como el  $Z$  y  $H$ ) se acoplan a un par de quarks y leptones cargados con el mismo sabor mientras que los bosones  $W^\pm$



Figura 1.1: Tabla periódica de partículas elementales.

se acoplan a un par fermiónico de diferente sabor. La intensidad del cambio de sabor se cuantifica por los elementos de una matriz conocida como: *la matriz de Cabibo-Kobayasi-Maskawa* ( $V_{CKM}$ ) llamados los ángulos de mezcla. La matriz  $V_{CKM}$  está estrechamente relacionada con las matrices de masa las cuales definen a las masas de los quarks, así en este contexto el sabor y la generación de masas son dos conceptos que se encuentran fuertemente entrelazados y constituyen una parte importante de la investigación actual en la física de partículas, sus inicios datan desde los primeros años de la década de los setentas, poco después del establecimiento del ME.

Cabe mencionar que dentro del ME se encuentran 19 parámetros libres (considerando neutrinos sin masa), los cuales no son predichos por la teoría, sin embargo sus valores numéricos se conocen experimentalmente. Los 19 parámetros libres se enlistan a continuación: 6 masas de quarks, 3 masas de leptones, 3 ángulos de mezcla CKM, 1 fase de violación CP, 3 acoplamientos de norma, 1 ángulo de vacío QCD, el valor de expectación del vacío del Higgs y la masa del Higgs. Donde los primeros 13 están relacionados con la estructura de las matrices de Yukawa, es decir que más de la mitad de los parámetros libres están relacionados con el problema del sabor.

Por otro lado, el descubrimiento del tan esperado Bosón de Higgs en el LHC implica que las interacciones de Yukawa existen y deben ser responsables de la generación de masas de quarks dentro del ME. Sin embargo, la estructura de las matrices de masa de los quarks, la cual gobierna el patrón de mezcla de sabor continúa desconocido en la teoría electrodébil del ME. Una teoría fundamental debería ser capaz de determinar y predecir el valor experimental de los parámetros físicos del sabor (seis masas de quarks y una fase que viola CP) [1]. Muchas aproximaciones han sido desarrolladas en diferentes contextos. Una iniciativa fenomenológica iniciada por Harald Fritzsch fue buscar estructuras simples de las matrices de masa que puedan predecir de manera autoconsistente la jerarquía de masas, los ángulos de mezcla y la fase que viola CP, naciendo así el formalismo de texturas.

Fritzsch ([2]) consideró una matriz de masa del tipo texturas con 6 ceros<sup>1</sup> y encontró la correcta jerarquía entre las masa de los quarks y algunos elementos de la  $V_{CKM}$  de manera analítica. Sin

<sup>1</sup>matrices con ceros en las entradas 11, 22, 13 y 31

embargo mediciones experimentales posteriores de la  $V_{CKM}$  excluyeron esta textura. El propio Fritzsche ([3]) propuso a las texturas con 4 ceros<sup>2</sup> como la siguiente alternativa y además de seguir encontrando la jerarquía adecuada para las masas, obtuvo expresiones analíticas para todos los elementos de la matriz  $V_{CKM}$ , los cuales estaban en términos de las masas de los quarks y cuatro parámetros libres del modelo. Estas texturas, se han utilizado en Modelos con Dos Dobletes de Higgs y se han calculado sus implicaciones en diferentes procesos con cambio de sabor en el sector leptónico ([4]) y de quarks ([5]).

Este trabajo va mas allá, se estudia numéricamente la viabilidad de trabajar con matrices de masa de 2 ceros<sup>3</sup> así como relaciones existentes entre los elementos de la misma matriz de masa. El presente documento se encuentra organizado con la siguiente estructura, en el capítulo 2 se presenta el sector de Yukawa del ME. En el capítulo 3 se analizan las texturas con 2 ceros y se obtienen analíticamente los elementos de la matriz  $V_{CKM}$  predicha por el modelo en términos de los parámetros libres del mismo. En el capítulo 4 se describe brevemente el algoritmo genético implementado para la búsqueda del rango de valores permitidos en los parámetros del modelo de dos texturas. En el capítulo 5 se presentan los resultados. Finalmente, el capítulo 6 se dedica a las conclusiones.

---

<sup>2</sup>matrices con ceros en las entradas 11, 13 y 31

<sup>3</sup>matrices con ceros en las entradas 13 y 31



## Capítulo 2

# Sector de Yukawa del Modelo Estándar

### 2.1. Modelo Estándar

El modelo teórico que unifica tres de las cuatro interacciones fundamentales, electrodébil y fuerte es conocido como Modelo Estándar. Este modelo de la física de partículas elementales es una teoría de Norma basada en el grupo de simetría

$$SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1), \quad (2.1)$$

donde las interacciones fuertes están descritas por la simetría  $SU(3)$ , mientras que la simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  describe las interacciones electrodébiles.

En el ME las partículas conocidas como fermiones o partículas de materia se encuentran organizadas en dos sectores; el sector de los quarks y el de los leptones. Cada uno de ellos se subdividen en otros dos sectores, el sector up y down para los quarks, y el sector de leptones cargados y neutrinos para los leptones. Además, cada sector se estructura en tres familias, donde las últimas dos parecen ser una copia de la primera con la diferencia de que su masa va aumentando.

Por otro lado, las partículas fermiónicas interactúan mediante el intercambio de bosones cargados, también conocidos como corrientes cargadas. Cuando se acopla un bosón neutro con fermiones se les conoce como corrientes neutras. La interacción débil nos permite distinguir entre los estados de helicidad de las partículas, los estados de helicidad izquierda son agrupados en Dobletes bajo el grupo  $SU(2)_L$ , mientras que los estados de helicidad derecha son dados como Singletes. Para describir la física de partículas del ME se construye un lagrangiano, en el cual se describen las interacciones fuertes y electrodébiles.

En este capítulo ahondaremos únicamente en el sector electrodébil.

### 2.2. Sector electrodébil

Las interacciones electrodébiles vienen representadas por el grupo de Norma  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . El lagrangiano del sector electrodébil  $\mathcal{L}_{SU(2) \times U(1)}$ , está compuesto de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_{SU(2) \times U(1)} = \mathcal{L}_{norma} + \mathcal{L}_{\Phi} + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{Yukawa} \quad (2.2)$$

donde  $\mathcal{L}_{norma}$  describe la cinemática de los campos de norma,  $\mathcal{L}_{\Phi}$  describe el sector escalar,  $\mathcal{L}_F$  describe el sector de fermiones y  $\mathcal{L}_{Yukawa}$  describe las interacciones de Yukawa con el campo escalar, siendo aquí donde se describen las masas de los fermiones ([6, 7]), el cual se analizará con detalle.

## 2.3. Sector de Yukawa

Este sector está descrito por el siguiente lagrangiano:

$$-\mathcal{L}_{Yukawa} = \sum_{m,n=1}^3 \left( Y_{mn}^u \bar{Q}'_{Lm} \bar{\Phi}_n u'_{Rn} + Y_{mn}^d \bar{Q}'_{Lm} \Phi_n d'_{Rn} + Y_{mn}^l \bar{L}'_{Lm} \Phi_n l'_{Rn} \right) + h.c. \quad (2.3)$$

donde  $Y^{u,d}$  son matrices de dimensión  $3 \times 3$  las cuales describen los acoplamientos de Yukawa entre el doblete de Higgs y los sabores  $m$  y  $n$  de quarks y leptones.  $\Phi = (\phi^\pm, \phi^0)^T$  es un doblete de SU(2), mientras que  $P\bar{h}i$  está definido por  $P\bar{h}i = i\sigma_2 \Phi^*$ . Puede observarse que este lagrangiano se puede dividir en dos partes,

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = \mathcal{L}_Y^{leptones} + \mathcal{L}_Y^{quarks} \quad (2.4)$$

donde  $\mathcal{L}_Y^{leptones}$  y  $\mathcal{L}_Y^{quarks}$  representan los sectores de leptones y quarks respectivamente. En el presente trabajo, se muestra únicamente un análisis del sector de quarks.

### 2.3.1. Sector de Quarks de Yukawa

De la ecuación 2.3 podemos ver que el sector de quarks del lagrangiano de Yukawa tiene la siguiente forma:

$$-\mathcal{L}_Y^q = \bar{Q}'_{Lm} (Y_{mn}^d \Phi d'_{Rn} + Y_{mn}^u \bar{\Phi} u'_{Rn}) + h.c. \quad (2.5)$$

donde  $Q'_L = \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix}$ , podemos reescribir el lagrangiano como

$$-\mathcal{L}_Y^q = \sum_{m,n=1}^3 \left( Y_{mn}^u \bar{u}'_{Lm} \phi^{0*} u'_{Rn} + Y_{mn}^d \bar{u}'_{Lm} \phi^- u'_{Rn} + Y_{mn}^d \bar{u}'_{Lm} \phi^+ d'_{Rn} + Y_{mn}^d \bar{d}'_{Lm} \phi^0 d'_{Rn} \right) + h.c. \quad (2.6)$$

Consideraremos únicamente el término del campo escalar neutro de Higgs, ya que es necesario para la generación de masas de las partículas, por lo que:

$$\mathcal{L}_Y^{0q} = \sum_{m,n=1}^3 \left( Y_{mn}^u \bar{u}'_{Lm} \phi^{0*} u'_{Rn} + Y_{mn}^d \bar{d}'_{Lm} \phi^0 d'_{Rn} \right) + h.c. \quad (2.7)$$

Expandiendo el campo escalar neutro alrededor de su estado de mínima energía:

$$\phi^0 = \frac{v}{\sqrt{2}} + H, \quad (2.8)$$

y sustituyendo en 2.7, se tiene

$$\mathcal{L}_Y^{0q} = \sum_{m,n=1}^3 \left( \frac{v^*}{\sqrt{2}} Y_{mn}^u \bar{u}'_{Lm} u'_{Rn} + Y_{mn}^u \bar{u}'_{Lm} H^* u'_{Rn} + \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{mn}^d \bar{d}'_{Lm} d'_{Rn} + Y_{mn}^d \bar{d}'_{Lm} H d'_{Rn} \right) + h.c. \quad (2.9)$$

Incorporando el término correspondiente del hermítico conjugado, el lagrangiano  $\mathcal{L}_Y^{0q}$  finalmente es:

$$\mathcal{L}_Y^{0q} = \sum_{m,n=1}^3 \left( \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{mn}^u \bar{u}'_m u'_n + Y_{mn}^u \bar{u}'_m H^* u'_n + \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{mn}^d \bar{d}'_m d'_n + Y_{mn}^d \bar{d}'_m H d'_n \right) + h.c. \quad (2.10)$$

Notemos que se pueden reconocer dos partes en el lagrangiano:

$$\mathcal{L}_Y^{0q} = \mathcal{L}_m^{0q} + \mathcal{L}_I^{0q} \quad (2.11)$$

donde  $\mathcal{L}_m^{0q}$  y  $\mathcal{L}_I^{0q}$  corresponden al lagrangiano de masa y al lagrangiano de interacción, respectivamente. Ahora, estudiemos cada uno de estos lagrangianos.

- 1. Lagrangiano de Masa. Este lagrangiano define la masa de los quarks y viene dado como,

$$\mathcal{L}_m^{0q} = \sum_{m,n=1}^3 \left( \bar{u}'_{Lm} M_{mn}^u u'_{Rn} + \bar{d}'_{Lm} M_{mn}^d d'_{Rn} \right) \quad (2.12)$$

donde se definen las matrices,

$$M_{mn}^{u,d} = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{mn}^{u,d}. \quad (2.13)$$

Notemos entonces, que en el ME la matriz de masa  $M$  y la matriz de Yukawa  $Y$  están alineadas.

Observemos que actualmente estamos trabajando en una base de sabor, sin embargo nos interesa trabajar en una base de masa, para esto es necesario diagonalizar a la matriz  $M_{mn}$ . Suponiendo, sin perdida de la generalidad, que  $Y_{mn}^{u,d}$  es hermítica, entonces por la ec. 2.13,  $M_{mn}$  también lo es.

El álgebra lineal, establece que para cualquier matriz hermítica  $M$ , siempre es posible encontrar una matriz unitaria  $V$ , tal que  $VMV^\dagger$  es diagonal y real ([8]), esto es:

$$M_{\text{dia}} = VMV^\dagger, \quad (2.14)$$

donde  $V^\dagger V = \mathbb{I}$ .

Reescribiendo el lagrangiano de masas:

$$\mathcal{L}_m^{0q} = \sum_{m,n=1}^3 \left[ \left( \bar{u}'_{Lm} V_u^\dagger \right) \left( V_u M_{mn}^u V_u^\dagger \right) \left( V_u u'_{Rn} \right) + \left( \bar{d}'_{Lm} V_d^\dagger \right) \left( V_d M_{mn}^d V_d^\dagger \right) \left( V_d d'_{Rn} \right) \right] \quad (2.15)$$

Para hallar los eigenvalores de  $M^{u,d}$ , los cuales se toman como las masas de los quarks, y sus correspondientes eigenvectores que representan los campos físicos que las describen, se proponen las siguientes transformaciones unitarias, las cuales diagonalizan a las matrices de masa:

$$u = V_u u', \quad d = V_d d'. \quad (2.16)$$

Por lo que, los lagrangianos de masa para quarks tipo  $u$  y  $d$ , se escriben respectivamente como:

$$\mathcal{L}_m^u = \bar{u}' M^u u', \quad (2.17)$$

$$\mathcal{L}_m^d = \bar{d}' M^d d'. \quad (2.18)$$

Es así que al tomar la matriz como hermítica, se asegura que los eigenvalores sean reales y diagonales, es decir:

$$V_{u,d} M^{u,d} V_{u,d}^\dagger = M_{\text{dia}}^{u,d} = \begin{pmatrix} m_{u,d} & 0 & 0 \\ 0 & m_{c,s} & 0 \\ 0 & 0 & m_{t,b} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Se definen los nuevos campos físicos  $(\bar{u}, \bar{d})$  y  $(u, d)$  como:

$$\bar{u} = (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}), \quad u = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\bar{d} = (\bar{d}, \bar{s}, \bar{b}), \quad d = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix},$$

por lo que finalmente podemos escribir a los lagrangianos de masa como sigue:

$$\mathcal{L}_m^u = \bar{u}m_u u + \bar{c}m_c c + \bar{t}m_t t, \quad (2.21)$$

$$\mathcal{L}_m^d = \bar{d}m_d d + \bar{s}m_s s + \bar{b}m_b b, \quad (2.22)$$

donde las antipartículas de cada quark se denotan por  $\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}, \bar{d}, \bar{s}, \bar{b}$  respectivamente.

