



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO**



INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN Y SISTEMAS

MAESTRÍA EN CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

**CONTROL BASADO EN EL REDISEÑO DE LYAPUNOV PARA
SISTEMAS LINEALES CON RETARDO EN EL ESTADO Y EN EL
CONTROL: APLICACIÓN A UN SISTEMA DE
DESHIDRATACIÓN.**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN
CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL**

PRESENTA:

RODRIGO EDGARDO VELASCO REBOLLO

ASESORES:

DRA. LILIAM RODRÍGUEZ GUERRERO

DR. OMAR JACOBO SANTOS SÁNCHEZ

PACHUCA, HGO., MÉXICO DICIEMBRE DE 2019



Rodrigo Edgardo Velasco Rebollo

**Control basado en el
rediseño de Lyapunov para
sistemas lineales con
retardo en el estado y en el
control: Aplicación a un
sistema de deshidratación.**

Este trabajo está dedicado a mis padres, a mis abuelos, ya que gracias a su apoyo he logrado cumplir con mis objetivos. Por sus enseñanzas y cariño les estaré siempre agradecido.

Gracias a:

CONACYT por la beca de Maestría
otorgada durante el periodo
Agosto 2017 - Julio 2019.

CITIS-UAEH, por la formación
académica brindada durante el
posgrado y el apoyo para la
realización de la presente memoria.

Agradecimientos

Doy gracias a Dios, por la vida y por permitirme realizar este logro profesional.

A mis padres, Santa Rebollo Orozco y Calixto Velasco Olgúin, quienes me han cuidado siempre. Les doy gracias por haberme dado tanto a lo largo de mi existencia, por haberme formado. Gracias por todo su cariño.

A mis hermanos y al resto de mi familia, por su paciencia, apoyo y cariño en todo momento.

A Carolina Baños, quien me ha brindado su compañía. Gracias por los buenos momentos, paciencia, palabras de aliento y cariño.

A mis asesores de tesis Dra. Liliam Rodríguez Guerrero y Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez, me es grato haber sido su alumno. Por el tiempo y esfuerzo dedicado al desarrollo de este trabajo, por su enorme paciencia y apoyo, por su conocimiento, muchas gracias.

A mis sinodales, por su valioso tiempo y paciencia para dar revisión a este trabajo, por sus observaciones para ayudar a formarlo.

A los profesores que me impartieron clase durante la maestría, muchas gracias por el conocimiento compartido y enseñanzas.

A mis compañeros, Benjamín, Carlos, Eduardo y Omar por los buenos momentos que pasamos durante estos dos años de posgrado.

Finalmente, agradezco a todas las personas que en algún momento contribuyeron a mi formación.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO
 Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
 School of Engineering and Basic Sciences
 Área Académica de Computación y Electrónica
 Department of Electronics and Computer Science



Mineral de la Reforma, Hgo., a 28 de octubre de 2019

Número de control: ICBI-AACyE/2175/2019
 Asunto: Autorización de impresión de tesis.

ING. RODRIGO EDGARDO VELASCO REBOLLO

Por este medio me es grato informarle que el jurado asignado para la revisión de su trabajo de tesis titulado “Control basado en el rediseño de Lyapunov para sistemas lineales con retardo en el estado y en el control: Aplicación a un sistema de deshidratación”, dirigido por la Dra. Liliam Rodríguez Guerrero y el Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez, que para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Automatización y Control, el cual fue presentado por usted, ha tenido a bien, en reunión de sinodales autorizar su impresión.

A continuación, se integran las firmas de conformidad de los integrantes del jurado.

PRESIDENTE:	DR. HUGO ROMERO TREJO	
SECRETARIO:	DR. JESÚS ESCAMILLA ROA	
VOCAL 1:	DRA. LILIAM RODRÍGUEZ GUERRERO	
VOCAL 2:	DR. ORLANDO GARCÍA PÉREZ	
SUPLENTE 1:	DR. OMAR JACOBO SANTOS SÁNCHEZ	
SUPLENTE 2:	DR. MIGUEL LUIS RAMÍREZ BARRIOS	

Atentamente
 “Amor. Orden y Progreso”

Dra. Liliam Rodríguez Guerrero
 Coordinadora de la Maestría en Ciencias en
 Automatización y Control Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
 Área Académica de Computación y Electrónica



OLO/APL



Ciudad del Conocimiento
 Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia
 Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,
 México. C.P. 42184
 Teléfono: +52 (771) 71 720 00 ext. 2250, 2251
 Fax 2109
 aacye_icbi@uaeh.edu.mx

www.uaeh.edu.mx

Resumen

En este trabajo se diseña una ley de control óptima-predictiva basada en la teoría del control óptimo, predictores lineales, y la técnica del rediseño de Lyapunov, para una clase de sistemas lineales que presentan retardos en el estado y en el control.

En este caso, el sistema donde se implementa la estrategia de control es una planta de deshidratación atmosférica aplicada a rebanadas de jitomate. Este sistema se modela como un sistema lineal que presenta un retardo en el estado y un retardo en la entrada del control. Además se considera un término de incertidumbre que entra por el mismo canal que el control (condición de acoplamiento). El objetivo es compensar el retardo en la entrada de control, rechazar el efecto no deseado de perturbaciones externas y estabilizar el sistema en lazo cerrado mediante técnicas de control avanzadas.

La estrategia de control que se propone en este trabajo consta de dos componentes, cada uno con una función específica. El primer componente es un control óptimo predictivo, que tiene la función de estabilizar óptimamente al sistema nominal (sin considerar al término de incertidumbre). El segundo componente se diseña de acuerdo a la técnica del rediseño de Lyapunov y tiene como función robustecer al sistema ante perturbaciones externas dependientes del tiempo, mediante este término robusto se garantiza que las soluciones alcanzan y permanecen dentro de un conjunto acotado del origen ya que el sistema no tiene puntos de equilibrio, debido a la presencia de las perturbaciones externas dependientes únicamente del tiempo.

Abstract

In this work, an optimal-predictive control law is designed, based on the optimal control theory, linear predictors and the Lyapunov redesign, for a class of linear systems that presents delays on the state and on the control input.

In this case, the system where the control law is implemented is an atmospheric dehydration machine for tomato slices. This system is modeled as a linear system with both input and state delays, besides an uncertainty term enters on the same channel of the control (matching condition). The objective is to compensate the input delay, to reject the non desired effect of the external perturbations and stabilize the closed loop system by means of advanced control techniques.

The proposed control strategy consists in two parts, each one with a specific function. The first part is an optimal predictive controller, whose function is to optimally stabilize the nominal system (without perturbations). The second component is designed following the Lyapunov redesign technique, this term robustifies the system and rejects the effects of external perturbations. With this term, it is guaranteed that the solutions reach and remain in a closed set around the origin, this is because the system does not have equilibrium points due to the effect of external perturbations.

Acrónimos

CD	Corriente directa
VCD	Voltaje de corriente directa
DAQ	Tarjeta de adquisición de datos
PID	Controlador proporcional integral derivativo
CA	Corriente alterna
VCA	Voltaje de corriente alterna
BP	Banda proporcional
Z-N	Ziegler-Nichols
IAE	Integral del error absoluto

Notación

x_t	Trayectoria de un sistema con retardos, definido por $x_t = x(t + \theta)$ con $\theta \in [-h, 0]$
$x \in A$	El elemento x pertenece al conjunto A
\mathcal{PC}	Representa el conjunto de funciones continuas a tramos definidas en un intervalo
$x(t)$	Representa el estado instantáneo del sistema
$x(t, u, \varphi)$	Representa el valor del estado $x(t)$ usando un control $u(t)$ con condición inicial φ
\mathbb{R}^n	Representa el espacio Euclidiano n -dimensional
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Representa el espacio Euclidiano $n \times n$ -dimensional
$\varphi(\cdot)$	Representa las condiciones iniciales del sistema retardado
$\ x(\theta)\ _h$	Representa la norma uniforme $\ x(\theta)\ _h = \sup \ x(\theta)\ _h, \theta \in [-h, 0]$

Índice general

Agradecimientos	VII
Resumen	XI
Abstract	XIII
Índice general	XVII
Índice de figuras	XXI
Índice de tablas	XXIII
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.1.1. Sistemas con retardo	1
1.1.2. Control con costo garantizado para sistemas con retardo e incertidumbre en la entrada	2
1.1.3. Deshidratación de alimentos	3
1.2. Planteamiento del problema	5
1.3. Justificación	5
1.4. Objetivos	6
1.4.1. Objetivo general	6
1.4.2. Objetivos específicos	6
1.5. Hipótesis	7
1.6. Herramientas de Software y de Hardware	7
1.7. Herramientas teóricas	9
1.8. Publicaciones	10
2. Marco Teórico	11
2.1. Control óptimo para sistemas con retardo en el estado.	11
2.1.1. Existencia y unicidad de las soluciones para sistemas con retardos	12
2.1.2. Definiciones auxiliares para sistemas con retardos	13
2.1.3. Condiciones suficientes para la existencia de un control admisible.	14
2.1.4. Proposición de una funcional $V(\varphi)$	15
2.2. Cálculo del predictor de estado	16
2.3. Cota última	19

3. Diseño del controlador óptimo predictor robusto	21
3.1. Descripción del problema	21
3.2. Control óptimo predictor.	22
3.2.1. Prueba de estabilidad para el sistema nominal	25
3.3. Control robusto	29
4. Resultados Experimentales	33
4.1. Conexión del cDAQ-9132 a la planta.	33
4.2. Identificación de parámetros	34
4.3. Control predictor	37
4.3.1. Simulación	37
4.3.2. Implementación	40
4.4. Control óptimo predictor	45
4.5. Control óptimo predictor robusto	50
4.6. Control PID	54
4.7. Comparativo entre leyes de control aplicadas al sistema de deshidratación.	58
5. Conclusiones	63
5.1. Trabajo futuro	64
Bibliografía	65
A. Prueba alternativa para la construcción de $V(\varphi)$	69
B. Obtención del control óptimo $u(t)$ para sistemas con retardo	74
C. Algoritmo para la obtención de ganancias para el control óptimo con retardo en el estado	77
C.1. Cálculo de las matrices K_0 , $K_1(\theta)$, $K_2(\xi, \theta)$	77
D. Publicaciones.	81

Índice de figuras

1.1. Diagrama esquemático del sistema de deshidratación.	4
1.2. Pantalla de inicio de Matlab	7
1.3. Pantalla de Labview	8
1.4. NI cDAQ-9132	8
1.5. NI cDAQ-9184	9
4.1. Componentes de monitoreo del sistema.	34
4.2. Modelo estimado y modelo real a 50°C.	35
4.3. Modelo estimado y modelo real a 60°C.	35
4.4. Modelo estimado y modelo real a 70°C.	36
4.5. Región estable del sistema en lazo cerrado con el control predictor. . .	38
4.6. Raíces del sistema.	38
4.7. Respuesta del sistema y control predictivo	39
4.8. Experimento control predictivo a 50°C.	41
4.9. Curvas de deshidratación a 50°C.	42
4.10. Experimento control predictivo a 60°C.	43
4.11. Curvas de deshidratación a 60°C.	43
4.12. Experimento control predictivo a 70°C.	44
4.13. Curvas de deshidratación a 70°C.	44
4.14. Experimento control óptimo predictor a 50°C.	46
4.15. Curvas de deshidratación a 50°C.	47
4.16. Experimento control óptimo predictor a 60°C.	47
4.17. Curvas de deshidratación a 60°C.	48
4.18. Experimento control óptimo predictor a 70°C.	48
4.19. Curvas de deshidratación a 70°C.	49
4.20. Experimento control óptimo predictor robusto a 50°C.	51
4.21. Curvas de deshidratación a 50°C.	51
4.22. Experimento control óptimo predictor robusto a 60°C.	52
4.23. Curvas de deshidratación a 60°C.	52
4.24. Experimento control óptimo predictor robusto a 70°C.	53

4.25. Curvas de deshidratación a 70°C.	53
4.26. Jitomate deshidratado usando el control óptimo predictor robusto. . .	54
4.27. Experimento control PID a 50°C.	55
4.28. Curvas de deshidratación a 50°C.	55
4.29. Experimento control PID a 60°C.	56
4.30. Curvas de deshidratación a 60°C.	56
4.31. Experimento control PID a 70°C.	57
4.32. Curvas de deshidratación a 70°C.	57
4.33. Comparativo entre controladores a 50°C.	58
4.34. Comparativo entre controladores a 60°C.	59
4.35. Comparativo entre controladores a 70°C.	59

Índice de tablas

1.1. Características del cDAQ-9132.	8
4.1. Parámetros del sistema de deshidratación en las distintas zonas de operación	34
4.2. Modelos del sistema de deshidratación en las distintas zonas de operación	36
4.3. Valores numéricos de las raíces del sistema.	39
4.4. Ganancias del control óptimo predictor y óptimo predictor robusto. .	46
4.5. Indicadores de desempeño en la región de 50°C.	60
4.6. Indicadores de desempeño en la región de 60°C.	60
4.7. Indicadores de desempeño en la región de 70°C.	60
4.8. Comparativo de consumo energético entre controles a 50°C.	61
4.9. Comparativo de consumo energético entre controles a 60°C.	61
4.10. Comparativo de consumo energético entre controles a 70°C.	61

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo se diseña una ley de control para ser aplicada a un sistema de deshidratación atmosférica de alimentos, el cual es modelado como un sistema lineal con un retardo puntual en el estado, un retardo puntual en la entrada y una perturbación acoplada en la entrada. El control consta de dos partes, la primera para estabilizar el sistema nominal (sin considerar los efectos de perturbaciones externas) y la segunda que se encarga de rechazar el efecto de las perturbaciones. En este Capítulo se dan a conocer los antecedentes y resultados teóricos útiles.

1.1. Antecedentes

En esta sección se da una breve descripción de los sistemas con retardo, se aborda un resultado previo a este trabajo de tesis y se describe de manera breve el deshidratado de alimentos, así como la plataforma experimental que se utilizará para la aplicación de distintas leyes de control.

1.1.1. Sistemas con retardo

Los sistemas con retardo son aquellos que no presentan una respuesta inmediata ante una señal de entrada. En la vida cotidiana, tenemos sistemas con retardo en casi cualquier parte, ya que los retardos se encuentran presentes en la mayoría de los procesos. Los retardos pueden aparecer por distintos motivos, por ejemplo: debido al transporte de materia o información, al tiempo de medición y al tiempo de procesamiento de los algoritmos de control.

En las comunicaciones los retardos podrían deberse a la transmisión de la información. En el caso de los sistemas de deshidratación, a la distancia que existe entre la fuente de calor y el producto a deshidratar. Algunas veces, los retardos causan proble-

mas en los procesos, ya que la acción del control tarda en tener efecto en la variable que se desea controlar. El efecto de los retardos llega a ser de mayor importancia en sistemas interconectados y distribuidos [16]. En sistemas interconectados, los retardos pueden surgir debido a la disponibilidad de las redes de comunicación, alámbricas e inalámbricas [5].

En la siguiente sección se presenta un trabajo previo a este tema de tesis, en el cual, únicamente se considera el retardo en el estado, pero no en la entrada, además de que el efecto de la perturbación desaparece cuando el estado y el control son cero.

