



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

PROYECTO TERMINAL

**DISEÑAR, SIMULAR Y COMPARAR UN
OBSERVADOR DE ESTADO ADAPTABLE
PARA UN BIODIGESTOR.**

Para obtener el grado de
Maestro en ciencias en automatización y control

PRESENTA

Ing. Elmer David Tamayo Román

Director:

Dr. Pablo Antonio López Pérez

Codirector:

Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver

Comité:

Dr. Hugo Romero Trejo

Dr. Omar Sandre Hernández

Dr. Abraham Efraím Rodríguez Mata

Mineral de la Reforma Hgo., México 3 de noviembre de 2022



Ing. Elmer David Tamayo Román

**Diseñar, simular y comparar un
observador de estado adaptable
para un biodigestor.**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
 Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
 Área Académica de Computación y Electrónica

Mineral de la Reforma Hidalgo, a 21 de septiembre de 2022

Número de control ICBI-AACyE/1509/2022
 Asunto: Autorización de impresión de tema de tesis

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

El Comité Tutorial del nombre del producto que indique el documento curricular del programa educativo de posgrado titulado "Diseñar, simular y comparar un observador de estado adaptable para un biodigestor", realizado por el sustentante Elmer David Tamayo Román con número de cuenta 449795, perteneciente al programa de la Maestría en Ciencias en Automatización y Control, una vez que se ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, liene a bien extender la presente.

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir con los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
 "Amor, Orden y Progreso"


Dr. Pablo Antonio López Pérez
 Director de Tesis


Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver
 Codirector de Tesis

Comité Tutorial

Dr. Hugo Romero Trojo
 Dr. Abraham E. Rodríguez Mata
 Dr. Pablo Antonio López Pérez
 Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver
 Dr. Omar Sandre Hernández

Presidente
 Secretario
 Vocal 1
 Vocal 2
 Vocal 3

UAEH 
 Externo 
 UAEH 
 UAEH 
 UAEH 

ECVWPL

Oficina del Componente
 Calle Teresa Parra 100, Edificio 4.5, Colonia
 Ladrónesque, Mineral de la Reforma, Hidalgo,
 México, C.P. 42100
 Teléfono: +52 (571) 71 720 00 ext. 2235, 2255
 Fax: 2109
 www.uaeh.edu.mx



Figura 0.1: Autorización de impresión

Gracias a

CONACYT por la beca de Maestría
otorgada durante el periodo
Agosto 2020 - Junio 2022, con
número de registro CVU 1076457.

CITIS-UAEH, por la formación
académica brindada durante el
posgrado y el apoyo para la
realización de la presente memoria.

Agradecimientos

La culminación de este trabajo ha sido posible gracias a la colaboración de varias personas quienes me proporcionaron su ayuda, conocimientos y apoyo para tal fin. Agradezco primeramente al Dr. Pablo Antonio López Pérez y al Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver, siendo los directores principales para el desarrollo de esta tesis, al Dr. Hugo Romero Trejo, Dr. Abraham Efraím Rodríguez Mata y Dr. Omar Sandre Hernández por haber ejercido como sinodales y que gracias a sus comentarios, opiniones y propuestas, le han dado solides a este trabajo. De igual forma agradezco a los catedráticos de las materias cursadas durante el posgrado ya que ellos colocaron las bases de mi formación y por ende la culminación de ella en este instituto. En general y con mucho aprecio, ¡¡Gracias a todos!!.

Dedicatoria

Esta tesis está dedicada a :

Mi gran Dios, ya que a pesar de lo complicado y difícil del camino, me ha permitido seguir, cuidarme en el trayecto y conocerle aun mas.

Mis padres David y Norma, quienes con su apoyo incondicional me han impulsado a no darme por vencido en ningún momento, "¿Que tanto es un brinquito?"

Mis hermanos Rudy y Alonso, con los que sé que siempre podré contar y ellos conmigo.

Mi buen amigo Jorge H. que con su amistad, apoyo y compañerismo me hizo sentir en familia aún considerando la distancia y los momentos difíciles fuera de casa.

Dr. Patricio a quien admiro y respeto enormemente por haberme aconsejado y apoyado desde cuestiones académicas hasta personales con sus sabios consejos y ejemplo, "No hay peor lucha que la que no se hace".

Dr. Pablo A. que en mas de una ocasión me ha motivado a seguir adelante mostrándome el camino correcto.

Dr. Raúl, quien mas haya de sus labores académicas siempre tuvo el tiempo para escucharme.

Mis abuelos, Don Arnulfo Tamayo Tamayo y Doña Juliana Canto Pech a quienes siempre los llevaré en mi corazón esperando muy pronto volverlos a ver al sonido de la trompeta: "Maranatha".

Notación

- \mathbb{N} = Conjunto de números Naturales.
- \mathbb{R} = Conjunto de números Reales.
- tr = Traza de una matriz.
- J = Matriz Jacobiana.
- I_n = Matriz identidad de tamaño \mathbf{n} .
- x = Vector de estados del sistema.
- \hat{x} = Vector de estado estimado.
- y = Vector de salidas del sistema.
- u = Vector de entradas en el sistema.
- ξ = Incertidumbres y variaciones paramétricas dentro del sistema.
- A = Matriz que representa la dinámica del sistema.
- B = Matriz de entradas al sistema
- C = Matriz de salidas del sistema.
- $V(\cdot)$ = Dependencia de la función candidata de Lyapunov.

Resumen

Esta investigación propone el uso de observadores para realizar la medición de variables de estado que no se pueden medir en línea en el proceso de biodigestión anaerobia, considerando que en estos sistemas existen variaciones de parámetros y diferentes condiciones iniciales de operación. Se tiene como objetivo recrear las señales no medibles que son necesarias para el monitoreo y control de los procesos anaerobios de un biodigestor. El sistema a analizar es simulado utilizando las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que representan el comportamiento de un biodigestor y han sido validadas en la literatura, se muestran el comportamiento de las variables de estado (Sustrato, Biomasa, CH_4 y CO_2), para posteriormente realizar la comparación de los distintos observadores de estado y su desempeño. Además, con la ayuda de la mínima cantidad de sensores instrumentados en línea al biorreactor, podemos recrear todas las variables no medibles; y así poder reconstruir el comportamiento en general del sistema, evitando que no se encuentre toda la estructura de medición expuesta directamente a los daños físicos (corrosión, altas temperaturas, humedad) que normalmente están presentes durante el proceso físico. Una de las principales aportaciones de este trabajo es realizar la implementación de un observador adaptable para procesos anaeróbicos de un biodigestor, el observador propuesto es capaz de absorber aquellas perturbaciones e incertidumbres tales como la variación de parámetros internos, cambios en el flujo de entrada en función de la tasa de dilución, condiciones iniciales diferentes a las utilizadas en el modelado del sistema así como la presencia de ruido blanco en la señal. El estudio comparativo es realizado considerando los criterios basados en el error de observación siendo IAE (Integral Absolute Error), ISE (Integral Squared Error) e ITAE (Time-weighted Absolute Error). Finalmente entre los observadores que se consideraron, el observador robusto adaptable de orden completo el que presenta mejor índice de desempeño del error de estimación en comparación al observador robusto de orden completo y robusto de orden reducido.

Abstract

This research proposes the use of observers to measure state variables that cannot be measured on-line in the anaerobic biodigestion process, considering that in these systems there are parameter variations and different initial operating conditions. The objective is to recreate the non-measurable signals that are necessary for the monitoring and control of the anaerobic processes of a biodigester. The system to be analyzed is simulated using the ordinary differential equations (ODE) that represent the behavior of a biodigester and have been validated in the literature, the behavior of the state variables (Substrate, Biomass, CH_4 and CO_2) is shown, to later compare the different state observers and their performance. In addition, with the help of the minimum amount of sensors instrumented in line to the bioreactor, we can recreate all the non-measurable variables; and thus be able to reconstruct the overall behavior of the system, avoiding that the entire measurement structure is not directly exposed to physical damage (corrosion, high temperatures, humidity) that are normally present during the physical process. One of the main contributions of this work is the implementation of an adaptive observer for anaerobic processes of a biodigester, the proposed observer is able to absorb those disturbances and uncertainties such as the variation of internal parameters, changes in the input flow as a function of the dilution rate, initial conditions different from those used in the modeling of the system as well as the presence of white noise in the signal. The comparative study is performed considering the criteria based on the observation error being IAE (Integral Absolute Error), ISE (Integral Squared Error) and ITAE (Time-weighted Absolute Error). Finally among the observers considered, the full-order adaptive robust observer has the best estimation error performance index compared to the full-order robust and reduced-order robust observers.

Acrónimos

- IWAQ:** Asociación Internacional del Agua sobre la calidad del agua (International Water Association on Water Quality) [1].
- IVF:** Índice volumétrico de fango (Sludge volume index) [1].
- D:** Tasa de dilución (Dilution rate) [1].
- ADM1:** Modelo de digestión anaeróbica No.1 (Anaerobic Digestion Model No.1) [1].
- PPM:** Partes por millón (parts per million) [2] .
- DA:** Digestión Anaerobia (Anaerobic digestion) [2].
- DAE:** Ecuaciones Diferenciales Algebraicas (Algebraic Differential Equations) [3] .
- EDO:** Ecuación diferencial ordinaria (Ordinary differential equation) [3].
- CD:** Corriente Directa (Direct current) [4].
- TRH:** Tiempo de Retención Hidráulico (Hydraulic Holding Time) [5].
- DQO:** Demanda Química de Oxígeno (Chemical Oxygen Demand) [6].
- LMI:** Desigualdad matricial lineal (Linear Matrix Inequality) [7].
- UUA:** Estabilidad limitada uniforme en última instancia (Ultimately Uniformly Bounded-stability) [8] .
- VCD:** Voltaje de Corriente Directa (Direct Current Voltage) [9] .
- VFA:** Ácido graso volátil (Volatile Fatty Acid) [10] .

Glosario

- **Digestión Anaeróbica** Proceso en el cual microorganismos descomponen material biodegradable en ausencia de oxígeno.
- **Sensor.** Un sensor es un dispositivo que está capacitado para detectar acciones o estímulos externos.
- **DAC.** Es un conversor capaz de transformar la señal digital en analógica.
- **Sustrato.** Medio en el que se desarrollan un microorganismo.
- **Código Abierto.** El código abierto es un modelo de desarrollo de software basado en la colaboración abierta, se enfoca más en los beneficios prácticos de la colaboración
- **Biomasa.** Materia orgánica proveniente de animales o vegetales que pueden ser convertidos en energía, su descomposición a través de bacterias de manera controlada transforma energía química (gas) de residuos orgánicos.
- **Soft - Sensor.** Sensor inteligente que mediante la transformación de una señal física en voltaje o corriente eléctrica y con ayuda de modelos matemáticos es capaz de monitorizar otras señales físicas, no medidas directamente por él.
- **Sistema embebido.** Son sistemas empotrados (incrustados) basados en un microprocesador diseñado para realizar funciones dedicadas (monitorizar, en este caso).
- **Biodigestor.** Sistema sellado herméticamente, dentro del cual se controlan procesos de degradación con materia orgánica, pretendiendo obtener gases para combustión.
- **Estado (sistemas dinámicos).** El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (variables de estado). Este concepto se aplica a sistemas físicos, biológicos, económicos, sociales entre otros.
- **Variables de estado.** Subconjunto mas pequeño de variables que determinan el estado global dinámico.

Índice general

Agradecimientos	VII
Notación	XI
Resumen	XIII
Abstract	XV
Índice general	XVIII
Índice de tablas	XXI
Índice de figuras	XXII
1. Introducción	2
1.1. Antecedentes	2
1.2. Planteamiento del problema	3
1.3. Justificación	4
1.4. Objetivos	4
1.4.1. Objetivo General	4
1.4.2. Objetivos Específicos	5
1.5. Hipótesis	5
1.6. Metodología	5
1.7. Organización de la tesis	6
2. Marco Teórico	8
2.1. Preliminares	8
2.2. Discusiones sobre el capítulo	15
3. Diseño de Observador Robusto Adaptable	16
3.1. Estimación de estado	16
3.2. Observador robusto de orden completo y reducido	17
3.2.1. Observador robusto de orden reducido	19
3.3. Observador robusto adaptable de orden completo	24

3.4. Índices de desempeño	28
3.5. Discusiones sobre el capítulo	28
4. Desarrollo (Caso de aplicación)	29
4.1. Biodigestor	29
4.2. Clasificación por funcionamiento	30
4.2.1. Biodigestor discontinuo	30
4.2.2. Biodigestor semicontinuo	30
4.2.3. Biodigestor continuo	31
4.3. Modelo matemático	32
4.3.1. ADM1	32
4.3.2. Desarrollo del modelo	33
4.4. Ajuste al sistema y ecuaciones diferenciales del sistema	34
4.5. Condiciones iniciales de operación (según la literatura).	35
4.6. Estados estacionarios(puntos de equilibrio)	36
4.7. Análisis de Observabilidad	38
4.8. Simulación del modelo con datos experimentales	41
4.9. Simulación de modelo con ajustes realizados	42
4.10. Sistema Linealizado	43
4.11. Observabilidad del sistema (análisis general)	43
4.12. Perspectiva de aplicación	44
4.13. Discusiones sobre el capítulo	46
5. Resultados	47
5.1. Comparación de observadores	47
5.1.1. Aplicación de Observador Luenberger (orden completo)	47
5.1.2. Aplicación de observador de orden reducido	49
5.1.3. Aplicación de Observador Robusto de Orden Completo	51
5.1.4. Aplicación de Observador Robusto de Orden Reducido	51
5.1.5. Aplicación de Observador Robusto Adaptable de Orden Completo	52
5.1.6. Simulación y comparación de observadores con variaciones mí- nimas en las condiciones iniciales	52
5.2. Sintonización de observadores con altas variaciones en las condiciones iniciales	54
5.3. Desempeño de observadores ante variación paramétrica, C.I. diferentes, salto en D, y ruido blanco en la señal	58
5.4. Discusiones sobre el capítulo	64

6. Conclusiones y trabajo futuro	65
6.1. Conclusiones	65
6.2. Trabajo futuro	66
Bibliografía	67
A. Diseño, estructura y ensamble del sistema de medición	71
B. Conexiones electrónicas en sistema de medición	73
C. Programas	74
C.1. Adquisición de datos de manera local	74
C.2. Comunicación entre ESP32 y LCD por I2C	75
C.3. Comunicación entre ESP32 y ThingSpeak	76
D. Observadores en MatLab	79
E. Artículo y constancia de seminarios	82

Índice de tablas

4.1. Composición de Biogás	29
4.2. Condiciones de operación del biodigestor	31
4.3. Condiciones iniciales de operación según literatura	35
4.4. Condiciones iniciales de operación utilizadas	36
4.5. Valores en estado estacionario	37
4.6. Configuraciones de la matriz de salida C	39
4.7. Posibles variables de estado reconstruidas según C	40
4.8. Parámetros iniciales	40
5.1. Posibles polinomios característicos	48
5.2. Observador Luenberger de orden completo	49
5.3. Posibles polinomios característicos para observador de orden reducido	50
5.4. Observador Luenberger de orden reducido	50
5.5. Observador robusto de orden completo	51
5.6. Observador robusto de orden reducido	51
5.7. Observador robusto adaptable de orden completo	52
5.8. Observador robusto de orden reducido (ajuste de sintonización) . . .	54
5.9. Observador robusto adaptable de orden completo(ajuste de sintonización)	55
5.10. C.I de operación para simulación	55
5.11. Variación de parámetros	58

Índice de figuras

0.1. Autorización de impresión	III
1.1. Metodología	6
1.2. Estructura gráfica de la tesis	7
4.1. Funcionamiento de biodigestor discontinuo, ver [11]	30
4.2. Funcionamiento de biodigestor semi continuo, ver [11]	31
4.3. Funcionamiento de biodigestor continuo, ver [11]	32
4.4. Funcionamiento original del biodigestor en 80 días	41
4.5. Funcionamiento de biodigestor en 80 días	42
4.6. Sistema embebido de cámara móvil, ver [12]	44
4.7. Sistema embebido para bioreactor	46
5.1. Comparación de observadores estimando CH_4	53
5.2. Comparación de observadores estimando CO_4	53
5.3. Comparación de observadores estimando sustrato	53
5.4. Comparación de observadores estimando biomasa	53
5.5. Estimación de sustrato	56
5.6. Estimación de biomasa	56
5.7. Estimación de CO_2	56
5.8. Estimación de CH_4	56
5.9. Comparación de desempeño mediante índice (ISE)	57
5.10. Comparación de desempeño mediante índice (IAE)	57
5.11. Comparación de desempeño mediante índice (ITAE)	57
5.12. Salto en la tasa de dilución	59
5.13. Estimación de sustrato	60
5.14. Estimación de biomasa	61
5.15. Estimación de CO_2	61

5.16. Estimación de CH_4	62
5.17. Comparación de desempeño mediante índice (ISE)	62
5.18. Comparación de desempeño mediante índice (IAE)	63
5.19. Comparación de desempeño mediante índice (ITAE)	63
A.1. Perspectiva interna general del sistema ensamblado	71
A.2. Perspectiva en perfil sólido	72
A.3. Perspectiva en perfil blando	72
A.4. Perspectiva frontal cortada	72
A.5. Perspectiva superior cortada en perfil blando	72
B.1. electronic	73
D.1. Observador Luenberger de orden completo	79
D.2. Observador Luenberger de orden reducido	80
D.3. Estructura de observadores en Matlab	81
E.1. Seminario abril 2021	82
E.2. Seminario septiembre 2021	83
E.3. Seminario febrero 2022	84
E.4. Seminario abril 2022	85
E.5. Coloquio mayo 2022	86
E.6. Retribución social MCAC	87
E.7. Artículo pag.1	88
E.8. Artículo pag.2	89
E.9. Artículo pag.3	90
E.10. Artículo pag.4	91
E.11. Artículo pag.5	92
E.12. Artículo pag.6	93
E.13. Artículo pag.7	94
E.14. Artículo pag.8	95
E.15. Artículo pag.9	96

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Una de las necesidades principales de la humanidad (después de la alimentación), es el poder encontrar fuentes de energía en sus diferentes estados (líquida, sólida, gaseosa), aunado a esto, y por la creciente demanda de energías limpias, se considera necesario e indispensable para la humanidad y las futuras generaciones, que los métodos utilizados para la obtención de estas, sean lo menos dañinas y contaminantes para el planeta, dando paso, con estos principios de búsqueda, a las energías renovables [13].

Si bien, existe una amplia variedad y métodos que actualmente se desarrollan para la obtención de energías limpias, cabe señalar y resaltar que estas son elevadamente costosas tanto en su implementación como también el procurar su funcionamiento adecuado (mantenimiento) [14].

Uno de los métodos que es considerado viable y factible para la generación de energía por sobre otros, es por medio de la digestión anaerobia (DA) [15], este es un proceso de fermentación natural sin oxígeno, en donde material biodegradable, llamado sustrato, es transformado por microorganismos (conocidos como biomasa), a una mezcla de gases (biogas). La implementación de estos sistemas, de manera básica, en su mayoría no son costosos, posee un amplia versatilidad de instalación y principalmente son muy viables ya que trabajan con lo que podríamos considerar como desechos orgánicos, materia que abunda en gran manera en la naturaleza.

Uno de los principales resultados de la DA es la obtención de biogas, [16]. Este

tiene muchas utilidades, desde poder sustituir al combustible utilizado por motores de combustión interna [10], hasta utilidades muy simples como el gas utilizado para las actividades comunes del hogar (calefacción, gas para cocción de alimentos, etc). Los primeros inconvenientes que surgen en este tipo de procesos es que poseen un comportamiento no lineal e inestable, haciendo aún mas complicado el proceso de monitoreo y a su vez la optimización del sistema [17], es por ello que se considera la implementación de observadores de estado, principalmente adaptables, para poder estimar aquellas variables que son fundamentales y que de manera sencilla sería casi imposible calcular .

Los observadores de estado, en este caso, serán utilizados para poder llevar el monitoreo de la relación de gases que interviene en DA, como el CO_2 y CH_4 , mencionados en [16]. Estos dispositivos reflejan la precisión necesaria y suficiente para ser considerados en el análisis de sistemas DA.

1.2. Planteamiento del problema

El comportamiento de sistemas biológicos analizados por medio de herramientas matemáticas (observadores de estado) o digitales (Soft-Sensores), actualmente no cuentan con la precisión y desempeño esperados en el monitoreo de biorreactores, ya que constantemente se presentan variaciones paramétricas en el sistema provocando que se deba de generar un reajuste (manual o automático) en el algoritmo diseñado para el seguimiento de la planta.

Estos ajustes pocas veces se realizan al tiempo en que la planta se encuentra en marcha y, para aquellas plantas en donde el procedimiento se efectúa de manera automática, se posee un muy corto rango para ello, por lo que en la mayoría de las ocasiones para hacer efectiva la calibración se opta por hacerla de manera manual.

En el monitoreo de sistemas biológicos (la observación de las dinámicas en un biorreactor), como lo es en este caso, las incertidumbres y variaciones paramétricas presentadas son aún mayores, por lo que se necesita una herramienta que sea capaz de adaptarse de manera automática y con un amplio grado de autoajuste a los inconvenientes que pudieran surgir.

Para darle solución a las necesidades mencionadas, proponemos el desarrollo de

un observador de estado adaptable que acepte un amplio rango de variaciones paramétricas en el biodigestor y a su vez disminuya considerablemente y de manera automática el error de observación del sistema entre el real y el estimado. También se espera que al implementar el observador en línea, este pueda disminuir la cantidad de sensores a implementar, esto es posible por la cantidad de información disponible que el observador puede predecir, por lo que se aumentará considerablemente el tiempo efectivo de uso en los sistemas de medición ya que se evita que estos se encuentren en condiciones no optimas para su funcionamiento.

1.3. Justificación

El instrumentar procesos biológicos en donde se presenta digestión anaerobia, son en su mayoría altamente costosos [18, 19] los cuales suelen ser realizados para un sistema en específico, con determinadas variaciones paramétricas en especial, logrando con ello, el alto grado de pérdida en efectividad ante posibles variaciones paramétricas que se encuentran presentes en estos bioprocesos. A esto se agrega el alto índice de degradación que sufren los sistemas de medición específicos al estar en constante contacto con condiciones extremas de funcionamiento. Es por ello que es necesario lograr reducir el coste de instrumentación para estos sistemas DA de manera considerable, al utilizar observadores de estado que puedan ser capaces de estimar (en base al modelo matemático de la planta, sensores en línea y de bajo costo) el comportamiento general de las variables dentro del sistema en este caso particular, el estimar biogás, biomasa, metano y dióxido de carbono, así como también, proporcionar dentro del propio modelo, un sistema, que pueda autoajustarse en un amplio rango de variaciones paramétricas, mejorando con ello su funcionamiento y adaptabilidad para diferentes condiciones de operación.

1.4. Objetivos

Describimos a continuación los objetivos específicos que permitirán el alcance general de este trabajo, siendo reflejado dentro del objetivo general.

1.4.1. Objetivo General

- Comparar y simular un observador de estado adaptable para la estimación de variables de estado que no se pueden medir en línea en un biodigestor.

1.4.2. Objetivos Específicos

- Simular un modelo cinético validado experimentalmente que servirá de referencia para la implementación de un observador de estado adaptable.
- Implementar y diseñar observadores de estado de orden reducido, orden completo y robusto que permitan realizar una comparación con el observador propuesto.
- Diseñar y comparar un observador de estado adaptable con diferentes condiciones de operación utilizando índices de desempeño.

1.5. Hipótesis

Es posible crear un observador de estado que pueda acoplarse y estimar variables de manera efectiva, variaciones paramétricas y operacionales que presenta un sistema dinámico no lineal, siendo capaz autoajustarse y tener su propia adaptabilidad en el sistema.

1.6. Metodología

Los pasos para cumplir los objetivos específicos y por ello el general de este trabajo son; primeramente realizar el análisis de los fenómenos bioquímicos que serán observados, posterior a ello, interpretar el modelo matemático que interviene en el y que, por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), describa el modelo bioquímico y su comportamiento.

A partir de esto se realizarán pruebas de simulación con parámetros ya reportados, validando el correcto funcionamiento del modelo y posteriormente un ajuste de los parámetros físicos de operación con los que trabajaremos.

La aplicación de la teoría relacionada al control y la observabilidad es efectuada posteriormente sobre el modelo matemático del sistema, siendo la necesaria para obtener los propósitos que en esta investigación se pretenden, esto incluye la observación de estados por los distintos métodos que ya se conocen para luego trabajar en el observador adaptable.

Finalmente una vez realizado el observador adaptable y haber validado su funcionamiento utilizando algoritmos necesarios y de plataforma libre, se realizará el algoritmo necesario para su posible implementación en tiempo real en los trabajos posteriores.

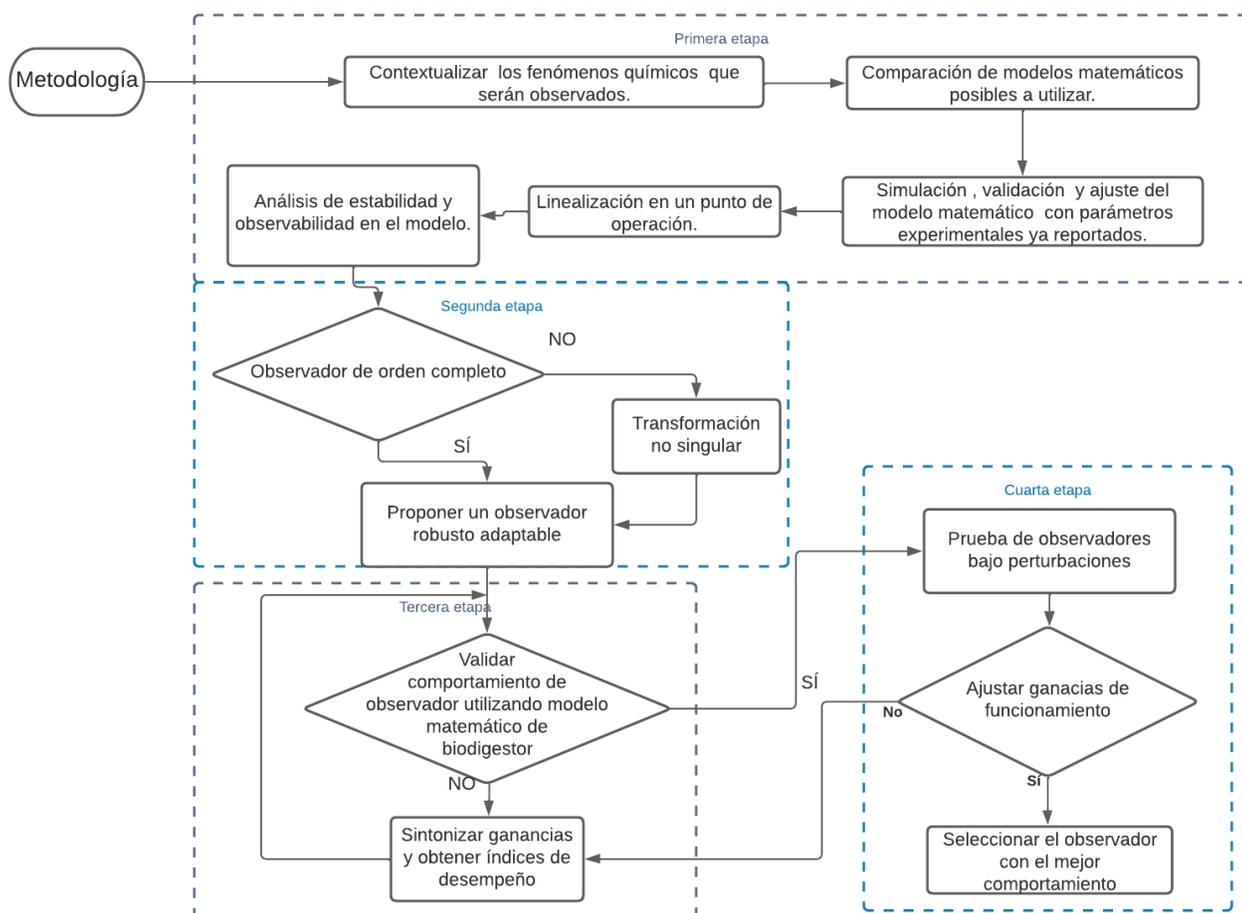


Figura 1.1: Metodología

1.7. Organización de la tesis

Este trabajo se encuentra estructurado por seis capítulos. En el capítulo 1 se presenta el planteamiento de la problemática a solucionar, la justificación de ello, el objetivo general y objetivos específicos, la hipótesis y metodología. En el capítulo 2 se encuentra el marco teórico sobre el que sustentamos el trabajo, este contiene las herramientas matemáticas y algunas propiedades que son necesarias. El capítulo 3 presenta el desarrollo matemático utilizado en la formulación de los observadores, tales como un Observador Robusto de Orden Completo, Observador Robusto de Orden

Reducido y el Observador Robusto Adaptable de Orden Completo, todos estos para sistemas en tiempo continuo. Dentro del Capítulo 4 realizamos el análisis y pruebas del modelo matemático que representa nuestro sistema biológico, así como diferentes ajustes, para poder luego aplicar la teoría de observación presentada en el capítulo anterior. En el capítulo 5 se encuentran los resultados y comparaciones entre los diferentes observadores que han sido aplicados al modelo biológico. Las conclusiones finales y los trabajos posteriores a este se encuentran en el Capítulo 6.

