UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDACTICA**

**TESIS**

# DESCOMPOSICIÓN DE NÚMEROS EN DIFERENTES FORMAS: UN ANTECEDENTE DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

**Para obtener el grado de**

**Maestro(a) en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica**

**PRESENTA**

Cristhian Arturo Meneses Yáñez

**Director (a)**

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

**Codirector (a)**

Dr. José Félix Fernando Barrera Mora

**Comité tutorial**

Dr. Marcos Campos Nava
M. en C. Juan Luis Téllez López
Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Dr. José Félix Fernando Barrera Mora

Mineral de la Reforma, Hgo., México., Agosto 2022

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
*School of Engineering and Basic Sciences*

Mineral de la Reforma, Hgo., a 22 de julio de 2022

**Número de control:** ICBI-D/963/2022
**Asunto:** Autorización de impresión de tesis.

**M. EN C. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO**
**DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH**

Por este conducto le comunico que el comité revisor asignado al C. Cristhian Arturo Meneses Yáñez, alumno de la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica, con número de cuenta 197360, autoriza la impresión del proyecto de tesis titulado "Descomposición de números en diferentes formas: un antecedente del pensamiento algebraico", en virtud de que se han efectuado las revisiones y correcciones pertinentes.

A continuación, se registran las firmas de conformidad de los integrantes del comité revisor.

| | | |
|---|---|---|
| PRESIDENTE: | Dr. Marcos Campos Nava | |
| SECRETARIO: | M. en C. Juan Luis Téllez López | |
| VOCAL: | Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez | |
| SUPLENTE: | Dr. José Félix Fernando Barrera Mora | |

Sin otro particular reitero a usted la seguridad de mi atenta consideración.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

Dr. Otilio Arturo Acevedo Sandoval
Director del ICBI

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
ICBI
DIRECCIÓN

OAAS/EPC

Ciudad del Conocimiento
Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: 771 71 720 00 ext. 2231 Fax 2109
direccion_icbi@uaeh.edu.mx

# Dedicatorias

**A Dios**

Primeramente, doy gracias a Dios por permitirme llegar a la meta deseada.

**A mis padres y hermanos**

Cada uno de mis logros se los debo a ustedes. Gracias por su amor, tiempo, confianza, sacrificio, atención y comprensión. Por su apoyo y motivación para seguir preparándome y ser un mejor hijo, hermano, profesor y amigo.

**A mis directores de tesis y sinodales**

Doctor Aarón Reyes Rodríguez y Doctor Fernando Barrera Mora, agradezco su tiempo, dedicación, también porque son una inspiración de siempre buscar ser mejores profesores e investigadores, del gusto por enseñar, gracias por compartir un poco de sus conocimientos y experiencias. Me esforzaré en seguir preparándome para ser un mejor profesor. También agradezco al Doctor Marcos Campos Nava y Maestro Juan Luis López Téllez por su orientación en este trabajo.

**A mis alumnos**

Todos los días que estoy frente a un aula aprendo de ustedes y me inspiran a seguir preparándome. Gracias en especial a quienes me apoyaron en esta investigación.

# Resumen

En este trabajo documentamos y discutimos cómo el descomponer números en diferentes formas influye en el desarrollo de algunos elementos del pensamiento algebraico. El diseño de esta investigación fue con un enfoque vía resolución de problemas como aproximación didáctica. Se realizó un estudio de casos múltiples (cinco casos), cada uno de los cuales fue un equipo de dos o tres estudiantes de tercer grado de secundaria, que estaban matriculados en una escuela pública ubicada en una comunidad semiurbana del estado de Hidalgo, México.

Se diseñaron dos tareas tomando como base el ciclo para observar el desarrollo del entendimiento matemático enfocado en la identificación y generalización de patrones. La primera tarea se basó en un juego de ingenio (puzzle) llamado "Las ranas saltarinas"; mientras que la segunda tarea tomó como referente inicial la historia del ajedrez. El trabajo se llevó a cabo en línea, utilizando las plataformas *Google Meet* y *Mero*, donde los participantes pueden trabajar de manera simultánea en el mismo pizarrón.

El análisis de los datos fue a partir de grabaciones, se abordó desde un enfoque cualitativo, el cual consiste en identificar en cada uno de los casos, cómo el considerar diferentes formas de descomponer números contribuyó al desarrollo de diversos elementos del pensamiento algebraico. Se obtuvo evidencia de que descomponer los números de diferentes formas apoya el proceso de identificación y de generalización de regularidades de las tareas propuestas; pero a pesar del apoyo anterior, los estudiantes tienen dificultades para dejar de lado estrategias como la proporcionalidad directa, además de que solo se centran en la información más reciente y dejan de lado la información previa, a pesar de haberla registrado por escrito.

**Abstract**

In this work we document and discuss how decomposing numbers into different forms influences the development of some elements of algebraic thinking. The design of this research was based on a problem-solving approach as a didactic approach. The research design was a multiples cases study (five cases), each of which was a team of two or three third grade of junior high school students, who were enrolled in a public school located in a semi-urban community of the state of Hidalgo, Mexico.

We designed two learning tasks based on “the cycle for developing Mathematical understanding" focused on the identification and generalization of patterns. The first task was based on a puzzle game called “The jumping frogs”; while the second task took the history of chess as its initial reference. The work was carried out online, using the Google Meet and Mero platforms, where participants can work simultaneously on the same whiteboard.

The analysis of the data was from recorded sessions , it was approached from a qualitative approach, which consists of identifying in each of the cases, how considering different ways of decomposing numbers contributed to the development of various elements of algebraic thinking. Evidence was obtained that decomposing numbers in different ways supports the process of identification and generalization of regularities of the proposed tasks; but despite the previous support, students have difficulties to set aside strategies such as direct proportionality, in addition to only focusing on the most recent information and leaving aside previous information, despite having recorded it in writing.

# ÍNDICE

# 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

## 1.1 Introducción

Hay una relación estrecha entre el sentido numérico y el pensamiento algebraico, esto debido a que para generalizar e identificar patrones (elemento central del pensamiento algebraico), se requiere usar propiedades de las operaciones y de los números. Sin embargo, existen diferencias que son el origen de muchas de las dificultades que muestran los estudiantes para entender y operar con fluidez y precisión, los símbolos alfanuméricos que integran el *sistema matemático de signos* (SMS) del álgebra (Puig, 2003). En la educación básica escolarizada, al menos en México, la enseñanza de la aritmética se enfoca en la obtención de resultados, mientras que la comprensión del álgebra requiere enfocarse en los procedimientos, en las operaciones, y en las diversas formas de descomponer números como sumas o productos (Tellez, 2019). Así, la idea comúnmente aceptada de que el álgebra no es más que aritmética generalizada (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000), se debe tomar con reservas.

Además, en álgebra, existen fenómenos que no tienen paralelo en aritmética. Por ejemplo, dada la indeterminación de las literales es posible sustituir una literal por otra, lo cual no es posible en aritmética, ya que ahí un número no se puede reemplazar por otro diferente. Existen múltiples problemáticas asociadas con el desarrollo del pensamiento algebraico, las cuales no se pueden abordar en un solo trabajo: dar sentido a los símbolos, desarrollar fluidez para operar los símbolos alfanuméricos; habilidad para resolver ecuaciones lineales, cuadráticas, sistemas lineales, entre otros (Enfedaque, 1990).

Con base en lo anterior, esta tesis se centrará en uno de los aspectos básicos de la problemática, dar sentido o significado a los símbolos alfanuméricos y, con ello, estamos siguiendo la ruta natural de aprendizaje, que consiste en ir de lo concreto a abstracto (Piaget, 1977), a diferencia de lo que ocurre en las aproximaciones didácticas tradicionales al pensamiento algebraico, las cuales inician con elementos que son abstractos para los estudiantes sin conocimientos previos referidos al pensamiento algebraico, ya que se introduce el uso de literales para representar cantidades indeterminadas, en las tareas que requieren pasar del lenguaje común al lenguaje simbólico, como una imposición y no como una auténtica necesidad. Además, mediante la adopción de una perspectiva de resolución de problemas, las tareas se centrarán en el descubrimiento y la justificación, ya que ambas actividades constituyen el eje del quehacer matemático.

La investigación en educación matemática ha obtenido evidencia de que algunas dificultades mostradas por los estudiantes para operar, con fluidez y precisión, símbolos alfanuméricos, más bien son dificultades aritméticas referidas; por ejemplo, los estudiantes tienen dificultades para identificar los dígitos en una representación decimal, de la misma forma, tienen dificultades cuando los números se representan como cocientes de enteros (Eudave, 1998). La problemática básica de aprendizaje del pensamiento algebraico, consiste en dar sentido o significado a las literales, para lograr este objetivo, las actividades con patrones son esenciales, ya que permiten al estudiante identificar regularidades en lo concreto, que posteriormente se generalizan y abstraen, de modo que los símbolos para representar cantidades indeterminadas tienen un referente con un menor nivel de abstracción. Además, la necesidad de comunicar a otros esas regularidades constituye un escenario genuino para la utilización de literales como medio para representar cantidades o números indeterminados. Al respecto, Lima (2018) identificó que, si un estudiante centra la atención en las operaciones de los números, es capaz de identificar aquellos elementos que cambian de aquellos que permanecen constantes, de reconocer patrones y regularidades, formular conjeturas, y generalizar propiedades identificadas al interior de esos casos particulares.

## 1.2 Revisión de la literatura

En esta sección se lleva a cabo una revisión de artículos de investigación enfocados en el desarrollo del pensamiento algebraico, particularmente en la relación entre el sentido numérico y la capacidad para dotar de significado a los símbolos, los cuales son variables que toman cualquier valor en una colección de números predeterminados. Esta revisión tiene la finalidad de reconocer algunos problemas de investigación, así como las perspectivas teóricas y metodológicas utilizadas para la comprensión de la problemática abordada, y para la recopilación y análisis de la información. Lo anterior permitirá justificar la relevancia del trabajo, enmarcarlo dentro del cuerpo de conocimientos existentes y determinar cuál es su contribución potencial al saber científico actual, relacionado con el desarrollo del pensamiento algebraico.

Butto y Rojano (2010) realizaron un estudio cualitativo sobre la introducción temprana en el pensamiento algebraico (early algebra studies) a partir de la idea de variación proporcional. El estudio se realizó con nueve estudiantes de los grados 5 y 6, inscritos en una escuela pública de la Ciudad de México. Los estudiantes no tenían conocimientos previos relacionados con el pensamiento algebraico. En la investigación se contemplan dos rutas de acceso al álgebra: el razonamiento proporcional (pre-simbólica) y los procesos de generalización (simbólica). El marco se integró con *modelos teóricos locales*, con una referencia específica a dos de las cuatro componentes de dichos modelos: (a) la componente del modelo de enseñanza y (b) la componente de los procesos cognitivos involucrados en el estudio. Las fuentes de recolección de la información fueron actividades con lápiz y papel y con Logo, tomando en consideración el uso de distintos lenguajes (numérico, geométrico y algebraico). La investigación tuvo cuatro etapas: (1) un cuestionario seguido de una entrevista ad hoc, (2) aplicación de una secuencia didáctica, donde los estudiantes trabajaron en parejas durante 18 sesiones de 40 minutos cada una, (3) un cuestionario para analizar la evolución de los estudiantes hacia el pensamiento algebraico, contrastando los resultados con los del cuestionario inicial y (4) entrevistas individuales. Se concluye que los participantes lograron comprender ideas básicas de variación proporcional, describir un patrón y formular una regla general, a medida que transitaban del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo. También se identificó que el software Logo mejora el aprendizaje de dichos contenidos temáticos, pues parte de una fase de exploración y experimentación directa con la variación y generalización.

Tambychik y Meerah (2010) realizaron una investigación con metodología mixta para determinar las principales habilidades matemáticas y cognitivas relacionadas con dificultades en la resolución de problemas matemáticos. El marco de investigación se estructuró con base en tres fases de la perspectiva de resolución de problemas: (i) problema de lectura y comprensión, (ii) organizar la estrategia y resolver el problema y (iii) confirmación de la respuesta y proceso. Las habilidades matemáticas consideradas son: (1) operaciones numéricas, (2) aritmética, (3) información, (4) lingüística y (5) visual-espacial. El estudio se llevó a cabo sobre tres muestras de grupos focalizados (escuelas secundarias urbanas, suburbanas y rurales de Malasia) que fueron seleccionados a través de un muestreo intencional. La muestra total estuvo integrada por 107 estudiantes de 14 años. Uno de los instrumentos de recolección de la información fue un cuestionario (validado mediante el Modelo de Rash y confirmado por un valor de Alfa Cronbach = 0,79), que constó de tres secciones: (A) datos demográficos, (B) habilidades matemáticas y (C) capacidad de aprendizaje. Además, se realizaron entrevistas grupales de 45 minutos utilizando un protocolo de entrevista adaptado. Los datos cuantitativos se analizaron mediante estadísticas descriptivas y los datos cualitativos se analizaron descriptivamente mediante codificación. Los resultados aportan evidencia de que los encuestados carecían de muchas habilidades matemáticas, operaciones numéricas, visual-espacial e información (hacer conexiones, manipular la información, determinar fórmulas). La manipulación de información y la formulación de oraciones matemáticas fue la sub-habilidad que más influyó en las dificultades para resolver problemas. La deficiencia de estas habilidades matemáticas y también de las habilidades cognitivas en el aprendizaje inhibe la resolución de problemas matemáticos.

Por otra parte, Booker y Windsor (2010) realizaron una investigación cualitativa, basada en un diseño de investigación (design research), con estudiantes de séptimo grado, pertenecientes a una comunidad de nivel socioeconómico bajo. El trabajo consistió en identificar si la resolución de problemas puede ayudar a desarrollar el pensamiento algebraico. Se propusieron tareas en donde se requería calcular perímetros, áreas y, posteriormente, identificar y generalizar patrones en secuencias figurales. Los estudiantes trabajaron en equipos pequeños y después pasaron al pizarrón para explicar sus hallazgos. La solución de las tareas incluyó diversas formas de representación: diagramas, tablas y gráficos, lo que permitió a los estudiantes observar patrones y formular conjeturas, así como observar regularidades que más tarde utilizaron para generalizar resultados. Los datos se analizaron a partir de las observaciones del investigador y entrevistas realizadas a estudiantes después de las actividades. Los resultados sugieren que los estudiantes son capaces de construir formas generales de pensar que los puede llevar a desarrollar el pensamiento algebraico.

Referente a investigaciones sobre el uso de la tecnología y el desarrollo del pensamiento algebraico, Geofrey et al. (2016), realizaron un trabajo cuantitativo para examinar los efectos de la aplicación DragonBox 12+, en el desarrollo del pensamiento algebraico y las actitudes hacia el álgebra en estudiantes de octavo grado (14 años), seleccionados a través de un muestreo estratificado simple de una secundaria de Malasia. La metodología utilizada fue un enfoque cuasi-experimental, la comparación se realizó entre un grupo experimental (30 alumnos que utilizaron la aplicación) y un grupo control (30 estudiantes que trabajaron de manera tradicional). Los instrumentos utilizados fueron un pre-test y un post-test para evaluar el pensamiento algebraico, así como un cuestionario de Fennema-Sherman para medir las actitudes de los estudiantes hacia el álgebra. La construcción de ítems (15) en la prueba de pensamiento algebraico se basó en el programa oficial de matemáticas (grados 7 y 8). Los ítems se diseñaron a partir de problemas modificados de libros de texto y de referencia, además de artículos sobre TIMSS 2011. La implementación de la prueba tuvo una duración de 16 horas. Se usó la Taxonomía de Krathwohl como guía para desarrollar un modelo para la prueba. Los resultados revelaron que los estudiantes que trabajaron con la aplicación obtuvieron puntajes significativamente más altos en pensamiento algebraico y en sus actitudes hacia el álgebra, en comparación con el grupo de control. Es decir, la aplicación brindó oportunidades para que los estudiantes participaran activamente en la resolución de problemas de álgebra a través de las seis dimensiones: (1) relevancia, (2) integración, (3) traducción, (4) adaptación, (5) inmersión y (6) naturalización.

Andini y Suryadi (2017) analizaron los obstáculos que muestran estudiantes de entre ocho y nueve años (tercer grado de primaria) para resolver problemas algebraicos (actividades con patrones a partir de secuencias figurales). Esta investigación se basó en un diseño de investigación didáctica (DDR), contando con la participación de 66 estudiantes de dos escuelas primarias en Indonesia. Los resultados indican que la mayoría de los estudiantes muestran dificultades para resolver problemas que involucran un pensamiento algebraico. Se identificaron tres tipos de obstáculos para obtener las expresiones algebraicas que generalizan los problemas: ontológico, didáctico y epistemológico. El principal obstáculo fueron las dificultades para comprender el problema, porque los estudiantes no se han ejercitado en el pensar matemáticamente.

Jureczko (2017) realizó una investigación cualitativa que incluyó un análisis de soluciones de una tarea relacionada con palíndromos numéricos, centrando la atención en similitudes y diferencias entre el proceso de generalización y los métodos de solución. El marco conceptual se basó en el constructo de generalización. En la investigación participaron 197 estudiantes, divididos en tres grupos divididos por nivel escolar: 44 de secundaria, 102 de bachillerato y 51 estudiantes universitarios de una licenciatura en ciencias matemáticas (incluyendo 42 en pre-servicio). El tiempo para abordar las tareas fue de 45 minutos, independientemente del nivel escolar, sin que hubiera apoyo por parte del profesor. Se obtuvo evidencia de que el número de intentos de solución y soluciones adecuadas aumenta proporcionalmente con la edad de los participantes, pero la disposición de continuar con la tarea se destacó en los estudiantes más jóvenes. Se observó una evolución del proceso de generalización a partir de la descripción verbal y el tipo de ejemplos. Los estudiantes de secundaria pusieron en práctica nociones de variación y repetición sin haber revisado de forma previa esos temas en clase.

Kusumaningsih, et al. (2018) realizaron un estudio cuantitativo cuyo objetivo fue mejorar la capacidad de pensamiento algebraico en estudiantes de octavo grado, promoviendo múltiples estrategias con un enfoque realista: (a) orientación, (b) exploración, (c) interiorización y (d) evaluación. El diseño de la investigación fue cuasi-experimental con grupo de control pretest-postest no aleatorizado. La descripción del problema se usó para medir las habilidades de pensamiento algebraico que incluyen: (a) identificar o construir patrones numéricos y geométricos, (b) explicar patrones verbales y (c) representar la información, (d) hacer predicciones, (e) generalizar. En la investigación participaron 72 estudiantes de Indonesia. Se integraron dos grupos (cada uno con 36 estudiantes), uno experimental donde se favorecen múltiples estrategias de representación, y otro de control con diferente enfoque metodológico. Se efectuó un análisis cuantitativo mediante la prueba t para muestras independientes, obteniendo evidencia de una interacción entre las múltiples estrategias de representación sobre el pensamiento algebraico. Las estrategias de representación múltiple con enfoque realista lograron fortalecer el pensamiento algebraico de los estudiantes. En promedio, el aprendizaje de los estudiantes del grupo experimental fue superior al setenta por ciento, con relación a los estudiantes del grupo control.

Morales (2018) realizó una investigación cualitativa, cuyo objetivo fue describir la forma en que estudiantes de entre seis a siete años resuelven tareas que involucran patrones cualitativos y cuantitativos. El marco de investigación se basó en una caracterización del pensamiento algebraico propuesta por Kaput y el constructo de pensamiento funcional desde la perspectiva de Blanton (Blanton y Kaput, 2004). Los participantes fueron estudiantes de primer grado de primaria de una escuela privada. La metodología consistió en un experimento de enseñanza, que incluyó secuencias o episodios con interacciones investigador-docente y estudiantes-investigadores. En el caso de los patrones cualitativos los estudiantes fueron capaces de construir seriaciones reiterativas y no reiterativas; mientras que para los patrones cualitativos se identificaron relaciones de covariación, correspondencia y generalización de una relación funcional. Los estudiantes fueron capaces de determinar patrones de repetición, lo cual da cuenta de la importancia de fomentar el trabajo con patrones cualitativos y cuantitativos de repetición para la continuación o construcción de seriaciones no reiterativas desde la educación básica. Las estrategias más utilizadas fueron las de conteo y operacional (por ejemplo, descomponer números en sumandos).

Ayu et al. (2020), por su parte, realizaron una investigación cualitativa para diseñar una lección sobre pre-álgebra utilizando el enfoque de educación matemática realista (RME, por sus siglas en inglés). El artículo está centrado en recomendaciones para apoyar el pensamiento algebraico de estudiantes de primaria. La investigación se diseñó en tres fases: (1) estudios preliminares, (2) experimento de enseñanza y (3) análisis retrospectivo. Los participantes de la investigación fueron 32 estudiantes de quinto grado en Indonesia. Los instrumentos de recolección de la información fueron hojas de trabajo de los estudiantes, observación de las lecciones y entrevistas a los estudiantes. Las hojas de trabajo se contestaron en parejas (primeros tres incisos) y en grupo (de la pregunta cuatro a la siete). Los resultados indican que actividades con patrones en clase de pre-álgebra basados en la visualización (representación geométrica) apoyaron la identificación de regularidades y los procesos de generalización.

Spangenberg y Pithmajor (2020) llevaron a cabo un estudio cualitativo y exploratorio con el objetivo de conocer las estrategias que emplean estudiantes de matemáticas de noveno grado para abordar problemas sobre patrones numéricos. El marco conceptual se basó en la perspectiva de resolución de problemas propuesta por Singer y Voica, destacando cuatro indicadores: (1) saber, (2) decodificación, (3) representación, (4) procesamiento e implementación. Se seleccionaron al azar 90 alumnos de noveno grado de tres escuelas rurales en Sudáfrica (30 de cada escuela). La actividad escrita tuvo dos preguntas. En la primera, se tenía que describir cómo se comportaba una sucesión aritmética; y en la segunda, describir un patrón geométrico creciente y relacionarlo con los conceptos de función y su representación gráfica. Además, se llevaron a cabo entrevistas semiestructuradas a tres estudiantes. Los resultados indican la existencia de cuatro estrategias principales: (1) conteo directo; (2) proporción directa; (3) estrategia recursiva; y (4) representación de imágenes mentales. Este conocimiento sobre las estrategias de los alumnos puede ayudar a maestros al utilizar diferentes heurísticas para enseñar problemas de patrones numéricos. La estrategia de representación de imágenes mentales ocurre durante la fase de representación, cuando los alumnos declaran problema en un idioma que puedan entender y sean capaces representar mediante un modelo mental.

Para fines de claridad, en la **Tabla 1** se muestra un concentrado de los resultados que se obtuvieron al revisar la literatura. En dicha tabla se muestra una panorámica general del tipo de problemas investigados, así como los enfoques teóricos y metodológicos empleados para abordar tales problemáticas. En estas investigaciones predomina el uso de actividades con patrones, pero casi ninguna se enfoca en proporcionar referentes con un menor nivel de abstracción para la simbología alfanumérica. En todas las investigaciones revisadas, la simbología alfanumérica para representar relaciones entre cantidades indeterminadas se sigue presentando como una imposición para los estudiantes.