1.1.2. Control con costo garantizado para sistemas con retardo e incertidumbre en la entrada

La técnica del rediseño de Lyapunov ha sido usada para sistemas no lineales libres de retardo [6], [3], de la forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x) + g(t, x)[u(t) + \delta(t)], \quad (1.1)$$

en donde $\delta(t) \neq 0$.

Primero se utiliza una función de Lyapunov para el sistema nominal y después se diseña un componente de control adicional para robustecer el diseño, con el fin de rechazar el efecto de la perturbación. Estos términos de perturbación entran por el mismo canal que el control, lo que se conoce como condición de acoplamiento [6]. En el año 2015, en [18] se extiende el enfoque presentado en [6], a un sistema lineal con retardo en el estado de la forma

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + B[u(t) + \delta(t)], \quad (1.2)$$

en donde se asumió que la perturbación es igual a cero, cuando el estado y el control son cero es decir,

$$\delta(t, x_t, u)|_{x_t=0, u(t)=0} = 0.$$

En ese trabajo, se combinó el rediseño de Lyapunov con una funcional de tipo completo, la cual se puede construir cuando el sistema nominal es estable [7]. Esa

funcional se utilizó para poder obtener el control que estabiliza al sistema perturbado en lazo cerrado y rechazar el efecto de la perturbación.

Los resultados obtenidos en esta tesis serán validados en un sistema de deshidratación atmosférica de alimentos, ahora con un modelo que considere un retardo en el estado, un retardo en la entrada de control y un término de perturbación que no se considera con valor cero, cuando el estado y el control son cero.

En la siguiente sección se da una breve descripción del deshidratado de alimentos y se describe el funcionamiento básico de la plataforma experimental en la que se aplicará la ley de control diseñada en este trabajo.

1.1.3. Deshidratación de alimentos

El objetivo del proceso de deshidratado en alimentos, es el de reducir la humedad del producto hasta cierto nivel deseado, con el fin de limitar el desarrollo de microorganismos y otras reacciones químicas, esto es, para prolongar su durabilidad.

Es una de las formas más antiguas de preservar los alimentos, y se logra por medio de distintas técnicas. Aunque la principal razón para la deshidratación de los alimentos es el preservarlos, también se tiene en cuenta que se reducen los costos de empaquetado, almacenado y transporte, al reducir tanto el peso como el volumen del producto.

Para este trabajo, se usa un prototipo donde se tiene un flujo de aire caliente constante, con una velocidad de 2.1 m/s el cual es un estándar para la deshidratación de alimentos [15], [26], [23]. Las temperaturas de deshidratación para jitomate (producto a utilizar) se encuentran entre 50 y 70 grados centígrados, ya que se ha comprobado que la pérdida de nutrientes es menor [15], [26], [23].

La Figura 1.1 muestra un diagrama esquemático del prototipo de deshidratación atmosférica, en el cual ya se han implementado diversas leyes de control avanzado, siempre buscando minimizar un índice de desempeño con el fin de ahorrar energía, ya que el proceso de deshidratado es tardado.

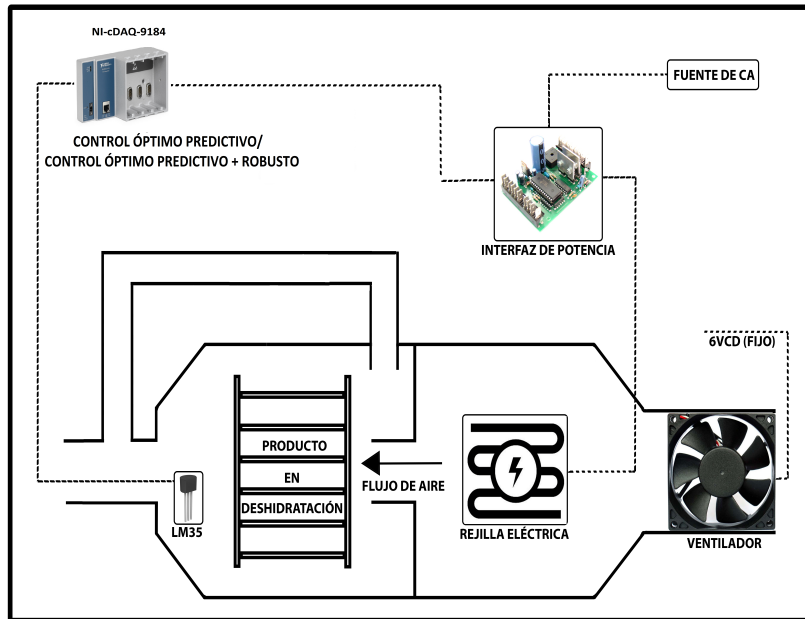


Figura 1.1: Diagrama esquemático del sistema de deshidratación.

El funcionamiento del prototipo experimental se describe a continuación: se tiene un ventilador de CD que genera un flujo de aire que pasa por una cámara donde se encuentra una rejilla eléctrica, el flujo de aire se calienta y llega a una charola donde se encuentran las rebanadas de jitomate para posteriormente pasar por el sensor de temperatura (LM35), una parte del aire sale por el túnel de viento y la otra parte es recirculada por una tubería hacia la cámara del producto.

El modelo escalar de la planta que se considera para este trabajo de tesis, incluye el retardo en la entrada que se debe a la distancia que existe entre la rejilla eléctrica que calienta el flujo de aire y la charola donde se coloca el producto a deshidratar. El retardo en el estado se considera debido al tubo de recirculación de aire. La perturbación $\delta(t)$ se considera debido principalmente a la temperatura externa acotada que influye siempre sobre el proceso de deshidratación.

Se han usado distintos dispositivos para implementar las leyes de control y regular la temperatura, entre las que se encuentran tarjetas de adquisición de datos de National Instruments y controladores industriales PID Honeywell, con el objetivo de comparar el desempeño de los diversos controles. Para la implementación de la ley de control desarrollada en este trabajo se usará un controlador automático programable industrial cDAQ-9132 y un chasis remoto cDAQ-9184 de National Instruments.

1.2. Planteamiento del problema

Para este trabajo de tesis, se asume que la ecuación escalar que describe la dinámica del sistema es de la forma

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - h) + B[u(t - \tau) + \delta(t)], \quad (1.3)$$

en donde $x(t)$ es la temperatura, $u(t - \tau)$ es el voltaje aplicado a la rejilla, $|\delta(t)| \leq \bar{\gamma}$, $\bar{\gamma} > 0$ es una constante conocida, y $\delta(t)$ representa la perturbación del sistema que entra por el mismo canal que la ley de control, y que es dependiente explícitamente del tiempo ya que la perturbación no es desvaneciente, es decir, no se hace cero cuando el estado y el control son cero: $\delta(t, x_t, u)|_{x_t=0, u(t)=0} \neq 0$.

Note que en este caso el sistema no tiene puntos de equilibrio, y no es posible utilizar el concepto de estabilidad asintótica, por lo que es necesaria la introducción del concepto de cota última [6].

En este trabajo, se dará continuación a lo presentado en [18], considerando también al retardo en la entrada y las perturbaciones, que dependerán explícitamente del tiempo. El objetivo es hallar la ley de control $u(t)$ tal que el efecto de $\delta(t)$ sea rechazado y así garantizar que las soluciones decrecen hacia un conjunto acotado alrededor del origen, usando el concepto de cota última de la solución [6].

De acuerdo al enfoque del rediseño de Lyapunov, la ley de control tendrá dos partes: la primera para estabilizar el sistema sin considerar el efecto de la perturbación (sistema nominal) el cual será un control óptimo predictor que minimiza un índice de desempeño y compensar el retardo en la entrada y la segunda parte se encargará de rechazar el efecto de las perturbaciones y garantizará que las soluciones sean decrecientes y estén últimamente acotadas.

1.3. Justificación

Las perturbaciones externas en el proceso de deshidratación atmosférica juegan un papel importante, debido a que al estar presentes, la temperatura dentro de la cámara del producto podría variar, lo que podría afectar al desempeño del proceso de deshidratado y por ende la calidad del producto final, ya que la temperatura podría fluctuar alrededor de la temperatura de referencia, y podría afectar a los nutrientes del producto, además de que la tarea de deshidratado podría tomar más tiempo y un

mayor consumo energético.

Los efectos de las perturbaciones pueden deberse principalmente a los cambios de temperatura en el ambiente, a los cambios de temperatura al abrir el compartimiento donde se encuentra el producto, a los cambios hechos al circuito de potencia, etc. Con el fin de minimizar el consumo energético se usará un control óptimo para sistemas con retardo en el estado, combinado con un control predictivo para compensar el retardo en la entrada. Se diseñará un segundo término de control, con el que se busca robustecer el rendimiento del sistema ante el efecto de las perturbaciones externas.

1.4. Objetivos

Los objetivos de este trabajo de tesis se describen a continuación:

1.4.1. Objetivo general

Diseñar una ley de control para sistemas lineales con retardos puntuales en el estado y en el control, incluyendo una perturbación acoplada que depende explícitamente del tiempo, mediante técnicas de control avanzadas y el análisis de estabilidad Lyapunov, para asegurar que las soluciones del sistema perturbado en lazo cerrado alcancen y permanezcan dentro de un conjunto acotado del origen.

1.4.2. Objetivos específicos

- Diseñar un control óptimo predictivo para el sistema nominal mediante el enfoque de control óptimo para sistemas con retardos [21], [12] y el control predictivo para el caso de ambos retardos (en la entrada y en el estado) [8].

- Aplicar el controlador obtenido al sistema de deshidratado mediante el software LabView para compensar el retardo en la entrada y minimizar un índice de desempeño.

- Diseñar el componente robusto del control, tomando en cuenta la funcional dada en [21] como funcional de Lyapunov para el sistema nominal, la cual será derivada a lo largo de las trayectorias del sistema con perturbación, para garantizar que las soluciones del sistema perturbado en lazo cerrado con el control óptimo predictor robusto sean decrecientes.

- Monitorear el sistema de forma remota, mediante un controlador de corte industrial cDAQ-9132, con el fin de analizar los retardos que se presenten debido a la transmisión de la información.

1.5. Hipótesis

Mediante la aplicación de la técnica del rediseño de Lyapunov, se pueden rechazar los efectos de perturbaciones externas o incertidumbre en el modelo, aplicado en una planta de deshidratación atmosférica de alimentos.

1.6. Herramientas de Software y de Hardware

- Matlab: Para las simulaciones numéricas, graficación y análisis de los datos recabados experimentalmente se emplea el software matemático MATrix LABoratory (MATLAB) que en la actualidad es una de las principales herramientas para el cálculo matemático, simulación y visualización de resultados. En este entorno se desarrollarán los códigos que son necesarios para el cálculo de las leyes de control aplicadas en el sistema de deshidratación atmosférica.

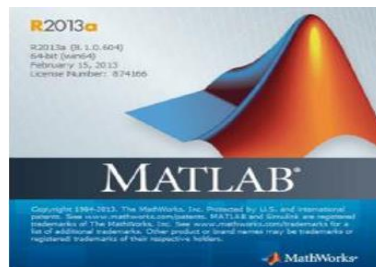


Figura 1.2: Pantalla de inicio de Matlab

- NI LabVIEW: Para la implementación del control, se usa el software Labview de National Instruments, enlazado a un chasis NI DAQ 9132. Este software, ofrece al desarrollador un entorno de programación gráfica que ayuda en gran medida al rápido desarrollo de aplicaciones de instrumentación virtual integrando hardware tanto de código cerrado como de código abierto. LabVIEW es un acrónimo para Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench; es usado ampliamente en procesos de instrumentación [9],[2].

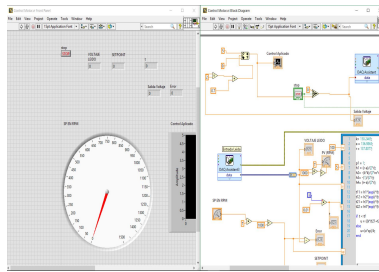


Figura 1.3: Pantalla de Labview

• NI cDAQ-9132: Para la implementación de los controladores en la plataforma experimental, se usará un dispositivo industrial compactDAQ, el cual es una plataforma de adquisición de datos robusta y portátil, que integra conectividad y acondicionamiento de señales en E/S modular para conectar directamente a cualquier sensor o señal. CompactDAQ puede usarse con software LabVIEW para la adquisición de datos. Puede ser usado con fines de investigación y desarrollo. En la Tabla 1.1 se muestran algunas de las características del dispositivo cDAQ-9132.

Tabla 1.1: Características del cDAQ-9132.

CPU	Intel Atom E3825
Núcleos	2
Frecuencia del CPU	1.33GHz
Sistemas operativos soportados	Windows Embedded Standard 7 (WES7), NI Linux Real-Time
Conectividad	2 puertos ethernet, 10Base-T, 100Base-TX, and 1000Base-T Ethernet
Ratios de comunicación	10 Mbps, 100 Mbps, 1000 Mbps



Figura 1.4: NI cDAQ-9132

Adicionalmente, se usará un chasis remoto NI cDAQ-9184. El cual es un chasis compactDAQ con conectividad ethernet que está diseñado para sistemas pequeños,

remotos. Este chasis puede usar distintos módulos, por ejemplo el módulo para poder realizar mediciones de señales analógicas, digitales, etc. Para la implementación de las leyes de control de este trabajo, se usaron los módulos NI-9263 y NI-9207 de salida y entrada, respectivamente.



Figura 1.5: NI cDAQ-9184

1.7. Herramientas teóricas

- Control robusto: El control robusto considera las perturbaciones que se presentan en un sistema para responder ante ellas y mantener la estabilidad en lazo cerrado. El objetivo es diseñar un controlador tal que independientemente de los cambios en la dinámica, la estabilidad esté garantizada [19].
- Control óptimo: El objetivo de la teoría del control óptimo es determinar las señales de control que causarán que un proceso satisfaga restricciones físicas y al mismo tiempo, minimizar (o maximizar) un criterio de desempeño [10].
- Control predictivo: El control predictivo se usa para anticipar el efecto de las acciones de control a la salida, con el objetivo de compensar los efectos de los retardos existentes en el sistema. Un resultado muy conocido del control predictivo es el predictor de Smith [24].
- Rediseño de Lyapunov: La técnica del rediseño de Lyapunov ha sido usada para sistemas no lineales libres de retardo, esta técnica se refiere al diseño donde un controlador de realimentación de estado estabilizador puede ser construido a partir del conocimiento de una función de Lyapunov [6].

- Cota última: Cuando no es posible garantizar la estabilidad asintótica del sistema es útil emplear el concepto de cota última, para conocer el tamaño del conjunto en el que quedará la trayectoria de la solución. Esto nos ayuda a garantizar que una vez que la solución del sistema en lazo cerrado entre en dicho conjunto, en tiempo finito, la trayectoria permanecerá ahí [6].

1.8. Publicaciones

A lo largo de los estudios de maestría y como resultado de ella se obtuvo el siguiente trabajo presentado en congreso:

Rodríguez-Guerrero, L., Santos-Sánchez, O. J., Velasco-Rebollo, R. E., & García-Samperio, C. A. (2018, September). Network-based control system to compensate the input delay and minimize energy expenditure of a cooling plant. In 2018 15th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE) (pp. 1-6). IEEE.