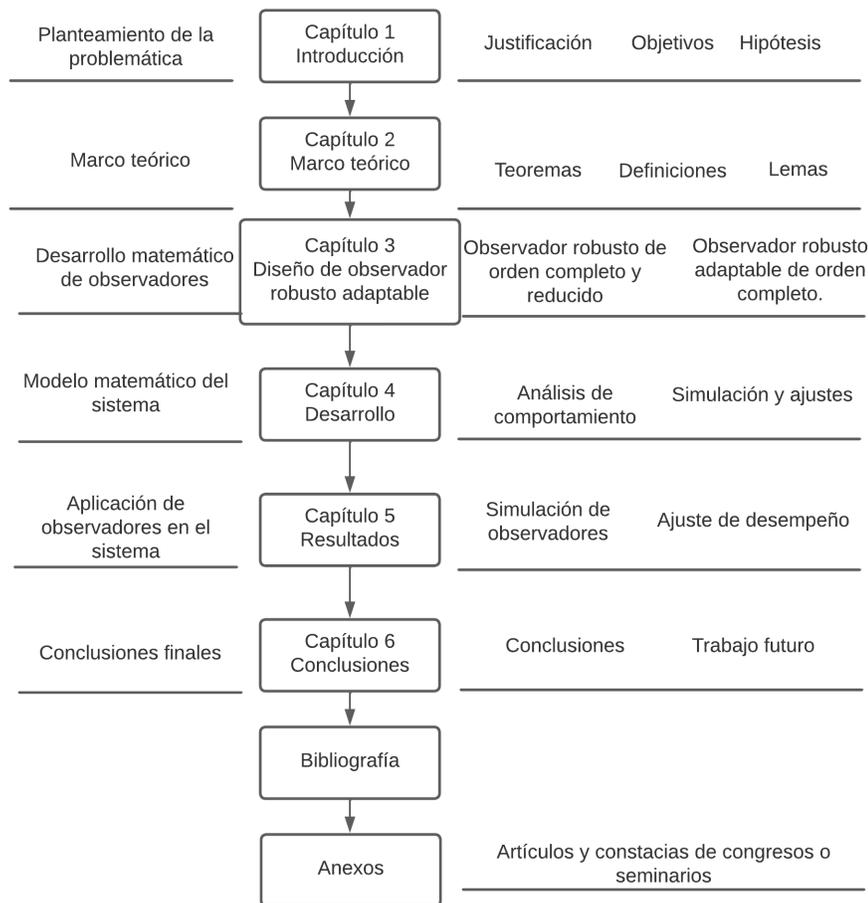


Figura 1.2: Estructura gráfica de la tesis

Capítulo 2

Marco Teórico

Se describen a continuación las herramientas matemáticas más importantes utilizadas para el desarrollo del presente trabajo, así como también los procedimientos, algorítmicos o planteamientos que son utilizados frecuentemente en los siguientes capítulos.

2.1. Preliminares

A continuación, se muestran las herramientas matemáticas más importantes que se utilizan en el presente trabajo.

Se estudian sistemas dinámicos modelados por un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas entre sí de la forma compacta siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u + \xi(t), \\ y &= h(x),\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde $x = x(t)$, $y = y(t)$, $x(t_0) = x_0 \forall t \geq t_0$.

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}, \quad h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

con $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas de control y $\xi(t) \subset \mathbb{R}^n$ es el término que representa las incertidumbres y variaciones paramétricas dentro del sistema. Finalmente y es la salida del sistema, es decir, representa las variables físicamente medible; con todo esto se busca la observación de

las variables de estado que no pueden ser medidas, pero si estimadas.

Teorema 1 Existencia y unicidad [20]

Sea f continua a tramos en t que satisface la condición de Lipschitz

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall x, y \in B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq r\} \quad \forall t \geq t_0.$$

Entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0,$$

tiene una única solución.

Definición 1 Estado estacionario [20]

Un punto $x = x^*$ en espacio de estados es un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, con $u = u^*$, si tiene la propiedad de que la condición inicial del estado x^* , permanece en x^* para todo tiempo t , es decir, x^* es punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x^*) + g(x^*)u^*$.

Lema 1 Lema de comparación [20]

Considere la ecuación diferencial escalar

$$\dot{u} = L(u), \quad u = u(t), \quad u(t_0) = u_0,$$

donde $L(u)$ es continua en t y localmente Lipschitz en u , para todo $t \geq 0$ y toda $u \in J \subset \mathbb{R}$. Sea $[t_0, T)$ (T puede ser infinito) el intervalo máximo de la existencia de la solución u , y suponga $u \in J$ para todo $t \in [t_0, T)$. Sea $v = v(t)$ una función continuamente diferenciable cuya derivada por el lado derecho D^+v satisface la desigualdad diferencial

$$D^+v \leq L(v, t), \quad v(t_0) \leq u_0,$$

con $v \in J$ para todo $t \in [t_0, T)$. Entonces $v < u$ para todo $t \in [t_0, T)$.

Definición 2 Estabilidad [20]

El punto de equilibrio $x^* = 0$ del sistema (2.1) es estable, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Definición 3 Uniformemente estable [20]

El punto de equilibrio $x^* = 0$ del sistema (2.1) es uniformemente estable, si para cada $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$. independiente de t_0 tal que se cumple

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Definición 4 Asintóticamente estable [20]

El punto de equilibrio $x^* = 0$ es asintóticamente estable, si éste es estable, además si existe $c = c(t_0) > 0$ tal que $x(t) \rightarrow 0$ en $t \rightarrow \infty$, para todo $\|x(t_0)\| < c$.

Definición 5 Exponencialmente estable [20]

El punto de equilibrio x^* es exponencialmente estable, si existe un $\alpha > 0$, $\beta \in \mathfrak{R}$ tal que

$$x_0 \in B_r \Rightarrow \|x(t)\| < \beta e^{-\alpha(t-t_0)} x_0.$$

Definición 6 Estabilidad uniformemente últimamente acotado, (estabilidad UUA) [20]

La solución del sistema (2.1) se dice que es uniformemente últimamente acotado estable, si es uniformemente estable y existe un $c > 0$ con cota última $b > 0$ independiente de t_0 es decir para $a \in (0, c)$ existe $T = T(a, b) > 0$, tal que

$$\|x(t_0)\| \leq a \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T.$$

Teorema 2 Teorema de Lyapunov [20]

Sea x^* un punto de equilibrio del sistema autónomo, $D \in \mathfrak{R}^n$ el dominio que contiene el origen $x = 0$. Sea $V : D \rightarrow \mathfrak{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0, \quad \text{en } D - \{0\}.$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{en } D.$$

entonces x^* es estable. Además, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{en } D - \{0\},$$

entonces x^* es asintóticamente estable.

Definición 7 Conjunto atractivo [20]

Sea x^* un punto de equilibrio del sistema (2.1), sea $V(x)$ una función de energía. El conjunto atractivo R_A esta definido por

$$R_A = \left\{ x \in D \mid \dot{V}(x) < c_1 \right\}. \quad (2.2)$$

Teorema 3 [8] Sea una función real $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\frac{d}{dt}V(x) \leq -\alpha V(x) + \beta, \quad (2.3)$$

se satisface, con α, β escalares positivos. Entonces, $V(x)$ es un conjunto atractivo, además la propiedad

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} V(x) \leq \frac{\beta}{\alpha}, \quad (2.4)$$

se cumple.

Teorema 4 Teorema de Taylor [21] Sea $r \geq 1$ un entero positivo y la función $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ diferenciable r veces en el punto $a \in \mathfrak{R}$. Entonces existe una función $h_r : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que

$$f(x) = f(a) + \dot{f}(a)(x-a) + \frac{\ddot{f}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(r)}(a)}{r!}(x-a)^r + h_r(x)(x-a)^r, \quad (2.5)$$

donde $\lim_{x \rightarrow a} h_r(x) = 0$. Estos son los llamados términos de orden superior.

Para el caso $x \in \mathfrak{R}^n$, las derivadas de la función f , se obtienen mediante la matriz Jacobiana definida por \mathbf{J}

$$f(a) = \left. \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right|_{x=a} = \mathbf{J}(a)_{ij} \quad (2.6)$$

Ahora, si:

$$a = x_{op}, \quad u_{op} \quad (2.7)$$

Donde $x_{op} \in \mathfrak{R}$ representa los valores de las variables de estado y $u_{op} \in \mathfrak{R}$ la entrada actual del sistema en un punto de operación a sobre el que se linealizará el sistema, considerando a (2.6), con (2.7), entonces este queda definido por :

$$A = \left. \frac{df(\cdot)}{dx} \right|_{x_{op}, u_{op}}, \quad (\dim(A) = n \times n) \quad (2.8)$$

$$B = \left. \frac{df(\cdot)}{du} \right|_{x_{op}, u_{op}}, \quad (\dim(B) = n \times m) \quad (2.9)$$

Teorema 5 Teorema de observabilidad por Kalman [22] Dados $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $t \in \mathbb{R}^+$, consideramos el siguiente sistema:

$$\dot{x} = Ax \quad (2.10)$$

$$y = Cx$$

Entonces, el sistema (2.10) se dice que es completamente observable si existe una señal $u(t)$ que permite transferir los estados iniciales del sistema $x_0 = x(t_0)$ a cualquier otro estado x_{t_f} en un tiempo finito $T = t_f - t_0$, tal que el rango de Q_0 es n ,

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Lema 2 Desigualdad Lambda [7] Siendo que $m, n \in \mathbb{N}$, para cualquier matriz $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$, y cualquier matriz definida positiva simétrica $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se cumplen las siguientes desigualdades:

$$X^Y + Y^T X \leq X^T \Lambda X + Y^T \Lambda^{-1} Y \quad (2.12)$$

Definicion 8 Transformación No Singular [23] Siendo que $m, n, p \in \mathbb{N}$, definimos la siguiente transformación no singular utilizada para estimar las variables no medibles $z_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$, usando la información disponible $z_1 \in \mathbb{R}^p$, donde $z = \Gamma x$ tal que $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} N_C^T \\ C \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Por lo que $N_C \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}$ es el espacio nulo de la matriz C , por lo que de la linealización resultante del sistema en el Teorema 4, tendremos :

$$\dot{z} = \mathcal{A}z + \mathcal{B}u \quad (2.14)$$

$$y = \mathcal{C}z$$

Donde $\mathcal{A} = \Gamma A \Gamma^{-1}$, $\mathcal{B} = \Gamma B$, $\mathcal{C} = C \Gamma^{-1}$, quedando el sistema con la siguiente estructura:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11} \\ \mathcal{B}_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = [0 \quad I_\Gamma] \quad (2.15)$$

Teniendo a $\mathcal{A}_{11} \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times (n-p)}$, $\mathcal{A}_{12} \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times p}$, $\mathcal{A}_{21} \in \mathfrak{R}^{p \times (n-p)}$ y $\mathcal{A}_{22} \in \mathfrak{R}^{p \times p}$, considerando que el vector z esta conformado como :

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Definicion 9 Algunas propiedades de la traza de una matriz [7] Sea tr la traza de una matriz, tal que $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ y $\alpha \in \mathfrak{R}$, entonces :

- Propiedad 1 : $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- Propiedad 2 : $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$
- Propiedad 3 : $tr(AB) = tr(BA)$

Propiedad 1 :

$$tr(A + B) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + b_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = tr(A) + tr(B) \quad (2.17)$$

Propiedad 2 :

$$tr(\alpha A) = \sum_{i=1}^n \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^n a_{ii} = \alpha tr(A) \quad (2.18)$$

Propiedad 3 :

$$tr(AB) = tr(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^n d_{kk} = tr(BA) \quad (2.19)$$

Lema 3 . Sea $V(e)$ una función, tal que se satisface:

$$\dot{V}(e) \leq -\alpha V(e) + \varepsilon \delta, \quad V(t_0) = V_0 \quad (2.20)$$

por lo que para todo valor escalar positivo ε y escalar negativo α la función $V(e)$ es estable en el sentido UUA (ver definición 6) , considerando que:

$$\kappa = \frac{\varepsilon \delta}{\alpha} \quad (2.21)$$

donde κ acota las incertidumbres presentes en el sistema $\|\xi^2\| \leq \delta$.

Prueba de Lema 3. La solución de la desigualdad diferencial en 3.16 esta dada como:

$$V(e_2(t)) \leq \kappa + [V(e_2(t_0)) - \kappa]e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (2.22)$$

por lo que κ define a 2.22 si $\kappa = V(e_2(t_0))$ y el límite tiende a la condición inicial $t \rightarrow t_0$, quedando como:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} V(e_2(t)) = V(e_2(t_0)) \quad (2.23)$$

concluyendo así estabilidad última uniformemente acotada (EUUA), ver Definición 6.

Lema 4 Sea la función V que satisface :

$$\frac{d}{dt}V(t) + \alpha V(t) \leq \beta, \quad V(t_0) = V_0, \quad (2.24)$$

entonces, para todo α y β escalar positivo, la función de almacenamiento $V(t)$ es estable en el sentido **UUA**, (vea definición 6), con

$$b = \frac{\beta + \alpha\gamma}{\alpha}, \quad T = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{\alpha V(t_0) - \beta}{\beta\gamma} \right\} + t_0, \quad (2.25)$$

para un $0 < \gamma \in \Re$ escalar positivo lo suficientemente pequeño.

Prueba de Lema 4. Por el lema de comparación, la solución para (2.24) se determina mediante el peor de los casos, esto indica que se requiere la solución basada en la cota superior. Para ello multiplique la ecuación (2.24) se obtiene lo siguiente:

$$e^{\alpha t} \left\{ \frac{d}{dt}V(t) + \alpha V(t) \right\} = \beta e^{\alpha t} \quad (2.26)$$

La solución para esta ecuación diferencial, en $s \in [t_0, t]$ se define por

$$V_2(t) = \frac{\beta}{\alpha} + \left\{ V_2(t_0) - \frac{\beta}{\alpha} \right\} e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (2.27)$$

Esto implica que la solución para (2.24) se determina de la siguiente forma:

$$V(t) \leq \frac{\beta}{\alpha} + \left\{ V(t_0) - \frac{\beta}{\alpha} \right\} e^{-\alpha(t-t_r)} \quad (2.28)$$

Concluyendo que dicha solución satisface (2.25), adicionalmente $V_2(t)$ es un conjunto invariante y atractivo, demostrando con esto el lema.

2.2. Discusiones sobre el capítulo

El análisis de un sistema no-lineal se realiza vía una linealización por aproximación sobre un punto de operación (Teorema de Taylor) para luego aplicar los conceptos de estabilidad, observabilidad. Posterior a ello en el desarrollo del observador robusto utilizando las propiedades de la función traza, son consideradas como herramientas fundamentales que nos permiten desarrollar el observador adaptable con un correcto sustento matemático.

Capítulo 3

Diseño de Observador Robusto Adaptable

Se presenta el desarrollo matemático que sustenta al Observador robusto adaptable, partiendo con la descripción de observadores robustos de orden completo y reducido para introducir posterior a ello la ley de adaptabilidad, los observadores se encuentran desarrollados para sistemas en tiempo continuo y son los siguientes:

- Observador Robusto de Orden Completo
- Observador Robusto de Orden Reducido
- Observador Robusto Adaptable de Orden Completo

3.1. Estimación de estado

La principal razón de utilizar un estimador de estado es proveer información de un sistema donde la adquisición por métodos convencionales (sensores físicos) es complicado, o bien, porque el costo de monitorización es elevado. La información que se obtiene de estos sistemas (estimadores de estado) se utiliza en la mayoría de las ocasiones para el modelado, identificación, motorización o control del sistema.

De manera generalizada los observadores de estado, son herramientas virtuales, que permiten estimar las variables o estados de un sistema en base a mediciones de las señales de salida. Estos observadores permiten enviar información estimada acerca del valor que toman dichos estados, permitiendo conocer un aproximado del valor real.

Se le considera una herramienta virtual, siendo que se desarrolla como un software o programa dentro de un microprocesador con la ayuda de un sensor físico [4]. Se clasifican en 3 tipos: Observadores de orden completo, observadores de orden reducido y observadores de orden mínimo.

- **Observador de orden completo:** El observador capta todas las variables del sistema, sin importar si algunas están disponibles para una medición directa [24].
- **Orden reducido:** El observador estima menos de n variables de estado en donde n es la dimensión del vector de estados [24].
- **Observador de orden mínimo:** Es un observador de orden reducido con el mínimo orden posible, es decir, si n es la dimensión del vector de estado y m es la dimensión del vector de salidas, el observador de orden mínimo observa $n - m$ variables [24].

3.2. Observador robusto de orden completo y reducido

A este observador de estados también se le conoce como observador de estados de Luenberger, debido a que inicialmente fue propuesto por Luenberger. La teoría propuesta es tomada de [3].

$$\dot{x} = Ax + Bu + \xi \quad (3.1)$$

$$y = Cx$$

Donde $x \in \mathfrak{R}^n$, $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $u \in \mathfrak{R}^m$, $y \in \mathfrak{R}^p$, $C \in \mathfrak{R}^p$, considerando también a ξ como las incertidumbres que se pueden considerar dentro del sistema, acotando a ξ , como:

$$\|\xi\| \leq \delta \quad (3.2)$$

considerando que δ queda expresado en la definición 6, las dinámicas del sistema estimado están representadas de tal forma:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - L(y - C\hat{x}) \quad (3.3)$$

por lo que si consideramos una función de error que existe entre (3.1) y (3.3) como :

$$e = x - \hat{x} \quad (3.4)$$

Así como también la dinámica de e (3.4), tenemos que :

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \quad (3.5)$$

Por lo que la formulación de \dot{x} queda expresado por completo de la siguiente forma:

$$\dot{e} = Ax + Bu + \xi - A\hat{x} - B\hat{u} + L(y - C\hat{x}) \quad (3.6)$$

Sin olvidar que e , se expresa como (3.4), y realizando la factorización correspondiente en (3.6) encontramos:

$$\dot{e} = (A + LC)e + \xi \quad (3.7)$$

Proposición 1 Observador robusto de orden completo Considerando que el sistema (3.1) es observable, entonces \hat{x} reconstruye al estado x mediante el observador (3.3), si el conjunto de soluciones ($0 < P \in \mathfrak{R}^{n \times n}, 0 < \alpha \in \mathfrak{R}, 0 < \varepsilon \in \mathfrak{R}$) satisface la desigualdad matricial:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} A^T X + XA + XY + Y^T X + \alpha X & X \\ X & -\varepsilon \mathbf{I}_n \end{bmatrix} < 0, \quad (3.8)$$

garantizando así que la función de error de observación (3.4) sea estable en el sentido último uniformemente acotado, (ver Definición 6).

Demostración 1 Defina la función de energía de la siguiente forma:

$$V(e) = e^T P e \quad (3.9)$$

donde su deriva respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias de (3.7), se determina como:

$$\dot{V}(e) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} = e^T (A^T + C^T L^T) P e + C^T P (A + LC) e + \xi^T e + e^T P \xi \quad (3.10)$$

Al definir el vector extendido $[e \ \xi]^T$, la expresión anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$\dot{V}(e) = \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A^T + C^T L^T)P + P(A + LC) & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Para preservar la igualdad en (3.11), al sumar y restar los términos $\alpha V(e)$ y $\varepsilon \|\xi\|$ se obtiene lo siguiente:

$$\dot{V}(e) = \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T L^T P + PLC + \alpha P & P \\ P & -\varepsilon \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix} - \alpha V(e) + \varepsilon \|\xi\| \quad (3.12)$$

Bajo el supuesto que $\|\xi\| \leq \delta$, se tiene que $\varepsilon \|\xi\| \leq \varepsilon \delta$, además considerando el siguiente cambio de variable

$$X = P \qquad Y = PL \quad (3.13)$$

la ecuación (3.12) resulta en la siguiente desigualdad:

$$\dot{V}(e) \leq \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix} - \alpha V(e) + \varepsilon \delta \quad (3.14)$$

Si la matriz W es definida negativa se satisface lo siguiente:

$$\dot{V}(e) \leq \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix} - \alpha V(e) + \varepsilon \delta \leq -\alpha V + \varepsilon \delta \quad (3.15)$$

implicando así, lo siguiente:

$$\dot{V}(e) \leq -\alpha V + \varepsilon \delta \quad (3.16)$$

Note que (3.16) satisface el Lema 4, QED.

3.2.1. Observador robusto de orden reducido

Para el desarrollo del observador robusto de orden reducido, consideramos al sistema (3.1) que se obtuvo de (2.1) al aplicarle una linealización basada en una expansión en series de Taylor (ver Teorema 4) al que posteriormente se le realizó una transformación no singular para separar la parte medible de aquella que no lo es según la Definición 8, por lo que obtenemos al sistema (2.14), esto nos permite expresar :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \mathcal{A}_{11} z_1 + \mathcal{A}_{12} z_2 + \mathcal{B}_1 u \\ \dot{z}_2 &= \mathcal{A}_{21} z_1 + \mathcal{A}_{22} z_2 + \mathcal{B}_2 u \end{aligned} \quad (3.17)$$

Donde obtenemos $z_1 \in \mathfrak{R}^p$ representa la parte medible y $z_2 \in R^{n-p}$ las no medibles, siendo \dot{z}_1 y \dot{z}_2 sus respectivas dinámicas.

Deseamos estimar (reconstruir) la variable z_2 ya que no podemos medirla directamente por lo que a partir de valores conocidos (z_1) y un valor estimado en \hat{z}_2 reconstruiremos a z_2 . Realizando el remplazo correspondiente a ello usaremos a la variable ψ (3.18), para determinar esta aproximación de variables.

$$\psi = \hat{z}_2 - Ly \rightarrow \hat{z}_2 = \psi + Lz_1 \quad (3.18)$$

Considerando a ψ en (3.18) la dinámica $\dot{\psi}$ queda expresado como $\dot{\psi} = Q\psi + Ry + Su$, siendo Q , R , y S ganancias que se proponen para este sistema. En base a lo anterior, expresamos el error e_2 , en el que se relaciona a z_2 y \hat{z}_2 de la siguiente manera:

$$e_2 = z_2 - \hat{z}_2 \quad (3.19)$$

Al igual que la dinámica del error en (3.20):

$$\dot{e}_2 = \dot{z}_2 - \dot{\hat{z}}_2 \quad (3.20)$$

Queda definida entonces $\dot{\hat{z}}_2$ considerando a ϕ y su dinámica $\dot{\phi}$ de (3.18) en (3.21):

$$\dot{\hat{z}}_2 = Q(\hat{z}_2 - Lz_1) + Rz_1 + Su + L(\mathcal{A}_{11}z_1 + \mathcal{A}_{12}z_2 + \mathcal{B}_1u) \quad (3.21)$$

La dinámica de \dot{z}_2 se encuentra en (3.17) y utilizando a (3.21) para remplazar la expresión que refleja la dinámica del error \dot{e}_2 en (3.20), tenemos (3.22), a esto agregamos el error e_2 dentro del sistema, (3.22), sin alterar la expresión:

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 = (\mathcal{A}_{21} + QL - R - L\mathcal{A}_{11})z_1 + (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12})z_2 + (\mathcal{B}_2 - S - L\mathcal{B}_1)u \\ - Q\hat{z}_2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

añadimos el término $Qz_1 - Qz_1$, por lo que e_2 queda expresada en (3.23):

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 = (\mathcal{A}_{21} + QL - R - L\mathcal{A}_{11})z_1 + (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12})z_2 + (\mathcal{B}_2 - S - L\mathcal{B}_1)u - Q\hat{z}_2 \\ + Qz_1 - Qz_1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

factorizando a (3.23), tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 = (\mathcal{A}_{21} + QL - R - L\mathcal{A}_{11})z_1 + (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12} - Q)z_2 + (\mathcal{B}_2 - S - L\mathcal{B}_1)u \\ + Qe_2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

De (3.24) es posible obtener el valor de las matrices R , Q y S , siendo (3.25), (3.26), y (3.27), respectivamente, quedando como:

$$\mathcal{A}_{21} + QL - R - L\mathcal{A}_{11} = 0 \quad (3.25)$$

$$\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12} - Q = 0 \quad (3.26)$$

$$\mathcal{B}_2 - S - L\mathcal{B}_1 = 0 \quad (3.27)$$

Al garantizar la obtención de S , R y Q , la dinámica del error \dot{e}_2 queda en términos de Qe_2 .

$$\dot{e}_2 = Qe_2 = \dot{z}_2 - \dot{\hat{z}}_2 \quad (3.28)$$

Si garantizamos que el comportamiento de Q en la dinámica del error \dot{e}_2 en (3.24) sea Hurwitz por medio de la asignación de polos, entonces el comportamiento del error e_2 será :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_2 = 0 \quad (3.29)$$

Se ha presentado únicamente las bases necesarias para desarrollar el algoritmo matemático correspondiente al observador robusto de orden reducido, para ello partimos de las dinámicas \dot{z}_1 y \dot{z}_2 en (3.17), tomando en cuenta las incertidumbres representadas en (3.2), quedando estas como:

$$\dot{z}_1 = \mathcal{A}_{11}z_1 + \mathcal{A}_{12}z_2 + \mathcal{B}_{11}u + \xi_1 \quad (3.30)$$

$$\dot{z}_2 = \mathcal{A}_{21}z_1 + \mathcal{A}_{22}z_2 + \mathcal{B}_{21}u + \xi_2$$

Proposición 2 Observador robusto de orden reducido Consideramos que el sistema (3.30) es observable, por lo que \hat{z} reconstruye al estado z utilizando el observador

propuesto en (3.18) si existe un conjunto de soluciones para ($0 < P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $L \in \mathfrak{R}^{n \times m}$) satisface que :

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} X\mathcal{A}_{22} - Y\mathcal{A}_{12} + \mathcal{A}_{22}^T P - \mathcal{A}_{12}^T Y^T + \alpha X & -Y & X \\ & -Y^T & 0 \\ & X & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -\varepsilon \mathbf{I}_{n \times n} \\ 0 \\ -\varepsilon \mathbf{I}_{n \times n} \end{matrix} < 0 \quad (3.31)$$

donde, $0 > \alpha \in \mathfrak{R}$, $0 < \varepsilon \in \mathfrak{R}$ por lo que el error de convergencia garantiza estabilidad últimamente uniformemente acotada (ver Definición 6).