También se identificó que algunas investigaciones refieren el uso de la resolución de problemas como marco conceptual, sin embargo en ellas no se destacan aspectos esenciales que caracterizan a la resolución de problemas como perspectiva didáctica: (a) la mejor forma de aprender algo, en matemáticas, es descubrirlo por uno mismo, (b) el proceso de instrucción debiera mostrar analogías con la actividad que llevan a cabo los matemáticos profesionales, (c) la principal función del profesor es orientar y apoyar la actividad del estudiante a través de preguntas (uso de heurísticas) que lo ayuden a avanzar en el proceso de resolución de problemas, (d) el profesor no es la fuente fundamental de información, evitando resolver la tarea o, por el contrario, dejando todo el trabajo a cargo de los estudiantes para favorecer una forma flexible e independiente de pensar, (e) si es posible hay que relacionar los problemas con la experiencia diaria de los estudiantes, (f) para lograr un aprendizaje con entendimiento (proceso gradual y dinámico) se les debe plantear a los estudiantes tareas que les permitan reflexionar (sobre las conexiones entre objetos, ideas o procedimientos propios de la actividad matemática) y comunicar ideas matemáticas (Barrera et al., 2021).

**Tabla 1**. Concentrado de la revisión de la literatura

| Autores | Objetivo | Tema | Grado | Marco teórico/conceptual | Metodología | Resultados |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Buto y Rojano (2010) | Factibilidad de iniciación temprana al álgebra a partir de: razonamiento proporcional y generalización. Diseñar una secuencia didáctica considerando uso de lenguaje numérico, geométrico y algebraico. | Actividades con patrones y variación proporcional. Software Logo y actividades con papel y lápiz. | 5to y 6to. Escuela pública, México | Modelos teóricos locales. Generalización. Pensamiento Algebraico (Lee). Ideas algebraicas: presimbólica y simbólica. | Cualitativa. Entrevista ad hoc y cuestionario. Investigador participativo. Trabajo en parejas<br>Etapas: cuestionario inicial, sesión experimental, cuestionario final, entrevistas individuales | Se concluye que los participantes lograron comprender ideas básicas de variación proporcional, describir un patrón y formular una regla general, a medida que transitaban del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo. También se identificó que el software Logo mejora el aprendizaje de dichos contenidos temáticos, pues parte de una fase de exploración y experimentación directa con la variación y generalización. |
| Tambychik y Meerah (2010) | Determinar las principales habilidades matemáticas y cognitivas relacionadas con dificultades en la resolución de problemas matemáticos | Habilidades matemáticas y cognitivas relacionadas con dificultades en la resolución de problemas matemáticos | 8vo. Malasia | Resolución de problemas. Habilidades matemáticas: operaciones numéricas, aritmética, información, lingüística, visual-espacial. Habilidades cognitivas Dificultades | Mixta. Tres muestras de grupos focalizados (urbana, suburbana y rural). Cuestionario validado por Rash y Alfa Cronbach. Análisis descriptivo mediante codificación. | Los encuestados carecían de muchas habilidades matemáticas, operaciones numéricas, visual-espacial e información (hacer conexiones, manipular la información, determinar fórmulas). La manipulación de información y la formulación de oraciones matemáticas fue la sub-habilidad que más influyó en las dificultades para resolver problemas. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Booker y Windsor (2010) | Identificar y utilizar estructuras de problemas que promuevan el pensamiento algebraico. | Perímetro, área y generalizar patrones | Grado 7. Nivel económico bajo | Resolución de problemas Pensamiento algebraico | Cualitativa. Design Research. Observaciones Trabajo en pequeños grupos. Entrevistas | Los resultados sugieren que los estudiantes son capaces de construir formas generales de pensar que los puede llevar a desarrollar el pensamiento algebraico. |
| Geofrey (2016) | En qué medida el uso de la aplicación DragonBox 12+ podría ayudar a los estudiantes de octavo grado a fomentar su pensamiento algebraico y sus actitudes hacia el álgebra. | Pensamiento algebraico. | 8vo. Malasia. | Teoría de la estimulación sensorial. ZDP. Pensamiento Algebraico. Dimensiones en RP: relevancia, integración, traducción, adaptación, inmersión y naturalización. | Cuantitativa. Muestreo estratificado simple. Enfoque cuasi-experimental con pre-post test. Cuestionario de Fennema-Sherman. Taxonomía de Krathwohl. | Los estudiantes que trabajaron con la aplicación obtuvieron puntajes significativamente más altos en pensamiento algebraico y en sus actitudes hacia el álgebra, en comparación con el grupo de control. Es decir, la aplicación brindó oportunidades para que los estudiantes participaran activamente en la resolución de problemas de álgebra a través de las seis dimensiones: (1) relevancia, (2) integración, (3) traducción, (4) adaptación, (5) inmersión y (6) naturalización. |
| Andini y Suryadi (2017) | Analizar obstáculos que muestran estudiantes (8 y 9) años para resolver problemas algebraicos | Patrones a partir de secuencias figurales aritméticas. | 3er. Indonesia. | Pensamiento algebraico Dificultades de estudiantes | Cualitativa. Diseño de investigación didáctica (DDR). Tareas con papel y lápiz. Entrevista. | Los resultados indican que la mayoría de los estudiantes muestran dificultades para resolver problemas que involucran un pensamiento algebraico. Se identificaron tres tipos de obstáculos para obtener las expresiones algebraicas que generalizan los problemas: ontológico, didáctico y epistemológico. El principal obstáculo fueron las dificultades para comprender el problema. |
| Jureczko (2017) | Investigar cómo estudiantes de tres grupos de edad diferentes interpretó y resolvió una actividad con patrones (palíndromos). | Palíndromos numéricos. | Sec. (44), bach. (102) y univ. | Generalización. Pensamiento matemático. | Cualitativa. Tareas con papel y lápiz (45 minutos sin importar el grado) | Se observó una evolución del proceso de generalización a partir de la descripción verbal y el tipo de ejemplos. Los |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | (51). Polonia | | | estudiantes de secundaria pusieron en práctica nociones de variación y repetición sin haber revisado de forma previa esos temas en clase. |
| Kusumaningsih et al. (2018) | Mejorar la capacidad de pensamiento algebraico de estudiantes en octavo grado con múltiples estrategias de representación con enfoque realista. | Patrones con enfoque de matemáticas realistas. | 8vo. Indonesia | Educación Matemática Realista (EMR)<br>Pensamiento algebraico | Cuantitativo. Cuasi-experimental. Control pretest-postest no aleatorizado. Prueba t para muestras independientes. | Las estrategias de representación múltiple con enfoque realista lograron fortalecer el pensamiento algebraico de los estudiantes. En promedio, el aprendizaje de los estudiantes del grupo experimental fue superior al setenta por ciento, con relación a los estudiantes del grupo control. |
| Morales (2018) | Describir cómo estudiantes de 6-7 años resuelven tareas que involucran patrones. | Patrones cualitativos (color, forma) y cuantitativos. | Primer grado, escuela privada | Constructivismo. Errores y dificultades<br>Estructura y tipo de patrones.<br>Pensamiento algebraico (Kaput), con énfasis en generalización.<br>Pensamiento funcional (Blanton).<br>Representaciones. | Metodología mixta (cualitativa y cuantitativa).<br>Exploratoria y descriptiva.<br>Experimento de enseñanza.<br>Estudio de casos.<br>Entrevistas semiestructuradas. | Los estudiantes fueron capaces de determinar patrones de repetición. Las estrategias más utilizadas fueron las de conteo y operacional |
| Ayu et al (2020) | Diseñar una lección sobre pre-álgebra utilizando el enfoque RME. | Actividades con patrones. | 5to . Indonesia | Educación matemática realista (Gravemeijer & Bakker).<br>Estrategias y obstáculos.<br>Representaciones | Cualitativa. Discusión en el equipo de inv. Tres fases: estudios preliminares, experimento de enseñanza, análisis retrospectivo. Trabajo escrito y entrevistas. | Los resultados indican que actividades con patrones en clase de pre-álgebra basados en la visualización (representación geométrica) apoyaron la identificación de regularidades y los procesos de generalización. |
| Spangenberg y Pithmajor (2020) | Conocer las estrategias que estudiantes de noveno grado emplean para abordar problemas de patrones numéricos | Patrones numéricos, estrategias de estudiantes. | 9no. Escuelas rurales. Sudáfrica. | Resolución de problemas (propuesta por Singer y Voica), cuatro indicadores: saber, decodificación, representación y procesamiento e implementación.<br>Estrategias. Imagen mental | Cualitativa exploratoria. Preguntas (etapa 1) y entrevistas semi estructuradas (etapa 2). Grabaciones. Codificación. Niveles de compromiso (cuatro fase del marco) | Los resultados indican la existencia de cuatro estrategias principales: (1) conteo directo; (2) proporción directa; (3) estrategia recursiva; y (4) representación de imágenes mentales |

**Fuente**: Elaboración propia.

## 1.3 Planteamiento y justificación del problema

Con base en la literatura revisada, se identificaron que algunos estudios están centrados en identificar las estrategias que utilizan los estudiantes para abordar problemas con patrones, en analizar los obstáculos que muestran estudiantes para resolver problemas algebraicos, otros se centran en el diseño de actividades con patrones, o identificar la evolución del proceso de generalización en estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad, otras investigaciones analizan la diferencia de trabajar con algún software (por ejemplo Logo y DragonBox 12+) comparado con papel y lápiz. Algunos trabajos se enfocan en aplicaciones en la vida cotidiana, comparando diferencias de trabajar con ejercicios que se encuentran en los libros de texto con problemas enfocados en matemática realista. Sin embargo, pocos estudios están orientados a dotar de significado a los símbolos alfanuméricos; es decir, de asignar referentes a estos símbolos que posean un menor nivel de abstracción, y siguen rutas donde la introducción de tales símbolos como medio para representar cantidades indeterminadas se realiza mediante una imposición.

Este trabajo se enfoca en dar sentido a los símbolos a partir de actividades con patrones, lo cual significa lograr que los símbolos tengan un referente con un menor nivel de abstracción, para posteriormente avanzar en las demás dificultades relacionadas con el pensamiento algebraico, por ejemplo, el desarrollo de fluidez y precisión al operar las expresiones alfanuméricas.

Para apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico es necesario entender la relación entre este y el sentido numérico, particularmente entender la función del signo de igualdad como símbolo de relación. El pensamiento algebraico tiene un grado de abstracción mayor respecto al sentido numérico porque se enfoca en identificar, generalizar y representar patrones representados simbólicamente a partir de casos particulares que son numéricos (Papini 2003).

La posibilidad de potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes es un aspecto que continúa generando interés en el campo de la educación matemática. El objetivo de este trabajo es documentar cómo influyen actividades de identificación y generalización de patrones en el desarrollo de pensamiento algebraico en su fase inicial; mientras que las preguntas de investigación son: ¿De qué manera influyen las diferentes formas de representar los números en el desarrollo del pensamiento algebraico? ¿Cómo influye el sentido de representar los números de diferentes formas en los elementos que constituyen el pensamiento algebraico?

La hipótesis que planteamos en este trabajo es que el sentido que se le da a las diferentes representaciones de los números permite al estudiante identificar con mayor facilidad relaciones y patrones en los números, y con ello se favorecen los procesos de generalización.

# 2. MARCO DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se explica en qué consiste un marco de investigación, los diferentes tipos de marco y se especifican los componentes del marco conceptual de este trabajo, el cual está integrado por dos componentes, la primera de ellas enfocada en el diseño e implementación de tareas, y la segunda en constructos que permitieron analizar e interpretar la información empírica. Un constructo es una abstracción que no puede observarse directamente, pero que es útil para interpretar datos empíricos y para la construcción de una teoría (Ary et al., 2009).

## 2.1 Introducción

La realización de una investigación requiere de un marco que oriente y sustente las diferentes etapas del proceso investigativo. Un marco de investigación es una estructura de ideas y principios, a través de la cual se explicitan supuestos que permiten entender por qué un investigador hace lo que hace. Mediante este, se establece la coherencia entre la pregunta de investigación, el proceso de recolección y análisis de información, la construcción de los datos y la interpretación de estos, con base en el fenómeno de referencia. De acuerdo con Lester (2005), un marco de investigación es un conjunto de ideas, principios, acuerdos o reglas que sustentan y orientan una investigación. Las ideas, conceptos y sus relaciones, que lo integran, se emplean para describir, analizar, generalizar, sintetizar, comparar un fenómeno, más allá del sentido común, utilizando las abstracciones y relaciones constituyentes del marco, como sustento y justificación de las acciones y decisiones tomadas por el investigador.

Un marco permite dar sentido a los datos empíricos, al incorporarlos dentro de una estructura de conceptos, y relaciones, de modo que esta estructura es útil para describir, explicar e, incluso, predecir ciertos patrones de significados, inmersos en la información empírica asociada con el fenómeno de interés. Tales patrones son detectados, organizados y estructurados, como resultados y conclusiones por el investigador después de llevar a cabo un proceso de reducción y transformación de la información en datos, con base en el marco de investigación para, posteriormente, utilizar métodos o estrategias que permitan evidenciar ciertos patrones de significados, los cuales están estrechamente relacionados con los componentes conceptuales y procedimentales del marco. Específicamente, un marco es útil para determinar: (a) la naturaleza de las preguntas formuladas; (b) la forma en que se enuncian las preguntas; (c) la forma en que se definen los conceptos, constructos y procesos que orientan la investigación; y (d) los principios de descubrimiento y justificación válidos para generar nuevo conocimiento.

Eisenhart (1991) y Lester (2005) proponen la existencia de tres tipos de marcos, (a) teóricos, (b) prácticos y (c) conceptuales. Cada marco tiene sus propias características, Lester (2005) identificó algunas deficiencias en dos de ellos. El marco teórico ha sido desarrollado mediante el uso de una explicación establecida y coherente de ciertos tipos de fenómenos y relaciones (por ejemplo: la Epistemología Genética de Piaget y la teoría de Vygotsky del constructivismo socio-histórico son dos prominentes teorías utilizadas en el estudio del aprendizaje de los niños), una deficiencia es que este marco limita la actividad del investigador, ya que este debe alinearse estrictamente a los lineamientos establecidos por la teoría, incluyendo hipótesis y metodologías. Un marco practico tiene como ventaja que los problemas son los de las personas directamente involucradas y una sería limitación es que tienden a ser, en el mejor de los casos, solo generalizables localmente. Finalmente, un marco conceptual puede estar basado en diferentes teorías. y varios aspectos del conocimiento del practicante, dependiendo sobre lo que el investigador puede argumentar que será relevante e importante abordar sobre un problema de investigación.

Eisenhart (1991) argumenta que un marco conceptual es "una estructura esquelética de justificaciones, en lugar de una estructura esquelética de explicaciones" (p. 210). En un marco conceptual, al menos en el campo de la educación matemática, resulta indispensable explicitar supuestos que el investigador sostiene (ontológicos, epistemológicos o didácticos, entre otros), ya que esto permite al lector entender por qué el investigador hace lo que hace y también permite a los investigadores justificar, de forma clara y concisa, por qué se eligieron ciertos conceptos y relaciones, y no otros, para sustentar la investigación (Lester, 2005).

## 2.2 Elementos del marco conceptual

Para fundamentar teóricamente este trabajo se construyó un marco conceptual, el cual está integrado por dos componentes principales, uno de ellos referido al diseño de tareas, adoptando a la resolución de problemas como aproximación didáctica. El segundo de los componentes está integrado por los elementos del pensamiento algebraico, tiene la finalidad de orientar el procesamiento e interpretación de los datos empíricos.

En una investigación científica, los datos empíricos deben servir de sustento para las afirmaciones que constituyen los resultados, mostrando convincentemente que los datos ocurrieron debido a los procesos descritos en el marco, y no accidentalmente o coincidentemente. Para cubrir este requerimiento, el investigador no puede simplemente describir el marco de investigación, sino que los constructos que integran dicho marco deben de utilizarse como medio para extraer y fundamentar las conclusiones (Eisenhart, 1991). Los constructos o conceptos teóricos son una herramienta para obtener información a partir de los datos y, por ello, si un concepto teórico no se utiliza de alguna manera, entonces es irrelevante para un marco de investigación.

## 2.3 Marco para el diseño e implementación de tareas

Esta parte del marco está integrado por la perspectiva de resolución de problemas como aproximación didáctica, y se utilizó para sustentar el diseño e implementación de las tareas; Debe mencionarse que, para fines de claridad, dicha dimensión didáctica está estructurada en torno a dos componentes, una ontológica y otra epistemológica. La componente ontológica incluye adoptar una posición respecto a:¿qué son las matemáticas? La componente epistemológica explica cuál es la postura particular respecto de que es el conocimiento y cómo se aprende y, por último, la dimensión didáctica permite establecer cuáles son las características del conocimiento o aprendizaje, que construyen los estudiantes, y que son consideradas como deseables, así como los mecanismos y las estrategias que permiten lograr estas características.

### 2.3.1 Dimensión ontológica

La ontología es una rama de la filosofía interesada en responder preguntas sobre el ser. En este sentido, la pregunta: ¿qué son las matemáticas? Es una pregunta de carácter ontológico y, al ser la ontología una rama de la filosofía, las respuestas no son únicas, sino que existe un amplio conjunto de posibles posiciones o acercamientos para responderlas. En el caso de la pregunta: ¿qué son las matemáticas?, en uno de los extremos, de posibles respuestas, se considera que matemáticas es una disciplina estática, donde todos los conocimientos son ya conocidos; una disciplina desarrollada de forma abstracta, e integrada por procedimientos y resultados completamente establecidos. De la posición anterior se desprende una visión del aprendizaje conceptualizado como capacidad para acumular hechos en la memoria, y habilidad para aplicar, con fluidez y precisión, algoritmos y procedimientos rutinarios.

En el otro extremo de la gama, de posibles respuestas, se considera que matemáticas es una disciplina en constante desarrollo, sujeta a equívocos y confusiones, como el resto de las ciencias; una disciplina orientada a la búsqueda de patrones sustentados en evidencia empírica de lo que se desprende una concepción del aprendizaje orientada al desarrollo de hábitos de pensamiento (Leikin, 2007; Santos, 2012) y actitudes para examinar relaciones entre objetos matemáticos, desde diversos puntos de vista; al desarrollo de capacidad para realizar observaciones, para estructurarlas y expresarlas como conjeturas, oralmente y por escrito; a la habilidad para utilizar distintas representaciones, para establecer conexiones, para utilizar diversos argumentos y formas de justificación; para comunicar resultados y formular preguntas consistentemente (Castañeda, 2021). A la habilidad, disposición, hábito y preferencia para formular preguntas se le denomina actitud inquisitiva (Santos y Camacho, 2018).

La postura ontológica que se adoptó, en relación con las matemáticas, sostiene que el conocimiento matemático cambia constantemente debido a nuevos descubrimientos de los matemáticos profesionales (por ejemplo, el origen del Teorema de Pitágoras es puramente Geométrico, sin embargo, explorando aspectos aritméticos, la ecuación de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, se puede formular para enteros positivos, prescindiendo de consideraciones geométricas). Adicionalmente, dado que se concibe que el aprendizaje matemático debe reflejar en cierta medida, mediante relaciones de analogías, las actividades esenciales que llevan a cabo los profesionales de la disciplina al crear nuevo conocimiento (Barrera et al. 2021, p.16). El proceso de aprendizaje de matemáticas requiere que los estudiantes lleven a cabo acciones orientadas a identificar patrones entre objetos matemáticos, a través de la exploración y experimentación que se lleva a cabo a través del uso de diferentes representaciones de esos objetos; a formular tales relaciones como enunciados generales o conjeturas, verbalmente o por escrito; a diseñar argumentos para justificar resultados; a comunicar ideas, a formular preguntas sistemáticamente, a comprender qué es un sistema axiomático y cómo los teoremas se derivan lógicamente de los axiomas del sistema. A manera de resumen, la posición que adoptamos es que matemáticas es la ciencia de los patrones formales (Steen, 1988, Thurston, 1994).

En este trabajo argumentamos, con base en la postura epistemológica socio-constructivista, que un aspecto fundamental en la formación matemática de los estudiantes consiste en desarrollar habilidades para formular preguntas sistemáticamente, las cuales se analizan y discuten dentro de una comunidad de práctica (el salón de clase) en la que se valora la participación abierta de todos sus integrantes, quienes utilizan sus recursos matemáticos para dar sentido a las ideas o conceptos (Santos, 2008), produciéndose como resultado significados considerados-como-compartidos (Simon, 1994).

El desarrollo de un pensamiento matemático requiere que el entorno de aprendizaje favorezca la construcción de significados, tal como hacen los matemáticos al crear nuevo conocimiento disciplinar. La actividad matemática involucra experimentar, con el fin de identificar regularidades y elaborar modelos (Lesh y Doerr, 2003). Es decir, aprender a pensar matemáticamente significa ver el mundo a través del lente de un matemático (Schoenfeld, 1992). De ahí que el proceso de instrucción, desde una perspectiva de resolución de problemas, debiera orientarse a proponer tareas no rutinarias, que, mediante la formulación de preguntas, involucren la identificación de patrones.

### 2.3.2 Dimensión epistemológica

La epistemología (de la raíz griega ἐπιστήμη, episteme, que significa conocimiento) es una disciplina interesada en responder preguntas del tipo: ¿cómo se llega a conocer algo? ¿Qué es el conocimiento? ¿Cuáles son las formas o medios para determinar si un cierto conocimiento es válido? Esta disciplina se ubica en la frontera de la filosofía y la ciencia, ya que, hasta antes de que Piaget formulara su epistemología genética, las teorías epistemológicas eran puramente especulativas. Piaget sustentó su teoría con datos empíricos, derivados de la realización de observaciones minuciosas (en algunas ocasiones denominadas con el nombre de método clínico piagetiano) de niños en su familia cercana, desde el nacimiento hasta la adolescencia. El hecho de que la teoría de Piaget contara con evidencia empírica como sustento, fue lo que llevó a la epistemología del campo puramente filosófico al ámbito científico.

Una de las preguntas epistemológicas de mayor relevancia es ¿qué es el conocimiento? Al respecto, como se ha mencionado ya, la pertenencia de esta pregunta al ámbito filosófico implica la existencia de una amplia gama de respuestas, en forma de teorías, una de ellas denominada teoría constructivista o, simplemente, constructivismo. En esta última teoría se acepta, como postulado básico, la afirmación de que el conocimiento es producto de la interacción entre el sujeto y el objeto (del conocimiento); y como consecuencia se desprende la afirmación de que cada persona construye de forma activa su propio conocimiento, independientemente de la presencia y naturaleza de algún ente o medio instruccional (Simon, 1994). Entonces, al resolver problemas, el resolutor está inmerso en un medio el cual favorece el desequilibrio de sus estructuras cognitivas, ya que ninguno de los esquemas (conocimientos previos) que integran sus recursos, puede asimilarse a la situación problemática, dado que, al catalogar una situación como problema, implica que el resolutor no conoce un método o técnica, cuya implementación directa lleva a la solución o a una solución de la situación. Así que los esquemas que integran sus recursos se tienen que modificar para acomodarse a la situación problemática y por este medio construir esquemas más robustos.