De lo anterior se desprende al lagrangiano de masas dado por:

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\bar{d}_L \bar{M}^d d_R - \bar{u}_L \bar{M}^u u_R + \text{h.c} \quad (2.23)$$

La matriz de mezcla  $V_{CKM}$  se construye a partir de las matrices de rotación  $V_q$  a través de la siguiente expresión:

$$V_{CKM} = V_u^\dagger V_d. \quad (2.24)$$

Dado que experimentalmente sólo las masas de los quarks y los elementos de la matriz  $V_{CKM}$  se pueden medir, las matrices  $V_u$  y  $V_d$  no son observables físicos además de que no son predichas por la teoría y por consecuencia la matriz  $V_{CKM}$  tampoco lo es.

- 2. Lagrangiano de interacción. Los acoplamientos del bosón de Higgs con los distintos sabores de quarks, vienen descritos por el lagrangiano de interacción, el cual se define como:

$$\mathcal{L}_Y^{0q} = \sum_{m,n=1}^3 \left( Y_{mn}^u \bar{u}'_m H^* u'_n + Y_{mn}^d \bar{d}'_m H d'_n \right) + \text{h.c}. \quad (2.25)$$

Escribiendo los lagrangianos en términos de los campos físicos de los quarks dados en la ec. 2.20, se tiene:

$$\mathcal{L}_1^u = \frac{\sqrt{2}}{v} \bar{u} M_u u H \quad (2.26)$$

$$\mathcal{L}_1^d = \frac{\sqrt{2}}{v} \bar{d} M_d d H \quad (2.27)$$

los cuales, finalmente se convierten en:

$$\mathcal{L}_1^u = \frac{\sqrt{2}}{v} \bar{u} m_u u H + \frac{\sqrt{2}}{v} \bar{c} m_c c H + \frac{\sqrt{2}}{v} \bar{t} m_t t H \quad (2.28)$$

$$\mathcal{L}_1^d = \frac{\sqrt{2}}{v} \bar{d} m_d d H + \frac{\sqrt{2}}{v} \bar{s} m_s s H + \frac{\sqrt{2}}{v} \bar{b} m_b b H. \quad (2.29)$$

De este lagrangiano podemos observar que el acoplamiento del Higgs a los diferentes tipos de quarks es proporcional a sus masas. El lagrangiano de interacción conserva el sabor, esto es, no existen acoplamientos de un par quark-antiquark de diferente sabor con el escalar de Higgs.

## 2.4. La matriz de mezcla $V_{CKM}$

En 1963 Nicola Cabibbo formuló la hipótesis de la existencia de al menos tres familias de quarks, diez años después Makoto Kobayashi y Toshihide Maskawa "descubrieron el origen del rompimiento de la simetría" prediciendo la existencia de 6 sabores de quarks, en el año 2008 Kobayashi y Maskawa compartieron una mitad del premio nobel de física por este descubrimiento. Como resultado de esto se crea la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, la cual es una matriz unitaria de  $3 \times 3$  y contiene información del cambio de sabor en los decaimientos débiles. Técnicamente, especifica el

desajuste en los estados cuánticos de los quarks cuando estos se propagan libremente y cuando participan en las interacciones débiles. De forma general la matriz de Cabibo-Kobayashi-Maskawa (Ec. 2.24) tiene la siguiente estructura:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Para seguir adelante, es necesario realizar un análisis detallado, empecemos por analizar los valores experimentales de los elementos de la  $V_{CKM}$  para posteriormente detallar la parametrización de esta matriz usada en esta tesis.

### 2.4.1. Valores experimentales

Experimentalmente se conocen el valor numérico de sus nueve elementos, los cuales tienen los siguientes valores centrales y sus correspondientes errores [9]:

$$\begin{aligned} |V_{ud}| &= 0,97401 \pm 0,00011, & |V_{us}| &= 0,22650 \pm 0,00048, & |V_{ub}| &= 0,00361^{+0,00011}_{-0,00009}, \\ |V_{cd}| &= 0,22636 \pm 0,00048, & |V_{cs}| &= 0,97320 \pm 0,00011, & |V_{cb}| &= 0,04053^{+0,00083}_{-0,00061}, \\ |V_{td}| &= 0,00854^{+0,00023}_{-0,00016}, & |V_{ts}| &= 0,03978^{+0,00082}_{-0,00060}, & |V_{tb}| &= 0,999172^{+0,000024}_{-0,000035}. \end{aligned}$$

Mientras que, para las masas de los quarks, se tiene

$$\begin{aligned} m_u &= 1,23 \pm 0,21 \text{ MeV}, & m_c &= 0,620 \pm 0,017 \text{ GeV}, & m_t &= 168,26 \pm 0,75 \text{ GeV}, \\ m_d &= 2,67 \pm 0,19 \text{ MeV}, & m_s &= 53,16 \pm 4,61 \text{ MeV}, & m_b &= 2,839 \pm 0,026 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Se puede notar que las masas guardan las relaciones  $|m_d| < |m_s| < |m_b|$  y  $|m_u| < |m_c| < |m_t|$ , esto se conoce como jerarquía de masas, es decir, los valores de la masa aumentan para cada familia.

### 2.4.2. Parametrización Estándar

Teóricamente la matriz  $V_{CKM}$  es una matriz unitaria y por lo tanto se puede parametrizar en términos de 3 ángulos y una fase. La parametrización más utilizada y la cual utilizaremos en este trabajo es la *parametrización estándar* definida por los ángulos  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{13}$ ,  $\theta_{23}$  y la fase  $\delta_{13}$  a través de la siguiente multiplicación de matrices<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} V_{CKM} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{23} & S_{23} \\ 0 & -S_{23} & C_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{13} & 0 & S_{13} e^{-i\delta_{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_{13} e^{i\delta_{13}} & 0 & C_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{12} & S_{12} & 0 \\ -S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} C_{12}C_{13} & S_{12}C_{13} & S_{13}e^{-i\delta} \\ -S_{12}C_{23} - C_{12}S_{23}S_{13}e^{i\delta} & C_{12}C_{23} - S_{12}S_{23}S_{13}e^{i\delta} & S_{23}C_{13} \\ S_{12}S_{23} - C_{12}C_{23}S_{13}e^{i\delta} & C_{12}S_{23} - S_{12}C_{23}S_{13}e^{i\delta} & C_{23}C_{13} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La conexión entre la teoría y el experimento se da a través de las siguientes expresiones [10]:

$$S_{13} = |V_{ub}|, \quad (2.31)$$

$$S_{12} = \frac{|V_{us}|}{\sqrt{1 - |V_{ub}|^2}}, \quad (2.32)$$

$$S_{23} = \frac{|V_{cb}|}{\sqrt{1 - |V_{ub}|^2}}, \quad (2.33)$$

$$J = C_{12} S_{12} C_{13}^2 S_{13} C_{23} S_{23} S \delta_{13}, \quad (2.34)$$

donde  $J$  es conocido como el invariante Jarlskog.

<sup>1</sup>Hemos utilizado la notación  $\text{Cos } \theta_{ij} = C_{ij}$  y  $\text{Sen } \theta_{ij} = S_{ij}$



## Capítulo 3

# Matrices de masa del tipo texturas de 1 cero

Para un entendimiento más profundo de la mezcla de sabores entre quarks y el fenómeno de violación CP, es deseable estudiar las propiedades de las matrices de masa de los quarks  $M_{u,d}$ , cuyas estructuras son completamente desconocidas en el contexto del Modelo Estándar Electrodebil. Una teoría más fundamental que el Modelo Estándar debe desarrollarse para determinar exclusivamente  $M_u$  y  $M_d$  de tal modo que los parámetros físicos asociados a estas matrices (seis masas de quarks, tres ángulos de mezcla de sabor, y una fase de violación CP) puedan ser calculados.

Una matriz de masa hermítica  $M_q$  se puede escribir de manera general como

$$M_q = \begin{pmatrix} E_q & D_q & F_q \\ D_q^* & C_q & B_q \\ F_q^* & B_q^* & A_q \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

para  $q = u, d$ . La física queda invariante bajo una transformación unitaria  $M_q \rightarrow SM_qS^\dagger$ , donde  $S$  es una matriz unitaria arbitraria.

Tomando  $F_q = 0$ , se obtiene una matriz de masa del tipo texturas de 1 cero, la cual tiene la siguiente estructura:

$$M_q = \begin{pmatrix} E_q & D_q & 0 \\ D_q^* & C_q & B_q \\ 0 & B_q^* & A_q \end{pmatrix}; \quad q = u, d. \quad (3.2)$$

y cuyos eigenvalores  $\lambda_i^q$  definen las masas  $m_i^q$  de los quarks  $|\lambda_i^q| = m_i^q$ .<sup>1</sup>

La condición  $F_u = F_d = 0$ , la cual impone cuatro constricciones a S, pueden ser siempre satisfechas, ya que S generalmente consiste en nueve parámetros (tres ángulos de mezcla y seis fases complejas). Esto implica que pasando de 3.1 a 3.2 la generalidad de la física permanece. La base en la cual las matrices de masa toman forma de la ecuación 3.2 es la base de particular interés del espacio de sabor de quarks. Las cero texturas de  $M_u$  y  $M_d$  en esta base permiten la ausencia de una mezcla directa entre los quarks pesados (t, b) y los quarks ligeros (u, d). Tal característica parece completamente natural desde un punto de vista fenomenológico, pero no implica ninguna relación especial entre los eigenvalores de masa y los parámetros de mezcla de sabor. Nótese que  $M_u$  y  $M_d$  en 3.2 tienen en total doce parámetros no triviales (diez modulos y dos diferencias de fase), de esta manera ninguna predicción puede ser obtenida la matriz de mezcla de sabor.

La matriz de masas  $M_q$  puede factorizar como el producto de una matriz ortogonal  $O_q$  y una matriz de fases  $P_q$  de la forma:

$$M_q = P_q^\dagger \bar{M}_q P_q, \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>En este trabajo se considerará que las todas las  $m_i^q$  son positivas.

donde

$$P_q = \text{diag} \left( 1, e^{i\phi_{D_q}}, e^{i(\phi_{D_q} + \phi_{B_q})} \right), \quad (3.4)$$

es una matrix diagonal que extrae las fases de  $M_q$ , con  $\phi_{D_f} = \text{Arg}(D_f)$  y  $\phi_{B_f} = \text{Arg}(B_f)$  La matriz ortogonal  $\bar{M}_q$  se escribe como:

$$\bar{M}_q = \begin{pmatrix} E_q & |D_q| & 0 \\ |D_q| & C_q & |B_q| \\ 0 & |B_q| & A_q \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$\bar{M}$  puede ser diagonalizada por medio de una transformación ortogonal,  $O^T \bar{M} O = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , donde  $|\lambda_i| (i = 1, 2, 3)$  es la masa de los fermiones. De acuerdo a esto, se tiene:

$$O^T \begin{pmatrix} E_q & |D_q| & 0 \\ |D_q| & C_q & |B_q| \\ 0 & |B_q| & A_q \end{pmatrix} O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Del álgebra lineal sabemos que se tienen tres invariantes, a saber:

$$\text{Traza} \rightarrow E + C + A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad (3.7)$$

$$\text{Determinante} \rightarrow E(CA - |B|^2) - |D|^2 A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad (3.8)$$

$$\text{Ec. característica} \rightarrow (E - \lambda_i)[(C - \lambda_i)(A - \lambda_i) - |B|^2] - |D|^2(A - \lambda_i) = 0. \quad (3.9)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, para expresar  $|B_q|$ ,  $|D_q|$  y  $C_q$  en términos de  $E_F$  y  $A_F$  se tiene:

$$|B_q| = \sqrt{\frac{(A_q - m_1^q)(A_q - m_2^q)(A_q - m_3^q)}{E_q - A_q}}, \quad (3.10)$$

$$|D_q| = \sqrt{\frac{(E_q - m_1^q)(E_q - m_2^q)(E_q - m_3^q)}{A_q - E_q}}, \quad (3.11)$$

$$C_q = -(A_q + E_q - m_1^q - m_2^q - m_3^q). \quad (3.12)$$

Para conocer explícitamente la forma analítica de la matriz de transformación  $O$ , necesitamos calcular los eigenvectores de  $\bar{M}$ , con  $(\bar{M} - \lambda_i I)(\vec{x}) = 0$ , es decir:

$$\begin{pmatrix} E - \lambda_i & |D| & 0 \\ |D| & C - \lambda_i & |B| \\ 0 & |B| & A - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

de donde obtenemos tres ecuaciones

$$(E - \lambda_i)x_i + |D|y_i = 0, \quad (3.14)$$

$$|D|x_i + (C - \lambda_i)y_i + |B|z_i = 0, \quad (3.15)$$

$$|B|y_i + (A - \lambda_i)z_i = 0, \quad (3.16)$$

de las cuales solo dos son linealmente independientes, por lo que se tiene:

$$y_i = -\frac{E - \lambda_i}{|D|}x_i, \quad z_i = \frac{E - \lambda_i}{A - \lambda_i} \frac{|B|}{|D|}x_i. \quad (3.17)$$