Así como el siguiente artículo en proceso de escritura:

Santos-Sánchez, O. J., Velasco-Rebollo, R. E., Rodríguez-Guerrero, L., Ordaz-Oliver, J. P. & Cuvas-Castillo, C, (2019). Lyapunov redesign for both input and state delay systems by using of optimal predictive control and ultimate bound approaches: Theory and experiments.

Capítulo 2

Marco Teórico

En este Capítulo se recuerda la teoría usada como base para el desarrollo del presente trabajo. Primero, se aborda el problema del control óptimo para sistemas con retardo en el estado, seguido de los pasos para el cálculo del predictor de estado, que es necesario para el diseño del control óptimo predictor cuyo fin es el de compensar el retardo en la entrada y minimizar un criterio de desempeño.

2.1. Control óptimo para sistemas con retardo en el estado.

Para abordar el problema del control óptimo para sistemas con retardo, en primer lugar se recordarán los resultados del control óptimo para sistemas libres de retardo [10].

Se considera un sistema lineal libre de retardo de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.1)$$

en donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y condición inicial $x(t_0) = x_0$.

De acuerdo al enfoque de la programación dinámica [10], el control $u(t) = -R^{-1}B^T Px(t)$ minimiza al índice de desempeño $J = \int_0^\infty (x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t))dt$ sujeto al sistema (2.1).

La matriz $P > 0$ satisface la ecuación algebraica de Riccati $AP + PA^T - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$ [10].

Para el caso de los sistemas lineales con retardo en el estado, considere la siguiente ecuación

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad (2.2)$$

en donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $h > 0$ es el retardo en el estado y condición inicial $x(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, $\varphi(\theta) \in \mathcal{PC} : [-h, 0]$.

Se define el índice de desempeño cuadrático de la forma

$$J(\varphi, u) = \int_0^\infty [x^T(t, \varphi)Qx(t, \varphi) + u^T(t)Ru(t)]dt, \quad (2.3)$$

donde las matrices $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \geq 0$ y $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $R > 0$.

Para sistemas con retardo el problema consiste en investigar las condiciones que debe satisfacer el control $u(t)$ tal que minimice al índice de desempeño $J(\varphi, u)$ y se satisfaga la ecuación de tipo Hamilton-Jacobi-Bellman. Las condiciones necesarias y suficientes fueron presentadas en [20], [12] y son recordadas brevemente en este trabajo.

2.1.1. Existencia y unicidad de las soluciones para sistemas con retardos

Considere el sistema (2.2), como el control es una realimentación de estado, puede denotarse como $u(t) = u(x_t)$, entonces el sistema se puede reescribir como

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(x_t), \quad (2.4)$$

y de forma general la dinámica del sistema puede expresarse como una función del estado completo como

$$\dot{x}(t) = f(x_t) = f(x(t+\theta)), \quad (2.5)$$

en donde $u(x_t) = 0$, $\theta \in [-h, 0]$.

Una condición suficiente para que (2.5) tenga una y sólo una solución es que

$$\forall \varphi \in \mathcal{PC} : [-h, 0] \exists L > 0 / \| f(x(t+\theta)) - f(y(t+\theta)) \| \leq L \| x - y \|$$

y además

$$\| u(x_t) - u(y_t) \| \leq L_u \| x_t - y_t \| , L_u > 0.$$

2.1.2. Definiciones auxiliares para sistemas con retardos

A continuación se presentan tres definiciones de estabilidad enunciadas en [21] para sistemas con retardos.

Definición 1. [28] *La solución trivial de $\dot{x}(t) = f(x_t)$ se dice estable si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que*

$$\| \varphi \| < \delta \Rightarrow \| x_t \| < \varepsilon , \forall t \geq 0.$$

Definición 2. [28] *Si la Definición anterior se satisface y tenemos que $\| x_t \| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $x = 0$ se dice asintóticamente estable. Si esto se cumple $\forall \varphi$, entonces se dice globalmente asintóticamente estable.*

Definición 3. [21] *Un control admisible para el sistema (2.2) satisface:*

- i) $u(t) = u(x_t)$.
- ii) $u(x_t)$ es tal que (2.2) tiene una solución $\forall t \geq 0$ y $\forall \varphi \in \mathcal{C} : [-h, 0]$.
- iii) El lazo cerrado de (2.2) con $u(x_t)$ es asintóticamente estable ($x=0$).
- iv) $u(x_t)$ hace que $J(\varphi, u) < \infty \forall \varphi \in \mathcal{C} : [-h, 0]$.

En el artículo de Krasovskii [12] (condiciones suficientes) se considera que una ley de control admisible para un sistema de la forma (2.2) satisface lo siguiente:

- 1) El control lineal es una funcional del estado completo x_t

$$u(t) = K_0 x(t) + \int_0^\infty K_1(\theta) x(t+\theta) d\theta, \quad (2.6)$$

donde $K_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $K_1(\theta)$ es una matriz de funciones continuas de $m \times n$ definida en el intervalo $[-h, 0]$.

2) El sistema de la forma (2.2) en lazo cerrado con una ley de control admisible de la forma (2.6) es estable.

A continuación se dan las condiciones suficientes para la existencia de un control óptimo para sistemas lineales con retardos [12], [21].

2.1.3. Condiciones suficientes para la existencia de un control admisible.

Proposición 1. [21] Sea el sistema (2.2). El sistema tiene un control admisible $u(x_t)$ si:

- i) Las columnas de A_1 son combinaciones lineales de las columnas de B .
- ii) B tiene rango m .
- iii) El par (A_0, B) es completamente controlable.

Si se satisface la Proposición 1, entonces podemos retomar el siguiente teorema, donde se muestra la ley de control óptima para el sistema (2.2).

Teorema 1 (Ross, D., 1969, [21]) Una ley de control lineal

$$u^0(t) = -R^{-1}B^T\Pi_0x(t) - R^{-1}B^T \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta, \quad t \geq 0, \quad (2.7)$$

proporciona el mínimo absoluto al criterio (2.3) para el sistema dinámico (2.2) si:

- $u^0(t)$ estabiliza la planta.
- Π_0 Es una matriz definida positiva y simétrica que junto con $\Pi_1(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n} \forall \theta \in [-h, 0]$, $\Pi_2(\xi, \theta) \forall \theta, \xi \in [-h, 0]$, satisfacen las relaciones:
 - a) $A_0^T\Pi_0 + \Pi_0A_0 - \Pi_0BR^{-1}B^T\Pi_0 + \Pi_1^T(0) + \Pi_1(0) + Q = 0$,
 - b) $\frac{d\Pi_1(\theta)}{d\theta} = (A_0^T - \Pi_0BR^{-1}B^T)\Pi_1(\theta) + \Pi_2(0, \theta)$, $-h \leq \theta \leq 0$,
 - c) $\frac{\partial\Pi_2(\xi, \theta)}{\partial\xi} + \frac{\partial\Pi_2(\xi, \theta)}{\partial\theta} = -\Pi_1^T(\xi)BR^{-1}B^T\Pi_1(\theta)$, $-h \leq \xi \leq 0$, $-h \leq \theta \leq 0$,
 - d) $\Pi_1(-h) = \Pi_0A_1$,

$$\text{e) } \Pi_2(-h, \theta) = A_1^T \Pi_1(\theta), \quad -h \leq \theta \leq 0.$$

Bajo estas condiciones la representación de J en términos de φ y u^0 está dada por:

$$J[\varphi, u^0] = \varphi^T(0) \Pi_0 \varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta) \varphi(\theta) d\theta + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \varphi^T(\xi) \Pi_2(\xi, \theta) \varphi(\theta) d\xi d\theta.$$

Si existe un control admisible $u^0(t) = u^0(x_t)$ para el sistema (2.2) y una funcional definida positiva $V(x_t)$ que satisface las siguientes condiciones

$$\left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(2.2), u(t)=u^0(t)} + g(x_t, u^0(x_t)) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.8)$$

$$\left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(2.2), u(t)=u^0(t)} + g(x_t, u^0(x_t)) \leq \left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(2.2), u(t)} + g(x_t, u(t)). \quad (2.9)$$

Para cualquier control admisible $u(t)$, entonces $u^0(t)$ hace que J alcance un mínimo respecto a todos los controles admisibles, además

$$V(\varphi) = J(\varphi, u^0(t)),$$

es el valor óptimo del índice de desempeño.

En la siguiente sección se propone y también se construye una funcional $V(\varphi)$ la cual cumpla las condiciones antes mencionadas.

2.1.4. Proposición de una funcional $V(\varphi)$

Proposición 2. [21]: Si $u(t) = u(x_t)$, $\forall t \geq 0$ es un control lineal admisible que satisface una condición de Lipschitz y φ es una función inicial arbitraria, entonces la función

$$V(\varphi) = J(\varphi, u) = \int_0^\infty \{x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)\} dt, \quad (2.10)$$

tiene representación

$$V(\varphi) = \varphi^T(0) K_0 \varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 K_1(\theta) \varphi(\theta) d\theta +$$

$$\int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \varphi^T(\xi) K_2(\xi, \theta) \varphi(\theta) d\xi d\theta, \quad (2.11)$$

donde:

i) K_0 es una matriz simétrica definida positiva.

ii) K_1 es una matriz continua en $[-h, 0]$.

iii) K_2 es una función continua $\forall \xi, \theta \in [-h, 0]$, además $K_2^T(\xi, \theta) = K_2(\theta, \xi)$.

La prueba original para la construcción de la funcional $V(\varphi)$ no es dada en [21]. Por lo que se presenta una prueba alternativa en el Anexo A. En el Anexo B pueden observarse los pasos mediante los cuales se obtiene la forma del control óptimo para sistemas con retardo en el estado dada en [12].

Una vez obtenido el control óptimo para un sistema lineal con retardo en el estado, pueden observarse los pasos seguidos para la obtención del predictor de estado, necesario para la construcción del control óptimo predictor.

2.2. Cálculo del predictor de estado

El sistema que se considera en este trabajo presenta un retardo en la entrada además del retardo en el estado, por lo que es necesario el uso de una ley de control predictiva [8], que hace uso de la predicción del estado. Los pasos para el cálculo del predictor de estado del sistema se describen a continuación:

Se calcula la solución en la forma de Cauchy del sistema:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h) + Bu(t - \tau),$$

de la forma siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [K(t - \xi)x(\xi, \varphi)] = -\dot{K}(t - \xi)x(\xi, \varphi) + K(t - \xi)\dot{x}(\xi, \varphi),$$

donde la matriz fundamental satisface

$$\begin{aligned}\dot{K}(t) &= A_0K(t) + A_1K(t-h), \quad t \geq 0, \\ K(\theta) &= 0_{n \times n}, \quad \theta < 0, \quad K(0) = I_{n \times n},\end{aligned}$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{K}(t-\xi) &= K(t-\xi)A_0 + K(t-\xi-h)A_1, \\ \dot{x}(\xi, \varphi) &= A_0x(\xi, \varphi) + A_1x(\xi-h, \varphi) + Bu(\xi-\tau),\end{aligned}$$

y sustituyendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi} [K(t-\xi)x(\xi, \varphi)] &= -[K(t-\xi)A_0 + K(t-\xi-h)A_1]x(\xi, \varphi) \\ &+ K(t-\xi)[A_0x(\xi, \varphi) + A_1x(\xi-h, \varphi) + Bu(\xi-\tau)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi} [K(t-\xi)x(\xi, \varphi)] &= -K(t-\xi)A_0x(\xi, \varphi) - K(t-\xi-h)A_1x(\xi, \varphi) \\ &+ K(t-\xi)A_0x(\xi, \varphi) + K(t-\xi)A_1x(\xi-h, \varphi) \\ &+ K(t-\xi)Bu(\xi-\tau),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi} [K(t-\xi)x(\xi, \varphi)] &= -K(t-\xi-h)A_1x(\xi, \varphi) + K(t-\xi)A_1x(\xi-h, \varphi) \\ &+ K(t-\xi)Bu(\xi-\tau),\end{aligned}$$

integrando ambos lados de la igualdad desde t_0 hasta t

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \partial [K(t-\xi)x(\xi, \varphi)] &= - \int_{t_0}^t K(t-\xi-h)A_1x(\xi, \varphi)d\xi \\ &+ \int_{t_0}^t K(t-\xi)A_1x(\xi-h, \varphi)d\xi + \int_{t_0}^t K(t-\xi)Bu(\xi-\tau)d\xi.\end{aligned}$$

En la segunda integral del lado derecho se hace el cambio de variable $\theta = \xi - h$, el límite inferior de la integral es cuando $\theta = t_0 - h$ y el límite superior es cuando

$\theta = t - h$ entonces se tiene $\int_{t_0-h}^{t-h} K(t - \theta - h)A_1x(\theta, \varphi)d\theta$, se puede extender el límite superior hasta t ya que $K(\theta) = 0$ para $\theta \in [-h, 0]$, además se separa en dos integrales como sigue

$$\begin{aligned} x(t, \varphi) - K(t - t_0)x(t_0, \varphi) &= - \int_{t_0}^t K(t - \xi - h)A_1x(\xi, \varphi)d\xi + \int_{t_0}^t K(t - \xi - h)A_1x(\xi, \varphi)d\xi \\ &\quad + \int_{t_0-h}^{t_0} K(t - \theta - h)A_1x(\theta, \varphi)d\theta + \int_{t_0}^t K(t - \xi)Bu(\xi - \tau)d\xi. \end{aligned}$$

La solución está dada por

$$\begin{aligned} x(t, \varphi) &= K(t - t_0)x(t_0, \varphi) + \int_{t_0-h}^{t_0} K(t - \theta - h)A_1x(\theta, \varphi)d\theta \\ &\quad + \int_{t_0}^t K(t - \xi)Bu(\xi - \tau)d\xi. \end{aligned}$$

La primer integral se puede expresar también como sigue

$$\begin{aligned} x(t, \varphi) &= K(t - t_0)x(t_0, \varphi) + \int_{-h}^0 K(t - t_0 - \theta - h)A_1x(t_0 + \theta, \varphi)d\theta \\ &\quad + \int_{t_0}^t K(t - \xi)Bu(\xi - \tau)d\xi. \end{aligned}$$

El predictor $x(t + \alpha, \varphi)$ se calcula haciendo el cambio de $t_0 \rightarrow t$ y $t \rightarrow t + \alpha$

$$\begin{aligned} x(t + \alpha, \varphi) &= K(t + \alpha - t)x(t, \varphi) + \int_{-h}^0 K(t + \alpha - t - \xi - h)A_1x(t + \xi, \varphi)d\xi \\ &\quad + \int_t^{t+\alpha} K(t + \alpha - \xi)Bu(\xi - \tau)d\xi. \end{aligned}$$

Aplicando los cambios de variable correspondientes, el predictor de estado tiene la forma

$$\begin{aligned} x(t + \alpha, \varphi) &= K(\alpha)x(t, \varphi) + \int_{t-h}^t K(t + \alpha - \delta - h)A_1x(\delta, \varphi)d\delta \\ &\quad + \int_{t-\tau}^{t+\alpha-\tau} K(t + \alpha - \delta - \tau)Bu(\delta)d\delta. \end{aligned}$$

En particular, si $\alpha = \tau$ se tiene el predictor

$$x(t + \tau, \varphi) = K(\tau)x(t, \varphi) + \int_{t-h}^t K(t + \tau - \delta - h)A_1x(\delta, \varphi)d\delta + \int_{t-\tau}^t K(t - \delta)Bu(\delta)d\delta$$

Haciendo el cambio de variable $\delta = t + \theta \rightarrow \theta = \delta - t$ para ambas integrales, para la primera integral el límite inferior es $\theta = -h$ y el límite superior es $\theta = 0$. Para la segunda integral, el límite inferior es $\theta = -\tau$ y el límite superior es $\theta = 0$. Por lo que el predictor de estado tiene la forma

$$x(t + \tau, \varphi) = K(\tau)x(t, \varphi) + \int_{-h}^0 K(\tau - \theta - h)A_1x(t + \theta, \varphi)d\theta + \int_{-\tau}^0 K(-\theta)Bu(t + \theta)d\theta$$

2.3. Cota última

El análisis de Lyapunov puede usarse para mostrar acotamiento de la solución de la ecuación de estado, incluso cuando no hay punto de equilibrio en el origen. Para ilustrar este fenómeno, a continuación se muestra una definición importante:

Suponga que el conjunto $\Omega_c := \{V(t, x_t) \leq c\}$ es compacto, para alguna $c > 0$. Elija $\Lambda := \{\vartheta \leq V(t, x_t) \leq c\}$, para alguna constante positiva $\vartheta < c$. Si la derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema satisface que $\dot{V}(t, x_t) < 0, \forall x \in \Lambda, \forall t \geq t_0$, entonces la funcional V continuará decreciendo hasta que la trayectoria entre al conjunto positivo invariante $\Omega_\vartheta := \{V(t, x_t) \leq \vartheta\}$ en tiempo finito y permanecerá ahí el resto del tiempo [13].