Por otra parte, en una perspectiva socio-constructivista del aprendizaje se acepta que la construcción del conocimiento está determinada por las interacciones que una persona desarrolla al participar en una comunidad de práctica (la escuela, o más específicamente, la clase de matemáticas) donde se construyen conocimientos considerados-como-compartidos o taken-as-shared (Simon, 1994). Al adoptar una posición socio-constructivista se considera, en general, que las características del conocimiento están determinadas por las producciones culturales utilizadas durante el proceso de construcción del conocimiento (herramientas físicas e intelectuales); es decir, que el estudiante al interactuar con los objetos matemáticos (estrictamente hablando, con representaciones de estos objetos), de la forma requerida por el proceso para encontrar alguna ruta de solución, permitirá que este aprenda matemáticas.

En la perspectiva epistemológica socio-constructivista, y derivado del postulado básico constructivista, se acepta que el aprendizaje es un proceso continuo, dentro y fuera del aula, y que cada estudiante interpreta una experiencia, particularmente las tareas que enfrenta en la clase de matemáticas, en términos de su estructura cognitiva la cual a su vez se organiza a partir de experiencias personales (Kolb 1984). Por esto, el conocimiento que construye un estudiante, a pesar de haber abordado las mismas tareas que el resto de los integrantes de una misma comunidad de práctica, será diferente del de los demás; porque la estructura cognitiva es el medio a través del cual el cerebro de una persona construye la realidad, y porque dicha estructura está organizada a partir de experiencias, las cuales son de carácter individual y dependientes del sistema de interpretación (los sentidos, un sistema nervioso y un cerebro). En consecuencia, el aprendizaje de cada persona depende de la estructura cognitiva de esta (Zull 2002).

Las consideraciones anteriores permiten afirmar que en un salón de clase se construyen significados considerados-como-compartidos y significados no compartidos, ya que solo tenemos la esperanza, nunca la certeza, de que las formas de entender las ideas o conceptos matemáticos de una persona son parecidas o presentan gran semejanza con las del resto de los integrantes de la comunidad de práctica (Cobb et al., 1991).

### 2.3.3 Dimensión didáctica

La didáctica es la disciplina que se encarga de estudiar la forma en cómo se enseña, de tal manera que engloba todo un conjunto de medios y procedimientos involucrados en el proceso de instrucción. En este sentido, el objetivo principal del aprendizaje de las matemáticas debería ser construir significados para los conceptos o ideas matemáticas (Serrano, 1993). La enseñanza debería tener como objetivo principal que los estudiantes entiendan conceptos, ideas y procesos centrales de la disciplina y no que únicamente desarrollen habilidad para ejecutar algoritmos. Es decir, se debe promover el razonamiento matemático mediante actividades que permitan analizar patrones y regularidades, con la finalidad de promover la habilidad de pensar y razonar matemáticamente (Barrera y Reyes, 2016). La resolución de problemas es una alternativa en donde una comunidad de aprendizaje busca diferentes formas de resolver una situación problemática y reconocen la relevancia de justificar sus respuestas mediante diferentes tipos de argumentos. La meta no es sólo reportar una respuesta, sino identificar y contrastar diferentes maneras de explorar, representar, resolver el problema y comunicar los resultados (Santos-Trigo, 2008).

Resolver un problema en esta perspectiva, lleva aparejado el formular y extender a nuevos problemas. Esto con la finalidad de establecer conexiones para estructurar un entendimiento más robusto. Las imágenes mentales que los estudiantes elaboran permiten dar sentido a los conceptos o ideas, al permitirles organizar y reflexionar sobre sus conocimientos previos y ligarlos con los nuevos conocimientos. Para transitar entre los distintos niveles de entendimiento es necesario conectar ideas al participar en una comunidad de aprendizaje en la que se discuten y construyen significados considerados-como-compartidos.

En este trabajo se adoptó a la resolución de problemas, lo cual conlleva aceptar dos objetivos instruccionales generales: (1) promover que los estudiantes desarrollen formas matemáticas de pensar y (2) favorecer que los estudiantes construyan un aprendizaje matemático con entendimiento. Estos objetivos son compatibles con las posiciones epistemológica y didáctica de este trabajo.

La conceptualización de entendimiento que adoptamos establece que entender algo significa relacionar ese algo, con otras cosas que ya se saben previamente (Hiebert et al., 1997), y de este enunciado se deduce, que existirán diferentes niveles de entendimiento, en función de la cantidad y relevancia de las conexiones establecidas entre conceptos.

Además de la conceptualización de entendimiento, expresada en términos de conexiones entre conceptos, retomamos de Hiebert et al. (1997) el supuesto de que, para aprender matemáticas con entendimiento, es necesario que los estudiantes se involucren, consistente y sistemáticamente, en la reflexión y comunicación de ideas como parte de las actividades cotidianas que se llevan a cabo en las clases de matemáticas. Es importante señalar que los procesos de reflexión y comunicación de ideas están incluidos entre los elementos fundamentales del quehacer matemático, por lo que, la conceptualización de entendimiento, en términos de conexiones es compatible con una postura didáctica basada en la resolución de problemas.

En este trabajo se argumenta que la construcción de algún nivel de entendimiento para un concepto, requiere necesariamente de la utilización o aplicación de dicho concepto en la generación de nuevas ideas o la solución de problemas (Zull, 2002) y que los estudiantes participen en una comunidad de práctica (la clase de matemáticas), cuyas actividades fundamentales (que conforman el escenario instruccional) son congruentes con las perspectivas ontológica, epistemológica y didáctica particulares que sostienen esta investigación. Al respecto, se considera pertinente utilizar un ciclo de aprendizaje (integrado por fases, las que, a su vez están compuestas por acciones), propuesto originalmente por Kolb (1989), y adaptado por Zull (2002) y, posteriormente, por Barrera y Reyes (2016). La presentación gráfica del ciclo se debe a  Téllez (2020). El ciclo que se utiliza, para orientar el proceso instruccional, es el propuesto por  Barrera y Reyes. Dicho ciclo de aprendizaje está integrado por cuatro fases, al igual que sus versiones previas, que son: acción, observación, formulación de conjeturas y justificación de resultados (**Figura 1**). Las fases del ciclo se utilizaron como punto de partida para bosquejar, estructurar, organizar y diseñar un escenario instruccional que respondiera a las necesidades y restricciones, definidas e impuestas, respectivamente, por los objetivos (generales, particulares y específicos) tanto instruccionales como de investigación.

Es necesario resaltar que las adaptaciones y modificaciones del ciclo, propuestas por Barrera y Reyes (20l6), tuvieron la finalidad de ajustar y complementar las fases, de modo que éstas ofrecieran oportunidades para "involucrar a los estudiantes en la práctica de hacer matemáticas y, como resultado, desarrollaran un sentido de la disciplina, consistente con el que sostienen los matemáticos profesionales" (Schoenfeld, 1994, p.53). Lo anterior debido a que algunos supuestos básicos, de una perspectiva de resolución de problemas son: (i) matemáticas es la ciencia de los patrones, (2) en lo que consisten realmente las matemáticas es en problemas y sus soluciones (Halmos, 1980), (3) el escenario instruccional debe reflejar, en alguna medida, el escenario profesional de los matemáticos al crear nuevo conocimiento disciplinar (Schonfeld, 1994); (4) la mejor forma de aprender algo es descubrirlo por uno mismo (Polya, 1963), (5) resolver problemas es la actividad fundamental para aprender matemáticas con entendimiento (Polya, 1945).


**Figura 1**. Ciclo para observar el desarrollo del entendimiento matemático

(Tellez, 2020)

Al adoptar el ciclo básico para el desarrollo de entendimiento matemático, consideramos que al transitar, reiteradamente, por las fases del ciclo (las cuales no son estrictamente secuenciales), una persona adquiere información útil para el proceso de entendimiento, ya que al interior de cada fase se promueve la ejecución de uno o varios de los elementos fundamentales del quehacer matemático; es decir, durante el proceso instruccional en el aula se favorecen los objetivos de aprendizaje determinados por una perspectiva didáctica de resolución de problemas.

Analizando el ciclo básico para observar el desarrollo del entendimiento, (Barrera y Reyes, 2016), en la fase de acción, es donde el estudiante interactúa con los objetos del conocimiento, los manipula e identifica las características importantes, representa la información de diferentes formas y le agrega atributos que le parecen importantes, es decir, representa la información. En la fase de acción resulta fundamental el proceso de representación de la información, incluyendo la cuantificación de atributos o la inclusión de elementos auxiliares, ya que este proceso puede contribuir a que se amplíe y complemente la información presente en el enunciado del problema, a la vez que se favorece la conformación de imágenes mentales (Zull, 2002), las cuales se constituyen en apoyo para dar significado a las ideas o conceptos.

En la fase de observación, implica que se trabaje con la información que se obtuvo de interactuar con el objeto, es decir, el estudiante reflexiona y detecta si existen regularidades resultado de haber manipulado un objeto matemático, con la finalidad de lograr estructurar mentalmente las relaciones o patrones inmersos en los casos particulares analizados, y a partir de ello, estructurar un enunciado que dé cuenta de los productos obtenidos a partir de los procesos de abstracción y generalización que se llevaron a cabo, mediante recursos lingüísticos, actividad que ya pertenece a la fase de formulación de conjeturas. Es importante subrayar que cuando un estudiante es capaz de abstraer alguna propiedad, es porque ha identificado características esenciales de los objetos de estudio. En la fase de formulación de conjeturas se explicitan las observaciones, acerca de relaciones entre objetos, en terminología matemática. Pudiera interpretarse que estas etapas son en realidad una sola, sin embargo, no es posible obtener información y formular conjeturas si no se interactúa con el objeto.

Cuando el estudiante hace una abstracción, es porque ha identificado características esenciales del objeto de estudio, después de haber transitado por la etapa anterior, ha iniciado la etapa de formulación de conjeturas, las generalizaciones que produce se enuncian en términos matemáticos. Finalmente, la etapa de justificación de resultados implica que el estudiante argumente sus resultados y que los comunique a otros. El ciclo del entendimiento no necesariamente puede concluir en esta fase, es posible que al justificar resultados surjan nuevas preguntas y nuevos problemas (Barrera et al., 2021).

## 2.4 Marco para la construcción y análisis de los datos

En esta sección se describen los constructos que orientaron el proceso de transformar la información en datos y que permitirán el análisis de los mismos. Los constructos teóricos para lograr este fin se refieren a elementos centrales tanto del sentido numérico como del pensamiento algebraico.

### 2.4.1 Desarrollo histórico del álgebra

Santos (1984) y Puig (1998) mencionan que el desarrollo histórico del álgebra ha transitado por tres diferentes etapas: álgebra retórica, álgebra sincopada y álgebra simbólica. El conocer este desarrollo es importante, porque en otros trabajos previos se ha identificado cierto paralelismo entre este desarrollo histórico y el proceso de aprendizaje en lo referente al pensamiento algebraico, por ejemplo, Niño y Casas (2019) realizaron un recuento de los avances conceptuales que ha tenido el álgebra a través de la historia, y como algunos temas, podrían llevarse al aula de clase implementándolos de manera diferente y Protti (2003) realizó recorrido del desarrollo histórico del álgebra, destacando aspectos que consideran útiles para que el estudiante se familiarice y llegue a asimilar los elementos de esta área.

El álgebra retórica se caracteriza porque hace uso del lenguaje natural para expresar la generalidad, así como relaciones entre cantidades indeterminadas, sin que se use otro tipo de símbolos. En el álgebra sincopada se introducen abreviaturas para incógnitas y relaciones de uso frecuente, pero los cálculos se desarrollan en lenguaje natural (Malisani, 1999). Por su parte, el álgebra simbólica es la que actualmente aprendemos durante la educación secundaria. El álgebra simbólica fue desarrollada por Vieta (1540-1603) y perfeccionada por Descartes (1596-1650). En este tipo de álgebra se usan letras para representar cantidades indeterminadas y signos para representar a las operaciones. Se caracteriza por utilizar el lenguaje simbólico para resolver ecuaciones y para demostrar reglas generales (Malisani, 1999).

> En estas diferentes etapas se abordan problemas similares con diferentes aparatos conceptuales; por ejemplo en la primera, la retórica, el enunciado y la resolución de un determinado problema era totalmente verbal, los problemas eran muy particulares y no había métodos generales de resolución. Esto comprendió una época desde el 4000 a. de C. hasta el 300 d. de C. que fue la época de la matemática babilónica, egipcia y griega [...] La segunda época, la Sincopada, se caracteriza porque sustituye a los conceptos y operaciones que se usaban más frecuentemente por abreviaturas, de esta manera el álgebra sincopada era una especie de taquigrafía. Esta época comprende del siglo III al XIV aproximadamente y se identifica con la matemática hindu, arabe. En esta etapa prevalece todavía el tratamiento de problemas particulares con soluciones particulares [...] La tercera época, la del Álgebra Simbólica, representa un álgebra en donde todos los términos y la solución del problema son escritos por medio de símbolos; hay símbolos para las constantes, las variables y las operaciones, y esto permite casi por necesidad que se planteen problemas generales y se les da la solución también general. (Santos, 1984, p. 3)

Es importante resaltar que la construcción del lenguaje simbólico a lo largo de la historia ha sido lenta y difícil, habiendo períodos de avance seguidos de otros de retroceso o estancamiento (Malisani, 1999). De acuerdo con algunos autores, hasta antes de Diofanto (alrededor de 250 d. C.) el álgebra fue puramente retórica, aunque se considera que Euclides (325-265 a.C.) utilizó un tipo de álgebra geométrica.

Se atribuye a Diofanto el haber sido el primer matemático griego en introducir abreviaturas para indicar la incógnita de una ecuación y las potencias de esta. De acuerdo con Kline (1972) posiblemente Diofanto utilizó la versión de la letra griega sigma minúscula que se utilizaba al final de una palabra (ς), como en la palabra arithmos (ἄρῐθμός), ya que esta letra no representaba un número en el sistema griego.

> Diofanto llamó a la incógnita "el número del problema." Para nuestra $x^2$ Diofanto usó $\Delta^Y$, siendo Δ la primera letra de δύναμης (dynamis, "potencia"). $x^3$ es $K^Y$; la K viene de κύβος (cubos). $x^4$ es $\Delta^Y\Delta$; $x^5$ es $\Delta K^Y$; $x^6$ es $K^Y K$ [...] Él también usó nombres para esas diferentes potencias, e.g. número para $x$, cuadrado para $x^2$, cubo para $x^3$, cuadrado-cuadrado (dynamodynamis) para $x^4$, cuadrado-cubo para $x^5$, y cubo-cubo para $x^6$. (Kline, 1972, p. 139)

Se considera que este tipo de simbolismo es importante, más aún la consideración de potencias mayores que tres, ya que los griegos no podían concebir este tipo de potencias, ya que para ellos las potencias cuadráticas representaban áreas, y las cúbicas volúmenes, pero no lograban asignar algún significado para potencias mayores. Así, la consideración de significado puramente aritmético asociado a tales potencias es una contribución de Diofanto, por demás importante para la matemática.

Como estamos tan acostumbrados al álgebra simbólica, generalmente no podemos imaginar cómo se trabajaba con los otros tipos de álgebra. Por esta razón se presentará un breve bosquejo de cada una de las formas de trabajo y simbolización en estas tres fases históricas del álgebra. Kline (1972) refiere que Herón (10-70 d. C) abordó el siguiente problema: dado un cuadrado tal que la suma de su área y su perímetro es 896 pies, encontrar el lado. El problema en notación moderna es $x^2+4x=896$. De acuerdo con el autor, "Herón completó el cuadrado sumando cuatro en ambos lados y tomó la raíz cuadrada. Él no justificó nada sino que meramente describió que operaciones efectuar" (Kline, 1972, p. 136). Así, en la época del álgebra retórica se abordaron casos particulares de ecuaciones describiendo la "receta" para resolverlos, expresada en lenguaje natural.

Otro ejemplo de álgebra retórica se encuentra en los trabajos de Al-Khwarizmi (780-850 d.C.). Boyer y Merzbach (2011) argumentan que con Al-Khwarizmi se obtiene un retroceso, respecto de los avances logrados por Diofanto, porque explica que los problemas abordados por Al-Khwarizmi son más elementales que los problemas diofantinos, además de que el álgebra del matemático árabe es puramente retórica, incluso indica los números con palabras y no con algún otro símbolo, además de que en su trabajo no hay abreviaturas o síncopas como en la *Aritmética* de Diofanto o en el trabajo de Brahmagupta (590-670 d.C.).

En el trabajo de Al-Khwarizmi se resuelven casos particulares de problemas que hoy en día son considerados de álgebra elemental. Específicamente, su trabajo trata sobre la solución de ecuaciones cuadráticas y problemas que pueden resolverse mediante este tipo de ecuaciones (Puig, 1998). A continuación realizaremos una síntesis de los aspectos más relevantes de la obra de Al-Khwarizmi, desde la perspectiva de Puig (1998). De acuerdo con el autor, Al-Khwarizmi distingue "tres especies de números" (mâl o *tesoro*, *raíz* y *número*), que normalmente se han traducido por los tres términos del trinomio $ax^2+bx+c$; pero es relevante aclarar que la palabra que se ha hecho corresponder al cuadrado de la $x$ no es la palabra árabe que significa "cuadrado", sino la palabra mâl, cuyo significado es "tesoro". Por lo anterior Puig (1998) usa el término "tesoro" para traducir a la palabra mâl con el fin de evitar su identificación con $x^2$, ya que la palabra "cuadrado" tiene una significación geométrica que no posee la palabra mâl.

Al-Khwarizmi considera al mâl o tesoro como la incógnita de la ecuación, y por ello, aunque ya ha obtenido el valor de la raíz del tesoro ($x$), eleva esta cantidad al cuadrado para obtener el valor del "tesoro". Bajo esas consideraciones, el párrafo en el que el matemático árabe introduce las tres especies de números se lee como sigue:

> Encontré que los números que son necesarios para calcular por al-jabr y al-muqâbala son de tres especies, a saber, raíces, tesoros y simples números no atribuidos a raíz ni a tesoro. Una raíz es cualquier cosa que será multiplicada por sí misma, consistente en la unidad o números, hacia arriba, o fracciones, hacia abajo. Un tesoro es la cuantía total de una raíz multiplicada por sí misma. Un simple número es un número cualquiera que puede expresarse sin atribuirlo a raíz ni a tesoro. (Puig, 1998, p. 6)

Uno de los problemas que aborda Al-Khwarizmi dice así: «un tesoro y diez raíces del mismo, igualan treinta y nueve dirhams»; es decir, ¿cuál será el tesoro que, cuando se aumenta con diez de sus propias raíces, asciende a treinta y nueve? Problema que en la notación simbólica actual se representa como $x^2+10x=39$, o siendo estrictos, dada la interpretación de la palabra tesoro, por la expresión $x + 10\sqrt{x} = 39$. Al-Khwarizmi utiliza los términos monetarios tesoro, raíz y dirham, para representar las posibles cantidades (determinadas e indeterminadas) que pueden presentarse al hacer los cálculos, pero cuando está solucionando un problema concreto utiliza otro término técnico para referirse a la incógnita: la palabra árabe “shay”, que se traduce usualmente como “cosa”. Puig (1998) menciona que “shay” es un término coránico y de la lengua filosófica árabe, cuyo significado es «todo lo que puede ser imaginado, sin realizarse sin embargo en un objeto», por lo que tiene un carácter “vacío”, susceptible de recibir cualquier contenido y, por tanto, es lógico su uso para designar a la incógnita.

> A menudo, se ha identificado también la cosa con la *x*, la incógnita o la raíz. Sin embargo, en el libro de Al-Khwârizmî la relación entre los términos primitivos tesoro, raíz y número o dirham, la incógnita del problema y la cosa es más compleja. En ocasiones, la incógnita del problema es un tesoro y éste se representa mediante la cosa; otras veces, la cosa representa la raíz de un tesoro y la raíz es la incógnita; también puede suceder que la incógnita sea un tesoro y que éste se represente mediante la cosa, pero que en el curso de la solución la cosa se haya de multiplicar por sí misma y, por tanto, se convierta en la raíz de otro tesoro. (Puig, 1998. p. 8)

Para indicar las operaciones algebraicas Al-Khwarizmi utiliza el lenguaje natural como se indica a continuación y en general tienen una referencia monetaria, ya que un *dirham* corresponde a una unidad monetaria de la época, como los pesos o los dólares de hoy en día.

> Cuando dices diez menos cosa por diez y cosa, dices diez por diez, cien, y menos cosa por diez, diez cosas «substractivas», y cosa por diez, diez cosas «aditivas», y menos cosa por cosa, tesoro «substractivo»; por tanto, el producto es cien dirhams menos un tesoro. (Puig, 1998, p. 9)

Como se puede observar, la expresión anterior corresponde a la regla del producto de binomios conjugados $(10-x)(10+x)=100-10x+10x-x^2=100-x^2$. Para finalizar esta sección se presenta un problema y la solución del mismo como aparece en el libro de Al-Khwarizmi.

> Tesoro y números igual a raíces; es como si tú dices, “un tesoro y veintiuno en números igualan diez raíces del mismo tesoro”. Es decir, ¿cuál será la cuantía del tesoro que, cuando se le añade veintiún dirhams, iguala el equivalente de diez raíces del mismo tesoro?
> Solución: Divide en dos las raíces; la mitad es cinco. Multiplícalo por sí mismo; resulta de ello veinticinco. Quítale el veintiuno asociado con el tesoro; el resto es cuatro. Extrae su raíz, es dos. Quítalo de la mitad de las raíces, que es cinco; queda tres. Esto es la raíz del tesoro que pedías y el tesoro es nueve. O puedes añadir la raíz a la mitad de las raíces, eso será siete; es la raíz del tesoro que tú pedías y el tesoro mismo es cuarenta y nueve.
> Cuando encuentres un ejemplo que te conduzca a este caso, intenta la solución por adición, y si esto no te ayuda, la substracción servirá ciertamente. Porque en este caso se puede emplear tanto la adición como la substracción, lo que no vale en ninguno de los otros casos en los que haya que dividir en dos las raíces. (Puig, 1998, p. 10)

### 2.4.2 Sentido numérico

Dos constructos básicos para esta investigación son *sentido numérico* (number sense) y *pensamiento algebraico* (algebraic thinking), ya que la comprensión que un estudiante tiene sobre los números y las operaciones, así como la fluidez y flexibilidad para utilizarlos en la solución de problemas, es un antecedente indispensable para desarrollar los elementos básicos del pensamiento algebraico, que consisten en la capacidad para pensar acerca de cantidades indeterminadas, y sus diversas formas de representarlas (Radford, 2010).