Y el vector  $\vec{x}_i$  es de la forma

$$\vec{x}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{E - \lambda_i}{|D|} \\ \frac{E - \lambda_i}{A - \lambda_i} \frac{|B|}{|D|} \end{pmatrix} x_i, \quad (3.18)$$

normalizando:

$$\vec{x}_i^T \cdot \vec{x}_i = 1, \quad (3.19)$$

de donde

$$x_i = \left[ 1 + \frac{(E - \lambda_i)^2}{|D|^2} + \frac{(E - \lambda_i)^2 |B|^2}{(A - \lambda_i)^2 |D|^2} \right]^{-1/2}, \quad (3.20)$$

así, la matriz  $O$  es de la forma:

$$O = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -\frac{E-\lambda_1}{|D|}x_1 & -\frac{E-\lambda_2}{|D|}x_2 & -\frac{E-\lambda_3}{|D|}x_3 \\ \frac{E-\lambda_1}{A-\lambda_1} \frac{|B|}{|D|}x_1 & \frac{E-\lambda_2}{A-\lambda_2} \frac{|B|}{|D|}x_2 & \frac{E-\lambda_3}{A-\lambda_3} \frac{|B|}{|D|}x_3 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Los elementos de la matriz  $O_q$ , que diagonalizan a  $\bar{M}_q$  son:

$$(O_q)_{11} = \left[ 1 + \frac{(E_q - m_1^q)(A_q - E_q)}{(m_2^q - E_q)(m_3^q - E_q)} + \frac{(E_q - m_1^q)(A_q - m_2^q)(m_3^q - A_q)}{(m_2^q - E_q)(m_3^q - E_q)(A - m_1^q)} \right]^{-1/2}, \quad (3.22)$$

$$(O_q)_{22} = \left[ 1 + \frac{(E_q - m_1^q)(m_3^q - E_q)}{(m_2^q - E_q)(A_q - E_q)} + \frac{(A_q - m_1^q)(m_3^q - A_q)}{(A_q - E_q)(A_q - m_2^q)} \right]^{-1/2}, \quad (3.23)$$

$$(O_q)_{33} = \left[ 1 + \frac{(A_q - E_q)(m_3^q - A_q)}{(A_q - m_2^q)(A_q - m_1^q)} + \frac{(E_q - m_1^q)(m_2^q - E_q)(m_3^q - A_q)}{(m_3^q - E_q)(A_q - m_2^q)(A_q - m_1^q)} \right]^{-1/2}, \quad (3.24)$$

$$(O_q)_{2i} = \frac{m_i^q - E_q}{|D_q|} (O_q)_{1i} \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.25)$$

$$(O_q)_{3i} = \frac{|B_q|}{m_i^q - A_q} (O_q)_{2i} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.26)$$

Por lo tanto, los elementos de la matriz  $V_{CKM}$  predichos por el modelo de 2 texturas son:

$$V_{CKM}^{th} = U_L^{u\dagger} U_L^d = O_u^T (P_u P_d^\dagger) O_d, \quad (V_{CKM}^{th})_{i\alpha} = (O_u)_{1i} (O_d)_{1\alpha} + (O_u)_{2i} (O_d)_{2\alpha} e^{i\phi_1^q} + (O_u)_{3i} (O_d)_{3\alpha} e^{i(\phi_1^q + \phi_2^q)}, \quad (3.27)$$

donde las fases están definidas por:  $\phi_1^q = \phi_{Du} - \phi_{Dd}$ ,  $\phi_2^q = \phi_{Bu} - \phi_{Bd}$ .

La ecuación anterior nos proporciona expresiones analíticas de los elementos de la matriz  $V_{CKM}^{th}$  considerando el modelo de 2 texturas, donde se tiene una dependencia explícita de los parámetros  $A_u$ ,  $A_d$ ,  $E_u$ ,  $E_d$ ,  $\phi_1^q$  y  $\phi_2^q$ . Para encontrar el rango permitido de estos parámetros que reproduzcan los valores experimentales de la  $V_{CKM}$  con su margen de error correspondiente se utiliza un criterio de  $\chi^2$ , el cual de manera general se define como:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i^{exp} - x_i^{teo})^2}{\sigma_i^2} \quad (3.28)$$

donde  $x_i^{exp}$  representa el  $i$ -ésimo dato experimental cuyo error asociado es  $\sigma_i$ , mientras que  $x_i^{teo}$  es el  $i$ -ésimo dato teórico y  $N$  el número total de datos experimentales. Por lo que para este trabajo se tiene una  $\chi^2$  establecida por:

$$\chi^2(A_u, A_d, E_u, E_d, \phi_1^q, \phi_2^q) = \frac{(|V_{us}^{th}| - |V_{us}|)^2}{\sigma_{V_{us}}^2} + \frac{(|V_{ub}^{th}| - |V_{ub}|)^2}{\sigma_{V_{ub}}^2} + \frac{(|V_{cb}^{th}| - |V_{cb}|)^2}{\sigma_{V_{cb}}^2} + \frac{(J^{th} - J)^2}{\sigma_J^2}, \quad (3.29)$$

donde el super índice “*th*” denota que el término proviene de la parte analítica y la correspondiente sin índices denota la parte experimental con incertidumbre  $\sigma_{V_{kl}}^2$ . El criterio de  $\chi^2$  es una medida estadística de la diferencia entre los datos experimentales y los datos que se pueden deducir de manera teórica. Se define a  $\chi^2$  reducida como:

$$\chi_{red}^2 = \frac{\chi^2}{N}, \tag{3.30}$$

la cual es usada con el propósito de evaluar el modelo: si este se ajusta a los datos y la  $\chi_{red}^2$  resultante es menor que uno, se considera como un buen ajuste [11]. En lo que sigue se buscará regiones de los parámetros  $A_u$ ,  $A_d$ ,  $E_u$ ,  $E_d$ ,  $\phi_1^q$  y  $\phi_2^q$ , tal que el valor de:

$$\frac{\chi^2(A_u, A_d, E_u, E_d, \phi_1^q, \phi_2^q)}{4} \leq 1, \tag{3.31}$$

así como  $\chi^2 < 0,1$  y  $\chi^2 < 0,01$ .

Para dicha empresa utilizaremos un algoritmo genético.

Actualmente, gran parte de los problemas de investigación se presentan como una cuestión de optimización: se buscan valores numéricos a las variables que describen al sistema que se está estudiando tales que permitan optimizar el comportamiento de dicho sistema. En la física de altas energías es común utilizar el método exhaustivo para encontrar soluciones a distintos problemas del área. Este método consiste en utilizar resultados ya conocidos para encontrar una aproximación del resultado buscado, sin embargo, este método puede ser poco preciso, por lo que en este trabajo utilizaremos un método bioinspirado, el cual nos ayudará a la optimización de la función objetivo  $\chi^2$ .

## Capítulo 4

# Algoritmo Genético

En la década de 1970, bajo el liderazgo de John Henry Holland, nacen los algoritmos genéticos (AG), una de las áreas más prometedoras de la programación evolutiva. Reciben este nombre ya que están inspirados en la evolución de los seres vivos y sus procesos genéticos.

Los AG toman una población inicial (conocida como individuos o fenotipos) haciendola evolucionar a partir de algunos principios de selección natural similares a los que ocurren en la naturaleza. A partir de mutaciones y recombinaciones genéticas, se seleccionan a los individuos más aptos de acuerdo al cumplimiento de ciertos criterios, estos individuos se escogen para repetir el proceso, de lo contrario se descartan. Los fenotipos mejor adaptados se toman como soluciones candidatas para resolver el problema de optimización que se esté tratando, de manera aleatoria se alteran sus propiedades (llamadas cromosomas o genotipos) tras mutaciones o cruces genéticos. La población generada en cada iteración se le dice generación. Cada generación de soluciones es utilizada en cada proceso iterativo hasta satisfacer el criterio de aptitud, el cual viene definido por el valor requerido de la función objetivo [12]. Las soluciones se pueden representar de diversas maneras, en el trabajo presente se ha utilizado una representación binaria de ceros y unos.

Se utilizó un algoritmo genético tradicional, el cual se explica en las siguientes subsecciones. Este algoritmo nos permite encontrar soluciones en varios rangos de valores, en particular nos interesó  $\chi^2 < 1$ ,  $\chi^2 < 0,1$  y  $\chi^2 < 0,01$ .

### 4.1. Población inicial

De manera aleatoria, se genera la población inicial, donde cada individuo está constituido por un conjunto de cromosomas (una cadena de unos y ceros como en la figura 4.1). Es importante la aleatoriedad en la generación de la primera generación para garantizar diversidad dentro de las soluciones candidatas donde se vea representada una buena parte de la población.

Se generan individuos iniciales al azar, cada uno de ellos compuesto por 6 parámetros; a continuación se califica el desempeño de cada cromosoma de acuerdo a la respuesta de la función objetivo, en este caso el valor de  $\chi^2$ . Técnicamente, cada parámetro es representado en 28 bits, por lo que cada parámetro se puede dividir en  $2^{28}=268,435,456$  partes, con lo que se obtiene una precisión satisfactoria para nuestros objetivos a alcanzar.

Se aplica la función objetivo a cada uno de los cromosomas de la población, la cual determina que tan óptima es la solución que se está evaluando. A continuación, por medio de operadores genéticos (mutaciones y cruces cromosómicos), se genera la población de la segunda generación.



Figura 4.1: Ejemplo de población inicial donde los individuos son Padre 1 y Padre 2.

## 4.2. Cruce

Durante el cruzamiento, se combina la información de dos cromosomas padres para generar descendientes. Este proceso intenta imitar la reproducción sexual y se considera como el principal operador genético. Se seleccionan dos individuos para intercambiar segmentos de su código genético, es decir, se hace una mezcla entre los cromosomas para generar una nueva generación de individuos, los cuales tendrán información genética de sus padres. Se obtienen nuevas soluciones intercambiando información de los individuos por medio de cruces, tal como se muestra en la figura 4.2. De la población inicial de 56 individuos o cromosomas se elige al azar un par, para generar dos nuevas soluciones intercambiando su información, es decir, intercambiando cierto número de bits de los que están compuestos. Este proceso se repite para cada par de individuos, generando una población de 56 nuevos individuos.

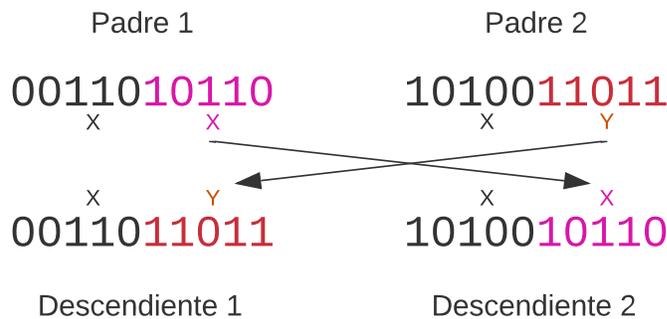


Figura 4.2: Ejemplo de cruce de individuos

## 4.3. Mutación

Se modifica aleatoriamente una parte del código genético de los fenotipos, es decir, se alteran ciertos puntos de los cromosomas generando pequeños cambios en la codificación del individuo (figura 4.3) análogamente a la mutación en los seres vivos donde se cambia un gen por otro.

La mutación de los cromosomas nos permite aumentar la diversidad de las soluciones, dado que el cruce y selección por sí mismos nos puede llevar a favorecer alguna solución. En nuestro caso la diversidad de las soluciones es de suma importancia, toda vez que deseamos conocer los rangos permitidos para un espacio de parámetros que cumple con el criterio de  $\chi^2$ .

Después de aplicar los operadores genéticos, se pasa a la parte de selección, donde se escogen a los individuos más aptos, los cuales conformarán la siguiente generación de fenotipos.

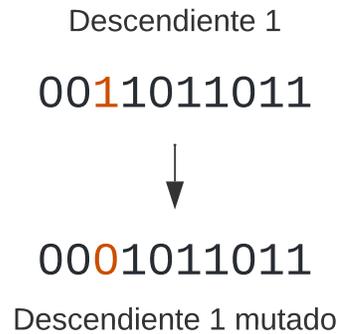


Figura 4.3: Ejemplo de mutación aleatoria de individuos.

#### 4.4. Selección

Para elegir a los individuos mejor adaptados de la generación, se utiliza el proceso de selección, en donde se aplica la función objetivo a cada uno de los cromosomas para conocer el nivel de satisfacción de cada una de las soluciones que se han obtenido (figura 4.4).

Los 56 nuevos individuos, generados mediante el cruce, son evaluados y se unen a los pasados para formar una población de 112 individuos, los cuales se ordenan para elegir a los 56 mejores, de acuerdo a las correspondientes soluciones obtenidas, convirtiéndose así en la nueva población.

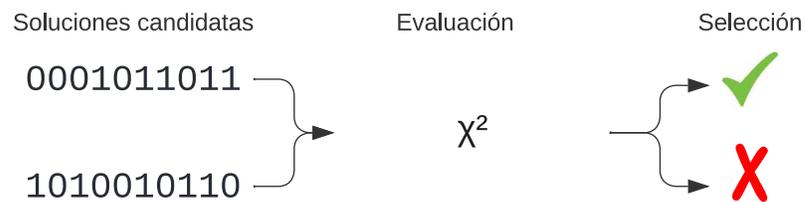


Figura 4.4: Evaluación de las soluciones candidatas para determinar la selección de la nueva generación

#### 4.5. Terminación

El algoritmo termina su ejecución cuando se ha alcanzado el objetivo deseado, es decir, el valor de  $\chi^2$  se encuentra por debajo de un cierto valor máximo o bien se ha alcanzado el número máximo de generaciones (figura 4.5), esto último previene el caer en un ciclo interminable. Los números máximos utilizados varían de la siguiente manera: MaxGen=1100000 para  $\chi^2 < 1$ ; MaxGen=220000 para los dos casos restantes,  $\chi^2 < 0,1$  y  $\chi^2 < 0,01$ .

Nueva generación  
0001011011      1010010110

Figura 4.5: Nueva generación de individuos conformada por el descendiente 1 mutado de la figura 4.3 y el descendiente 2 de la figura 4.2.

En la figura 4.6 se muestra el diagrama de flujo del algoritmo genético utilizado en el presente trabajo.