Demostracion 2 La salida y es establecida como:

$$y = z_1 \quad (3.32)$$

Remplazamos a (3.32) en (3.18):

$$\psi = \hat{z}_2 - Lz_1 \quad (3.33)$$

La dinámica del error \dot{e}_2 en (3.20) considerando al sistema (3.30) que se encuentra uniformemente acotado por ξ_1 y ξ_2 , tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 = (\mathcal{A}_{21} - R - L\mathcal{A}_{11} + QL)z_1 + (\mathcal{B}_2 - S - L\mathcal{B}_{11})u + Qe_2 + \xi_2 - \xi_1 L \\ + (\mathcal{A}_{22} + A_{12} - Q)z_1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

De 3.34, obtenemos las matrices Q , S y R , esto garantiza una primera convergencia del sistema entre z_2 y \hat{z}_2 , siendo (3.25), (3.26), y (3.27) respectivamente, por lo que la dinámica \dot{e}_2 queda como:

$$\dot{e}_2 = Qe_2 + \xi_2 - L\xi_1 \quad (3.35)$$

Las cotas marcadas como ξ_1 y ξ_2 son reagrupadas en un vector ξ , este define las incertidumbres que se encuentran en el sistema.

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \|\xi_1\|^2 \leq \delta_1 \text{ y } \|\xi_2\|^2 \leq \delta_2 \quad (3.36)$$

Por lo que de 3.36, consideramos que:

$$\|\xi\|^2 \leq \sqrt{\|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2} \leq \delta \quad (3.37)$$

Proponemos una función de energía:

$$V(e_2) = e_2^T P e_2 \quad \text{donde } P^T > 0 \quad (3.38)$$

La dinámica de (3.38):

$$\dot{V}(e_2) = \dot{e}_2^T P e_2 + e_2^T \dot{e}_2 \quad (3.39)$$

Reorganizando a (3.36) como:

$$[-L \quad \mathbf{I}_n] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = -L\xi_1 + \xi_2 \quad (3.40)$$

Tomando a (3.35) y considerando que $Q = (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12})$ y (3.40), (3.39) queda como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_2) = e_2^T (\mathcal{A}_{22}^T - \mathcal{A}_{12}^T L^T) P e_2 + \xi \begin{bmatrix} -L \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} P e_2 + e_2^T P (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12}) e_2 \\ + e_2^T P [-L \quad \mathbf{I}_n] \xi \end{aligned} \quad (3.41)$$

Definimos al vector extendido $[e \quad \xi]^T$, por lo que reescribimos a (3.41) obteniendo:

$$\dot{V}(e_2) = \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12}) + (\mathcal{A}_{22}^T - \mathcal{A}_{12}^T L^T)P & PL & P \\ -L^T P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

A la ecuación 3.42 agregamos valores escalares denominados $\alpha V(e_2)$ y $\varepsilon \|\xi\|$, preservando la igualdad al sumar y restar estos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_2) = \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12}) + (\mathcal{A}_{22}^T - \mathcal{A}_{12}^T L^T)P & PL & P \\ -L^T P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} + \alpha V(e_2) \\ - \alpha V(e_2) + \varepsilon \|\xi\|^2 - \varepsilon \|\xi\|^2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Al igual que ε multiplica a $\|\xi\|^2$, por lo que tenemos:

$$\varepsilon \|\xi\|^2 \leq \varepsilon \delta \quad \text{ya que} \quad \|\xi\|^2 \leq \delta \quad (3.44)$$

Para encontrar solución a (3.43), planteamos el siguiente cambio de variable:

$$X = P \quad Y = PL \quad (3.45)$$

Por lo que tenemos que (3.43), queda expresado como:

$$\dot{V}(e) \leq \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix} - \alpha V(e) + \varepsilon \delta \quad (3.46)$$

Es importante recordar que la representación de la norma 2 en $\varepsilon\|\xi\|^2$, puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\varepsilon\|\xi\|^2 = \varepsilon\xi^T\xi = \xi^T\varepsilon I\xi \quad (3.47)$$

Donde W es definida negativa, cumpliendo primeramente que:

$$\dot{V}(e) \leq \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix} - \alpha V(e) + \varepsilon\delta \leq -\alpha V(e) + \varepsilon\delta \quad (3.48)$$

y aplicando el **Lema de comparación** consideramos que (3.48) queda expresada como :

$$\dot{V}(e_2) \leq -\alpha V(e_2) + \varepsilon\delta \quad (3.49)$$

La ecuación (3.49) tiene solución según el Lema 3 dando por concluida la demostración.

3.3. Observador robusto adaptable de orden completo

Consideramos al sistema en (3.1) donde ξ representa las perturbaciones externas, tal que se encuentra acotada por la norma 2 de la siguiente manera:

$$\|\xi\|^2 \leq \delta \quad (3.50)$$

La dinámica del observador se describe como:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - L(t)(y - C\hat{x}) \quad (3.51)$$

donde $L(t)$ incluye ganancias variantes

$$L(t)(x - C\hat{x}) = L(t)Ce \quad (3.52)$$

La dinámica del error (3.5) considerando al sistema (3.1) y la dinámica del observador (3.51) es:

$$\dot{e} = (A + L(t)C)e + \xi \quad (3.53)$$

Proposición 3 Observador robusto adaptable de orden completo Consideramos que el sistema (3.1) es observable, por lo que \hat{x} reconstruye al estado x utilizando el observador propuesto en (3.51) si existe un conjunto de soluciones para $(0 < \theta_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, 0 < \Lambda = \Lambda^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, L \in \mathbb{R}^{n \times m})$ satisface que :

$$W = \begin{bmatrix} (A^T\theta_1 + \theta_1 A + C^T\theta_2^T + \theta_2 C + \alpha\theta_1 + \Lambda & \theta_1 \\ \theta_1 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.54)$$

donde, $0 > \alpha \in \mathfrak{R}$, $0 < \varepsilon \in \mathfrak{R}$ por lo que se garantiza la convergencia en el error observación (3.5) siendo estable en el sentido último uniformemente acotado (ver Definición 6).

Demostracion 3 Definimos la siguiente función de energía:

$$V(e, \tilde{L}) = e^T P e + \frac{\gamma}{2} \text{tr}[\tilde{L}^T, L] \quad (3.55)$$

Donde $\tilde{L} = L(t) - L^*$, $0 < P = P^T$ y $0 < \gamma$. $V(e, \tilde{L})$ es $\dot{V}(\cdot)$ y tomando en consideración las propiedades de la función traza (2.17) donde:

$$\frac{\gamma}{2} \text{tr}[\tilde{L}^T, \dot{\tilde{L}}] + \frac{\gamma}{2} \text{tr}[\dot{\tilde{L}}^T, \tilde{L}] = \gamma \text{tr}[\tilde{L}^T, \dot{\tilde{L}}] \quad (3.56)$$

Tenemos que $\dot{V}(\cdot)$ queda :

$$\dot{V}(\cdot) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + \gamma \text{tr}[\tilde{L}^T, \dot{\tilde{L}}] \quad (3.57)$$

Por lo que considerando al error y su dinámica \dot{e} , según (3.5), $\dot{V}(\cdot)$ se define como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\cdot) = e^T [(A^T + C^T L^T(t))P + P(A + L(t))C]e + \xi^T P e \\ + e^T P \xi + \gamma \text{tr}[\tilde{L}^T, \dot{L}(t)] \end{aligned} \quad (3.58)$$

Considerando $\tilde{L} = L(t) - L^*$ y $\dot{\tilde{L}} = \dot{L}(t)$, ahora agregamos y restamos los términos $\alpha V(\cdot)$ y $\varepsilon \|\xi\|^2$ $\dot{V}(\cdot)$ en (3.58) conservando la igualdad, así como también la expresión $V(\cdot)$ quedando:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\cdot) = e^T [(A^T + C^T L^T(t))P + P(A + L(t))C]e + \xi^T P e + e^T P \xi \\ + \gamma \text{tr}[\tilde{L}^T, \dot{L}(t)] + \alpha e^T P e + \alpha \frac{\gamma}{2} \text{tr}[\tilde{L}^T, \tilde{L}] - \alpha V(\cdot) + \varepsilon \|\xi\|^2 - \varepsilon \|\xi\|^2 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Necesitamos sustraer de (3.59) a $L(t)$, ya que será una función junto con la que definiremos el ajuste de adaptabilidad en el sistema, para ello se realiza la adicción y sustracción de $e^T [C^T L^{*T} P + P L^* C]e$, esto da paso a intercambiar dentro de la

factorización ya realizada en el primer término de $\dot{V}(\cdot)$ a $L^T(t)$ por L^* quedando como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\cdot) = & e^T[(A^T + C^T L^{*T})P + P(A + L^*C)]e + \xi^T P e + e^T P \xi \\ & + \gamma \text{tr}[\tilde{L}^T, \dot{L}(t)] + \alpha e^T P e + \alpha \frac{\gamma}{2} \text{tr}[\tilde{L}^T, \tilde{L}] - \alpha V(\cdot) + \varepsilon \|\xi\|^2 - \varepsilon \|\xi\|^2 \\ & + e^T [C^T L^T(t)P + PL(t)C]e - e^T [C^T L^{*T}P + PL^{*T}C]e \quad (3.60) \end{aligned}$$

Factorizando los últimos dos términos en (3.60) por $e^T [C^T (L^T(t) - L^{*T})P + P(L(t) - L^*)C]e$ considerando que $\tilde{L} = L(t) - L^*$ tenemos que $e^T [C^T \tilde{L}^T P + P\tilde{L}C]e$, también agregamos el término $\alpha e^T P e$ dentro de la factorización del elemento $\dot{V}(\cdot)$ entre e^T y e esto hace que $V(\cdot)$ se exprese como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\cdot) = & e^T[(A^T + C^T L^{*T})P + P(A + L^*C) + \alpha P]e + \xi^T P e + e^T P \xi \\ & + \gamma \text{tr}[\tilde{L}^T, \dot{L}(t)] + \alpha \frac{\gamma}{2} \text{tr}[\tilde{L}^T, \tilde{L}] - \alpha V(\cdot) + \varepsilon \|\xi\|^2 - \varepsilon \|\xi\|^2 \\ & + e^T [C^T \tilde{L}^T P + P\tilde{L}C]e \quad (3.61) \end{aligned}$$

Por las propiedades de la norma 2 utilizada en $\|\xi\|^2$, consideramos que $\varepsilon \|\xi\|^2 = \varepsilon \xi^T \xi = \xi^T \varepsilon I \xi$ y definiendo al vector extendido $[e \ \xi]^T$, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(\cdot) = & \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A^T + C^T L^{*T})P + P(A + L^*C) + \alpha P & P \\ P & -\varepsilon I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix} - \alpha V(\cdot) \\ & + \varepsilon \|\xi\|^2 + \gamma \text{tr}[\tilde{L}^T, \dot{L}(t)] + \frac{\alpha \gamma}{2} \text{tr}[\tilde{L}^T, \tilde{L}] + e^T [C^T \tilde{L}^T P + P\tilde{L}C]e \quad (3.62) \end{aligned}$$

Considerando las propiedades del operador lineal **traza** (2.18), se realiza la factorización en (3.62) quedando :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\cdot) = & \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A^T + C^T L^{*T})P + P(A + L^*C) + \alpha P & P \\ P & -\varepsilon I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix} - \alpha V(\cdot) \\ & + \varepsilon \|\xi\|^2 + \text{tr}[\tilde{L}^t(\gamma \dot{L}(t) + \frac{\alpha \gamma}{2} \tilde{L})] + e^T [C^T \tilde{L}^T P + P\tilde{L}C]e \quad (3.63) \end{aligned}$$

Siendo que $e^T [C^T \tilde{L}^T P + P\tilde{L}C]e = e^T C^T \tilde{L}^T P e + e^T P$ y $(y - C\hat{x}) = Cx - C\hat{x} = C(x - \hat{x}) = Ce$, entonces:

$$e^T C^T \tilde{L}^T P e + e^T P \tilde{L} C e = 2e^T P \tilde{L} C e \quad (3.64)$$

Para separar el vector de estado x del estimado \hat{x} en el término 3.64 consideramos la **Desigualdad Lambda** (ver lema 2), tal que $\exists \Lambda$ donde $0 < \Lambda = \Lambda^T$, y realizamos el siguiente cambio de variable :

$$X = e \quad Y = P\tilde{L}(y - C\hat{x}) \quad (3.65)$$

Obtenemos:

$$2e^T P\tilde{L}(y - C\hat{x}) \leq e^T \Lambda e + (y^T - \hat{x}^T C^T) \tilde{L}^T P \Lambda^{-1} P \tilde{L}(y - C\hat{x}) \quad (3.66)$$

Al agregar (3.66) en (3.63), tenemos una desigualdad, factorizamos el término $e^T \Lambda e$ y obtenemos :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\cdot) \leq & \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A^T + C^T L^{*T})P + P(A + L^*C) + \alpha P + \Lambda & P \\ P & -\varepsilon I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix} - \alpha V(\cdot) \\ & + \varepsilon \|\xi\|^2 + \text{tr}[\tilde{L}^t(\gamma \dot{L}(t) + \frac{\alpha\gamma}{2} \tilde{L})] + (y^T - \hat{x}^T C^T) \tilde{L}^T P \Lambda^{-1} P \tilde{L}(y - C\hat{x}) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Por la propiedad de la **función traza** (ver (2.18)) tenemos que : $(y^T - \hat{x}^T C^T) \tilde{L}^T P \Lambda^{-1} P \tilde{L}(y - C\hat{x}) = \text{tr}[\tilde{L}^T P \Lambda^{-1} P \tilde{L}(y - C\hat{x})(y^T - \hat{x}^T C^T)]$ remplazando esto en (3.67):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\cdot) \leq & \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A^T + C^T L^{*T})P + P(A + L^*C) + \alpha P + \Lambda & P \\ P & -\varepsilon I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \xi \end{bmatrix} - \alpha V(\cdot) + \varepsilon \|\xi\|^2 \\ & + \text{tr}[\tilde{L}^t(\gamma \dot{L}(t) + \frac{\alpha\gamma}{2} \tilde{L}) + P \Lambda^{-1} P \tilde{L}(y - C\hat{x})(y^T - \hat{x}^T C^T)] \end{aligned} \quad (3.68)$$

De la ecuación (3.68) dentro de la **función traza** encontramos a $\dot{L}(t)$ como:

$$\dot{L}(t) = -\frac{\gamma}{2} \tilde{L} - \frac{1}{\gamma} P \Lambda^{-1} P \tilde{L}(y - C\hat{x})(y^T - \hat{x}^T C^T) \quad (3.69)$$

Integrando a (3.69) para obtener $\tilde{L} = L(t) - L^*$ al igual que considerando el siguiente cambio de variable (3.70) tal que si $0 > W = W^T$ la ecuación (3.68) depende de $(-\alpha V(\cdot) + \varepsilon \|\xi\|^2)$ siendo los términos que nos permiten establecer la velocidad de convergencia en $V(\cdot)$ hacia la solución trivial, concluyendo con ello la demostración.

$$\theta_1 = P \quad \theta_2 = P L^* \quad (3.70)$$

3.4. Índices de desempeño

Para realizar el estudio comparativo mediante el desempeño de cada observador se utilizan los criterios basados en el error de observación: IAE (Integral Absolute Error) en (3.71), ISE (Integral Squared Error) en (3.72) e ITAE (Time-weighted Absolute Error) en (3.73), estos están reportados en [25].

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (3.71)$$

$$ITAE = \int_0^{\infty} t|e(t)| dt \quad (3.72)$$

$$ISE = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt \quad (3.73)$$

3.5. Discusiones sobre el capítulo

Los observadores presentados en este apartado cuentan con estructuras similares ya que los valores α , ϵ , γ y λ (si es el caso) satisfacen las leyes de convergencia y/o adaptación propuestas en cada uno de ellos, sin embargo esto no es suficiente para garantizar que el desempeño de todos los observadores sea el esperado al realizar la observación en el bioproceso. Por lo tanto mediante la aplicación al modelo matemático del bioreactor podremos saber si el desempeño de estos es el esperado, tales pruebas de convergencia y ajustes de ganancias realizados se presentan en el capítulo número 5.

Capítulo 4

Desarrollo (Caso de aplicación)

Se presentan ajustes y operaciones generales aplicadas en el sistema dinámico que representa el comportamiento del biodigestor, para aplicar los correspondientes observadores presentados en el capítulo anterior.

4.1. Biodigestor

Un biodigestor en su forma simple es un contenedor (llamado reactor), donde se realiza el proceso de cultivo (también comúnmente denominado “fermentador”), sea en estado sólido o líquido. Su diseño debe ser tal que asegure homogeneidad entre los componentes del sistema y condiciones óptimas para el crecimiento microbiano y la obtención del producto deseado, en este caso en particular, biogás y sus derivados [16]. Los más utilizados a nivel industrial están provistos de mecanismos de agitación, dispersión y aireación así como de sistemas para el control de la temperatura, pH etc [26].

Componente	Porcentaje (%)
Metano (CH_4)	50 a 80
Anhidro carbónico (CO_2)	20 a 50
Nitrógeno (H_2)	<1
Amoniaco (NH_3)	<1
Sulfuro de hidrógeno (H_2S)	<1

Tabla 4.1: Composición de Biogás

4.2. Clasificación por funcionamiento

En función de los flujos de entrada y salida, la operación de un biodigestor puede ser de tres modos distintos: discontinuo (batch), semicontinuo (fed-batch) o continuo (quimiostato).

4.2.1. Biodigestor discontinuo

Este tipo de digestor se carga una sola vez en forma total y la descarga se efectúa una vez que ha dejado de producir gas combustible. Normalmente consiste en tanques herméticos con una salida de gas conectada a un gasómetro flotante, donde se almacena el biogás. Este sistema es aplicable cuando la materia a procesar está disponible en forma intermitente. En este tipo de sistemas se usa una batería de digestores que se cargan a diferentes tiempos para que la producción de biogás sea constante. Este tipo de digestor es también ideal a nivel de laboratorio si se desean evaluar los parámetros del proceso o el comportamiento de un residuo orgánico o una mezcla de ellas.

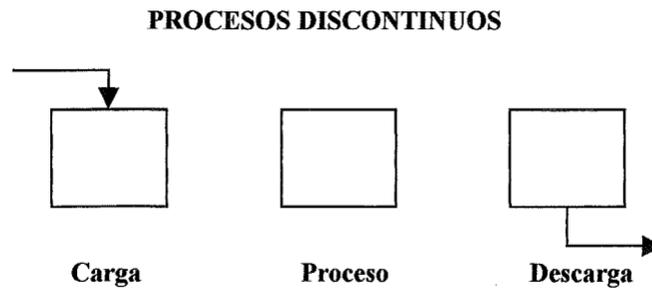


Figura 4.1: Funcionamiento de biodigestor discontinuo, ver [11]

4.2.2. Biodigestor semicontinuo

Es el tipo de digestor más usado en el medio rural, cuando se trata de digestores pequeños para uso doméstico. Los diseños más populares son el hindú y el chino. Entre los de tipo hindú existen varios diseños, pero en general son verticales y enterrados. Se cargan por gravedad una vez al día, con un volumen de mezcla que depende del tiempo de fermentación o retención y producen una cantidad diaria más o menos constante

de biogás si se mantienen las condiciones de operación, que son las presentadas en la tabla (4.2).

Condiciones de operación	Parámetro
Relación de C/N	020:1-30:1
Temperatura	22-42 °C
pH	0.008
Solidos Volátiles	7-12 %
Tiempo de retención	15-27 Días

Tabla 4.2: Condiciones de operación del biodigestor

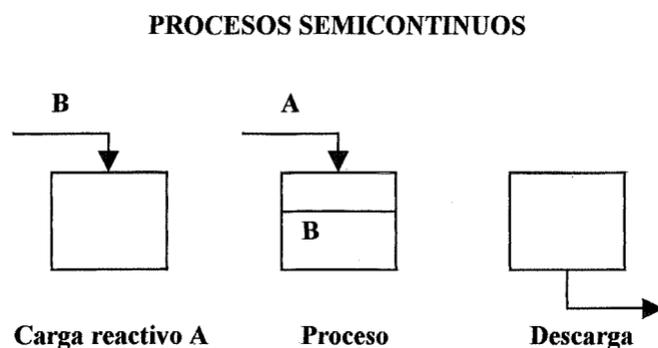


Figura 4.2: Funcionamiento de biodigestor semi continuo, ver [11]

4.2.3. Biodigestor continuo

Este tipo de digestores se desarrollan principalmente para tratamiento de aguas residuales. En general son plantas muy grandes, en las cuales se emplean equipos comerciales para alimentarlos, proporcionarles calefacción y agitación, así como para su control. Por lo tanto este tipo de plantas son más bien instalaciones tipo industriales, donde se genera una gran cantidad de biogás el que a su vez se aprovecha en aplicaciones industriales. El diseño de este biodigestor es favorable para que sea llenado con materiales blandos como el estiércol.

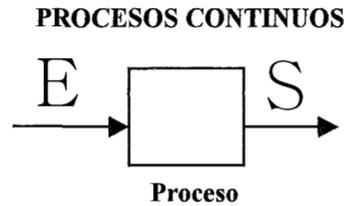


Figura 4.3: Funcionamiento de biodigestor continuo, ver [11]

4.3. Modelo matemático

Se presenta ahora en esta sección el modelo matemático que se utilizara para el análisis y estudio dentro de este trabajo de investigación partiendo del reporte de IWA sobre el ADM1 [1].

4.3.1. ADM1

El ADM1 es un modelo matemático generalizado para la digestión anaerobia que describen los procesos bioquímicos y fisicoquímicos que ocurren en un biodigestor. Los procesos bioquímicos incluyen la desintegración de partículas homogéneas a carbohidratos, proteínas y lípidos; hidrólisis extracelular de estos sustratos particulados a azúcares, aminoácidos y ácidos grasos de cadena larga (LCFA), respectivamente; acidogénesis de azúcares y aminoácidos a ácidos grasos volátiles (VFA) e hidrógeno; acetogénesis de LCFA y VFA a acetato; y separar los pasos de metanogénesis del acetato y el hidrógeno / CO_2 . Las ecuaciones fisicoquímicas describen la asociación y disociación de iones, y la transferencia gas-líquido. Implementado como un conjunto de ecuaciones diferenciales y algebraicas (DAE), 26 variables de concentración de estado dinámico y 8 variables algebraicas implícitas por vasija del reactor o elemento. Implementado como ecuaciones diferenciales (DE) solamente, hay 32 variables de estado de las dinámicas de concentración [1], para esto se tomaron en cuenta 56 parámetros estequiométricos y cinéticos relativos para procesos biológicos, 24 componentes y se asumieron 19 procesos [27].

Cabe resaltar que ADM1 es un modelo amplio y muy general, por lo que se presenta

en esta dinámica en particular las ecuaciones que intervienen y a su vez serán usadas para el desarrollo de este trabajo.

4.3.2. Desarrollo del modelo

Las reacciones físico-químicas dentro del biodigestor, se representan en 4.1



Se agrega la cinética de reacción que describe el cambio dentro del biodigestor, dado por una ecuación de inhibición modificada en

$$\mu_{max} = \left[K_{max} \frac{S}{K_s + S + K_i} X \right]^{1.1} \quad (4.2)$$

Esta ecuación se encuentra fundamentada sobre [28], siendo su base la ecuación de Haldane que es la representación de un modelo matemático de inhibición que describe el crecimiento de los microorganismos en un medio acuoso limitado por el sustrato suministrado. En donde

- K_{max} = Constante de degradación del sustrato.
- K_s = Coeficiente de masa en el medio acuoso del sustrato.
- K_i = Factor de inhibición.
- X = Concentración de la biomasa.