El sentido numérico representa una forma de pensar, más que un cuerpo de conocimientos que puede transmitirse a otros (Sowder, 1992). Dentro del sentido numérico también se incluye habilidad para realizar cálculos mentales, capacidad para determinar magnitudes y estimar resultados (Greeno, 1991). De acuerdo con el *Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos* (NCTM, 2010) es posible caracterizar al sentido numérico por cinco componentes principales: (i) el significado del número, (ii) relaciones numéricas, (iii) tamaño de los números, (iv) operaciones con los números y (v) cantidades.

En contraste, en la educación escolarizada tradicional, los aspectos relacionados con enseñanza de procedimientos y algoritmos aritméticos se consideran de gran relevancia, en consecuencia, las dificultades para resolver problemas que requieren de la realización de operaciones aritméticas son comunes en sectores amplios de la población adulta (Barrera y Reyes, 2013). No obstante, la habilidad para operar con fracciones o números enteros no es evidencia de un sentido numérico, sino más bien de habilidad para aplicar procedimientos algorítmicos, los cuales muchas veces carecen de significado. La falta de sentido numérico se hace evidente cuando un estudiante no es capaz de argumentar por qué ciertos resultados, o las operaciones utilizadas para obtenerlos, son razonables (Mcintosh et al., 1992.; Yang et al, 2008). Así, un ambiente de instrucción propicio para desarrollar sentido numérico requiere de condiciones que permitan a los estudiantes realizar exploraciones; contrastar, discutir y comunicar ideas, así como desarrollar formas matemáticas de pensar y de razonar, así como fomentar el pensamiento crítico y el razonamiento numérico (Yang, 2008).

Es crucial entender que la habilidad para manejar los números y sus relaciones es una característica que se adquiere de manera gradual, como consecuencia de resolver problemas, visualizar cantidades en contextos diversos y de realizar flexiblemente operaciones con números (Barrera y Reyes, 2013; Reys, 1994). Es decir, que la habilidad numérica no se origina por casualidad, sino que se desarrolla y madura con la experiencia (Reys, 1994).

De acuerdo con Sowder (1992), las personas que poseen sentido numérico se identifican porque poseen: (1) habilidad de componer y descomponer números, para transitar entre diferentes representaciones semióticas y reconocer cuándo una representación es más útil que otra; (2) habilidad en reconocer las magnitudes relativas de los números, incluyendo comparar y ordenar cantidades; (3) habilidad para comprender magnitudes; (4) habilidad de utilizar cantidades como puntos de referencia al realizar cálculos; (5) habilidad para relacionar símbolos de números, operaciones y relaciones en formas significativas; (6) habilidad en comprender el efecto de las operaciones sobre los números; (7) habilidad para llevar a cabo cálculos mentales a través de estrategias que aprovechen las propiedades de los números y las operaciones; (8) habilidad de realizar estimaciones y determinar en qué casos una estimación es adecuada y (9) disposición para dar sentido a los números y operaciones.

Como puede observarse, de acuerdo con la caracterización de sentido numérico propuesta por Sowder (1992), los puntos (1), (5) y (9) son antecedentes indispensables para el desarrollo del pensamiento algebraico, pero son aspectos que usualmente se descuidan en la educación escolarizada, basada en la ejecución de algoritmos.

### 2.4.3 Pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico es la habilidad para centrarse en las relaciones entre los números (Widodo, et al. 2018). Implica la generalización de la aritmética y proporciona razonamientos relacionados con ella, el desarrollo de modelos matemáticos (mentales y formales) en la resolución de problemas algebraicos, formular y visualizar patrones y la construcción del lenguaje algebraico (Hendroanto, et al. 2018).

Uno de los componentes fundamentales del pensamiento algebraico es la habilidad para generalizar resultados a partir de la observación de regularidades presentes en casos particulares. Los casos particulares suponen una primera instancia para comprender el comportamiento de los números y sus relaciones lo cual permitirá a partir de casos concretos, abstraer regularidades y generalizarlas. Es por esto que el pensamiento algebraico supone una manera particular de pensar acerca de los objetos matemáticos y las relaciones entre ellos (Butto y Rojano, 2010).

Es común, que en la educación escolarizada se inicie el aprendizaje del álgebra a partir de actividades de naturaleza algorítmica, donde se introduce simbología y reglas operativas de las representaciones alfanuméricas, las cuales parecen distintas de aquellas que se aplican a los números reales, a través de una imposición. Es decir, se hace una distinción entre la aritmética y álgebra lo cual provoca una separación artificial entre estas disciplinas, omitiendo el hecho de que en ambos casos se aplican las mismas reglas para operar con números específicos o números representados por literales (Barrera y Reyes, 2016; Molina et al., 2004). En este sentido, el pensamiento algebraico constituye una forma particular de entender las matemáticas y de extender su conocimiento hacia la generalidad de fenómenos tal como lo hacen los matemáticos (Windsor, 2010; Schoenfeld, 1992). La población en general sostiene una concepción restringida en la que entender álgebra consiste en manipular variables o realizar operaciones con expresiones simbólicas. Un docente que sostiene esta concepción desconoce que este tipo de instrucción fomentará un estudio descontextualizado, abrupto, disfuncional, tardío, y superficial del álgebra escolar. Es por esto que se necesita entender que el desarrollo del pensamiento algebraico requiere tiempo para desarrollarse y sobre todo que se propongan tareas que fomenten la observación de las relaciones numéricas, justificar procedimientos, modelar problemas, describir patrones y representar simbólicamente la generalidad (Kaput y Blanton, 2000).

# 3. METODOLOGÍA

## 3.1 Introducción

Este trabajo se abordó desde un *enfoque cualitativo*, el cual se caracteriza porque la información recolectada consiste principalmente en palabras que expresan ideas o significados, aunque la información puede presentarse en forma de imágenes, dibujos, fórmulas, gestos, etcétera. Pero la característica de esta información es que tiene la finalidad de transmitir o comunicar ideas y significados. La investigación cualitativa es naturalista, porque estudia los fenómenos en sus contextos o ambientes naturales; además es interpretativa, pues intenta encontrar sentido o significado a la información que proviene de un fenómeno (Sampieri et al., 2006). Algunos de los objetivos de la investigación cualitativa consisten en identificar patrones de significado para entender un fenómeno suficientemente bien y ser capaz de formular teorías iniciales, hipótesis o conjeturas sobre el funcionamiento de un fenómeno. La investigación cualitativa desempeña un papel importante en el desarrollo científico, particularmente en la génesis de teorías porque emplea un enfoque inductivo centrado en formular preguntas de respuesta abierta (Trochim, et al., 2016). En resumen, la investigación cualitativa nos permite capturar la riqueza presente en la complejidad de los fenómenos y profundizar en nuestro conocimiento de por qué las cosas funcionan como lo hacen.

De acuerdo con Kazdin (2016), la investigación cualitativa es una aproximación a la experiencia humana centrada en: (a) narrativas, (b) descripciones, (c) interpretaciones, (d) contextos y significados. El objetivo general de la investigación cualitativa es describir, interpretar y comprender los fenómenos de interés. El proceso para lograr este objetivo consiste en estudiar y analizar con profundidad la experiencia contextualizada de los participantes, y transmitir cómo esa experiencia se siente, se percibe, y el significado que tiene para aquellos cuya experiencia se está describiendo. En la investigación cualitativa se consideran las variables relacionadas con un fenómeno en contexto, tratando de capturar todas las posibles influencias y articulaciones, es decir la complejidad del fenómeno en su medio “natural”. La investigación cualitativa busca comprender la acción y la experiencia y, por lo tanto, debe abarcar ampliamente la forma en qué funcionan las cosas en contexto (afecto, cognición, comportamiento) y luego ofrecer descripciones detalladas de las variables y sus interrelaciones (Kazdin, 2016).

## 3.2 Tipo de diseño de la investigación: estudios de caso

Un estudio de caso involucra un examen profundo de una sola o algunas pocas personas. El objetivo de un estudio de caso es proporcionar una *descripción* completa y precisa del caso. El beneficio principal de un estudio de caso es que este describe detalladamente el fenómeno de interés de forma contextual. Los estudios de caso requieren de un volumen considerable de información, de modo que las conclusiones están basadas en un conjunto amplio y detallado de información, en relación con los estudios de tipo experimental o quasi-experimental (Marczyk-2005).

De acuerdo con Kazdin (1982) las principales características de un diseño basado en estudios de caso son:

- Involucran el estudio intensivo de un individuo, familia, grupo. institución, u otro nivel que pueda concebirse como una unidad.
- La información es muy detallada, completa y, por lo general, los resultados se expresan de forma narrativa.
- Intentan transmitir los matices del caso, incluidos contextos específicos, influencias externas y detalles idiosincrásicos especiales.
- La información puede ser retrospectiva o histórica (de archivo).

El diseño de una investigación basado en estudios de caso no es nuevo, Wilhelm Wund, considerado como el padre de la psicología moderna consideraba que la investigación a profundidad de uno o unos pocos sujetos es adecuada para entender las sensaciones y percepciones. Sus investigaciones se basaron en reportes introspectivos de procesos psicológicos. Ebbinghaus por su parte investigó sobre la memoria humana con él mismo como sujeto de estudio, particularmente se interesó en el aprendizaje y la recuperación de sílabas sin sentido mientras alteraba muchas de las condiciones de entrenamiento (Kazdin, 1982, 2016).

De acuerdo con Stake (2005), cuando se decide que una investigación esté basada en un estudio de caso, se está tomando una decisión con respecto a *qué estudiar*. Un médico estudia a un niño porque el niño está enfermo. Los síntomas del niño tienen un carácter tanto cuantitativo (temperatura, presión arterial) como cualitativo (coloración de la lengua, tipo de malestares). Los registros del médico respecto del estado de salud del niño son más cuantitativos que cualitativos. El trabajador social estudia al niño porque padece negligencia parental. Los "síntomas" de la negligencia parental tienen un carácter tanto cuantitativo (grado de desnutrición) como cualitativo (signos o señales de maltrato). Los registros formales que mantiene el trabajador social son más cualitativos que cuantitativos, así que la elección de un estudio de caso no determina si la investigación es cuantitativa o cualitativa. Sin embargo, no se puede negar la predominancia por implementar estudios de casos como una técnica de investigación cualitativa.

Para Bassey (1999) hay al menos tres categorías de estudio de caso en la investigación educativa: (a) estudio de caso orientado a la búsqueda y validación de teoría (theory-seeking and theory-testing case study), (b) estudio de caso narrativo y panorámico (storytelling and picture-drawing case study) y (c) estudio de caso evaluativo (evaluative case study). Para este autor, el resultado de un estudio de caso orientado a la búsqueda y validación de teoría debe ser un argumento valioso y convincente que respalde una *generalización difusa* (más específicamente, una proposición difusa). Estas generalizaciones difusas aparecen a partir del estudio de las singularidades y típicamente argumentan que lo que se encontró en una singularidad es posible, probable, o improbable se encuentre en otras situaciones similares. En este contexto, una generalización difusa es una medida cualitativa (Bassey, 1999).

De acuerdo con Eisenhardt (1991), los casos múltiples son útiles para crear teoría porque permiten la replicación y extensión entre casos individuales, entendiendo el término *replicación* en el sentido de que los casos individuales pueden usarse para la corroboración independiente de proposiciones. Esta corroboración ayuda a los investigadores a percibir patrones más fácilmente y a eliminar asociaciones casuales, ya que el considerar diferentes casos a menudo permite detectar aspectos complementarios de un fenómeno. Al juntar los patrones individuales, el investigador puede dibujar una imagen teórica más completa.

Para los fines de esta investigación, se integraron cinco equipos, tres de ellos realizaron la actividad de las ranitas (dos integrantes), otro más la actividad de Sisa (dos integrantes) y el último equipo realizó las dos actividades (tres integrantes). Es decir, lo que nos interesa estudiar es la forma en cómo cada uno de los casos aborda las tareas, con la finalidad de identificar en su actividad si la descomposición de números en diferentes formas apoya alguno de los elementos constituyentes del pensamiento algebraico.

### 3.3.1. Procesos de diseño e implementación de las tareas

En esta sección se describen con detalle los procesos de diseño e implementación de cada una de las tareas que abordaron los participantes. También se explica cómo ambos procesos están basados en el marco conceptual correspondiente, justificando de la forma más detallada posible el por qué las cosas se hicieron como se hicieron.

Retomamos los lineamientos para el diseño de tareas propuestos por Castañeda (2021), el cual está basado en las tres dimensiones (ontológica, epistemológica y didáctica) consideradas en nuestro marco conceptual. Para esta autora, cada tarea está integrada por cuatro elementos, (i) un objetivo instruccional, el cual tuvo dos elementos fundamentales y comunes de todas las tareas, uno de ellos es favorecer los elementos del pensamiento matemático y promover un aprendizaje con entendimiento de los conceptos involucrados en la tarea; (ii) un problema base que orientó la actividad de los estudiantes; (iii) hipótesis sobre las rutas o caminos que podrían tomar los estudiantes al abordar las tareas. En algunos casos, estas no son explícitas en el documento que integró la tarea final, pero siempre se tomaron en consideración durante las sesiones plenarias de trabajo; finalmente (iv) un conjunto de preguntas, mediante las cuales se estructuró la actividad que el instructor o docente llevaría a cabo para apoyar al estudiante en la resolución de problemas.

A continuación, se describen las características consideradas para el diseño de las tareas que se implementaron durante esta investigación (**Tabla 2**), las cuales tomaron en consideración aspectos propuestos por Castañeda (2021). Se destaca el fundamento teórico asociado con el marco conceptual que orientó este trabajo.

**Tabla 2**. Características de las tareas y su fundamentación teórica.

| Característica | Fundamento |
| --- | --- |
| Los *problemas base* representan un reto intelectual y no únicamente dificultades procedimentales o de cálculo. | Dimensión didáctica, resolución de problemas como perspectiva didáctica. |

| | |
|---|---|
| Los problemas base tienen la finalidad de que los estudiantes lleven a cabo la identificación de patrones y de relaciones entre objetos matemáticos, además de que pongan en práctica los elementos fundamentales del pensamiento matemático, así como el desarrollo de una actitud inquisitiva y favorecer el establecimiento de conexiones entre ideas y conceptos matemáticos. | Dimensión didáctica, resolución de problemas como perspectiva didáctica y se promueve un aprendizaje por descubrimiento.<br><br>Dimensión epistemológica, se busca que los estudiantes aprendan matemáticas con entendimiento.<br><br>Dimensión ontológica, las matemáticas como ciencia de los patrones. |
| La función del instructor es formular preguntas, y realizar sugerencias de estrategias (heurísticas) para que los estudiantes avancen en el proceso de solución de problemas, con la finalidad de que reflexionen acerca de los contenidos involucrados en la tarea y que comuniquen el resultado de tales reflexiones. | Dimensión didáctica, resolución de problemas como perspectiva didáctica y se promueve un aprendizaje por descubrimiento .<br><br>Dimensión epistemológica, se busca que los estudiantes aprendan matemáticas con entendimiento. |
| Se busca que el escenario instruccional sea un microcosmos matemático, una comunidad de práctica donde se generan significados considerados-como-compartidos. | Dimensión epistemológica, se sostiene una postura socio constructivista del aprendizaje.<br><br>Dimensión ontológica, las matemáticas como ciencia de los patrones. También, aprender matemáticas consiste en llevar a cabo actividades análogas a las de los matemáticos profesionales. |
| Para organizar el proceso de instrucción se tomó como base el ciclo básico para observar el desarrollo de entendimiento matemático (Figura 1), | Dimensión epistemológica constructivista, se considera que el conocimiento es el producto de la interacción entre el objeto y el sujeto, es decir, el aprendizaje requiere de actuar sobre los objetos del conocimiento.<br><br>Dimensión didáctica, el ciclo para desarrollar entendimiento se basa en la perspectiva didáctica de resolución de problemas (cuatro fases de Polya) y tiene como fundamentos, algunos elementos relacionados con la estructura y el funcionamiento del cerebro (Zull, 2002). |
| Las tareas toman en consideración que el conocimiento se genera de lo concreto hacia lo abstracto. | Dimensión epistemológica, epistemología genética de Piaget indica que el origen de todo el conocimiento humano son los esquemas sensoriomotores, a partir de los cuales se van generalizando y abstrayendo las demás formas de conocimiento.<br><br>Dimensión didáctica. El ciclo básico para el desarrollo de entendimiento matemático inicia a partir de acciones que se desarrollan sobre los objetos matemáticos, considerando que lo concreto y lo abstracto son conceptos relativos que dependen |

| | |
|---|---|
| | de los conocimientos previos de las personas. |
| Se buscó que fuera posible resolver las tareas por diferentes rutas o caminos, | Dimensión epistemológica. Se considera que una característica deseable del conocimiento que construyen los estudiantes sea un conocimiento estructurado.<br><br>Dimensión didáctica, resolución de problemas. Se reconoce que el identificar múltiples soluciones es fundamental para el desarrollo de conexiones matemáticas. |

**Fuente**. Elaboración propia con base en Castañeda (2021).

### 3.2.1 Diseño de la tarea “Ranas saltarinas”

Esta tarea utilizó como problema base un juego solitario de ingenio conocido por diversos nombres: ranas saltarinas, ranas y sapos, salto de la rana, ovejas y cabras, liebres y tortugas, cambiar la posición, jumping frogs, golf tee puzzle (Shockey y Bradley, 2006), entre otros (Alvarez, s.f.). En la Wikipedia (Sapos y Ranas, 2021) se menciona que dicho juego fue inventado por Richard Guy (1916-2020), un matemático británico que fue profesor de la Universidad de Calgary, en Canadá, pero otros autores lo atribuyen a Édouard Lucas (Lamagna, 2017), quien fue un destacado matemático francés (1842-1891), a quien se le recuerda por sus trabajos sobre la sucesión de Fibonacci, y a quien se le atribuye también la creación del puzzle de las Torres de Hanoi. Lo que es un hecho es que este problema se puede encontrar en la página 60 del libro Mathematical Recreations & Essays, cuya primera edición se publicó en el año de 1892 (Rouse Ball, 1905), bajo el título *First Problem with Pawns* (**Figura 2**).

*First Problem with Pawns*†. On a row of seven squares on a chess-board 3 white pawns (or counters), denoted in the diagram by "$a$"s, are placed on the 3 squares at one end, and 3 black pawns (or counters), denoted by "$b$"s, are placed on the 3 squares at the other end—the middle square being left vacant. Each piece can move only in one

direction; the "$a$" pieces can move from left to right, and the "$b$" pieces from right to left. If the square next to a piece is unoccupied, it can

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | | $b$ | $b$ | $b$ |

move on to that; or if the square next to it is occupied by a piece of the opposite colour and the square beyond that is unoccupied, then it can, like a queen in draughts, leap over that piece on to the unoccupied square beyond it. The object is to get all the white pawns in the places occupied initially by the black pawns and vice versa.

**Figura 2**. Captura del libro Mathematical Recreations & Essays sobre el problema *First Problem with Pawns.*

El juego consiste en intercambiar las posiciones de las ranas, de color verde y las ranas de color marrón (**Figura 3**), con base en las siguientes reglas:

- Las ranas del lado izquierdo se desplazan siempre a la derecha y las ranas del lado derecho siempre a la izquierda.
- Ranas del mismo o diferente color no pueden ocupar, simultáneamente, una misma posición.
- Se permiten dos tipos de movimientos: (a) los desplazamientos que consisten en llevar una rana a una casilla contigua vacía, (b) los saltos (una rana puede saltar por encima de otra rana de diferente color), siempre y cuando la casilla siguiente esté vacía.

**Figura 3**. Captura de la versión digital del juego ranas (juegosdiarios.com).

En el siguiente enlace pueden visualizar un video con la solución al problema para el caso de tres ranas por cada color: https://www.youtube.com/watch?v=pL_sMCL6e1M. Por otra parte, en la siguiente liga se puede visualizar una explicación del juego con fines didácticos para diversos niveles educativos: https://bit.ly/3nYLqeb.

Este problema se ha analizado en la literatura desde diversas perspectivas, por ejemplo desde el punto de vista matemático, particularmente las propiedades combinatorias del problema (Erickson, 1996), y desde el punto de vista didáctico, enfatizando en la representación de las soluciones como medio para favorecer la idea de modelo y modelización (Ponciano y Sosa, 2018; Shockey y Bradley, 2006). También se han analizado posibles extensiones y variaciones del juego; por ejemplo, una versión bidimensional (Lamagna, 2017). Sin embargo, consideramos que no se ha explotado todo el potencial que la tarea tiene para desarrollar diferentes aspectos del pensamiento matemático.

Esta tarea se desarrolló en diferentes fases. En la primera fase se solicitó que jugaran con dos ranas, después de que él instructor ejemplificó el caso con una rana por color. (En este punto los estudiantes no sabían el objetivo del juego, solo jugaban para ganar las partidas). La segunda fase se basó en abordar otros casos particulares, $n$=3, $n$=4, donde $n$ representa el número de ranas por color. La tercera consistió en organizar la información obtenida de los juegos mediante una tabla, donde los estudiantes tenían que identificar el número de ranas por color y el total de movimientos para ganar las partidas.

Después para analizar si los estudiantes podían encontrar patrones y relaciones, se pide a los estudiantes que calculen el total de movimientos cuando $n$=5, analizar cómo obtienen los resultados y posteriormente preguntar cuando $n$ no es un número consecutivo (es decir, no preguntar cuando n=6) y después los estudiantes puedan obtener una expresión algebraica que les permita calcular el total de movimientos para ganar la partida conociendo el total de ranas por color. Se analizaron las respuestas de los estudiantes y a partir de eso se diseñaron las actividades.

La hoja de trabajo y la ficha técnica de esta actividad se pueden consultar en los apéndices A y B, respectivamente.

### 3.2.2 Implementación de la tarea "Ranas saltarinas"

El proceso de implementación de esta tarea fue como se describe a continuación: se trabajó en la plataforma *Miro* donde los estudiantes y el profesor pueden escribir, dibujar y mover las ranas al mismo tiempo, en la hoja de la plataforma el profesor colocó las instrucciones, misión, reglas del juego, así como los tablero del juego de modo de los estudiantes no lo pudieran mover, también se incluyeron imágenes de ranitas de colores cafés y verdes las cuales si podían mover los estudiantes (**Figura 4**).

Los estudiantes que realizaron la actividad cursaban el tercer grado de secundaria (las edades variaban entre 14 y 15 años), estaban matriculados en una escuela pública ubicada en una comunidad semiurbana del estado de Hidalgo, México. Se eligieron estudiantes de tercer grado de secundaria para que no hubieran revisado previamente temas relacionados con el pensamiento algebraico, y por ello se solicitó el apoyo de un colega del investigador, quien es profesor de secundaria. El profesor titular ofreció otorgar puntos extra, en la calificación final, a los estudiantes del grupo que voluntariamente aceptaran llevar a cabo las actividades, siempre que mostraran interés por desarrollar las tareas.

Se programaron las fechas para implementar las actividades en un lapso de siete días, los equipos no realizaron las actividades al mismo tiempo, fueron en diferentes días. Los cuatro equipos que realizaron la actividad de las ranas saltarinas, quedaron de la siguiente manera: Caso 1 (estudiantes A y B), caso 2 (estudiantes E y F), caso 3 (estudiantes C y D) y caso 4 (estudiantes G, H e I).