Capítulo 3

Diseño del controlador óptimo predictor robusto

En este Capítulo se presenta la descripción del problema y se siguen los pasos para su resolución. En primer lugar se diseña la componente del control que estabiliza al sistema nominal (sin incertidumbre), se presenta la prueba de estabilidad del sistema nominal en lazo cerrado con el control óptimo predictivo, el cual compensa el retardo τ en la entrada además de que minimiza un índice de desempeño cuadrático. Posteriormente se diseña el término robusto, que garantiza que las soluciones del sistema perturbado en lazo cerrado sean decrecientes, por último se presenta la prueba de estabilidad del sistema en lazo cerrado con el control óptimo predictor robusto.

3.1. Descripción del problema

Para la planta de deshidratación atmosférica se considera un modelo que presenta retardo tanto en el estado como en la entrada de control, además de un término de incertidumbre, el sistema tiene la forma

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - h) + B[u(t - \tau) + \delta(t)], \quad \forall t \geq 0 \quad (3.1)$$

con condiciones iniciales para el estado $\varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$ y para el control $\psi(\xi)$, $\xi \in [-\tau, 0]$, la incertidumbre está acotada $|\delta(t)| \leq \bar{\gamma}$, $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}^+$.

El término de incertidumbre no lineal, $\delta(t)$, satisface la condición de acoplamiento (matching condition), lo que significa que la perturbación entra por el mismo canal que la entrada de control [6].

El objetivo es encontrar una ley de control para (3.1) que asegure que las soluciones del sistema en lazo cerrado alcancen y permanezcan dentro de un conjunto acotado del origen, en tiempo finito independiente de la incertidumbre $\delta(t)$.

Para lograr dicho objetivo, se construye una ley de control con dos componentes como sigue: El primero se diseña para estabilizar a las trayectorias del sistema nominal (sin incertidumbre), para lo cual se propone usar un control óptimo predictivo que combina los resultados del control óptimo para sistemas lineales con retardo en el estado dados en [12], [21] y con retardo en la entrada en [1] con el control predictivo presentado en [8]. Esta ley de control propuesta compensa el retardo en la entrada τ además de que minimiza un índice de desempeño cuadrático

3.2. Control óptimo predictor.

Para el problema de diseño del control óptimo predictivo, se considera el modelo del sistema nominal de la forma

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t-\tau), \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

Proposición 3. *Con el control predictivo*

$$u_p^0(t) = -R^{-1}B^T\Pi_0x(t+\tau) - R^{-1}B^T \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\tau+\theta)d\theta, \quad (3.3)$$

las soluciones del sistema nominal en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu_p^0(t), \quad (3.4)$$

son asintóticamente estables.

Prueba 3. *El control $u_p^0(t)$ se calcula a partir del resultado obtenido en [12] y [21] donde se resuelve el problema del control óptimo para sistemas lineales sólo con retardo en el estado, de la forma (3.4), en dicho trabajo se sintetiza la ley de control de realimentación de estado, que es*

$$u^0(t) = -R^{-1}B^T\Pi_0x(t) - R^{-1}B^T \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta, \quad t \geq 0, \quad (3.5)$$

que minimiza al siguiente índice de desempeño

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt, \quad (3.6)$$

donde $Q \in R^{n \times n}$ $Q \geq 0$ y $R \in R^{m \times m}$ $R > 0$, sujeto a las trayectorias de el sistema (3.4).

El sistema en lazo cerrado (3.4)-(3.5)

$$\dot{x}(t) = (A_0 - BR^{-1}B^T\Pi_0) x(t) + A_1x(t-h) - BR^{-1}B^T \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta, \quad (3.7)$$

es asintóticamente estable, porque $u^0(t)$ es el control óptimo y satisface la ecuación de HJB, entonces

$$\left. \frac{d(V(x_t))}{dt} \right|_{(3.4, u(t)=u^0)} = - (x(t)^T Q x(t) + u^0(t)^T R u^0(t)). \quad (3.8)$$

Para diseñar el término del control que compensa el retardo en la entrada para el sistema nominal (3.2), se hace uso del resultado dado en [1], donde se resuelve el problema del control óptimo para sistemas lineales con retardo en la entrada, obteniendo lo siguiente: para el intervalo de tiempo $[0, \tau]$ el control no tiene influencia sobre $x(t)$ y puede elegirse como $u(t) = 0$, en el intervalo $[0, \tau]$ el estado $x(t)$ sólo depende de la función inicial del control $\psi(\xi)$, $\xi \in [-\tau, 0]$.

Por lo tanto, el índice de desempeño (3.6) se puede reescribir como

$$J = \int_0^{\tau} x^T(t)Qx(t)dt + \int_{\tau}^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt.$$

Se hace el cambio de variable $z(t) = u(t - \tau)$ en la ecuación (3.2) y se considera al correspondiente problema de control con el modelo

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bz(t), \quad \forall t \geq \tau$$

con $x(t)$ y $x(t-h)$ calculados de la solución de (3.4). Por el principio de optimalidad [10], la última porción de una trayectoria óptima es óptima en sí misma, entonces la ley de control es óptima para cualquier punto en la trayectoria con el índice de desempeño

$$\bar{J} = \int_{\tau}^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + z^T(t)Rz(t)) dt.$$

Si $z(t)$ minimiza a \bar{J} , entonces $u(t - \tau) = z(t)$ para $t \geq \tau$ también minimiza a J (y viceversa).

Entonces el control $z(t)$ puede ser elegido como el control óptimo $u^0(t)$, dado en (3.5) para $t \geq \tau$. Por lo tanto, el control que se debe calcular es

$$u(t) = z(t + \tau) = u^0(t + \tau) = u_p^0(t), \quad t \geq 0, \quad (3.9)$$

$$u_p^0(t) = -R^{-1}B^T\Pi_0x(t + \tau) - R^{-1}B^T \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t + \tau + \theta)d\theta,$$

de modo que el sistema en lazo cerrado (3.4)-(3.9):

$$\dot{x}(t) = (A_0 - BR^{-1}B^T\Pi_0)x(t) + A_1x(t - h) - BR^{-1}B^T \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t + \theta)d\theta, \quad (3.10)$$

coincida con (3.7) para $t \geq \tau$.

La predicción del estado $x(t + \tau)$ se obtiene de la fórmula de Cauchy del sistema (3.4) y está dada por

$$\begin{aligned} x(t + \tau) &= K(\tau)x(t) + \int_{-h}^0 K(\tau - \theta - h)A_1x(t + \theta)d\theta \\ &+ \int_{-\tau}^0 K(-\theta)Bu(t + \theta)d\theta, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

Esta expresión puede ser calculada con ayuda de la matriz fundamental $K(t)$ del sistema (3.4) que satisface

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= A_0K(t) + A_1K(t - h), \quad t \geq 0, \\ K(\theta) &= 0_{n \times n}, \quad \theta < 0, \quad K(0) = I_{n \times n}. \end{aligned}$$

Si $0 < h \leq \tau$ se debe calcular la matriz fundamental en el intervalo $[0, \tau]$ y si $\tau \leq h$ la matriz fundamental se calcula en el intervalo $[0, h]$.

El análisis de estabilidad para el sistema nominal en lazo cerrado con el control óptimo predictivo se muestra a continuación.

3.2.1. Prueba de estabilidad para el sistema nominal

La estabilidad del sistema nominal en lazo cerrado (3.10) fue analizada por medio del enfoque de Lyapunov.

Proposición 4. *Sea la funcional definida positiva $V(x_t)$, construida en el Anexo A:*

$$\begin{aligned} V(x_t) &= x^T(t)\Pi_0x(t) + 2x^T(t) \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \\ &+ \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x^T(t+\xi)\Pi_2(\xi,\theta)x(t+\theta)d\xi d\theta, \end{aligned}$$

su derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema nominal en lazo cerrado (3.10) es

$$\dot{V}(x_t)\Big|_{(3.10)} = -[x^T(t)Qx(t) + u^0(t)^T Ru^0(t)]$$

Prueba 4.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t)\Big|_{(3.10)} &= 2\dot{x}^T(t)\Pi_0x(t) \\ &+ 2\dot{x}^T(t) \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \\ &+ 2x^T(t) \frac{d}{dt} \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \\ &+ \frac{d}{dt} \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x^T(t+\xi)\Pi_2(\xi,\theta)x(t+\theta)d\xi d\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t)\Big|_{(3.10)} &= 2 \left[(A_0 - BR^{-1}B^T\Pi_0)x(t) + A_1x(t-h) - BR^{-1}B^T \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \right]^T \\ &\times \left[\Pi_0x(t) + \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \right] \\ &+ 2x^T(t) \frac{d}{dt} \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \\ &+ \frac{d}{dt} \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x^T(t+\xi)\Pi_2(\xi,\theta)x(t+\theta)d\xi d\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) \Big|_{(3.10)} &= 2[A_0x(t) + A_1x(t-h)]^T \left[\Pi_0x(t) + \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \right] \\
&\quad - 2 \left[R^{-1}B^T\Pi_0x(t) + BR^{-1}B^T \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \right]^T B^T \\
&\quad \left[\Pi_0x(t) + \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \right] \\
&\quad + 2x^T(t) \frac{d}{dt} \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \\
&\quad + \frac{d}{dt} \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x^T(t+\xi) \Pi_2(\xi, \theta)x(t+\theta)d\xi d\theta.
\end{aligned}$$

Las derivadas de las integrales se resuelven con la regla de Leibnitz y después se resuelven mediante la integración por partes, considerando que $\frac{\partial x(t+\theta)}{\partial t} = \frac{\partial x(t+\theta)}{\partial \theta}$, se resuelve como sigue:

$$\begin{aligned}
2x^T(t) \frac{d}{dt} \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta &= 2x^T(t) \int_{-h}^0 \underbrace{\Pi_1(\theta)}_u \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} x(t+\theta)}_{dv} d\theta \\
&= 2x^T(t) \left[\Pi_1(\theta)x(t+\theta) \Big|_{-h}^0 - \int_{-h}^0 \frac{\partial \Pi_1(\theta)}{\partial \theta} x(t+\theta)d\theta \right] \\
&= 2x^T(t) \left[\Pi_1(0)x(t) - \Pi_1(-h)x(t-h) - \int_{-h}^0 \frac{\partial \Pi_1(\theta)}{\partial \theta} x(t+\theta)d\theta \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x^T(t+\xi) \Pi_2(\xi, \theta) x(t+\theta) d\xi d\theta \\
 = & \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} x^T(t+\xi)}_{dv} \underbrace{\Pi_2(\xi, \theta)}_u x(t+\theta) d\xi d\theta \\
 & + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x^T(t+\xi) \underbrace{\Pi_2(\xi, \theta)}_u \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} x(t+\theta)}_{dv} d\xi d\theta \\
 = & \int_{-h}^0 \left[x^T(t+\xi) \Pi_2(\xi, \theta) \Big|_{-h}^0 - \int_{-h}^0 x^T(t+\xi) \frac{\partial \Pi_2(\xi, \theta)}{\partial \xi} d\xi \right] x(t+\theta) d\theta \\
 & + \int_{-h}^0 x^T(t+\xi) \left[\Pi_2(\xi, \theta) x(t+\theta) \Big|_{-h}^0 - \int_{-h}^0 \frac{\partial \Pi_2(\xi, \theta)}{\partial \theta} x(t+\theta) d\theta \right] d\xi \\
 = & \int_{-h}^0 \left[x^T(t) \Pi_2(0, \theta) - x^T(t-h) \Pi_2(-h, \theta) - \int_{-h}^0 x^T(t+\xi) \frac{\partial \Pi_2(\xi, \theta)}{\partial \xi} d\xi \right] x(t+\theta) d\theta \\
 & + \int_{-h}^0 x^T(t+\xi) \left[\Pi_2(\xi, 0) x(t) - \Pi_2(\xi, -h) x(t-h) - \int_{-h}^0 \frac{\partial \Pi_2(\xi, \theta)}{\partial \theta} x(t+\theta) d\theta \right] d\xi
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las 2 igualdades anteriores y el sistema en lazo cerrado (3.10) en la derivada:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x_t) \Big|_{(3.10)} & = 2 [A_0 x(t) + A_1 x(t-h)]^T \left[\Pi_0 x(t) + \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta) x(t+\theta) d\theta \right] \\
 & \quad - 2 \underbrace{\left[R^{-1} B^T \Pi_0 x(t) + R^{-1} B^T \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta) x(t+\theta) d\theta \right]^T}_u R \\
 & \quad \underbrace{R^{-1} \left[B^T \Pi_0 x(t) + B^T \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta) x(t+\theta) d\theta \right]}_{u^0(t)} \\
 & \quad + 2x^T(t) \left[\Pi_1(0) x(t) - \Pi_1(-h) x(t-h) - \int_{-h}^0 \frac{\partial \Pi_1(\theta)}{\partial \theta} x(t+\theta) d\theta \right] \\
 & \quad + \int_{-h}^0 \left[x^T(t) \Pi_2(0, \theta) - x^T(t-h) \Pi_2(-h, \theta) - \int_{-h}^0 x^T(t+\xi) \frac{\partial \Pi_2(\xi, \theta)}{\partial \xi} d\xi \right] x(t+\theta) d\theta \\
 & \quad + \int_{-h}^0 x^T(t+\xi) \left[\Pi_2(\xi, 0) x(t) - \Pi_2(\xi, -h) x(t-h) - \int_{-h}^0 \frac{\partial \Pi_2(\xi, \theta)}{\partial \theta} x(t+\theta) d\theta \right] d\xi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) \Big|_{(3.10)} &= 2[A_0x(t) + A_1x(t-h)]^T \left[\Pi_0x(t) + \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \right] \\
&\quad - \left[x^T(t)\Pi_0BR^{-1} + \int_{-h}^0 x^T(t+\theta)\Pi_1^T(\theta)d\theta BR^{-1} \right] R \\
&\quad \left[R^{-1}B^T\Pi_0x(t) + R^{-1}B^T \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \right] \\
&\quad - u^0(t)^T Ru^0(t) \\
&\quad + 2x^T(t) \left[\Pi_1(0)x(t) - \Pi_1(-h)x(t-h) - \int_{-h}^0 \frac{\partial \Pi_1(\theta)}{\partial \theta} x(t+\theta)d\theta \right] \\
&\quad + \int_{-h}^0 \left[x^T(t)\Pi_2(0,\theta) - x^T(t-h)\Pi_2(-h,\theta) - \int_{-h}^0 x^T(t+\xi) \frac{\partial \Pi_2(\xi,\theta)}{\partial \xi} d\xi \right] x(t+\theta)d\theta \\
&\quad + \int_{-h}^0 x^T(t+\xi) \left[\Pi_2(\xi,0)x(t) - \Pi_2(\xi,-h)x(t-h) - \int_{-h}^0 \frac{\partial \Pi_2(\xi,\theta)}{\partial \theta} x(t+\theta)d\theta \right] d\xi.
\end{aligned}$$

