UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO.

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

Área Académica de Matemáticas y Física

“CONCEPTOS DE CÁLCULO EN EL CONTEXTO DE LA INGENIERÍA CIVIL: UN CASO DE DISEÑO DE VIGAS”

TESIS

Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias con Orientación
en la Enseñanza de las Matemáticas

Presenta:

Cutberto Rodríguez Álvarez

Director de tesis:
Dr. Fernando Barrera Mora

Enmarcada en el proyecto CONACYT “Bases Teóricas y Conceptuales en la Construcción del Conocimiento Matemático y el Empleo de Herramientas Digitales” con registro 61996

Pachuca de Soto, Hgo; diciembre 2010.

ÍNDICE

CAPITULO V

RESUMEN

En este trabajo se discute el enfoque didáctico con el que algunos libros de texto abordan temas propios de la ingeniería civil, documentando la falta de articulación y contextualización de conceptos matemáticos que se estudian en cálculo con los conceptos físicos que intervienen en el proceso de modelado, caso específico del análisis de fuerzas en vigas. Un elemento importante en el desarrollo del trabajo consistió en el estudio de un problema propuesto por el texto (Beer, 2010, p. 365) así como la exposición de una aproximación alternativa a su análisis, tomando en cuenta algunos elementos de la teoría de la matemática en contexto y del marco de la resolución de problemas.

ABSTRACT

In this work we discuss the didactical approach presented by some textbooks when topics characteristic of civil engineering are developed, we are interested in documenting the lack of articulation and contextualization of mathematical concepts and physics ones that are used when modeling process that are needed in the analysis of forces in beams. An important element in the development of this work, consisted in the didactical analysis of a problem, proposed by the text (Beer, 2010, p. 365) as well as the proposal of an alternative approach to its discussion. Taking this into account, some elements of the frameworks “mathematics in context” and of problem solving are used.

INTRODUCCIÓN

En los últimos 30 años se ha desarrollado una cantidad importante de trabajos de investigación en educación matemática (Artigue, Duady, Moreno 1995, Brousseau 1986, Camarena 1987, 1995, 1999, 2001, 2003, 2009a, Hitt 2000, Santos 2007 entre muchos otros). Parte de esta investigación ha centrando la atención en el aprendizaje de la disciplina en el nivel superior, particularmente en áreas como cálculo y álgebra lineal. Artigue (1995), citando a Tall (1991), señala que la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza en el nivel superior se han enfocado en conceptos del cálculo. Sin embargo, pocos estudios han abordado el problema del aprendizaje de esta área de las matemáticas situado en el contexto de las diferentes ramas de la ingeniería. Particularmente, en lo que concierne a un análisis didáctico del enfoque que siguen los textos al hacer uso de conceptos de cálculo para discutir temas propios de la ingeniería.

Una revisión de la forma en que los libros de texto articulan y contextualizan los conceptos y herramientas matemáticas para desarrollar conocimiento de áreas como la ingeniería es fundamental, ya que los textos son la principal herramienta de la que disponen los profesores para desarrollar actividades que promuevan el aprendizaje de los estudiantes. Además, los libros de texto son una de las herramientas de aprendizaje más importantes con la que cuentan los estudiantes.

Por las razones expresadas anteriormente, el presente trabajo tiene el objetivo de documentar, que aún los textos de ingeniería civil más comúnmente usados en instituciones como la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), el Instituto Politécnico Nacional (IPN) y la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), no articulan de una forma robusta los conceptos del cálculo y aquellos de la física que se utilizan para discutir temas tales como el diseño y análisis de elementos estructurales, entre los que se cuenta a las vigas[1]. Por ejemplo, Beer (2010, pp. 365-380), al analizar la relación entre carga, fuerza cortante y momento flector en una viga, no hace explícita y de una manera estructurada la forma en que intervienen en el análisis conceptos como función definida por tramos, función continua, derivada e integral de una función. Otro elemento que no se explicita en la discusión y que se considera fundamental, es el análisis retrospectivo de la situación, después de haberse formulado matemáticamente un problema.

Para fundamentar este trabajo, se hace uso de un marco conceptual estructurado en torno a dos elementos: (i) la resolución de problemas como método de aprendizaje de matemáticas y (ii) la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias (Camarena, 2004). La resolución de problemas como método para aprender matemáticas tiene entre sus principios, hacer uso, y fomentar el desarrollo de elementos del pensamiento matemático tales como: identificar información, encontrar relaciones entre datos e incógnitas, resolver casos particulares, identificar patrones, formular conjeturas, presentar argumentos; con la finalidad de ayudar a los estudiantes a desarrollar una forma matemática de pensar sustentada en los principios de la disciplina.

> Aprender a pensar matemáticamente significa (a) desarrollar un punto de vista matemático que valore los procesos de matematización y abstracción y tener la predilección de aplicarlos, y (b) desarrollar las competencias con las herramientas del oficio, y usar esas herramientas al servicio del objetivo de entender estructuras dando sentido matemático (Schoenfeld, 1992, pp. 336-337).

En la resolución de problemas, se considera que las tareas de aprendizaje juegan un papel preponderante ya que promueven en los estudiantes formas de pensar consistentes con el quehacer matemático; en este sentido Barrera (2009, p.25) indica que una tarea de aprendizaje debe considerar: (i) el conocimiento previo que tiene el estudiante y, (ii) proporcionar elementos para el desarrollo de nuevos conceptos que se articulen con los existentes en una red conceptual robusta.

---

[1] Una viga es un miembro estructural que tiene por objeto soportar cargas transversales, es decir, cargas que actúen en sentido perpendicular al eje longitudinal de la viga. Una viga resiste cargas aplicadas debido a la combinación de una fuerza cortante transversal interna y momento flexionante (Craig, 2006, p. 298).

En lo que concierne a la matemática en contexto, Camarena (2009), establece que:

> La matemática en contexto de las ciencias es una teoría que nace desde 1982, la cual reflexiona acerca de la vinculación que debe existir entre la matemática y las ciencias que las requieren (Camarena 1984, 1987, 1988, 1990, 1992, 1995, 2001a, 2005a, 2007), y se fundamenta en los siguientes paradigmas:
>
> - La matemática es una herramienta de apoyo y disciplina formativa.
> - La matemática tiene una función específica en el nivel universitario.
> - Los conocimientos nacen integrados.
>
> El supuesto filosófico de esta teoría es que el estudiante esté capacitado para hacer la transferencia del conocimiento de la matemática a las áreas que la requieren y con ello las competencias profesionales y laborales se fortalezcan.

Tomando como punto de partida los supuestos filosóficos de la matemática en contexto y haciendo uso de lo que Schoenfeld (1985) plantea en cuanto a desarrollar un punto de vista matemático, se puede argumentar que los estudiantes al abordar tareas de aprendizaje contextualizadas, tienen la posibilidad de adquirir una formación que les permita desarrollar competencias profesionales y laborales acordes con el ejercicio de su profesión.

CAPÍTULO I
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Sobre el problema

Diversos estudios (Camarena 2004, 2009, García 2001, Hernández 2008, Muro 2000) han documentado que la enseñanza de las matemáticas en las diferentes ramas de la ingeniería aparece, frecuentemente, fuera del contexto en que el ingeniero aplica su conocimiento. En esta línea de ideas, Castro (1987) reporta que: "Los alumnos de ingeniería con mucha frecuencia, le dicen al profesor que no les interesa saber de dónde salió tal o cual expresión o cómo se llegó a ella; sino, más bien que les interesa saber cómo funciona y donde las pueden aplicar". Esta concepción de los estudiantes, en cuanto al aprendizaje de las matemáticas, puede tener su origen en diversas causas: (i) el papel del profesor, (ii) el enfoque del curso y (iii) la forma en que los libros de texto presentan los contenidos.

Es frecuente encontrar libros de texto que hacen uso de diversos conceptos matemáticos al presentar contenidos propios de la ingeniería, sin embargo, la forma en que estos contenidos son utilizados no muestra una estructura que permita al estudiante lograr un entendimiento profundo de los problemas que se abordan. En el caso particular de la ingeniería civil, libros de texto tales como Beer (2010), Timoshenko (1998), Russell (1981), Fitzgerald (1984) y Singer (1979), discuten temas inherentes a la disciplina, haciendo uso de diversos conceptos matemáticos como el de función, derivada e integral de una función, así como de conceptos físicos, sin mostrar una conexión estrecha entre ellos, la cual pudiese aportar elementos para el desarrollo cognitivo del estudiante.

Esta situación fue un elemento que motivó el desarrollo de una investigación en la que se identificaran las características didácticas del enfoque que utilizan varios libros de texto al abordar temas de ingeniería civil, como lo es el análisis de estructuras en edificaciones, donde la modelación de éstas requiere de diversas herramientas o técnicas matemáticas.

1.2 Planteamiento del problema

Una actividad representativa del ingeniero civil es sin duda, el análisis y diseño de estructuras[2] que sean funcionales y a la vez seguras ante los esfuerzos a que serán sometidas. En el diseño y análisis de estructuras se requieren una serie de procedimientos que hacen uso de conceptos y técnicas de las matemáticas y la física. Al respecto autores como, Hsieh han identificado los siguientes procesos al diseñar estructuras:

> El diseño de una estructura se puede establecer en cinco pasos: 1) Determinación de la forma general, 2) Investigación de las cargas, 3) Análisis de esfuerzos, 4) Selección de los distintos elementos 5) Dibujos y detalles (Hsieh, 1986, pp. 2-3).

Estos procesos se refieren en forma básica a la determinación de la forma general, en donde se incluye la selección de varias alternativas y se consideran aspectos como la funcionalidad, costos, principios normativos y estética. En el análisis de las cargas a que serán sometidas, se consideran las condiciones bajo las que se diseñará la estructura, tomando en cuenta el tipo de carga; por ejemplo: cargas muertas, sobrecargas y cargas por impacto. Por su parte, el análisis de esfuerzos en estructuras, está directamente relacionado con las cargas externas, ya que éstas provocarán, de acuerdo con la tercera ley de Newton, una reacción de igual magnitud.

Una vez determinadas las fuerzas internas, es posible establecer el tipo de material y dimensiones de la estructura, tomando en consideración la normatividad establecida para tal efecto. Por último, se elabora el diseño gráfico de la estructura para contar con información que permita su construcción (Hsieh, 1986).

[2] La palabra estructura en ingeniería se define como algo que está construido, las principales estructuras con que trabaja el ingeniero civil son los puentes, edificios, muros, presas, torres, cáscaras (Hsieh 1986)

Uno de los elementos estructurales que es fundamental en la construcción de obras civiles, se conoce con el nombre de viga, para poder diseñarla, es necesario determinar la fuerzas cortante y el momento flector (fuerzas internas también llamados esfuerzos) que son resultado de la acción de fuerzas externas actuando en ella. El análisis muestra que el esfuerzo cortante y el momento flector están en función de la distancia a los puntos de apoyo que soportan a la viga, así como de la magnitud y ubicación de las cargas a las que está sometida.

> Análisis de esfuerzos: Una vez definidas las cargas externas, debe hacerse un análisis de esfuerzos con el fin de determinar las fuerzas internas, algunas veces conocidas como esfuerzos, que se producirán en los diferentes elementos. Cuando se producen sobrecargas, deben analizarse con todo cuidado los esfuerzos máximos posibles en cada uno de los elementos de la estructura. Para obtener lo anterior, no solo solamente debe conocerse la magnitud de la carga, sino el lugar de aplicación. (Hsieh, 1986, p. 2)

En el análisis de los esfuerzos cortantes y momentos flectores se utilizan conceptos matemáticos tales como desigualdades, función definida por tramos, continuidad de una función, primera y segunda derivada de una función, máximos y mínimos locales de una función, así como el concepto de integral definida en un intervalo, entre otros; también se utilizan conceptos de física tales como: equilibrio, tercera ley de Newton, fuerza cortante y momento flector.

Al revisar uno de los libros de texto que más se usa en ingeniería civil para abordar el tema de “Fuerzas en Vigas”, se observa que el autor, al referirse y hacer uso de los contenidos matemáticos que modelan al fenómeno físico de una viga sometida a diversos tipos de carga, lo realiza sin una articulación estrecha y profunda con los conceptos físicos que intervienen en el proceso de modelado. Esto puede llevar a que los estudiantes no logren obtener un aprendizaje con entendimiento[3].

---

[3] De acuerdo con Hiebert (1997) un aprendizaje con entendimiento debe mostrar entre otras cosas: el que el estudiante construya su conocimiento a partir de las relaciones o conexiones de hechos o procedimientos; reflexione y argumente sobre los objetos de estudio que le son mostrados en el salón de clases donde la naturaleza de las tareas, el papel del profesor, la cultura social y las herramientas que se tengan disponibles juegan un papel crucial.

El libro de texto que se analiza en el presente estudio es Beer (2010, pp. 354-380). En la figura 1 se ilustra la forma en que en este texto se abordan los diversos conceptos matemáticos y físicos al analizar las fuerzas cortantes y momentos flectores en una viga.

*7.5. DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y DE MOMENTO FLECTOR

Ahora que se han definido claramente la fuerza cortante y el momento flector en lo referente a su magnitud y a su sentido, se pueden registrar sus valores en cualquier punto de una viga graficando dichos valores contra la distancia x medida desde un extremo de la viga. Las gráficas que se obtienen de esta manera reciben el nombre de *diagrama de fuerza cortante* y *diagrama de momento flector*, respectivamente. Como ejemplo, considere una viga apoyada AB que tiene un claro L y que está sometida a una sola carga concentrada $\mathbf{P}$ que actúa en su punto medio D (figura 7.10a). Primero se determinan las reacciones en los apoyos a partir del diagrama de cuerpo libre para la viga completa (figura 7.10b); de esta forma, se encuentra que la magnitud de cada reacción es igual a $P/2$.

Después se corta la viga en un punto C localizado entre A y D y se dibujan los diagramas de cuerpo libre para las partes AC y CB (figura 7.10c). *Si la fuerza cortante y el momento flector son positivos*, se dirigen las fuerzas internas $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}'$ y los pares internos $\mathbf{M}$ y $\mathbf{M}'$ como se indica en la figura 7.9a. Si se considera el cuerpo libre AC y se escribe que la suma de las componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a C de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son iguales a cero, se encuentra que $V = +P/2$ y $M = +Px/2$. Por tanto, la fuerza cortante y el momento flector son positivos; lo anterior se puede corroborar observando que la reacción en A tiende a cortar y a flexionar la viga en C de la forma mostrada en la figura 7.9b y c. Se puede graficar V y M entre A y D (figura 7.10e y f); la fuerza cortante tiene un valor constante $V = P/2$, mientras que el momento flector aumenta linealmente desde $M = 0$ en $x = 0$ hasta $M = PL/4$ en $x = L/2$.

Ahora, si se corta la viga en un punto E localizado entre D y B y se considera el cuerpo libre EB (figura 7.10d), se escribe que la suma de las componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a E de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son iguales a cero. De esta forma se obtiene $V = -P/2$ y $M = P(L - x)/2$. Por tanto, la fuerza cortante es negativa y el momento flector es positivo; lo anterior se puede corroborar observando que la reacción en B flexiona la viga en E de la forma indicada en la figura 7.9c pero tiende a cortarla de manera opuesta a la mostrada en la figura 7.9b. Ahora se pueden completar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la figura 7.10e y f; la fuerza cortante tiene un valor constante $V = -P/2$ entre D y B, mientras que el momento flector decrece linealmente desde $M = PL/4$ en $x = L/2$ hasta $M = 0$ en $x = L$.

Es necesario señalar que cuando una viga sólo está sometida a cargas concentradas, la fuerza cortante tiene un valor constante entre las cargas y el momento flector varía linealmente entre éstas, pero cuando una viga está sometida a cargas distribuidas, la fuerza cortante y el momento flector varían en forma diferente (véase problema resuelto 7.3).

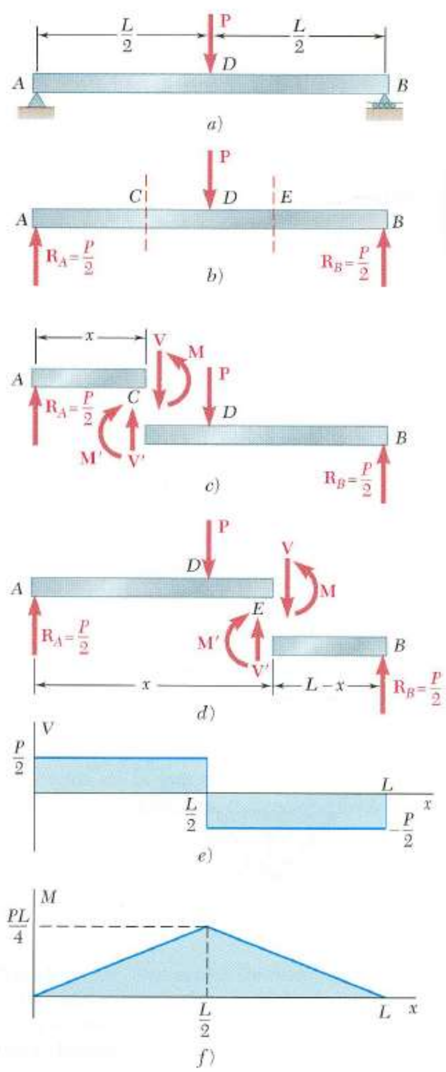


Figura 7.10

Figura 1.