La implementación de la actividad se llevó en total una sesión con una duración de entre 45 y 60 minutos (se incluyen todas las fases, desde jugar hasta obtener las expresiones algebraicas). Después de que se indicó a los estudiantes cómo jugar, el instructor realizó algunas preguntas para verificar que en realidad los estudiantes entendieron las indicaciones y la finalidad del juego.


**Figura 4**. Implementación de la actividad en Miro.

Cuando los estudiantes completaron el juego con cuatro ranas por color, el profesor colocó en la plataforma las preguntas o indicaciones de la hoja de trabajo (apéndice A) y se apoyó de la ficha técnica (apéndice B) para realizar cuestionamientos y sugerir heurísticas que podrían ayudar a los estudiantes a identificar y generalizar el patrón. El instructor promovió el trabajo colaborativo y una actitud inquisitiva durante toda la actividad. La actividad terminó cuando los estudiantes determinaron una expresión general para calcular el total de movimientos necesarios para ganar la partida, conociendo el número de ranitas por color. Por ejemplo, "El total de movimientos es igual al número de ranitas por el número de ranitas más dos" y que esta generalización verbal se representa mediante símbolos alfanuméricos, $n(n+2)$ o alguna expresión equivalente.

Es importante resaltar que existe más de una manera para determinar el total de movimientos a partir de descomponer el total de movimientos en factores, potencias y sumas y el profesor en algunas ocasiones sirvió de apoyo para escribir durante la actividad debido a que los estudiantes no habían utilizado la plataforma y escribir con un mouse o en la laptop a veces es complicado.

### 3.2.3 Diseño de la tarea “Granos de trigo”

La tarea se basó en la historia del ajedrez. Aunque hay muchas versiones, el origen del ajedrez sigue siendo un misterio, pero la versión más aceptada sugiere que el ajedrez fue inventado en Asia, probablemente en India, con el nombre de chaturanga, y desde ahí se extendió a China, Rusia, Persia y Europa, donde se estableció la forma del juego vigente

Existe una leyenda que dice que hace mucho tiempo existió un rey que era muy bueno, pero una vez luchando contra un reino enemigo perdió a su hijo en una batalla, por tal motivo se puso muy triste y se aisló en su castillo reviviendo una y otra vez la batalla donde murió su hijo, recreándola de muchas formas, en ninguna podía salvar a su hijo y a su reino al mismo tiempo. Un joven que sabía el dolor que el rey sentía pidió una entrevista con él, luego de muchos intentos logró que el rey le diera la entrevista, el joven mostró al rey el juego del ajedrez, enseñándole su similitud con una batalla real. El rey que era un gran amante de los planes de guerra no tardó mucho tiempo en entender el juego, el joven le enseñó al rey como era de importante sacrificar alguna pieza para ganar la partida (haciéndole ver que el sacrificio que su hijo había hecho fue lo mejor para el reino).

El rey comprendió su error y aceptó la muerte de su hijo, y le dijo al joven que le daría la recompensa que él pidiese, el joven le pidió la siguiente recompensa por la primera casilla del tablero quiero un grano de trigo, por la segunda casilla quiero 2 granos de trigo, por la tercera casilla quiero 4 granos de trigo, por la cuarta casilla quiero 8 granos de trigos y así sucesivamente por las demás casillas, el rey ordenó que entregaran la recompensa inmediatamente y agregó que era un pedido muy poco digno de su generosidad. Pero, efectuados los cálculos correspondientes, recibió una mayúscula sorpresa : No podía pagar la recompensa prometida puesto que la cantidad de granos a entregar equivalía a cosechar toda la superficie terrestre cultivable (conocida en el día de hoy!!) durante más de 10 años !! Así fue como el rey aprendió otra lección a ser prudente y le pidió al joven se quedara en el castillo y trabajara como uno de sus asesores. Hay muchas historias alternativas, en algunas cuentan que el rey no fue tan buena persona y mandó desaparecer al Sisa por quererse burlar de él. Un ejemplo de la historia de Sisa, se puede visualizar en el siguiente video: https://www.youtube.com/watch?v=yfZJq-iEIJE, La historia del origen del ajedrez se puede encontrar a partir de la página 82 del libro *El hombre que calculaba* (figura 5), en el capítulo 16 (Tahan 1938).

-¿Granos de trigo?, exclamó el rey sin ocultar su sorpresa ante tan insólita petición. ¿Cómo voy a pagarte con tan insignificante moneda?

-Nada más sencillo, explicó Sessa. Me daréis un grano de trigo para la primera casilla del tablero; dos para la segunda; cuatro para la tercera; ocho para la cuarta; y así, doblando sucesivamente hasta la sexagésima y última casilla del tablero. Os ruego, ioh rey!, de acuerdo con vuestra magnánima oferta, que autoricéis el pago en granos de trigo tal como he indicado...

No solo el rey sino también los visires, los brahmanes, todos los presentes se echaron a reír estrepitosamente al oír tan extraña petición. El desprendimiento que había dictado tal demanda era en verdad como para causar asombro a quien menos apego tuviera a los lucros materiales de la vida. El joven brahmán, que bien había podido lograr del rey un palacio o el gobierno de una provincia, se contentaba con granos de trigo.

-iInsensato!, exclamó el rey. ¿Dónde aprendiste tan necio desamor a la fortuna? La recompensa que me pides es ridícula. Bien sabes que

**Figura 5**. Captura de un fragmento de la historia del origen del ajedrez del libro El hombre que calculaba.

Esta actividad se desarrolló en varias fases, la primera de ellas consistió en identificar si el enunciado es lo suficientemente claro para que los estudiantes identifiquen el objetivo de la actividad y los datos proporcionados (cantidad de granos que se pagarían a Sisa por la casilla uno, dos, tres y cuatro). La segunda fase consistió en colocar la información obtenida en una tabla, donde los estudiantes identificaran la información que deben colocar por columna y también complementaran la información obtenida agregando el número de granos que pagarían a Sisa por las siguientes casillas (cinco, seis y siete).

El instructor formuló diversas preguntas para identificar si los estudiantes son capaces de calcular el total de granos que le pagarían a Sisa solo conociendo el número de casilla (el instructor puede realizar ejemplos más sencillos, por ejemplo la relación del uno con el dos, el dos con el cuatro, el tres con el seis, la relación es que es el doble), luego se analizó qué tipo de heurísticas podían ser útiles para que el instructor les indique a los estudiantes que las utilicen durante la implementación de la actividad. La última fase consistió en descomponer el total de granos de diferentes maneras para encontrar relaciones entre el número de casilla con las diferentes representaciones del total de granos y así poder realizar conjeturas y obtener una expresión algebraica que permita calcularlo.

La hoja de trabajo y la ficha técnica de esta actividad se pueden consultar en los apéndices C y D, respectivamente.

### 3.2.4 Implementación de la tarea "Granos de trigo"

El proceso de implementación de esta tarea fue como se describe a continuación: Se trabajó también en la plataforma Miro donde se incluía el problema de la actividad de Sisa. Dos equipos realizaron la actividad, el primero de ellos fue el equipo con el caso 5 (estudiantes J y K) y el equipo del caso 4 (estudiantes G, H e I) lo realizó al siguiente día, después de terminar la actividad de las ranitas (único equipo que realizó las dos actividades). También los estudiantes J y K cursaban en la misma escuela y mismo grado. La implementación de la actividad tuvo una duración entre 45 y 60 minutos. Primero un estudiante debe de leer el problema y el instructor realiza algunas preguntas para identificar si los estudiantes entendieron bien los datos proporcionados (por la casilla uno se le pagó a Sisa un grano, por la casilla dos, dos granos, por la casilla tres, cuatro granos y por la casilla cuatro, ocho granos) y el objetivo de la actividad.

Posteriormente, el profesor preguntó sobre el número de granos que debían pagarle a Sisa por la casilla cinco, seis y siete; y solicitó a los estudiantes organizar la información en una tabla (tienen que identificar que una columna es el número de casilla y la otra columna los granos que se le pagarían a Sisa por esa casilla) para facilitar el análisis de la información. El instructor preguntó por el total de granos que se le deben pagar a Sisa hasta la casilla uno, dos, tres o cuatro e identificar si contestan correctamente (no confundir por los granos pagados únicamente por cierto número de casilla, por ejemplo, hasta la casilla dos se le tenían que pagar tres granos, un grano por la primera casilla más los otros dos granos de la segunda casilla).

El estudiante debe encontrar la relación del número de casilla con el total de granos que se le pagaría a Sisa hasta esa casilla, el instructor pregunta si encuentran la relación entre esos números y pueden explicar con ejemplos más sencillos (por ejemplo la relación del uno con el dos, el dos con el cuatro, el tres con el seis, es que el segundo número es el doble que el primero). El instructor debe tomarse algunos minutos para escuchar las propuestas de los estudiantes, si utilizan regla de tres o alguna otra que sea incorrecta a partir de la tabla pueden analizar casos particulares y verificar que son incorrectas las reglas de correspondencia.

En caso de que los estudiantes no identificaran patrones, el instructor debe de agregar más columnas hasta que los estudiantes encuentren alguna relación entre el número de casilla y y el total de granos a pagar (representado diferente manera, por ejemplo para la casilla dos, el total de granos a pagar son 3 y el $3=2^2-1$) y se expresen con algo parecido a "el total de granos es igual a multiplicar el dos por si mismo el número de veces que indiqué el número de casilla menos uno o el dos elevarlo al número de casilla menos uno" o expresarlo mediante la siguiente expresión: $2^n$-1, donde *n* representa el número de casilla.

### 3.2.5 Inclusión de elementos teóricos en el diseño e implementación de tareas

En esta sección se sintetiza cómo los elementos teóricos del marco se tomaron en cuenta para los procesos de diseño e implementación de las tareas.

La postura que se tomó respecto a las matemáticas, sostiene que el conocimiento matemático cambia constantemente y el aprendizaje requiere que los estudiantes lleven a cabo acciones orientadas a descubrir patrones entre objetos matemáticos, a través de la exploración y experimentación que se lleva a cabo a través del uso de diferentes representaciones de esos objetos; a formular tales relaciones como enunciados generales o conjeturas, verbalmente o por escrito (las actividades terminan cuando los estudiantes obtienen una manera de calcular el total de movimientos mínimos para ganar la partida conociendo el número de ranas por color y el total de granos que se le pagaría a Sisa conociendo el número de casilla) ; a diseñar argumentos para justificar resultados (los estudiantes explican cómo se relacionan los datos a partir de descomponer los números de diferentes maneras), es decir, en resumen, las matemáticas son las ciencia de los patrones.

Las actividades se diseñaron de tal manera que representen un reto intelectual de los estudiantes a partir de la identificación de patrones y relaciones con objetos matemáticos (Tomando como base la teoría constructivista donde el conocimiento es producto de la interacción entre el sujeto y el objeto (del conocimiento)) mientras muestran una actitud inquisitiva favoreciendo una comunicación a partir de ideas y conceptos matemáticos entre los mismos estudiantes, el instructor con los estudiantes y viceversa (perspectiva socioconstructivista). Se buscó que el escenario instruccional sea un microcosmos matemático, una comunidad de práctica donde se generan significados considerados-como-compartidos (llevando a cabo actividades análogas a la de los matemáticos profesionales).

El instructor tiene como función formular preguntas y realizar sugerencias de estrategías (heurísticas) para que los estudiantes avancen en el proceso de solución de problemas, con la finalidad de que reflexionen acerca de los contenidos involucrados en la tarea y que comuniquen el resultado de tales reflexiones (una característica de resolución de problemas como perspectiva didáctica, promoviendo el aprendizaje por descubrimiento) y así los estudiantes puedan identificar que las matemáticas se pueden aprender descubriendolas por sí mismo.

El objetivo principal del aprendizaje de las matemáticas debería ser construir significados para los conceptos o ideas matemáticas (Serrano, 1993), normalmente al iniciar los cursos de álgebra se inicia con las leyes de los exponentes y operaciones con expresiones algebraicas, si los estudiantes tienen un acercamiento con este tipo de actividades donde jueguen o resuelvan problemas, interpreten la información, obtengan patrones, realicen conjeturas y determinen una expresión algebraica que les permitan calcular algo, van a darse cuenta que las expresiones algebraicas pueden representar muchas situaciones de la vida cotidiana.

Es importante mencionar que las actividades se pueden resolver de diferentes maneras, dependiendo cual sea el objetivo de la investigación. A partir de descomponer los números de diferentes maneras (una característica del sentido numérico) se pueden obtener diferentes expresiones algebraicas (Radford identificó tres elementos interrelacionados del pensamiento algebraico, el sentido de indeterminación propio de los objetos algebraicas, el manejo analítico de los objetos indeterminados y el modo simbólico para designar tales objetos), la resolución de problemas promueven múltiples soluciones para el desarrollo de conexiones matemáticas. Para ello se utilizó el ciclo de aprendizaje, que está integrado por cuatro fases: acción, observación, formulación de conjeturas y justificación de resultados. En este tipo de actividades el conocimiento se genera de lo concreto a lo abstracto.

## 3.3 Instrumentos de recolección de la información

La información de esta investigación se recolectó a través de los videos que se grabaron al desarrollar las actividades, debido a la pandemia no se pudo trabajar a papel y lápiz. La grabación se efectuó con la herramienta de Google Meet, ya que el docente contaba con privilegios de profesor y pudo llevar a cabo dicha grabación. Posteriormente estas grabaciones se transcribieron (de los cinco casos, tres de ellas se transcribieron completamente y en dos actividades de las ranitas solamente se transcribió a partir que los estudiantes representan la información obtenida en una tabla) y se enumeraron los renglones con la herramienta de Word, tales transcripciones fueron la base del análisis de la información.

También se llevó a cabo un proceso de observación directa participante, donde el observador participa en la situación o fenómeno que observa y busca integrarse al grupo. Este proceso de observación se llevó a cabo mediante grabaciones en video

# 4. RESULTADOS

En este capítulo se exponen los resultados derivados del análisis de la información. Es importante resaltar que los casos están constituidos por cada uno de los equipos que abordaron las tareas, mientras que la unidad de análisis son las líneas de texto, de cada una de las transcripciones de los videos.

## 4.1 Resultados derivados de la tarea "Ranas saltarinas"

En esta sección se analiza con detalle cada uno de los casos que abordan esta tarea con la finalidad de identificar si el descomponer números de diferentes formas contribuyó al desarrollo de algunos de los elementos del pensamiento algebraico: en la hipótesis afirmamos que la habilidad para representar números de diferentes maneras permite al estudiante reconocer con mayor facilidad relaciones y patrones en los números.

### 4.1.1 Caso 1, equipo ranas 1

La pareja de estudiantes tardó aproximadamente 30 minutos para completar el juego con cuatro ranas por color (las partidas desde una rana por color hasta tres, las ganaron en menos de 10 minutos). Posteriormente ordenaron la información en una tabla, en cuya primera columna indicaron el número de fichas por color y en la segunda, el número de movimientos necesarios para completar el juego.

El profesor solicitó a los estudiantes conjeturar cuál es el número de movimientos que se necesitan para ganar la partida con cinco fichas por color, sin jugar. El estudiante A respondió inmediatamente que 35. Al preguntar cómo obtuvo ese resultado, respondió lo siguiente: para determinar el total de movimientos con cinco fichas por color multiplicó cinco por siete. El estudiante identificó que al descomponer el total de movimientos en un producto que incluye como factor al número de ranas, puede obtener la relación entre movimientos con el número de fichas (ranas).

> **Instructor**. En la información obtenida, eso indica que para ganar cuando se tiene una ficha por color, son tres movimientos, para ganar cuando se tienen dos fichas por color son ocho movimientos, para ganar con tres fichas por color son 15 y para 4 son 24. A partir de esto, ustedes me podrían decir..ya no van a jugar. Entonces, voy a colocar otra fila donde son cinco fichas por color. ¿Cuántos movimientos creen…?
> **Estudiante A**. 35
> **Instructor**. Que se van ah…35, ¿Porque 35?

**Estudiante A.** Porque en el primero son este tres movimientos y 1x3 pues tres, en el segundo son cuatro
**Estudiante B**. Si
**Estudiante A.** O sea en el número de fichas se va aumentando el número de la multiplicación
**Estudiante B**. Dos
**Estudiante A**: O sea el primero es 3, después 4, después 5, después 6 y después 7, así que 5x7 treinta y cinco (T1 RANAS, 174-195).

El instructor preguntó si podían obtener una fórmula que generalizara el resultado y obtener el total de movimientos para ganar la partida, a partir del número de fichas (ranas). Aun encontrando esa relación, trataron de utilizar la regla de tres, también buscaron obtener el patrón general, mediante primeras diferencias (del tres con el ocho son cinco, del ocho con el quince son siete, del quince con el 24 son nueve, y que esa diferencia iba aumentando de dos en dos), la cual es una estrategia que se promueve en educación básica para generalizar patrones en secuencias lineales.

Después de algunos cuestionamientos formulados por el instructor, los estudiantes se dieron cuenta de que la regla de tres no se podía utilizar para abordar este problema. El estudiante B indicó que la expresión “equis más dos equis” es una opción, pero la desechó rápidamente. Se observó que el estudiante B, tiene conocimientos previos de álgebra, porque indicó una expresión algebraica que sirve para determinar el número de movimientos para completar el juego con “*n*” fichas, encontró la relación que expresó desde el inicio al responder porque son 35 movimientos con cinco fichas.

**Estudiante B.** Equis, entre paréntesis equis más dos, se cierra el paréntesis.
**Instructor.** Ok, si gustan yo lo coloco por esto [Es tardado escribir sin lápiz], x(x+2). ¿Esto por qué lo estás haciendo?
**Estudiante B**. Ahh, bueno el “x” significa el número de fichas
**Instructor.** Ok, por ejemplo aquí
**Estudiante B**. Y el “x” significa…ay, es que no se expresarme bien…este
**Instructor**. Si, lo coloco aquí, “x” número de fichas
**Estudiante B.** Como, también como el número de fichas pues es uno no, y luego se aumentan dos, pues son tres, y luego uno por tres es uno….mmm, no..unos por tres es tres. (T1 RANAS 263-277).

### 4.1.2 Caso 2, equipo ranas 2

Esta pareja de estudiantes tuvo dificultades para resolver la tarea, dedicaron alrededor de 45 minutos para resolver el problema con cuatro ranas. Posteriormente, cuando tuvieron los datos agrupados en una tabla, el instructor solicitó a los estudiantes que anotaran el número de movimientos necesarios para completar el juego con cinco ranas de cada lado, pero sin jugarlo efectivamente.

El estudiante E respondió que eran necesarios 35 movimientos para completar el juego con cinco ranas, a lo que el instructor le preguntó cómo había obtenido esa respuesta. El estudiante contestó que el primer resultado de la tabla (3) se obtiene multiplicando el número de ranas (1) por 3; el segundo resultado (8) se obtiene multiplicando el número de ranas (2) por cuatro, el tercero multiplicando por 5, y así sucesivamente (**Figura 5**). Lo anterior aporta evidencia de que el descomponer el total de movimientos como un producto que involucra al número de ranas facilitó al estudiante E identificar una regularidad.

> **Instructor**. ¿Cuántos movimientos se necesitan para ganar la partida si ahora son cinco fichas?
> **Estudiante E**. ¿Con cinco fichas? Treinta y cinco, ¿no?
> **Instructor**. ¿Por qué treinta y cinco?
> **Estudiante E**. Porque vi…bueno…[dudando] lo que noté es de que, en la primera ehh… el número de fichas, en este caso [el juego con una rana de cada color] que es uno, lo está multiplicando por tres [lo que quiere decir el estudiante es que el total de movimientos se obtiene al multiplicar uno (ranas de cada color) por tres]. En el segundo es por cuatro, en el tercero es por cinco, en la cuarta es por seis, y siguiendo ese patrón en la cinco era por siete (T2 RANAS 13-23).


**Figura 5**. Identificación de una relación numérica a partir de datos en una tabla.

Después de que los estudiantes identificaron la regularidad mencionada, el profesor preguntó por el número de movimientos necesarios para ganar con 15 fichas por color (un número no consecutivo para observar si respondían 15 por 17). El estudiante F sugirió usar regla de tres y proporcionalidad para responder; mientras que el estudiante F también usó proporcionalidad, pero, finalmente notaron que no son los métodos adecuados.

El profesor anotó una tercera columna donde escribió “otra manera de representar el número de movimientos” a partir de lo que hizo el estudiante E (1x3, 2x4, 3x5, 4x6 y 5x7). El estudiante E mencionó que hay una diferencia de dos y el estudiante F que los factores son impares, luego pares consecutivos. El profesor preguntó si podían generalizar las relaciones encontradas para buscar una manera de obtener el factor mayor (el tres en el uno por tres, el cuatro del dos por cuatro, el cinco del tres por cinco). El comentario del estudiante F aporta evidencia de que los estudiantes están relacionando el número de fichas con el total de movimientos y expresando esa relación verbalmente (álgebra retórica).

> **Estudiante F**. Sería…sería número de fichas más dos es igual al número de movimientos [Se escucha que habla con dudas] (T2 RANAS 197)

Los estudiantes observaron que aún no obtenían la relación completa [faltaba obtener el primer factor]. El estudiante E indicó que se podía obtener a partir de la siguiente expresión: $n(n+2)$.

> **Instructor**. ¿Por qué lo colocas de esa forma?
> **Estudiante E**: Ahh, por que, por decir en el caso, tome como ejemplo el 15, ehh.. 15 es el número de fichas por n+2, en este caso 15 es el número de fichas más dos es 17, lo que hacemos es multiplicar 15 por n+2 que es igual a 17, entonces es 15 por 17 igual a 255 (T2 RANAS 237-241).

### 4.1.3 Caso 3, equipo ranas 3

Esta actividad la realizaron dos estudiantes, en un tiempo aproximado de 36 minutos, hasta obtener el número de movimientos necesarios para completar una partida con cuatro ranas por color. En la primera partida (con una rana) tardaron menos de un minuto, con dos ranas por color 16 minutos, tres ranas por color 16 minutos e identificaron patrones en esos casos particulares, por lo que redujeron significativamente su tiempo con cuatro ranas por color (dos minutos). Posteriormente, organizaron la información obtenida en una tabla de dos columnas (número de ranas por color y total de movimientos para ganar la partida). El instructor preguntó a los estudiantes sobre el número de movimientos se necesitan para ganar la partida con cinco ranas por color. El estudiante C respondió que 35, explicando que observó una relación de multiplicar uno por tres para obtener los tres movimientos, dos por cuatro para obtener los ocho movimientos y así sucesivamente, entonces para obtener el total de movimientos si son cinco ranas por color son cinco por siete dando como resultado 35 movimientos, aportando evidencia que el total de movimientos se puede descomponer como el producto de dos factores y un factor tiene relación con el número de ranitas por color.