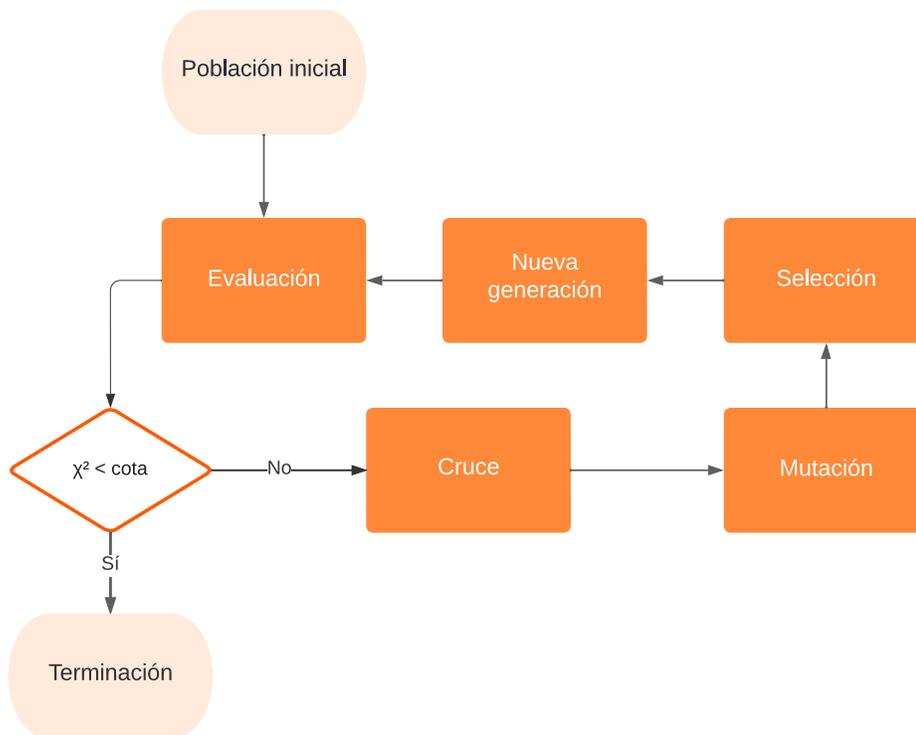


Figura 4.6: Diagrama de flujo del algoritmo genético donde  $\chi^2$  es la función objetivo.

Del diagrama se puede observar el funcionamiento del algoritmo; al tener una población inicial la cual se evalúa según el criterio de  $\chi^2$ , se decide si los individuos satisfacen lo requerido para terminar con el proceso, de lo contrario se toman los operadores genéticos (cruce y mutación) haciendolos actuar de tal manera que diversifiquen las posibles soluciones a nuestro problema. Es entonces cuando se seleccionan los mejores individuos creando una nueva generación la cual será evaluada bajo el criterio de  $\chi^2$ , donde se determina si el ciclo se repite o concluye.

## 4.6. Comportamiento de nuestro algoritmo genético

Es importante analizar cómo se comporta el algoritmo genético utilizado en este trabajo. Para esto se ha medido el rendimiento del algoritmo a través de un análisis en la convergencia de la solución deseada. A continuación se muestra una gráfica la cual nos indica el valor obtenido para  $\chi^2$  según el número de iteraciones que emplea el algoritmo.

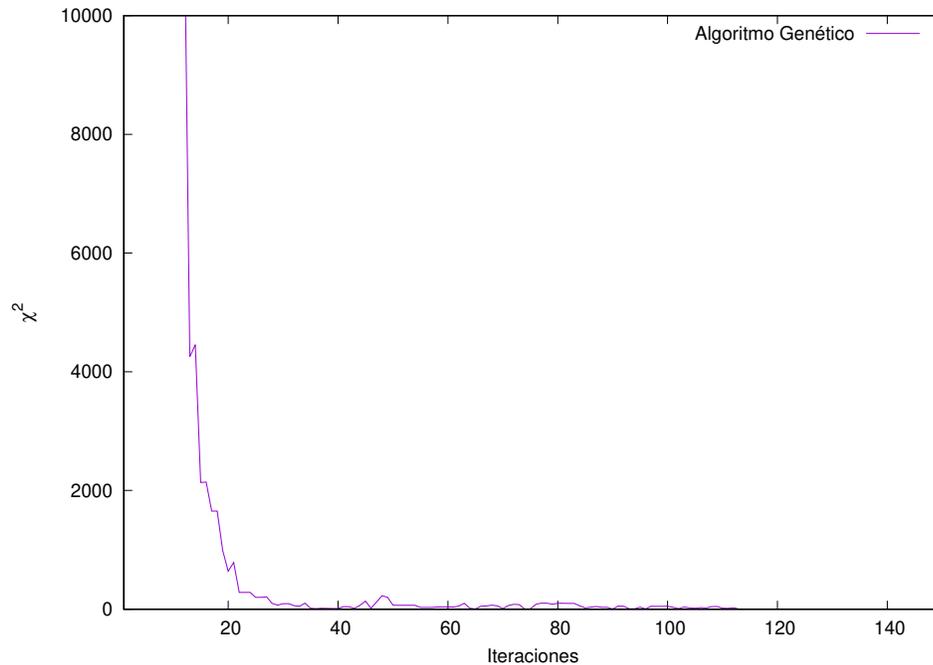


Figura 4.7: Gráfica que muestra el número de iteraciones para converger a la solución deseada.

De esta manera, se puede decir que el algoritmo genético tiene un buen rendimiento ya que como se puede observar, la convergencia de soluciones brindadas se encuentra rápidamente y se mantiene estable.



# Capítulo 5

## Resultados

Los parámetros  $A_u, A_d, E_u, E_d, \phi_1^q$  y  $\phi_2^q$  del Modelo de 2 Texturas, se acomodan como las componentes en un vector  $\vec{P}$ , de la siguiente forma:

$$\vec{P} = (A_u, A_d, E_u, E_d, \phi_1^q, \phi_2^q).$$

$\vec{P}$  es un punto de un espacio de seis dimensiones. Las cuatro primeras entradas, están restringidas a los intervalos<sup>1</sup>:

$$m_t \geq A_u \geq m_c \geq E_u \geq m_u, \quad m_b \geq A_d \geq m_s \geq E_d \geq m_d.$$

mientras que las fases de las dos últimas entradas, en los intervalos:

$$2\pi \geq \phi_1^q \geq 0, \quad 2\pi \geq \phi_2^q \geq 0.$$

Se implementó un algoritmo genético (con las características mencionadas en la sección anterior). La estrategia de búsqueda fue encontrar regiones de los parámetros que tuvieran:

- $\chi^2 < 1$ ,
- $\chi^2 < 0,1$ ,
- $\chi^2 < 0,01$ .

Se encontró de forma exitosa un total de 2115 puntos que satisfacen el criterio de  $\chi^2$ . 824 puntos con  $\chi^2 < 1$ , 790 puntos con  $\chi^2 < 0,1$  y 501 puntos con  $\chi^2 < 0,01$ . Con estos puntos se analizará numericamente el comportamiento de los elementos de las matrices de masa  $B_q, D_q$  y  $C_q$ . Antes de realizar esto veamos lo siguiente.

### 5.1. Predicción de los elementos de la matriz $V_{CKM}$

A través del criterio de  $\chi^2$  se ajustaron los elementos  $V_{us}, V_{ub}, V_{cb}$  y  $\delta$ . Sin embargo la matriz  $V_{CKM}$  tiene nueve elementos, en la siguiente subsección se presentará la predicción para los elementos  $V_{ud}, V_{cd}, V_{cs}, V_{tb}, V_{td}$  y  $V_{ts}$  dados por el algoritmo genético.

Con los puntos que arroja el algoritmo genético que cumplen con los criterios  $\chi^2 < 1$ ,  $\chi^2 < 0,1$  y  $\chi^2 < 0,01$ , se calcula  $S_{13}, S_{12}, S_{23}$  y  $\delta$  a partir de las ecuaciones (2.31). Con esto y usando la parametrización estandar (sección 2.4.2) calculamos la predicción numérica para los elementos  $V_{ud}, V_{cd}, V_{cs}, V_{tb}, V_{td}$  y  $V_{ts}$ . Los resultados se presentan de la siguiente forma:

---

<sup>1</sup>Se obtienen al imponer que  $B_q$  y  $D_q$  reales, ver ecs. (3.10) y (ec.3.11)

Se grafican los puntos para la predicción de  $V_{ud}$  vs  $V_{cd}$ ,  $V_{tb}$  vs  $V_{cs}$  y  $V_{ts}$  vs  $V_{td}$ , donde se muestra el valor central y los errores correspondientes, los puntos dentro de esta región tienen una buena predicción mientras que puntos fuera no la tienen.

En la figura 5.1 se grafican los valores evaluados de  $V_{ud}$  y  $V_{cd}$  según los resultados encontrados por el algoritmo genético. El eje horizontal corresponde a  $V_{cd}$ , la línea vertical discontinua central corresponde al valor central experimental, mientras que las líneas discontinuas laterales corresponden incorporando el error experimental que es  $\pm 0,00048$ . El eje vertical corresponde a  $V_{ud}$  y la línea horizontal discontinua central representa al valor central experimental, mientras que las líneas verticales de arriba y abajo contienen el error experimental de este elemento que es de  $\pm 0,00011$ .

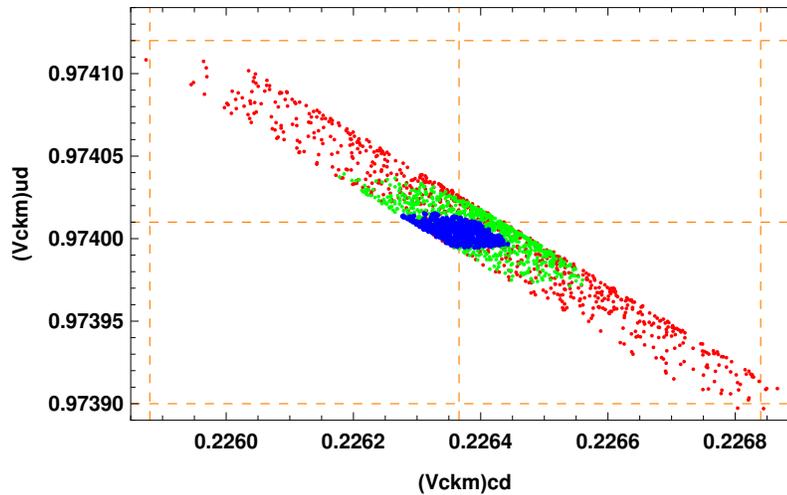
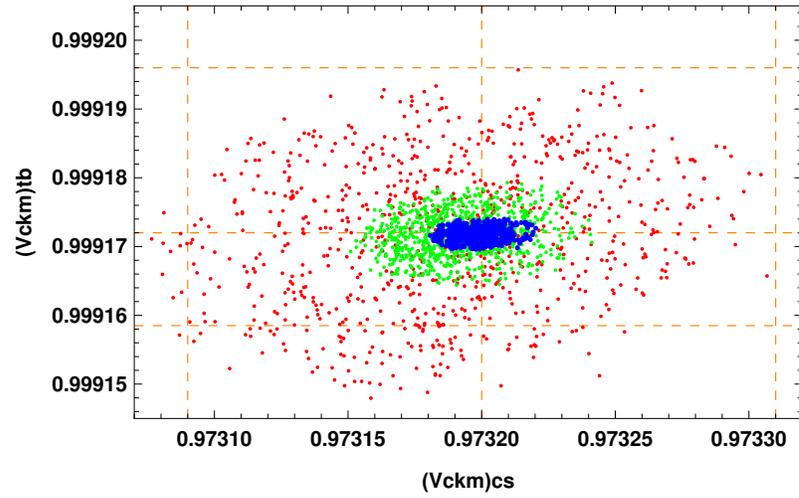
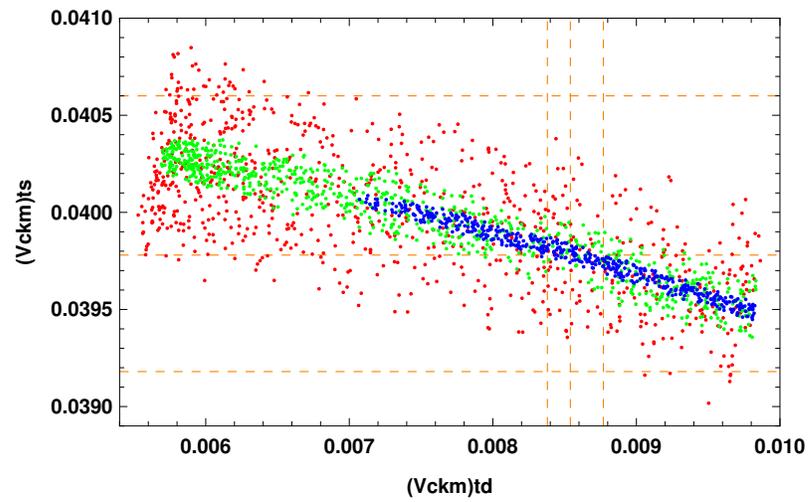


Figura 5.1: Predicciones genéticas para  $V_{ud}$  y  $V_{cd}$ .

Analogamente, en la figura 5.2 se muestran los valores encontrados para  $V_{cs}$  y  $V_{tb}$ . El eje horizontal corresponde a  $V_{cs}$ , la línea vertical discontinua central corresponde al valor central experimental, mientras que las líneas discontinuas laterales corresponden incorporando el error experimental que es  $\pm 0,00011$ . El eje vertical corresponde a  $V_{tb}$  y la línea horizontal discontinua central respecta al valor central experimental, mientras que la línea vertical superior contiene el error experimental  $+0,000024$  y la línea inferior contiene el error experimental  $-0,000035$  correspondientes a este elemento.

Finalmente, se hicieron las predicciones para  $V_{td}$  y  $V_{ts}$ . El eje horizontal corresponde a  $V_{td}$ , la línea vertical discontinua central corresponde al valor central experimental, mientras que la línea lateral derecha corresponde al error experimental  $+0,00023$ , la línea lateral izquierda corresponde al error experimental  $-0,00016$ . El eje vertical corresponde a  $V_{ts}$  y la línea horizontal discontinua central respecta al valor central experimental, mientras que la línea vertical superior contiene el error experimental  $+0,00082$ , y la línea inferior contiene el error experimental  $-0,00060$  correspondientes a este elemento. Se pueden observar estos resultados en la figura 5.3.