Al obtener los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores de la viga, el autor no hace uso de manera explícita de los elementos matemáticos que involucran las condiciones del problema. Esto puede tener algunas consecuencias en el proceso de aprendizaje: (1) que los estudiantes no cuenten con un referente que los guíe en el desarrollo de tareas de aprendizaje con la finalidad de construir un conocimiento estructurado; (2) que el profesor no disponga de una referencia que le ayude a diseñar tareas que logren en los estudiantes tal aprendizaje.

De lo expuesto, se puede observar que el análisis de textos aporta elementos que muestran que la articulación de los contenidos matemáticos en temas como el de Fuerzas en Vigas no hace uso de una estructura conceptual robusta que permita una mejor comprensión sobre el origen, propiedades o representaciones de los modelos usados en este tipo de fenómenos físicos; siendo éste el problema del que se pretende dar cuenta: la falta de vinculación explícita de conceptos matemáticos con los conceptos propios de la ingeniería.

1.3 Preguntas de investigación

El aprendizaje de las matemáticas, en particular de conceptos que se enseñan en el curso de cálculo como el de función, derivada e integral de una función, así como su relación y aplicación con temas inherentes a la estática; son el objeto de estudio de esta investigación, donde se consideran las siguientes preguntas:

1) ¿De qué manera se articulan, en los libros de texto de ingeniería civil, los conceptos matemáticos necesarios para el análisis del diseño de vigas? Con la respuesta a esta pregunta se pretende aportar evidencia documental de que en los libros de textos más comúnmente usados en la licenciatura de ingeniería civil, los conceptos matemáticos y físicos no están suficientemente articulados, de forma que los estudiantes puedan lograr una comprensión conceptual de los modelos matemáticos mediante los que se analiza el diseño de vigas.

2) ¿Qué elementos didácticos se pueden incorporar en una propuesta de aprendizaje que permita a los estudiantes articular, de una manera robusta, los

conceptos matemáticos y físicos que se requieren en el estudio del diseño de vigas? Con una posible respuesta a esta pregunta se busca determinar algunos elementos didácticos que pueden utilizarse en la elaboración de materiales y tareas de aprendizaje que favorezcan el entendimiento conceptual del diseño de vigas, de forma tal que el estudiante comprenda con profundidad la forma en que los conceptos matemáticos y físicos se estructuran en la construcción de los modelos matemáticos utilizados en el análisis de estructuras.

Tomando en cuenta que, algunas asignaturas formativas de futuros ingenieros civiles, requieren de la aplicación de conceptos que se estudian en cálculo y donde el modelo que representa al fenómeno físico esta basado en los conceptos matemáticos antes indicados, es como se establecen las preguntas precedentes; considerando el enfoque que algunos textos señalan al establecer los temas de diseño de vigas y mas precisamente el estudio de Fuerzas en Vigas; de acuerdo con Camarena (2000): “el análisis de textos constituye una metodología para la detección de ciertos elementos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las Ciencias”.

CAPÍTULO II
MARCO CONCEPTUAL

El marco de investigación que se utilizará para sustentar el presente trabajo se estructura tomando como referencia elementos de: (i) la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias y (ii) el modelo de resolución de problemas, como un método para aprender matemáticas. Además, la posición que se sostiene en torno a qué significa aprender matemáticas se basa en las ideas expresadas por Hiebert (1997), relacionadas con la construcción de conexiones entre conceptos, ideas y procesos matemáticos.

2.1 MATEMÁTICAS EN EL CONTEXTO DE LAS CIENCIAS

La matemática en el contexto de las ciencias, es un constructo teórico desarrollado entre otros por Camarena (1987, 1993, 1995, 1996 2001a, 2003, 2004b), García (2001), Muro (2000, 2002, 2004) y Hernández (2008); en el que se destaca la importancia de exponer temas inherentes a las matemáticas en forma contextualizada con las ciencias o asignaturas del programa de ingeniería que se trate.

> La matemática en contexto ayuda a que el estudiante construya su propio conocimiento con amarres firmes y duraderos y no volátiles; refuerza el desarrollo de habilidades mentales mediante el proceso de resolver problemas vinculados con los intereses del alumno. (Camarena, 2004)

La Matemática en el contexto de las ciencias es una teoría que se sustenta en el análisis de la problemática de la práctica educativa propia del nivel superior, resolviendo en parte las carencias o malos hábitos con que los estudiantes ingresan a las carreras de ingeniería.

> La matemática en contexto de las ciencias, se fundamenta en la función específica que tiene la matemática en el nivel superior en carreras en donde no se van a formar matemáticos y en el paradigma de conocimientos integrados (Camarena, 1999).

Con este fundamento y tomando en cuenta que en el salón de clases están presentes tres elementos: el alumno, el profesor y el contenido a ser enseñado y a ser aprendido, los cuales interactúan entre sí, véase la figura No 2, se abren cinco fases:

Cinco fases que contempla la teoría:

- La Curricular
- La Didáctica
- La epistemológica
- La de formación docente
- La cognitiva

Fuente: Camarena (2004)

Terna dorada en la educación

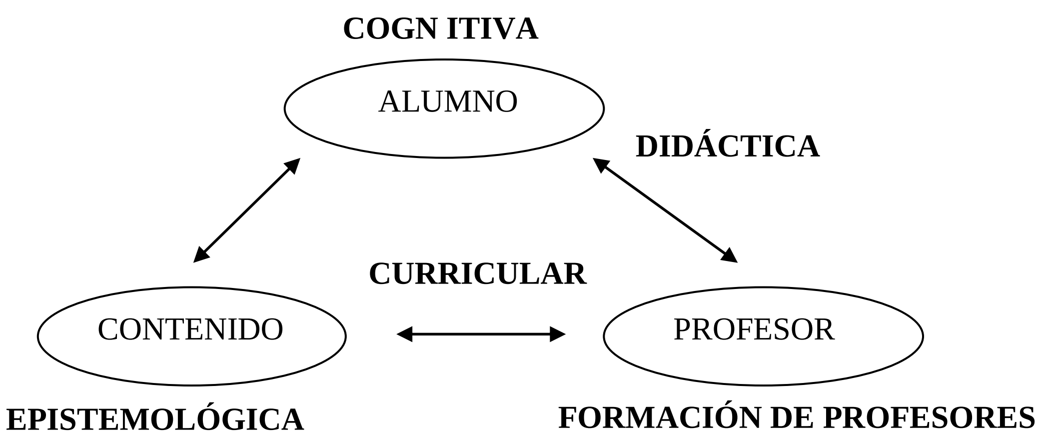


Figura 2

- **Fase Curricular**

  Esta fase se desarrolla mediante una metodología denominada DIPCING, y cuenta con tres etapas, permite el diseño de programas de estudio de matemáticas. Al respecto Camarena (2009), argumenta que:

  La metodología se fundamenta en el siguiente paradigma educativo:
  “Con los cursos de matemáticas el estudiante poseerá los elementos y herramientas que utilizará en las materias específicas de su carrera, es decir, las asignaturas de matemáticas no son una meta por sí mismas; sin

dejar a un lado el hecho de que la matemática debe ser “formativa” para el alumno”.

Así mismo, la premisa alrededor de la cual gira la metodología es que el currículo de matemáticas debe ser objetivo, es decir, debe ser un currículo fundado sobre bases objetivas. Para cumplir con la premisa dentro del paradigma planteado, se cuenta con una estrategia de investigación que consta de tres etapas: la central, la precedente y la consecuente (Camarena 2009).

Etapa central: consiste en hacer un análisis de los contenidos de cada área básica, tanto explícitos, como implícitos, en los cursos específicos de la carrera.

Etapa precedente: en ella se detecta el nivel de conocimientos de cada área básica que tienen los alumnos a su ingreso a los estudios de licenciatura.

Etapa consecuente: basada en la aplicación de una encuesta a los ingenieros en ejercicio, sobre el uso que tienen de las ciencias básicas en su labor profesional.

- **Fase Didáctica**

Esta fase presenta una propuesta didáctica denominada *matemáticas en contexto*, en donde se vincula la matemática con otras asignaturas; gran parte del presente trabajo incide en esta fase, (Camarena 1997; citada en Hernández, 2008) indica que esta fase contempla las siguientes etapas:

1.- Identificación de los problemas a abordar.
2.- Planteamiento del problema.
3.- Determinación de las variables y las constantes del problema
4.- Incorporación de los temas y conceptos matemáticos.
5.- Determinación del modelo matemático.

6.- Solución matemática del problema.

7.- Determinación de la solución requerida por el problema.

8.- Interpretación de la solución en términos de problema.

9.- Descontextualización de la matemática.

La matemática en contexto analiza el problema, lo resuelve e interpreta la solución con un enfoque particular a la ingeniería de donde emerge; aborda diferentes factores que intervienen en la enseñanza de las matemáticas con una didáctica específica para la impartir las clases para los ingenieros en formación.

- **Fase Epistemológica**

  Algunos factores que motivaron una crítica a la enseñanza del cálculo en los años sesenta fueron, de acuerdo con Artigue (1995), que las nociones básicas se introducían sin el planteamiento de un problema, o a partir de problemas muy lejanos a la realidad del estudiante, así como a una construcción lineal de los conceptos, sin ninguna conexión con la resolución de problemas.

  Para la matemática en contexto la resolución de problemas matemáticos, es una de las herramientas básicas de la fase didáctica, donde el contexto del problema es crucial. Los cuales son factores que contrastan con el diseño educativo establecido en los años sesenta, de acuerdo con la cita del párrafo anterior.

  En esta fase se contempla un constructo teórico denominado por Camarena (2004) *transposición contextualizada*; el cual se refiere a que la matemática que aprenden los estudiantes en la escuela, sufre transformaciones para adaptarse a la forma de trabajo de otras ciencias.

- **Fase de formación docente**

  Algunas instituciones de nivel superior se han avocado a prestar atención a la formación del docente en lo que a matemáticas se refiere, sin embargo los resultados no son satisfactorios a nivel global. En este sentido Camarena señala que:

  > En el Instituto Politécnico Nacional después de una investigación se diseña una especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica, en donde las asignaturas de matemáticas se muestran vinculadas con otras disciplinas propias de la electrónica y sus ramas afines (Camarena, 2009, p.4).

  En la aproximación al problema del aprendizaje con entendimiento, el instructor juega un papel relevante; en este proceso las características de sus conocimientos deben ser analizadas para ser tomadas en cuenta en los programas de formación docente.

  > De hecho, la investigación arrojó cuatro categorías cognitivas que deberían incluirse en un programa de formación docente en matemáticas para el nivel universitario: Conocimiento sobre los estudios de ingeniería en donde laboran, Conocimiento de los contenidos a enseñar, Conocimiento sobre el uso de tecnología electrónica para apoyar el aprendizaje del estudiante y Conocimiento acerca del proceso de enseñanza y de aprendizaje de la matemática. Dentro de la última categoría se incluyen cursos sobre conocimiento científico y técnico, historia y fundamentos de la matemática, procesos de aprendizaje, la evaluación del aprendizaje, entre otros. (Camarena 2009, p.5).

La UAEH, ha tomado acciones enfocadas al desarrollo de la enseñanza con aprendizaje, para tal efecto en el Área Académica de Matemáticas y Física del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería opera un programa de maestría orientado a las matemáticas y su didáctica, donde los profesores que imparten matemáticas en los niveles medio superior y superior se preparan en esta ciencia, para contar con el conocimiento sobre los contenidos matemáticos propios de su quehacer diario, el uso de la innovación tecnológica como herramienta en el aula; impulsando la reflexión sobre su práctica docente en el salón de clases, bajo un enfoque donde la resolución de problemas y los elementos inherentes a éste modelo juega un papel preponderante en la nada fácil tarea de la enseñanza con entendimiento. En esta dirección Hiebert (1997) refiere que:

> Los documentos de la reforma en sí mismos, (NCTM 1989, 1991; MSEB 1988) proporcionan algunas descripciones de qué es el entendimiento matemático. El primero de los cuatro estándares en el documento de la NCTM del año 1989 resalta la importancia de razonar claramente, comunicarse efectivamente, establecer conexiones entre las matemáticas y otros campos, y resolver problemas reales. Todas esas actividades contribuyen al entendimiento y proporcionan evidencia para el entendimiento. (Hiebert, 1997, p. 4)

- **Fase Cognitiva.**

Diversos estudios (Ausbel 1990; Duval 1999; Camarena 2009) han obtenido evidencia de que el estudiante debe transitar entre los registros aritmético, algebraico, analítico, visual y contextual para construir y afianzar su conocimiento, en este sentido Duval (1999) señala que:

> No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Desde esta perspectiva, es esencial no confundir jamás los objetos matemáticos, es decir, los números, las funciones, las rectas, etc., con sus representaciones, es decir, las escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de las figuras…, pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes. (Duval, 1999, p. 13)

En estudios realizados por Hernández (2008), se reporta que a partir de un análisis cognitivo del proceso desarrollado por un grupo de 22 alumnos de la carrera de ingeniería industrial de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, al abordar tareas de aprendizaje relacionadas con los conceptos de la derivada e integral se encontró que:

- El 45% de los alumnos estudiados definen una función como una relación de correspondencia entre dos conjuntos de elementos. El 55% de los alumnos considera a la función como una expresión de cálculo entre dos pares ordenados (x, y).
- Algunos alumnos tienen el concepto de pares ordenados correspondientes y muy pocos alumnos (2) le atribuyen ciertas características gráficas asociadas con la expresión algébrica.

- Los alumnos tienen la idea de derivada como un cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, mientras que otros le asignan un significado gráfico al asociar la derivada de una función con la recta tangente en un punto de la curva (82%), uno de los alumnos (4.5%) define a la derivada en términos de una función que se calcula el límite en un punto dado de la curva, por otro lado un alumno (4.5%) define a la derivada en términos de la aplicación de los cuatro pasos de la definición de derivada, un aspecto relevante de mencionar es que dos alumnos (9%) la definen como el área bajo la curva. En general los alumnos consideran a la derivada como un cociente asociado con una recta tangente en un punto determinado de la curva.
- En lo que se refiere a la integral definida 100% de los alumnos tienen el concepto de que la integral es el área bajo la curva entre los límites preestablecidos. El (91%) de los alumnos considera a la integral como el área bajo la curva y fundamentalmente es un procedimiento algebraico para su cálculo, solo el (9 %) considera que la integral está relacionada con una suma de áreas asociándolo con el aspecto numérico del cálculo de dicha área entre los límites de integración.

El estudio realizado con un grupo de estudiantes documenta, de manera general, la predisposición a relacionar los objetos matemáticos con aspectos algorítmicos, la dificultad para identificar sus diferentes representaciones y la falta de argumentos para definirlos. En este sentido las representaciones de los objetos matemáticos juegan un papel importante en la formación y desarrollo del pensamiento matemático.

2.2 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El incluir a la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas implica concebir al estudiante como un participante activo en la construcción y desarrollo de las ideas matemáticas; y considerar a las matemáticas como una disciplina en constante cambio y crecimiento, falible al igual que el resto de las ciencias. Además, implica conceptualizar al aprendizaje como una actividad cuyo propósito es el desarrollo de una forma matemática de pensar, en la que más que la solución de un problema, importa el proceso mediante el cual se obtuvo esa solución. Otro elemento fundamental de esta propuesta consiste en el desarrollo de una actitud inquisitiva, que consiste en tener la capacidad y la disposición para formular preguntas constantemente, es decir para problematizar la actividad matemática.

> Hacer o desarrollar matemáticas incluye el resolver problemas, abstraer, inventar, probar y encontrar el sentido de las ideas matemáticas…. En este contexto surge una propuesta para el aprendizaje de las matemáticas en donde actividades tales como identificar, diseñar y resolver problemas desempeñan un papel fundamental durante el estudio de las ideas matemáticas. (Santos, 1997, p. 3)

El Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos (National Council of Teachers of Matematics [NCTM], 1989, 1995; citado en Santos, 2007), ha identificado a la resolución de problemas como uno de los aspectos de mayor relevancia en el aprendizaje de las matemáticas.

Así mismo, uno de los elementos fundamentales que el NCTM (2000) propone para organizar el estudio de las matemáticas, es "…incluir actividades o procesos propios del quehacer matemático, como la resolución de problemas, el razonamiento y la demostración, la comunicación, las conexiones, y las representaciones. Estos procesos permean la actividad del aprendizaje de las matemáticas y sirven de marco para estudiar todas las líneas de contenido. Es decir, no solo interesa que los estudiantes, por ejemplo, aprendan las propiedades de los números naturales y sus operaciones, sino que también resuelvan y formulen problemas relacionados, discutan diversos significados y representaciones…"

Polya (1965), Schoenfeld (1992) y Santos (1997, 2007), coinciden en señalar que la instrucción matemática basada en la resolución de problemas aporta elementos importantes al aprendizaje de los estudiantes. Santos (2007) señala que “*aprender matemáticas significa que el estudiante identifique, seleccione, y use estrategias comúnmente usadas por los matemáticos al resolver problemas. Por ejemplo es importante que el estudiante discuta sus ideas con sus compañeros, que presente conjeturas, acerca del comportamiento de ciertas ideas matemáticas, que utilice ejemplos y contraejemplos para convencerse a sí mismo y a otros de los resultados, y que plantee sus propios problemas (Santos, 2007, p. 47)”*.

Se han identificado aspectos importantes que se deben considerar al diseñar actividades de aprendizaje:

a) Proponer al estudiante problemas no rutinarios.
b) Promover un microcosmos en el salón de clases que refleje actividades propias del quehacer matemático.
c) Identificar aspectos del pensamiento matemático.
d) Propiciar que el estudiante intencionalmente busque los significados de las ideas matemáticas y discuta el sentido de las soluciones de los problemas.