> **Instructor**. ¿Y cuatro, y para aquí son veinticuatro, y luego, la siguiente pregunta ¿Cuántos movimientos, cuál es el número de movimientos para ganar la partida y ahora, sin jugar como tal, ya no tengo otro tablero, son cinco ranas por color?, es decir, en total son diez ranas ¿Cuántos movimientos se necesitan para ganar?
> **Estudiante C**. Treinta y cinco.
> **Instructor.** Treinta y cinco, ok ¿Por qué trein..? Bueno, lo coloco y sí es correcto, ¿Por qué treinta y cinco?
> **Estudiante C**. Ah, bueno, es que hay una relación, por ejemplo, en el primer caso, ¿no?, tengo una rana de cada color y para ganar hice tres movimientos, la relación que veo, no sé, es cómo multiplicar este, uno por tres, me da tres, que son los movimientos que hice; en el segundo ejemplo tengo dos ranas de cada color y para los movimientos que obtuve, tuve de cierto modo que multiplicar dos por este, ¿cuatro?
> **Instructor**. Aja.
> **Estudiante C**. Y ya me salió. En la tercera tengo tres ranas de cada color y mis movimientos fueron quince, hay una relación de ¿tres por cinco?
> **Instructor**. Ajaa.
> **Estudiante C**. En el cuarto tengo cuatro ranas por cada color, el número de movimientos para ganar fueron veinticuatro, entonces lo mismo, cuatro por seis, y ahí ya se está viendo la relación de que va aumentando la cantidad conforme aumenta el número de ranas.
> **Instructor.** Ok, entonces para, para cinco ranas que operación hiciste, para obtener el número de ranas con cinco ranas por color.
> **Estudiante C**. Cinco por siete (T3 RANAS 102-124)

El instructor añadió una tercera columna para mostrar otra manera de representar el total de movimientos (1x3, 2x4, 3x5, 4x6, 5x7) y preguntó a los estudiantes por el total de movimientos con 15 ranas por color para identificar a partir de un número no consecutivo (uno, dos, tres, cuatro y cinco ranas por color). La respuesta que obtuvo del estudiante C fue 195 al multiplicar 13 por 15, aquí podemos observar que sigue obteniendo el total de movimientos a partir de un producto donde los dos factores tienen una diferencia de dos. Después identifican mejor la relación identificando el total de movimientos para ganar la partida con 15 ranas por color lo pueden calcular multiplicando 15 por 17, para generalizar el estudiante C propuso la expresión $R(M+2)$. Posteriormente, observó que el total de movimientos lo puede calcular conociendo el número de ranas multiplicado por el número de ranas más dos, abreviándolo como $R(R+2)$ donde $R$ representa el número de ranas, mostrando como evidencia que la respuesta se obtuvo a partir de un producto donde un factor es una suma. Cada factor lo representaron con diferente letra ($R$ y $M$), identificaron que podían utilizar la misma letra ($R$) que representa el número de ranas (pusieron $R$ por ranas) y así pueden determinar el total de movimientos.

**Estudiante C**. Estoy pensando que igual podría quedarse la R como número de ranas, pero cambiar la R.
**Instructor**. ¿Cambiar la N por R?
**Estudiante C**. La M.
**Instructor.** Ok, entonces lo voy a hacer aquí abajito, aquí tu dices que seria R y cambio la M por R, ¿de esta forma?
**Estudiante C**. Sí, así.
**Instructor**. Ok, y ¿esto para ti que representa? Con tus propias palabras, R por R más dos.
**Estudiante C**. Pues podría representar el número de ranas, multiplicado por el número de número, perdón, es que ya me confundí.
**Instructor.** Van bien, van bien, adelante, de hecho vas muy bien, van muy bien las dos.
**Estudiante C**. Sí el número de ranas más dos (T3 RANAS 245-256).

### 4.1.4 Caso 4, equipo ranas 4

Este equipo estuvo integrado por tres estudiantes. Jugaron desde una ranita por color hasta cuatro, el tiempo utilizado fue de 30 minutos aproximadamente y el tiempo total que duró la actividad fue de 60 minutos. El instructor indicó a los estudiantes que organizaran la información en una tabla, cuya primera columna informara sobre el número de ranas por color y en la segunda columna el total de movimientos para ganar la partida.

El instructor pidió a los estudiantes indicar los movimientos necesarios para ganar la partida con cinco ranas por color, pero sin jugarla. El estudiante G indicó que observaba una relación con las raíces cuadradas. El estudiante I buscó aplicar la regla de tres. Después de un par de minutos el estudiante I contestó que 35 movimientos, encontró la relación mediante la exploración de las primeras diferencias (de 3 a 8, la diferencia son 5 movimientos; de 8 a 15, la diferencia son 7), las cuales aumentaban regularmente. Lo anterior es evidencia de que el estudiante I determinó que el total de movimientos se puede descomponer como una suma: el total de movimientos anterior más la diferencia anterior más dos.

**Estudiante I.** De cinco ranas, serian 35 movimientos
**Instructor.** Es correcto, ¿Con seis?
**Estudiante I.** Con seis ranas serían……a ver espere, con seis ranas serían..
**Instructor.** Perdón, con 15.
**Estudiante I.** 48
**Instructor.** 48, correcto, y con 15
**Estudiante H.** Ya tienes el dato fundamental, el cómo se llama, el…
**Estudiante I.** No, si
**Estudiante H.** Ya tienes la proporcionalidad, nadamas falta que le apliques la cantidad de número.
**Instructor.** ¿Qué operación estás realizando?
**Estudiante I.** Mmm yo…suma, seriaaa. Si no me falla o si no estoy mal seria 255
**Instructor.** 255, es correcto, bien, entonces vamos analizando qué es lo que hiciste, que es lo que están haciendo, por ejemplo, en el 35 por que obtuviste 35, ¿que es lo que hiciste?

> **Estudiante I.** Yo lo que hice fue hacer el patron, osea cuantos pasos hacia de, cual es la diferencia entre el 3 y el 5, de los pasos y la diferencia era 5 y después del 8 al 15 cuantos pasos eran y vi que eran 7, entonces los movimientos, si los movimientos pasados fueron 5 le agrego más 2 y ya son 7 pasos, luego del 15 al 24 eran 9, osea que al 7 se le agregaron 2, y entonces en el último que es 24 pasos le agregué 11 pasos y me dio 35 (T4 RANAS 751-781)

Conforme el número de ranas aumenta, el método anterior se vuelve cada vez más laborioso (por ejemplo para calcular el total de movimientos para ganar la partida con 15 ranas por color debe de sumar 3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31), si conoce el número de movimientos para ganar con 14 ranas solo suma 224 más 29 (diferencia anterior) más dos. Los estudiantes observaron que el método no es práctico para calcular, por ejemplo, el total de movimientos para 100 ranas por color.

El estudiante I determinó que se necesitan 255 movimientos para ganar la partida con 15 ranas por color. Luego, el estudiante G indicó que el 255 se puede obtener multiplicando 15 por 17 y observó la relación de ese producto conociendo el número de ranas por color y ejemplificando con 40 y 100 ranas. El estudiante H apoyó la opinión del estudiante G, de que el total de movimientos se puede descomponer como un producto de dos factores, el número de ranas por color y ese número aumentado en dos unidades.

> **Instructor.** Adelante…a ver, por ejemplo, en el 15 de ranas por color, aquí tenemos 15, con la idea que me acaban de presentar anteriormente, ¿Como obtienes el total de movimientos?, ¿Cómo obtienen este 255?, Con la misma idea de esa misma columna. A partir del 15 cómo pueden obtener el 255
> **Estudiante H.** Pues, porque también depende de…ohhh
> **Estudiante G.** El 15
> **Instructor.** Ya comenté que esto es correcto [el 255].
> **Estudiante G.** ¿Puede ser de 15 por 17?
> **Instructor.** Muy bien, 15x17 es 255. Entonces ya están encontrando otra manera de obtener el número de movimientos mínimos
> **Estudiante G.** Ah, que puede ser, el multiplicar [interrumpe H]
> **Estudiante H.** Ohh, ya le entendí profe
> **Estudiante G.** La cantidad de ranas...[interrumpe H]
> **Estudiante H.** Más dos
> **Estudiante G.** Aja
> **Estudiante H.** Ósea, no se si me di a entender, pero, por ejemplo, que son, digamos 15 ranas y después más dos son 17, y yo supongo, que no se, digamos que de
> **Estudiante G.** 17
> **Estudiante H.** Que digamos, de 40, de 40 por 42
> **Instructor.** Aja
> **Estudiante H.** Son 1680 ranas [son movimientos], y que digamos, no sé, como de 100 por 102 son 10200 ranas [movimientos para ganar la partida].(T4 RANAS 965-1001)

La información proporcionada por los estudiantes se agregó en una tercera columna y los estudiantes G y H mencionaron que la manera de calcular el total de movimientos mínimos es igual a la cantidad de ranas por la cantidad de ranas más dos. Lo anterior muestra que no solo pueden representar los números de diferente manera (descomponer un número como un producto o una suma), también pueden relacionar esa información con los procesos de abstracción y de generalización.

> **Instructor.** Ok, entonces, otra manera de representar esto [la tercera columna]..Oh, lo que me acaban de decir, cantidad de ranas más dos, ¿y qué más?, es decir si yo les digo..
> **Estudiante H.** Cantidad de ranas más, por cantidad de movimientos más dos.
> **Instructor.** Cantidad de ranas por cantidad de ranas más dos, ¿así?, bueno deja lo borro
> **Estudiante G.** La cantidad de ranas por..ah, no se
> **Estudiante H.** No, no, no perdón, sería la cantidad de ranas por la cantidad de ranas más dos
> **Estudiante G.** Cantidad de ranas por cantidad de ranas más dos (T4 RANAS 1008-1019)

Al final, el estudiante H determinó que una manera de abreviar "cantidad de ranas por cantidad de ranas más dos" es a partir de la siguiente expresión $r(r+2)$, cambiaron la n por la r para identificar al número de ranitas, se muestra un ejemplo análogo de la evolución de la historia del álgebra iniciando con el álgebra retórica hasta llegar al álgebra simbólica.

> **Estudiante H.** Bueno, un ejemplo, "r" de ranas ahora sí, "r" por "r" más dos
> **Instructor.** Así
> **Estudiante H**. Exacto, exacto
> **Estudiante G.** Y así seria cantidad de ranas por cantidad de ranas más dos
> **Instructor.** Ok, entonces para ustedes la "n" y la "r". ¿Por qué cambiaron de "n" a "r"?
> **Estudiante H.** Para representar a la cantidad de ranas (T4 RANAS 1062-1072).

## 4.2 Resultados derivados de la tarea "Sisa"

En esta sección se analiza con detalle cada uno de los casos que abordan esta tarea con la finalidad de identificar si el descomponer números de diferentes formas contribuyó al desarrollo de algunos de los elementos del pensamiento algebraico. Este caso resulta relevante ya que la composición involucra la representación de los números como sumas y potencias, a diferencia del caso de las ranas, donde la representación adecuada requería una descomposición de los números como un producto. Nuevamente la directriz para el análisis se basa en la hipótesis del trabajo: la habilidad para representar números de diferentes maneras permite al estudiante reconocer con mayor facilidad relaciones y patrones en los números.

### 4.2.1 Caso 5, equipo Sisa 1

La actividad tuvo una duración de 50 minutos, y fue llevada a cabo por dos estudiantes quienes trabajaron colaborativamente. Iniciaron leyendo el problema y el instructor realizó algunas preguntas para identificar si entendieron las instrucciones y el objetivo. Después, el instructor apoyó a los estudiantes para colocar la información obtenida en una tabla, en la primera columna se colocó el número de casilla y en la segunda columna el número de granos que se le tenían que pagar a Sisa por esa casilla. El estudiante J identificó que conforme aumenta un número de casilla, los granos que se pagan por esa casilla se duplican, es decir, por la casilla 1 se tenía que pagar un grano, por la casilla dos, dos granos, por la casilla tres, cuatro granos, por la casilla cuatro, ocho granos.

> **Estudiante J**. Tomando en cuenta mi lógica que el número de granos se va duplicando entonces la 5 vendría siendo 8 por 2 que seria 16, esa es la lógica que estoy encontrando al momento (T5 SISA 71-72)

En la actividad se pide determinar el total de granos que se pagan hasta cierta casilla (del 1 a la 64) conociendo el número de casilla. Se agregó una tercera columna para colocar el total de granos pagados a Sisa hasta la casilla indicada. El estudiante J indicó que hasta la casilla uno se pagó un grano, hasta la casilla dos, tres granos (1+2), hasta la casilla tres, siete granos (3+4), hasta la casulla cuatro, 15 granos (7+8). Después de algunos minutos no obtuvieron la relación de cómo podían obtener el total de granos conociendo el número de casillas, por lo que el instructor agregó una cuarta columna para colocar otra manera de representar el total de granos, 1=2-1, 3=4-1, 7=8-1, es decir se descompuso al número que representa el total de granos como una suma.

Los estudiantes identificaron que, en todas las expresiones numéricas anteriores, el segundo sumando es -1; por lo tanto, centraron su atención en el primer sumando en cada una de las expresiones, y observaron la secuencia 2, 4, 8, 16, 32, 64 y 128. El instructor preguntó si podían representar esos números de otra manera. El estudiante J identificó que los números se van duplicando y el dos es igual a dos por uno, el cuatro es igual a dos por dos, el ocho el igual a cuatro por dos y así sucesivamente, el instructor añadió una quinta columna para colocar otra manera de representar el total de granos (**Figura 6**).

> **Instructor.** A ver, a ver, otra vez, eh, para la primera casilla que comentaste, ¿lo obtienes multiplicando uno por dos?
> **Estudiante K.** Dos por una o uno por dos

**Instructor.** Aja, y luego
**Estudiante K.** En la segunda como es la segunda casilla, se agrega otra casilla, se multiplica cuatro por dos.
**Instructor.** ¿Así?
**Estudiante K.** Y después en la otra se va siguiendo así pero en todas se va multiplicando por dos
**Instructor.** ok, el ocho, ¿Hay otra manera de representarlo?
**Estudiante J**. Cuatro por dos
**Instructor.** Ok, me están indicando que es [escribe 4x2]. ¿El 16?
**Estudiante J.** Ocho por dos
**Instructor.** ¿El 32?
**Estudiante J** y **Estudiante K**: 16 por dos
**Instructor**: ¿EL 64?
**Estudiante J** y **Estudiante K**: 32 por dos
**Instructor**: ¿**Estudiante K** el 128?
**Estudiante J** y **Estudiante K**: 64 por dos (T4 SISA, 221-235).

| Número de casilla | Número de granos | Total de granos | Otra manera de representar el total de granos | Otra mena |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2-1 | 2·1 -1 |
| 2 | 2 | 3 | 4-1 | 2·2-1 |
| 3 | 4 | 7 | 8-1 | 4·2-1 |
| 4 | 8 | 15 | 16-1 | 8·2-1 |
| 5 | 16 | 31 | 32-1 | 16·2-1 |
| 6 | 32 | 63 | 64-1 | 32·2-1 |
| 7 | 64 | 127 | 128-1 | 64·2-1 |

**Figura 6**. Prueba de Sisa 1, tres maneras de representar el total de granos.

Después de algunos intentos para poder representar los números de diferentes maneras el estudiante encontró la siguiente relación: que el 2 se podía descomponer como 2 por 1, el 4 como dos por dos, el 8 como dos por dos por dos, el 16 como dos por dos por dos por dos.

**Instructor.** Ok, diste dos opciones, ok, entonces otra manera de representar al uno es dos por uno menos uno, para el tres de la casilla número dos, dos por dos menos uno, bueno, ustedes vayan indicando, a ver si ya van encontrando algo, a ver, les voy preguntando. Para el número de casilla uno, utilizando la última columna, ¿Como lo representaron?, para la casilla uno, ¿Cuántos granos se le va a pagar a Sisa?
**Estudiante J.** Dos por uno menos uno
**Instructor.** ¿Para la dos?
**Estudiante J.** Dos por dos menos uno
**Instructor.** ¿Para la casilla número tres?
**Estudiante J.** Dos por dos por dos menos uno
**Instructor.** ¿Para la cuatro?
**Estudiante J.** Dos por dos por dos por dos menos uno…creo ya haber encontrado una lógica
**Instructor.** ¿Para la cinco?
**Estudiante J.** Sería dos por dos por dos por dos osea cinco veces, menos uno.

> **Instructor.** Correcto, ¿Para la sexta?
> **Estudiante J.** Sería dos por dos por dos por dos por dos por dos menos uno
> **Instructor.** Muy bien, ¿y para la séptima?
> **Estudiante J.** Dos por dos por dos por dos por dos por dos menos uno, osea siete veces la multiplicación por dos (T5 SISA, 280-298)

Otra manera de representar las cantidades anteriores es como potencias de base dos (dos es igual a dos elevado a la uno, el cuatro es igual a dos elevado a la dos, el ocho es igual a dos elevado a la tres). El estudiante J identificó que el total de granos de Sisa se puede descomponer en una potencia con base dos, donde el número de casilla es su exponente y a esa cantidad se le suma un menos uno. Lo anterior aporta evidencia que el descomponer el total de trigo en un producto de factores con valores de dos y después identificar que se puede expresar como potencia puede ayudar a los estudiantes a obtener relaciones y patrones para encontrar formas de generalizar relacionándolo con el número de casilla.

> **Instructor**: Eso es lo que quiero que diga exactamente, pero nuevamente repito la idea. ¿Qué relación ven entre el número de casilla con lo que tenemos aquí, la otra manera de representarlo?, ¿Qué relación ven del dos con lo que me acaban de comentar?, ¿Qué relación ven del tres con toda esta operación?
> **Estudiante J**: Creo haber encontrado ya una lógica a todo esto, una operación por así decirlo
> **Instructor**: Aja, adelante, ¿Cuál?
> **Estudiante J**: La relación que podría tener el número de casilla con la tercera forma de representar el total sería que el número de casilla sería la potencia para el dos, ósea dos elevado a la uno, o dos elevado a la dos o dos al cuadrado, dos elevado a la tres, dos elevado a la cuatro, dos elevado a la cinco, es una potencia.
> **Instructor**: Ok, ¿dijiste esto?
> **Estudiante J**: Pero no se queda así, no se queda así, sería dos a la uno, dos a la dos, dos a la tres, dos a la cuatro, dos a la cinco, dos a la seis y dos a la siete, eso no sería lo único ya que no daría exactamente lo que buscamos, habría que añadir al final un menos uno, ósea, lo que salga de la potencia menos uno (T5 SISA, 299-313).

En la última sección de la actividad se puede observar que el estudiante J tiene noción de cómo abreviar el total de granos que se le tienen que pagar a Sisa, conociendo el número de casilla: dos elevado a la “*n*” menos uno, donde “*n*” representa el número de casilla. En esta actividad se muestra evidencia de la importancia de poder representar los números de diferentes maneras, al final las operaciones involucradas fueron suma, multiplicación y potencia.

> **Instructor**: Correcto, entonces si te pregunto, ¿Cuántos granos se le pagaron a Sisa hasta la casilla número diez?
> **Estudiante J**: Bueno la operación que seguiría sería dos elevado a la 10 menos uno, siguiente la lógica que acabo de dar
> **Instructor**: Correcto, entonces, qué es lo que me acabas de decir en resumen para encontrar, para determinar el total de granos, que es lo que harías si yo te doy cualquier número de casilla, ¿Como quedaría?
> **Estudiante J**: La operación quedaría como dos elevado a la “n” menos uno, donde “n” representaría el número de casilla que requeriríamos buscar (T5 SISA, 316-324).

### 4.2.2 Caso 4, equipo Sisa 2

Esta actividad la realizaron los mismos tres estudiantes del caso 4 al terminar la actividad de las ranitas saltarinas. La duración de la actividad se redujo a un aproximado de 35 minutos, ya que los estudiantes tenían experiencia previa con la actividad de las ranas. El instructor realizó algunas preguntas para identificar si los estudiantes entendieron las instrucciones de la actividad y su objetivo. Primero los estudiantes colocaron la información que consideraron necesaria en la tabla, la primera columna la relacionaron con el número de casilla y en la segunda columna la cantidad de trigo que se pagaría por esa casilla. Los estudiantes identificaron rápidamente que por la casilla le corresponde un grano de trigo, por la casilla dos, dos granos de trigo, por la casilla tres, cuatro granos de trigo y a partir de eso, conforme aumenta el número de casilla se duplicaban el número de granos por la siguiente casilla.

Se añadió una tercera columna para determinar el total de granos, de forma que cada celda de esta columna era la suma de los granos hasta la casilla anterior más los granos de la casilla que querían calcular (por ejemplo, hasta la casilla dos el total de granos es igual a la suma del grano de la casilla uno más los dos granos de la casilla dos). El estudiante H identificó que a partir de una suma podía calcular el total de granos, pero conforme el número de casillas aumentaba el total de granos crecía muy rápidamente.

> **Estudiante H**: Bueno, las primeritas, si con suma, pero ya unas mayores creo sería algo super ilógico
> **Instructor**: ¿Por qué diferente?, por ejemplo, hasta la casilla cinco, ya me lo dijiste, son 31 [15 más 16], ¿Hasta la casilla número seis?, A ver, los demás, todos
> **Estudiante H**: 63 [31 más 32]
> **Instructor**: Bien, y ¿hasta la casilla número 7?
> **Estudiante H**: 127 [63 más 64]
> **Instructor**: Bien, vamos muy bien, y ahora sí, eso es lo que nos está pidiendo. Aquí, bueno ¿Cómo le colocarías el título aquí? A la tercera columna que estoy haciendo
> **Estudiante H**: Grano en total
> **Estudiante G**: Aja
> **Instructor**: Total de granos
> **Estudiante G**: Total de granos (T4 SISA, 192-213)

El instructor pidió a los estudiantes obtener una relación entre el número de casillas con el total de granos. El estudiante I intentó aplicar una regla de tres. El estudiante H identificó que, al dividir el total de granos por dos, el cociente no es entero (termina en punto cinco porque son números impares). No encontraron más relaciones y el instructor añadió una cuarta columna donde solicitó que se escribiera otra manera de representar el total de granos que se le pagarían a Sisa. El instructor escribió en la plataforma donde el uno lo representó como dos menos uno y el tres como cuatro menos uno.

> **Instructor**: Si, adelante…. Aquí voy a hacer esto, miren, otra manera de representar el total de granos, es decir aquí tenemos el 1, el 3, el 7, el 15, el 31, otra manera de representar el 1. Lo que voy a hacer es lo siguiente, sumarle una unidad a la columna tres y después restárselo, es decir, si allí tenemos el uno, lo voy a colocar de esta manera, 2 menos 1, estamos de acuerdo todos de que dos menos uno es uno, es otra manera de representar al uno, al tres, pues la misma idea, al tres lo puedo representar como cuatro menos uno, al siete.
> **Estudiante I**: Al siete, como ocho menos uno
> **Instructor**: Y así, a ver, correcto, con los demás
> **Estudiante H**: Ah profe, yo lo que haría, sería, por ejemplo, que él, es que la cantidad de trigo por casilla, por ejemplo, es el doble de su antecesor, ¿me entiende?
> **Instructor**: Sí claro
> **Estudiante H**: Cuatro por cuatro, ocho, ocho por ocho, 16 (4x2 y 8x2). Entonces, seria digamos que la casilla 64 (T4 SISA, 273-290)

También el estudiante identificó que al multiplicar por dos los granos que se pagarían por esa casilla y se le resta uno, se obtiene el total de granos.