Los colores rojo, verde y azul corresponden a una precisión de  $\chi^2 < 1$ ,  $\chi^2 < 0,1$  y  $\chi^2 < 0,01$  respectivamente. Podemos notar que entre mayor precisión, los resultados se acercan más a los del valor central; para los elementos  $V_{ud}$ ,  $V_{cd}$ ,  $V_{cs}$ ,  $V_{tb}$  y  $V_{ts}$  se han encontrado puntos donde la mayoría entra dentro del margen de error, sin embargo para el elemento  $V_{td}$  esto no sucede.

Figura 5.2: Predicciones genéticas para  $V_{cs}$  y  $V_{tb}$ .Figura 5.3: Predicciones genéticas para  $V_{ts}$  y  $V_{td}$ .

## 5.2. Análisis de $B_u$ y $B_d$

Los parámetros  $B_u$  y  $B_d$ , están definidos a través de la ecuación:

$$|B_q| = \sqrt{\frac{(A_q - m_1^q)(A_q - m_2^q)(A_q - m_3^q)}{E_q - A_q}}, \quad q = u, d. \quad (5.1)$$

En las subfiguras a) y c) de la figura 5.5 se grafican los elementos  $B_u$  y  $B_d$  respecto a los parámetros del modelo de 2 texturas. En el eje  $x$  corresponde a  $A_q$ , en el eje  $y$  corresponde a  $E_q$  y el eje  $z$  a  $B_q = B_q(A_q, E_q)$ . Proyectando al plano  $A_q - B_q$ , ( $E_q = 0$ ), las curvas resultantes se pueden aproximar a una elipse centrada en  $\frac{m_3^q + m_2^q}{2}$  con vértices ubicados en los puntos  $(m_2^q, 0)$  y  $(m_3^q, 0)$ , tal como se muestra en la figura 5.4. Definiendo el parámetro  $\gamma$  como:

$$\gamma = \sqrt{\frac{2m_1^q}{m_3^q + m_2^q}},$$

los demás parámetros de la elipse  $a$ ,  $b$  y  $c$  son:

$$a = \frac{m_3^q - m_2^q}{2} \quad b = \sqrt{1 - \gamma} a, \quad c = \sqrt{\gamma} a. \quad (5.2)$$

En las subfiguras b) y d) de la figura 5.5 se grafican los valores de los elementos  $B_u$  y  $B_d$  encontrados por el algoritmo que reproducen  $V_{CKM}$ .

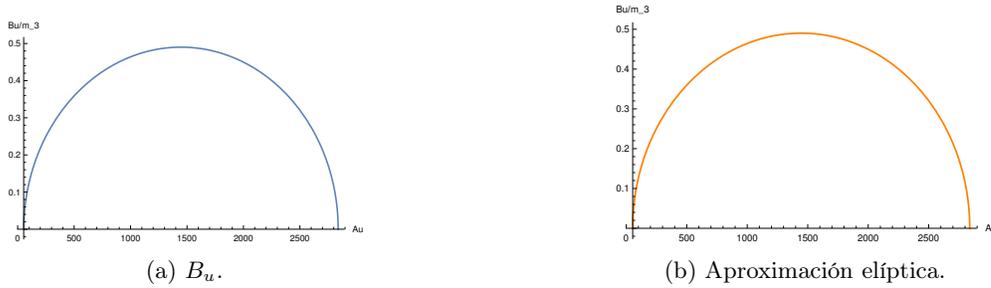


Figura 5.4: Aproximación elíptica (b) en contraste a  $B_u$  (a) en el plano  $A_u - B_u$ .

## 5.3. Análisis de $D_u$ y $D_d$

La relación correspondiente para parámetros  $D_u$  y  $D_d$  es:

$$|D_q| = \sqrt{\frac{(E_q - m_1^q)(E_q - m_2^q)(E_q - m_3^q)}{A_q - E_q}}, \quad q = u, d. \quad (5.3)$$

En las subfiguras a) y c) de la figura 5.6 se grafican los elementos de la matriz  $D_u$  y  $D_d$  respecto a los parámetros del modelo de 2 texturas. Análogamente los ejes corresponden a  $A_q$  (eje  $x$ ),  $E_q$  (eje  $y$ ) y  $D_q = D_q(A_q, E_q)$  eje  $z$ . Proyectando al plano  $A_q - D_q$ , la curva va como  $\frac{1}{\sqrt{A_q}}$ . Se contrastan los valores encontrados por el algoritmo que reproducen  $V_{CKM}$  (subfiguras b) y d)).

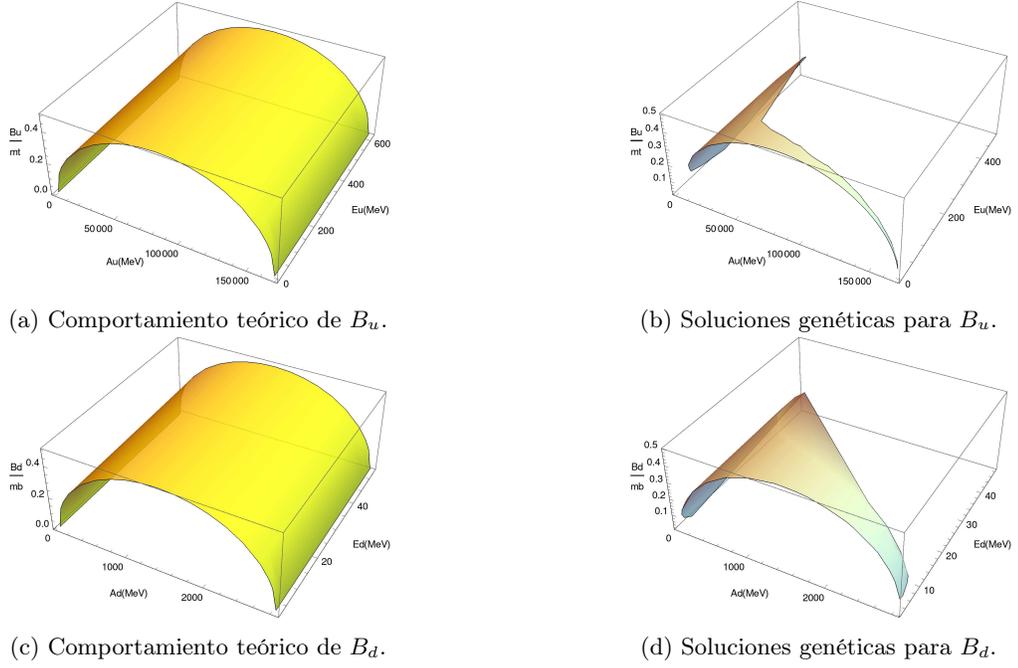


Figura 5.5: Gráfica de  $B_u$  (parte de arriba) y  $B_d$  (parte inferior). Las subfiguras a) y c) muestran todo el rango de valores teóricos permitidos de  $B_u$  y  $B_d$ . Las subfiguras b) y d) muestran solo la región que reproduce  $V_{CKM}$  encontrados por el algoritmo genético.

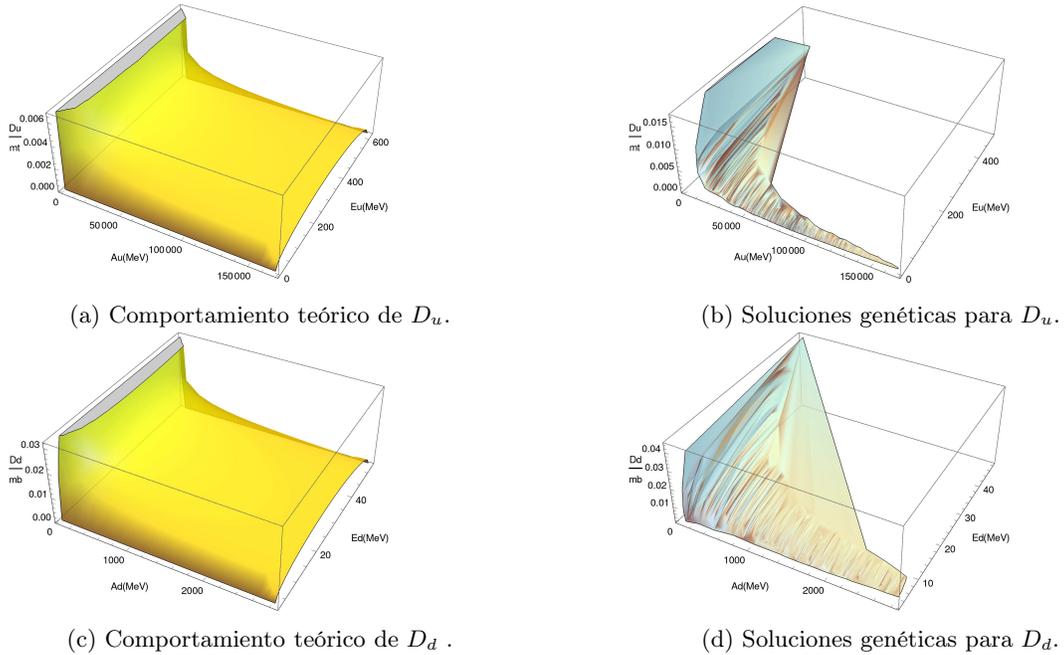


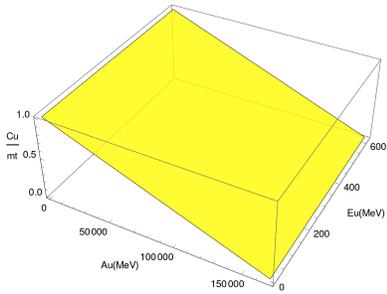
Figura 5.6: Gráfica de  $D_u$  (parte de arriba) y  $D_d$  (parte inferior). Las subfiguras a) y c) muestran todo el rango de valores teóricos permitidos de  $D_u$  y  $D_d$ . Las subfiguras b) y d) muestran solo la región que reproduce  $V_{CKM}$  encontrados por el algoritmo genético.

## 5.4. Análisis de $C_u$ y $C_d$

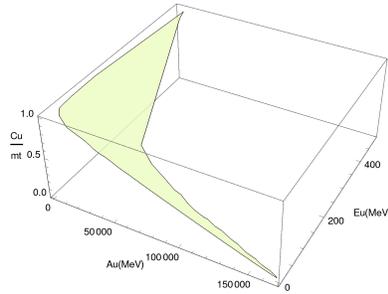
En lo referente al análisis de los elementos  $C_u$  y  $C_d$  la relación que los define corresponde a la ecuación de un plano

$$A_q + E_q + C_q - (m_1 + m_2 + m_3) = 0$$

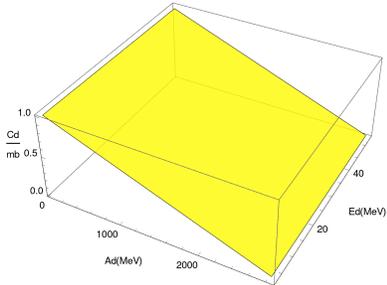
cuyo vector normal está dado por  $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ . La gráfica correspondiente es la figura 5.7, donde los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  están dados por  $A_q$ ,  $E_q$  y  $C_q$  respectivamente.



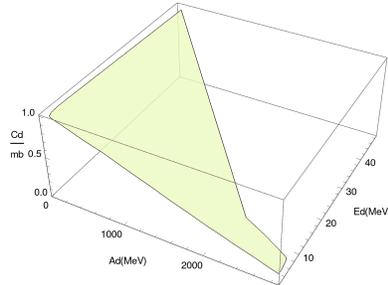
(a) Comportamiento teórico de  $C_u$ .



(b) Soluciones genéticas para  $C_u$ .



(c) Comportamiento teórico de  $C_d$ .



(d) Soluciones genéticas para  $C_d$ .

Figura 5.7: Gráfica de  $C_u$  (parte de arriba) y  $C_d$  (parte inferior). Subfiguras a) y c) muestran todo el rango de valores teóricos permitidos de  $C_u$  y  $C_d$ . Las subfiguras b) y d) muestran solo la región que reproduce  $V_{CKM}$  encontrados por el algoritmo genético.

## Capítulo 6

# Conclusiones y perspectivas futuras

En este trabajo se ha considerado un formalismo de texturas de dos ceros para las matrices de masa de los quarks tipo  $u$  y tipo  $d$ . Los parámetros de libres del modelo que cumplen con las restricciones experimentales impuestas por la  $V_{CKM}$  se encontraron a través de un criterio de chi cuadrada y los resultados importantes se enlistan a continuación.

1. Se implementó exitosamente un algoritmo genético para encontrar, de forma numérica, los valores de los parámetros del modelo teórico de texturas. Con lo que se encontraron los puntos  $\vec{P}$  que tienen valores de  $\chi^2 < 1$ ,  $\chi^2 < 0,1$  y  $\chi^2 < 0,01$ .
2. Al graficar los elementos normalizados de las matrices de masa  $|B_u|/m_t$ ,  $|B_d|/m_b$ ,  $C_u/m_t$  y  $C_d/m_b$ , se encontró que al proyectar la gráfica de  $|B_u|/m_t$  y  $|B_d|/m_b$  al plano  $A_q - B_q$  ( $q = u, d$ ), la curva correspondiente se puede aproximar a una elipse con parámetros dados en la ecuación 29, mientras la gráfica correspondiente a  $C_u/m_t$ ,  $C_d/m_b$ , es un plano, con vector normal  $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ .
3. Se encontraron puntos dentro de los márgenes experimentales para los elementos de la matriz  $V_{ckm}$ .

## Perspectivas Futuras

Para extender este análisis, se pueden hacer las siguientes consideraciones:

1. Implementar un algoritmo evolutivo diferente tal que permita pedir precisiones mayores para el criterio de  $\chi^2$ .
2. Utilizar una representación para las soluciones del algoritmo genético distinta a la binaria de tal forma que se amplíe la diversidad en el campo de búsqueda.
3. Analizar a profundidad el comportamiento del algoritmo genético.