Santos (1997) expone que: *“En resumen, la propuesta de aprender matemáticas que identifica a la resolución de problemas como importante, reconoce a las matemáticas como un cuerpo de conocimientos no terminado. Es una disciplina en constante extensión tanto en resultados particulares como en métodos y principios generales. El estudiante, en el aprendizaje de esta materia, discute, emplea ejemplos y contraejemplos, crítica y valoriza los resultados, y comparte que la búsqueda de argumentos sólidos es esencial en la resolución de problemas” (p.12).*

En este sentido Santos (2007), menciona que: *un problema, en términos generales; es una tarea o situación en la que aparecen los siguientes componentes*:

- La existencia de un interés; es decir, una persona o un grupo de individuos quiere o necesita encontrar una solución.

- La no existencia de una solución inmediata. Es decir, no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la tarea. Por ejemplo, la aplicación directa de algún algoritmo o conjunto de reglas no es suficiente para determinar la solución.
- La presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico). Aquí, también se considera la posibilidad de que el problema pueda tener más de una solución.
- La atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendentes a resolver esa tarea. Es decir, un problema es tal hasta que existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo.

Schoenfeld (1987) considera que el profesor debe tratar de entender el proceso mediante el cual los estudiantes intentan resolver problemas y consecuentemente proponer actividades que puedan ayudarlos. Es importante discutir problemas de diferentes contextos y considerar dimensiones o categorías en la instrucción matemática que influyen en el proceso de resolver problemas. Así, tomando en cuenta resultados de varios estudios, Schoenfeld encontró que existen cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas:

1. Dominio del conocimiento o recursos.
2. Estrategias cognitivas o métodos heurísticos.
3. Estrategias metacognitivas.
4. Sistemas de creencias.

Elementos asociados a cada una de las categorías o dimensiones antes señaladas:

2.2.1. Los recursos

Representan un inventario de lo que un individuo sabe y de las formas en que adquiere un conocimiento.

Existen varios factores que determinan el uso de los recursos ante situaciones problemáticas. Schoenfeld (1985), al discutir el trabajo de Hinsley, Hayes y Simon (1977), identifica una serie de respuestas o acciones que la gente exhibe en su interacción con tales situaciones. Por ejemplo:

- La gente categoriza sus experiencias en tipos o clases.
- La gente tiende a clasificar sus nuevas experiencias en forma que son consistentes con sus conocimientos o categorizaciones anteriores. Es decir, si las características importantes de esa nueva experiencia reflejan aspectos de una categoría ya definida, entonces ésta ayuda a darle forma a esa nueva experiencia.
- La gente tiene cuerpos de información acerca de las categorías que son muy útiles al tratar con una nueva experiencia. Es decir, enmarca lo que espera de las circunstancias teniendo en cuenta su experiencia previa, la cual incluya herramientas y técnicas que han sido útiles en el pasado.

En relación con el conocimiento relevante asociado al dominio de los recursos, Schoenfeld (1985) identifica cinco tipos de conocimientos que influyen en el uso de los recursos:

1. **Conocimiento informal e intuitivo acerca del dominio (la disciplina) o del problema por resolver**

   En general, a las matemáticas se les identifica como un cuerpo de conocimientos donde existe un lenguaje codificado y un conjunto de significados que el estudiante debe aprender. Además, el estudiante debe manipular objetos formales, como lo hace el matemático en su quehacer diario. En este proceso, el estudiante desarrolla intuiciones acerca de las matemáticas y la forma de aprender esta disciplina Estas intuiciones, o conocimiento informal, se relacionan con las ideas que los estudiantes tienen acerca del uso de conceptos en el mundo real.

2. **Hechos y definiciones**

   Durante el proceso de resolución de un problema el estudiante debe utilizar algunos hechos necesarios para plantear o seleccionar algún camino de solución. Es decir, un inventario de recursos no solamente incluye los conocimientos, hechos y definiciones básicas, sino también la forma en que el estudiante recuerda este conocimiento y tiene acceso a él para resolver problemas.

3. **Procedimientos rutinarios**

   Aquí se identifican técnicas no algorítmicas que se utilizan para resolver ciertos tipos de problemas.

4. **Conocimiento acerca del discurso del dominio**

   La percepción que el estudiante tiene acerca de las reglas al resolver un problema, determina la dirección y los recursos que utiliza en el proceso de solución.

5. **Errores consistentes o recursos débiles**

   Cuando un estudiante comete un gran número de errores en procedimientos simples, se puede pensar que es el resultado de un mal aprendizaje.

2.2.2. Los métodos heurísticos

En esta categoría se ubican las estrategias generales que pueden ser útiles para avanzar en la resolución de un problema. “Polya (1945) identifica un conjunto de heurísticas que son comúnmente usadas al trabajar con problemas matemáticos” Santos (2007, 53). Por ejemplo, en el proceso de resolver un problema, un individuo puede explotar analogías, introducir elementos auxiliares en el problema o trabajar problemas auxiliares, descomponer o combinar algunos elementos del problema, dibujar figuras, variar el problema o trabajar con casos específicos. Estas estrategias pueden ser importantes en el proceso de entendimiento o para avanzar hacia la solución del problema” Santos (2007).

2.2.3. Las estrategias metacognitivas

Un aspecto central en la resolución de problemas es el monitoreo o autoevaluación del proceso utilizado al resolver un problema. La actividad metacognitiva es fundamental ya que permite al estudiante reflexionar sobre su propio proceso de pensamiento y de esta forma darse cuenta si la implementación de una estrategia es apropiada para avanzar en la solución de un problema o si es necesario reformular la estrategia o buscar una nueva. Silver (1994; citado en Santos, 2007) afirma que el matemático y el maestro de matemáticas reconocen que resolver problemas va más allá del solo uso de una colección de técnicas y habilidades. La evaluación o monitoreo del progreso durante la resolución de problemas y el estar consciente de las propias capacidades y limitaciones son también aspectos importantes en la resolución de problemas.

2.2.4. Los sistemas de creencias

Santos (2007) ubica en esta categoría la concepción que el individuo tiene acerca de las matemáticas. En este contexto lo que uno piense acerca de esta disciplina determina la forma en cómo selecciona una determinada dirección o método para resolver un problema. Las creencias establecen el contexto dentro del cual funcionan los recursos, las estrategias heurísticas y el control.

Schoenfeld (1992; citado en Santos, 2007), afirma que las creencias mostradas por los estudiantes acerca de las matemáticas provienen del tipo de instrucción que reciben en el salón de clases. Los elementos que tienen que ver con las creencias de los estudiantes se relacionan con el tipo de problemas desarrollados en clase, la forma como son evaluados los conocimientos, la forma de trabajo en el aula. En este contexto, una actividad central del profesor consiste en el diseño de actividades de aprendizaje que favorezcan la exploración y la formulación de conjeturas, ya que este tipo de actividades permitirán al estudiante darse cuenta de que él es capaz de descubrir o redescubrir, por sí mismo, relaciones matemáticas, acordes con su nivel de escolaridad.

Perkins y Simmon (1988; citado en Santos, 2007) identifican patrones de falso aprendizaje que se relacionan directamente con la instrucción que reciben los estudiantes como son:

2.2.5. Conceptos ingenuos

Este comportamiento se presenta cuando los conocimientos en los estudiantes no son del todo sólidos por lo que sus experiencias previas parecen delinear su forma de razonar. En matemáticas cuando los estudiantes se enfrentan a problemas donde sólo tienen que aplicar reglas, algoritmos o fórmulas, generalmente se observa cierta fluidez y eficiencia al resolverlos. Sin embargo, cuando se les pide explicar o interpretar cierta información, estos mismos estudiantes muestran serias dificultades (Santos, 1994).

2.2.6. Conceptos rituales

Santos (2007) refiere que este comportamiento se presenta cuando los estudiantes aplican los conocimientos en una forma rutinaria; esto es, son incapaces de tratar situaciones nuevas o diferentes, aun cuando tengan el conocimiento básico adecuado para afrontar tal situación. Este fenómeno se relaciona con la falta de conexiones entre los conceptos presentes en la red conceptual de los estudiantes, por lo que una actividad fundamental en la clase de matemáticas consiste en proponer actividades que permitan al estudiante establecer esas conexiones entre conceptos de diversas ramas de las matemáticas, así como entre conceptos matemáticos con los de otras disciplinas.

Schoenfeld (1985) indica que entre los objetivos fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas se encuentra eliminar las falsas creencias que tenga el estudiante acerca de las matemáticas y la resolución de problemas, además de que los estudiantes deben desarrollar ideas relacionadas con el quehacer matemático.

Por la naturaleza del presente trabajo, el constructo teórico de la matemática en contexto se hace necesario, particularmente en lo que se refiere a la etapa denominada fase didáctica, donde la resolución del problema contextualizado es crucial, Camarena (1997; citado en Hernández, 2008), señala que: “La matemática en contexto toma el problema, lo resuelve e interpreta la solución, para lo cual se requiere del modelo matemático, el cual es la representación matemática del problema.”

En el aprendizaje basado en la resolución de problemas, se recomiendo diseñar tareas que promuevan en los estudiantes el desarrollo del pensamiento matemático, estas tareas pueden ayudar al estudiante a: (i) identificar información, (ii) encontrar relaciones entre datos e incógnitas, (iii) identificar patrones, (iv) formular y validar conjeturas, (v) comunicar resultados y (vi) elaborar generalizaciones; en este sentido Barrera (2009) propone algunos elementos que caractericen a las tareas para lograr un aprendizaje con entendimiento.

2.3 CARACTERÍSTICAS DE LAS TAREAS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

En el diseño de una tarea de aprendizaje matemático se debe considerar el conocimiento previo con el que cuenta el estudiante y el proveer elementos para que el desarrollo de nuevos conceptos se articule con los existentes en una red conceptual robusta. Al respecto Barrera (2009) expone que: “*Una tarea de aprendizaje matemático incluirá los siguientes elementos: (i) un objetivo de aprendizaje, (ii) un conjunto de recursos matemáticos estructurados en torno al objetivo de aprendizaje, (iii) un escenario para desarrollar la tarea, el cual incluye a las herramientas disponibles para abordar la actividad y, (iv) un proceso inquisitivo para desarrollarla” (Barrera, 2009, p.25).*

- **El objetivo de aprendizaje.**

Con el propósito de establecer los elementos conceptuales a ser desarrollados y articulados en la ejecución de la tarea.

- **Los elementos matemáticos estructurados por el objetivo de aprendizaje**

Aquí contamos con dos elementos: (1) los externos a la actividad, (llamados recursos matemáticos), que se vinculan directamente con los que pertenecen al enunciado del problema y (2) los propios del problema.

- **Los escenarios para desarrollar la tarea**

Lugar físico provisto de los elementos apropiados para realizar la tarea, así como un grupo (compañeros, profesor) donde el estudiante pueda interactuar con sus miembros con la finalidad de fomentar el proceso inquisitivo y así como el desarrollo de elementos que le ayuden a comunicar las ideas matemáticas y a valorar el desarrollo de una forma de pensar acorde con el quehacer de la disciplina.

- **El proceso inquisitivo**

Al ejecutar una tarea de aprendizaje matemático un componente preponderante consiste en formular preguntas tendientes a articular los elementos matemáticos iniciales con aquellos que permitan conseguir lo planteado en el objetivo de aprendizaje; así como las extensiones o conexiones con otras áreas de las matemáticas o del conocimiento.

Tomando en cuenta lo anterior, y bajo la perspectiva de la resolución de problemas contextualizados con otros campos del conocimiento, consideramos que las características de las tareas de aprendizaje juegan un papel preponderante en los procesos cognitivos que ponen en práctica los estudiantes al aprender matemáticas.

2.4 FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS

En el análisis de esfuerzos en vigas, encontramos conceptos matemáticos inherentes al cálculo, que usualmente los autores de textos no refieren con detalle al desarrollar la discusión para obtener las fuerzas cortantes y los momentos flectores y a su vez representarlos gráficamente mediante lo que denominan “Diagramas de fuerza cortante y de momento flector”. A continuación presentamos, sin una discusión exhaustiva, algunos de los conceptos y resultados matemáticos que se utilizarán en el desarrollo de este trabajo.

2.4.1. Función

En lo que concierne al concepto de función, existen diversos estudios que refieren su importancia en el proceso de aprendizaje de las matemáticas; al respecto *Spivak (1978), citado por* Ruiz (1998) *afirma que el concepto más importante de las matemáticas es sin dudarlo, el de función, en casi todas las ramas de la matemática actual, la investigación se centra en el estudio de funciones. Hitt (2002), indica que: Después de los conocimientos de aritmética y álgebra, la construcción del concepto de función es la base para la posterior comprensión sobre otros temas de matemáticas.*

El concepto de función tiene lugar para describir la forma en que se relacionan dos o más cantidades que aparecen en una situación o problema dados. Por ejemplo, si consideramos un circulo de radio r, entonces hay una relación entre éste y el área; de manera más precisa, el área *A*, está determinada por la ecuación $A = \pi r^2$, a esta relación entre el radio y el área es a lo nos referimos al decir que el *área es función del radio.* Esta ecuación, se puede interpretar diciendo que para cada valor de *r*, hay uno y solo un valor del área *A*. En esta línea de ideas, Stewart (2006), refiere que: una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de otro conjunto B*. Cuando consideramos funciones donde los conjuntos A y B son conjuntos de números reales, al conjunto A se llama* ***dominio*** *de la función. El número* $f(x)$ *es el* ***valor de*** f ***en x*** *y se lee "f de x". El* ***rango*** *o* ***recorrido*** *de* f *es el conjunto de todos los valores posibles de* $f(x)$*, conforme x varía en todo el dominio.*

El concepto de función puede ser representado mediante su gráfica, la cual permite visualizar propiedades importantes de ésta, véase figura 3.

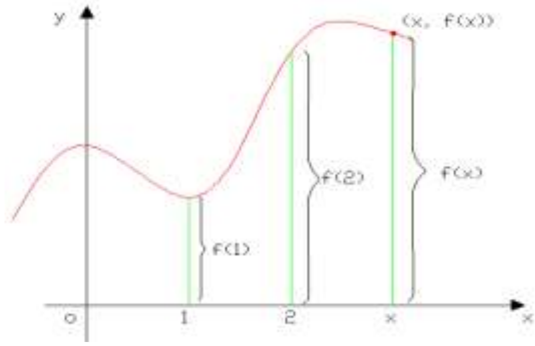
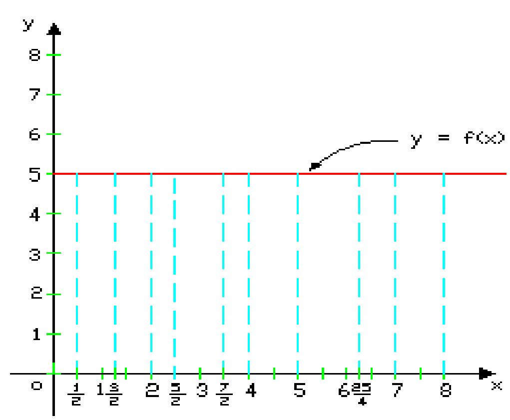


Figura 3

La gráfica de la función f nos permite visualizar la forma en que cambian los valores de la función cuando cambia *x, por ejemplo, en la Figura 3 se muestra que los valores de* f *decrecen de 0 a 1 y crecen de 1 a 2*.

a) Función constante

Se dice que una función es constante cuando: para todos los valor de x (dominio de f) el valor de $f(x)$ es el mismo. Por ejemplo, si la distancia que recorre una vehículo están en función del tiempo ($s(t)$) y se tiene que para diferentes momentos la distancia recorrida es la misma, entonces se dice que la función $s(t)$ que define a la distancia recorrida se mantiene constante; en la gráfica siguiente (figura 4) se observa que para todos los valores del intervalo analizado, el valor de la función es el mismo, por eso el valor de la función f(x) es constante, para el ejemplo consideremos a la función $f(x) = 5$



x	f(x)
$\frac{1}{2}$	5
$\frac{3}{2}$	5
2	5
$\frac{5}{2}$	5
$\frac{7}{2}$	5
4	5
5	5
$\frac{25}{4}$	5
7	5
8	5

Figura 4

b) Función definida por tramos

En ocasiones, cuando las funciones se definen usando más de una regla de asignación en diferentes partes de su dominio, se dice que se trata de funciones definidas por tramos (Thomas, 2006), también se les llama funciones seccionalmente definidas (Stewart 2006) o funciones definidas a trozos (Leithold, 1998), para comprender este tipo de funciones consideremos el ejemplo siguiente:

En una viga simplemente apoyada donde actúa una carga concentrada “P” a la mitad de los apoyos (centro del claro de longitud L), se tiene que el momento flector del elemento estructural está definido por la siguiente función:

$$M(x) = \begin{cases} \dfrac{Px}{2} & \text{si} \quad 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\ P\left(\dfrac{L-x}{2}\right) & \text{si} \quad \dfrac{L}{2} < x \le L \end{cases}$$

La representación gráfica de esta función se ilustra en la figura 5 donde se puede constatar que, cuando $0 \le x \le \frac{L}{2}$ se tiene una función lineal con pendiente positiva, y en el intervalo cuando $\frac{L}{2} < x \le L$ se trata de una función lineal con pendiente negativa; es decir en el intervalo L existen dos expresiones algebraicas que definen a la función que modela al momento $M(x)$.