Como ya se mencionó, se tiene que tomar en cuenta la cinética de reacción descrita por (4.2) y las entradas y salida del sistema, que se describen como $D(S_0 - S)$ para el caso del sustrato, teniendo en cuenta esto podemos escribir la ecuación como

$$\frac{dS}{dt} = - \left(\frac{\mu_{max}}{Y_{sx}} \right) + D(S_0 - S) \quad (4.3)$$

Ahora se utiliza esta metodología para las variables restantes las cuales son X, CH_4, CO_2 (Biomasa, Metano y dióxido de carbono respectivamente) lo cual en conjunto con la ecuación (4.3) se obtiene las siguiente ecuaciones

$$\frac{dS}{dt} = - \left(\frac{\mu_{max}}{Y_{sx}} \right) + D(S_0 - S) \quad (4.4)$$

$$(4.5)$$

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{\mu_{max}}{Y_{xs}} \right) - F_d X - DX \quad (4.6)$$

$$\frac{dCO_2}{dt} = \mu_{max} Y_{xco_2} CO_2^\beta - DCO_2 \quad (4.7)$$

$$\frac{dCH_4}{dt} = \mu_{max} Y_{xch_4} CH_4^\alpha - DCH_4 \quad (4.8)$$

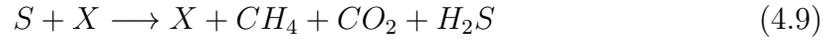
De igual forma tenemos que :

- $\frac{dS}{dt}$ = Variación del Sustrato en el tiempo.
- μ_{max} = Tasa de crecimiento específica.
- Y_{sx} = Rendimiento del sustrato sobre la biomasa.
- Y_{xs} = Rendimiento de la biomasa sobre el sustrato.
- $D = \frac{F}{V}$ = tasa de dilución donde F es el flujo de alimentación y V el volumen de operación.
- Y_{xco_2} = Rendimiento del dióxido de carbono respecto a la biomasa.
- Y_{xch_4} = Rendimiento del metano respecto a la biomasa.
- α = Constante de comportamiento del CH_4 .
- β = Constante de comportamiento del CO_2

4.4. Ajuste al sistema y ecuaciones diferenciales del sistema

Presentamos ajustes y operaciones generales realizadas sobre el modelo matemático para aplicar los observadores desarrollados. Las ecuaciones diferenciales que representan el comportamiento del sistema y se encuentran en (4.5) a (4.8) son modificadas para representar de mejor manera la dinámica del sistema respecto a los datos

experimentales reportados en la literatura, los cambios realizados se encuentran a continuación, principalmente el ajuste en las reacciones químicas siendo $DQO = S$:



Aplicando (4.9) en (4.5) a (4.8) tenemos :

$$\frac{dS}{dt} = - \left[\frac{\left(K_{max} \frac{S}{K_s + S + K_i} X \right)^{1.1}}{Y_{sx}} \right] + D(S_0 - S) \quad (4.10)$$

$$\frac{dX}{dt} = \left[\frac{\left(K_{max} \frac{S}{K_s + S + K_i} X \right)^{1.1}}{Y_{sx}} \right] - F_d X - DX \quad (4.11)$$

$$\frac{dCO_2}{dt} = \left(K_{max} \frac{S}{K_s + S + K_i} X \right)^{1.1} Y_{xco_2} CO_2^\beta - DCO_2 \quad (4.12)$$

$$\frac{dCH_4}{dt} = \left(K_{max} \frac{S}{K_s + S + K_i} X \right)^{1.1} Y_{xch_4} CH_4^\alpha X - DCH_4 \quad (4.13)$$

Las simulaciones y observadores aplicados en secciones posteriores se realizan sobre las ecuaciones en (4.13)

4.5. Condiciones iniciales de operación (según la literatura).

Las condiciones iniciales (C.I.) de operación utilizadas en el biorreactor son tomadas de la literatura y se presentan en la tabla (4.3),

Condiciones iniciales de operación sugeridas (C.I.)			
Variable de estado	C.I. Literatura	Representación	Bibliografía
Sustrato	4-25 g/L	S	[29]
Biomasa	2-12 g/L	X	[29] [30]
CO_2	1.83 -55.5 g/L	CO_2	[29] [5] [31]
CH_4	0.16- 80.4 g/L	CH_4	[29] [31]

Tabla 4.3: Condiciones iniciales de operación según literatura

Considerando la tabla 4.3 los valores de operación en las condiciones iniciales tomadas son:

Condiciones iniciales de operación utilizada (C.I.)		
Variable de estado	C.I operación	Representación
Sustrato	30 g/L	S
Biomasa	1.2 g/L	X
CO_2	1.1 g/l	CO_2
CH_4	2 g/L	CH_4

Tabla 4.4: Condiciones iniciales de operación utilizadas

4.6. Estados estacionarios(puntos de equilibrio)

Los estados estacionarios sobre los que trabajaremos el algoritmo necesario para desarrollar los observadores lineales (presentados en el capítulo 5) son tomados en base al teorema de estabilidad que se encuentra en [3], descrito de la siguiente manera:

- Una ecuación de la forma $\dot{x} = Ax$ es marginalmente estable si y solo si los valores propios (eigenvalores) de la matriz de dinámicas del sistema A esta compuesta por partes reales cero o negativas.
- Una ecuación de la forma $\dot{x} = Ax$ es asintóticamente estable si y solo si todos los valores propios de A tienen partes reales negativas

Obtenemos del modelo no lineal 4.10 una representación lineal considerando un punto de operación que permita aproximar el comportamiento de las dinámicas y aplicar el teorema. Para ello se realiza la linealización de 4.10 utilizando la aproximación por la serie de Taylor, definidas como:

$$\frac{dx}{dt} = A(\bar{x}) + B(\bar{u}) \quad (4.14)$$

tal que A , B y x queda expresada como :

$$A(\bar{x}) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \quad (4.15)$$

$$B(\bar{u}) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=\bar{u}} \quad (4.16)$$

$$(4.17)$$

Valores en estado estacionario	
Variable de estado o Parámetro	Valor en estado estacionario
S (sustrato)	1.873 g/L
X (Biomasa)	4.867 g/L
CO ₂ (Dióxido de carbono)	14.89 g/L
CH ₄ (Metano)	75.61 g/L
D (dilución)	0.001 d ⁻¹

Tabla 4.5: Valores en estado estacionario

Se considera el punto de operación donde las variaciones del comportamiento del estado son suficientemente pequeñas (llamado estado estacionario) para realizar la evaluación mencionada en (4.17). \bar{x} representa los valores de las variables de estado y a D (la tasa de dilución) como nuestra entrada de operación \bar{u} . Los valores en estado estacionario que se utilizan para poder realizar la obtención de la matriz A y B se presentan en la tabla 4.5: Obtenemos por consiguiente a las matrices A y B

$$A = \begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 & A14 \\ A21 & A22 & A23 & A24 \\ A31 & A32 & A33 & A34 \\ A41 & A42 & A43 & A44 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$A11 = -D - \frac{11 \left(\frac{K_{max}X}{K_i+K_s+S} - \frac{K_{max}SX}{(K_i+K_s+S)^2} \right) \left(\frac{K_{max}SX}{K_i+K_s+S} \right)^{1/10}}{10Y_{sx}} \quad (4.19)$$

$$A12 = -\frac{11K_{max}S \left(\frac{K_{max}SX}{K_i+K_s+S} \right)^{1/10}}{10Y_{sx}(K_i + K_s + S)} \quad (4.20)$$

$$A21 = \frac{11 \left(\frac{K_{max}X}{K_i+K_s+S} - \frac{K_{max}SX}{(K_i+K_s+S)^2} \right) \left(\frac{K_{max}SX}{K_i+K_s+S} \right)^{1/10}}{10Y_{xs}} \quad (4.21)$$

$$A22 = \frac{11K_{max}S \left(\frac{K_{max}SX}{K_i+K_s+S} \right)^{1/10}}{10Y_{xs}(K_i + K_s + S)} - F_d - D \quad (4.22)$$

$$A31 = \frac{11CO_2^\alpha Y_{xco2} \left(\frac{K_{max}X}{K_i+K_s+S} - \frac{K_{max}SX}{(K_i+K_s+S)^2} \right) \left(\frac{K_{max}SX}{K_i+K_s+S} \right)^{1/10}}{10} \quad (4.23)$$

$$A32 = \frac{11CO2^\alpha K_{max}SY_{xco2} \left(\frac{K_{max}SX}{K_i + K_s + S} \right)^{1/10}}{10(K_i + K_s + S)} \quad (4.24)$$

$$A33 = CO2^{\alpha-1}Y_{xco2}^\alpha \left(\frac{K_{max}SX}{K_i + K_s + S} \right)^{11/10} - D \quad (4.25)$$

$$A41 = \frac{11CH4^\beta XY_{xch4} \left(\frac{K_{max}X}{K_i + K_s + S} - \frac{K_{max}SX}{(K_i + K_s + S)^2} \right) \left(\frac{K_{max}SX}{K_i + K_s + S} \right)^{1/10}}{10} \quad (4.26)$$

$$A42 = CH4^\beta Y_{xch4} \left(\frac{K_{max}SX}{K_i + K_s + S} \right)^{11/10} + \frac{11CH4^\beta K_{max}SXY_{xch4} \left(\frac{K_{max}SX}{K_i + K_s + S} \right)^{1/10}}{10(K_i + K_s + S)} \quad (4.27)$$

$$A44 = CH4^{\beta-1}XY_{xch4}^\beta \left(\frac{K_{max}SX}{K_i + K_s + S} \right)^{11/10} - D \quad (4.28)$$

$$A13 = 0; \quad A14 = 0 \quad A23 = 0 \quad A24 = 0 \quad A34 = 0 \quad A43 = 0 \quad (4.29)$$

$$B = \begin{bmatrix} S_o - S \\ -X \\ -CO_2 \\ -CH_4 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

4.7. Análisis de Observabilidad

Es complicado obtener el comportamiento dinámico de las variables de estado en tiempo real, ya sea por el precio de dispositivos para dicho fin, factores externos que alteran la medición o la complejidad del fenómeno físico a observar. Por lo anterior proponemos observadores de estado que predicen las dinámicas deseadas considerando que el sistema dinámico es observable, esto se realiza tomando en cuenta el Teorema 5. La matriz \mathbf{A} representa la matriz de dinámicas de estado (ya obtenida anteriormente)

y \mathbf{C} la matriz de salida o medición, es decir, aquellas variables que podremos medir de nuestro biodigestor al encontrarse este siendo monitoreado en línea. La matriz debe ser de rango completo es una condición necesaria para poder encontrar observabilidad en el sistema pero no es condición suficiente, esto es porque aun perdiendo rango, es posible observar algunos estados considerando los medidos y representados en la matriz \mathbf{C} .

Posibles configuraciones individuales de C	
Configuración de C	VARIABLES CENSADAS
1 0 0 0	Sustrato
0 1 0 0	Biomasa
0 0 1 0	CO_2
0 0 0 1	CH_4

Tabla 4.6: Configuraciones de la matriz de salida C

La matriz C utilizada considera las variables CO_2 y CH_4 censadas en el biodigestor expresadas en la tabla 4.6 ya que no es posible obtener rango completo en la matriz de observabilidad O (4.35) tomando en cuenta en C solo una entrada.

■

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Se agrega a este apartado las posibles configuraciones de la matriz C junto a las variables de estado que pueden ser estimadas considerando la tasa de dilución $D = 0.001$, encontrada en la tabla 4.5.

Variables de estado estimadas según la configuración de C				
Configuración de C	Sustrato	Biomasa	CO ₂	CH ₄
[1 0 0 0]	•	•	○	○
[0 1 0 0]	•	•	○	○
[0 0 1 0]	•	•	•	○
[0 0 0 1]	•	•	○	•
[1 0 0 0; 0 1 0 0]	•	•	○	○
[1 0 0 0; 0 0 1 0]	•	•	•	○
[1 0 0 0; 0 0 0 1]	•	•	○	•
[0 1 0 0; 0 0 1 0]	•	•	•	○
[0 1 0 0; 0 0 0 1]	•	•	○	•
[0 0 1 0; 0 0 0 1]	•	•	•	•

Tabla 4.7: Posibles variables de estado reconstruidas según C

Parámetros utilizados			
Parámetro	Rango en literatura	Valor utilizado	Referencia
K_s	150 \mp 15 g/L	150	[29]
K_i	50 \mp 15 g/L	50	[29]
F_d	0.009 \mp 0.0019 d^{-1}	0.0009 d^{-1}	[29]
S_o	30 g/L	30 g/L	[32]
Y_{sx}	0.426 \mp 0.21	0.426	[29]
D	0.001 d^{-1}	0.001 d^{-1}	[33]
α	0.29 \mp 0.18	0.29	[29]
β	0.20 \mp 0.09	0.20	[29]
Y_{xco_2}	0.67	0.67	[29]
Y_{xch_4}	0.78	0.97	[29]
μ_{max}	0.23 g/Ld	0.1 - 1.5 d^{-1}	[29]

Tabla 4.8: Parámetros iniciales

4.8. Simulación del modelo con datos experimentales

Los resultados de la simulación del biodigestor en la imagen 4.5 consideraron los datos experimentales en la tabla 4.8 y el modelo matemático (4.8), esto valida el funcionamiento del modelo ya que se obtiene similitud de funcionamiento en comparación a biodigestores en condiciones reales [29]. Los parámetros utilizados son los que se presentan a continuación

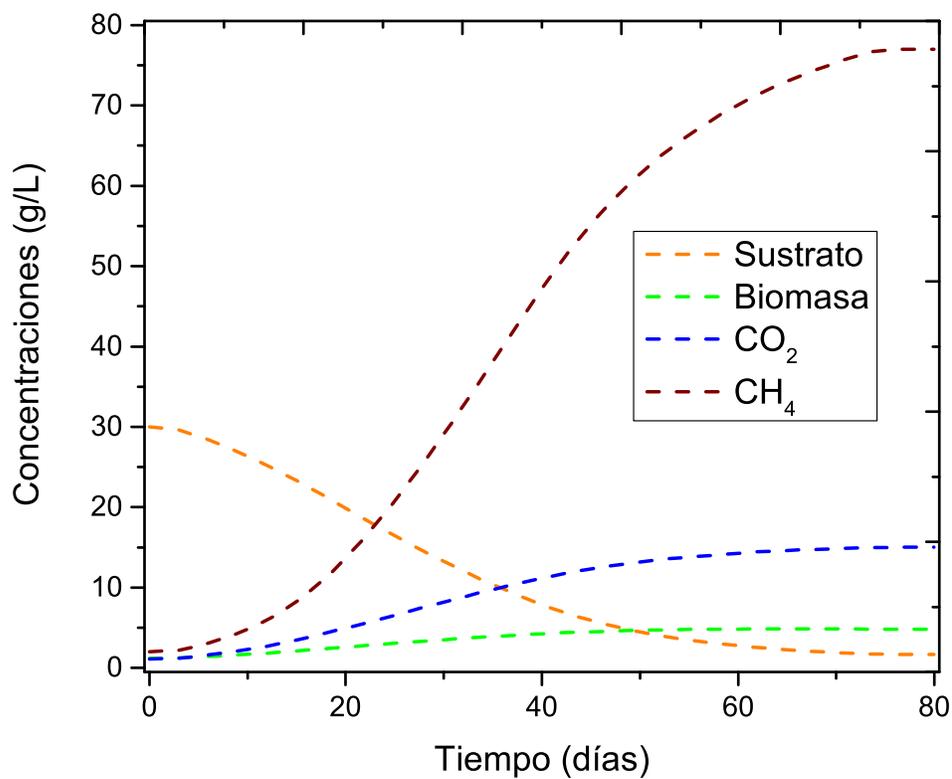


Figura 4.4: Funcionamiento original del biodigestor en 80 días

En la figura 4.5, se aprecia que el crecimiento de la biomasa es inverso al del sustrato, desprendiendo durante este proceso CO_2 y CH_4 en un periodo no mayor a 70 días. Los resultados fueron obtenidos con la ayuda del software MATLABTM y el

paquete de solución *ode23s*.

4.9. Simulación de modelo con ajustes realizados

La simulación obtenida con el ajuste realizado al sistema dinámico que representa el comportamiento del bioreactor considera los parámetros en la tabla 4.8 y el modelo matemático (4.13) se encuentra en la imagen 4.4. El solver utilizado es el *ode4* (Runge-Kutta) dentro del software MATLABTM.

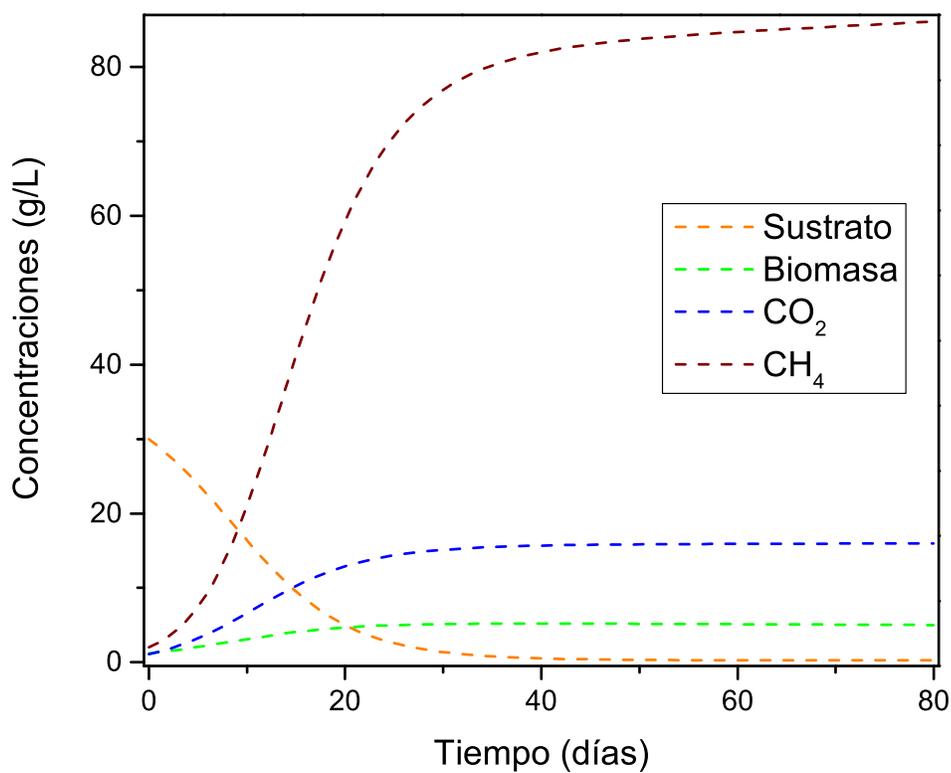


Figura 4.5: Funcionamiento de biodigestor en 80 días

4.10. Sistema Linealizado

Las matrices A y B obtenidas de (4.17) en este modelo y que cumple con la definición de estabilidad es:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0506 & -0.0193 & 0 & 0 \\ 0.0070 & 0.008 & 0 & 0 \\ 0.0310 & 0.0120 & -0.004 & 0 \\ 0.2368 & 0.1404 & 0 & -0.0004 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Los eigenvalores λ_A de la matriz A en (4.32) son los siguientes :

$$\lambda_A = \begin{bmatrix} -0.004 \\ -0.004 \\ -0.0478 \\ -0.0020 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

La matriz B se define como :

$$B = \begin{bmatrix} 28.1270 \\ -4.8670 \\ -14.8900 \\ -75.6100 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

4.11. Observabilidad del sistema (análisis general)

La matriz de observabilidad O en (4.35) es de rango completo lo que nos permite aplicar la teoría de observación presentada en el capítulo 3 y queda definida como :

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0310 & 0.0120 & -0.0004 & 0 \\ 0.2368 & 0.1404 & 0 & -0.0004 \\ -0.0015 & -0.006 & 0 & 0 \\ -0.0111 & -0.0046 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0005 & 0.0002 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

4.12. Perspectiva de aplicación

Actualmente es complicado definir con exactitud la terminología exacta que defina específicamente lo que es un sistema embebido. Esto se debe principalmente a que se le han denominado de esta forma con el paso del tiempo a cualquier configuración en general, de sistemas que estén monitorizando procesos, y en algunos casos, también se encuentren controlándolos. Como tal y para ser mas específicos, una de las principales características de un sistema en tiempo real debe ser la corrección de cálculos que no solo dependan de la exactitud del resultado, es decir, que también depende del momento en el que este se produce, evitando un retraso, ya que si este fuera el caso, entonces sería una respuesta incorrecta. Un sistema en tiempo real debe responder siempre a un evento (cambio a las configuraciones establecidas inicialmente) siempre dentro del tiempo asignado para realizarse, ya que si este no cumple con lo establecido, podría poner en riesgo a todo el sistema que se encuentra monitorizando en ese momento [34]. De acuerdo a [35], un sistema embebido, es un artefacto desarrollado por la ingeniería, que se encuentra relacionado directamente con la computación y esta sujeto a restricciones físicas, las cuales surgen a través de las dos maneras en que los procesos computacionales interactúan con el mundo físico:

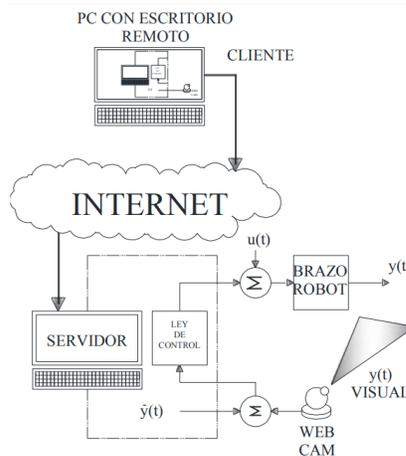


Figura 4.6: Sistema embebido de cámara móvil, ver [12]

1. Reacción a un entorno físico.
2. Ejecución en una plataforma física.

Las principales restricciones comunes de reacción especifican los plazos, el rendimiento y la fluctuación, originándose en los requisitos de comportamiento. Las restricciones comunes de ejecución son limitadas por las velocidades de los procesadores disponibles, las potencias de estos y las tasas de fallo del hardware, dando paso a las diferentes opciones de implementación. Es importante enfatizar que la teoría de control se ocupa, en este caso, de restringir las reacciones de los sistemas, mientras que la ingeniería informática es la encargada de la ejecución. Algunas de las principales características que debe poseer un sistema embebido, según [35] son las siguientes:

- Múltiples operaciones pueden ser realizadas por un mismo chip, (procesador).
- Dentro del periodo del proceso a monitorizar o de igual forma a controlar, este debe ser totalmente automático.
- Se considera que este debe ser compacto, al igual que tener una respuesta rápida respecto al proceso en el que este está funcionando.

Algunas configuraciones posibles que se pueden encontrar en un sistema embebido son:

- **Sistema de tiempo real** : Una de las principales características es que produce un resultado en un plazo definido, el trabajar fuera de esos plazos produce un fallo en el sistema. Estos son capaces de preservar la mayor parte de los datos y capacidades del sistema en la mayor medida posible ante perturbaciones [36] .
- **Sistema en línea** : Se caracterizan por estar conectados de manera semi-permanente a una computadora, terminal, caja registradora u otro dispositivo con cierta capacidad de procesamiento. Son capaces de codificar y decodificar información de manera inmediata.

Considerando esta sección presentamos el sistema embebido propuesto para el desarrollo de este trabajo:

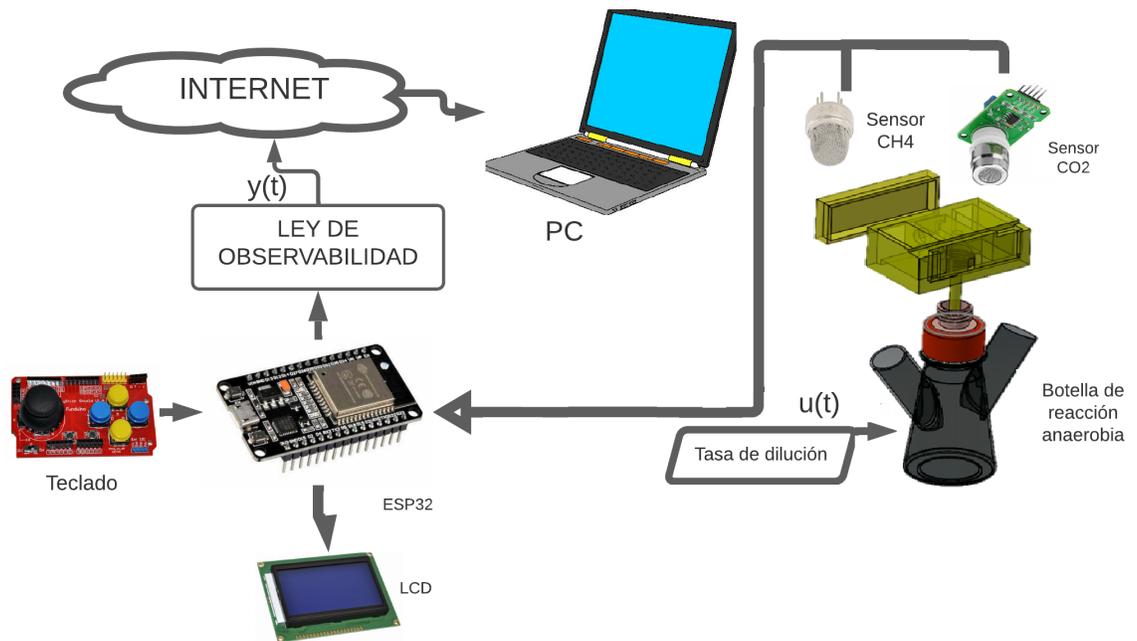


Figura 4.7: Sistema embebido para bioreactor

4.13. Discusiones sobre el capítulo

La linealización por medio de una aproximación por la serie de Taylor al aplicarla al modelo dinámico que representa el comportamiento del biorreactor permite que conceptos de estabilidad y observabilidad sean estudiados en este caso en particular. Estos fundamentos matemáticos que se han expuestos en el segundo capítulo de este trabajo. Se realizaron pruebas de simulación y comportamiento, partiendo de datos experimentales ya reportados,

Capítulo 5

Resultados

Se presenta el desempeño de los algoritmos matemáticos de observación desarrollados en el capítulo número 2 sobre el modelo dinámico del biorreactor, dentro de estos se encuentra el Observador robusto adaptable de orden completo para sistemas en tiempo continuo.

5.1. Comparación de observadores

5.1.1. Aplicación de Observador Luenberger (orden completo)

El polinomio característico de la matriz A (mostrada anteriormente), donde por definición se agrega una matriz de ganancias L , esto para ajustar el sistema a un polinomio característico deseado. Los eigenvalores del polinomio característico deseado se encuentran en el lado negativo del plano complejo, garantizando de esta forma estabilidad, la estructura es la siguiente

$$\text{Polinomio Característico del sistema} = I \times \lambda - (A - (L \times C)) \quad (5.1)$$

donde $I \in R^{n \times n}$ es la matriz identidad, λ es la variable compleja, $A \in R^{n \times n}$ es la matriz de dinámicas del sistema, $C \in R^{m \times n}$ es la matriz de medición y $L \in R^{n \times m}$ es la matriz de ganancias del sistema que permite ajustar al observador Luenberger, siendo el polinomio característico obtenido el siguiente:

$$\begin{aligned}
& \lambda^4 + \lambda^3(L_{31} + L_{42} + 0.0506) + \lambda^2(0.031L_{11} \\
& \quad + 0.2368L_{12} + 0.012L_{21} + 0.01404L_{22} + 0.0502L_{31} + 0.0502L_{42} \\
& \quad \quad + 0.0001346 + L_{31}L_{42} - L_{32}L_{41}) + \lambda(0.000716L_{11} \\
& \quad + 0.000888L_{21} + 0.0025901L_{22} + 0.00011145L_{42} - 0.2368L_{11}L_{32} \\
& \quad + 0.2368 * L_{12}L_{31} + 0.031 * L_{11}L_{42} - 0.031L_{12}L_{42} - 0.12L_{22}L_{41} \\
& \quad \quad + 0.0498L_{31}L_{42} - 0.0498L_{32}L_{41}) + (0.0015108L_{11}L_{22} \\
& \quad - 0.0015108L_{12}L_{22} - 0.0015108L_{12}L_{21} - 0.0007933L_{11}L_{32} \\
& \quad + 0.0007933L_{12}L_{31} + 0.000592L_{11}L_{42} - 0.0000592L_{12}L_{41} \\
& \quad - 0.002534L_{21}L_{32} + 0.002534L_{22}L_{31} + 0.0000089L_{L21}L_{42} \\
& \quad - 0.00000089L_{22}L_{41} + 0.00009464L_{31}L_{42} - 0.00009462L_{32}L_{41}) \quad (5.2)
\end{aligned}$$

La ecuación (5.2) es comparada con un polinomio característico deseado, tal que la igualación entre ambos (el obtenido del sistema y el deseado) nos proporcione polos con parte real negativa, algunos de estos se encuentran en la tabla 5.1:

Posibles polinomios característicos deseados	
Polinomio de 4° grado	Raíces
$\lambda^4 + 26\lambda^3 + 745\lambda^2 + 5000\lambda + 100000$	$-8.9788 \pm 233.42 i, -4.0212 \pm 0.9849 i$
$\lambda^4 + 50\lambda^3 + 1000\lambda^2 + 9000\lambda + 90000$	$-22.5866 + 0.0i, -13.1291 \pm 12.35 i,$ $-1.1353 + 0.01i$
$\lambda^4 + 15\lambda^3 + 1\lambda^2 + 1\lambda + 1$	$-0.1098 \pm 1.7238 i, -1.0655 \pm 0.3127 i$

Tabla 5.1: Posibles polinomios característicos

De esta manera la construcción de la matriz L también conocida como matriz de ganancias, queda expresada como:

$$L = \begin{bmatrix} 30 & 12 \\ 0 & 0 \\ 2.3 & 0 \\ 10 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Características importantes de simulación	
Raíces del sistema	$-1.0149 \pm 3.0805 i$, -1.0020 , $-0.0038 + 0.0000 i$
Ganancias	$L=[30 \ 12; 0 \ 0; 2.3 \ 0; 10, 0.6]$
C.I. Observador	30; 1.2; 1.1 1.7, g/L, S,B, CO_2 , CH_4
C.I Sistema	35; 2; 2 3.8, g/L, S,B, CO_2 , CH_4

Tabla 5.2: Observador Luenberger de orden completo

5.1.2. Aplicación de observador de orden reducido

La matriz de transformación utilizada $T \in R^{n \times n}$ es formada de la siguiente manera:

$$T = \begin{bmatrix} C \\ N_c^T \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

N_c es el espacio nulo de C , siendo la siguiente:

$$N_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

La matriz de transformación T , al igual que su inversa T^{-1} son:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Siendo que $TAT^{-1} = \mathcal{A} \in R^{n \times n}$, $TB = \mathcal{B} \in R^{m \times m}$ y $CT^{-1} = \mathcal{C} \in R^{m \times n}$, estas son:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -0.0004 & 0 & 0.0301 & 0.1200 \\ 0 & -0.0004 & 0.2367 & 0.1404 \\ 0 & 0 & -0.0506 & -0.0193 \\ 0 & 0 & 0.0070 & 0.0008 \end{bmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} -14.89 \\ -75.61 \\ 28.127 \\ -4.867 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

El algoritmo contempla a las matrices Q , R y S que conforman a $\dot{\psi}$, al obtener ψ junto con la suma de la matriz $L \in R^{m \times n}$ multiplicadas por las entradas dadas por la matriz C encontramos los estados estimados. Recordar que la matriz Q debe ser

Hurwitz y que los resultados se obtienen mediante una transformación no singular. La estructura por parámetros de Q es la siguiente:

$$Q = \mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12} \quad (5.8)$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

tal que

$$Q_{11} = -0.0004 - (301 \times L_{11})/10000 - (148 \times L_{12})/625 - 253/5000$$

$$Q_{12} = -(3 \times L_{11})/25 - (351 \times L_{12})/2500 - 193/10000$$

$$Q_{21} = 7/1000 - (148 \times L_{22})/625 - (301 \times L_{21})/10000$$

$$Q_{22} = 1/1250 - (351 \times L_{22})/2500 - (3 \times L_{21})/25$$

Al igual que en el observador de orden completo, se realiza una asignación de polos en la matriz Q por medio de una igualación del polinomio característico de la matriz y el determinante de $\lambda \times I - Q$, en donde $I \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad, λ es la variable compleja. Algunos polinomios propuestos para la igualación son :

Posibles polinomios característicos deseados (Orden reducido)	
Polinomio de 2° grado	Raíces
$\lambda^2 + 0.2\lambda + 0.2$	$-0.1 \pm 1 i$
$\lambda^2 + 15\lambda + 100$	$-7.5 \pm 6.6144 i$
$\lambda^2 + 2\lambda + 2$	$-1 \pm 1 i$
$\lambda^2 + 2.9\lambda + 20$	$-1.45 \pm 4.2305 i$

Tabla 5.3: Posibles polinomios característicos para observador de orden reducido

Características importantes de simulación	
Raíces del sistema	-1.1312, -0.0005
Ganancias	$L = [-2 \ 1.75; 0.625 \ -0.5]$
C.I. Observador	30, 1.2, g/L, CO_2 , CH_4
C.I Sistema	35, 2, 2, 3.8 g/L, S,B, CO_2 , CH_4

Tabla 5.4: Observador Luenberger de orden reducido

5.1.3. Aplicación de Observador Robusto de Orden Completo

La sintonización de la matriz $L \in R^{n \times m}$ es a partir de la resolución **LMI** presente en la matriz W . Esto permite que manipulemos la convergencia de la función de error $V(\cdot)$, considerando los valores α y ϵ . La resolución se realiza con el solver **Sedumi** de **Open Access** disponible para **Matlab**™.