## Productos

- Se presentó un trabajo tipo póster titulado Texturas tipo vecinos más cercanos y los grupos de simetría Q4 y Q6 dentro del programa del LXIV Congreso Nacional de Física.
- Se publicó un artículo de divulgación con los resultados del trabajo de la tesis presente: *Miranda-Romagnoli, P., Noriega-Papaqui, R., & Pontón-Gallardo-Rodríguez, A. (2022). Implicaciones de una textura de dos ceros en las matrices de masa de los quarks. Pãdi Boletín Científico De Ciencias Básicas E Ingenierías Del ICBI, 10(19). Recuperado a partir de <https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/article/view/9147>.*

## Conclusiones y perspectivas futuras

---

- Se presentó un trabajo tipo póster con los resultados del trabajo de tesis con el nombre "Implicaciones de una textura de dos ceros en las matrices de masa" dentro del LXV Congreso Nacional de Física, celebrado del 02 al 07 de octubre de 2022.

# Apéndice A

## Programa

Rutinas para calcular los elementos de la matriz VCKM a partir de una matriz de masa.

### A.1. Vckms.h

Fichero donde se consideran los valores experimentales de las masas de los quarks, los valores teóricos de los elementos de la matriz VCKM así como la incertidumbre de cada uno. Se define el tipo de precisión que utiliza cada una de las funciones definidas en la siguiente sección. Se ha utilizado precisión long double.

```
1 /* Rutinas para calcular los elementos de la matriz CKM a partir
2 de una matriz de masa
3
4
5 */
6 #ifndef VCKMS_H
7 #define VCKMS_H
8
9 #include <complex.h>
10 #include <math.h>
11 #include <stdio.h>
12 #include <stdlib.h>
13
14 #define Pi 3.14159265358979323846264338327
15
16 /*Sean las masas de los quarks*/
17 long double A, C, EE, lambda1, lambda2, lambda3;
18 /*
19 long double mu = 2.16;
20 long double md = 4.67;
21 long double ms = 93;
22 long double mc = 1270;
23 long double mb = 4180;
24 long double mt = 172760;
25 */
26 #define mu 1.23
27 #define md 2.67
28 #define ms 53.16
29 #define mc 620
30 #define mb 2839
31 #define mt 168260
32
33 #define minAu mc
34 #define maxAu mt
35 #define minEu mu
36 #define maxEu mc
```

```

37 #define minAd ms
38 #define maxAd mb
39 #define minEd md
40 #define maxEd ms
41 #define minPhi1 0
42 #define maxPhi1 2*Pi
43 #define minPhi2 0
44 #define maxPhi2 2*Pi
45
46 /*Valores te'oricos de los elementos de la matriz CKM*/
47 #define vcb_th 0.04053
48 #define vus_th 0.22650
49 #define vub_th 0.00361
50 #define jarslkog_th 0.0000300
51
52 /*donde la incertidumbre de cada uno es*/
53 #define sigma_vcb 0.00061
54 #define sigma_vus 0.00048
55 #define sigma_vub 0.00009
56 #define sigma_jars 0.00009
57
58 __BEGIN_DECLS
59
60 long double BB(long double, long double, long double, long double, long double);
61 long double DD(long double, long double, long double, long double, long double);
62 long double O11(long double, long double, long double, long double, long double);
63 long double O22(long double, long double, long double, long double, long double);
64 long double O33(long double, long double, long double, long double, long double);
65 long double O12(long double, long double, long double, long double, long double);
66 long double O21(long double, long double, long double, long double, long double);
67 long double O32(long double, long double, long double, long double, long double);
68 long double O23(long double, long double, long double, long double, long double);
69 long double O13(long double, long double, long double, long double, long double);
70 long double O31(long double, long double, long double, long double, long double);
71 complex CKM11(long double, long double, long double, long double, long double, long
double);
72 complex CKM22(long double, long double, long double, long double, long double, long
double);
73 complex CKM33(long double, long double, long double, long double, long double, long
double);
74 complex CKM12(long double, long double, long double, long double, long double, long
double);
75 complex CKM21(long double, long double, long double, long double, long double, long
double);
76 complex CKM13(long double, long double, long double, long double, long double, long
double);
77 complex CKM31(long double, long double, long double, long double, long double, long
double);
78 complex CKM32(long double, long double, long double, long double, long double, long
double);
79 complex CKM23(long double, long double, long double, long double, long double, long
double);
80 long double JJ(long double, long double, long double, long double, long double,
long double);
81 long double chi2CKM23(long double, long double, long double, long double, long
double, long double);
82 long double chi2CKM12(long double, long double, long double, long double, long
double, long double);
83 long double chi2CKM13(long double, long double, long double, long double, long
double, long double);
84 long double chi2JJ(long double, long double, long double, long double, long double,
long double);
85 long double chi2(long double, long double, long double, long double, long double,
long double);
86

```

```
87 __END_DECLS
88
89 #endif
```

## A.2. Vckms.c

Se definen las funciones de los parametros de la matriz de masa, los elementos de la matriz que la diagonalizan, así como los elementos de la VCKM y el invariante de Jarlskog. Se incluye el fichero "vckms.h"

```
1 #include <complex.h>
2 #include <math.h>
3 #include <stdio.h>
4 #include <stdlib.h>
5 #include "vckms.h"
6
7
8 /*Se definen los parametros de la siguiente manera: */
9 long double BB(long double A, long double EE, long double lambda1, long double
   lambda2, long double lambda3){
10     long double bb;
11     bb=sqrt(((A-lambda1)*(A-lambda2)*(lambda3-A))/(A-EE));
12 return bb;
13 }
14 long double DD(long double A, long double EE, long double lambda1, long double
   lambda2, long double lambda3){
15     long double dd;
16     dd=sqrt(((EE-lambda1)*(lambda2-EE)*(lambda3-EE))/(A-EE));
17 return dd;
18 }
19
20 /* los elementos diagonales */
21 long double O11(long double A, long double EE, long double lambda1, long double
   lambda2, long double lambda3){
22     long double o11;
23     o11=1/(sqrt(1+((EE-lambda1)*(A-EE)/((lambda2-EE)*(lambda3-EE))+((EE-
   lambda1)*(A-lambda2)*(lambda3-A)/((lambda2-EE)*(lambda3-EE)*(A-lambda1))))));
24 return o11;
25 }
26 long double O22(long double A, long double EE, long double lambda1, long double
   lambda2, long double lambda3){
27     long double o22;
28     o22=1/(sqrt(1+((EE-lambda1)*(lambda3-EE)/((lambda2-EE)*(A-EE))+((A-lambda1
   )*(lambda3-A)/((A-EE)*(A-lambda2))))));
29 return o22;
30 }
31 long double O33(long double A, long double EE, long double lambda1, long double
   lambda2, long double lambda3){
32     long double o33;
33     o33=1/(sqrt(1+((lambda3-A)*(A-EE)/((A-lambda2)*(A-lambda1))+((EE-lambda1
   )*(lambda2-EE)*(lambda3-A)/((A-lambda2)*(lambda3-EE)*(A-lambda1))))));
34 return o33;
35 }
36 /*los elementos fuera de la diagonal, donde todos dependen de A, EE, lambda1,
   lambda2, lambda3*/
37 long double O12(long double A, long double EE, long double lambda1, long double
   lambda2, long double lambda3){
38     long double o12;
39     o12=fabs(DD(A, EE, lambda1, lambda2, lambda3))/(lambda2-EE)*O22(A, EE,
   lambda1, lambda2, lambda3);
40 return o12;
41 }
```

```

42 long double O21(long double A, long double EE, long double lambda1, long double
    lambda2, long double lambda3){
43     long double o21;
44     o21=(-(EE-lambda1)/(fabs(DD(A, EE, lambda1, lambda2, lambda3))))*O11(A, EE,
    lambda1, lambda2, lambda3);
45 return o21;
46 }
47 long double O32(long double A, long double EE, long double lambda1, long double
    lambda2, long double lambda3){
48     long double o32;
49     o32=(-(fabs(BB(A, EE, lambda1, lambda2, lambda3)/(A-lambda2))))*O22(A, EE,
    lambda1, lambda2, lambda3);
50 return o32;
51 }
52 long double O23(long double A, long double EE, long double lambda1, long double
    lambda2, long double lambda3){
53     long double o23;
54     o23=((lambda3-A)/fabs(BB(A, EE, lambda1, lambda2, lambda3)))*O33(A, EE,
    lambda1, lambda2, lambda3);
55 return o23;
56 }
57 long double O13(long double A, long double EE, long double lambda1, long double
    lambda2, long double lambda3){
58     long double o13;
59     o13=fabs(DD(A, EE, lambda1, lambda2, lambda3)/(lambda3-EE))*((lambda3-A)/(
    fabs(BB(A, EE, lambda1, lambda2, lambda3))))*O33(A, EE, lambda1, lambda2,
    lambda3);
60 return o13;
61 }
62 long double O31(long double A, long double EE, long double lambda1, long double
    lambda2, long double lambda3){
63     long double o31;
64     o31=(fabs(BB(A, EE, lambda1, lambda2, lambda3)/(A-lambda1))*((EE-lambda1)/
    fabs(DD(A, EE, lambda1, lambda2, lambda3))))*O11(A, EE, lambda1, lambda2,
    lambda3);
65 return o31;
66 }
67 /* Los elementos de la VCKM */
68 complex CKM11(long double Au, long double Ad, long double EEu, long double EEd,
    long double phi1, long double phi2){
69     complex ckm11;
70     ckm11=(O11(Au, EEu, mu, mc, mt)*O11(Ad, EEd, md, ms, mb)) + (O21(Au, EEu,
    mu, mc, mt)*O21(Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*phi1)) + (O31(Au, EEu, mu, mc, mt)*
    O31(Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*(phi1+phi2)));
71 return ckm11;
72 }
73 complex CKM22(long double Au, long double Ad, long double EEu, long double EEd,
    long double phi1, long double phi2){
74     complex ckm22;
75     ckm22=(O12(Au, EEu, mu, mc, mt)*O12(Ad, EEd, md, ms, mb))+(O22(Au, EEu, mu,
    mc, mt)*O22(Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*phi1))+(O32(Au, EEu, mu, mc, mt)*O32(
    Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*(phi1+phi2)));
76 return ckm22;
77 }
78 complex CKM33(long double Au, long double Ad, long double EEu, long double EEd,
    long double phi1, long double phi2){
79     complex ckm33;
80     ckm33=(O13(Au, EEu, mu, mc, mt)*O13(Ad, EEd, md, ms, mb))+(O23(Au, EEu, mu,
    mc, mt)*O23(Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*phi1))+(O33(Au, EEu, mu, mc, mt)*O33(
    Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*(phi1+phi2)));
81 return ckm33;
82 }
83 complex CKM12(long double Au, long double Ad, long double EEu, long double EEd,
    long double phi1, long double phi2){
84     complex ckm12;

```

```

85     ckm12=(011(Au, EEU, mu, mc, mt)*012(Ad, EEd, md, ms, mb))+(021(Au, EEU, mu,
      mc, mt)*022(Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*phi1))+031(Au, EEU, mu, mc, mt)*032(
      Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*(phi1+phi2)));
86 return ckm12;
87 }
88 complex CKM21(long double Au, long double Ad, long double EEU, long double EEd,
      long double phi1, long double phi2){
89     complex ckm21;
90     ckm21=(012(Au, EEU, mu, mc, mt)*011(Ad, EEd, md, ms, mb))+(022(Au, EEU, mu,
      mc, mt)*021(Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*phi1))+032(Au, EEU, mu, mc, mt)*031(
      Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*(phi1+phi2)));
91 return ckm21;
92 }
93 complex CKM13(long double Au, long double Ad, long double EEU, long double EEd,
      long double phi1, long double phi2){
94     complex ckm13;
95     ckm13=(011(Au, EEU, mu, mc, mt)*013(Ad, EEd, md, ms, mb))+(021(Au, EEU, mu,
      mc, mt)*023(Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*phi1))+031(Au, EEU, mu, mc, mt)*033(
      Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*(phi1+phi2)));
96 return ckm13;
97 }
98 complex CKM31(long double Au, long double Ad, long double EEU, long double EEd,
      long double phi1, long double phi2){
99     complex ckm31;
100    ckm31=(013(Au, EEU, mu, mc, mt)*011(Ad, EEd, md, ms, mb))+(023(Au, EEU, mu,
      mc, mt)*021(Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*phi1))+033(Au, EEU, mu, mc, mt)*031(
      Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*(phi1+phi2)));
101 return ckm31;
102 }
103 complex CKM32(long double Au, long double Ad, long double EEU, long double EEd,
      long double phi1, long double phi2){
104    complex ckm32;
105    ckm32=(013(Au, EEU, mu, mc, mt)*012(Ad, EEd, md, ms, mb))+(023(Au, EEU, mu,
      mc, mt)*022(Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*phi1))+033(Au, EEU, mu, mc, mt)*032(
      Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*(phi1+phi2)));
106 return ckm32;
107 }
108 complex CKM23(long double Au, long double Ad, long double EEU, long double EEd,
      long double phi1, long double phi2){
109    complex ckm23;
110    ckm23=(012(Au, EEU, mu, mc, mt)*013(Ad, EEd, md, ms, mb))+(022(Au, EEU, mu,
      mc, mt)*023(Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*phi1))+032(Au, EEU, mu, mc, mt)*033(
      Ad, EEd, md, ms, mb)*cexp(I*(phi1+phi2)));
111 return ckm23;
112 }
113 /*El invariante de Jarlskog*/
114 long double JJ(long double Au, long double Ad, long double EEU, long double EEd,
      long double phi1, long double phi2){
115     long double jj;
116     jj=cimagf(CKM12(Au, Ad, EEU, EEd, phi1, phi2)*CKM23(Au, Ad, EEU, EEd, phi1,
      phi2)*conjf(CKM13(Au, Ad, EEU, EEd, phi1, phi2))*conjf(CKM22(Au, Ad, EEU, EEd,
      phi1, phi2)));
117 return jj;
118 }
119
120 long double chi2CKM23(long double Au, long double Ad, long double EEU, long double
      EEd, long double phi1, long double phi2){
121     long double chi23;
122     chi23=pow((vcb_th -cabsf(CKM23(Au, Ad, EEU, EEd, phi1, phi2))),2)/pow(
      sigma_vcb,2);
123 return chi23;
124 }
125 long double chi2CKM12(long double Au, long double Ad, long double EEU, long double
      EEd, long double phi1, long double phi2){
126     long double chi12;