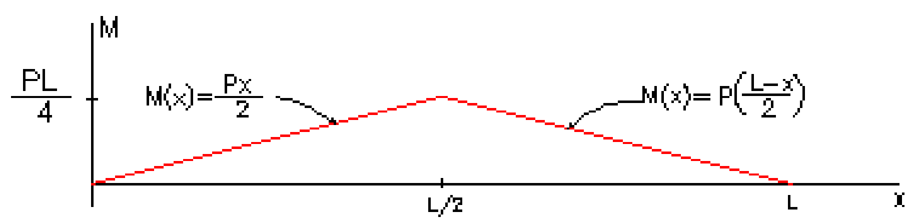


Figura 5

Otro ejemplo de funciones seccionalmente definidas se muestra a continuación: Se tiene que el servicio para traslado de pasajeros en una ciudad cuesta $15 al abordar el vehículo de transporte, y $5.00 por cada tres kilómetros de recorrido, de esta manera el costo por el servicio en una distancia de 9 kilómetros estaría representado de la siguiente manera:

$$c(d) = \begin{cases} 15 & 0 \leq \mathrm{d} < 3 \\ 20 & 3 \leq \mathrm{d} < 6 \\ 25 & 6 \leq \mathrm{d} < 9 \\ 30 & 9 \leq \mathrm{d} < 12 \end{cases}$$

Donde: $c(d)$ es la función que define el costo del servicio de transporte respecto de la distancia recorrida d; la representación gráfica de esta función salta de un valor al siguiente (figura 6), de aqui que a las funciones semejantes a ésta se les llama función escalón (stewart 2006)

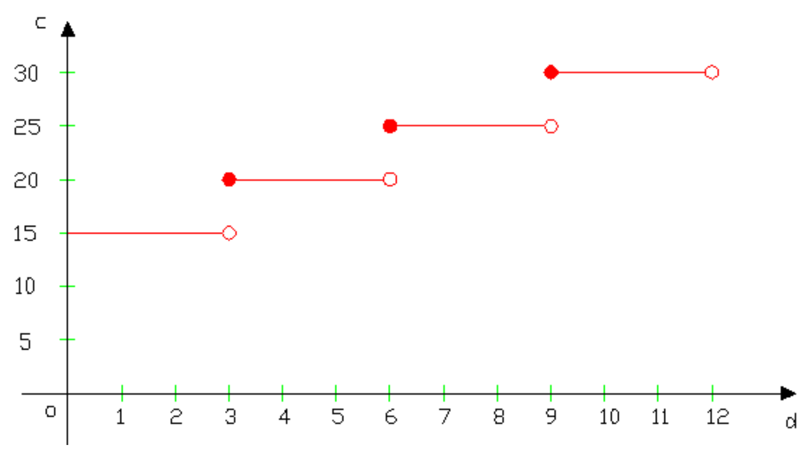


Figura 6

c) Funciones Continuas

Se puede decir que la clase de funciones más importantes en el estudio del cálculo son las funciones continuas (Leithold, 1990); como la continuidad de una función depende de la existencia del límite de ésta cuando la variable independiente x tiende a un número determinado, es fundamental conocer el concepto de límite, Stewart (2006) indica que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

> Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L, si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como deseemos) escogiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a (Stewart, 2006, p. 99).

En esta dirección Stewart (2006), señala que una función f es continua en un número a si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Se tiene que si $\lim_{x \to a} f(x)$ o $f(a)$ no existen, o $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, la función será discontinua. De acuerdo con Leithold (1998), para que $\lim_{x \to a} f(x)$ exista, debe de satisfacerse que los límites laterales existan y sean iguales: "El $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a *L* si y solo si $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existen y son iguales a *L*" (Leithold, 1998, p. 51).

Un ejemplo de este tipo de funciones se tiene en las vigas simplemente apoyadas sometidas a una carga uniformemente distribuida a lo largo del claro, donde la expresión que modela al momento flector está determinado por $M(x) = \frac{w}{2}(Lx - x^2)$; su representación gráfica se ilustra a continuación:

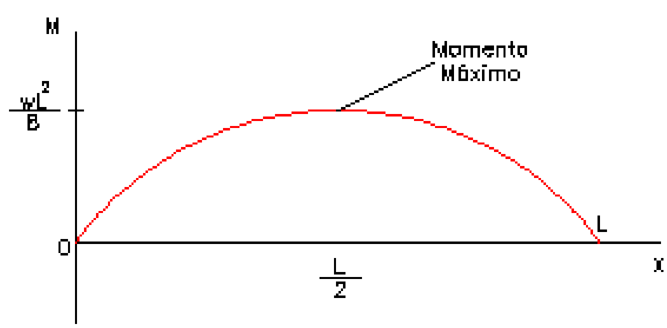


Figura 7

Para que la función sea continua debe cumplirse que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, verifiquemos en $x = \frac{L}{2}$, (este punto es importante porque aquí existe un momento máximo):

$$M(a) = \frac{w}{2}(Lx - x^2) = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{w}{2}(L\frac{L}{2} - \left(\frac{L}{2}\right)^2) = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{wL^2}{8}$$

Por lo que $M(a)$ existe y es igual a $\frac{wL^2}{8}$, ahora analizamos el $\lim_{x\to a} M(x)$:

$$\lim_{x\to \frac{L}{2}^-} M(x) = \frac{w}{2}(L\frac{L}{2} - \left(\frac{L}{2}\right)^2) = \frac{wL^2}{8}$$

$$\lim_{x\to \frac{L}{2}^+} M(x) = \frac{w}{2}(L\frac{L}{2} - \left(\frac{L}{2}\right)^2) = \frac{wL^2}{8}$$

Como $\lim_{x\to \frac{L}{2}^-} M(x) = \lim_{x\to \frac{L}{2}^+} M(x)$, se dice que $\lim_{x\to \frac{L}{2}} M(x)$, existe y es igual a $\frac{wL^2}{8}$; por lo tanto podemos concluir que $\lim_{x\to a} M(x) = M(a)$ y por lo tanto la función es continua en a.

2.4.2. Derivada de una función

Sin duda, los dos problemas más importantes en cálculo son el cálculo de tangentes a una curva y el cálculo de áreas. Estos dos problemas tienen relación con muchos otros en diversas aplicaciones. Por ejemplo, calcular tangentes está relacionado directamente con problemas de velocidad instantánea, conectando esto con el concepto de la derivada de una función. De igual forma, el cálculo de áreas se relaciona con el cálculo de la cantidad de trabajo que realiza una fuerza al desplazar un objeto siguiendo una trayectoria.

El concepto de derivada ayuda a entender la solución a problemas en donde se desea conocer, en un instante especifico, cómo está variando una cantidad respecto de otra. En muchos problemas de física el tiempo es una de estas cantidades, aunque pueden realizarse análisis respecto de otras variables. De acuerdo con Stewart (2006), “La velocidad de una partícula es la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo. Los físicos también se interesan en otras razones de cambio: por ejemplo, la razón de cambio del trabajo con respecto al tiempo (lo que se conoce como potencia)”; los químicos lo usan para conocer la velocidad de reacción de una sustancia, y los biólogos para conocer la razón de cambio de una población de bacterias también respecto del tiempo, en geometría se interpreta como el valor de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto determinado.

Como se mencionó antes, el cálculo de la velocidad en un instante específico (llamada velocidad instantánea) es una de las aplicaciones de la derivada. En este contexto, si consideramos que un vehículo recorre una distancia de 80 kilómetros, en la misma dirección en un lapso de 2 horas, se dice que la velocidad promedio para recorrer la distancia es: de 40 km/hr, esta información no permite conocer la velocidad en algún instante determinado del intervalo de tiempo t = 2 horas.

Si consideramos la ecuación $s = f(t)$, donde s (distancia en metros desde un punto de origen) es función del tiempo t (en segundos), el cambio de la distancia desde el punto de origen (P_0) al punto P_1; es $\mathrm{s}_1 - s_0$ metros en el intervalo de tiempo $\mathrm{t} = t_1 - t_0$ entonces la velocidad promedio entre dos puntos P_0 y P_1 de un objeto móvil se establece como:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} \quad \text{metros/segundo}$$

Entre más pequeño sea el intervalo $t_1 - t_0$, más cerca estará la velocidad promedio de la velocidad instantánea, en otras palabras podemos indicar que;

cuando el cambio de tiempo $t = t_1 - t_0$ tiende a cero, el límite de la velocidad promedio es la velocidad instantánea y se puede expresar de la siguiente manera:

$$\text{velocidad instantánea} = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Por ejemplo, si el movimiento de una partícula está definido por la ecuación:

$$s = t^2 - 2t - 1$$

Donde:

s = distancia (en metros)

t = tiempo (en segundos)

Para obtener un valor aproximado de la velocidad instantánea de la partícula en 3 segundos, analizamos que ocurre con $\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$ en diferentes instantes de tiempo, la siguiente tabla indica los resultados:

t_0	t_1	$t_1 - t_0$	s_0	s_1	$s_1 - s_0$	$\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$
3	6	3	2	23	21	7
	5	2		14	12	6
	4	1		7	5	5
	3.5	0.5		4.25	2.25	4.5
	3.4	0.4		3.76	1.76	4.4
	3.3	0.3		3.29	1.29	4.3
	3.2	0.2		2.84	0.84	4.2
	3.1	0.1		2.41	0.41	4.1

Tabla 1

Se puede observar que cuando el cambio en el tiempo $t = t_1 - t_0$ tiende a cero el cociente $\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$ se aproxima a 4 metros/segundo. Al valor límite de la sucesión de cocientes se le denomina velocidad instantánea.

De la ecuación (1) podemos observar que la distancia $s_1 - s_0$ es función del tiempo por lo que puede expresarse como $s(t_1) - s(t_0)$. Además, del cambio de tiempo $t = t_1 - t_0$ decimos que $t_1 = t_0 + t$, por lo que el cambio de distancia se determina como $s(t_0 + t) - s(t_0)$, sustituyendo lo anterior en (1), tendríamos:

$$\text{velocidad instantánea} = \lim_{t \to 0} \frac{s(t_0 + t) - s(t_0)}{t}$$

Lo anterior indica que la velocidad instantánea es límite del cociente del cambio de posición (*s* que es función del tiempo) entre el cambio en la variable *t* (tiempo), cuando éste tiende a cero; de hecho es el concepto de derivada.

Se dice que una función f tiene derivada en un número a, y se denota por $f'(a)$, si el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

existe. La interpretación geométrica de la derivada es el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ de la gráfica de la función. La figura siguiente muestra esta idea.

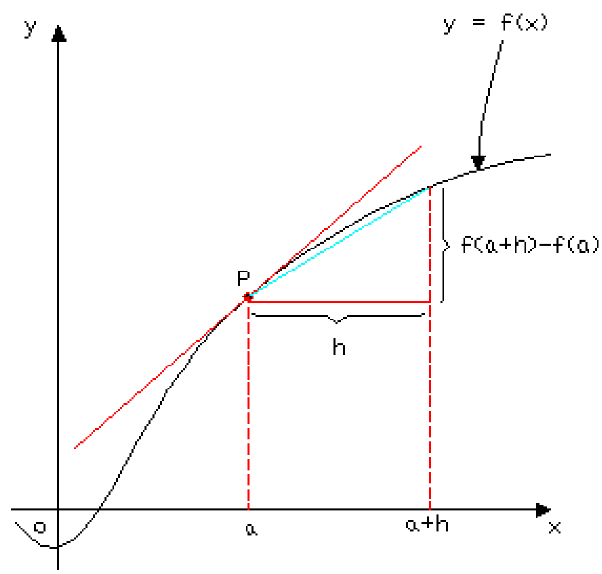


Figura 8

2.4.3. Integral de una función

Cuando deseamos encontrar el área de un polígono regular contamos con reglas o fórmulas simples para hacerlo; si el polígono es de forma irregular, subdividimos a éste en triángulos y la suma de las áreas de las sub-figuras da como resultado el área del polígono; pero cuando tenemos figuras formadas por curvas, resulta complicado el cálculo del área de la figura. Una estrategia para aproximar el área A que está entre el eje horizontal y la gráfica de una función cuya regla de correspondencia es $y = f(x)$, entre las líneas verticales $x = a$ y $x = b$, como se indica en la figura 9, consiste en construir rectángulos u otros polígonos que aproximen al área d

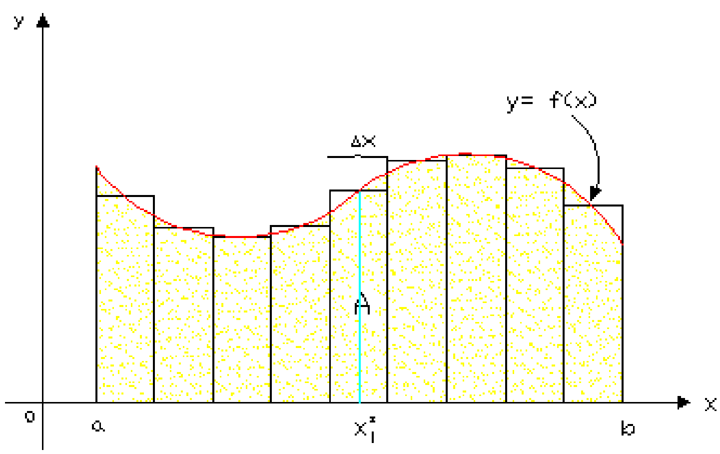


Figura 9

De acuerdo con Stewart (2006), el área A que se encuentra entre el eje horizontal y la gráfica de la función continua f, es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación, y; "si consideramos la altura del i-ésimo rectángulo como el valor de f en cualquier número x_i^* en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, A estos números $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ los llamamos puntos muestras*"*, por tanto la suma de estos rectángulos se puede escribir como:

$$\sum_{i-1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x$$

Stewart (2006), define a la integral definida de la siguiente manera:

Si f es una función continua definida para $a \leq x \leq b$, dividimos el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de ancho igual a $\Delta x = (b-a)/n$. Hacemos que $x_0(=a), x_1, x_2,..., x_n(=b)$ sean los puntos extremos de esos intervalos y elegimos $x_1^*, x_2^*,..., x_n^*$ como los puntos muestras en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, Entonces la integral definida de f, desde a hasta b, es*:*

$$\int_a^b f(x)dx = lím\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Veamos que ocurre en un problema común en el análisis de vigas, donde el cálculo del momento máximo representa el valor del área entre el eje horizontal y la gráfica de la función que modela al esfuerzo cortante: Para esto se considera una viga simplemente apoyada en A y B, afectada por una carga uniformemente distribuida, con un claro de longitud L, la figura 10 ilustra una viga de estas características:

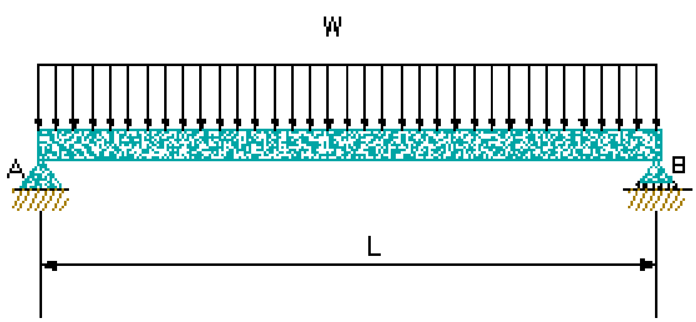


Figura 10

La fuerza cortante de la viga se encuentra definida por la función cuya regla de correspondencia es $V(x) = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$, si obtenemos el momento máximo en la viga se podrá comprobar que éste, es el valor del área bajo la curva en el intervalo $[0, x]$, definido por $V(x)$.

La representación gráfica de la fuerza cortante $V(x)$, se observa a continuación:

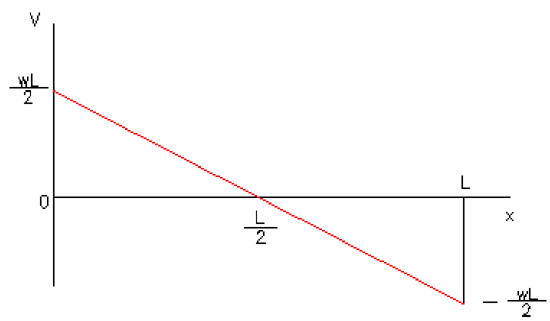


Figura 11

Si se toma un fragmento de la viga definido por los extremos D y D' separados por una longitud Δx, la fuerza cortante y el momento flector en D quedaran expresados por V y M, mientras que en D' estarán representados por $V + \Delta V$ y $M + \Delta M$, respectivamente como se muestra a continuación en la figura 12:

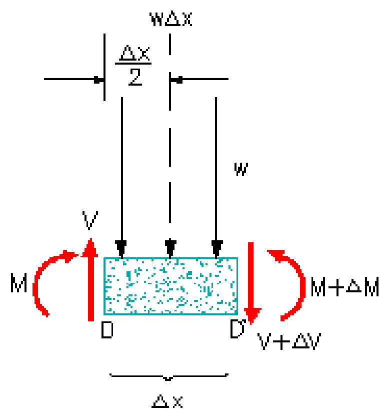


Figura 12

La suma de momentos respecto de D', en el fragmento D-D' es igual a cero, de esto se tiene que:

$$(M+\Delta M)+w\Delta x\frac{\Delta x}{2}-V\Delta x-M=0 \text{, despejando:}$$

$$\Delta M=-\frac{1}{2}w\Delta x^2+V\Delta x$$

Dividiendo entre Δx y luego haciendo que $\Delta x\to 0$ (concepto de derivada); obtenemos:

$$\frac{dM}{dx}=V \text{ ……………………………………….}\Psi$$

La integración de una función es el proceso inverso de la derivación; el teorema fundamental del cálculo da la relación inversa precisa entre la derivada y la integral (Stewart, 2006), en ésta dirección el teorema se establece como:

> Teorema fundamental de cálculo:
> Supóngase que f es continua sobre $[a,b]$.
> 1. Si $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ entonces $g'(x)=f(x)$.
> 2. $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, donde f es cualquier antiderivada de f, es decir $F'=f$, (Stewart, 2006, p 381).