> **Estudiante H**: Pues es que es la cantidad de trigo por casilla sería el doble del total de granos, pero por alguna extraña razón se le resta uno.
> **Instructor**: Ok
> **Estudiante H**: Siempre se le va a restar uno (T4 SISA, 303-308).

El instructor pidió encontrar relaciones entre el uno con el dos, el dos con el cuatro, el tres con el ocho, el cuatro con el 16. El estudiante H mencionó que el número de casillas se eleva al cuadrado y se obtiene esa relación (cuatro por cuatro son 16, pero con los demás no es acertada). El estudiante G identificó que otra manera de representar el total de granos, de forma que esa representación incluyera los números 2, 4, 8, 16, 32 y 64 es como un producto donde un factor es el dos, por lo tanto, el instructor añadió una quinta columna y escribió lo que mencionó el estudiante H obteniendo otra manera de representar el total de granos.

> **Estudiante G.** A cuatro, dos por dos son cuatro, cuatro por dos son ocho, ocho por cuatro..no, ocho por dos son 16.
> **Estudiante H**: Por dos son 32, de 32 por dos son 64, de 64 por dos son 128.
> **Instructor**: Ok, aquí lo voy a colocar, no pierdan esa idea. Esto es lo que acabas de comentar, ¿Verdad? (escribe el profesor en una quinta columna lo comentado por **Estudiante G**) (T4 SISA, 361-367).

El instructor preguntó si observaban alguna relación entre el número de casilla con la quinta columna. Como los estudiantes no pudieron notar alguna relación, el instructor solicitó encontrar otras maneras de representar los números 4, 8, 16 y 32. A partir de los cuestionamientos del instructor, los estudiantes encontraron otra manera de representar el total de granos donde el cuatro, el ocho, 16, 32, 64 y 132 se pueden descomponer en un producto donde sus factores son números dos.

**Estudiante G**: Aja, por ejemplo, en la primera casilla, bueno en la casilla que está aquí anotada es el dos, dos por dos y en la casilla de abajo dice cuatro por dos, ósea simplemente se van multiplicando, como lo explico
**Instructor**: Van bien
**Estudiante G**: Es que, no sé cómo explicarlo, mmmm.
**Instructor**: Ya se dieron cuenta que estamos representando de otra manera, por ejemplo, a este cuatro...
**Estudiante G**: Ahh o el mismo dos lo podemos representar, ósea por la misma cantidad como aquí en la última esta tablita donde dice el número de uno es igual a dos y dos por dos multiplicado es igual a la, si luego abajo dos por dos por dos
**Instructor**: Aja, y ahora en el de abajo, ¿Cómo le harías?
**Estudiante G**: Dos por dos por dos por dos menos uno
**Instructor**: En el siguiente
**Estudiante G**: Dos por dos por dos por dos por dos menos uno
**Instructor**: Bien
**Estudiante G**: Y luego dos por dos...
**Estudiante I**: Se le va sumando uno ¿no?
**Estudiante G**: Este seis dos menos uno y así igual con la otra, siete dos menos uno
**Estudiante I**: Siete dos menos uno
**Instructor**: Muy bien
**Estudiante I**: Ah, ya entendí (T4, SISA 456-491)

El estudiante G identificó la relación del total de granos representados en la última columna con el número de casilla.

**Estudiante G**: ¿Que dos es multiplicado por la misma cantidad de cada casilla?
**Instructor**: Aja
**Estudiante G**: Y se divide uno
**Instructor**: Divide
**Estudiante G**: Hay
**Instructor**: ¿Porque divide?
**Estudiante G**: No, y se resta uno, perdón (T4 SISA 503-515)

Otra manera de representar un número que se multiplica varias veces por sí mismo, es como una potencia. El estudiante H identificó que es más sencillo encontrar la relación solamente colocando como base el número dos y el exponente es el número de casilla (**Figura 7**, quinta columna), de esta manera los estudiantes a partir del álgebra retórica pudieron calcular, mediante una expresión general en notación alfanumérica, el total de granos conociendo el número de casilla.

**Instructor**: Con sus propias palabras, ¿Cómo podrían calcular el total de granos conociendo el número de casilla?
**Estudiante I**: Mmmmm
**Estudiante G**: Que en la cantidad de las casillas se multiplica por dos y se resta uno
**Estudiante H**: Oiga profe, el procedimiento está bien de los dos por dos por dos, pero creo que es mucho revoltijo, no, yo lo que hubiera hecho sería dos a la séptima potencia para más fácil
**Instructor**:
número de casilla menos uno (T4 SISA, 526-538 y 569-587).

| Total de granos | Otra manera de representar el total de granos | Otra manera 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\times 2$ 2-1 | 2-1 | 2-1 | $2^1-1$ |
| 3 | 4-1 | ·2·2-1 | 2·2-1 | $2^2-1$ |
| 7 | 8-1 | 4·2-1 | 2·2·2-1 | $2^3-1$ |
| 15 | 16-1 | 8·2-1 | 2·2·2·2-1 | $2^4-1$ |
| 31 | 32-1 | 16·2-1 | 2·2·2·2·2-1 | $2^5-1$ |
| 63 | 64-1 | 32·2-1 | 2·2·2·2·2·2-1 | $2^6-1$ |
| 127 | 128-1 | 64·2-1 | 2·2·2·2·2·2·2·1 | $2^7-1$ |

**Figura 7**. Prueba de Sisa 2, cinco maneras de representar el total de granos

Por último, el instructor pidió a los estudiantes que abreviaran lo más posible lo comentado anteriormente (pasando del álgebra retórica a la simbólica).

> **Instructor.** Y resumido, bueno, lo más abreviado posible, ¿Como lo representarían?
> **Estudiante H**: Dos “nc” menos uno
> **Instructor**: Nc ¿qué es?
> **Estudiante H**: Nc, número casilla, n punto c, número de casilla (T4 SISA 592-598)

**Tabla 3**. Resultados de las actividades de “Ranas saltarinas” y “Sisa”

| Número de caso | Actividad | Resultados |
|---|---|---|
| 1 | Ranas saltarinas 1 | • El estudiante A identificó que al descomponer el total de movimientos en un producto que incluye como factor al número de ranas, puede obtener la relación entre movimientos con el número de fichas (ranas).<br>• Los estudiantes A y B trataron de utilizar la regla de tres y también buscaron obtener el patrón general, mediante primeras diferencias.<br>• Se observó que el estudiante B, tiene conocimientos previos de álgebra, porque indicó una expresión algebraica que sirve para determinar el número de movimientos para completar el juego con “*n*” fichas. |
| 2 | Ranas saltarinas 2 | • El estudiante E identificó que al descomponer el total de movimientos como un producto que involucra al número de ranas.<br>• El estudiante F sugirió usar regla de tres y proporcionalidad para responder; mientras que el estudiante F también usó proporcionalidad.<br>• El comentario del estudiante F aporta evidencia de que los estudiantes están relacionando el número de fichas con el total de movimientos y |

| | | |
|---|---|---|
| | | expresando esa relación verbalmente (álgebra retórica), "sería número de fichas más dos es igual al número de movimientos".<br>● El estudiante E determino que el total de movimientos se podía obtener a partir de la siguiente expresión: $n(n+2)$. |
| 3 | Ranas saltarinas 3 | ● El estudiante C observó una relación para obtener el total de movimientos para ganar la partida, al multiplicar uno por tres se obtienen los tres movimientos, dos por cuatro son los ocho movimientos y así sucesivamente, aportando evidencia que el total de movimientos se puede descomponer como el producto de dos factores y un factor tiene relación con el número de ranitas por color.<br>● El estudiante C propuso la expresión $R(M+2)$ para calcular el total de movimientos. Posteriormente, observó que el total de movimientos lo puede calcular conociendo el número de ranas multiplicado por el número de ranas más dos, abreviándolo como $R(R+2)$ donde $R$ representa el número de ranas, mostrando como evidencia que la respuesta se obtuvo a partir de un producto donde un factor es una suma. |
| 4 | Ranas saltarinas 4 | ● El estudiante G indicó que observaba una relación con las raíces cuadradas. El estudiante I buscó aplicar la regla de tres.<br>● El estudiante I contestó que se necesitan 35 movimientos para ganar la partida con cinco ranas por color, encontró la relación mediante la exploración de las primeras diferencias (de 3 a 8, la diferencia son 5 movimientos; de 8 a 15, la diferencia son 7), las cuales aumentaban regularmente. Lo anterior es evidencia de que el estudiante I determinó que el total de movimientos se puede descomponer como una suma: el total de movimientos anterior más la diferencia anterior más dos.<br>● Los estudiantes H y G identificaron que el método de las primeras diferencias es muy laborioso si el número de ranas por color es grande por lo que necesitan encontrar otra manera de calcularlo.<br>● Los estudiantes H y G mencionaron que la manera de calcular el total de movimientos mínimos es igual a la cantidad de ranas por la cantidad de ranas más dos. Lo anterior muestra que no solo pueden representar los números de diferente manera (descomponer un número como un producto o una suma), también pueden relacionar esa información con los procesos de abstracción y de generalización.<br>● El estudiante H determinó que una manera de abreviar "cantidad de ranas por cantidad de ranas más dos" es a partir de la siguiente expresión r(r+2), cambiaron la n por la r para identificar al número de ranitas, se muestra un ejemplo análogo de la evolución de la historia del álgebra iniciando con el álgebra retórica hasta llegar al álgebra simbólica. |
| 5 | Sisa 1 | ● El estudiante J identificó que el total de granos de Sisa se puede descomponer en una potencia con base dos, donde el número de casilla es su exponente y a esa cantidad se le suma un menos uno. Lo anterior aporta evidencia que el descomponer el total de trigo en un producto de factores con valores de dos y después identificar que se puede expresar como potencia puede ayudar a los estudiantes a obtener relaciones y patrones |

| | | |
|---|---|---|
| | | para encontrar formas de generalizar relacionándolo con el número de casilla.<br>● El estudiante J tiene noción de cómo abreviar el total de granos que se le tienen que pagar a Sisa, conociendo el número de casilla: dos elevado a la "*n*" menos uno, donde "*n*" representa el número de casilla. En esta actividad se muestra evidencia de la importancia de poder representar los números de diferentes maneras, al final las operaciones involucradas fueron suma, multiplicación y potencia. |
| 4 | Sisa 2 | ● El estudiante H identificó que a partir de una suma podía calcular el total de granos, pero conforme el número de casillas aumentaba el total de granos crecía muy rápidamente.<br>● El estudiante I intentó aplicar una regla de tres (para relacionar el número de casillas con el total de granos). El estudiante H identificó que, al dividir el total de granos por dos, el cociente no es entero (termina en punto cinco porque son números impares).<br>● El estudiante G identificó que otra manera de representar el total de granos, de forma que esa representación incluyera los números 2, 4, 8, 16, 32 y 64 es como un producto donde un factor es el dos.<br>● Los estudiantes encontraron otra manera de representar el total de granos donde el cuatro, el ocho, 16, 32, 64 y 132 se pueden descomponer en un producto donde sus factores son números dos.<br>● Otra manera de representar un número que se multiplica varias veces por sí mismo, es como una potencia. El estudiante H identificó que es más sencillo encontrar la relación solamente colocando como base el número dos y el exponente es el número de casilla, de esta manera los estudiantes a partir del álgebra retórica pudieron calcular, mediante una expresión general en notación alfanumérica, el total de granos conociendo el número de casilla. |

**Fuente**. Elaboración propia

# 5. ANALISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

## 5.1 Introducción

En esta sección se sintetizan los resultados de la investigación. Se lleva a cabo una discusión de los resultados, comparando lo que se obtuvo con lo obtenido por otras investigaciones semejantes. Se identifican fortalezas y debilidades del estudio. Finalmente se bosqueja algunas líneas futuras de investigación.

## 5.2 Respuesta a las preguntas de investigación

Las preguntas de investigación de esta tesis son: ¿De qué manera influyen las diferentes representaciones de los números y las operaciones en el desarrollo del pensamiento algebraico? ¿Cómo influye el sentido de representar los números de diferentes formas en los elementos que constituyen el pensamiento algebraico?

Con base en los resultados, la respuesta a las preguntas es la siguiente:

Se identificó que cuando los estudiantes pueden representar las cantidades de diferentes maneras, como en la actividad de las ranas, donde al expresar el total de movimientos expresar como un producto y en la actividad de Sisa, al expresar el total de granos como una potencia, facilitó a los estudiantes el proceso de identificar los patrones y regularidades subyacentes en un conjunto de datos numéricos organizados tabularmente. La identificación de tales patrones también facilitó el proceso de expresar verbalmente la regularidad (álgebra retórica) y, posteriormente, de forma simbólica. A partir de los anterior, los estudiantes comprendieron que las expresiones algebraicas pueden representar relaciones numéricas que aparecen en ciertos fenómenos (los juegos o puzles). Los párrafos que aparecen a continuación son casos específicos que sustentan la respuesta previa:

En la actividad de las ranas saltarinas, los estudiantes jugaron las partidas iniciando con una rana por color hasta cuatro ranas. Obtienen la información, la representan y ordenan en una tabla, donde deben de calcular el total de movimientos que se necesitan para ganar con cinco ranas por color, se hace presente el sentido numérico, donde los estudiantes deben de realizar estimaciones, algunos métodos utilizados son la regla de tres, proporciones y primeras diferencias, la única opción útil en esta actividad es la primera diferencia. El estudiante H conjeturó que para calcular el total de movimientos cuando el número de ranas por color es grande (por ejemplo 50), el método no es práctico (tienen idea del total de sumas que deben de realizar, lo cual es laborioso).

Representar los números de diferentes maneras fue una parte crucial de la actividad para poder realizarla con éxito, los estudiantes identificaron que el descomponer el total de movimientos para ganar la partida como un producto que involucra al número de ranas por color puede ayudarlos a encontrar una regularidad, también conjeturaron que la diferencia entre los factores fue de dos unidades (por ejemplo con una rana por color son tres movimientos y se puede descomponer como 1x3, con dos ranas por color son ocho movimientos y se puede descomponer como 2x4). Algunos estudiantes después de observar estas regularidades, aún querían utilizar reglas de tres cuando el número de ranas que preguntó el instructor (15) no fue consecutivo (uno, dos, tres, cuatro y cinco, no se preguntó con seis ranas por color). Analizando casos particulares, los estudiantes podían determinar si las reglas de correspondencia eran correctas o incorrectas.

En el caso tres, el estudiante C indicó que el total de ranas se podía obtener a partir de $R(M+2)$, después comentó lo siguiente "Pues podría representar el número de ranas, multiplicado por el número de número, perdón, es que ya me confundí…..si el número de ranas más dos" (álgebra retórica, donde el estudiante mediante una oración indica una manera de calcular el total de movimientos conociendo el número de ranas por color). Posteriormente cambió la expresión algebraica a $R(R+2)$ donde $R$ representa al número de ranas por color (álgebra simbólica). En los 4 casos de la actividad de las ranas saltarinas los estudiantes obtuvieron expresiones algebraicas análogas, ya sea $R(R+2)$ o $n(n+2)$ donde también mediante una oración mencionaron que para obtener el número de movimientos totales podían ser calculados multiplicando el número de ranas por color por el número de ranas por color más dos. Durante la implementación de las actividades se pueden identificar los tres elementos interrelacionados que distinguen al pensamiento algebraico mencionado por Ratford, primero le dieron un sentido de indeterminación a los objetos matemáticos, donde $R$ o $n$ representaba el número de ranas por color y lo utilizaban como variable, en segundo lugar, se encuentra el manejo analítico de los objetos indeterminados, el cual se refiere a que se opera a los símbolos considerando que son conocidos tales valores con la finalidad de obtener condiciones necesarias y suficientes para su existencia, para posteriormente trabajar hacia atrás y encontrar los valores específicos. La tercera característica se refiere al modo simbólico para designar a tales objetos (verbal, alfanumérico, etcétera). Los estudiantes determinaron una expresión algebraica para determinar el total de movimientos para ganar la partida y se convencieron que sustituyendo a la variable por el número de ranas por color obtenían la respuesta.

En la actividad de las ranitas, la relación que encontraron los estudiantes fue el número de ranas por color por el número de ranas por color más dos [n(n+2)], donde descompusieron el total de movimientos en un producto y la diferencia de estos factores es dos. Otras maneras de obtener otra expresión algebraica es indicando el número de ranitas por color al cuadrado mas el doble del número de ranitas por color $(n^2 + 2n)$ y el número de ranitas mas uno elevado al cuadrado menos uno [$(n+1)^2$-1].

En la actividad de Sisa, a partir de colocar la información en la tabla, tomó más tiempo para que los estudiantes obtuvieran alguna expresión algebraica que permita calcular el total de granos que se le pagaría a Sisa conociendo el número de casilla. Primero, los estudiantes identificaron que conforme aumentaba un número de casilla, los granos que se pagaban por la casilla se duplicaban. Al organizar los datos en una tabla también observaron que lo que se tenía que calcular fue el total de granos que se le pagar a Sisa hasta cierto número de casilla, no solamente los que se pagaban por una casilla en específico, se agregó la información en una tercera columna y los datos se calcularon sumando el total de granos hasta la casilla anterior más los granos de la casilla indicada. Los estudiantes no pudieron encontrar alguna relación entre el número de casilla con el total de granos, (el uno con el uno, el dos con el tres, el tres con el siete, el cuatro con el 15), algunas opciones fueron conocimientos previos como la regla de tres, primeras diferencias, proporcionalidad, también intentaron descomponer los números en un productos, sumas y potencias donde la base fuera el número de casilla pero no obtuvieron ninguna regla de correspondencia que fuera útil. Posteriormente se agregaron más columnas para poder representar el total de granos de diferentes maneras hasta poder encontrar la relación con el número de casilla.

Una relación muy importante fue que el 2 se podía descomponer como 2 por 1, el 4 como dos por dos, el 8 como dos por dos por dos, el 16 como dos por dos por dos por dos. En los dos casos al implementar esta actividad los estudiantes identificaron que el total de granos se obtiene multiplicando el dos por si mismo la cantidad de veces que indique el número de casilla (por ejemplo, en para obtener el total de granos hasta la casilla tres, se puede obtener multiplicando dos por dos por dos menos uno). Los estudiantes H y J identificaron que es más sencillo encontrar la relación solamente colocando como base el número dos y el exponente es el número de casilla, de esta manera los estudiantes a partir del álgebra retórica pudieron calcular, mediante una expresión general en notación alfanumérica, el total de granos conociendo el número de casilla $[(n+1)^2-1]$., donde *n* es el número de casilla. Lo anterior aporta evidencia que el descomponer el total de trigo en un producto de factores con valores de dos y después identificar que se puede expresar como potencia puede ayudar a los estudiantes a obtener relaciones y patrones para encontrar formas de generalizar relacionándolo con el número de casilla.

### 5.3 Alcances y limitaciones del trabajo

El estudio se realizó con un pequeño grupo de estudiantes del tercer grado de secundaria, en una escuela pública ubicada en una comunidad semiurbana. Por este hecho, los resultados no se pueden extender o generalizar ya que pueden ser diferentes si se aplica el estudio a otro grupo de estudiantes con diferentes características.

Una posible forma de robustecer las conclusiones de este trabajo podría basarse en:

a) Ampliar el tamaño de casos realizados por actividad, así como el periodo de aplicación de las tareas para observar y analizar de qué manera influyen las diferentes representaciones de los números y las operaciones en el desarrollo del pensamiento algebraico.
b) Implementar las actividades con estudiantes de diferente nivel educativo y comunidades.
c) Diseñar más actividades de identificación de patrones, por ejemplo, una que se relacione con las torres de Hanoi.
d) Analizar la influencia de la actividad del profesor durante el desarrollo de las tareas para mejorar las hojas de trabajo y fichas técnicas.

Las hojas de trabajo y fichas técnicas son un gran apoyo para el estudiante y para el instructor, aunque el instructor cuente con experiencia, es mejor ya tener a la mano la ficha técnica para identificar el objetivo de aprendizaje, el objetivo del problema base, instrucciones, población objetivo, indicaciones o sugerencias durante la implementación y las heurísticas claves durante el proceso de implementación. Las fichas pueden ir mejorando entre más actividades se implementen.

### 5.4 Reflexiones finales

Una reflexión importante es que las actividades de investigación y docencia están estrechamente relacionadas, aunque presentan diferencias fundamentales. En el caso de la investigación, es necesario restringir el fenómeno de estudio, mediante la pregunta de investigación, con la finalidad de poder obtener una respuesta documentada para dicha pregunta, a diferencia de cuando nos encontramos en el salón de clase, donde están todas las variables que impactan en el fenómeno de aprendizaje matemático. Por otro lado, en la investigación hay que precisar muy bien los constructos utilizados en el marco teórico o conceptual, y no es posible mezclar aproximaciones o puntos de vista que no sean compatibles.

Por ejemplo, conductismo y constructivismo, a diferencia de lo que ocurre en la práctica educativa donde los docentes pueden echar mano de todo aquello que tengan a su alcance con la finalidad de dar una respuesta inmediata a las contingencias en el aula, ya que no se tiene el tiempo suficiente para realizar un proceso de reflexión profunda como cuando se desarrolla una actividad investigativa. En el senxtido previo es que el profesor, a diferencia de un investigador, es un ¿bricoleur?. Un bricoleur es una persona que repara cosas o resuelve problemáticas, en el acto, con los materiales que tiene a mano, dándoles usos novedosos (Gravemeijer, 2004; Scribner, 2005). “The bricoleur is one who tinkers with the materials at hand” (Reilly, 2009, p. 376). Así, un profesor puede considerarse un tipo de MacGyver[1] educativo, que resuelve los problemas de enseñanza y aprendizaje que aparecen en el aula con los recursos teóricos o prácticos que tiene a su disposición, ya que la solución de tales

[1] https://es.wikipedia.org/wiki/MacGyver

problemáticas no puede esperar y debe abordarse y resolverse, de alguna manera, al momento.

En las aulas de clases en general es necesario que se diseñen e implementen actividades de identificación y generalización de patrones para que los estudiantes desarrollen elementos del pensamiento algebraico, desde identificar patrones numéricos, establecer generalidades y usar signos para representar números. Se pueden iniciar con patrones de repetición, después con patrones con sucesiones lineales y posteriormente con sucesiones de segundo grado o patrones que se puedan generalizar a partir de potencias, multiplicaciones y divisiones.

Se considera que las actividades cumplieron con el objetivo de involucrar a los estudiantes en la práctica de hacer matemáticas y, como resultado, desarrollaran un sentido de la disciplina, consistente con el que sostienen los matemáticos profesionales. Desde la perspectiva de resolución de problemas, donde las matemáticas se definen como la ciencia de los patrones formales, las matemáticas consisten en problemas y sus soluciones, el escenario instruccional debe reflejar, en alguna medida, el escenario profesional de los matemáticos al crear nuevo conocimiento disciplinar (Schonfeld, 1994); la mejor forma de aprender algo es descubrirlo por uno mismo (Polya, 1963), resolver problemas es la actividad fundamental para aprender matemáticas con entendimiento.