```

```
127     chi12=pow(vus_th -cabsf(CKM12(Au, Ad, EEu, EEd, phi1, phi2)),2)/pow(  
128     sigma_vus,2);  
129 return chi12;  
130 }  
130 long double chi2CKM13(long double Au, long double Ad, long double EEu, long double  
131     EEd, long double phi1, long double phi2){  
132     long double chi13;  
132     chi13=(pow(vub_th -cabsf(CKM13(Au, Ad, EEu, EEd, phi1, phi2)),2))/(pow(  
133     sigma_vub,2));  
134 return chi13;  
135 }  
135 long double chi2JJ(long double Au, long double Ad, long double EEu, long double EEd  
136     , long double phi1, long double phi2){  
137     long double chi13;  
137     chi13=(pow(jarslkog_th -JJ(Au, Ad, EEu, EEd, phi1, phi2),2))/pow(sigma_jars  
138     ,2);  
139 return chi13;  
140 }  
140 long double chi2(long double Au, long double Ad, long double EEu, long double EEd,  
141     long double phi1, long double phi2){  
142     long double chi2_;  
142     chi2_=chi2CKM23(Au, Ad, EEu, EEd, phi1, phi2)+chi2CKM12(Au, Ad, EEu, EEd,  
143     phi1, phi2)+chi2CKM13(Au, Ad, EEu, EEd, phi1, phi2)+chi2JJ(Au, Ad, EEu, EEd,  
144     phi1, phi2);  
143 return chi2_;  
144 }
```

# Apéndice B

## Productos

### Texturas tipo vecinos más cercanos y los grupos de simetría $Q_4$ y $Q_6$

PontónGallardo-Rodríguez, A.<sup>1</sup>, Noriega-Papaqui, R.<sup>2</sup>  
lasora.pontongallardo@uaeh.mx, noriega@uaeh.mx  
 Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

---

**Resumen**

La física del sabor es responsable de una gran variedad de procesos físicos que involucran partículas fermiónicas. Diversos formalismos se han empleado para su descripción como lo son, las texturas y las simetrías de sabor. En el Modelo Estándar (ME) la diferencia entre fermiones de diferentes generaciones básicamente es la masa, la cual proviene de la matriz de masa correspondiente. En este trabajo se presenta una extensión más vasta del ME conocido como Modelo de Tres Dobletes de Higgs, donde se consideran Simetrías Discretas de Sabor  $Q_4$  y  $Q_6$  adicionales, al aplicarlas al sector de Yukawa del nuevo modelo, se obtiene la matriz de masa correspondiente la cual tiene una estructura de texturas del tipo vecinos más cercanos.

**Introducción**

Un grupo  $G$  es un conjunto de elementos  $\{a, b, c, \dots\}$  y una operación  $*$ , que satisfacen las propiedades de cerradura, asociatividad, elemento identidad y elemento inverso.

El grupo  $Q_k$  tiene ocho elementos,  $a^m b^k$ , con  $m = 0, 1, 2, 3$  y  $k = 0, 1$ .

$Q_k : \{e, a, b, a^2, a^3, ab, a^2 b, a^3 b\}$

donde  $a$  y  $b$  satisfacen: [1]

$$a^k = e, \quad b^k = a^k, \quad \text{y } b^{-1}ab = a^{-1}.$$

El grupo  $Q_k$  tiene 12 elementos,  $a^m b^k$ , con  $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  y  $k = 0, 1$ .

$Q_k : \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, ab, a^2 b, a^3 b, a^4 b, a^5 b\}$

donde  $a$  y  $b$  satisfacen: [1]

$$a^6 = e, \quad b^k = a^k, \quad \text{y } b^{-1}ab = a^{-1}.$$

Al conjunto de matrices que satisfacen la tabla de multiplicar o tabla de Cayley del grupo, se le dice representaciones. Una representación es irreducible si el conjunto de matrices no puede descomponerse simultáneamente en matrices de menor orden.

Las representaciones irreducibles de los grupos  $Q_4$  y  $Q_6$  son de utilidad para hallar las matrices de masa del tipo vecinos más cercanos, las cuales tienen la siguiente estructura: [2]

$$M = \begin{pmatrix} 0 & C & D \\ C & 0 & B \\ D & B & A \end{pmatrix} = \frac{v}{\sqrt{2}} Y \quad (1)$$

**Metodología**

Las representaciones irreducibles de  $Q_4$  son  $1, \bar{1}, 1'', \bar{1}''$  y  $2$ , es decir, cuatro singletes y un doblete. Y tienen las siguientes reglas de multiplicación:

$$1 \times 1 = 1, \quad 1' \times 1' = 1, \quad 1'' \times 1'' = 1, \\ 1' \times 1' = 1, \quad 1'' \times 1'' = 1, \quad 1' \times 1'' = 1'', \\ 1'' \times 1' = 1', \quad 1' \times 1' = 1''$$

$$2 \times 2 = 1 + 1'' + 1'$$

Las representaciones irreducibles de  $Q_6$  son  $1, \bar{1}, 1'', \bar{1}''$ ,  $2$  y  $2'$ . Cumplen las mismas reglas de multiplicación que los singletes de  $Q_4$ , mientras que para los dobletes:

$$2 \times 1 = 2, \quad 2' \times 1' = 2, \quad 2' \times 1'' = 2, \\ 2 \times 1' = 2', \quad 2 \times 1'' = 2', \quad 2' \times 1' = 2', \\ 2' \times 1'' = 2'$$

Por otro lado, sea el lagrangiano de Yukawa:

$$L_Y = \sum_m [Y_{m1}^u Q_{m1}^u H_u d_{m1} + Y_{m2}^u Q_{m2}^u H_u d_{m2} + Y_{m3}^u L_{m3} H_u l_{m3}] \quad (5)$$

El cual se requiere sea invariante bajo  $Q_4$  y bajo  $Q_6$  para hallar los singletes triviales y posteriormente las matrices de masa.

**Resultados**

**Bajo  $Q_4$ .**  
 Con la asignación:

$$\begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \end{pmatrix} : 2, \quad \bar{Q}_{13} : 1'', \quad \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} : 2, \quad \bar{H}_3 : 1'', \\ \begin{pmatrix} u_{R1} \\ u_{R2} \end{pmatrix} : 2, \quad u_{R3} : 1'', \quad \begin{pmatrix} d_{R1} \\ d_{R2} \end{pmatrix} : 2, \quad d_{R3} : 1'', \\ \begin{pmatrix} L_{11} \\ L_{12} \end{pmatrix} : 2, \quad \bar{L}_{13} : 1'', \quad \begin{pmatrix} l_{R1} \\ l_{R2} \end{pmatrix} : 2, \quad l_{R3} : 1''.$$

Se tiene la matriz de masa:

$$M_{Q_4} = \begin{pmatrix} 0 & \langle \bar{H}_3 \rangle & \langle \bar{H}_3 \rangle \\ -\langle \bar{H}_3 \rangle & 0 & \langle \bar{H}_3 \rangle \\ -\langle \bar{H}_3 \rangle & \langle \bar{H}_3 \rangle & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Con la asignación

$$\begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \end{pmatrix} : 2, \quad \bar{Q}_{13} : 1', \quad \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} : 2, \quad \bar{H}_3 : 1', \\ \begin{pmatrix} u_{R1} \\ u_{R2} \end{pmatrix} : 2, \quad u_{R3} : 1', \quad \begin{pmatrix} d_{R1} \\ d_{R2} \end{pmatrix} : 2, \quad d_{R3} : 1', \\ \begin{pmatrix} L_{11} \\ L_{12} \end{pmatrix} : 2, \quad \bar{L}_{13} : 1', \quad \begin{pmatrix} l_{R1} \\ l_{R2} \end{pmatrix} : 2, \quad l_{R3} : 1'.$$

Se encuentra la matriz de masa:

$$M_{Q_4} = \begin{pmatrix} 0 & \langle \bar{H}_3 \rangle & \langle \bar{H}_3 \rangle \\ -\langle \bar{H}_3 \rangle & 0 & \langle \bar{H}_3 \rangle \\ -\langle \bar{H}_3 \rangle & \langle \bar{H}_3 \rangle & \langle \bar{H}_3 \rangle \end{pmatrix} \quad (7)$$

**Bajo  $Q_6$ .**  
 Con la asignación:

$$\begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \end{pmatrix} : 2', \quad \bar{Q}_{13} : 1'', \quad \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} : 2', \quad \bar{H}_3 : 1'', \\ \begin{pmatrix} u_{R1} \\ u_{R2} \end{pmatrix} : 2, \quad u_{R3} : 1', \quad \begin{pmatrix} d_{R1} \\ d_{R2} \end{pmatrix} : 2, \quad d_{R3} : 1', \\ \begin{pmatrix} L_{11} \\ L_{12} \end{pmatrix} : 2', \quad \bar{L}_{13} : 1'', \quad \begin{pmatrix} l_{R1} \\ l_{R2} \end{pmatrix} : 2, \quad l_{R3} : 1'.$$

Se halla la matriz de masa:

$$M_{Q_6} = \begin{pmatrix} 0 & \langle \bar{H}_3 \rangle & \langle \bar{H}_3 \rangle \\ -\langle \bar{H}_3 \rangle & 0 & -\langle \bar{H}_3 \rangle \\ -\langle \bar{H}_3 \rangle & \langle \bar{H}_3 \rangle & \langle \bar{H}_3 \rangle \end{pmatrix} \quad (8)$$

**Conclusiones y perspectivas futuras**

Se encontraron las matrices de masa para los fermiones, las cuales tienen la estructura de vecinos más cercanos, bajo los grupos  $Q_4$  y  $Q_6$ . Se pueden encontrar más texturas al cambiar las asignaciones de las representaciones irreducibles.

Como continuación del trabajo se pretende crear un programa computacional el cual nos permita diagonalizar las matrices de masa, donde los eigen valores hallados serán las masas de las partículas fermiónicas.

LXIV-003368
contacto al interno: po295884@uaeh.edu.mx

Figura B.1: Poster presentado en el LXIV Congreso Nacional de Física.

*Este manuscrito ha sido aceptado después de una revisión a doble ciego por pares y será publicado en una futura edición de esta revista. Su contenido es definitivo y únicamente cambiará en la versión final la información relativa al volumen, número, fecha de publicación y paginado.*



DESDE 2013  
<https://repositorio.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/ichi/issue/archive>  
**Pádi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI**



Publicación Semestral Pádi Vol. 0 No. 0 (2022) 1–7

**Implicaciones de una textura de dos ceros en las matrices de masa de los quarks**  
**Two-zeros textures implications on quark mass matrices**

P. Miranda-Romagnoli<sup>1,2,\*</sup>, R. Noriega-Papaqui<sup>3</sup>, A. Pontón-Gallardo-Rodríguez<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

**Resumen**

Se realiza un análisis numérico de elementos de las matrices de masa de los quarks, considerando que tienen una estructura de texturas de dos ceros. Los parámetros libres del modelo de texturas utilizado, son acotados al imponer que se reproduzcan los valores experimentales provenientes de la matriz  $V_{CKM}$ , para lo cual se utiliza un criterio de chi cuadrada. A su vez un algoritmo genético es implementado para encontrar, numéricamente, valores de los parámetros que cumplan con el criterio de chi cuadrada. Se analizan los valores los numéricos encontrados por el algoritmo y se propone una relación para los elementos de las matrices de masa de los quarks.

**Palabras Clave:** Matrices de masa, texturas con ceros, algoritmo genético.

**Abstract**

A numerical analysis is performed on elements of quark mass matrices considering that they have a two-zeros texture structure. The free parameters of the texture model used are bounded by imposing that the experimental values from the  $V_{CKM}$  matrix are reproduced, using a chi-squared criterion. In turn, a genetic algorithm is implemented to find, numerically, values of the parameters that meet such a chi-squared criterion. The numerical values found by the algorithm are analyzed and a relationship is proposed for the elements of the quark mass matrices.

A genetic algorithm is implemented to find numerically parameters values. A comparison between theoretical values and those algorithm coming from is performed graphically.

**Keywords:** Mass matrices, texture zeros, genetic algorithm.

**1. Introducción**

La comprensión total del peculiar espectro de masas y mezclas de las partículas fermiónicas elementales sigue siendo uno de los problemas actuales de la Física de Partículas conocido como el *problema del sabor*.

En esta área de la ciencia, se utiliza la palabra sabor para denominar a cada tipo de fermión, existiendo por lo tanto 12 tipos diferentes de sabores: el sector de quarks tiene los sabores  $u, c, t, d, s$  y  $b$ ; el sector de leptones los correspondientes sabores  $e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu$  y  $\nu_\tau$ . En el Modelo Estándar (ME) a primer orden (nivel árbol) los bosones neutros ( $\gamma, Z, H$ ) se acoplan a un par de fermiones con el mismo sabor mientras que los bosones  $W^\pm$  se acoplan a un par fermiónico de diferente sabor. En este modelo, la intensidad del cambio de sabor se cuanti-

fica por los elementos de una matriz conocida como: *la matriz de Cabibbo-Kobayasi-Maskawa* ( $V_{CKM}$ ) llamados los ángulos de mezcla. La matriz  $V_{CKM}$  está estrechamente relacionada con las matrices de masa las cuales definen a las masas de los quarks y leptones, así en este contexto el sabor y la generación de masas son dos conceptos que se encuentran fuertemente entrelazados y constituyen una parte importante de la investigación actual en la física de partículas, sus inicios datan desde los primeros años de la década de los setentas, poco después del establecimiento del Modelo Estándar. Muchas aproximaciones han sido desarrolladas en contextos teóricos y fenomenológicos. En este trabajo se estudiará el formalismo de texturas para las matrices de masa, cuyo objetivo es buscar una forma explícita, simple y consistente de las matrices de masa, que reproduzca las relaciones jerárquicas entre las masas de los quarks así como los

\* Autor para correspondencia: pmiranda@uaeh.edu.mx  
 Correos electrónicos: pmiranda@uaeh.edu.mx (Pedro Miranda-Romagnoli), noriega@uaeh.edu.mx (Roberto Noriega-Papaqui), po295884@uaeh.edu.mx (Aurora Pontón-Gallardo-Rodríguez)

Fecha de recepción: 03/05/2022 Fecha de aceptación: 03/06/2022 Fecha de publicación: DD/MM/AAAA  
<https://doi.org/10.29057/ichi.v10i19.9147>

<sup>1</sup>matrices con ceros en las entradas 11, 22, 13 y 31



*El DOI puede ser empleado para citar este manuscrito, pero será habilitado hasta la publicación en Pádi.*

Figura B.2: Artículo aceptado en la revista Pádi.