De acuerdo con Beer (2010), si se integra la ecuación ψ entre 0 y x se tendrá:

$$M_x-M_0=\int_0^x V\,dx$$

$$M_x-M_0=\text{(Área bajo la curva de fuerza cortante entre 0 y } x\text{)}$$

De lo anterior resulta que el área entre el eje horizontal y la gráfica de la función V entre 0 y x, es igual al momento $M(x)$.

De ψ conocemos que $V(x)$ es la derivada de la función que define al momento $M(x)$, por tanto $V(x)$ indica la variación de cambios (geométricamente la variación de la pendiente), entonces cuando $V(x)=0$, se dice que existe un valor máximo o mínimo en $M(x)$, sabemos que $V(x)=w\left(\frac{L}{2}-x\right)$, de aquí:

$$\frac{wL}{2}-wx=0 \text{, despejando:}$$

$x=\frac{L}{2}$; valor de la longitud (x) respecto del apoyo A, donde existe máximo o mínimo

Para identificar si se trata de un valor máximo o mínimo, derivamos la ecuación ψ (segunda derivada de M):

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{dV}{dx}\ ; \quad \frac{d^2M}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[w\left(\frac{L}{2}-x\right)\right]$$

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{wL}{2}\right)}{dx}-\frac{d(wx)}{dx}=0-w; \quad \frac{d^2M}{dx^2}=-w$$

El signo negativo indica que se trata de un máximo (criterio de la segunda derivada para encontrar máximos o mínimos), por lo tanto el valor $x=\frac{L}{2}$ es un valor máximo de $M(x)$.

Como el área que define a la región bajo la curva de $x=0$ a $x=\frac{L}{2}$, se trata de un triangulo de altura $\frac{wL}{2}$ y base $\frac{L}{2}$, la región bajo la curva $V(x)$ en este intervalo resulta:

$$\text{Area}=\frac{\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{wL}{2}\right)}{2}=\frac{\frac{wL^2}{4}}{2}=\frac{wL^2}{8}$$

Antes se expuso que $\int_0^x V(x)dx$ corresponde a $M_x - M_0 =$(Área bajo la curva de fuerza cortante entre *0 y* x), integramos para obtener $M(x)$.

$$\int_0^x V(x) = \int_0^x w\left(\frac{L}{2} - x\right)dx$$

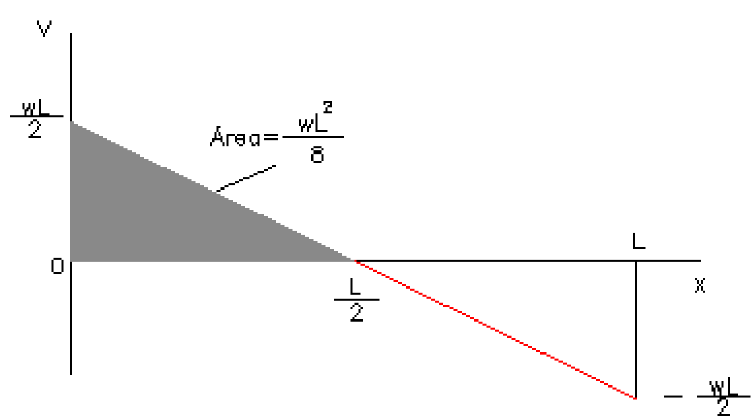
$$M(x) = w\int_0^x\left(\frac{L}{2} - x\right)dx = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}\bigg|_0^x = \frac{w}{2}(Lx - x^2)\Big|_0^x$$

Ya definimos que en $x = \frac{L}{2}$, tenemos un máximo (para el caso momento máximo); evaluamos la función integrada con este valor:

$$M(x) = \frac{w}{2}(Lx - x^2)\Big|_0^{\frac{L}{2}} = \frac{w}{2}\left(L\frac{L}{2} - \frac{L^2}{4}\right) - \frac{w}{2}(0 - 0)$$

$$M(x) = \frac{w}{2}\left(\frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{4}\right) = \frac{w}{2}\left(\frac{2L^2 - L^2}{4}\right) = \frac{w}{2}\left(\frac{L^2}{4}\right) = \frac{wL^2}{8}$$

Comprobando con esto que el área bajo la curva de $V(x)$ en el intervalo $[0, x]$, cuando $x = \frac{L}{2}$; es igual a su correspondiente integral y por tanto que $M(x)$, la representación gráfica de ambas funciones se ilustra a continuación:



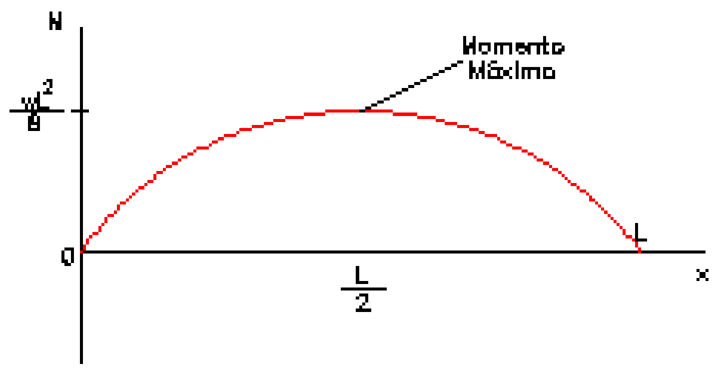


Figura 13

2.5 FUNDAMENTOS DE FÍSICA Y DE ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

Como ya se ha mencionado, el diseño de una viga está relacionado con el cálculo de fuerzas internas llamadas: (i) esfuerzo o fuerza cortante y (ii) momento flexionante; éstas equilibran a las fuerzas externas que actúan sobre el elemento estructural de acuerdo con la tercera ley de Newton (a toda acción se opone siempre una reacción igual y contraria); en este sentido Craig (2006) al referirse a las fuerzas que actúan sobre una viga simplemente apoyada como la ilustrada en la figura 14, señala:

> Si se pasa un plano imaginario de corte en C, como se muestra en la figura 5.2a, y se trazan diagramas de cuerpo libre separados de los tramos AC y CB (fig.5.4), se puede observar que sobre la sección transversal en C deben actuar una fuerza cortante transversal V_C y un momento flexionante M_C para mantener el equilibrio de fuerzas y el equilibrio de momentos en estos dos diagramas de cuerpos libres vecinos. La ley de acción y reacción de Newton determina la relación de las direcciones V_C y M_C en los diagramas de cuerpo libre (Craig, 2006, p. 302).

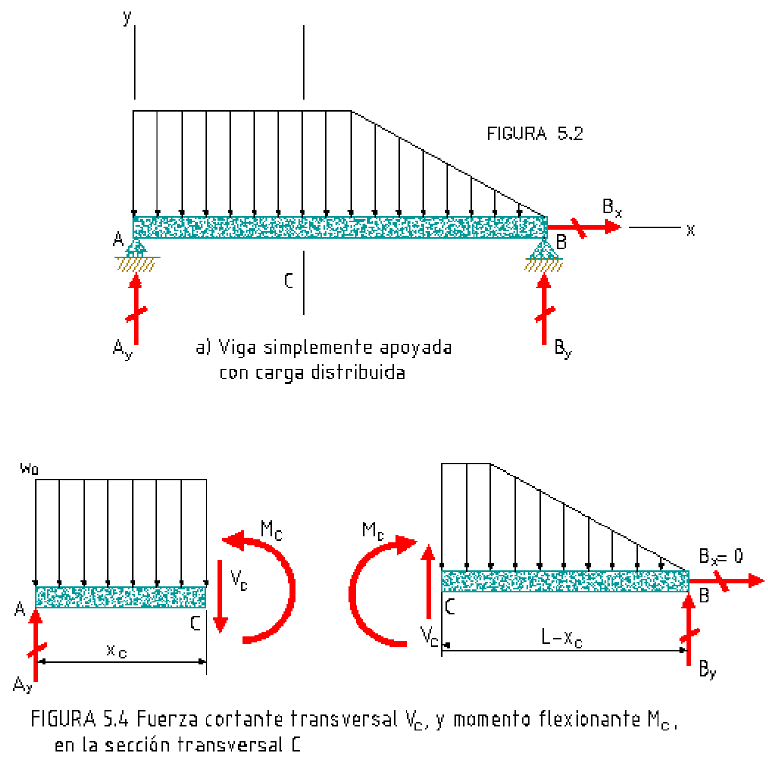


Figura 14

De acuerdo con lo anterior, se requiere formular el concepto de equilibrio, fuerzas o esfuerzos cortantes, momentos flexionantes o flectores, para tal efecto las leyes de movimiento y de inercia establecidas por Newton, son fundamentales.

2.5.1. Leyes de Newton

Los principios que en forma básica se aplican en el análisis de estructuras son, como ya indicamos, las leyes de movimiento y de inercia de Newton. De acuerdo con Resnick (1965) se tiene:

1ª Ley.- Todo cuerpo conserva su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que sea obligado a cambiar ese estado por fuerzas aplicadas sobre él.

2ª Ley.- El cambio de movimiento (aceleración) es proporcional a la fuerza motriz aplicada; y se efectúa en la dirección de la línea recta que aplica la fuerza.

3ª Ley.- A toda acción se opone siempre una reacción igual y contraria; o bien, las acciones mutuas entre dos cuerpos son siempre iguales, y dirigidas a partes contrarias.

La segunda ley de Newton puede representarse por la ecuación:

$$\sum F = ma \quad \text{(Segunda ley de Newton)}$$

Donde:

$\sum F$ = Suma de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo,

m = masa del cuerpo

a = aceleración

2.5.2. Equilibrio

Como las fuerzas internas contrarrestan el efecto de las fuerzas externas se dice que éstas están en equilibrio, Resnick (1965) al referirse al equilibrio de los cuerpos rígidos menciona:

> El movimiento del cuerpo rígido es un movimiento de rotación y de traslación, cuando un cuerpo rígido permanece en reposo, o se mueve en conjunto, de tal manera que su velocidad lineal y su velocidad angular son uniformes, tanto la aceleración lineal del cuerpo como su aceleración angular son nulas. La resultante de todas las fuerzas y la resultante de todos los momentos que obran en ese cuerpo son nulos, y se dice que el cuerpo rígido esta en equilibrio mecánico. Se dice que el equilibrio es estático si el cuerpo rígido esta en reposo. La rama de la mecánica que estudia el equilibrio estático de un cuerpo rígido se llama estática de los cuerpos rígidos. (Resnick, 1965, p. 302)

Como se mencionó, las leyes de movimiento están regidas por la ecuación:

$$\sum F = ma$$

En el estudio de las estructuras que se diseñan en ingeniería civil se considera que las estructuras no se mueven, de acuerdo con Nelson (2006) esto da como resultado *un tipo particular de equilibrio, llamado* ***equilibrio estático****, en el que el sistema no está acelerado.* Por lo que la ecuación anterior queda de la siguiente manera:

$$\sum F = 0$$

Al definir el concepto de equilibrio Nelson (2006) señala que:

Se dice que un cuerpo en reposo está en equilibrio estático cuando la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo (incluyendo las fuerzas de apoyo, que se llaman reacciones) es igual a cero. No sólo deben ser cero la suma de todas las fuerzas (o de sus componentes) que actúan en cualquier dirección posible, sino también la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto a cualquier eje.

Por tanto para que una estructura o una parte de la misma que está sujeta a un sistema de cargas se pueda considerar que está en equilibrio, Nelson (2006) argumenta que: "*se deberá de satisfacer las seis ecuaciones de equilibrio de la estática. Con los ejes cartesianos* x, y y z, *las ecuaciones de equilibrio de la estática pueden escribirse de la siguiente manera:*

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 \qquad \sum M_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

Nelson (2006) manifiesta que: *para fines de análisis y diseño la mayoría de las estructuras pueden considerarse planas, sin que ello implique pérdida de la exactitud. Por tanto las ecuaciones de equilibrio se reducen a:*

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

2.5.3. Fuerzas cortantes

El texto, materia de análisis en el presente trabajo Beer (2010), no describe en forma precisa lo que se refiere al concepto de fuerza cortante y momento flexionante.

Mott (1996) define a las fuerzas cortantes en una viga de la siguiente forma: *"Las fuerzas cortantes son fuerzas internas que se generan en el material de una viga* *para equilibrar las fuerzas aplicadas externamente y para garantizar el equilibrio de su partes".*

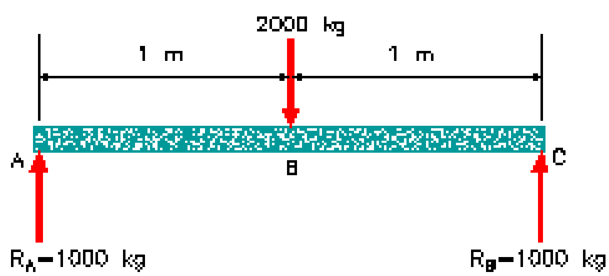
Para conocer la fuerza cortante en una sección longitudinal de la viga se considera a ésta parte del elemento como cuerpo libre con todas las cargas externas a que está sometida, a este respecto Mott (1996) refiere que:

> La presencia de fuerzas cortantes se puede visualizar considerando cualquier segmento de la viga como un cuerpo libre con todas las cargas externas aplicadas (Mott, 1996, pp. 195).

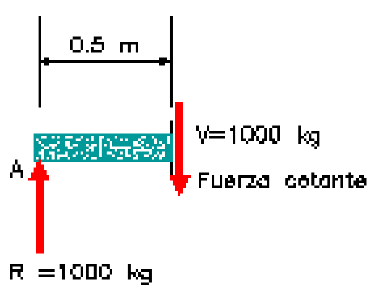
A este método para determinar las fuerzas cortantes internas Criag (2002) le denomina "*método de secciones".*

Según Mott (1996) un segmento de la viga se obtiene *al cortarla en un punto de interés y al considerar la parte de la viga a un lado del corte. Normalmente, se considera que el segmento de interés es el de la izquierda del corte.* Para entender lo antes descrito se puede tomar en consideración una viga simplemente apoyada, con un claro de longitud *L*=2, con una carga de 2000 Kg concentrada en la parte media del claro como lo muestra la figura 15:

a)



b)



c)

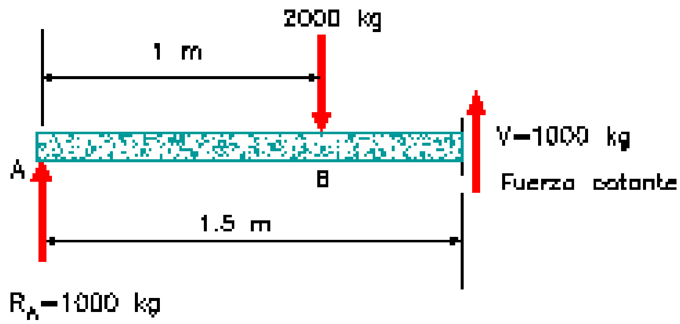


Figura 15

En el segmento de la viga que se muestra en el inciso b) de la figura 8 se constata que existe una fuerza externa R_A=1000 kg, por lo tanto para que el segmento esté en equilibrio debe de existir una fuerza interna de 1000 kg, perpendicular al eje de la viga que actué hacia abajo; ésta es la fuerza cortante y comúnmente se le denota por el símbolo V. Lo mismo sucede con el segmento de la viga que se muestra con el inciso c) solo que en este caso la fuerza interna para equilibrar el segmento de la viga debe ser de 1000 dirigida hacia arriba.

De acuerdo con Mott (1996) la determinación de las fuerzas cortantes se puede generalizar enunciando la regla siguiente:

> La magnitud de la fuerza cortante en cualquier parte de una viga es igual a la suma algebraica de todas las fuerzas externas que actúan a la izquierda de la sección de interés (Mott, 1996, p. 195).

2.5.4. Momentos flexionantes

Los momentos flexionantes en las vigas se desarrollan debido a la aplicación de cargas perpendiculares a su eje longitudinal, Nelson (2006) los define de la siguiente manera:

> El momento flexionante es la suma algebraica de los momentos causados por todas las fuerzas externas a la derecha o a la izquierda de una sección particular. El momento flexionante se calcula respecto a un eje que pase por el centroide de la sección transversal (Nelson, 2006, pp. 102).

La forma de obtener la magnitud de los momentos flexionantes se realiza en forma similar al proceso usado para calcular la magnitud de las fuerzas cortantes, es decir se toma el segmento de interés de la viga y se realiza suma de momentos a la izquierda respecto del punto donde se realiza el corte.

2.5.5. Análisis y diseño estructural

El cálculo y diseño de estructuras son parte fundamental en un proyecto de obra civil, el análisis estructural, es una etapa crucial en este proceso y para llevarlo a efecto, se requiere del estudio detallado de los elementos que conforman a la estructura; esto, tiene que ver con las fuerzas y deformaciones que se producen cuando son sometidos a cargas externas. Nelson (2006) señala que: “Se denomina análisis estructural al cálculo de la magnitud de estas fuerzas, así como de las deformaciones que las causaron”.

El análisis de estructuras ha evolucionado a lo largo de la historia del hombre; la construcción de obras por parte de culturas antiguas como la romana y griega, muestra evidencia del uso de vigas, arcos, y marcos; sin que exista constancia de que se haya realizado apegado a un método para su desarrollo; a esto Nelson (2006) expone que: “Si bien los antiguos ingenieros manifestaron tener cierto entendimiento del comportamiento estructural (como lo prueban sus exitosas construcciones de grandes puentes, catedrales, barcos de vela etc.) un progreso real en la teoría del análisis estructural ocurrió solo en los últimos 150 años”.