Características importantes de simulación	
α propuesto	10
ϵ propuesto	0.00055
Raíces del sistema	-0.2927, -0.0030, -5.4295, -5.5257
Ganancias obtenidas	L=[-0.1482 -1.2038; -0.0096 -0.1483; -5.5262 -0.0047; -0.0109 -5.5889]
C.I. Observador	30, 1.2, 1.1, 1.7, g/L, S,B, CO_2 CH_4
C.I Sistema	35, 2, 2, 3.8, g/L, S,B, CO_2 , CH_4

Tabla 5.5: Observador robusto de orden completo

5.1.4. Aplicación de Observador Robusto de Orden Reducido

Considerando las especificaciones utilizadas en el algoritmo del observador de orden reducido, tomamos los mismos valores de la transformación singular y las configuraciones para Q . Al igual que el observador robusto de orden completo la sintonización de es a partir de la resolución **LMI** presente en la matriz W , ya que la convergencia de la función de error $V(\cdot)$ se a partir de los valores α y ϵ . La resolución se realiza con el solver **Sedumi** de **Open Access** disponible para **Matlab**™.

Características importantes de simulación	
α propuesto	15
ϵ propuesto	0.0099
Raíces del sistema	-0.0454 -0.00019
Ganancias obtenidas	L=[-0.0158, -0.1288; -0.0009 -0.0139]
C.I. Observador	30, 1.2, g/L, S, B,
C.I Sistema	35, 2, 2, 3.8, g/L, S,B, CO_2 , CH_4

Tabla 5.6: Observador robusto de orden reducido

5.1.5. Aplicación de Observador Robusto Adaptable de Orden Completo

La sintonización de la matriz $L \in R^{n \times m}$ es a partir de la resolución **LMI** presente en la matriz W . Esto permite que manipulemos la convergencia de la función de error $V(\cdot)$, considerando los valores α y ϵ . La resolución se realiza con el solver **Sedumi** de **Open Access** disponible para **Matlab**TM. Considerando que retomamos parte de los procedimientos numéricos utilizados para el cálculo del Observador Robusto de Orden Completo (incluyendo la solución del sistema **LMI** presente en la matriz W), agregando también a este, la consideración de la variable γ que se definió anteriormente y forma parte de la ley de adaptación del observador.

Características importantes de simulación	
γ	0.0995
α propuesto	3.88
ϵ propuesto	0.009
Raíces del sistema	-0.5427, -0.0034, -1.9313, -2.2035
Ganancias obtenidas	$L = [-0.1320 \ -1.0428; -0.0066 \ -0.1485; -2.2056 \ -0.0177; -0.0204 \ -2.3396]$
C.I. Observador	30, 1.2, 1.1, 1.7, g/L, S,B, CO_2 , CH_4
C.I Sistema	35, 2, 2, 3.8, g/L, S,B, CO_2 , CH_4

Tabla 5.7: Observador robusto adaptable de orden completo

5.1.6. Simulación y comparación de observadores con variaciones mínimas en las condiciones iniciales

Se presenta a continuación el desempeño de los observadores junto a la dinámica natural de la planta real, separando cada variable de estado y haciendo una comparación del desempeño. Se observa fácilmente en las figuras 5.3 y 5.4 que el comportamiento del observador robusto de orden reducido, en lo que respecta a observar la biomasa y el sustrato en la planta, tiene mejor comportamiento que los demás observadores presentados. Sin embargo las variaciones en las C.I. aplicadas entre la planta y los observadores presentes en las tablas 5.5, 5.6 y 5.7 no son lo suficientemente amplias para denotar la robustez y adaptabilidad de los demás observadores que cuentan con este diseño.

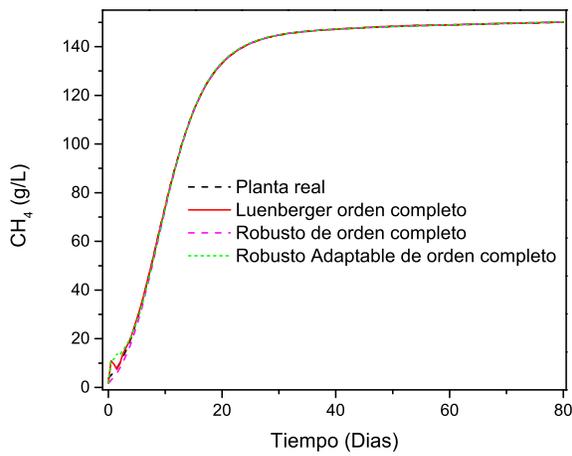


Figura 5.1: Comparación de observadores estimando CH_4

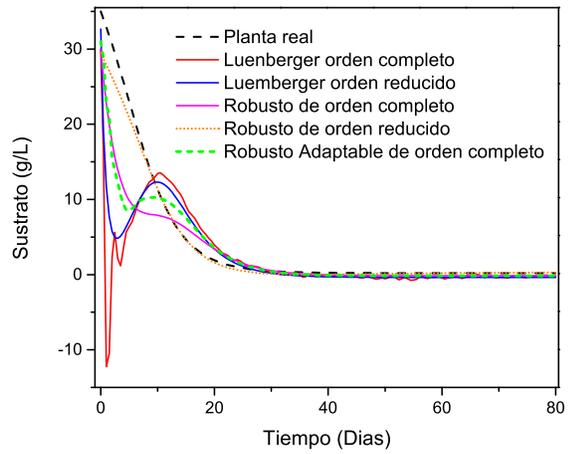


Figura 5.3: Comparación de observadores estimando sustrato

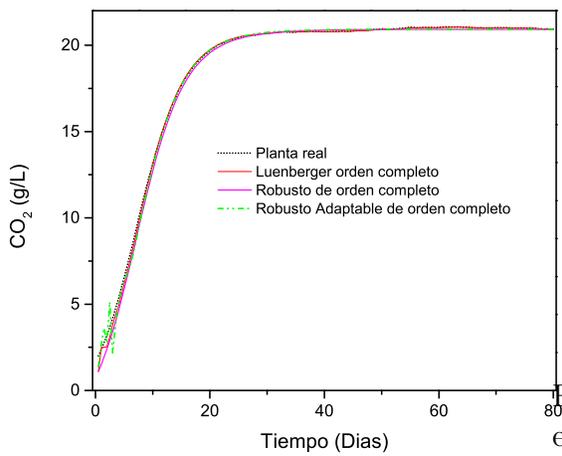


Figura 5.2: Comparación de observadores estimando CO_2

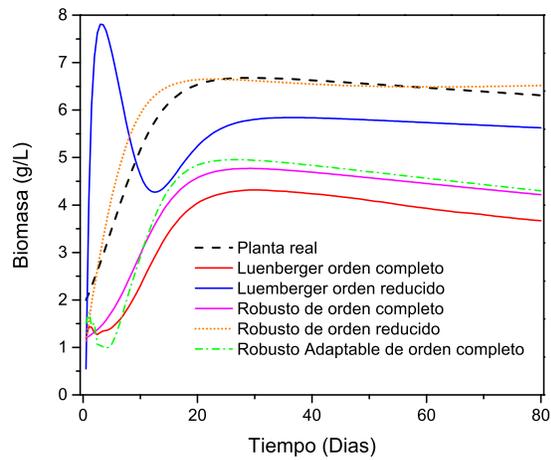


Figura 5.4: Comparación de observadores estimando biomasa

5.2. Sintonización de observadores con altas variaciones en las condiciones iniciales

En las tablas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 se aprecia que el comportamiento del observador robusto de orden reducido es mejor en comparación a los demás observadores presentados en este trabajo. Sin embargo las dinámicas de la planta a observar no han sido sometidas a alteraciones y variaciones lo suficientemente grandes, de tal manera que se logre estresar a los observadores diseñados en un punto en común logrando visualizar de mejor manera el rendimiento de observabilidad entre ellos. Tales pruebas se aplicaron a los observadores con mayor soporte matemático por obvias razones, siendo los siguientes:

- Observador Robusto de Orden Reducido .
- Observador Robusto de Orden Completo.
- Observador Robusto Adaptable de Orden Completo.

Primeramente se realizó un ajuste en la sintonización de ganancias del observador robusto de orden reducido y el observador robusto adaptable de orden completo, esto con la finalidad en obtener ganancias mas finas que las presentadas en las tablas 5.6 y 5.7 que permita un mejor desempeño del observador.

Características importantes de simulación	
α propuesto	12.7
ϵ propuesto	0.01055
Raíces del sistema	-0.0671 -0.00009
Ganancias obtenidas	$L=[-0.0117, -0.0955; -0.0006 -0.0100]$

Tabla 5.8: Observador robusto de orden reducido (ajuste de sintonización)

Características importantes de simulación	
γ	1
α propuesto	10.1
ϵ propuesto	0.0006
Raíces del sistema	-0.2926, -0.0030, -5.4631, -5.5661
Ganancias obtenidas	$L=[-0.1490 \ -1.2108; -0.0096 \ -0.1492; -5.5665 \ -0.0047; -0.0093 \ -5.6226]$

Tabla 5.9: Observador robusto adaptable de orden completo(ajuste de sintonización)

Las condiciones iniciales a las que se sometieron los observadores son las siguientes:

Condiciones iniciales de operación				
Sistema	Sustrato	Biomasa	CO_2	CH_4
Planta real	22 g/L	8 g/L	6 g/L	12 g/L
Robusto de orden reducido	70 g/L	3 g/L	×	×
Robusto de orden completo	70 g/L	3 g/L	1.4 g/L	1.7 g/L
Robusto Adaptable de orden completo	70 g/L	3 g/L	1.4 g/L	1.7 g/L

Tabla 5.10: C.I de operación para simulación

Los resultados que consideran los ajustes hechos en las tablas 5.8, 5.9 y 5.10 se encuentran en las siguientes figuras 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8. Específicamente en las figuras 5.5 y 5.6, sustrato y biomasa respectivamente, se observa que la dinámica del observador robusto de orden reducido tiene un menor acercamiento a la dinámica real de la planta a diferencia de los observadores robusto de orden completo y robusto adaptable de orden completo. En cuestión de comparar las dinámicas de desempeño del dióxido de carbono y del metano en los observadores es imposible considerar al robusto de orden reducido ya que este no considera esas variables de estado para observar en su modelo expuesto, sin embargo es considerado de igual importancia, ya que parte de los objetivos principales de este trabajo es establecer mediciones en el sustrato y la biomasa. En las figuras 5.9, 5.10 y 5.11 se realiza la comparación en los observadores vía índices de desempeño. El desempeño del observador robusto de orden reducido ante las variaciones en las C.I presentes en la tabla 5.10 reflejan que su índice de error es mayor que el de los observadores restantes, por lo que en consideración del análisis ISE (Integral Squared Error), ITAE (Time-weighted absolute Error) e IAE (Integral Squared Error) es menos eficiente.

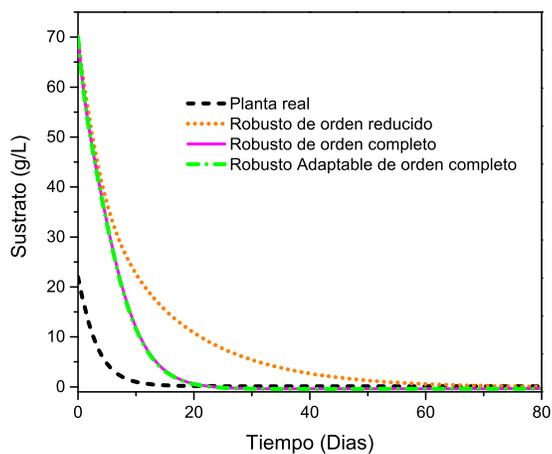


Figura 5.5: Estimación de sustrato

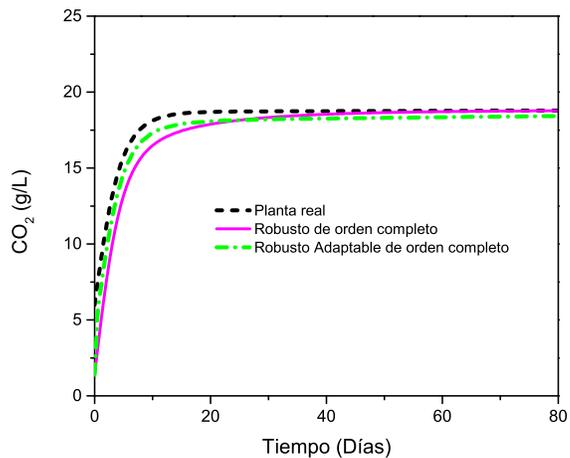


Figura 5.7: Estimación de CO_2

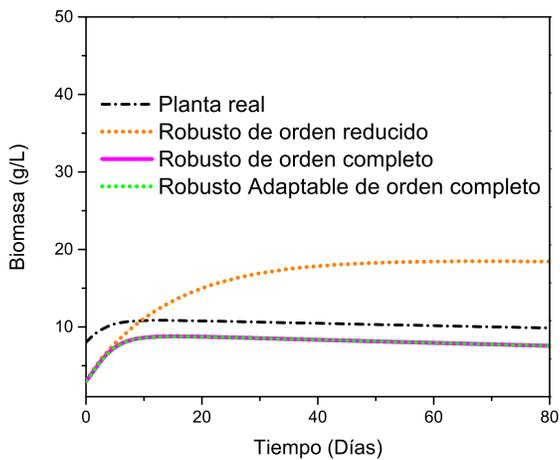


Figura 5.6: Estimación de biomasa

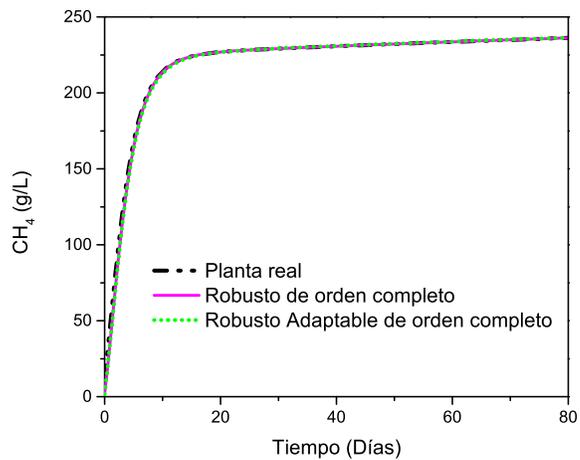


Figura 5.8: Estimación de CH_4

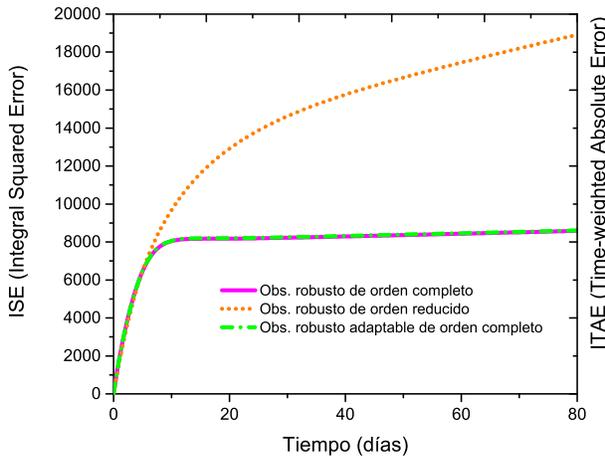


Figura 5.9: Comparación de desempeño mediante índice (ISE)

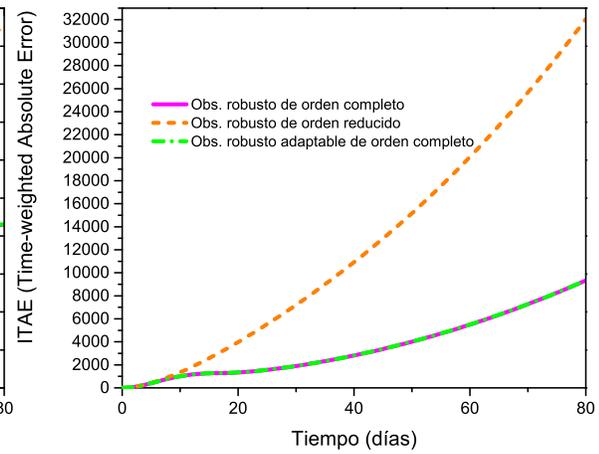


Figura 5.11: Comparación de desempeño mediante índice (ITAE)

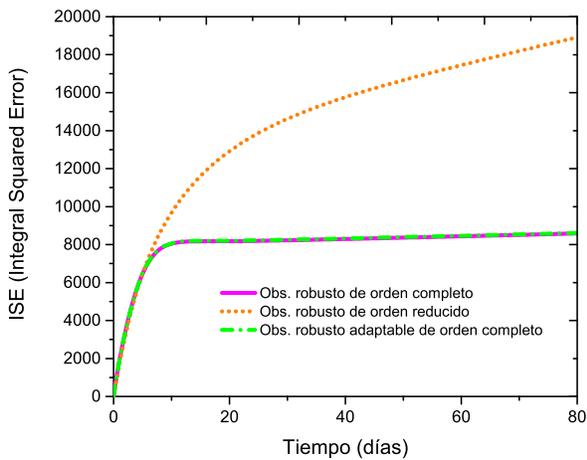


Figura 5.10: Comparación de desempeño mediante índice (IAE)

5.3. Desempeño de observadores ante variación paramétrica, C.I. diferentes, salto en D , y ruido blanco en la señal

Como última prueba realizada con la finalidad de comparar el desempeño de los observadores diseñados, se permite establecer un entorno de funcionamiento no controlado, para ello se consideran las mismas variaciones en las condiciones iniciales de operación presentadas en la tabla 5.10, un salto en la tasa de dilución (5.10) en el día 30 que va de $0.001d^{-1}$ a $0.028d^{-1}$ presentadas en la figura 5.12, variaciones paramétricas de simulación en la planta a observar diferentes a los parámetros utilizados al diseñar los observadores, estos valores se encuentran presentes en la tabla 5.11 y finalmente se agrega también ruido blanco en las señales de medición, estas son, el metano y el dióxido de carbono considerando una señal aleatoria (random) de ± 30 g/L respecto a cada señal medida en (5.11).

$$D = \begin{cases} 0.001d^{-1} & \text{si } 0 \leq t \leq 30 \\ 0.028d^{-1} & \text{si } 30 > t \leq 80 \end{cases} \quad (5.10)$$

Parámetros de simulación		
Parámetros	Planta real	Variación del parámetro
Kmax	3.8	2.9
Ks	112	150
Ki	200	50
Ysx	0.250	0.426
Yxs	2.1	3
D	0.001	0.001
S0	30	30
Fd	0.0032	0.0009
Yx_{CO_2}	0.83	0.67
Yx_{CH_4}	0.73	0.97
α	0.29	0.29
β	0.20	0.20

Tabla 5.11: Variación de parámetros

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \frac{dCO_2}{dt} = \left(K_{max} \frac{S}{K_s + S + K_i} X \right)^{1.1} Y_{xco_2} CO_2^\beta - DCO_2 \pm \text{random}(30g/L) \\ \frac{dCH_4}{dt} = \left(K_{max} \frac{S}{K_s + S + K_i} X \right)^{1.1} Y_{xch_4} CH_4^\alpha X - DCH_4 \pm \text{random}(30g/L) \end{array} \right\} \quad (5.11)$$

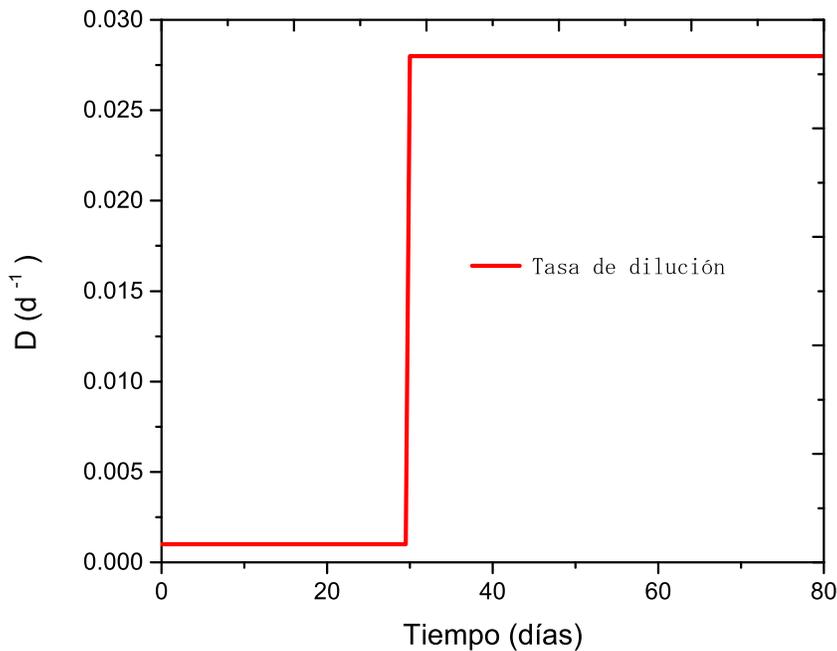


Figura 5.12: Salto en la tasa de dilución

En la figura 5.13 se estima al sustrato en el bioproceso. Es posible ver que la velocidad de convergencia del observador robusto de orden reducido es mas lenta a comparación de los 2 restantes. Al cambiar la tasa de dilución en el día 30, el observador robusto adaptable es quien estima de mejor manera al estado. En la estimación de la biomasa en la figura 5.14, solo el observador robusto adaptable de orden completo es capaz de mantener mejores aproximaciones en comparación a los demás. La señal obtenida por los sensores de CO_2 y CH_4 cuentan con ruido,

como es posible apreciar en la figura 5.16, a pesar de ello es posible visualizar el comportamiento real de la planta, donde solo la estimación del CH_4 del observador robusto adaptable es capaz de llegar al estado real en el bioproceso. Esto mismo ocurre en la estimación del CO_2 en 5.15. Se encuentra en estos resultados que ante perturbaciones externas (ruido blanco en la señal) o incertidumbres en el sistema (variaciones paramétricas etc), el observador robusto adaptable de orden completo es el que tiene un mejor comportamiento, respecto a la dinámica de la planta real a observar. Tal fenómeno lo encontramos presente en la observación del sustrato y la biomasa, figuras 5.13, 5.14, respectivamente. Considerando el ruido blanco añadido en la señal de medición en el CO_2 y CH_4 , en las figuras 5.15 y 5.16 se encuentra de igual manera que el comportamiento del observador robusto adaptable de orden completo cuenta con un mejor desempeño, estabilizando considerablemente los resultados de observación junto a los adquiridos como señales de entrada. Finalmente las figuras 5.17, 5.18 y 5.19 presentan al observador robusto adaptable de orden completo con menor índice de desempeño respecto a error, mientras que en esta comparación, el observador que cuenta con un mayor índice de error presente, según los métodos utilizados (ISE, IAE e ITAE) es el observador robusto de orden reducido.