Agrupando tenemos la siguiente derivada

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) \Big|_{(3.10)} &= x^T(t) [A_0^T\Pi_0 + \Pi_0A_0 - \Pi_0BR^{-1}B^T\Pi_0 + \Pi_1^T(0) + \Pi_1(0)] x(t) \\
&\quad + 2x^T(t) [\Pi_0A_1 - \Pi_1(-h)] x(t-h) \\
&\quad + 2x^T(t) \int_{-h}^0 \left[-\frac{d\Pi_1(\theta)}{d\theta} + (A_0^T - \Pi_0BR^{-1}B^T)\Pi_1(\theta) + \Pi_2(0,\theta) \right] x(t+\theta)d\theta \\
&\quad + 2x^T(t-h) \int_{-h}^0 [A_1^T\Pi_1(\theta) - \Pi_2(-h,\theta)] x(t+\theta)d\theta \\
&\quad + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x^T(t+\xi) \left[-\Pi_1^T(\xi)BR^{-1}B^T\Pi_1(\theta) - \frac{\partial \Pi_2(\xi,\theta)}{\partial \xi} - \frac{\partial \Pi_2(\xi,\theta)}{\partial \theta} \right] x(t+\theta)d\xi d\theta \\
&\quad + 2y(t-\tau)B^T \left[\Pi_0x(t) + \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \right] - u^0(x_t)^T Ru^0(x_t).
\end{aligned}$$

De acuerdo como las cinco ecuaciones a) a e) dadas por el Teorema 1 en la sección 2.1.3, se concluye que

$$\dot{V}(x_t) \Big|_{(3.10)} = -[x^T(t)Qx(t) + u^0(t)^T Ru^0(t)]. \quad (3.12)$$

Por lo que el sistema nominal en lazo cerrado con el control óptimo predictivo es asintóticamente estable.

3.3. Control robusto

Una vez estabilizado el sistema nominal (3.4), se sigue con el diseño del componente robusto del control considerando el sistema perturbado (3.1). El término robusto tiene como fin el garantizar que las soluciones del sistema perturbado en lazo cerrado alcancen y permanezcan dentro de un conjunto acotado del origen. Este resultado es presentado a continuación.

Proposición 5. *Las soluciones del sistema (3.1) en lazo cerrado con el control*

$$u(t) = u_p^0(t) + v(t), \quad (3.13)$$

decrecen a un conjunto cerrado alrededor del origen, donde

$$u_p^0(t) = -R^{-1}B^T\Pi_0x(t+\tau) - R^{-1}B^T \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\tau+\theta)d\theta, \quad (3.14)$$

y para $\varepsilon > 0$

$$v(t) = \begin{cases} -4\gamma^2 \frac{\omega(x_t)}{\varepsilon}, & 2\gamma \|\omega(x_t)\| < \varepsilon \\ -2\gamma \frac{\omega(x_t)}{\|\omega(x_t)\|}, & 2\gamma \|\omega(x_t)\| \geq \varepsilon \end{cases}, \quad (3.15)$$

con

$$\omega(x_t) = 2B^T \left[\Pi_0x(t) + \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \right].$$

El segundo componente del control es diseñado de acuerdo a [13] para asegurar que las soluciones del sistema perturbado en lazo cerrado, son decrecientes. A continuación se presenta la prueba de estabilidad para el sistema perturbado (3.1) en lazo cerrado con el control (3.13).

Prueba 5. *Tome la misma funcional definida positiva $V(x_t)$, construida en el Anexo A, ha sido probado que*

$$\dot{V}(x_t) \Big|_{(3.10)} = -[x^T(t)Qx(t) + u^0(t)^T R u^0(t)] = -\alpha \|x_t\|_i^2,$$

donde $\|x_t\|_i^2 = \inf_{\theta \in [-h, 0]} \|x_t(\theta)\|$. El sistema perturbado (3.1) en lazo cerrado con el control $u^0(t+\tau) + v$ (dado por (3.14) y (3.15), respectivamente) es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_0 - BR^{-1}B^T\Pi_0)x(t) + A_1x(t-h) - BR^{-1}B^T \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \\ &\quad + B(v + \delta(t)), \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde $\|\delta(t)\| \leq \bar{\gamma} = 2\gamma$.

Calculando la derivada a lo largo del sistema (3.16) se obtiene:

$$\dot{V}(x_t) \Big|_{(3.16)} = -\alpha \|x_t\|_i^2 + 2 \left[\Pi_0 x(t) + \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \right]^T B [v + \delta(t)],$$

definiendo

$$\omega^T(x_t) = 2 \left[\Pi_0 x(t) + \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \right]^T B,$$

cuando $2\gamma \|\omega(x_t)\| \geq \varepsilon$, $v = -2\gamma \frac{\omega(x_t)}{\|\omega(x_t)\|}$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) \Big|_{(3.16)} &= -\alpha \|x_t\|_i^2 - 2\gamma \frac{\|\omega(x_t)\|^2}{\|\omega(x_t)\|} + \omega^T(x_t)\delta(t) \\ &\leq -\alpha \|x_t\|_i^2 - 2\gamma \|\omega(x_t)\| + 2\gamma \|\omega(x_t)\|. \end{aligned}$$

Cuando $2\gamma \|\omega(x_t)\| < \varepsilon$, $v = -4\gamma^2 \frac{\omega(x_t)}{\varepsilon}$

$$\dot{V}(x_t) \Big|_{(3.16)} \leq -\alpha \|x_t\|_i^2 - 4\gamma^2 \frac{\|\omega(x_t)\|^2}{\varepsilon} + 2\gamma \|\omega(x_t)\|.$$

El valor máximo que toman los términos $-4\gamma^2 \frac{\|\omega(x_t)\|^2}{\varepsilon} + 2\gamma \|\omega(x_t)\|$ se calculan como sigue: se define $p = 2\gamma \|\omega(x_t)\|$, la expresión previa puede ser reescrita como $-\frac{p^2}{\varepsilon} + p$, y su derivada con respecto a p conduce a $-\frac{2p}{\varepsilon} + 1$, entonces $-\frac{2p}{\varepsilon} + 1 = 0$, y $p = \frac{\varepsilon}{2}$, entonces la funcional alcanza un máximo como

$$-4\gamma^2 \frac{\|\omega(x_t)\|^2}{\varepsilon} + 2\gamma \|\omega(x_t)\| = -\frac{\varepsilon^2}{4\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{4},$$

y la derivada temporal se expresa como sigue:

$$\dot{V}(x_t) \Big|_{(3.16)} \leq -\alpha \|x_t\|_i^2 + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Tome $\bar{\gamma} \leq \|x_t\|_i$, entonces $2\alpha\bar{\gamma}^2 \leq 2\alpha \|x_t\|_i^2$, y elija $\varepsilon = 2\alpha\bar{\gamma}^2$, entonces $\frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{1}{2}\alpha \|x_t\|_i^2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) \Big|_{(3.16)} &\leq -\alpha \|x_t\|_i^2 + \frac{1}{2}\alpha \|x_t\|_i^2 \\ &\leq -\frac{1}{2}\alpha \|x_t\|_i^2, \quad \forall \bar{\gamma} \leq \|x_t\|_i, \quad \|x_t\|_s \leq r, \end{aligned}$$

donde $\|x_t\|_s^2 = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|x_t(\theta)\|^2$, y B_r denota la vecindad para $r > 0$. Las soluciones del sistema (3.16) decrecen a una región alrededor del origen, y la proposición ha sido probada.

Es importante mencionar que debido a la presencia de la perturbación externa $\delta(t)$, el sistema en lazo cerrado no tiene puntos de equilibrio por lo que no es posible utilizar el concepto de estabilidad asintótica, por lo que únicamente es posible concluir que las soluciones del sistema perturbado en lazo cerrado decrecen a una región alrededor del origen.

Capítulo 4

Resultados Experimentales

En este Capítulo se describe la estructura de la red mediante la cual se monitorean los datos para el sistema de deshidratación atmosférica de jitomate, además de las simulaciones realizadas y la identificación de parámetros del sistema en las regiones de operación de 50°C, 60°C y 70°C, y los resultados experimentales obtenidos en cada una de las zonas de operación.

4.1. Conexión del cDAQ-9132 a la planta.

La red tiene una estructura directa [25], lo que significa que los sensores y actuadores que intervienen en el lazo de control están conectados entre si de forma directa como puede observarse en la Figura 4.1, lo que provee una mejor interacción entre los componentes.

Las leyes de control se implementan usando el software Labview de NI en el controlador industrial cDAQ-9132 y el chasis remoto cDAQ-9184, donde los módulos de lectura y escritura se encuentran conectados.

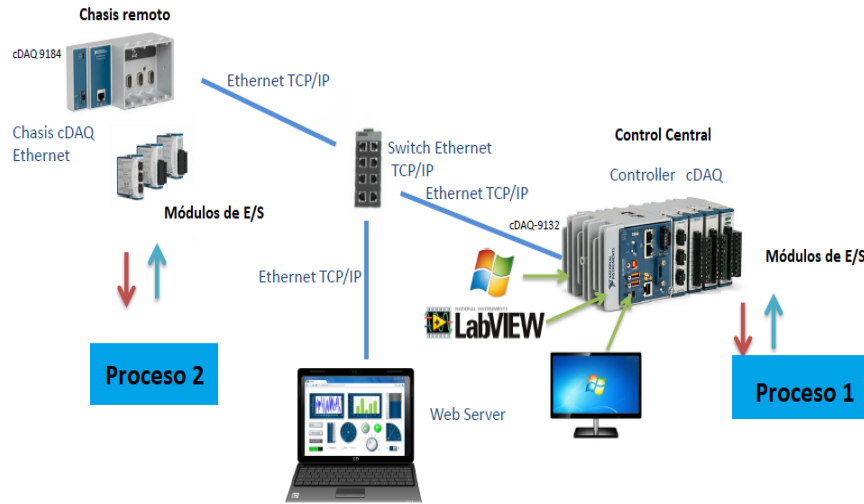


Figura 4.1: Componentes de monitoreo del sistema.

El efecto de los retardos se considera al realizar la identificación de parámetros del sistema que se verá en la siguiente sección.

4.2. Identificación de parámetros

Se realizó la identificación de los parámetros del sistema en las regiones de operación de 50°C , 60°C y 70°C , las regiones de operación fueron elegidas de acuerdo a [23]. La identificación de parámetros se realizó por medio del método de mínimos cuadrados ordinarios [29]. Los parámetros obtenidos por el algoritmo se muestran en la Tabla 4.1, para todas las zonas de operación los retardos son $h = 10\text{s}$ y $\tau = 3\text{s}$.

Tabla 4.1: Parámetros del sistema de deshidratación en las distintas zonas de operación

Región de Operación	a_0	a_1	b
50°C	-0.12599	0.09917	0.01035
60°C	-0.10059	0.09056	0.00390
70°C	-0.07231	0.06523	0.00290

En las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4 pueden observarse las gráficas de comparación entre los modelos estimados por el algoritmo de mínimos cuadrados, y la dinámica real del sistema a temperaturas de 50°C, 60°C y 70°C respectivamente.

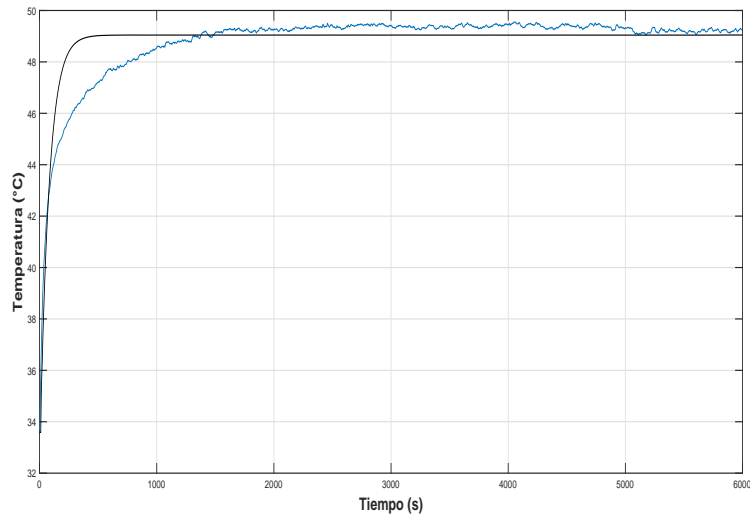


Figura 4.2: Modelo estimado y modelo real a 50°C.

Puede observarse que la respuesta real (línea azul) y la respuesta aproximada por el método de mínimos cuadrados tienen un comportamiento similar. La diferencia entre la respuesta real y la respuesta simulada podría deberse a la presencia de no linealidades, dinámicas no modeladas, incertidumbre, etc.

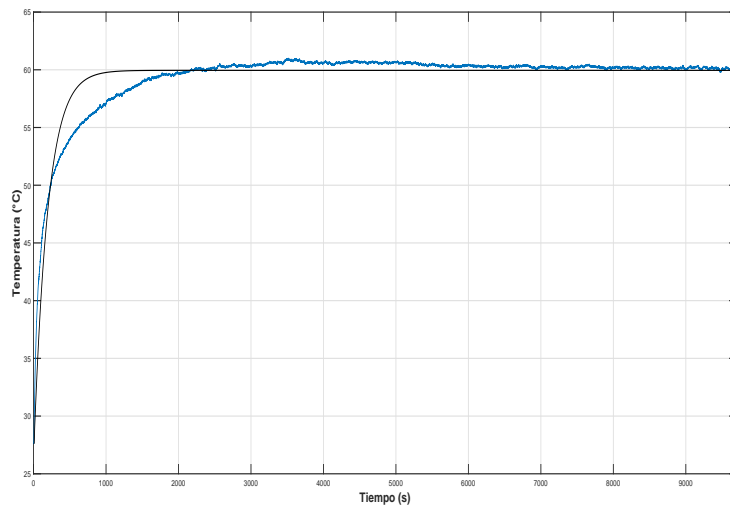


Figura 4.3: Modelo estimado y modelo real a 60°C.