El estudio de las estructuras y su análisis, tiene como base a la ciencia de la mecánica de los materiales cuyo progreso según Nelson (2006) “se dio en el siglo XIX, encontrando entre otras aportaciones para su desarrollo la del físico francés Charles Agustín de Coulomb (1736-1806) y la de Claude Lois Marie Henri Navier (1785-1836) ingeniero matemático inglés, que en 1826 publicó un libro donde analizó las resistencias y las defecciones de vigas, columnas, y otras estructuras”.

Trabajos para calcular deflexiones en vigas aparecieron posteriormente: el teorema de las deflexiones reciprocas de Maxwell (1864), el método de pesos elásticos por Mohr (1870), el teorema de trabajo mínimo de Castigliano (1873) entre muchos otros hasta hoy en día en que muchos problemas estructurales son expresados en forma matemática para su análisis.

2.5.6. Principios básicos del análisis estructural

Los principios fundamentales que se usan en el análisis estructural son las leyes de movimiento y de inercia de Newton. Anteriormente se mencionó que para fines de análisis y diseño, la mayoría de las estructuras se consideran planas; por lo que las ecuaciones a considerar se resumen a las siguientes:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

2.5.7. Componentes y sistemas de estructuras

La palabra estructura cuenta con varios significados, Hsieh (1986), señala que: "*estructura de ingeniería se entiende como algo que está construido";* entre otras estructuras con que trabaja el ingeniero civil están los puentes, edificios, muros, presas, torres, cáscaras; estos sistemas de estructuras se componen de uno o más elementos resistentes, colocados de tal forma que sean capaces de mantenerse sin cambios apreciables en su geometría durante la carga y descarga.

En forma elemental los sistemas estructurales están conformados por elementos como: vigas, cerchas y pórticos rígidos; Nelson (2006), señala que los componentes principales en una estructura son: Tirantes, puntales, vigas y trabes, columnas y diafragmas.

2.5.8. Fuerzas en las estructuras

Para el estudio de las estructuras se puede considerar la existencia de fuerzas externas y fuerzas internas; Las fuerzas externas que actúan sobre una estructura son producidas por las cargas aplicadas y las reacciones resultantes, al respecto Nelson (2006) indica que: “Las cargas aplicadas son las cargas conocidas que actúan sobre una estructura. Ellas pueden ser resultantes del propio peso de la estructura, de las cargas ambientales, etc. Las reacciones son las fuerzas que los soportes ejercen sobre una estructura. Ellas se consideran como parte de las fuerzas externas aplicadas y están en equilibrio con las otras cargas externas sobre la estructura”.

Según Beer (2010), “las fuerzas internas son aquellas que mantienen unidas las partículas que conforman al cuerpo rígido, su análisis permite determinar las magnitudes de las fuerzas cortantes y momentos flectores producidos por las cargas; factores que determinan el tamaño de la sección transversal de la viga; en este sentido Hsieh (1986) señala que una viga “Se analiza completamente cuando quedan determinados los valores del momento flector y la fuerza cortante”.

2.5.9. Representación de las estructuras

El estudio de fuerzas que actúan en cualquier elemento estructural, requiere representarlas de manera sencilla, Nelson (2006) describe que: “El proceso de reemplazar una estructura real por un sistema simple susceptible de análisis se llama idealización estructural”. A la representación de una parte de la estructura incluyendo todas las fuerzas que actúan sobre ella (fuerzas externas, incluyendo las reacciones y las fuerzas internas) se le denomina diagrama de cuerpo libre; al respecto Beer (2010) describe que: “al diagrama de un cuerpo donde se indique en forma clara las fuerzas que actúan sobre ellos, se les llama diagramas de cuerpo libre”.

La figura 16 muestra en el inciso: (a) una viga simple con dos apoyos y sometida a dos cargas; (b) el diagrama de cuerpo libre con las fuerzas de reacción y (c) un diagrama de cuerpo libre de las dos partes de la viga cortada en A.

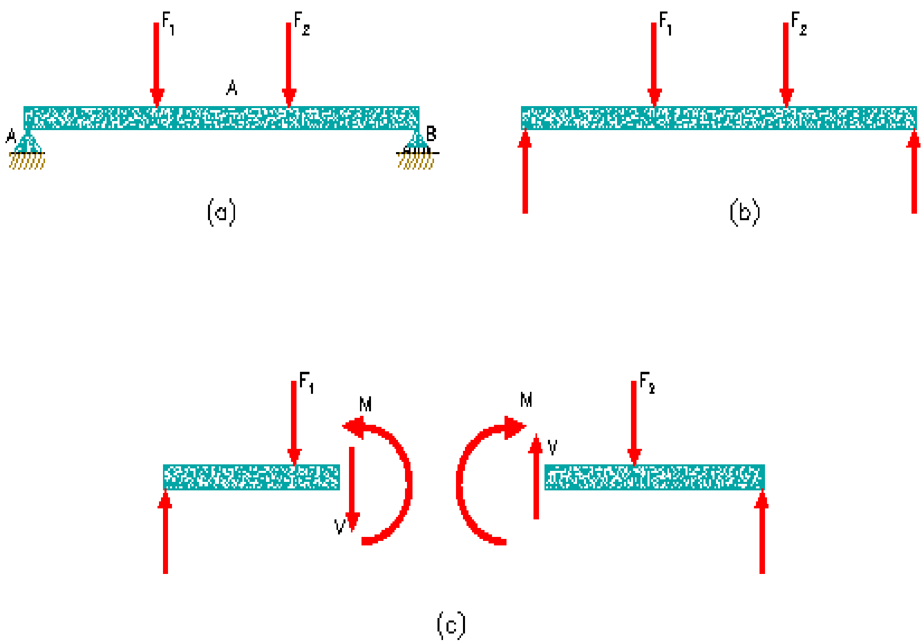


Figura 16.

2.5.10. Vigas, tipos de cargas y apoyos

El presente trabajo se limita al análisis de vigas y las fuerzas que actúan en ella, anteriormente nos referimos a las vigas como uno de los elementos básicos de un sistema estructural; de acuerdo con Beer (2010), una viga es “Un elemento estructural diseñado para soportar cargas que sean aplicadas en varios puntos a lo largo del elemento”, agregando además que; “En la mayoría de los casos, las cargas son perpendiculares al eje de la viga y únicamente ocasionaran corte y flexión sobre ésta”.

Las cargas aplicadas a las estructuras son entre otras: el mismo peso de la estructura, el tránsito de personas, vehículos o animales; de tipo natural como lo es la nieve, el viento, la lluvia. En este sentido Beer (2010) resume que: “Una viga puede estar sujeta a cargas concentradas, a una carga distribuida o una combinación de ambas cargas. Cuando la carga w por unidad de longitud tiene un valor constante sobre una parte de la viga, se dice que la carga está uniformemente distribuida”. La figura 17 muestra la representación común de este tipo de cargas.

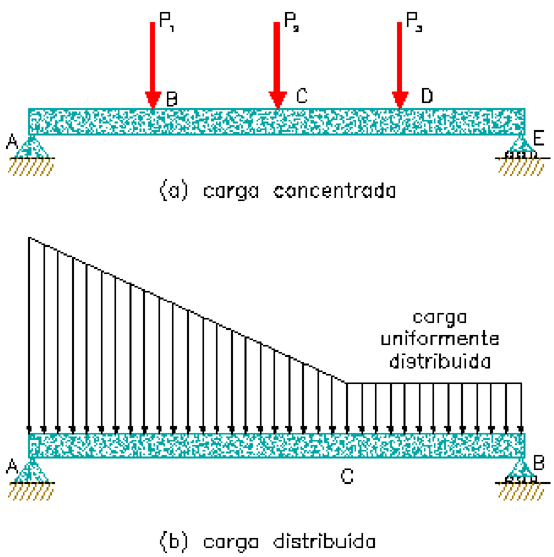


Figura 17

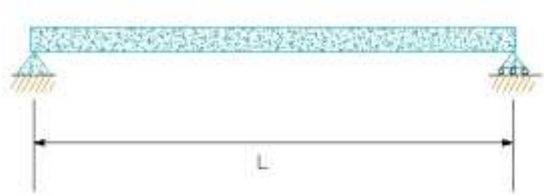
Las vigas que pueden analizarse por medio de la estática se denominan estáticamente determinadas, lo anterior está en función del tipo de apoyos. Hsieh (1986) define a este tipo de estructuras como “aquella que puede ser analizada mediante la aplicación de ecuaciones de la estática únicamente. En caso contrario, la estructura es estáticamente indeterminada” (Hsieh, 1986, pp. 4).

En lo que respecta a los apoyos, Beer (2010), establece que:

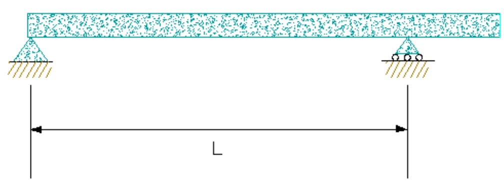
> Las reacciones se determinaran siempre y cuando los apoyos involucren únicamente tres incógnitas; de estar involucradas más de tres incógnitas, las reacciones serán estáticamente indeterminadas.

La figura 18 ilustra la clasificación de vigas de acuerdo a su forma de apoyo:

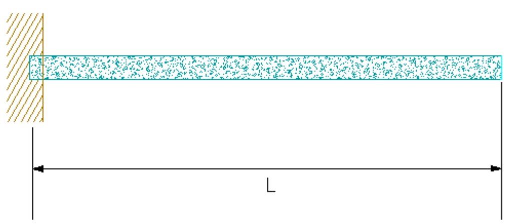
Vigas estáticamente determinadas



a) Viga simplemente apoyada

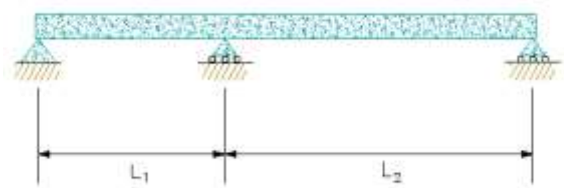


b) Viga con voladizo

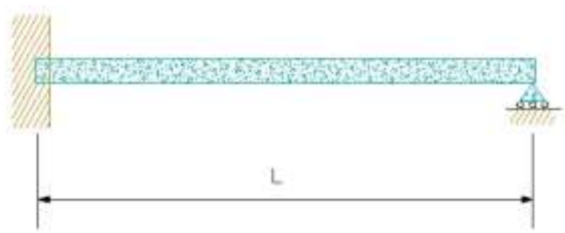


c) Viga en voladizo

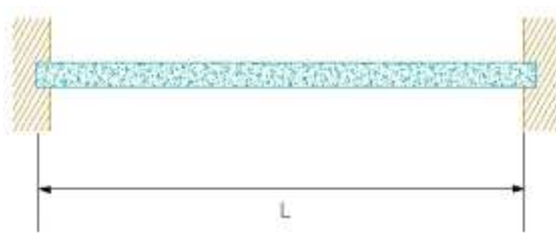
Vigas estáticamente indeterminadas



d) Viga continua



e) Viga fija en un extremo y simplemente apoyada en el otro



f) Viga fija

Figura 18. Vigas estáticamente determinadas e indeterminadas.

CAPITULO III
METODOLOGIA

En el presente trabajo se toma en consideración entre otras recomendaciones las de investigadores como Camarena (1984, 1987, 1990, 1995, 1997,1999, 2001, 2003, 2005, 2007), Shoenfeld (1992), Polya (1945), Santos (2007), Hiebert (1997), para realizar un estudio acerca de la vinculación de las matemáticas con las ciencias que las requieren, caso particular de la estática en ingeniería civil para el estudio de fuerzas en vigas; considerando las siguientes etapas:

3.1. Análisis de libros de texto

Los libros de texto tienen diversos papeles en el ámbito educativo, pueden ser considerados como objeto de estudio, material de consulta, como registro de la actividad del estudiante o como colección de ejercicios propuestos y problemas por resolver (González y Sierra, 2004). Esta amplia gama de formas en que puede concebirse un libro de texto, ha propiciado que sea una de las herramientas fundamentales durante los procesos de aprendizaje y enseñanza.

Un libro de texto puede analizarse desde diversas perspectivas; sin embargo, en el caso de esta investigación se realizará un análisis de la forma en que los conocimientos matemáticos y físicos se articulan durante la revisión de modelos matemáticos utilizados en el diseño de estructuras.

En este contexto Van Dormolen (1986, citado en Haggarty y Pepin, 2004), sugiere que en un análisis del conocimiento matemático en un libro de texto uno puede considerar el grado en que el texto cubre cada uno de los siguientes aspectos: (i) teóricos, relacionado con el modo en que se enuncian en el texto los axiomas, definiciones o teoremas; (ii) algorítmicos, que incluye la ejecución de las técnicas o procedimientos matemáticos; (iii) lógicos, es decir, las reglas deductivas que explícita o implícitamente utiliza el autor para justificar los resultados matemáticos;

(iv) metodológicas, relativas a los medios que se emplean para obtener los resultados matemáticos (heurísticas utilizadas); (v) de comunicación y expresión de las ideas.

Otra perspectiva desde la cual se puede realizar el análisis de un texto se relaciona con las intenciones pedagógicas del mismo. En esta línea, se argumenta que en la forma y estructura de los libros de texto subyace un modelo pedagógico que brinda al estudiante oportunidades particulares de aprendizaje (Rezat, 2008). En la literatura especializada se pueden identificar tres principales vertientes en relación con esta forma de análisis: (i) modos en las cuales el texto ayuda al estudiante para aprender los conceptos que se abordan, (ii) formas en la cuales el texto ayuda al estudiante a comprender los métodos utilizados y (iii) forma en que el texto apoya el aprendizaje de los estudiantes, mediante el uso de un lenguaje apropiado, ya que el lenguaje es una herramienta importante en la construcción del conocimiento matemático (García-Alonso y García-Cruz, 2007).

En este contexto, analizamos la manera en que el autor usa ciertos conceptos matemáticos para modelar el fenómeno físico que se estudia, (fuerza cortante y momento flexionante), estableciendo la forma en que se estructuran éstos conceptos y en consecuencia, identificamos la manera en que articula a éstos, con conceptos fundamentales de la física para modelar las fuerzas cortantes y el momento flector cuando se analiza el diseño de una viga.

3.2. Análisis y resolución de problema

Se extraen algunos elementos de la fase didáctica de la matemática en contexto, así como de la resolución de problemas y se elige uno de los problemas que propone el texto con el propósito de resolverlo, consideramos los conceptos matemáticos como parte fundamental en el desarrollo de la solución; se toman cuenta lo siguiente:

- Planteamiento del problema que analiza el texto.
- Determinación de las variables.
- Identificación de relaciones entre variables.
- Determinación del modelo matemático.
- Interpretación de la solución.
- Análisis retrospectivo de la solución al problema.

CAPITULO IV

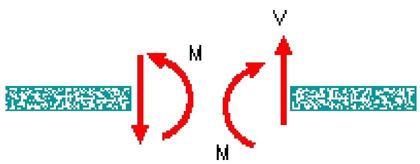
4.1 Elementos didácticos en el análisis de esfuerzos en vigas

En Beer (2010), al realizar el análisis de esfuerzos de vigas indica; "Ahora que se han definido claramente la fuerza cortante y el momento flector en lo referente a su magnitud y su sentido, se pueden registrar sus valores en cualquier punto de la viga graficando dichos valores contra la distancia x medida desde un extremo de la viga" (Beer, 2010, p.365), agregando que las gráficas obtenidas se denominan "diagrama de fuerza cortante y diagrama de momento flector", para ilustrarlo toma como ejemplo una viga simplemente apoyada sujeta a una carga concentrada, aplicada en la mitad del claro, el ejemplo corresponde con la figura 1 ilustrada con anterioridad en el capítulo 1

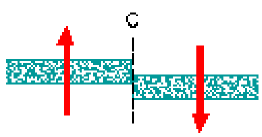
Para la obtención de la parte izquierda del diagrama de fuerzas cortantes de la viga (entre los puntos A y C), Beer (2010) considera un segmento de la viga y al punto donde se corta le llama C, "… se encuentra que V=+P/2 y M=+Px/2. Por tanto, la fuerza cortante y el momento flector son positivos; lo anterior se puede corroborar observando que la reacción en A tiende a cortar y a flexionar la viga en C de la forma mostrada en la figura 7.9b y c. Se puede graficar V y M entre A y D ((figura 7.10e y f); la fuerza cortante tiene un valor constante V= P/2, mientras que el momento flector aumenta linealmente desde M=0 en x=0 hasta M=PL/4 en x=L/2"*.* Agregando que, para la parte que se ubica al lado derecho de la viga (corta la viga en un punto denominado E ubicado a la derecha de la mitad del claro), "…Ahora se pueden completar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la figura 7.10e y f; la fuerza cortante tiene un valor constante *V= -P/2 entre D y B, mientras que el momento flector decrece linealmente desde M=(PL)/4 en x=L/2 hasta M=0 en x=L.*

El autor concluye el análisis que realiza para obtener los diagramas de las fuerzas cortantes y momentos flectores enunciando: "Se dice que la fuerza cortante V y que el momento flector M en un punto dado de una viga son positivos cuando las fuerzas cortantes y los pares internos que actúan sobre cada parte de la viga están dirigidos como se muestra en la figura 7.9a*.”*

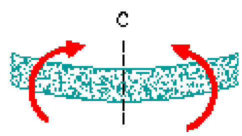
La convención de signos que se menciona en los párrafos anteriores se ilustra en la figura 19.



a) Fuerzas internas en la sección (fuerza cortante positiva y momento flector positivo.



c) Efecto de las fuerzas externas (fuerza cortante positiva)



b) Efecto de las fuerzas externas (momento flector positivo)

Figura 19

De lo anterior se puede concluir que:

A. El valor positivo o negativo de la fuerza cortante y del momento flector, se establece a partir de un esquema, (que denomina un convenio de signos) y no como parte de un análisis preciso que permita un mejor entendimiento del origen del signo y en consecuencia de su interpretación física.