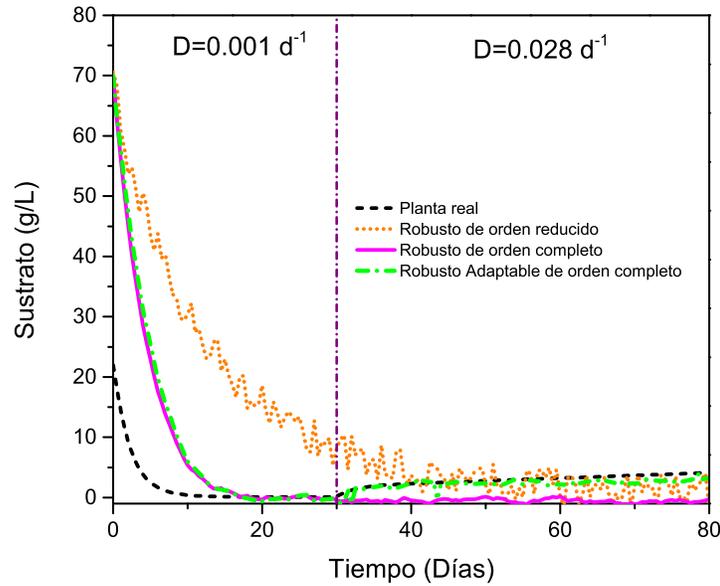


Figura 5.13: Estimación de sustrato

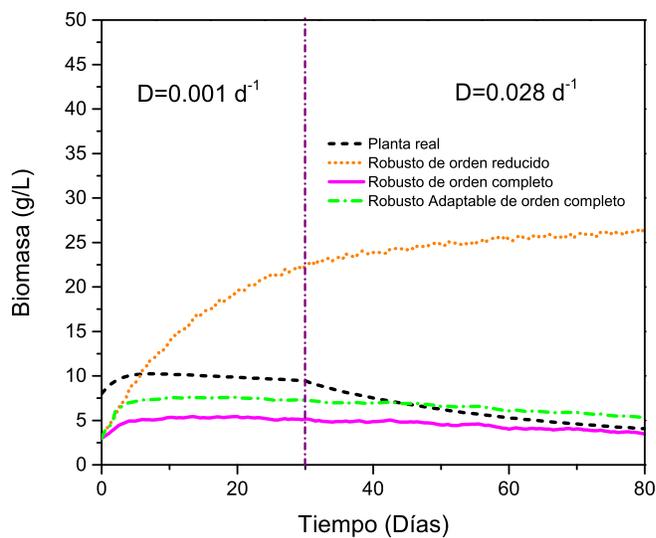


Figura 5.14: Estimación de biomasa

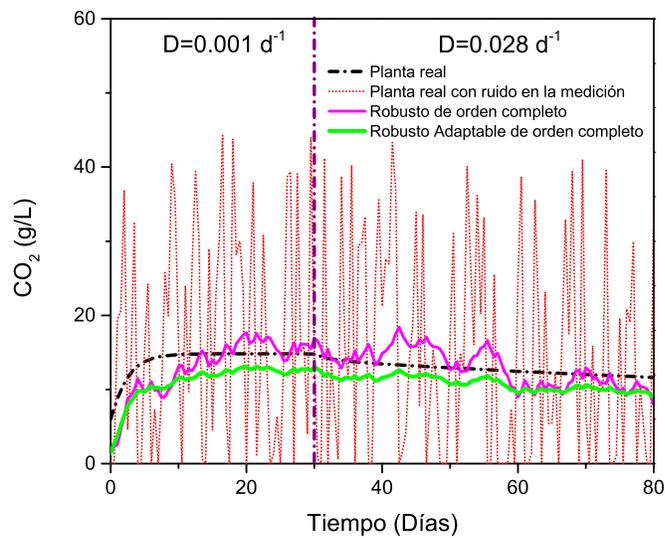


Figura 5.15: Estimación de CO_2

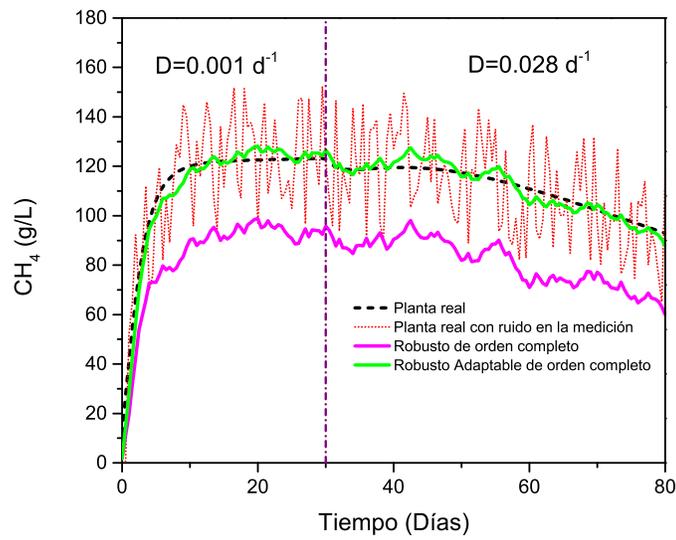


Figura 5.16: Estimación de CH_4

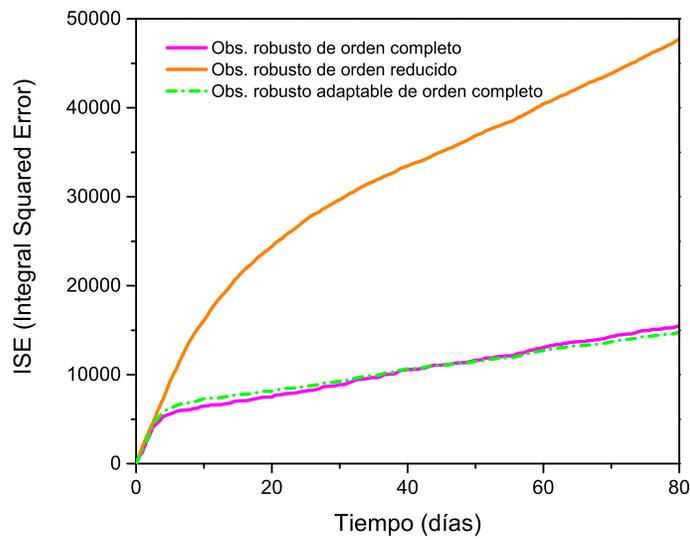


Figura 5.17: Comparación de desempeño mediante índice (ISE)

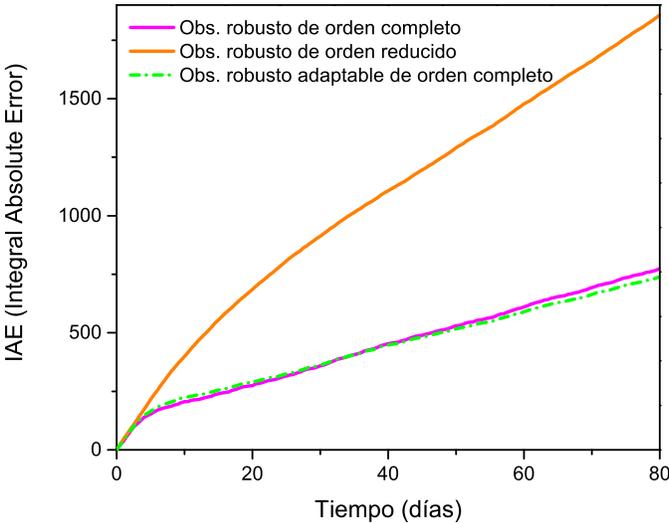


Figura 5.18: Comparación de desempeño mediante índice (IAE)

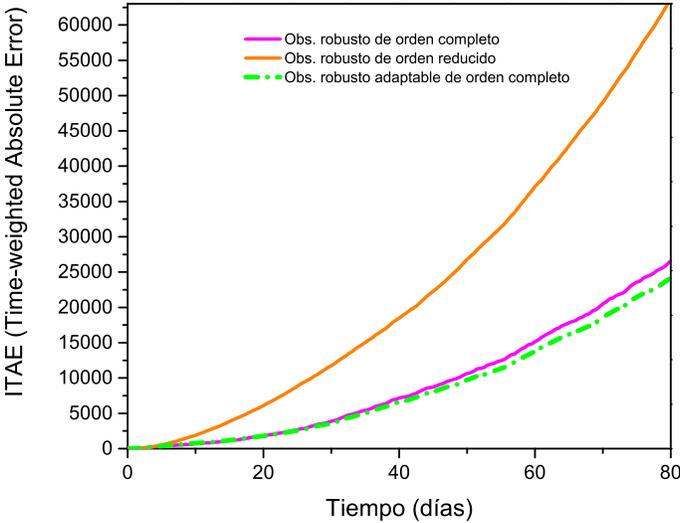


Figura 5.19: Comparación de desempeño mediante índice (ITAE)

5.4. Discusiones sobre el capítulo

La teoría de observabilidad presentada en el capítulo 3 es aplicada al bioproceso, esto nos permite ver el comportamiento de los observadores y con ello realizar una comparación de funcionamiento. La sintonización de los observadores se realizó en función de las variaciones paramétricas presentadas, estabilidad en cada observador, ley de adaptabilidad y rango de valores aceptables para cada parámetro de ajuste con los que cuenta cada uno. Sin embargo existen valores donde a pesar de cumplir con las condiciones mencionadas anteriormente el sistema no es capaz de ajustarse a ellos, esto se ve reflejado en el observador y su baja o nula capacidad de estimar los estados. El observador robusto de orden reducido primeramente presentó una mayor aproximación a los estados reales de la planta, tanto en la estimación de la biomasa como del sustrato, posterior a ello al realizar una sintonización que se ajuste de manera mas exacta en todos los observadores nuevamente y colocar entornos de operación aptos para ver el comportamiento dinámico de cada uno, el observador robusto adaptable fue quien presento una mejor estimación basados en el índice de desempeño. Se considera que algunos observadores quedan sujetos a sintonizaciones mas exactas y precisas en entornos de operación específicos.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Conclusiones

Todos los observadores presentados en este trabajo satisfacen la teoría de observabilidad y estabilidad de manera satisfactoria sobre el biorreactor en condiciones controladas. Se aplicó la teoría de robustes y adaptación en la observación de un sistema biológico altamente no lineal, mediante una linealización por aproximación con las series de Taylor sobre un punto de operación.

Al realizar la comparación entre los índices de desempeño en los observadores propuestos ante diferentes grados de incertidumbre, inicialmente el observador robusto de orden reducido tiene un mejor índice de desempeño.

Al comprobar el desempeño de los observadores en condiciones extremas, el observador robusto de orden completo y robusto adaptable de orden completo poseen un mejor índice de desempeño en comparación al observador robusto de orden reducido.

Finalmente al agregar ruido blanco en la señal, variar las condiciones paramétricas de simulación y considerar una variación en la tasa de dilución en el sistema, el índice del observador robusto adaptable de orden completo es el que sobresale por sobre los demás demostrando con esto que es viable su utilización en entornos físicos no controlados en comparación a otros observadores.

6.2. Trabajo futuro

Dentro de los trabajos futuros a realizar, presentamos la secuencia lógica a trabajar.

1. Adquisición de datos en entornos reales fijos de operación.
2. Realizar on-line el cálculo de las variables de estado estimadas.
3. Realizar observadores híbridos, (según la dinámica de observación).

Bibliografía

- [1] Damien J Batstone, J Keller, Iriñi Angelidaki, SV Kalyuzhnyi, SG Pavlostathis, A Rozzi, WTM Sanders, H Siegrist, and VA Vavilin. The iwa anaerobic digestion model no 1 (adm1). *Water Science and technology*, 45(10):65–73, 2002.
- [2] Jonh Bermudes. *La digestión anaerobia*, volume 2. Editum, 1988.
- [3] Chi-Tsong Chen. *Linear system theory and design*. Oxford University Press, Inc., 1998.
- [4] Harold Goldberg. What is virtual instrumentation? *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, 3(4):10–13, 2000.
- [5] Pezhman Kazemi, Jean-Philippe Steyer, Christophe Bengoa, Josep Font, and Jaume Giralt. Robust data-driven soft sensors for online monitoring of volatile fatty acids in anaerobic digestion processes. *Processes*, 8(1):67, 2020.
- [6] Marta López Artigue et al. Modelado de reactores mbbr para el tratamiento híbrido de aguas residuales industriales y aguas urbanas. 2015.
- [7] Alex Poznyak. *Advanced Mathematical Tools for Control Engineers: Volume 1: Deterministic Systems*, volume 1. Elsevier, 2010.
- [8] Alexander Poznyak, Andrey Polyakov, and Vadim Azhmyakov. *Attractive ellipsoids in robust control*. Springer, 2014.
- [9] Patrick Sagmeister, Patrick Wechselberger, Mohammadhadi Jazini, Andrea Meitz, Timo Langemann, and Christoph Herwig. Soft sensor assisted dynamic bioprocess control: Efficient tools for bioprocess development. *Chemical Engineering Science*, 96:190–198, 2013.

-
- [10] Peter Weiland. Biogas production: current state and perspectives. *Applied microbiology and biotechnology*, 85(4):849–860, 2010.
- [11] Maria Dolors Grau Vilalta. *Estudio del comportamiento de reactores discontinuos y semicontinuos: modelización y comprobación experimental*. Universitat Politècnica de Catalunya, 1999.
- [12] JS Valdez-Martínez, JY Rumbo-Morales, K Santiago-Santiago, HR Azcaray-Rivera, and AM Beltrán-Escobar. Sistema teleoperado de relajación podal basado en sistemas embebidos de bajo costo. *RIITT. Revista internacional de investigación e innovación tecnológica*, 6(36):0–0, 2019.
- [13] Gasca and CA Estrada. Transición energética, energías renovables y energía solar de potencia. *Revista Mexicana de Física*, 59(2):75–84, 2013.
- [14] Guevara and Oscar Javier Cordova. Fuentes renovables y generación de energía limpia su regulación en honduras. *La Revista de Derecho*, 35:93–112, 2014.
- [15] P Venkateswara Rao, Saroj S Baral, Ranjan Dey, and Srikanth Mutnuri. Biogas generation potential by anaerobic digestion for sustainable energy development in india. *Renewable and sustainable energy reviews*, 14(7):2086–2094, 2010.
- [16] ECOFYS Sonnenenergie DGf. Planning and installing bioenergy systems: A guide for installers, architects, and engineers, vol. 1. *Earthscan, UK*, 2005.
- [17] M Sbarciog, Mia Loccufier, and Erik Noldus. Determination of appropriate operating strategies for anaerobic digestion systems. *Biochemical engineering journal*, 51(3):180–188, 2010.
- [18] D Gaida, C Wolf, C Meyer, A Stuhlsatz, J Lippel, T Back, M Bongards, and S McLoone. State estimation for anaerobic digesters using the adm1. *Water Science & Technology*, 66(5):1088–1095, 2012.
- [19] Julie Jimenez, Eric Latrille, Jérôme Harmand, Angel Robles, José Ferrer, Daniel Gaida, Christian Wolf, Francis Mairet, Olivier Bernard, Victor Alcaraz-Gonzalez, et al. Instrumentation and control of anaerobic digestion processes: a review and some research challenges. *Reviews in Environmental Science and Bio/Technology*, 14(4):615–648, 2015.
- [20] Hassan K Khalil. Nonlinear systems. *Prentice-Hall, New Jersey*, 2, 1996.

-
- [21] Angelo Genocchi. *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*, volume 1. Bocca, 1884.
- [22] Rudolf Emil Kalman, Peter L Falb, and Michael A Arbib. *Topics in mathematical system theory*, volume 1. McGraw-Hill New York, 1969.
- [23] Yuri Shtessel, Christopher Edwards, Leonid Fridman, and Arie Levant. Conventional sliding mode observers. In *Sliding mode control and observation*, pages 105–141. Springer, 2014.
- [24] Katsuhiko Ogata et al. *Modern control engineering*, volume 5. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2010.
- [25] Fabián A Ortega, Omar A Pérez, and Emiro A López. Comparación del desempeño de estimadores de estado no lineales para determinar la concentración de biomasa y sustrato en un bioproceso. *Información tecnológica*, 26(5):35–44, 2015.
- [26] HA Ruíz-Leza, RM Rodríguez-Jasso, R Rodríguez-Herrera, JC Contreras-Esquivel, and CN Aguilar. Diseño de biorreactores para fermentación en medio sólido. *Revista Mexicana de ingeniería química*, 6(1):33–40, 2007.
- [27] Hyeong-Seok Jeong, Chang-Won Suh, Jae-Lim Lim, Sang-Hyung Lee, and Hang-Sik Shin. Analysis and application of adm1 for anaerobic methane production. *Bioprocess and biosystems engineering*, 27(2):81–89, 2005.
- [28] Alberto Duarte Torres. Evaluación de los parámetros cinéticos de la ecuación de monod. *Ingeniería e Investigación*, (33):123–138, 1996.
- [29] M Fedailaine, K Moussi, M Khitous, S Abada, M Saber, and N Tirichine. Modeling of the anaerobic digestion of organic waste for biogas production. *Procedia Computer Science*, 52:730–737, 2015.
- [30] PA López-Pérez, MI Neria-González, and R Aguilar-López. Improvement of activated sludge process using a nonlinear pi controller design via adaptive gain. *International Journal of Chemical Reactor Engineering*, 14(1):407–416, 2016.
- [31] Olivier Bernard, Zakaria Hadj-Sadok, and Denis Dochain. Software sensors to monitor the dynamics of microbial communities: application to anaerobic digestion. *Acta biotheoretica*, 48(3):197–205, 2000.

-
- [32] PA López-Pérez, MI Neria-González, and R Aguilar-López. Nonlinear controller design with application to a continuous bioreactor. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 47(5):585–592, 2013.
- [33] Pablo López Pérez, M Neria González, and Ricardo Aguilar López. Cadmium concentration stabilization in a continuous sulfate reducing bioreactor via sulfide concentration control. *Chemical Papers*, 67(3):326–335, 2013.
- [34] V Ramya and B Palaniappan. Embedded system for hazardous gas detection and alerting. *International Journal of Distributed and Parallel Systems (IJDPS)*, 3(3):287–300, 2012.
- [35] Thomas A Henzinger and Joseph Sifakis. The discipline of embedded systems design. *Computer*, 40(10):32–40, 2007.
- [36] Ian Sommerville. *Ingeniería del software*. Pearson educación, 2005.

Apéndice A

Diseño, estructura y ensamble del sistema de medición

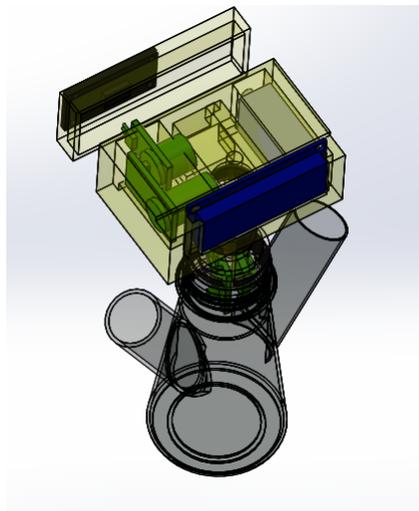


Figura A.1: Perspectiva interna general del sistema ensamblado

Se utilizó el programa SolidWorks 2016 para realizar el diseño de la infraestructura del sistema de medición, donde se incorporaran los sensores utilizados para tal fin. Se presentan en las imágenes A.2, A.3, A.4 A.5, A.1 las perspectivas visuales del diseño, así como el ensamble de las piezas y en la figura A.2 el conjunto de sensores ya insertados dentro del diseño.

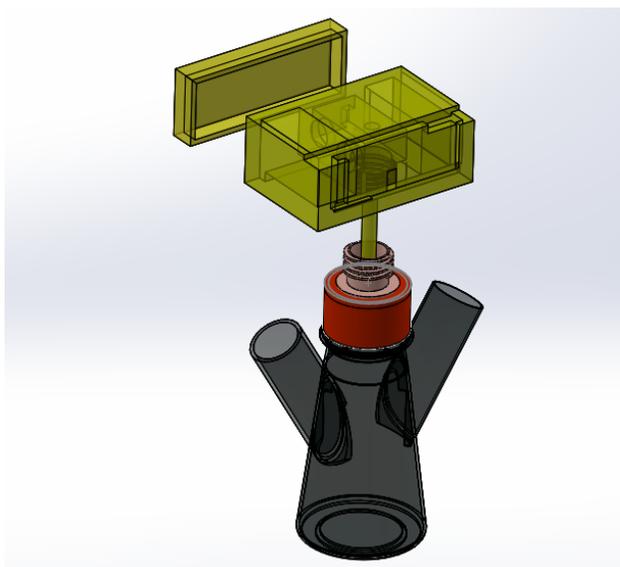


Figura A.2: Perspectiva en perfil sólido

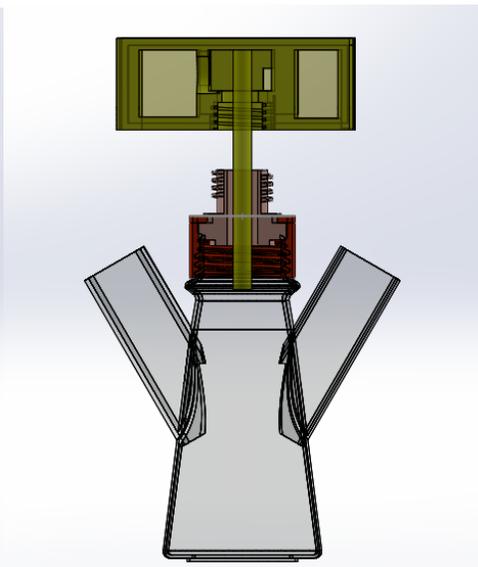


Figura A.4: Perspectiva frontal cortada

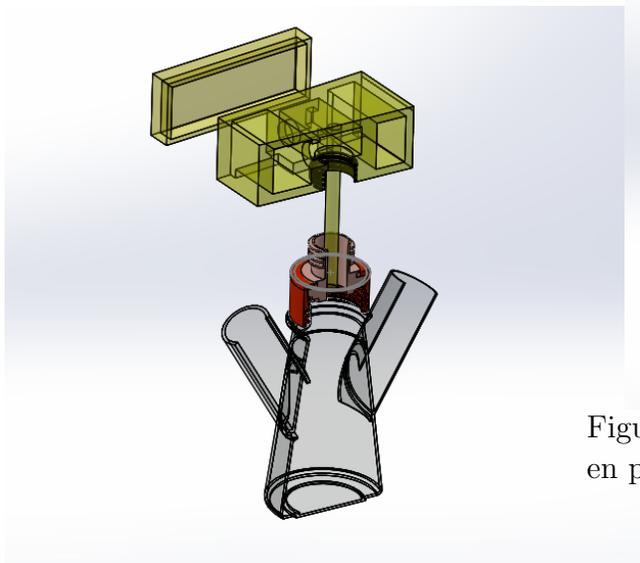


Figura A.3: Perspectiva en perfil blando

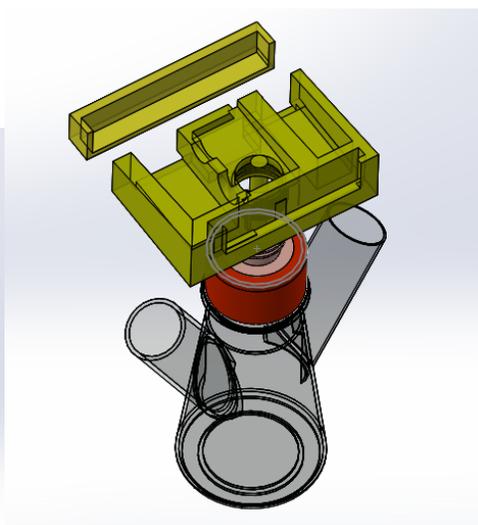


Figura A.5: Perspectiva superior cortada en perfil blando

Apéndice B

Conexiones electrónicas en sistema de medición

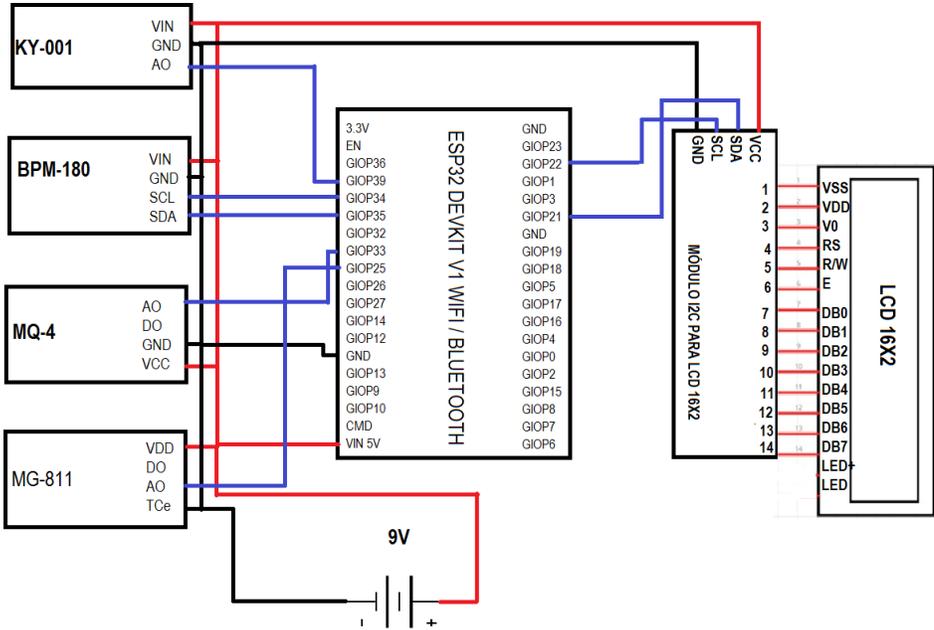


Figura B.1: electronic

Apéndice C

Programas

C.1. Adquisición de datos de manera local

```
#include <Arduino.h>

const int sensormeta = 25;
int lecturameta = 0;

const int sensorco2= 33;
int lecturaco2 = 0;

const int sensorpress = 35;
int lecturapress = 0;

const int sensortemp = 39;
int lecturatemp= 0;

void setup() {
    Serial.begin(115200);
}

void loop() {
    lecturameta = analogRead(sensormeta);
    lecturaco2  = analogRead(sensorco2);
```

```
    lecturapress = analogRead(sensorpress);
    lecturatemperatura = analogRead(sensortemperatura);

    Serial.print("Valor: ");
    Serial.println(lecturatemperatura);
    Serial.println("g/L");
    delay(500);
    Serial.print("Valor: ");
    Serial.println(lecturaco2);
    Serial.println("g/L");
    delay(500);
    Serial.print("Valor: ");
    Serial.println(lecturapress);
    Serial.println("psi");
    delay(500);
    Serial.print("Valor: ");
    Serial.println(lecturatemperatura);
    Serial.println("C");
    delay(500);

    delay(50000);
}
```

C.2. Comunicación entre ESP32 y LCD por I2C

```
#include <LiquidCrystal_I2C.h>
LiquidCrystal_I2C lcd (0x27, 16,2)

void setup() {

    lcd.begin();
    lcd.backlight();

    lcd.setCursor(0,0);
    lcd.print("Biodigestor");
}
```

```
        lcd.setCursor(0,1);
        lcd.print("Mediciones") ;

    }

    void loop(){

        lcd.setCursor(0,0);
        lcd.print("Sustrato:");
        lcd.print(G/L());
        lcd.print("s");
        delay(1000);

        lcd.setCursor(0,0);
        lcd.print("CO2:");
        lcd.print(G/L());
        lcd.print("s");
        delay(1000);

        lcd.setCursor(0,0);
        lcd.print("CH4:");
        lcd.print(G/L());
        lcd.print("s");

        lcd.setCursor(0,0);
        lcd.print("Biomasa:");
        lcd.print(G/L());
        lcd.print("s");
        delay(1000);

        delay(60000);
    }
}
```

C.3. Comunicación entre ESP32 y ThingSpeak

```
#include <WiFi.h>
const char * ssid = "-----";
const char * pass = "-----";

#include "ThingSpeak.h"
unsigned long Channel_ID = "-----";
const char * WriteAPIKey = "----";

const int sensormeta = 25;
int lecturameta = 0;
const int sensorco2= 33;
int lecturaco2 = 0;
const int sensorpress = 35;
int lecturapress = 0;
const int sensortemp = 39;
int lecturatemp= 0;

void setup()
{
    Serial.begin(115200);
    Serial.println("Iniciando conexion Wifi");
    WiFi.begin(ssid , pass);
    while(WiFi.status() != WLCONNECTED){
        delay(500);
        Serial.print(".");

        Serial.println("Conexion establecida");
        ThingSpeak.begin(client); //
    }

    void loop() {
        lecturameta = analogRead(sensormeta);
        lecturaco2  = analogRead(sensorco2);
        lecturapress = analogRead(sensorpress);
```

```
    lecturatemperatura = analogRead(sensorTemp);

    Serial.print("Valor: ");
    Serial.println(lecturameta);
    Serial.println("g/L");
    delay(500);
    Serial.print("Valor: ");
    Serial.println(lecturaco2);
    Serial.println("g/L");
    delay(500);
    Serial.print("Valor: ");
    Serial.println(lecturapress);
    Serial.println("psi");
    delay(500);
    Serial.print("Valor: ");
    Serial.println(lecturatemperatura);
    Serial.println("C");
    delay(500);

    ThingSpeak.setField(1, temperatura);

    delay(50000);

    ThingSpeak.writeFields(Channel_ID, WriteAPIKey);
    Serial.println("Datos enviados a ThingSpeak");
    delay(2000);
}
```