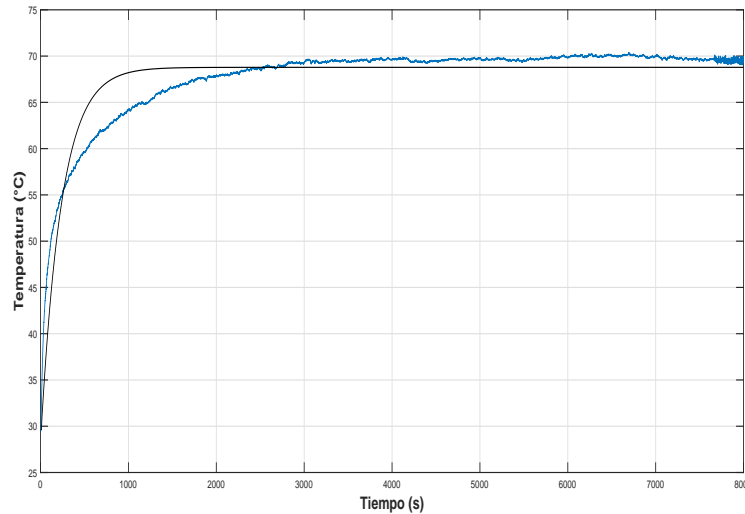


Figura 4.4: Modelo estimado y modelo real a 70°C.

Como se mencionó anteriormente, es posible observar en las gráficas de las distintas zonas de operación que aunque los parámetros de la Tabla 4.1 producen respuestas similares a la respuesta real del sistema de deshidratado, sigue existiendo diferencia entre ellas por lo que los parámetros estimados siguen siendo distintos a los parámetros reales del sistema.

Los modelos del sistema para las distintas regiones de operación quedarían como se muestra en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Modelos del sistema de deshidratación en las distintas zonas de operación

Región de Operación	Modelo
50°C	$-0.12599x(t) + 0.09917x(t - h) + 0.01035[u(t - \tau) + \delta(t)]$
60°C	$-0.10059x(t) + 0.09056x(t - h) + 0.00390[u(t - \tau) + \delta(t)]$
70°C	$-0.07231x(t) + 0.06523x(t - h) + 0.00290[u(t - \tau) + \delta(t)]$

En los modelos de la Tabla 4.2, $x(t)$ representa el error entre la temperatura dentro de la cámara de deshidratación y la temperatura deseada, $u(t - \tau)$ representa la señal de control retardada aplicada por el controlador NI-cDAQ-9132 en VCD al circuito de potencia de la planta, que a su vez aplica el voltaje en VCA a la rejilla eléctrica de la planta de deshidratación atmosférica.

Con los modelos aproximados presentados en la Tabla 4.2 se implementarán las leyes de control diseñadas para modificar la respuesta del sistema en lazo cerrado con

el fin de obtener un comportamiento adecuado.

4.3. Control predictor

En esta sección se presenta la implementación de la ley de control predictivo al sistema de deshidratación atmosférica, comenzando con la simulación del sistema en lazo cerrado en el software MatLab para posteriormente ser programado en el software de instrumentación virtual LabView.

4.3.1. Simulación

Se realizó la simulación de la respuesta del sistema nominal en lazo cerrado con el control predictivo mostrado en [8].

El control predictivo [8] se implementa en un sistema de la forma

$$\dot{x}(t) = a_0x(t) + a_1x(t - h) + bu(t - \tau), \quad (4.1)$$

la estructura del control es

$$u(t) = f_0x(t + \tau) + f_1x(t + \tau - h), \quad (4.2)$$

por lo que el sistema (4.1) en lazo cerrado con el control (4.2) es

$$\dot{x}(t) = (a_0 + bf_0)x(t) + (a_1 + bf_1)x(t - h). \quad (4.3)$$

El cuasipolinomio del sistema (4.1), en lazo cerrado con el control predictivo (4.2) es:

$$P(s) = s - (a_0 + bf_0) - (a_1 + bf_1)e^{-sh}. \quad (4.4)$$

Para elegir las ganancias f_0 y f_1 se realiza la gráfica de la región de estabilidad del sistema en lazo cerrado (4.3) cuya ecuación característica es (4.4). Se hace uso del método de D-particiones [17] y se obtiene la región estable que puede ser observada en la Figura 4.5.

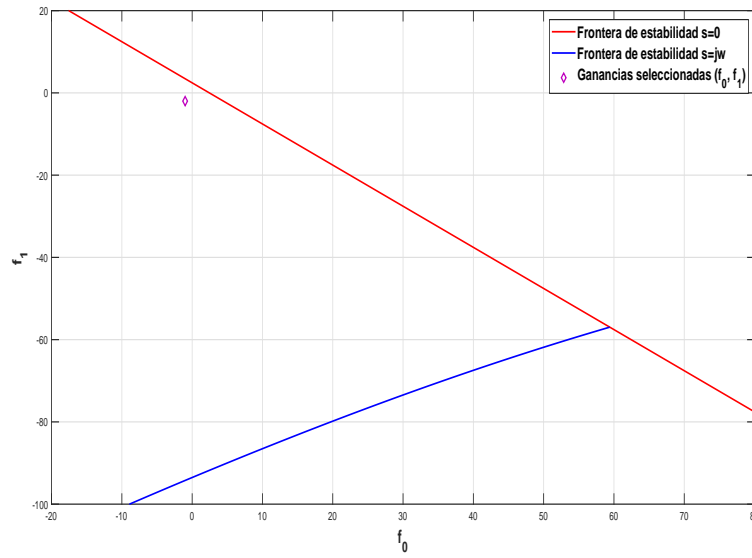


Figura 4.5: Región estable del sistema en lazo cerrado con el control predictor.

Las raíces del cuasipolinomio del sistema con las ganancias $f_0 = -1$, $f_1 = -2$ y los parámetros estimados mediante el algoritmo de mínimos cuadrados, pueden ser observadas en la Figura 4.6 obtenida mediante el algoritmo QPmR (Quasi-Polynomial mapping based Rootfinder)[27].

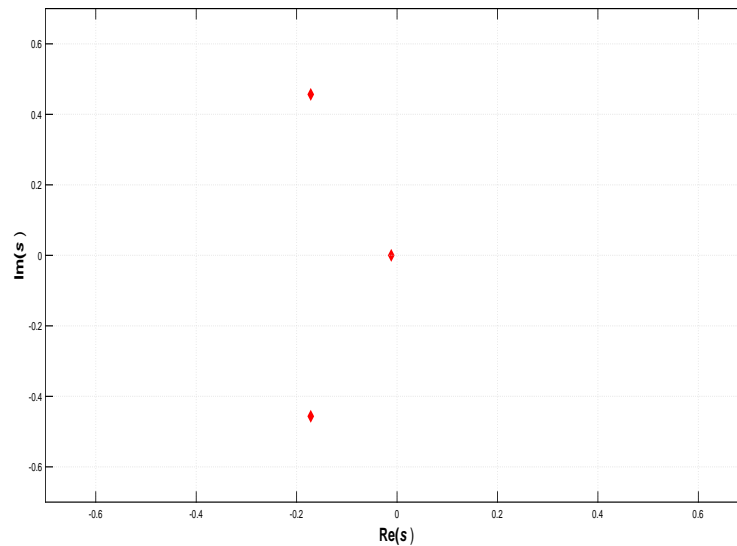


Figura 4.6: Raíces del sistema.

En la Tabla 4.3 se muestran los valores de las raíces del sistema que se observan en la Figura 4.6

Tabla 4.3: Valores numéricos de las raíces del sistema.

$$\begin{array}{c} \hline -0.1715 + 0.4577i \\ \hline -0.0114 - 0.0011i \\ \hline -0.1715 - 0.4577i \\ \hline \end{array}$$

En la Figura 4.7 se puede observar la respuesta del sistema simulado usando los parámetros estimados mostrados en la Tabla 4.1 con el control predictivo y ganancias $f_0 = -1$, $f_1 = -2$, la simulación se realizó con una temperatura de referencia de 60°C .

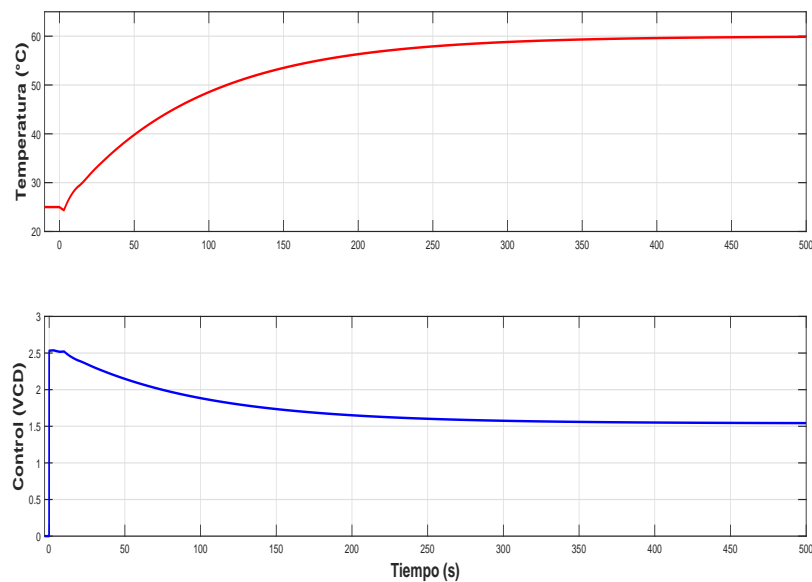


Figura 4.7: Respuesta del sistema y control predictivo

4.3.2. Implementación

Cada experimento consiste en deshidratar seis rebanadas de jitomate de aproximadamente 5mm de grosor cada una. Cada rebanada comienza inicialmente con 5g de peso, del cual el 90 % es agua y el 10 % restante es materia seca. El objetivo final es eliminar el 90 % del total de agua de cada rebanada de jitomate, es decir el 81 % del peso total de la rebanada. El peso final de la rebanada debería ser de 0.95g. Si al menos 3 de las rebanadas llegan al peso final deseado, el experimento se da por terminado.

Para conocer el porcentaje de humedad de cada rebanada de jitomate, el producto es retirado de la cámara de deshidratación con el fin de pesarlo para registrar los datos. Estos datos se toman cada 15 minutos, y en cada ronda los jitomates son cambiados de posición para conseguir un deshidratado más uniforme.

Mediante el software de instrumentación virtual LabView, se realizó la programación del control predictivo (4.2). Debido a que el control se implementa de forma discreta, es necesario hacer la discretización del mismo. Se considera entonces la forma (4.2) y se introduce el predictor de estado

$$x(t + \tau) = K(\tau)x(t) + \int_{-h}^0 K(\tau - \theta - h)A_1x(t + \theta)d\theta \\ + \int_{-\tau}^0 K(-\theta)Bu(t + \theta)d\theta, \quad t \geq 0,$$

quedando lo siguiente

$$u(t) = f_0K(\tau)x(t) \\ + f_0 \int_{-h}^0 K(\tau - \theta - h)A_1x(t + \theta)d\theta \\ + f_0 \int_{-\tau}^0 K(-\theta)Bu(t + \theta)d\theta + f_1x(t + \tau - h),$$

y discretizando:

$$\begin{aligned}
 u(k) = & f_0 \left[K(\tau)x(k) + \frac{h}{2N} \{K(\tau)A_1x(k - \bar{h}) + K(\tau - h)A_1x(k)\} \right] \\
 & + f_0 \left[\sum_{i=1}^{N-1} K(\bar{\tau} - \frac{i\bar{h}}{N})A_1x(k + \bar{h}(-1 + \frac{i}{N})) + \frac{\tau}{2N_1} \{K(\tau)Bu(k - \bar{\tau}) + Bu(k)\} \right] \\
 & + f_0 \left[\sum_{j=1}^{N_1-1} K(\bar{\tau} - \frac{j\bar{\tau}}{N_1})Bu(k + \bar{\tau}(-1 + \frac{j}{N_1})) \right] + f_1x(k + \bar{\tau} - \bar{h}), \forall i, j = 0, 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

Para este caso los retardos son $h = 10, \tau = 3$, K es la matriz fundamental del sistema (3.4), $t = kT_s$, donde T_s es un periodo de muestreo uniforme y k representa el instante de muestreo; el instante equivalente del retardo τ es $\bar{\tau} = \frac{\tau}{T_s}$, el instante equivalente del retardo h es $\bar{h} = \frac{h}{T_s}$; el paso de integración para la primera integral es $N = \frac{h}{T_s}$, para la segunda integral el paso de integración es $N_1 = \frac{\tau}{T_s}$, la señal $u(t)$ se denota como $u(k)$.

Por medio del programa realizado en LabView se implementó el control predictivo (4.2) en la plataforma experimental, se usaron las ganancias $f_0 = -1$ y $f_1 = -2$ a una temperatura de referencia de 50°C obteniendo los resultados mostrados en la Figura 4.8.

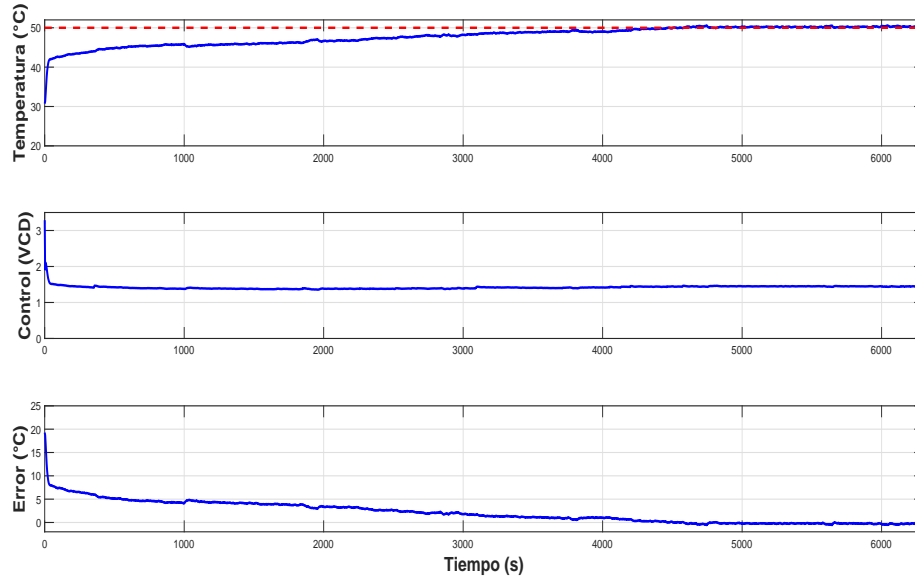


Figura 4.8: Experimento control predictivo a 50°C .

En la respuesta del sistema en lazo cerrado con el control predictivo se observa que el tiempo de establecimiento es muy grande rondando los 3400 segundos, además

de que se presentan sobreimpulsos (perturbación externa) debido a que el compartimiento del producto es abierto cada 15 minutos para retirar las rebanadas de jitomate con el objetivo de pesarlas y recabar la información necesaria para el experimento. El tiempo de establecimiento influirá en el valor de la integral del error absoluto (IAE) y el valor absoluto del control $|u(t)|$, además de el tiempo del experimento.