B. El autor expone que: entre los puntos A - D y los puntos D - B: *“la fuerza cortante tiene un valor constante”* sin embargo, al analizar con detenimiento, observamos que: en los apoyos de la viga es decir en los puntos A y B, no existe fuerza cortante; al respecto, la gráfica que se muestra en la solución del ejercicio que ilustra la figura 7.10 e, no es clara, ya que no se representan los valores del domino que definen a la función que describe la fuerza cortante. Esta parte es importante, ya que su formulación permite dar un significado más amplio al concepto de fuerza cortante.

C. Al representar en forma gráfica a la fuerza cortante, el autor expone que: "*Se puede graficar V y M entre A y D* (figura 7.10e y f)*, la fuerza cortante tiene un valor constante* $\mathrm{V} = P/2$ *.....",* en este sentido el autor no especifica que: en el punto donde se encuentra aplicada la carga P, es decir en $x = L/2$, el valor de la función en realidad es $V\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{P}{L}$ y la forma como se expresa la gráfica no permite visualizar con claridad esto.

D. Se observa que en el punto D, donde se aplica la carga P (carga concentrada); existe un cambio considerable en el valor de la función que representa a la fuerza cortante V, sin que se aborde la justificación física y en consecuencia matemática que en páginas más adelante (páginas 373 y 374) da como consecuencia que restrinja a la función obtenida para el cálculo de su derivada.

E. En relación con el inciso anterior en el párrafo segundo de la página 374 se indica que: "Es necesario señalar que la ecuación (7.1) no es válida en un punto donde se aplica una carga concentrada; como se vió en la sección 7.5, la curva de la fuerza cortante es discontinua en dicho punto. En forma similar, las ecuaciones (7.2) y (7.2') dejan de ser válidas cuando se aplican cargas concentradas entre C y D; puesto que dichas ecuaciones no toman en consideración un cambio brusco en la fuerza cortante ocasionando por una carga concentrada."

Las ecuaciones (7.1), (7.2) y (7.2') a las que se refiere el autor se describen a continuación:

$$\frac{dV}{dx} = -w$$ ………..…………………………………… ecuación (7.1)

$$V_D - V_c = -\int_{x_C}^{x_D} w\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ecuación (7.2)}$$

$$V_D - V_c = -\,(\text{área bajo la curva de carga entre C y D}) \ldots\ldots \text{ ecuación (7.2')}$$

La sección 7.5 corresponde al tema "DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y DE MOMENTO FLECTOR" (Beer, 2010, p.365).

En esta parte del análisis (página 374), el autor señala que la función que define a la fuerza cortante, obtenida en la sección 7.5, es discontinua sin que presente argumentos que sustenten su afirmación. En consecuencia, se confirma que la derivada de la fuerza cortante, para este caso, no existe; y por ende no se puede utilizar la derivada $\frac{dV}{dx}$ para relacionarla con la carga. Físicamente este análisis coincide con la parte matemática, pues no se puede hablar de un incremento de la carga, para poderse analizar en un proceso al límite. Caso contrario al de una carga distribuida uniformemente, en donde sí tiene sentido el análisis físico y matemático que sustenta a la ecuación $\frac{dV}{dx} = -w$.

4.2 Aproximación alternativa al análisis de fuerza cortante y momento flector

A continuación se describe un procedimiento donde se discute y vinculan los aspectos matemáticos que modelan al fenómeno físico que el autor atiende en la sección 7.5.

4.2.1 Planteamiento del problema:

Dada una viga apoyada en dos puntos con un claro de longitud *L*, sometida a una carga de magnitud *P* en el centro del claro. Encuentre la fuerza cortante y el momento flector en cada punto de la viga, muestre además su representación gráfica correspondiente.

4.2.2. Determinación de variables y constantes del problema:

a) Constantes

P = Carga concentrada.

L = Longitud entre los apoyos A, B (Claro de la viga).

D = Punto en donde se encuentra aplicada la carga concentrada P.

b) Variables.

$V(x)$ = Valor de la fuerza cortante a una distancia x del apoyo A.

$M(x)$ = Valor del momento flector a una distancia x del apoyo A (variable dependiente).

x = Valor de la distancia medida del apoyo A hacia el apoyo B (variable independiente).

c) Variables controladas.

R_A = Reacción en el apoyo A.

R_B = Reacción en el apoyo B.

4.2.3. Solución matemática del problema

Inicialmente debemos conocer todas las fuerzas que intervienen en la viga, para tomarse en cuenta en la obtención de reacciones en los apoyos, recordemos que las reacciones también son consideradas fuerzas externas. La figura 20 muestra el diagrama de cuerpo libre que involucra a la totalidad de las fuerzas que afectan a la viga:

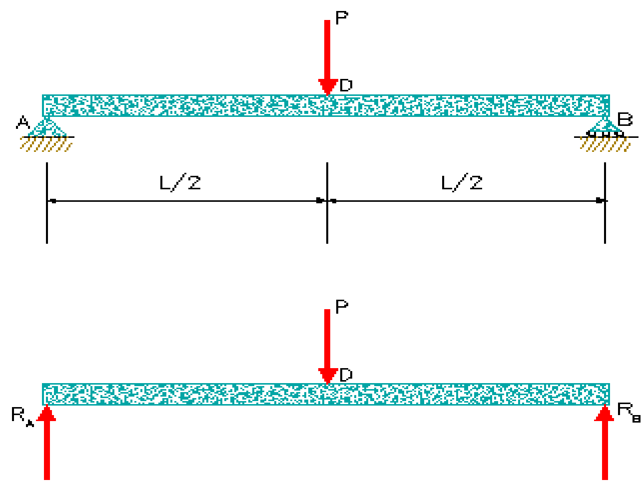


Figura 20

Para calcular la reacción en el apoyo B, consideramos suma de momentos en el apoyo A igual a cero:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0$$

Calculando momentos respecto del apoyo en A:

$R_B L - P\dfrac{L}{2} = 0$; despejando R_B y simplificando obtenemos:

$$R_B L = P\frac{L}{2}; \qquad R_B = P\frac{L}{2L}\ ; \qquad R_B = \frac{P}{2}$$

Para calcular la reacción en el apoyo A, consideramos suma de momentos en el apoyo B igual a cero:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0$$

Calculando momentos respecto del apoyo B:

$-R_A L + P\dfrac{L}{2} = 0$; despejando R_A y simplificando obtenemos:

$$R_A L = P\frac{L}{2}; \qquad R_A = P\frac{L}{2L}; \qquad R_A = \frac{P}{2}$$

4.2.4. Modelo Matemático.

Con la información obtenida anteriormente es posible obtener las ecuaciones que definen a la fuerza cortante y el momento flexionante, a lo largo del claro L de la viga propuesta.

1.- Analizando el intervalo cuando $0 < x < \frac{L}{2}$ (antes del punto D, donde está aplicada la carga P); como apoyo dibujaremos el diagrama de cuerpo libre donde se involucren las fuerzas que intervienen. La fuerza cortante $V(x)$ y el momento flexionante $M(x)$ están en función de la distancia x, medida desde el apoyo A:

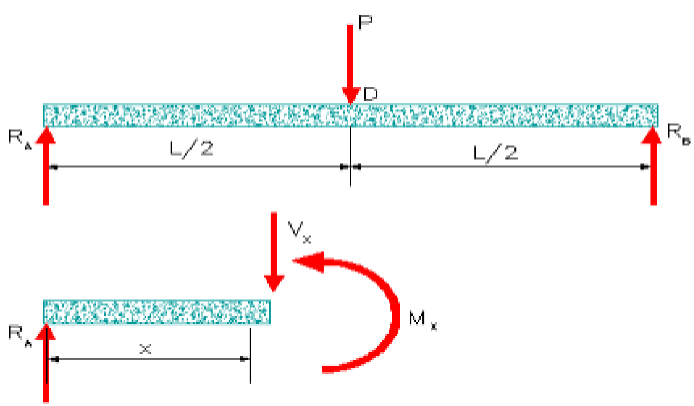


Figura 21

1.1 Para obtener la fuerza cortante $V(x)$, en este intervalo; decimos que:

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$R_A - V(x) = 0$; despejamos a $V(x)$:

$V(x) = R_A$; pero $R_A = \frac{P}{2}$; por lo que finalmente: $V(x) = \frac{P}{2}$

1.2 Encontrando el momento flexionante $M(x)$:

$$+\circlearrowleft \sum M(x) = 0$$

$-R_A\ x + M(x) = 0$; despejamos a $M(x)$: $M(x) = R_A x$; pero

$R_A = \frac{P}{2}$; por lo que finalmente: $M(x) = \frac{Px}{2}$

2.- A continuación se calcula la fuerza cortante y el momento flexionante a la derecha del punto D, es decir el intervalo cuando $\frac{L}{2} < x < L$, para ilustrarlo se dibuja el diagrama de cuerpo libre donde se involucren las fuerzas que intervienen (nótese que el fragmento de la viga debe ser menor que L). También en este intervalo la fuerza cortante V(x) y el momento flexionante M(x) están en función de la distancia x, medida desde el apoyo A.

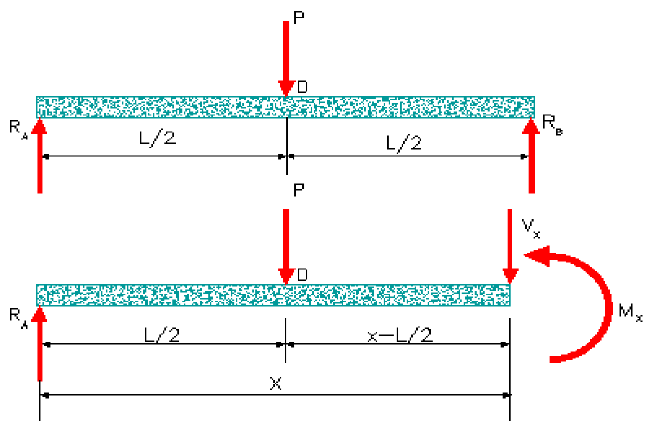


Figura 22

2.1 Para obtener la fuerza cortante en este intervalo, decimos que:

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$R_A - P - V(x) = 0$; despejamos a V(x):

$V(x) = R_A - P$; pero $R_A = \frac{P}{2}$; por lo que:

$V(x) = \frac{P}{2} - P$; y finalmente $V(x) = -\frac{P}{2}$

2.2 Encontrando el momento flexionante $M(x)$ en el intervalo $\frac{L}{2} < x < L$:

$$+\circlearrowleft \sum M(x) = 0$$

$$-R_A\ x + P\left(x - \frac{L}{2}\right) + M(x) = 0$$; despejamos a $M(x)$:

$$M(x) = R_A\ x - P\left(x - \frac{L}{2}\right);$$ pero, $R_A = \frac{P}{2}$; por lo que:

$$M(x) = \left(\frac{Px}{2}\right) - P\left(x - \frac{L}{2}\right)$$ se factoriza P, $M(x) = P\left(\frac{x}{2} - x + \frac{L}{2}\right)$

$$M(x) = P\left(-\frac{x}{2} + \frac{L}{2}\right)$$; finalmente: $$M(x) = P\left(\frac{L-x}{2}\right)$$

3.- Ahora se obtiene la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto D donde está aplicada la carga P y $x = \frac{L}{2}$, se dibuja el diagrama de cuerpo libre donde se involucren las fuerzas que intervienen en éste intervalo:

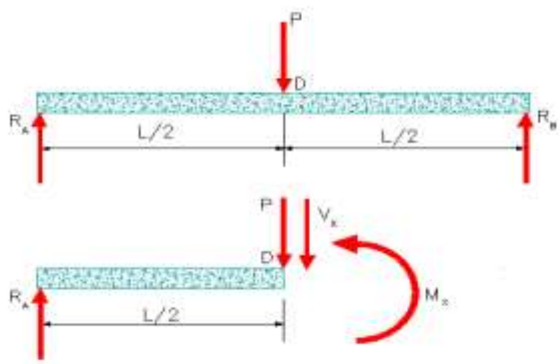


Figura 23

3.1 Para hallar la fuerza cortante en este punto, se tiene:

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$R_A - P - V(x) = 0$; despejamos a V(x):

$V(x) = R_A - P$; pero $R_A = \frac{P}{2}$; por lo que :

$V(x) = \frac{P}{2} - P$; y finalmente $$V(x) = -\frac{P}{2}$$

3.2 Se obtiene el momento flexionante $M(x)$ en el punto D:

$$+\circlearrowleft \sum M(x) = 0$$

$$-R_A \frac{L}{2} + M(x) = 0$$; despejamos a $M(x)$:

$$M(x) = R_A \frac{L}{2}$$; pero, $R_A = \frac{P}{2}$; por lo que:

$$M(x) = \left(\frac{P}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$$; finalmente: $$M(x) = \frac{PL}{4}$$

Observemos que la ecuación que define al momento flexionante en este punto corresponde con la hallada en 1.2

4.- Como se puede apreciar, falta por determinar los valores de la fuerza cortante $V(x)$ y el momento flector $M(x)$ cuando $x=0$ y cuando $x=L$, procedemos a hacerlo:

4.1 La fuerza cortante en los puntos de apoyo A y B vale cero, es decir en esta área de contacto no existe fuerza cortante. En este sentido Hsieh (1986) durante su análisis de una viga sometida a una carga concentrada como la que muestra la figura 24 manifiesta que:

> Con respecto a esto, se observa que en el punto de aplicación de una carga concentrada (incluso en las reacciones) se presenta en general un cambio brusco en la fuerza cortante de valor igual a la carga. Considérese la fuerza cortante en las proximidades de cada apoyo. La fuerza cortante en una sección a una distancia infinitesimal a la derecha del punto A es Pb/l por tanto la curva de la fuerza cortante crece bruscamente de cero a Pb/l en A. En forma similar, la fuerza cortante se reduce a cero desde un valor de –Pa/l en B. En general, el diagrama de la fuerza cortante siempre comienza en cero y termina en cero (Hsieh, 1986, p. 34).

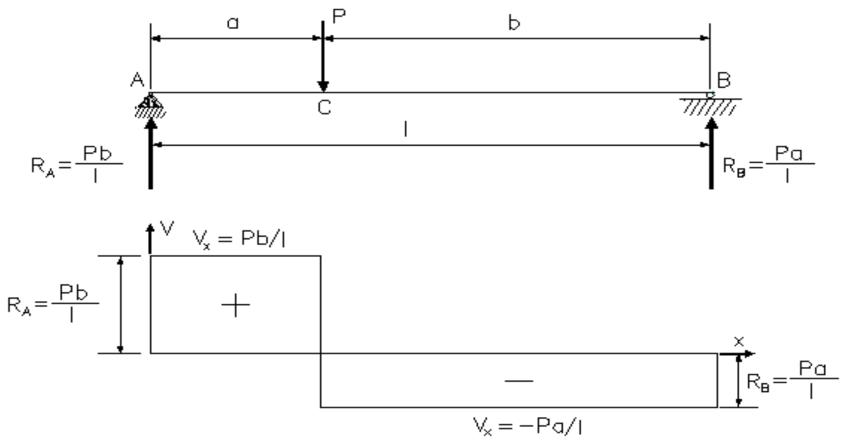


Figura 24

Tomando en consideración lo anterior encontramos que la fuerza cortante es:

$$V(x) = 0, \quad cuando \quad x = 0$$

$$V(x) = 0, \quad cuando \quad x = L$$

4.2 De sustituir $x = 0$ y $x = L$, en las ecuaciones de los incisos 1.2 y 2.2 encontramos que:

$$M(x) = 0, \quad cuando \quad x = 0$$

$$M(x) = 0, \quad cuando \quad x = L$$

Ahora se cuenta con todos los valores del dominio que definen a las funciones de la fuerza cortante y el momento flexionante $V(x)$ y $M(x)$ respectivamente, sus correspondientes ecuaciones modelan a las fuerzas internas de una viga sometida a una carga concentrada a la mitad del claro del elemento, su representación gráfica permite ver el comportamiento de las funciones en forma más clara; a esta representación en estática se le conoce como *diagramas de fuerza cortante y momento flector*.