Apéndice D

Observadores en MatLab

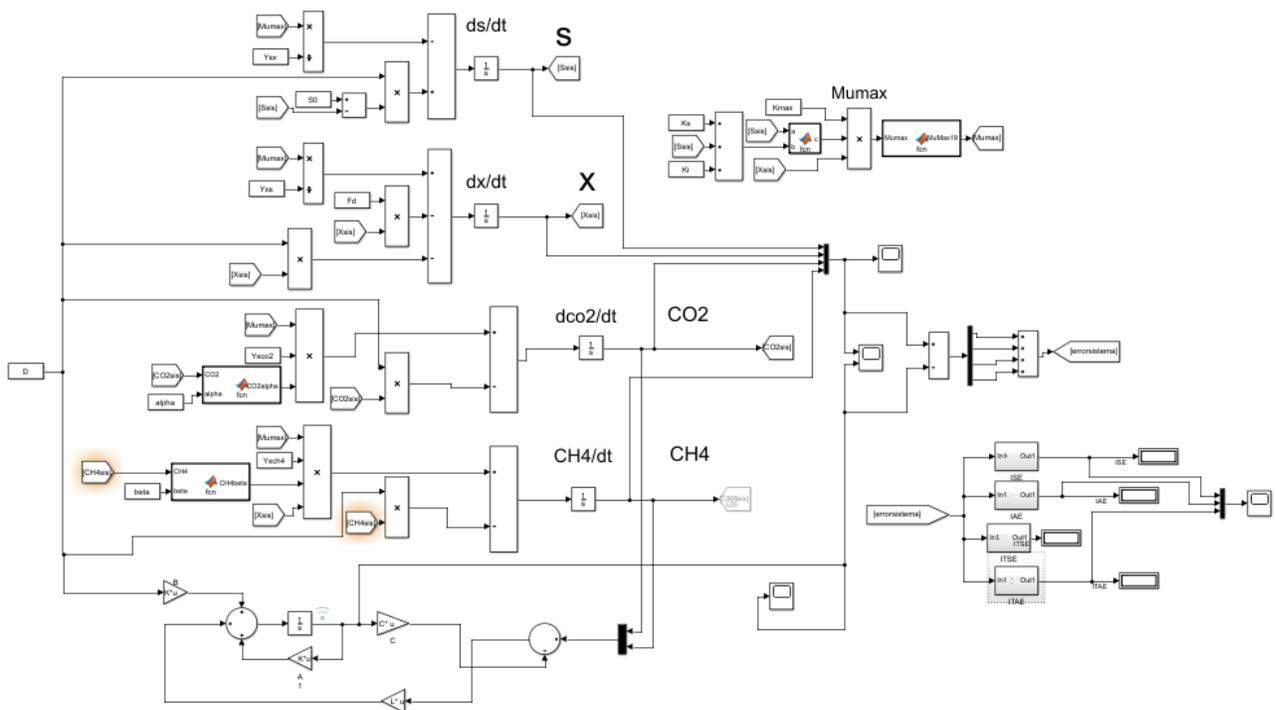


Figura D.1: Observador Luenberger de orden completo

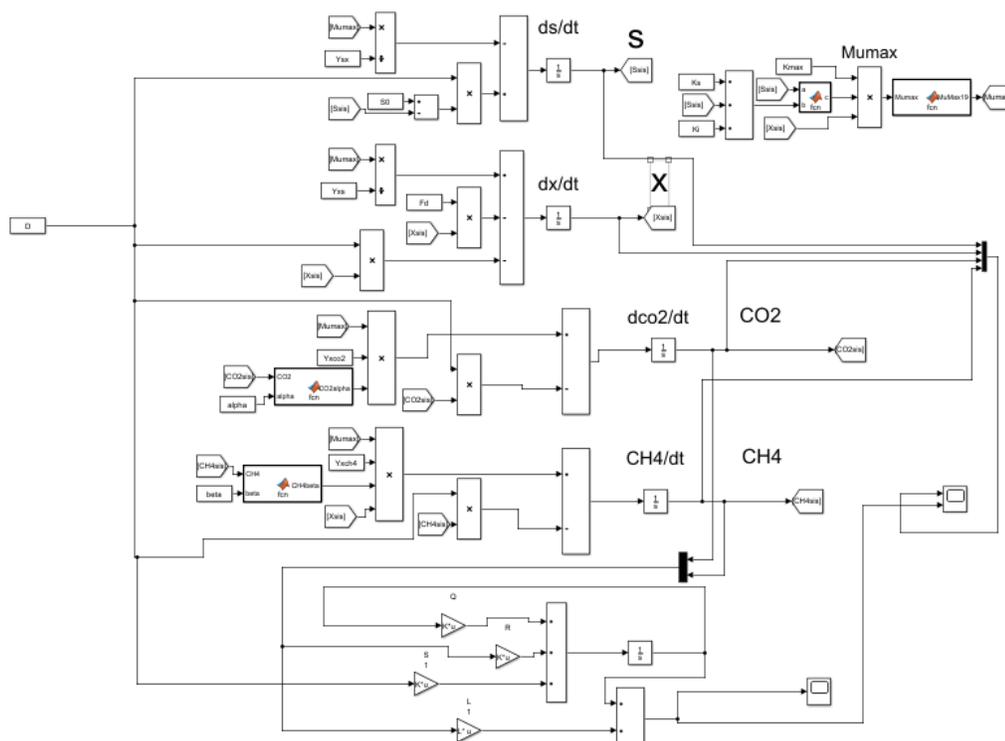


Figura D.2: Observador Luenberger de orden reducido

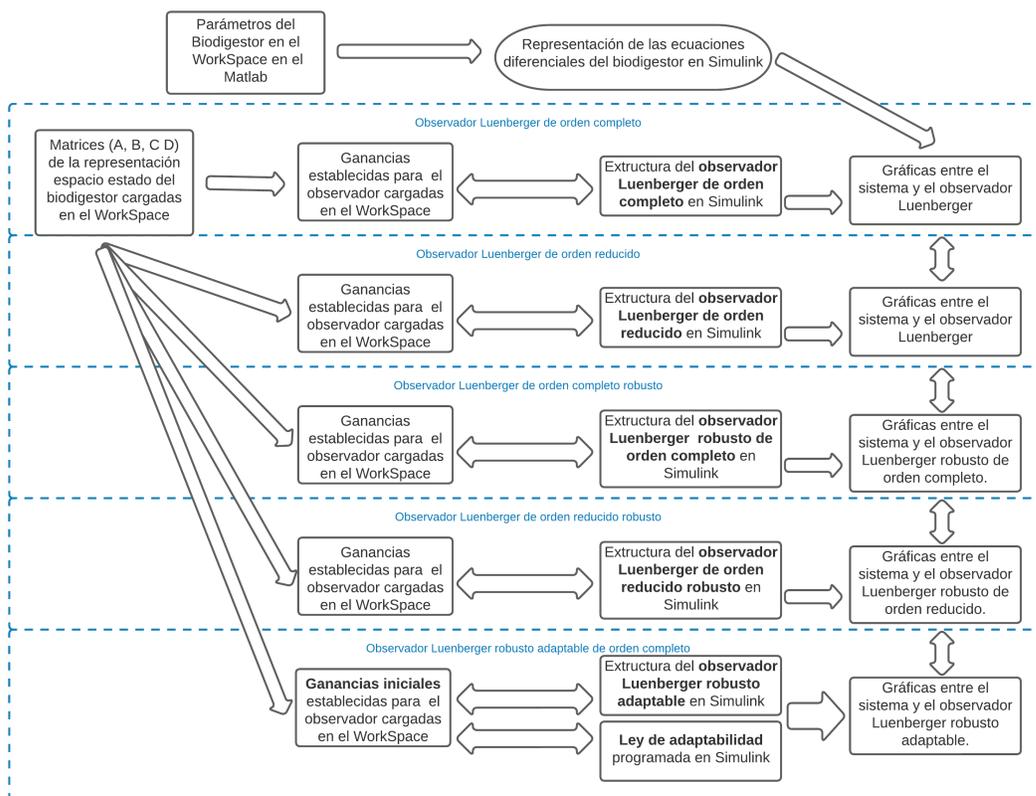


Figura D.3: Estructura de observadores en Matlab

Apéndice E

Artículo y constancia de seminarios



La Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

otorga el presente

RECONOCIMIENTO

a

Ing. Elmer David Tamayo Román

por su participación en el Seminario de Investigación de la Maestría y el Doctorado en Ciencias en Automatización y Control con la ponencia "Sistema embebido basado en sensores de bajo costo acoplado a un observador de estado adaptable para el monitoreo de biogas".

"AMOR, ORDEN Y PROGRESO"

Mineral de la Reforma, Hidalgo; 30 de abril de 2021.

Dr. Otilio Arturo Acevedo Sandoval
Director del ICBI



ICBI Número de control: ICBI-D/R024/2021

Figura E.1: Seminario abril 2021



La Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

otorga el presente

RECONOCIMIENTO

a

Ing. Elmer David Tamayo Román

por su participación en el Seminario de Investigación de la Maestría y el Doctorado en Ciencias en Automatización y Control con la ponencia "Sistema embebido basado en sensores de bajo costo acoplado a un observador de estado adaptable para el monitoreo de biogás".

"AMOR, ORDEN Y PROGRESO"

Mineral de la Reforma, Hidalgo; 17 de septiembre de 2021.

Dr. Otilio Arturo Acevedo Sandoval
Director del ICBI

Reconocimiento con Sello

Número de control: ICBI-D/R575/2021



Figura E.2: Seminario septiembre 2021



La Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo a través del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
otorga el presente

RECONOCIMIENTO

al

Ing. Elmer David Tamayo Román

por su participación en el Seminario de Investigación de la Maestría y el Doctorado en Ciencias en Automatización y Control con la ponencia "Sistema embebido basado en sensores de bajo costo utilizando un observador de estado adaptable para el monitoreo de biogás".

Mineral de la Reforma, Hgo., a 25 de febrero de 2022.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"


Dr. Otilio Arturo Abejedo Sandoval
Director del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

Escuela de Ciencias Básicas e Ingeniería



 ICBI Número de control: ICBI/D-R032/2022

Figura E.3: Seminario febrero 2022



Figura E.4: Seminario abril 2022



La Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo a través del Instituto de Ciencias
Básicas e Ingeniería

otorga el presente

RECONOCIMIENTO

a

**Ing. Elmer David Tamayo Román,
Dr. Pablo Antonio López Pérez,
Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver,**

por su destacada participación con el trabajo titulado "Sistema embebido basado de sensores de bajo costo acoplado a un observador de estado adaptable para el monitoreo de biogás" en el Coloquio de verano en Ciencias de la Automatización, edición 2022, del 16 al 20 de mayo del año en curso.

Mineral de la Reforma, Hgo., a 30 de junio de 2022.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

Dr. Otilio Arturo Acevedo Sandoval
Director del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería



ICBI Número de control: ICBI-D/R001/2022

Figura E.5: Coloquio mayo 2022



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
School of Engineering and Basic Sciences
Área Académica de Computación y Electrónica
Department of Electronics and Computer Science

Mineral de la Reforma, Hgo., a 21 de julio de 2022

Número de control: ICBI-AACyE/1210/2022
Asunto: Constancia retribución social estudiantes.

A QUIEN CORRESPONDA:

Por este medio se hace constar que el Ing. Elmer David Tamayo Román, participó en las actividades de retribución social para el CONACYT, mediante la difusión del programa académico de posgrado de Maestría en Ciencias en Automatización y Control, en el marco de la Expo Computación, Electrónica y Telecomunicaciones, con el intercambio de experiencias, la divulgación de resultados científicos y presentación de prototipos experimentales, llevada a cabo el 12 de mayo del año en curso, en las instalaciones de la UAEH, edificio CEVIDE.

Se extiende la presente para los fines y efectos a los que haya lugar.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO


Dra. Liliam Rodríguez Guerrero
Coordinadora de la Maestría
en Ciencias en Automatización y Control




Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver
Jefe del Área Académica
de Computación y Electrónica
Vo.Bo.

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Computación y Electrónica

LRG/APL

Ciudad del Conocimiento
Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia
Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,
México, C.P. 42164
Teléfono: +52 (771) 71 720 00 ext. 2250, 2251
Fax 2109
aacye_icbi@uah.edu.mx



Figura E.6: Retribución social MCAC



DESDE 2013
<https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive>
 Pódi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI



Publicación Semestral Pódi Vol. 10 No. Especial 3 (2022) 48–56

Observador robusto de orden reducido aplicado a un biodigestor Robust reduced-order observer applied to a biodigester

E. D. Tamayo-Roman^{a,*}, J. P. Ordaz-Otívar^a, P. A. López-Pérez^b, I. González-Viveros^a, J. L. Hernández-Hernández^a

^aUniversidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Mineral de la Reforma, Hidalgo C.P. 42184.

^bEscuela Superior de Apan, Apan Hidalgo C.P. 43900.

Resumen

Este trabajo aborda el problema de observación de estado para la dinámica no lineal de un biodigestor donde la variación paramétrica e incertidumbres dentro de su comportamiento se encuentra presente debido al entorno de operación del sistema. El desarrollo propuesto considera una separación entre variables medibles y no medibles mediante una transformación, además mediante el uso de LMI se concluye con el concepto de Estabilidad Última Uniformemente Acotada sobre el error de estimación. Para ello se diseña una función de observación que considera al error de estimación asociado a las variables de estado que no son cuantificadas en línea. La reconstrucción de las variables no disponibles es realizada mediante la solución de una desigualdad matricial lineal. Para demostrar el funcionamiento del observador el algoritmo es aplicado en un biodigestor que contiene variaciones paramétricas en el bioproceso de producción de biogas.

Palabras Clave: Observador Robusto, Transformación no-singular, Orden reducido, Biodigestor

Abstract

This work described the state observation problem for the nonlinear dynamics of a biodigester where parametric variation and uncertainties in its behavior are present due to the operating environment of the system. The proposed development considers a separation between measurable and non-measurable variables by means of a transformation, also by using LMI it is concluded the concept of Uniformly Bounded Ultimate Stability on the estimation error. For this purpose, an observation function is designed that considers the estimation error associated to the state variables that are not quantified online. The reconstruction of the unavailable variables is performed by solving a linear matrix inequality. To demonstrate the performance of the observer, the algorithm is applied to a biodigester containing parametric variations in the bioprocess of biogas production.

Keywords: Robust Observer, Non-singular transformation, Reduced observer, Biodigester

1. Introducción

Una de las necesidades principales de la humanidad (después de la alimentación), es generar fuentes de energía en sus diferentes estados (líquida, sólida, gaseosa); aunado a esto, y por la creciente demanda de energías limpias, se considera necesario e indispensable, que los métodos utilizados para su generación sea lo menos tóxica y contaminante para el medio, dando paso con estos principios de búsqueda, a las energías renovables (Gasca, 2013).

Existe una amplia variedad y métodos que actualmente se desarrollan para la obtención de energías limpias, en su mayoría esos procedimientos son costosos al procurar su funcionamiento y mantenimiento (Guevara, 2014).

La digestión anaerobia (DA) (Rao et al., 2010) es considerada viable y factible para la generación de energía por sobre otros. La DA un proceso de fermentación natural sin oxígeno donde material biodegradable, llamado sustrato, es transformado por microorganismos (conocidos como biomasa) a una mezcla de gases (biogás). La implementación de estos sistemas en su mayoría no son costosos y poseen amplia versatilidad de instalación considerando que trabajan con desechos orgánicos, materia que abunda en la naturaleza.

El principal resultado de interés en la DA es la generación de biogas, (Sonnenenergie DGf, 2005), este tiene muchas utilidades como sustituir el combustible en motores de combustión interna (Weiland, 2010), hasta reemplazar el gas para actividades

*Autor para correspondencia: elmer.david@hotmail.com

Correo electrónico: elmer.david@hotmail.com (E. D. Tamayo-Roman), jesus.ordaz@uaeh.edu.mx (J. P. Ordaz Otívar), pablo.lopez@uaeh.edu.mx (P. A. López-Pérez), go263785@uaeh.edu.mx (I. González-Viveros), he257579@uaeh.edu.mx (J. L. Hernández-Hernández).

Historial del manuscrito: recibido el 08/04/2022, última versión-revisada recibida el 18/07/2022, aceptado el 02/08/2022, publicado el 31/08/2022. DOI: <https://doi.org/10.29057/icbi.v10Especial3.8971>



Figura E.7: Artículo pag.1

comunes del hogar como (calefacción, cocción de alimentos, etc). Uno de los inconvenientes que surgen en este proceso es que poseen un comportamiento no lineal e inestable, por lo que el proceso de monitoreo se complica y a su vez la optimización del sistema (Sharciog et al., 2010). Es por ello que se considera la implementación de observadores de estado, para estimar las variables de estado que son fundamentales y que de manera sencilla sería complicado cuantificar en línea.

El comportamiento de sistemas biológicos analizados por medio de herramientas matemáticas (observadores de estado) o digitales (Soft-Sensores), actualmente no cuentan con la precisión y desempeño esperados en el monitoreo de biodigestores, porque las incertidumbres paramétricas en el sistema hacen necesario generar un reajuste (manual o automático) en el algoritmo diseñado para el seguimiento de la planta. Estos ajustes pocas veces se realizan en línea y para aquellas plantas en donde el procedimiento se efectúa de manera automática se posee un lapso muy corto de tiempo por lo que en la mayoría de las ocasiones la calibración es de manera manual.

Es necesario una herramienta que sea capaz de adaptarse de manera automática y con un amplio grado de autoajuste a las dinámicas, incertidumbres y variaciones paramétricas presentadas en el biorreactor, por lo que se propone un observador robusto de orden reducido que acepte un amplio rango de variaciones paramétricas en el sistema analizado y a su vez disminuya de manera automática el error de observación del sistema real y el estimado. El observador robusto de orden reducido es utilizado para monitorizar los gases que son el resultado de la DA, como CO_2 y CH_4 para estimar las variables de estado sustrato y biomasa que no se pueden cuantificar en línea en el biodigestor. El observador propuesto cuenta con el desempeño necesario para ser considerados en el análisis de sistemas DA.

2. Descripción el sistema (Modelo biológico)

Un biodigestor en su forma simple es un contenedor (llamado reactor), donde se realiza el proceso de cultivo (comúnmente denominado fermentador), se a en estado sódido o líquido. Su diseño debe ser tal que asegure homogeneidad entre los componentes del sistema y condiciones óptimas para el crecimiento microbiano y generación del producto deseado, en este caso, la obtención de biogás y sus derivados representadas en Tabla 1, reportadas en (Sonnenenergie DGF, 2005). Las características más utilizadas en biodigestores a nivel industrial están provistos de mecanismos de agitación, dispersión y aireación así como de sistemas para el control de la temperatura, pH entre otros (Ruiz-Leza et al., 2007),

Tabla 1: Composición de Biogás

Componente	Porcentaje
Metano (CH_4)	50 a 80
Anhidro carbónico (CO_2)	20 a 50
Nitrógeno (H_2)	< 1
Amoniacio (NH_3)	< 1
Sulfuro de hidrógeno (H_2S)	< 1

En función de los flujos de entrada y salida, el funcionamiento de un biodigestor puede operar de manera : discontinua

(batch), semicontinua (fed-batch) o continua (quimioestado). Por las particularidades de este último es que se propone desarrollar un observador robusto de orden reducido. Además, es el tipo de digestor más usado en el medio rural, cuando se trata de digestores pequeños para uso doméstico. Los diseños más populares son el hindú y el chino. Entre los de tipo hindú existen varios diseños, pero en general son verticales y enterrados. Se cargan por gravedad una vez al día, con un volumen de mezcla que depende del tiempo de fermentación o retención y producen una cantidad diaria más o menos constante de biogás si se mantienen las condiciones de operación, que son las presentadas en la siguiente Tabla 2.

Tabla 2: Operación de Biodigestor

Condiciones de operación	Parámetros
Relación de C/N	0.20, 1-30:1
Temperatura	22 a 42 °C
pH	6.06 - 7.22
Sódidos Volátiles	7-12 %
Tiempo Retención	15-27 días

2.1. Modelo matemático

El modelo matemático que es usado en el análisis y estudio de este trabajo de investigación parte del reporte de IWA sobre la base cinética del modelo de digestión anaerobia ADM1 (Anaerobic Digestion Model No.1), (Batstone et al., 2002).

2.1.1. ADM1

El ADM1 es un modelo matemático generalizado para la digestión anaerobia que describen los procesos bioquímicos y fisicoquímicos que ocurren en un biodigestor. Los procesos bioquímicos incluyen la desintegración de partículas homogéneas a carbohidratos, proteínas y lípidos; hidrólisis extracelular de estos sustratos particulados a azúcares, aminoácidos y ácidos grasos de cadena larga (LCFA), respectivamente; acidogénesis de azúcares y aminoácidos a ácidos grasos volátiles (VFA) e hidrógeno; acetogénesis de LCFA y VFA a acetato; y separar los pasos de metanogénesis del acetato y el hidrógeno / CO_2 . Las ecuaciones fisicoquímicas describen la asociación y disociación de iones, y la transferencia gas-líquido. El sistema de DA esta integrado por un conjunto de ecuaciones diferenciales algebraicas (EDA), 26 variables de estado dinámico y 8 variables algebraicas implícitas por reactor o elemento. Implementado como ecuaciones diferenciales, hay 32 variables de estado en las dinámicas de concentración (Batstone et al., 2002). Para esto se tomaron en cuenta 56 parámetros estequiométricos y cinéticos relativos para procesos biológicos, 24 componentes y se asumieron 19 procesos (Jeong et al., 2005).

El ADM1 es un modelo general, así que se generó un modelo de orden reducido para la dinámica y ecuaciones que intervienen, esto con la finalidad de desarrollar el trabajo de manera mas específica.

2.1.2. Desarrollo del modelo

Las reacciones fisico-químicas dentro del biodigestor, se representan en (1)



Figura E.8: Artículo pag.2

Se agrega la cinética de reacción que describe el cambio dentro del biodigestor, dado por una ecuación de inhibición modificada en (2).

$$\mu_{max} = \left[K_{max} \frac{S}{K_x + S + K_i X} \right]^{1,1} \quad (2)$$

En (2) se encuentra la representación de un modelo matemático de inhibición que describe el crecimiento de los microorganismos en un medio acuoso limitado por el sustrato suministrado, también es llamada ecuación de Monod (Torres, 1996), con los siguientes parámetros:

- K_{max} = Constante de degradación del sustrato.
- K_x = Coeficiente de masa en medio acuoso del sustrato.
- K_i = Factor de inhibición.
- X = Concentración de la biomasa.

Para representar la dinámica del biodigestor (sistema-planta), por ejemplo el sustrato, se considera un balance de materia en el biodigestor considerando la cinética (2), tasa de dilución D y la diferencia, esto se expresa como :

$$\frac{dS}{dt} = \text{Término cinético del consumo de sustrato} + \text{Término de operación del biodigestor.} \quad (3)$$

La metodología utilizada en (3), es aplicada a las variables de estado restantes (X, CH_4, CO_2) (biomasa, metano y dióxido de carbono respectivamente) resultando en :

$$\frac{dS}{dt} = - \left(\frac{\mu_{max}}{Y_{sx}} \right) + D(S_0 - S), \quad (4)$$

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{\mu_{max}}{Y_{xx}} \right) - F_d X - DX, \quad (5)$$

$$\frac{dCO_2}{dt} = \mu_{max} Y_{xCO_2} CO_2^\alpha - DCO_2, \quad (6)$$

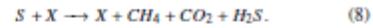
$$\frac{dCH_4}{dt} = \mu_{max} Y_{xCH_4} CH_4^\beta - DCH_4. \quad (7)$$

donde:

- $\frac{dS}{dt}$ = Dinámica de sustrato.
- μ_{max} = Tasa de crecimiento específica.
- Y_{sx} = Rendimiento de sustrato sobre biomasa.
- Y_{xx} = Rendimiento de biomasa sobre sustrato.
- D = Tasa de dilución.
- Y_{xCO_2} = Rendimiento de dióxido de carbono respecto a biomasa.
- Y_{xCH_4} = Rendimiento de metano respecto a biomasa.
- α = Constante de comportamiento.
- β = Constante de comportamiento.

2.2. Ajuste al modelo del biodigestor

Las ecuaciones diferenciales que representan la dinámica del biodigestor (4, 5, 6 y 7), son ajustadas, la finalidad es mejorar el comportamiento de la dinámica del sistema en tiempo real para aplicar el observador robusto de orden reducido. Las modificaciones se basan considerando las reacciones bioquímicas, balance de materia e igualación entre la demanda química de oxígeno y el sustrato $DQO = S$ tal que :



por lo que ahora las ecuaciones (4) a (7) quedan como :

$$\frac{dS}{dt} = - \left[\frac{\left(K_{max} \frac{S}{K_x + S + K_i X} \right)^{1,1}}{Y_{sx}} \right] + D(S_0 - S), \quad (9)$$

$$\frac{dX}{dt} = \left[\frac{\left(K_{max} \frac{S}{K_x + S + K_i X} \right)^{1,1}}{Y_{xx}} \right] - F_d X - DX, \quad (10)$$

$$\frac{dCO_2}{dt} = \left(K_{max} \frac{S}{K_x + S + K_i X} \right)^{1,1} Y_{xCO_2} CO_2^\alpha - DCO_2. \quad (11)$$

$$\frac{dCH_4}{dt} = \left(K_{max} \frac{S}{K_x + S + K_i X} \right)^{1,1} Y_{xCH_4} CH_4^\beta - DCH_4. \quad (12)$$

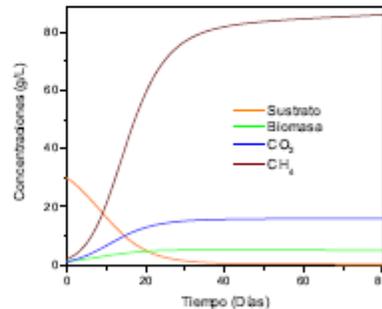


Figura E: Funcionamiento del biodigestor en 80 días.

2.3. Simulación de funcionamiento basado en comportamientos experimentales (C.I de operación)

Los parámetros utilizados para la simulación del comportamiento de la planta (biodigestor) y las condiciones iniciales de operación (C.I) se encuentran reportados en la bibliografía, estos datos se presentan en las Tablas 4 y 5 respectivamente. Se utilizó el solver *ode43* del Software Matlab™ para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales que representan la dinámica de la planta de lo que se obtuvo la representación encontrada en la Figura 1. Tanto el funcionamiento del observador robusto de orden reducido como el comportamiento de la dinámica de la planta son mediante simulación, por ello en la sección

Figura E.9: Artículo pag.3

de resultados obtenidos en la Figura 3 y Figura 4 al mencionar "planta real", nos referimos a los datos obtenidos mediante la simulación (Abu-Reesh, 2014), (Chan et al., 2017).

2.3.1. Valores en estado estacionario

Los valores en estado estacionario que se utilizan para la linealización se presentan en la Tabla 3:

Tabla 3. Valores en estado estacionario	
VARIABLES DE ESTADO O TASA DE DILUCION	Valor
S(Sustrato)	1.873 (g/L)
X(Biomasa)	4.867 (g/L)
CO ₂ (Dióxido de carbono)	14.89 (g/L)
CH ₄ (Metano)	75.61 (g/L)
D (Dilución)	0.001 d ⁻¹

2.4. Linealización por expansión en series de Taylor

La aproximación lineal es dada por los términos de primer orden obtenidos por la expansión en series de Taylor (Genocchi, 1884), tal que el sistema (13):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x). \end{aligned} \tag{13}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal, $u \in \mathbb{R}^m$ es el control, $y \in \mathbb{R}^p$ es la salida, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una función no lineal, así $x_{op} \in \mathbb{R}^n$ representa los valores de las variables de estado y $u_{op} \in \mathbb{R}$ la entrada actual del sistema, ambos en un punto de operación.

$$A = \left. \frac{df(\cdot)}{dx} \right|_{x_{op}, u_{op}}, \quad (A \in \mathbb{R}^{n \times n}), \tag{14}$$

$$B = \left. \frac{df(\cdot)}{du} \right|_{x_{op}, u_{op}}, \quad (B \in \mathbb{R}^{n \times m}), \tag{15}$$

$$C = \left. \frac{dh(\cdot)}{dx} \right|_{x_{op}, u_{op}}, \quad (C \in \mathbb{R}^{p \times n}). \tag{16}$$

Considerando las ecuaciones (10) a (12) la aproximación por serie de Taylor descrito anteriormente se define como:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx. \tag{17}$$

Para aplicar la linealización por el teorema de Taylor en (10) a (12) se toma como punto de operación \bar{x} y \bar{u} , valores en estado estacionario y tasa de dilución (D) que se encuentran en la Tabla 3 y Tabla 4 respectivamente. Los valores en estado estacionario que se consideran nos permiten obtener las matrices A y B considerando las mismas C.I. utilizadas en la Tabla 5. Al analizar la ubicación de los valores propios del sistema resultante se define que la matriz de estado es estable. A y B quedan expresadas como:

$$A = \begin{bmatrix} -0.1339 & -0.0083 & 0 & 0 \\ 0.0189 & -0.0007 & 0 & 0 \\ 0.0845 & 0.0053 & -0.0005 & -0.0005 \\ 0.6880 & 0.0824 & 0 & -0.0005 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$B = \begin{bmatrix} 29.6764 \\ -5.1670 \\ -15.85 \\ -83.76 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

La matriz C esta compuesta por la medición de CO₂ y CH₄, de esta manera el rango de la matriz de observabilidad O es completo y todas las variables de estado del sistema son observables, las presentamos a continuación:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0845 & 0.0053 & -0.0005 & 0 \\ 0.6880 & 0.0824 & 0 & -0.0005 \\ -0.0113 & -0.0007 & 0 & 0 \\ -0.0909 & -0.0058 & 0 & 0 \\ 0.0015 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0.0121 & 0.0008 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

La matriz de observabilidad (21) es de rango completo por lo que se dice que el sistema es observable.