Representar los números de diferentes maneras fue una parte crucial de la actividad para poder realizarla con éxito, además de que las actividades se pueden resolver con múltiples soluciones. Desarrollar el sentido numérico en los estudiantes es de gran relevancia para que también desarrollen su pensamiento algebraico.

Con base en lo que se observó, se recomendaría realizar un estudio similar con un número mayor de actividades y de estudiantes (divididos por casos), ya que se considera que dos actividades y cinco casos no son suficientes para realizar una investigación robusta.

# 6. REFERENCIAS


Álvarez García, J. L. (s.f.). Ranas y sapos. Recuperado el 17 de enero de 2022 de http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/primaria/actividades/aritmetica/patrones/ranas_y_sapos/actividad.html

Andini, W., & Suryadi, D. (2017). *Student Obstacles in Solving Algebraic Thinking Problems.* Journal of Physics: Conference Series.

Ary, D., Jacobs, L. C., Sorensen, C., & Razavieh, A. (2009). *Introduction to research in education* (8th edition). Beltmont, CA: Wadsworth, Cengage Learning.

Ayu-Apsar, R., Indra-Putri, R., Sariyasa, Abels, M., y Prayitno, S. (2020). *Geometry representatión to develop algebraic thinking: A recommendation for a pattern investigation in pre-algebra class*. Journal on Mathematics Education, 11, 45-58.

Barrera, F., & Reyes, A. (2013). Cognitive processes developed by students when solving mathematical problems within technological environments. The Mathematics Enthusiast, 10.

Barrera, F., & Reyes, A. (2016). Design technology-based tasks for enhancing mathematical understanding through problem solving. (L. D. Uden L., Ed.) Learning Technology for Education in Cloud, 183-192.

Barrera-Mora, F., Reyes-Rodriguez, A., Campos-Nava, M., y Rodriguez-Alvarez, C. (2021). Resolución de problemas en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. PADI Boletín Científico de Ciencias e Ingenierías del ICBI, 9 (especial), 10-17.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open University Press.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), Proceedings of the 28th International Group of the Psicology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Booker, G., & Windsor, W. (2010). *Developing Algebraic Thinking: using problem-solving to build*. Procedia Social and Behavioral Sciences, 8, 411-419.

Boyer, C. B  y Merzbach, U. (2011). A History of Mathematics (Third edition). New Jersey: Wiley.

Butto, Z. C., & Rojano, C. T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, *22*(3), 55-86.

Carraher, D., Schliemann, A., & Brizuela, B. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. En M. L. Fernández (ed.), *Proceedings of the Twenty-Second Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Castañeda Vargas, A. (2021). *Diseño de tareas con tecnologías digitales desde una perspectiva de resolución de problemas*. Tesis de Maestría, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B. y Perlwitz, M. (1991). Assessment of a Problem-Centered Second-Grade Mathematics Project. Journal for Research in Mathematics Education, 22, 1-27.  Recuperado el 17 de marzo de 2022 de https://www.jstor.org/stable/749551?read-now=&seq=1

Eisenhart, M. A. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education researchers. In R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 202-219.

Eisenhardt, K. M. (1991). Better stories and better constructs: The case for rigor and comparative logic. *Academy of management review, 16* (3), 620-627.

Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. *SUMA, 5* (1), 23-34.

Erickson, J. (1996). New toads and frogs results. In R. J. Nowakowski (Ed.), *Games of No Chance, Mathematical Sciences Research Institute Publications 29* (pp. 299-310). Cambridge: Cambridge University Press.

Eudave, D. (1998). El aprendizaje del álgebra y sus dificultades. Una exploración a través del estudio de errores. Caleidoscopio, 4, 50-52.

Geofrey, J., Siew, N., Lee, B., (2016). Students' Algebraic Thinking and Attitudes towards Algebra: The Effects of Game-Based Learning using Dragonbox 12 + App. T*he Research Journal of Mathematics and Technology, 5*(1), 66-79.

Gravemeijer, K.. (2004). Learning Trajectories and Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education . Department of Educational Research, Utrecht University, 1, 1-14.

Greeno, J. G. (1991). Number Sense as Situated Knowing in a Conceptual Domain. J*ournal for Research in Mathematics Education, 22* (3), 170-218.

Halmos, P. (1980). The American Mathematical Monthly publicada en The Heart of Mathematics. Mathematical Association of America, pp. 519-524. Recuperado el 16 de marzo de: https://www.jstor.org/stable/2321415?origin=JSTOR-pdf

Hendroanto, A., van Galen, F., van Eerde, D., Prahmana, R.C.I., Setyawan, F., & Istiandaru, A. (2018). Photography activities for developing students' spatial orientation and spatial visualization. Journal of Physics: Conference Series, 943(1), 012029.

Hiebert, et al. (1997). Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth, NH: Heinemann.

Jureczko, J. (2017). The strategies of using a special kind of number patterns in different stages of education. Academic Journals, 12(12), 643-652.

Leikin. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. The fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERBE-5), pp. 2330-2339

Kaput, J. J., & Blanton, M. L. (2000). Algebraic reasoning in the context of elementary mathematics: Making it implementable on a massive scale. Reporte de Proyecto financiado por Office of Educational Research and Improvement (ED), Washington, DC.

Kazdin, A. E. (1982). *Single-case designs: Methods for clinical and applied settings*. New York: Oxford University Press.

Kazdin, A. E. (2016). *Research design in clinical psychology*. Boston, MA: Pearson.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times* (Volume 1). New York: Oxford University Press.

Kolb, D. (1984). Experiential Learning: Experience as the source of learning and development. Prentice Hall.

Kusumaningsih, W., Darhim, Herman, T. & Turmudi. (2018). Improvement algebraic thinking ability using multiple representation strategy on realistic mathematics education. *Journal on Mathematics Education, 9*(2), 281-290.

Lamagna, E. A. (2017). Frogs + Puzzles = Algorithmic Thinking. *Journal of Computing Sciences in Colleges, 31* (6), 111–119.

Lesh, R. y H. M. Doerr, “Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving”, en R. Lesh y H. Doerr (eds.) Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching, Mahawah, NJ, USA, 2003, Lawrence Erlbaum Associates.

Lester, J. F. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 37* (6), 457-461.

Lima, B. (2018). Entendimiento de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma: Tareas con patrones. (Tesis maestría). Pachuca, Hgo.: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH).

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-8

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. *Revista IRICE, 13*, 105-132.

Marczyk, G., DeMatteo, D., & Festinger, D. (2005). Essentials of research design methodology. Journal on Mathematics Education.

Molina, M., Ambrose, R., & Castro, E. (2004). *In the transition from arithmetic to algebra: misconceptions of the equal sign.* Bergen: Comunicación presentada en 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Morales, R. (2018). *Resolución de tareas que involucran patrones cualitativos y cuantitativos por estudiantes de 6-7 años.* (Tesis doctoral). Granada.: Universidad de Granada.

NTCM. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Papini, M. C. (2003). *Alagunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra*. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 6(1), 41-72.

Piaget, J. (1977). *Epistemología genética*. Argentina: Solpus.

Polya, G. (1945). How to solve it. EEUU: Princeton University Press

Polya, G. (1963). On Learning, Teaching, and Learning Teaching. The American Mathematical Monthly publicada en The Heart of Mathematics, pp. 605-619.

Ponciano Bustos, E., y Sosa Guerrero, L. (2018). Reflexión sobre el conocimiento del profesor. El caso de la enseñanza de la derivada. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, 11*, 53-66.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto del Al-khwarizmi restaurado. In F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 109-131). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro (Ed.), *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: Universidad de Granada.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4* (2), 37-62.

Reilly, M. A. (2009). Opening spaces of possibility: The teacher as bricoleur. *Journal of Adolescent & Adult Literacy, 52* (5), 455-459.

Reys, B. J. (Junio de 1994). Promoting Number Sense in the Middle Grades. *Mathematics teaching in the middle school, 1*(2), 114 - 120.

Rouse, B. (1892). Mathematical Recreations and Essays. Cambridge, 60-61.

Sampieri, R., Collado, C. y Lucio, P.. (2006). Metodologia de la investigaci6n. Mexico, D. F: McGraw-Hill .

Sapos y ranas (Agosto 2, 2021). En Wikipedia. Recuperado el 17 de enero de 2021 de https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Sapos_y_Ranas&oldid=137411550

Santos Trigo, M. (1984). Reflexiones acerca de un esquema alternativo para la enseñanza de la matemática. *Higher Education Journal, 13* (50). Recuperado el 7 de marzo de 2022 de http://publicaciones.anuies.mx/journal/50.

Santos Trigo, M. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. Cinvestav, IPN.

Santos-Trigo. (2012). El Papel de la Resolución de Problemas en el Desarrollo. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática., pp. 151-163.

Santos-Trigo y Camacho M. (2018). La Resolución de Problemas Matemáticos y el Uso de Tecnología Digital en el Diseño de Libros Interactivos. Education Siglo XXI. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia., pp. 21-40.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In I. D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning.

Schoenfeld, A. H. (1994). Mathematical thinking and problem solving. Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, pp. 53-69.

Scribner, J. P. (2005). The problems of practice: Bricolage as a metaphor for teachers' work and learning. *The Alberta Journal of Educational Research, 51* (4), 295-310.

Serrano, M. A. (1993). Didáctica de las Matemáticas. *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 8*, 173-194.

Shockey, T. L., & Bradley, D. M. (2006). An engaging puzzle to explore algebraic generalization. *Mathematics Teacher, 99* (8), 532-537.

Simon, M. A. (1994). Learning Mathematics and Learning to Teach: Learning Cycles in Mathematics Teacher Education. Educational Studies in Mathematics, pp. 71-94.

Sowder, J. T. (1992). Making Sense of Numbers in School Mathematics. En G. Leinhard, R. Putman y R. A. Hattrup (eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 1-51). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Spangenberg, D., & Pithmajor, A. (2020). Grade 9 Mathematics Learners' Strategies in Solving Number-Pattern Problems. E*urasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(7), 1-15.

Stake R.E.. (2007). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata.

Steen, L. A. (1988). The Science of Patterns. Science, 240(4852), 611-616.

Tahan, M. (1938). El hombre que calculaba, 82-89.

Tambychik, T. & Meerah, T. (2010). Students' Difficulties in Mathematics Problem-Solving: What do they Say? *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *8*, 142–151.

Tellez, L. (2019).*Relación entre el sentido numérico y pensamiento algebraico en el bachillerato.* (Tesis maestría). Pachuca, Hgo.: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH).

Trigueros, María y Ursini, Sonia. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?. Redalyc, 18, 6-10.

Trochim, W. M., Donelly, J. P., & Arora, K. (2016). *Research methods. The essential knowledge base*. Boston, MA: Cengage Learning.

Thurston, W. (1994). On proof and progress in Mathematics. Appeared in bulletin of the American Mathematical Society, 30, 161-177.

Widodo, S.A., Prahmana, R.C.I., Purnami, A.S., & Turmudi (2018). Teaching materials of algebraic equation. Journal of Physics: Conference Series, 943(1), 012017.

Windsor, W. (2010). Algebraic Thinking: A Problem Solving Approach. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 665-672). Fremantle: MERGA.

Yang, D.C. y Li, M.N. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. International Journal of Science and Mathematics Education, 6, pp. 789-807.

Yang, D.C., Reys, R. y Reys, B.J. (2008). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. International Journal of Science and Mathematics Education, 7, pp. 383-403.

Zull, J. E. (2002). *The art of changing the brain*. Sterling, VA: Stylus.

# 7. APÉNDICES

## 7.1 Apéndice A. Hoja de trabajo de la actividad las ranas saltarinas

Nombre del estudiante: Fecha:

Asignatura:

**Nombre de la actividad:** Las ranas saltarinas.

**Objetivo de aprendizaje:** Dar sentido a las operaciones y la representación de los números para facilitar el proceso de generalizar.

**Objetivo del problema base:** Determina una expresión algebraica que permita calcular el número de movimientos mínimos para ganar cada partida conociendo el número de ranas por cada color.

**Instrucciones**. Lee con cuidado la misión y las reglas del siguiente juego llamado "Ranas saltarinas".

**Misión**: Para ganar la partida debes pasar las ranas verdes de la izquierda hacia la derecha y viceversa.

**Reglas**: Cada rana solo puede saltar a una rana del otro color.

No se pueden saltar ranas del mismo color.

Una rana puede desplazarse a la casilla contigua vacía.

Ninguna rana puede regresar.

1. Reúnete en equipos de tres, como lo indique el docente. Inicien jugando con una rana por color, después de ganar la partida aumenten una rana por color hasta llegar a ganar con cuatro ranas por color.

2. Organiza la información obtenida en una tabla, es decir, el número de ranas por color y el número de movimientos mínimos para ganar cada partida.

3. Sin jugar, responde lo siguiente. ¿Cuántos movimientos se necesitan para ganar la partida con cinco ranas por color?
4. ¿Cuántos movimientos se necesitan para ganar la partida con 15 ranas por color? ¿Cómo llegaste al resultado?
5. ¿Qué relación existe entre el número de ranas por color y el número de movimientos mínimos para ganar la partida?
6. Agrega otra columna en la tabla y determina otra representación del número de movimientos.
7. Determina una expresión algebraica que permita calcular el número de movimientos mínimos para ganar una partida si se conoce el número de ranas por color.
8. Justifica la fórmula.

## 7.2 Apéndice B. Ficha técnica de la actividad las ranas saltarinas

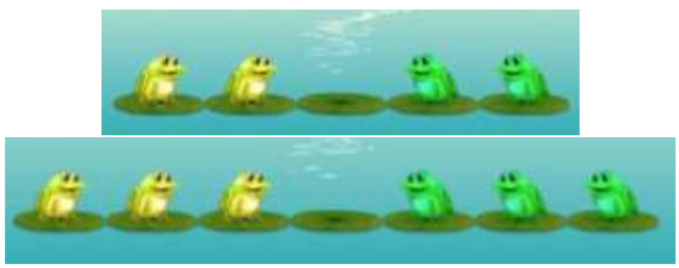
**Nombre de la actividad**: Las ranas saltarinas.

**Objetivo de aprendizaje:** Dar sentido a las operaciones y la representación de los números para facilitar el proceso de generalizar.

**Objetivo del problema base:** Determina una expresión algebraica que permita calcular el número de movimientos mínimos para ganar cada partida conociendo el número de ranas por color.

**Instrucciones**. Lee con cuidado la misión y las reglas del siguiente juego llamado "Ranas saltarinas".

Misión: Para ganar la partida debes pasar las ranas verdes de la izquierda hacia la derecha y viceversa.



Reglas: Cada rana solo puede saltar a una rana del otro color.

No se pueden saltar ranas del mismo color.

Una rana puede desplazarse a la casilla contigua vacía.

Ninguna rana puede regresar.

**Población objetivo:** Estudiantes de primer semestre de bachillerato; asignatura: Desarrollo del Pensamiento Lógico Algebraico.

**Elementos del pensamiento matemático que se busca desarrollar:** Identificación de patrones, generalización de resultados, uso de diferentes representaciones.

**Conexiones:** Sucesiones aritméticas, ecuaciones de segundo grado.

**Indicaciones o sugerencias durante el proceso de implementación:**

1. Una vez que el estudiante leyó el enunciado del problema, con la finalidad de verificar si entendió el enunciado se le puede preguntar ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la incógnita? ¿Qué se te pide obtener?
2. Cuando el estudiante esté jugando, es necesario observar que cumpla las reglas del juego.
3. Al organizar los datos en una tabla, algunos estudiantes van a encontrar una expresión algebraica que les permita calcular el número de movimientos mínimos para ganar la partida, conociendo el número de ranas. Sin embargo, es necesario que justifiquen la respuesta para entender la relación entre el número de ranas y el número de movimientos. Es importante promover que los estudiantes representen el número de movimientos de diferentes maneras para identificar relaciones entre el número de ranas y el número de movimientos.

| Número de ranas por color | Número de movimientos | Otra representación del número de movimientos |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 1(1+2) |
| 2 | 8 | 2(2+2) |
| 3 | 15 | 3(3+2) |
| 4 | 24 | 4(4+2) |
| 5 | 35 | 5(5+2) |
| 15 | 105 | 6(6+2) |

4. Cuando los estudiantes analicen casos particulares, con 5 y 15 ranas por color, utilizarán conocimientos previos. Si utilizan proporcionalidad o patrones lineales, se pueden preguntar si su regla sirve para los datos conocidos. Después de que observe que no sirve la regla de correspondencia, se pueden utilizar ejemplos más sencillos.

5. Si el estudiante tiene dificultades en la pregunta número cinco. Se pueden proponer ejemplos más sencillos, como una sucesión lineal y encuentre reglas de correspondencia.

6. Cuando se le pregunta al estudiante acerca de la relación entre el número de ranas por color y el número de movimientos, se espera, que exprese verbalmente: “El número

de movimientos es igual al número de ranas por el número de ranas más dos”. A continuación, se buscará que el estudiante exprese simbólicamente esta relación.

**Heurísticas útiles durante el proceso de implementación (incluyendo sugerencias específicas):**

Considerar casos particulares. Sugerir al estudiante analizar qué pasa cuando se aumenta el número de figuras.

Organizar la información. Tal vez sería útil organizar la información en una tabla.

### 7.3 Apéndice C. Hoja de trabajo de la actividad Sisa

Nombre del estudiante: Fecha:

Asignatura:

**Nombre de la actividad**: Sisa

**Objetivo de aprendizaje:** Dar sentido a las operaciones y la representación de los números para facilitar el proceso de generalizar.

**Objetivo del problema base:** Determina una expresión algebraica que permita calcular el total de granos de trigo que le deben de pagar a Sisa conociendo el número de casilla.

**Problema**

Según una leyenda, un hombre muy rico de la India ordenó a su sirviente, Sisa, que creara un juego para que pudiera entretenerse. Sisa le presentó el tablero de ajedrez y el hombre rico, quedó tan satisfecho que le dejó escoger su recompensa. Sisa le pidió que le pagara con un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, etc. hasta llegar a las 64 casillas. Determina una expresión que permita calcular el total de granos de trigo que le pagaron a Sisa conociendo el número de casilla

1. Reúnete en equipos de tres, como lo indique el docente.
2. Organiza la información obtenida en una tabla, es decir, el número de casilla y el número de granos que le pagaron a Sisa esa casilla.
3. ¿Cuántos granos le dieron a Sisa por las casillas 5, 6 y 7?
4. Agrega una tercera columna y determina el total de granos que se le pagaron a Sisa desde la primera casilla hasta la séptima.
5. ¿Qué relación existe entre el número de casilla y el total de granos que se le pagaron a Sisa hasta esa casilla?
6. Agrega otra columna en la tabla y determina otra representación del número de movimientos.
7. Determina una expresión algebraica que permita calcular el total de granos de trigo que le pagaron a Sisa conociendo el número de casilla
8. Justifica la fórmula.

## 7.4 Apéndice D. Ficha técnica de la actividad Sisa

**Nombre de la actividad**: Sisa

**Objetivo de aprendizaje:** Dar sentido a las operaciones y la representación de los números para facilitar el proceso de generalización.

**Objetivo del problema base:** Determina una expresión algebraica que permita calcular el total de granos de trigo que le deben de pagar a Sisa conociendo el número de casilla.

**Problema**

Según una leyenda, un hombre muy rico de la India ordenó a su sirviente, Sisa, que creara un juego para que pudiera entretenerse. Sisa le presentó el tablero de ajedrez y el hombre rico, quedó tan satisfecho que le dejó escoger su recompensa. Sisa le pidió que le pagara con un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, etc. hasta llegar a las 64 casilla. Determina una expresión que permita calcular el total de granos de trigo que le deben de pagar a Sisa conociendo el número de casilla

**Población objetivo:** Estudiantes de primer semestre de bachillerato; asignatura: Desarrollo del Pensamiento Lógico Algebraico.

**Elementos del pensamiento matemático que se busca desarrollar:** Identificación de patrones, generalización de resultados, uso de diferentes representaciones.

**Conexiones:** Sucesiones aritméticas, ecuaciones de segundo grado, potencias.

**Indicaciones o sugerencias durante el proceso de implementación:**

1. Una vez que el estudiante leyó el enunciado del problema, con la finalidad de verificar si entendió el enunciado se le puede preguntar ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la incógnita? ¿Qué se te pide obtener?
2. Al organizar los datos en una tabla, algunos estudiantes van a encontrar una expresión algebraica que les permita calcular el total de granos de trigo que le pagaron a Sisa conociendo el número de casilla. Sin embargo, es necesario que justifiquen la respuesta para entender la relación entre el número de casilla y el total de granos que se pagaron.

Es importante promover que los estudiantes representen el total de granos que le pagaron a Sisa de diferentes maneras para identificar relaciones con el número de casilla.

| Número de casilla | Número de granos pagados por la casilla | Total de granos que se pagaron hasta ese número de casilla | Otra manera de representar el total de granos | Otra manera de representar el total de granos II | Otra manera de representar el total de granos III |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2-1 | $2^1 - 1$ |
| 2 | 2 | 3 | 1+2 | 4-1 | $2^2 - 1$ |
| 3 | 4 | 7 | 1+2+4 | 8-1 | $2^3 - 1$ |
| 4 | 8 | 15 | 1+2+4+8 | 16-1 | $2^4 - 1$ |
| 5 | 16 | 31 | 1+2+4+8+16 | 32-1 | $2^5 - 1$ |
| 6 | 32 | 63 | 1+2+4+8+16+32 | 64-1 | $2^6 - 1$ |
| 7 | 64 | 127 | 1+2+4+8+16+32 +64 | 128-1 | $2^7 - 1$ |

3. Si el estudiante tiene dificultades en la pregunta número cinco. Se pueden proponer ejemplos más sencillos, como una sucesión lineal y encuentre reglas de correspondencia.

4. Cuando se le pregunta al estudiante acerca de la relación entre el número de casilla y el total de granos que le pagaron a Sisa hasta esa casilla, se espera, que exprese verbalmente: “El número del total de granos que le pagaron a Sisa es igual al número de casilla al cuadrado menos uno”. A continuación, se buscará que el estudiante exprese simbólicamente esta relación.

**Heurísticas útiles durante el proceso de implementación (incluyendo sugerencias específicas):**

Considerar casos particulares. Sugerir al estudiante analizar qué pasa cuando se aumenta el número de figuras.

Organizar la información. Tal vez sería útil organizar la información en una tabla.

### 7.5 Apéndice E. Transcripción de las grabaciones en video

Con la finalidad de ahorrar papel durante el proceso de impresión de la tesis, las transcripciones de las videograbaciones se pueden consultar, en formato electrónico, en:

https://drive.google.com/drive/folders/1FQXB9ZEzHMIHo3ig5nEp65kkweR09V2q?usp=sharing