4.2.5. Modelo matemático para la fuerza cortante.

En los incisos 1.1, 2.1, 3.1 y 4.1 contamos con las ecuaciones que determinan a la fuerza cortante $V(x)$ en la viga, por tanto; la función que define a la fuerza cortante y expresa el modelo en forma algebraica es:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{P}{2} & \text{si} \quad 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{-P}{2} & \text{si} \quad \dfrac{L}{2} < x < L \\ 0 & \text{si} \quad x = L \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

La representación gráfica de la fuerza cortante $V(x)$, queda:

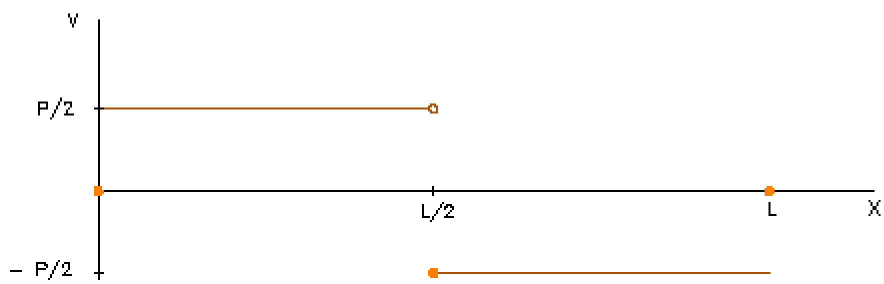


Figura 25

4.2.6. Modelo matemático para el momento flexionante

En los incisos 1.2, 2.2, 3.2 y 4.2 se tienen las ecuaciones que determinan al momento flexionante, por lo que; la función que define a este momento y en consecuencia expresa el modelo en forma matemática de la viga es:

$$M(x) = \begin{cases} \dfrac{Px}{2} & \text{si} \quad 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\ P\left(\dfrac{L-x}{2}\right) & \text{si} \quad \dfrac{L}{2} < x \le L \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La representación gráfica del momento flector $M(x)$, se ilustra con la gráfica:

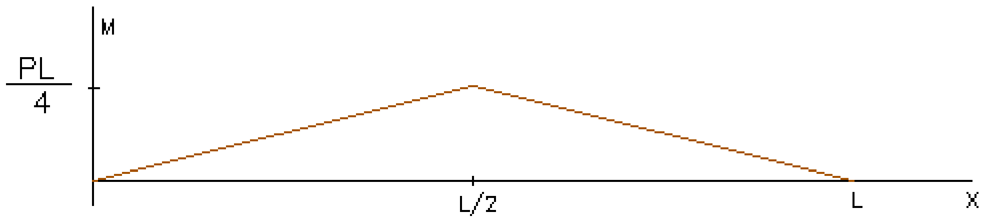


Figura 26

4.2.7. Interpretación y análisis de la solución.

A).- Para la fuerza cortante $V(x)$, en cualquier punto del claro de la viga, su representación se da por medio de la función definida en (1), el análisis de su representación gráfica (ver figura 25) permite observar que: en los apoyos la fuerza cortante es cero, en el intervalo $0 < x < \frac{L}{2}$ la fuerza cortante se mantiene constante con un valor de $\frac{P}{2}$, para $x = \left(\frac{L}{2}\right)$ existe un cambio brusco en el valor de la fuerza cortante siendo su valor en este punto $V(x) = -\left(\frac{P}{2}\right)$ y, en el intervalo $\frac{L}{2} < x < L$ la fuerza cortante se mantiene constante con un valor de $V(x) = -\left(\frac{P}{2}\right)$.

Se tiene que la representación gráfica de la fuerza cortante $V(x)$, es una función definida por tramos, donde se puede observar que $V\left(\frac{L}{2}\right)=-\frac{P}{2}$. Esta representación difiere de la que se ilustra en el texto analizado (Beer, 2010), ya que en éste se dibujan dos rectángulos: el primero con base igual a L/2 y altura P/2; en el segundo rectángulo, base L/2 y altura -P/2 remarcando el contorno de las dos figuras geométricas.

De acuerdo con Beer (2010), describe que: "*Es necesario señalar que la ecuación 7.1 no es válida en un punto donde se aplica una carga concentrada, como se vio en la sección 7.5 la curva de la fuerza cortante es discontinua en dicho punto*"; en razón de esto comprobaremos si es que la función que define a la fuerza cortante $V(x)$ es o no discontinua en $x = L/2$:

De la definición de continuidad de acuerdo con Stewart (2006) se establece que una función f es continua en un número a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

En este caso $f(a)=V\left(\frac{L}{2}\right)$.

Hallando $V\left(\frac{L}{2}\right)$, para tal efecto se observa que $\frac{L}{2}$ se encuentra en el intervalo $\frac{L}{2}\leq x < L$, por tanto; la ecuación que define a la función en estos valores del dominio es: $V(x)=-\frac{P}{2}$, de aquí: $V\left(\frac{L}{2}\right)=-\frac{P}{2}$.

Encontrando $\lim\limits_{t\to\frac{L}{2}} V(x)$

Hallando límite lateral cuando x tiende a $\frac{L}{2}$ por el lado izquierdo:

$$\lim_{x\to\left(\frac{L}{2}\right)^-} V(x)=\frac{P}{2}$$

El límite lateral cuando x tiende a $\frac{L}{2}$ por el lado derecho es:

$$\lim_{x \to \left(\frac{L}{2}\right)^+} V(x) = -\frac{P}{2}$$

Como $\lim_{x \to \left(\frac{L}{2}\right)^-} V(x) \neq \lim_{x \to \left(\frac{L}{2}\right)^+} V(x)$, se tiene que $\lim_{x \to \left(\frac{L}{2}\right)} V(x)$ no existe y por tanto la función $V(x)$ es discontinua en $x = \frac{L}{2}$, a esta discontinuidad, Stewart (2006) le denomina discontinuidad de salto.

B).- La solución para el momento flector $M(x)$ en cada punto del claro de la viga se define por (2), su representación gráfica (ver figura 26) indica que: el momento flector $M(x)$ en los apoyos es cero, en el intervalo $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ el momento flector tiene un valor de $\frac{Px}{2}$, de aquí se tiene el momento máximo con un valor de $\frac{PL}{4}$; y, para $\frac{L}{2} < x \leq L$ el valor del momento flector es igual a $P\left(\frac{L-x}{2}\right)$.

De la representación gráfica del momento flexionante $M(x)$, resulta una función definida por tramos (en el primer tramo por una función lineal con pendiente positiva y en el segundo tramo por una función lineal con pendiente negativa); donde se puede observar que el momento máximo es: $M_{MAX} = \frac{PL}{4}$.

4.2.8. Visión Retrospectiva.

Durante el desarrollo de esta actividad se generan componentes importantes del quehacer matemático como lo son: el plantear argumentos, buscar relaciones, plantear conjeturas entre otras; donde los puntos a resolver se remiten a encontrar respuestas relacionadas con la solución que se obtuvo del problema, en este sentido Polya (1945; citado en Santos, 2007), refiere que: "…Aquí no solamente se incluye la actividad de revisar los cálculos y operaciones, sino también evaluar el sentido de la solución y análisis de las posibles extensiones o conexiones del problema”(p. 53).

En ésta dirección la solución del problema permite vincular conceptos matemáticos de cálculo como el de función definida por tramos, discontinuidad de una función y derivada de una función, con el contexto de asignaturas como la estática; particularmente con el análisis de fuerzas de una viga sometida a una carga concentrada al centro de su claro.

Al respecto pueden plantearse preguntas como: ¿se puede sustentar que el momento flexionante siempre es positivo?, ¿el análisis de fuerzas en vigas con una carga concentrada tiene un comportamiento similar si la carga no se encuentra aplicada al centro?, entre otras tantas donde, el enfoque matemático con que se da la aproximación de alternativa al análisis de fuerzas cortantes y momentos flectores permite explicar y entender con mayor profundidad.

CAPITULO V
CONCLUSIONES

Con el análisis realizado se muestra como es que en algunos libros de texto que se usan en asignaturas de ingeniería; no se hace uso de los conceptos del cálculo de una forma robusta y estructurada que permitan vincularlos para resolver problemas de fenómenos físicos, caso particular del análisis de fuerzas en vigas que realiza Beer (2010).

En el estudio de fuerzas cortantes de una viga afectada por una carga concentrada aplicada al centro del claro, la representación gráfica propuesta por el texto no ilustra de manera clara la relación que existe entre la variable independiente x y la función $V(x)$, sin que sea justificada la manera de abordar esta parte del tema; dando como resultado que el concepto de fuerzas cortantes se muestre de manera confusa; el análisis matemático permite observar con detalle la obtención e interpretación de la representación gráfica y en consecuencia contar con otros elementos para entender el concepto de lo que es la fuerza cortante.

Este trabajo da como resultado la reflexión sobre las actividades didácticas que se pueden implementar tomando como base problemas en el contexto de la ingeniería donde se imparta la asignatura de cálculo, con el objetivo fundamental de generar un aprendizaje que le permita al estudiante mejorar el entendimiento de los conceptos matemáticos y el uso de los mismos en su formación.

5.1. Respuesta a las preguntas de investigación

1) ¿De qué manera se articulan, en los libros de texto de ingeniería civil, los conceptos matemáticos necesarios para el análisis del diseño de vigas? Se obtuvo evidencia de que en libro de Beer (2010) los conceptos matemáticos no se

encuentran suficientemente articulados con los conceptos propios del análisis de fuerzas en vigas.

Por ejemplo, cuando analiza la representación gráfica del esfuerzo cortante, el autor no justifica la forma gráfica que utiliza para representar a la fuerza cortante, ya que la manifiesta como dos rectángulos, uno sobre el eje horizontal y otro por debajo de él, pudiéndose observar que en realidad la representación correcta es la de una función escalonada en la que no se unen los puntos de discontinuidad. Por otra parte, refiere que para una viga simplemente apoyada sobre la que actúa una carga concentrada a la mitad del claro, no aplica que; la derivada de la correspondiente fuerza cortante respecto de la longitud de un segmento de la viga sea igual a la magnitud de la carga negativa, sin justificar este hecho.

Al referirse a las expresiones algebraicas que modelan a la fuerza cortante y al momento flector lo realiza sin referir que estas expresiones definen a dos funciones, lo cual es importante porque el análisis se lleva a cabo utilizando herramientas de cálculo. Por ejemplo, se habla de la derivada de una función en un punto, o al área bajo la curva de una función.

También se observó que el autor no hace uso de una representación algebraica apropiada, para expresar a la fuerza cortante y al momento flector, como funciones definidas por tramos. Lo cual se considera de importancia pues permite analizar con detalle la propia definición del modelo de fuerza cortante y momento flector que se está utilizando.

En el análisis de fuerzas cortantes y momentos flectores, el autor hace uso de un convenio de signos para aplicarlo en la obtención de los diagramas de fuerza cortante y momento flector. Sin embargo si se realizara el análisis de los conceptos antes referidos a través de una representación algebraica de la relación funcional, este convenio resulta innecesario. Lo cual se traduciría en que el estudiante obtuviera una comprensión conceptual, más que un aprendizaje de reglas.

2) ¿Qué elementos didácticos se pueden incorporar en una propuesta de aprendizaje que permita a los estudiantes articular, de una manera robusta, los conceptos matemáticos y físicos que se requieren en el estudio del diseño de vigas? Uno de los elementos relevantes es que el profesor conozca con profundidad los conceptos físicos y matemáticos que se utilizan en la formulación de un modelo. Posteriormente es importante que el profesor vincule esos conceptos con las tareas de aprendizaje que se proponen para implementarse en el aula, justificando la relación existente entre hechos y supuestos físicos y las herramientas matemáticas que se utilizan para modelarlos.

También es importante que los estudiantes revisen de forma previa a la discusión en clase los conceptos inherentes al tema, ya que esto permitirá comprender la formulación del modelo que se desarrolle en clase.

5.2. Limitaciones del trabajo de investigación

Una de las limitaciones del trabajo radica en que se analizó únicamente un libro de texto, lo cual no permitió realizar un comparativo de los diferentes enfoques matemáticos que utilizan diversos autores para abordar el concepto de diseño de vigas. También es de considerar que el trabajo sólo analiza lo inherente al estudio de fuerzas en vigas, cuando el contenido del texto cuenta con más temas propios de la estática.

5.3. Propuestas a futuro

Con base en los resultados obtenidos en este trabajo, se propone llevar a cabo investigaciones en las que se comparen los diversos enfoques matemáticos de diferentes libros de texto. Asimismo, se podrían llevar a cabo otras investigaciones en la que se analicen textos de asignaturas tales como resistencia de materiales, hidráulica, mecánica de suelos, análisis estructural, cimentaciones entre otras.

5.4. Implicaciones didácticas del trabajo

Se acepta generalmente, que las características de las tareas de aprendizaje juegan un papel preponderante en los procesos cognitivos que ponen en práctica los estudiantes al aprender matemáticas. Tomando como punto de referencia a los principios de la resolución de problemas y de la matemática en contexto consideramos que las actividades de aprendizaje en el contexto del diseño y análisis de vigas se pueden estructurar formulando problemas donde se brinde a los estudiantes la oportunidad de desarrollar y ampliar algunos de los elementos del pensamiento matemático.

En esta línea de ideas, consideramos que el profesor debiese proponer tareas de aprendizaje, en el contexto del diseño de vigas, en donde los estudiantes tengan la oportunidad de estructurar y ampliar su red conceptual que incluya principios del cálculo y de física, esto con la finalidad de que obtengan un aprendizaje con entendimiento.

REFERENCIAS

1. **Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L.** (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática."Una empresa docente" & Grupo Editorial Iberoamérica, México.

2. **Barrera, F.** (2009). Segundo reporte del proyecto: "Bases teóricas y conceptuales en la construcción del conocimiento matemático y el empleo de herramientas digitales", apoyado por el CONACyT con número de referencia 61996.

3. **Beer, F. (et al.)** (2010). Mecánica vectorial para ingenieros "Estática", McGraw-Hill/Interamericana Editores.

4. **Brousseau, G. (**1986). Lecturas en didáctica de las matemáticas Escuela Francesa. Cinvestav-IPN.

5. **Camarena, P.** (1999). Las funciones generalizadas en ingeniería construcción de una alternativa didáctica. Tesis doctorado. Cinvestav.

6. **Camarena, P.** (2000). La matemática en el contexto de las ciencias y los modelos matemáticos. Reporte del proyecto de Investigación. ESIME IPN.

7. **Camarena, P.** (2004). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 17 (pp. 57-370).

8. **Camarena, P.** (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. Memorias del Congreso internacional. Congreso internacional para la investigación y el desarrollo educativo. Colegio de estudios de Posgrado de la ciudad de México.

9. **Craig. R.** (2006). Mecánica de materiales. Compañía Editorial Continental.

10. **Duval, R.** (1999). Semiosis y pensamiento humano. Universidad del Valle, Instituto de Educación Pedagógica, Grupo de Educación Matemática.

11. **García, G. L.** (2001, octubre-diciembre) Contextualización de las series en Ingeniería (Estrategia Didáctica), Científica: the Mexican Journaly of Electromechanical. Engineering Esime, Vol. 5 Num. 4.

12. **García-Alonso, I**., & **García-Cruz**, J. A. (2007). Statistical inference in textbooks: mathematical and everyday contexts. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 257-264). Seoul: PME.

13. **Gere, J. M., Timoshenko, S. P.** (1998). Mecánica de Materiales. Internacional Thomson Editores.

14. **González, M. T., y Sierra, M**. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las ciencias, 22*(3), 389-408.

15. **Haggarty, L, & Pepin, B.** (2004). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms; who gets an opportunity to learn what? Paper presented at the 10th International Congress of Mathematics Education (ICME 10). Copenhagen, Denmark.

16. **Hernández, A.** (2008). Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme. Tesis de maestría en ciencias en matemática educativa. Instituto Politécnico Nacional.

17. **Hill, L.** (1978). Fundamentos de diseño estructural. Representaciones y Servicios de Ingeniería.

18. **Hitt, F.** (2000). Funciones en Contexto. Proyecto sobre Visualización Matemática. Departamento de Matemática Educativa. México.

19. **Hitt, F.** (2002). Funciones en Contexto. Pearson Educación. México.

20. **Hiebert, J. (et al.)** (1997). Making sense, Teaching and Learning Mathematics with Understanding. University of Wisconsin Foundation.

21. **Hsieh, Y.** (1986). Teoría elemental de estructuras. Prentice-Hall Hispanoamericana S. A.

22. **Lases, M.** (2006). Metodología de la Investigación. México.

23. **Leithold, L.** (1990). El cálculo con geometría analítica. Harla México.

24. **Leithold, L.** (1998). El cálculo. Oxford University Press – Harla México.

25. **Muro, C.** (2000). Significación de las Series de Fourier en el contexto de la transferencia de la masa. Tesis de maestría en ciencias con orientación en Enseñanza de las Matemáticas, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

26. **Mott, R.** (1996). Resistencia de Materiales. Prentice-Hall Hispanoamérica.

27. **Pérez, V.** (1986). El concreto armado en las estructuras teoría elástica. Editorial Trillas.

28. **Popov, E.** (2000). Mecánica de Sólidos. Pearson Educación.

29. **Resnick, R, Halliday, D.** (1965). Física para estudiantes de ciencias e ingeniería. Compañía Editorial Continental, S. A.

30. **Rezat, S.** (2008). Learning mathematics with textbooks. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PMENA XXX* (vol. 4, pp. 177-184). México: Cinvestav-UMSNH.

31. **Ruiz, L.** (1997). La noción de función: Análisis Epistemológico y didáctico Universidad de Jaén, Servicio de Publicaciones.

32. **Santos, M.** (1997). Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica.

33. **Santos, M.** (2007). La resolución de problemas matemáticos Fundamentos cognitivos México. Editorial Trillas.

34. **Singer, F.** (1979). Mecánica para Ingenieros. Editorial Harla S. A. de C. V.

35. **Stewart, J.** (2006). Cálculo conceptos y contextos. Editorial Progreso S. A. de C. V.

36. **Schoenfeld, A**. (1985). Mathematical problem solving. Orlando, FL: Academic Press.

37. **Schoenfeld, A. H. (1992).** Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense - making in mathematics. En D. Grouws (Ed.). Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.

38. **Thomas, G.** (2006). Cálculo de una variable. Editorial Pearson.

39. **West, H.** (1984). Análisis de estructuras. Compañía Editorial Continental.