3. Observador robusto de orden reducido

3.1. Transformación No singular

Considerando que en la dinámica lineal (17) no tenemos todo el estado disponible, las variables de estado no medibles se tendrán que reconstruir, para ello se representa al sistema de manera que se separa la parte medible de la parte no medible. Esto se realiza por medio de la siguiente transformación:

$$z = \Gamma x \rightarrow \dot{z} = \Gamma Ax + \Gamma Bu. \tag{22}$$

Note que x se determina en términos de z por lo que tenemos $x = \Gamma^{-1}z$, al reemplazar tal transformación, obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \Gamma A \Gamma^{-1} z + \Gamma B u, \\ y &= C \Gamma^{-1} z. \end{aligned} \tag{23}$$

La matriz de transformación Γ se construye a partir de C y su espacio nulo N_c , por tanto:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} C \\ N_c^T \end{bmatrix} \rightarrow y = C \Gamma^{-1} z = z_1. \tag{24}$$

Realizando una asignación de coeficientes sobre (24) obtenemos $\mathcal{A} = \Gamma A \Gamma^{-1}$, $\mathcal{B} = \Gamma B$ y $C = C \Gamma^{-1}$, entonces el sistema expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mathcal{A}z + \mathcal{B}u, \\ y &= Cz. \end{aligned} \tag{25}$$

Ahora consideramos de (25) donde $C = [I \ 0] = z_1$ separando con esto los estados medibles de los que no podemos medir.

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

De (25) tenemos $z_1 \in \mathbb{R}^p$ y $z_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$, teniendo las dinámicas separadas de la siguiente manera:

$$\dot{z}_1 = \mathcal{A}_{11}z_1 + \mathcal{A}_{12}z_2 + \mathcal{B}_1u, \tag{27}$$

Figura E.10: Artículo pag.4

Tabla 4: Parámetros de operación y del modelo

Parámetro	Descripción	Rango literatura	Utilizado	Referencias bibliográficas
K_s	Coefficiente masa en medio acuoso de S	150 ± 15 g/L	150 g/L	(Fedailaine et al., 2015)
K_i	Factor de inhibición	50 ± 15 g/L	50 g/L	(Fedailaine et al., 2015)
F_d		0.009 ± 0.0019 d^{-1}	0.0009 d^{-1}	(Fedailaine et al., 2015)
S_0	Sustrato inicial	30 g/L	30 g/L	(López-Pérez et al., 2013)
Y_{xs}	Rendimiento de sustrato sobre biomasa	0.426 ± 0.21	0.426	(Fedailaine et al., 2015)
D	Tasa de dilución	0.001 d^{-1}	0.001 d^{-1}	(Pérez et al., 2013)
α	Constante comportamiento	0.29 ± 0.18	0.29	(Fedailaine et al., 2015)
β	Constante comportamiento	0.20 ± 0.09	0.20	(Fedailaine et al., 2015)
Y_{xco_2}	Rendimiento de CO_2 respecto a X	0.67	0.67	(Fedailaine et al., 2015)
Y_{xch_4}	Rendimiento de CH_4 respecto a X	0.78	0.97	(Fedailaine et al., 2015)
μ_{max}	Tasa de crecimiento específica	0.23 g/Ld	$0.1 - 1.5$ d^{-1}	(Fedailaine et al., 2015)

Tabla 5: Condiciones iniciales y de operación utilizadas

Variable	Representación	C.I. Literatura	C.I. utilizada	Bibliografía
Sustrato	S	4-25 g/L	30 g/L	(Fedailaine et al., 2015)
Biomasa	X	1.2 g/L	2-12 g/L	(Fedailaine et al., 2015), (López-Pérez et al., 2016)
Dióxido de carbono	CO_2	1.83-55.5g/L	1.1 g/L	(Fedailaine et al., 2015), (Kazemi et al., 2020) (Bernard et al., 2000)
Metano	CH_4	0.16 g/L - 80.4 g/L	2 g/L	(Fedailaine et al., 2015) (Bernard et al., 2000)

$$\dot{z}_2 = \mathcal{A}_{21}z_1 + \mathcal{A}_{22}z_2 + \mathcal{B}_2u.$$

Deseamos reconstruir la variable z_2 ya que no podemos medirla directamente, por lo que a partir de valores conocidos (z_1) y un valor estimado en \hat{z}_2 reconstruiremos a z_2 . Realizando el remplazo correspondiente a ello usaremos a la variable ψ (28), para determinar esta aproximación de variables.

$$\psi = \hat{z}_2 - Ly \rightarrow \dot{z}_2 = \psi + Lz_1. \quad (28)$$

Considerando a ψ en (28) la dinámica ψ queda expresado como $\dot{\psi} = Q\psi + Ry + Su$, siendo Q , R , y S ganancias que se proponen para este sistema. Con base a lo anterior, expresamos el error e_2 , en el que se relaciona a z_2 y \hat{z}_2 de la siguiente manera:

$$e_2 = z_2 - \hat{z}_2. \quad (29)$$

Al igual que la dinámica del error en (30):

$$\dot{e}_2 = \dot{z}_2 - \dot{\hat{z}}_2. \quad (30)$$

Queda definida entonces $\dot{\hat{z}}_2$ considerando a ψ y su dinámica $\dot{\psi}$ de (28) en (31):

$$\dot{\hat{z}}_2 = Q(\hat{z}_2 - Lz_1) + Rz_1 + Su + L(\mathcal{A}_{11}z_1 + \mathcal{A}_{12}z_2 + \mathcal{B}_1u). \quad (31)$$

La dinámica de $\dot{\hat{z}}_2$ se encuentra en (27) y utilizando a (31) para remplazar la expresión que refleja la dinámica del error e_2 en (30), tenemos (32):

$$\dot{e}_2 = (\mathcal{A}_{21} + QL - R - L\mathcal{A}_{11})z_1 + (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12})z_2 + (\mathcal{B}_2 - S - L\mathcal{B}_1)u - Q\hat{z}_2. \quad (32)$$

Es necesario agregar el error e_2 dentro del sistema (32) sin alterar la igualdad, esto lo conseguimos agregando el término

$Qz_1 - Qz_1$, quedando entonces e_2 como:

$$\dot{e}_2 = (\mathcal{A}_{21} + QL - R - L\mathcal{A}_{11})z_1 + (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12})z_2 + (\mathcal{B}_2 - S - L\mathcal{B}_1)u - Q\hat{z}_2 + Qz_1 - Qz_1. \quad (33)$$

Factorizando a (33), tenemos:

$$\dot{e}_2 = (\mathcal{A}_{21} + QL - R - L\mathcal{A}_{11})z_1 + (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12} - Q)z_2 + (\mathcal{B}_2 - S - L\mathcal{B}_1)u + Qe_2. \quad (34)$$

De (34) es posible obtener el valor de las matrices R , Q y S , siendo (35), (36), y (37), respectivamente, quedando como:

$$\mathcal{A}_{21} + QL - R - L\mathcal{A}_{11} = 0, \quad (35)$$

$$\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12} - Q = 0, \quad (36)$$

$$\mathcal{B}_2 - S - L\mathcal{B}_1 = 0. \quad (37)$$

Al garantizar la obtención de S , R y Q , la dinámica del error e_2 queda en términos de Qe_2 .

$$\dot{e}_2 = Qe_2 = \dot{z}_2 - \dot{\hat{z}}_2, \quad (38)$$

Si garantizamos que el comportamiento de Q en la dinámica del error e_2 en (34) sea Hurwitz por medio de la asignación de polos, entonces se tiene la siguiente propiedad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_2 = 0. \quad (39)$$

Por lo que, hasta este punto, se ha presentado únicamente las bases necesarias para desarrollar el análisis matemático correspondiente al observador robusto de orden reducido.

Figura E.11: Artículo pag.5

3.2. Robustez al sistema

Ahora conocemos las dinámicas planteadas en el desarrollo y análisis del observador de orden reducido para sistemas en tiempo continuo, por lo que partimos del conocimiento de las dinámicas de \hat{z}_1 y \hat{z}_2 para desarrollar el observador robusto de orden reducido, las cuales están establecidas

$$\dot{\hat{z}}_1 = \mathcal{A}_{11}z_1 + \mathcal{A}_{12}z_2 + \mathcal{B}_{11}u + \xi_1, \quad (40)$$

$$\dot{\hat{z}}_2 = \mathcal{A}_{21}z_1 + \mathcal{A}_{22}z_2 + \mathcal{B}_{21}u + \xi_2. \quad (41)$$

Recordando que z_1 , representa las variables medibles y z_2 aquellas que no lo son. También recordamos la representación de la salida y que ha sido establecida anteriormente como:

$$y = z_1. \quad (42)$$

Retomando también la definición de la variable ϕ , que posteriormente nos servirá para definir el error e_2

$$\phi = \hat{z}_2 - Ly. \quad (43)$$

Donde utilizamos a (42) para remplazar a y con z_1 en (43). Las variables de estado estimadas son representadas por \hat{z}_2 , donde se utilizará a la información de z_2 para dicho fin. La dinámica del error e_2 , que representa la diferencia entre las variables de estado estimadas y las variables de estado reconstruidas queda definida como:

$$\dot{e}_2 = \dot{\hat{z}}_2 - \dot{\hat{z}}_2. \quad (44)$$

En (40) y (41) ξ_1 y ξ_2 representa las incertidumbres en el sistema, de ellas hablaremos mas adelante. Es necesario que el error e_2 sea uniformemente acotado, por lo que considerando las definiciones de \hat{z}_1 , \hat{z}_2 y \hat{z}_2 , y tomando en cuenta las incertidumbres marcadas como ξ_1 y ξ_2 , esto garantiza la Estabilidad Última Uniformemente Acotada (Khalil, 1996) y el error \dot{e}_2 , queda definido como:

$$\dot{e}_2 = (\mathcal{A}_{21} - R - L\mathcal{A}_{11} + QL)z_1 + (\mathcal{B}_2 - S - L\mathcal{B}_{11})u + Qe_2 + \xi_2 - \xi_1L + (\mathcal{A}_{22} + A_{12} - Q)z_2. \quad (45)$$

De (45), podemos considerar el valor de las matrices formadas por Q , S y R iguales a cero, para así garantizar la convergencia del sistema entre \hat{z}_1 y \hat{z}_2 , como:

$$Q = \mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12} = 0, \quad (46)$$

$$B = \mathcal{B}_{21} - L\mathcal{B}_{11} = 0, \quad (47)$$

$$R = \mathcal{A}_{21} - L\mathcal{A}_{11} = 0. \quad (48)$$

Al realizar las igualaciones anteriores expresadas en (46), (47) y (48) la dinámica del error \dot{e}_2 que se encuentra en (45) queda definida:

$$\dot{e}_2 = Qe_2 + \xi_2 - L\xi_1. \quad (49)$$

La definición de las cotas marcadas como ξ_1 y ξ_2 son reagrupadas en un vector ξ , este define las incertidumbres en el sistema.

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad \|\xi_1\|^2 \leq \delta_1, \quad \text{y} \quad \|\xi_2\|^2 \leq \delta_2. \quad (50)$$

Esto nos permite tener la siguiente deducción:

$$\|\xi\|^2 \leq \sqrt{\|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2} \leq \delta. \quad (51)$$

Ahora proponemos una función de almacenamiento, que posteriormente es utilizada para representar la disminución de energía en el sistema. Esto garantiza la convergencia del error a condiciones aceptables. La función propuesta involucra al error e_2 y queda expresada a continuación:

$$V(e_2) = e_2^T P e_2, \quad \text{donde} \quad 0 < P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (52)$$

La dinámica de la función cuadrática de error es

$$\dot{V}(e_2) = \dot{e}_2^T P e_2 + e_2^T P \dot{e}_2. \quad (53)$$

Considerando el valor del error e_2 y su dinámica $\dot{e}_2 = Qe_2 + \xi_2 - L\xi_1$, al reorganizar las incertidumbres (50) como:

$$\begin{bmatrix} -L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = -L\xi_1 + \xi_2. \quad (54)$$

Por lo tanto la dinámicas del error \dot{e}_2 queda representada como:

$$\dot{e}_2 = Qe_2 + \begin{bmatrix} -L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Recordando el valor que la matriz Q , tal que $Q = (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12})$ y utilizando la expresión (55), remplazando en $\dot{V}(e_2)$ (53), tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_2) &= \left[(\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12})e_2 + \begin{bmatrix} -L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \right]^T P e_2 \\ &+ e_2^T P \left[(\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12})e_2 + \begin{bmatrix} -L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \right]. \quad (56) \end{aligned}$$

Simplificando (56):

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_2) &= e_2^T (\mathcal{A}_{22}^T - \mathcal{A}_{12}^T L^T) P e_2 + \xi^T \begin{bmatrix} -L \\ I \end{bmatrix} P e_2 \\ &+ e_2^T P (\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12}) e_2 + e_2^T P \begin{bmatrix} -L & I \end{bmatrix} \xi. \quad (57) \end{aligned}$$

Definimos al vector extendido $\begin{bmatrix} e & \xi \end{bmatrix}^T$, entonces (57) es:

$$\dot{V}(e_2) = \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12}) + (\mathcal{A}_{22}^T - \mathcal{A}_{12}^T L^T)P & PL & P \\ -L^T P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Se agrega a la ecuación (58) αV y $\epsilon \|\xi\|^2$ con α y β como escalares positivos, tal que no altere la ecuación, esto tiene la finalidad de obtener propiedades de la matriz ya formada, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_2) &= \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12}) + (\mathcal{A}_{22}^T - \mathcal{A}_{12}^T L^T)P & PL & P \\ -L^T P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} \\ &\pm \alpha V(e_2) \pm \epsilon \|\xi\|^2. \quad (59) \end{aligned}$$

Figura E.12: Artículo pag.6

Note que α y ε son parámetros de ajuste por lo que (59) queda representada como :

$$\dot{V}(e_2) = \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc} P(\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12}) + (\mathcal{A}_{22}^T - \mathcal{A}_{12}^T L^T)P & -PL & P & \\ -L^T P & -\varepsilon I & 0 & \\ P & 0 & -\varepsilon I & \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} - \alpha V(e_2) + \varepsilon \|\xi\|^2. \quad (60)$$

Llamaremos \mathcal{W} a la matriz intermedia formada en (60), quedando como :

$$\mathcal{W} = \left[\begin{array}{cc|cc} P(\mathcal{A}_{22} - L\mathcal{A}_{12}) + (\mathcal{A}_{22}^T - \mathcal{A}_{12}^T L^T)P & -PL & P & \\ -L^T P & -\varepsilon I & 0 & \\ P & 0 & -\varepsilon I & \end{array} \right] < 0. \quad (61)$$

Tomando en consideración lo establecido en (60) y (61) se obtiene $\dot{V}(e_2)$:

$$\dot{V}(e_2) = \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} \mathcal{W} \begin{bmatrix} e_2 \\ \xi \end{bmatrix} - \alpha V(e_2) + \varepsilon \|\xi\|^2. \quad (62)$$

Considerando que $\mathcal{W} < 0$ en (61) tenemos que :

$$\dot{V}(e_2) \leq -\alpha V(e_2) + \varepsilon \delta. \quad (63)$$

El Lema de comparación (Khalil, 1996) aplicado a (63) :

$$\dot{V}(e_2) \leq -\alpha \left(V(e_2) - \frac{\varepsilon \delta}{\alpha} \right). \quad (64)$$

La solución de la desigualdad diferencial en (64) queda de la forma siguiente:

$$\frac{dV(e_2)}{V(e_2) - \frac{\varepsilon \delta}{\alpha}} \leq -\alpha dt. \quad (65)$$

Realizamos una integración a (65), sin olvidar que α es un escalar, y que la parte izquierda de la ecuación diferencial $\int \frac{dx}{x}$, así como también nombramos a $\frac{dx}{x} = \kappa$ por lo que tendremos:

$$\int_{t_0}^t \frac{dV(e_2)}{V(e_2) - \kappa} = -\alpha \int_{t_0}^t d\tau. \quad (66)$$

La solución de la ecuación (66) nos resulta como :

$$\ln[V(e_2) - \kappa] \Big|_{t_0}^t = -\alpha t \Big|_{t_0}^t. \quad (67)$$

Evaluando (67) como corresponde en t_0 y t , tenemos:

$$\ln \frac{V(e_2(t)) - \kappa}{V(e_2(t_0)) - \kappa} = -\alpha(t - t_0). \quad (68)$$

Aplicando la propiedad exponencial en (68) para eliminar la presencia del logaritmo, tendremos:

$$\frac{V(e_2(t)) - \kappa}{V(e_2(t_0)) - \kappa} = e^{-\alpha(t - t_0)}. \quad (69)$$

Despejando a $V(e_2(t))$ de (69)

$$V(e_2(t)) = \kappa + [V(e_2(t_0)) - \kappa]e^{-\alpha(t - t_0)}. \quad (70)$$

De (70) podemos observar que si $\kappa = V(e_2(t_0))$, entonces la ecuación se encuentra definida por κ . El límite se define con

$t \rightarrow t_0$, es decir, que se tienda a la condición inicial, entonces esto se ve expresado de la siguiente forma :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} V(e_2(t)) = V(e_2(t_0)). \quad (71)$$

Finalmente, para poder ajustar los valores de convergencia del error $V(e_2)$ según κ , siendo que este se encuentra acotado, donde ε debe ser un ajuste decreciente y α un ajuste creciente.

$$\kappa = \frac{\varepsilon \delta}{\alpha}. \quad (72)$$

3.3. Aplicación del observador robusto de orden reducido en biodigestor

El desarrollo del algoritmo y las operaciones matemáticas realizadas para encontrar la estructura necesaria del observador se presentan a continuación. La matriz de transformación $\Gamma \in R$ en (24) queda :

$$N_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (73)$$

La matriz de transformación Γ , y su inversa Γ^{-1} , siendo las siguientes:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Considerando la estructura en (25), tenemos que \mathcal{A} y \mathcal{B} como:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -0.0005 & 0 & 0.0845 & 0.0053 \\ 0 & -0.0005 & 0.6880 & 0.0824 \\ 0 & 0 & -0.1339 & -0.0083 \\ 0 & 0 & 0.0189 & 0.0007 \end{bmatrix}, \quad (75)$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -15.85 \\ -83.76 \\ 29.67 \\ -5.1670 \end{bmatrix}.$$

Las dinámicas de ψ se forman a partir de Q , R y S en (46), (47) y (48) respectivamente, donde se debe de cumplir :

- La matriz Q debe ser Hurwitz, es decir, los polos dentro del plano complejo deben ser negativos.
- Realizar la operación inversa al obtener y , ya que los resultados son obtenidos inicialmente de una transformación no singular.

Para ello se propone un polinomio característico deseado al cual se ajustan los valores de Q .

Figura E.13: Artículo pag.7

3.4. Resultados de observador robusto de orden reducido

Para la solución de las LMI (Lineal Matrix Inequality) presentadas por la matriz W en el desarrollo del algoritmo del observador robusto de orden reducido se utilizó la herramienta **Sedumi** dentro del Software **Matlab™** proporcionando inicialmente valores a α y ϵ . El cambio de condiciones iniciales entre la planta y el observador, las ganancias utilizadas en la sintonización del observador y los parámetros utilizados en la simulación se encuentran en la Tabla 6.

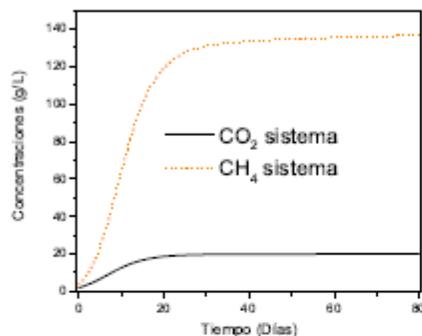


Figura 2: Evolución de CH_4 y CO_2 en 80 días.

Las dinámicas que se presentan en la Figura 2 hacen referencia a los estados del sistema que son medibles. La evolución del CO_2 y CH_4 difiere de las presentadas en la Figura 1 porque las condiciones iniciales con las que se simula la planta son diferentes, esto se refleja directamente en el comportamiento. La variación de condiciones iniciales se realiza con la finalidad de observar la convergencia entre el estimador de estados y la planta real, las simulaciones aplicadas se corren en un lapso de 80 días y se presentan a continuación para los estados estimados que se reconstruyen en el observador de orden reducido.

Tabla 6. Parámetros utilizados en el observador robusto	
Parámetros utilizados	Valores
α propuesto	12.7
ϵ propuesto	0.01055
Raíces del sistema	-0.0671, -0.0001
Ganancias obtenidas	$L = [-0.0117 \ -0.0955 ;$ $-0.0006 \ -0.0100]$
C.I. Observador	30, 1.2, g/L, S, B.
C.I. Planta real	33.5, 1.935, 2, 3.8, g/L, S, B, CO_2 , CH_4 .

En la Figura 3 se compara el comportamiento del sustrato de la planta simulada junto al observador robusto. Es notorio ver que las condiciones iniciales de operación son diferentes entre ambos y en menos de 10 días los valores obtenidos en el observador difieren en un rango menor a 1 (g/L) en comparación a la planta.

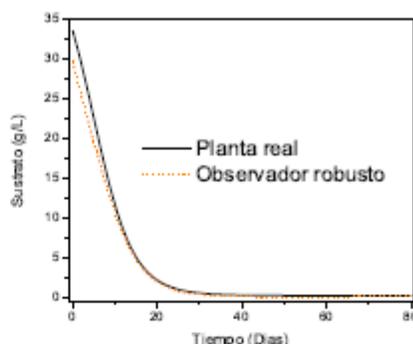


Figura 3: Evolución del sustrato en 80 días.

De igual manera en la Figura 4 se presenta el comportamiento de la biomasa entre la planta y el observador considerando que ambos sistemas parten en condiciones iniciales diferentes. Los resultados por el observador obtienen una diferencia en un rango menor a 1 (g/L) en menos de 20 días en comparación a la planta. Estos resultados consideran los parámetros experimentales de simulación en la Tabla 4 y las variaciones en las condiciones iniciales mencionado en la Tabla 6.

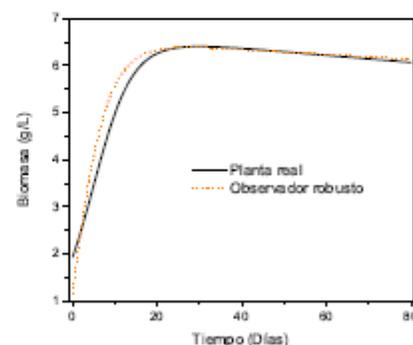


Figura 4: Evolución de la biomasa en 80 días.

4. Conclusiones

La solución al sistema mediante el uso del LMI se garantiza la Estabilidad Última Uniformemente Acotada y esto se ve reflejado en la convergencia del observador robusto a las dinámicas de planta real ante la variación de condiciones iniciales. Las incertidumbres paramétricas y las condiciones iniciales que difieren de las programadas en el observador no interfieren en la dinámica para realizar la convergencia entre los estados reales y los estimados reconstruidos por la transformación no singular. De esta manera el comportamiento del observador es aceptable

y robusto en condiciones diferentes a las dinámicas en el biodigestor.

Referencias

- Abu-Reesh, I. M. (2014). Kinetics of anaerobic digestion of labneh whey in a batch reactor. *African Journal of Biotechnology*, 13(16).
- Batsione, D. J., Keller, J., Angelidaki, I., Kalyuzhnyi, S., Pavlostathis, S., Rozzi, A., Sanders, W., Siegrist, H., and Vavilin, V. (2002). The Iwa anaerobic digestion model no 1 (adml). *Water Science and Technology*, 45(10):65-73.
- Bernard, O., Hadj-Sadok, Z., and Dochain, D. (2000). Software sensors to monitor the dynamics of microbial communities: application to anaerobic digestion. *Acid biotechnology*, 48(3):197-205.
- Chan, Y. J., Chong, M. F., and Law, C. L. (2017). Performance and kinetic evaluation of an integrated anaerobic-aerobic bioreactor in the treatment of palm oil mill effluent. *Environmental technology*, 38(8):1005-1021.
- Fedalline, M., Mousi, K., Khilou, M., Abada, S., Saher, M., and Tirichine, N. (2015). Modeling of the anaerobic digestion of organic waste for biogas production. *Procedia Computer Science*, 52:730-737.
- Gasca, C. E. (2013). Transición energética, energías renovables y energía solar de potencia. *Revista Mexicana de Física*, 59(2):75-84.
- Genocchi, A. (1884). *Calcolo differenziale e principi di calcolo integrale*, volume 1. Bocca.
- Guevara, O. J. C. (2014). Fuentes renovables y generación de energía limpia su regulación en honduras. *La Revista de Derecho*, 35:93-112.
- Jeong, H.-S., Suh, C.-W., Lim, J.-L., Lee, S.-H., and Shin, H.-S. (2005). Analysis and application of adml for anaerobic methane production. *Bioprocess and biosystems engineering*, 27(2):81-89.
- Kazemi, P., Steyer, J.-P., Bengou, C., Font, I., and Giralt, J. (2020). Robust data-driven soft sensors for online monitoring of volatile fatty acids in anaerobic digestion processes. *Processes*, 8(1):67.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 2.
- López-Pérez, P., Neria-González, M., and Aguilar-López, R. (2013). Nonlinear controller design with application to a continuous bioreactor. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 47(5):585-592.
- López-Pérez, P., Neria-González, M., and Aguilar-López, R. (2016). Improvement of activated sludge process using a nonlinear pi controller design via adaptive gain. *International Journal of Chemical Reactor Engineering*, 14(1):400-416.
- Pérez, P. L., González, M. N., and López, R. A. (2013). Cadmium concentration stabilization in a continuous sulfate reducing bioreactor via sulfide concentration control. *Chemical Papers*, 67(3):326-335.
- Rao, P. V., Baral, S. S., Dey, R., and Muturi, S. (2010). Biogas generation potential by anaerobic digestion for sustainable energy development in india. *Renewable and sustainable energy reviews*, 14(7):2086-2094.
- Ruiz-Leza, H., Rodríguez-Jasso, R., Rodríguez-Herrera, R., Contreras-Esquivel, J., and Aguilar, C. (2007). Diseño de biorreactores para fermentación en medio sólido. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 6(1):33-40.
- Sbarciog, M., Loccuter, M., and Noldus, E. (2010). Determination of appropriate operating strategies for anaerobic digestion systems. *Biochemical engineering journal*, 51(3):180-188.
- Sonneenergie DGH, E. (2005). Planning and installing bioenergy systems: A guide for installers, architects, and engineers, vol. 1. *Earthscan, UK*.
- Torres, A. D. (1996). Evaluación de los parámetros cinéticos de la ecuación de monod. *Ingeniería e Investigación*, (33):123-138.
- Weiland, P. (2010). Biogas production: current state and perspectives. *Applied microbiology and biotechnology*, 85(4):849-860.

Figura E.15: Artículo pag.9