Las curvas de deshidratación de las rebanadas de jitomate al aplicar el control predictivo a una temperatura de referencia de 50°C se muestran en la Figura 4.9. La desviación estándar para este experimento tiene un valor de 1.42.

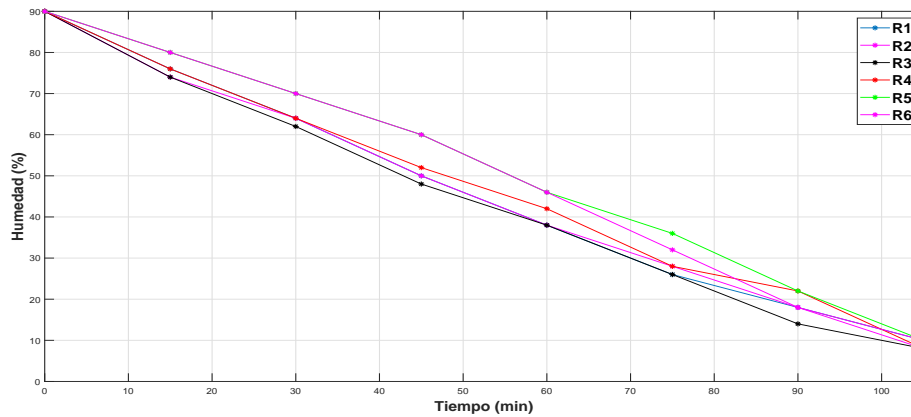


Figura 4.9: Curvas de deshidratación a 50°C .

La respuesta del sistema en lazo cerrado con el control predictivo a una temperatura de 60°C se muestra en la Figura 4.10. Es posible observar que el tiempo de establecimiento (2,056s) del sistema en lazo cerrado con el control predictivo mejora en cuanto al experimento a 50°C (3,440s) aunque el sobreimpulso es menor respecto al mismo experimento. El tiempo del experimento a 60°C es de 90 minutos a comparación de los 105 minutos del experimento a 50°C . El consumo energético en este experimento es mayor al experimento a 50°C .

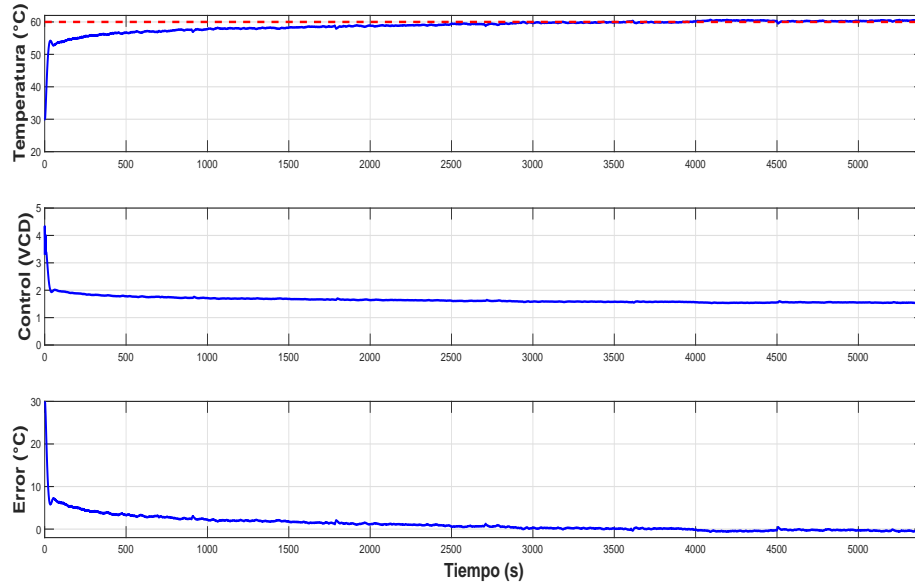


Figura 4.10: Experimento control predictivo a 60°C.

Las curvas de deshidratación de las rebanadas de jitomate para el experimento a 60°C se muestran en la Figura 4.11. La desviación estándar generalizada en este experimento tiene un valor de 1.54 que es mayor respecto al experimento a 50°C.

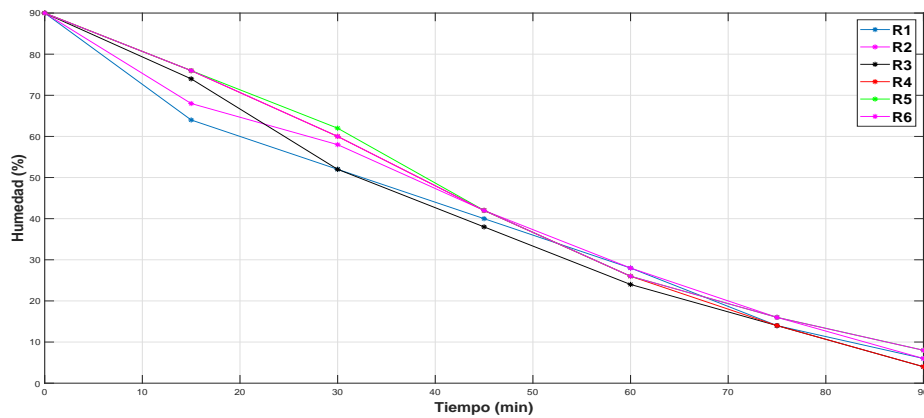


Figura 4.11: Curvas de deshidratación a 60°C.

En la Figura 4.12 se muestra el resultado de la implementación del control predictivo a una temperatura de referencia de 70°C. Puede observarse que el tiempo de establecimiento ronda los 2100 segundos por lo que estaría a la par del experimento a 60°C.

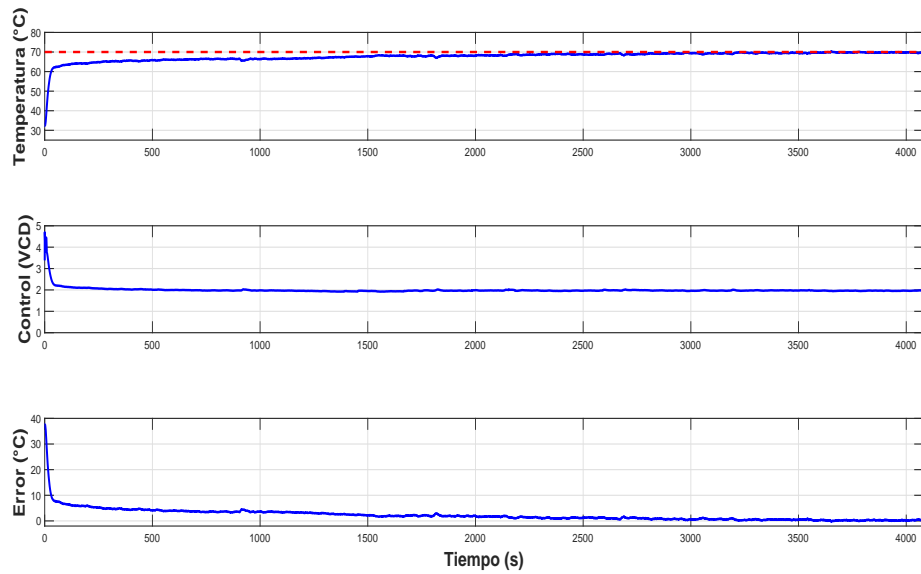


Figura 4.12: Experimento control predictivo a 70°C.

Al igual que el experimento a 60°C, se muestran las curvas de deshidratación de las rebanadas de jitomate para una temperatura de referencia de 70°C en la Figura 4.13. El valor de la desviación estándar generalizada para este experimento es de 1.51 y el tiempo de duración fue de 68 minutos.

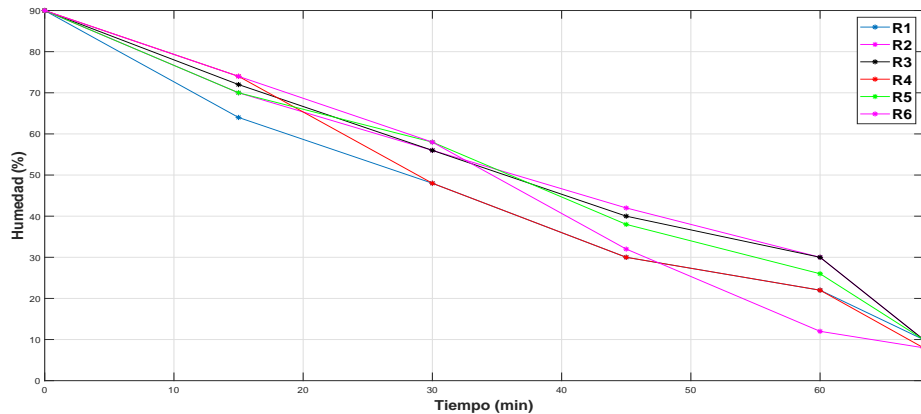


Figura 4.13: Curvas de deshidratación a 70°C.

4.4. Control óptimo predictor

Se implementó el control óptimo predictor en la plataforma experimental. La ley de control tiene la forma

$$u_p^0(t) = -R^{-1}B^T\Pi_0x(t+\tau) - R^{-1}B^T \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\tau+\theta)d\theta, \quad (4.5)$$

$F_0 = -R^{-1}B^T\Pi_0$ y $F_1 = -R^{-1}B^T$. Sustituyendo el predictor de estado en la ecuación(4.5) tenemos

$$\begin{aligned} u_p^0(t) &= F_0 \left[K(\tau)x(t) + \int_{-h}^0 K(\tau-\theta-h)A_1x(t+\theta)d\theta + \int_{-\tau}^0 K(-\theta)Bu(t+\theta)d\theta \right] \\ &+ F_1 \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta)x(t+\tau+\theta)d\theta, \end{aligned}$$

y discretizando se tiene

$$\begin{aligned} u_p^0(k) &= F_0 \left[K(\tau)x(k) + \frac{h}{2N} \{K(\tau)A_1x(k-\bar{h}) + K(\tau-h)A_1x(k)\} \right] \\ &+ F_0 \left[\sum_{i=1}^{N-1} K(\bar{\tau} - \frac{i\bar{h}}{N})A_1x(k+\bar{h}(-1 + \frac{i}{N})) + \frac{\tau}{2N_1} \{K(\tau)Bu(k-\bar{\tau}) + Bu(k)\} \right] \\ &+ F_0 \left[\sum_{j=1}^{N_1-1} K(\bar{\tau} - \frac{j\bar{\tau}}{N_1})Bu(k+\bar{\tau}(-1 + \frac{j}{N_1})) \right] \\ &+ F_1 \left[\frac{h}{2N} \{ \Pi_1(-\bar{h})x(k+\bar{\tau}-\bar{h}) + \Pi_1(0)x(k+\bar{\tau}) \} \right] \\ &+ F_1 \left[\sum_{p=1}^{N-1} \Pi_1(-\bar{h} + \frac{i\bar{h}}{N})x(k+\bar{\tau}-\bar{h} + \frac{i\bar{h}}{N}) \right], \forall i, j, p = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Las ganancias utilizadas para el control óptimo predictor y para el control óptimo predictor robusto se calculan mediante el algoritmo descrito en el artículo de D. Ross en [21], con $R = 3$, $Q = 1$ y se muestran en la Tabla 4.4. Los pasos de integración son $N = \frac{h}{T_s}$ y $N_1 = \frac{\tau}{T_s}$.

Tabla 4.4: Ganancias del control óptimo predictor y óptimo predictor robusto.

Región	Π_0	$\Pi_1(\theta)$
50°C	231.6	[22.9 22.9 22.9 22.9 22.8 22.8 22.7 22.7 22.7 22.6 22.6 22.5 22.5 22.5 22.4 22.4 22.3 22.3 24.1 26.6 29.6]
60°C	623.6	[56.4 56.4 56.4 56.4 56.3 56.3 56.3 56.2 56.2 56.1 56.1 56.1 56.0 56.0 56.0 55.9 55.9 55.9 57.7 60.2 63.2]
70°C	891.8	[58.1 58.1 58.1 58.1 58 58 58 58 57.9 57.9 57.9 57.9 57.8 57.8 57.8 57.7 57.7 57.7 59.5 62 65.1]

La respuesta del sistema en lazo cerrado con el control óptimo predictor a una temperatura de 50°C se muestra en la Figura 4.14. Se observa que el tiempo de establecimiento ronda los 3400 segundos, similar al tiempo de establecimiento del control predictivo a 50°C mostrado en la sección anterior. El tiempo del experimento es de 105 minutos, la diferencia con el control predictivo es el valor de la integral del error absoluto (IAE) que es de 11,342.44, ya que para el sistema en lazo cerrado con el control predictor, la integral del error absoluto tiene un valor de 14,134.21.

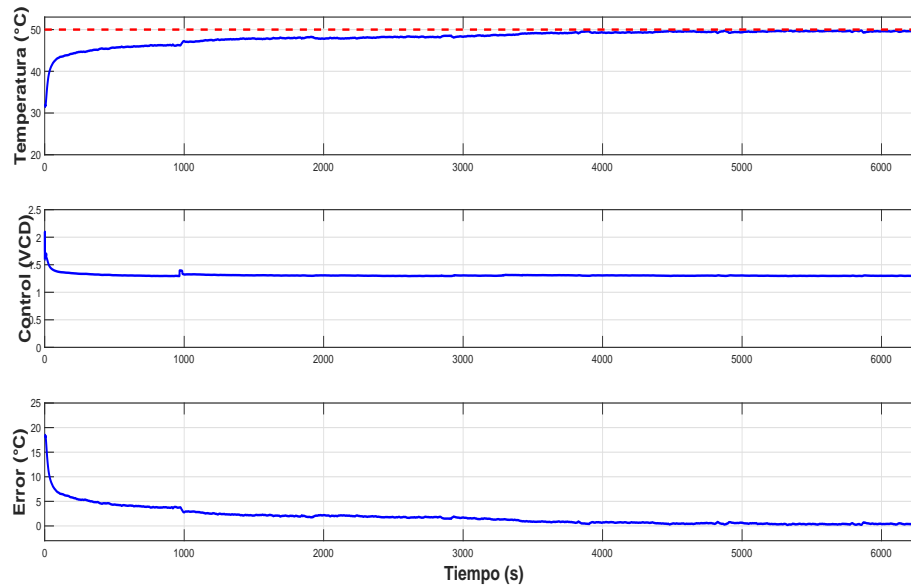


Figura 4.14: Experimento control óptimo predictor a 50°C.

Las curvas de deshidratación de las rebanadas de jitomate al aplicar el control óptimo predictor a una temperatura de referencia de 50°C se muestran en la Figura

4.15. El valor de la desviación estándar generalizada es de 1.38, menor a la desviación estándar generalizada del experimento con el control predictivo a 50°C.