**IMPLICACIONES DE UNA TEXTURA DE DOS CEROS EN LAS MATRICES DE MASA**  
 P. Miranda-Romagnoli, R. Noriega-Papaqui, A. Fontón-Gallardo-Rodríguez  
 pmiranda@uah.edu.mx, rnoriega@uah.edu.mx, po295884@uah.edu.mx  
 Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo



### RESUMEN

Considerando un modelo de texturas de dos ceros para las matrices de masa de los quarks, se implementa un algoritmo genético para la búsqueda numérica de valores de los parámetros libres del modelo de texturas, los cuales se acotan usando un criterio de  $\chi^2$  y los valores experimentales de la matriz  $V_{CKM}$ . Se encuentran correlaciones entre los elementos de las matrices de masa mostrándose gráficamente los resultados.

### INTRODUCCIÓN

El modelo estándar (ME) presenta a la materia a partir de los sectores bariónico y fermiónico. El sector fermiónico contiene a los quarks y leptones, los cuales se estructuran en tres familias según la masa de cada partícula, por otro lado, se tiene el sector bosónico el cual contiene a los bosones de norma y al bosón de Higgs. El sector de quarks tiene los sabores  $u, c, t, d, s, b$  y el sector de leptones los correspondientes sabores  $e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ .

### EL SECTOR DE YUKAWA DEL ME

El sector del ME donde se describen las interacciones de Yukawa con el campo escalar en el Sector de Yukawa, siendo aquí donde se describen las masas de los fermiones. El sector de quarks del Lagrangiano de Yukawa tiene la siguiente forma:

$$-\mathcal{L}_Y = \bar{Q}_{iL} (Y_{ij}^u \Phi_{ij}^u + Y_{ij}^d \Phi_{ij}^d) + h.c. \quad (1)$$

De donde se desprende el Lagrangiano de masas:

$$M_{ij}^q = \sum_{k=1}^3 (Y_{ij}^q M_k \phi_k + \delta_{ij}^q M_k^q \phi_k) \quad (2)$$

Se proponen las siguientes transformaciones unitarias, las cuales diagonalizan a  $M^{q,d}$ :

$$U = V_{CKM}^{-1} V_{qL}^{-1} \quad (3)$$

La matriz de mezcla  $V_{CKM}$  se construye como  $V_{CKM} = V_{CKM}^u V_{CKM}^d$  donde  $V_{CKM}^u V_{CKM}^u = 1$ .

### LA MATRIZ DE MEZCLA $V_{CKM}$

De manera general, la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa viene dada como:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Donde, sus valores experimentales son:

$$|V_{ud}| = 0.97401 \pm 0.00011, \quad |V_{us}| = 0.22650 \pm 0.00048, \quad |V_{ub}| = 0.0039 \pm 0.00048, \quad |V_{cd}| = 0.22636 \pm 0.00048, \quad |V_{cs}| = 0.97320 \pm 0.00011, \quad |V_{cb}| = 0.04054 \pm 0.00012, \quad |V_{td}| = 0.00854 \pm 0.00012, \quad |V_{ts}| = 0.04079 \pm 0.00012, \quad |V_{td}| = 0.00001 \pm 0.00001, \quad |V_{ts}| = 0.04033 \pm 0.00001, \quad |V_{td}| = 0.00001 \pm 0.00001, \quad |V_{ts}| = 0.039172 \pm 0.00001$$

Mientras que, para las masas de los quarks, se tiene [1]:

$$m_u = 1.23 \pm 0.21 \text{ MeV}, \quad m_d = 2.67 \pm 0.19 \text{ MeV}, \quad m_c = 0.620 \pm 0.017 \text{ GeV}, \quad m_s = 53.16 \pm 4.61 \text{ MeV}, \quad m_t = 168.26 \pm 0.75 \text{ GeV}, \quad m_b = 2.859 \pm 0.026 \text{ GeV}$$

Teóricamente  $V_{CKM}$  es una matriz unitaria y por lo tanto se puede parametrizar en términos de 3 ángulos y una fase. La parametrización más utilizada es la parametrización estándar definida por los ángulos  $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$  y la fase  $\delta_{CP}$  a través de la siguiente multiplicación de matrices:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & 0 \\ -s_{12}c_{13} & c_{12}c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{23} & s_{23} & 0 \\ -s_{23} & c_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta_{CP}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & 0 \\ 0 & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

La conexión entre la teoría y el experimento se da a través de las siguientes expresiones: [2]

$$S_{12} = \frac{|V_{ud}|}{\sqrt{1 - |V_{cb}|^2}} \quad (6)$$

$$S_{13} = \frac{|V_{ub}|}{\sqrt{1 - |V_{cb}|^2}} \quad (7)$$

$$S_{23} = \frac{|V_{td}|}{\sqrt{1 - |V_{cb}|^2}} \quad (8)$$

$$J = C_{12} S_{12} C_{13}^2 C_{23} S_{23} S_{13} \sin \delta_{CP} \quad (9)$$

\*Hemos utilizado la relación  $\cos \delta_{CP} = C_{12} y \sin \delta_{CP} = S_{12}$

### MATRICES DE MASA

Una matriz de masa del tipo texturas de 1 cero tiene la siguiente estructura:

$$M_q = \begin{pmatrix} E_q & D_q & 0 \\ 0 & C_q & B_q \\ 0 & 0 & A_q \end{pmatrix} \quad q = u, d, \quad (10)$$

y cuyos eigenvalores  $M^q$  definen las masas  $m^q$  de los quarks  $M^q = m^q$ .  $M^q$  puede ser diagonalizada por medio de una transformación ortogonal,  $O^q M^q O^{qT} = \text{Diag}(M_q, M_q, M_q)$ . De acuerdo a esto, se tiene:

$$O^q \begin{pmatrix} E_q & D_q & 0 \\ 0 & C_q & B_q \\ 0 & 0 & A_q \end{pmatrix} O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Del álgebra lineal sabemos que se tienen tres invariantes a saber:

$$\text{Traza} = E + C + A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (12)$$

$$\text{Determinante} = E(C-A)(B^2) - |D|^2 A = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (13)$$

$$\text{E.c. característica} = (E - \lambda)(C - \lambda)(A - \lambda) - |D|^2 = 0 \quad (14)$$

Racionalizando el sistema de ecuaciones anterior, se tiene:

$$|B_d| = \sqrt{\frac{(A_d - m_d^2)(A_d - m_s^2)(A_d - m_c^2)}{E_d - A_d}} \quad (15)$$

$$|D_d| = \sqrt{\frac{(E_d - m_d^2)(E_d - m_s^2)(E_d - m_c^2)}{A_d - E_d}} \quad (16)$$

$$C_d = -(A_d + E_d + m_c^2 - m_s^2 - m_d^2) \quad (17)$$

Para encontrar el rango permitido de estos parámetros que reproduzcan los valores experimentales de la  $V_{CKM}$  se utiliza un criterio de  $\chi^2$  el cual de manera general se define como: [3]

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(V_{ij}^{\text{teórico}} - V_{ij}^{\text{exp}})^2}{\sigma_{ij}^2} \quad (18)$$

Por lo que para este trabajo se tiene una  $\chi^2$  establecida por:

$$\chi^2(A_u, A_d, E_u, E_d, \delta_{CP}^u, \delta_{CP}^d) = \frac{(|V_{ud}| - |V_{ud}|)^2}{\sigma_{ud}^2} + \frac{(|V_{us}| - |V_{us}|)^2}{\sigma_{us}^2} + \frac{(|V_{ub}| - |V_{ub}|)^2}{\sigma_{ub}^2} + \frac{(|V_{cd}| - |V_{cd}|)^2}{\sigma_{cd}^2} + \frac{(|V_{cs}| - |V_{cs}|)^2}{\sigma_{cs}^2} + \frac{(|V_{cb}| - |V_{cb}|)^2}{\sigma_{cb}^2} + \frac{(|J| - |J|)^2}{\sigma_J^2} \quad (19)$$

### ALGORITMO GENÉTICO

Figure 1: Diagrama de flujo de un algoritmo genético.

### PREDICCIÓN DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ $V_{CKM}$

Con los puntos que arroja el algoritmo genético que cumplen con los criterios  $\chi^2 < 1$ ,  $\chi^2 < 0.1$  y  $\chi^2 < 0.01$ , calculamos la predicción numérica para los elementos  $V_{ud}, V_{us}, V_{ub}, V_{cd}, V_{cs}, V_{cb}$  y  $J$ .

Figure 2:  $|V_{ud}| = 0.97401 \pm 0.00011$ ,  $|V_{us}| = 0.22650 \pm 0.00048$   
 Figure 3:  $|V_{ud}| = 0.97310 \pm 0.00012$ ,  $|V_{us}| = 0.22612 \pm 0.00011$   
 Figure 4:  $|V_{ud}| = 0.97375 \pm 0.00012$ ,  $|V_{us}| = 0.22605 \pm 0.00012$

### ANÁLISIS DE LOS PARÁMETROS DE LAS MATRICES DE MASA

A continuación se grafican los elementos  $B_d, D_d$  y  $C_d$  respecto a los parámetros del modelo de 2 texturas. El eje  $x$  corresponde a  $A_u$ , el eje  $y$  corresponde a  $E_u$  y el eje  $z$  a  $B, D$  y  $C$  respectivamente.

Figure 5: Comportamiento teórico de  $B_d$ . Figure 6: Soluciones genéticas para  $B_d$ .  
 Figure 7: Comportamiento teórico de  $D_d$ . Figure 8: Soluciones genéticas para  $D_d$ .  
 Figure 9: Comportamiento teórico de  $C_d$ . Figure 10: Soluciones genéticas para  $C_d$ .

### CONCLUSIONES

- Se implementó exitosamente un algoritmo genético para encontrar, de forma numérica, los valores de los parámetros del modelo teórico de texturas. Con lo que se encontraron los puntos que tienen valores de  $\chi^2 < 1, \chi^2 < 0.1$  y  $\chi^2 < 0.01$ .
- Al graficar los elementos normalizados de las matrices de masa  $|B_d|/m_d$  y  $C_d/m_d$  se encontró que al proyectar la gráfica de  $|B_d|/m_d$  al plano  $A_u = B_d$  ( $q = u, d$ ), la curva correspondiente se puede aproximar a una elipse, mientras la gráfica correspondiente a  $C_d/m_d$  es un plano, con vector normal  $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 1)$ .
- Se encontraron puntos dentro de los rangos experimentales para los elementos de la matriz  $V_{CKM}$ .

### REFERENCIAS

- [1] Harald Fritzsch, Zhongsheng Xing, and Di Zhang. Correlations between quark mass and flavor mixing hierarchies. *Nuclear Physics B*, 974:11534, 2012.
- [2] G.C. Branco, L. Lavoura, and J.P. Silva. CP violation. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 2014, p. 199.
- [3] René Aldred, Tim Schulze-Harling, and Peter Mochel. Dns and dn's of reduced chi-squared. *arXiv preprint arXiv:1012.3724*, 2010.

Figura B.3: Póster presentado en el LXV Congreso Nacional de Física.



# Bibliografía

- [1] Zhi zhong Xing. Flavor structures of charged fermions and massive neutrinos. *Physics Reports*, 854:1–147, apr 2020.
- [2] H. Fritzsch. Calculating the cabibbo angle. *Physics Letters B*, 70(4):436 – 440, 1977.
- [3] Harald Fritzsch and Zhi-zhong Xing. Four zero texture of Hermitian quark mass matrices and current experimental tests. *Phys. Lett. B*, 555:63–70, 2003.
- [4] J. L. Diaz-Cruz, R. Noriega-Papaqui, and A. Rosado. Mass matrix ansatz and lepton flavor violation in the THDM-III. *Phys. Rev. D*, 69:095002, 2004.
- [5] J. L. Diaz-Cruz, R. Noriega-Papaqui, and A. Rosado. Measuring the fermionic couplings of the Higgs boson at future colliders as a probe of a non-minimal flavor structure. *Phys. Rev. D*, 71:015014, 2005.
- [6] Steven Weinberg. A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266, 1967.
- [7] S. L. Glashow. Partial Symmetries of Weak Interactions. *Nucl. Phys.*, 22:579–588, 1961.
- [8] Grossman S Stanley and José Job Flores Godoy. *Algebra lineal*. McGrawHill., 2012.
- [9] Harald Fritzsch, Zhi-zhong Xing, and Di Zhang. Correlations between quark mass and flavor mixing hierarchies. *Nuclear Physics B*, 974:115634, 2022.
- [10] G.C. Branco, L. Lavoura, and J.P. Silva. *CP Violation*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 2014, p. 189.
- [11] Rene Andrae, Tim Schulze-Hartung, and Peter Melchior. Dos and don'ts of reduced chi-squared. *arXiv preprint arXiv:1012.3754*, 2010.
- [12] Universidad el Pais Vasco. Algoritmos Genéticos. [www.sc.ehu.es/ccwbayes/docencia/mmcc/docs/temageneticos.pdf](http://www.sc.ehu.es/ccwbayes/docencia/mmcc/docs/temageneticos.pdf). [Online; Revisado en Junio 2022].
- [13] Noraini Razali and John Geraghty. Genetic algorithm performance with different selection strategies in solving tsp. volume 2, 01 2011.