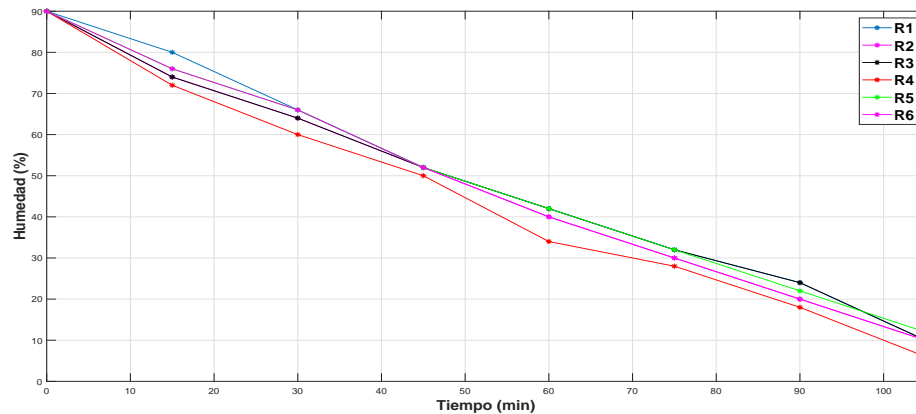


Figura 4.15: Curvas de deshidratación a 50°C.

Los resultados experimentales para una temperatura de referencia de 60°C se muestran en la Figura 4.16, donde puede observarse que el tiempo de establecimiento ronda los 2500 segundos, que es más que el tiempo de establecimiento en la misma zona de operación con el control predictivo. La duración de este experimento fué de 90 minutos.

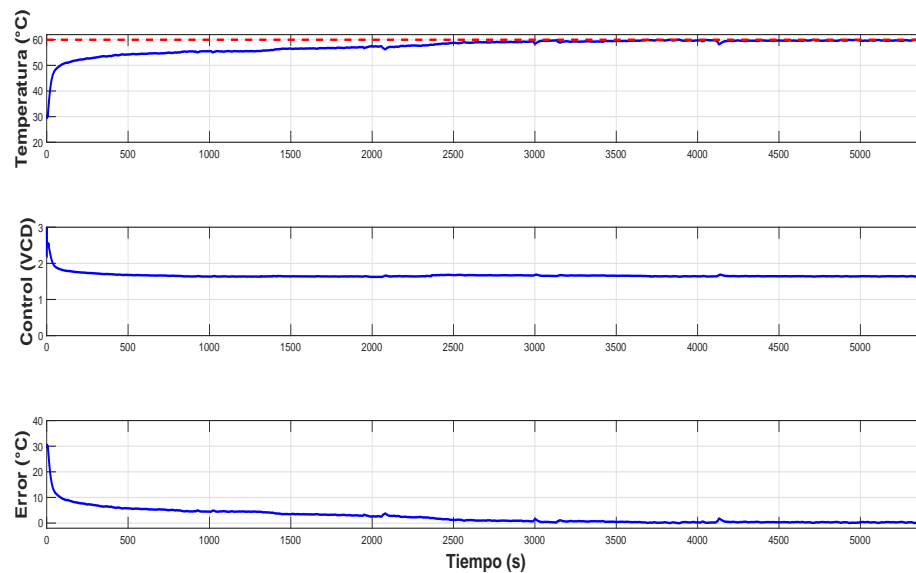


Figura 4.16: Experimento control óptimo predictor a 60°C.

Las curvas de deshidratación para el control óptimo predictor a una temperatura de referencia de 60°C se muestran en la Figura 4.17. La desviación estándar generalizada para este experimento tuvo un valor de 1.43, nuevamente menor que la desviación estándar generalizada para el experimento en la misma zona de operación pero usando el control predictivo.

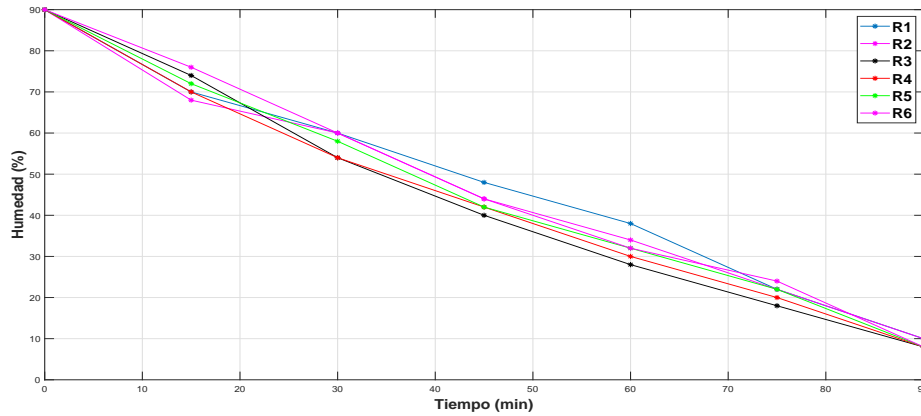


Figura 4.17: Curvas de deshidratación a 60°C .

Para una temperatura de referencia de 70°C la respuesta del sistema en lazo cerrado con el control óptimo predictor se muestra en la Figura 4.18.

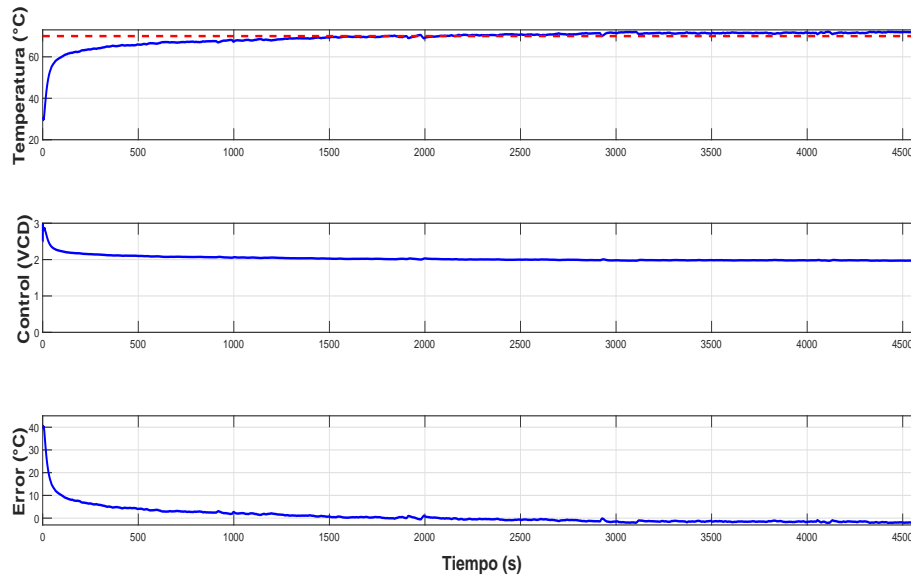


Figura 4.18: Experimento control óptimo predictor a 70°C .

Las curvas de deshidratación para este experimento pueden observarse en la Figura 4.19.

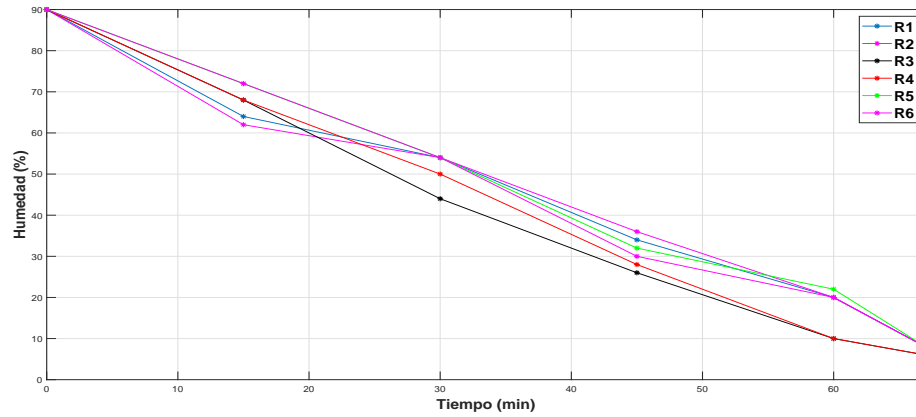


Figura 4.19: Curvas de deshidratación a 70°C.

4.5. Control óptimo predictor robusto

Al igual que los controladores anteriores, el control óptimo predictor robusto fue implementado en el proceso de deshidratación mediante el software LabView.

El control consta de dos términos, el primero es el control óptimo predictor visto en la sección anterior en la ecuación (4.5) y el segundo es el término que agrega robustez al diseño. El control óptimo predictor robusto es $u_p^0(t) + v(t)$.

El término $v(t)$ tiene la forma

$$v(t) = \begin{cases} -4\gamma^2 \frac{\omega(x_t)}{\varepsilon}, & 2\gamma \|\omega(x_t)\| < \varepsilon \\ -2\gamma \frac{\omega(x_t)}{\|\omega(x_t)\|}, & 2\gamma \|\omega(x_t)\| \geq \varepsilon \end{cases},$$

con

$$\omega(x_t) = 2B^T \left[\Pi_0 x(t) + \int_{-h}^0 \Pi_1(\theta) x(t + \theta) d\theta \right].$$

Para poder implementar la ley de control es necesario discretizar $\omega(x_t)$, por lo que tenemos

$$\bar{\omega}(x_t) = 2B^T \left[\Pi_0 x(k) + \frac{h}{2N} \{ \Pi_1(-\bar{h})x(k - \bar{h}) + \Pi_1(0)x(k) \} \sum_{i=1}^{N-1} \Pi_1(-\bar{h} + \frac{i\bar{h}}{N})x(k - \bar{h} + \frac{i\bar{h}}{N}) \right],$$

$\forall i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Este término robusto se suma al control óptimo predictor visto en la sección anterior y se implementa en el sistema de deshidratación con las ganancias mostradas en la Tabla 4.4 para cada zona de operación, un $\varepsilon = 0.2$ y $\bar{\gamma} = 0.3$, el paso de integración es $N = \frac{h}{T_s}$, recordar que se considera que la temperatura externa es la perturbación más importante para este proceso y que el sensor usado para medir la temperatura es un LM35 que otorga una lectura de 10mV/°C.

La respuesta del sistema en lazo cerrado con el control óptimo predictor robusto a una temperatura de 50°C se muestra en la Figura 4.20.

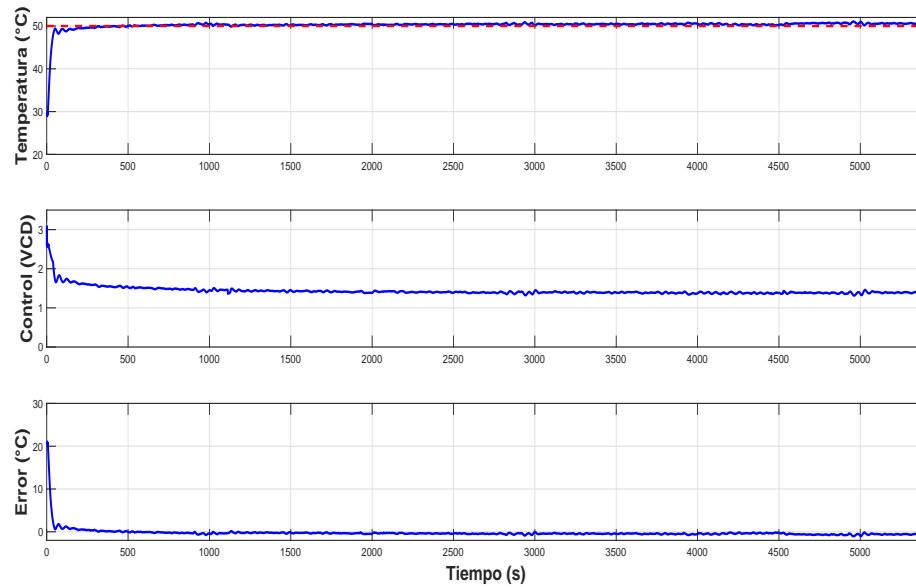


Figura 4.20: Experimento control óptimo predictor robusto a 50°C.

Las curvas de deshidratación de las rebanadas de jitomate al aplicar el control óptimo predictor robusto a una temperatura de referencia de 50°C se muestran en la Figura 4.21.

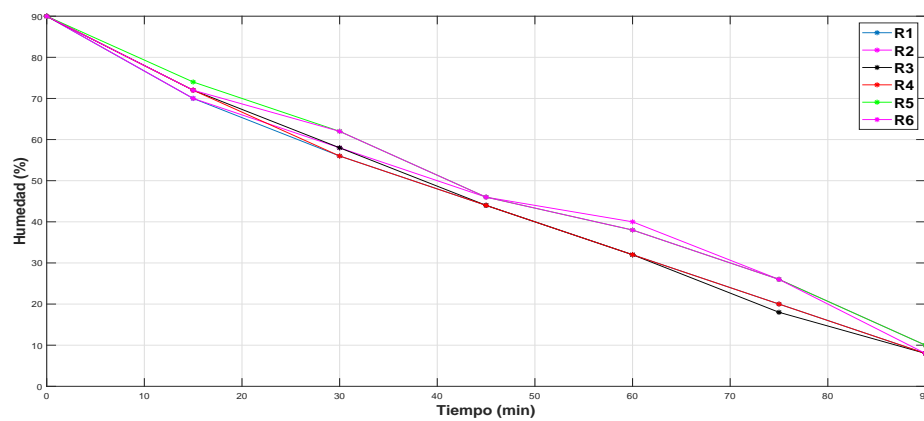


Figura 4.21: Curvas de deshidratación a 50°C.

La respuesta del sistema en lazo cerrado con el control óptimo predictor robusto a una temperatura de 60°C se muestra en la Figura 4.22.

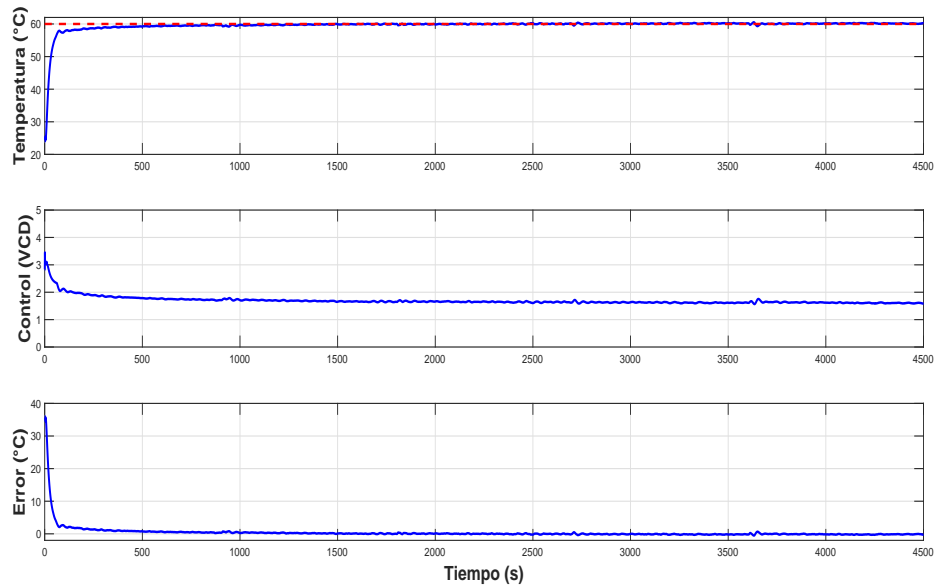


Figura 4.22: Experimento control óptimo predictor robusto a 60°C.

Las curvas de deshidratación de las rebanadas de jitomate al aplicar el control óptimo predictor robusto a una temperatura de referencia de 60°C se muestran en la Figura 4.23.

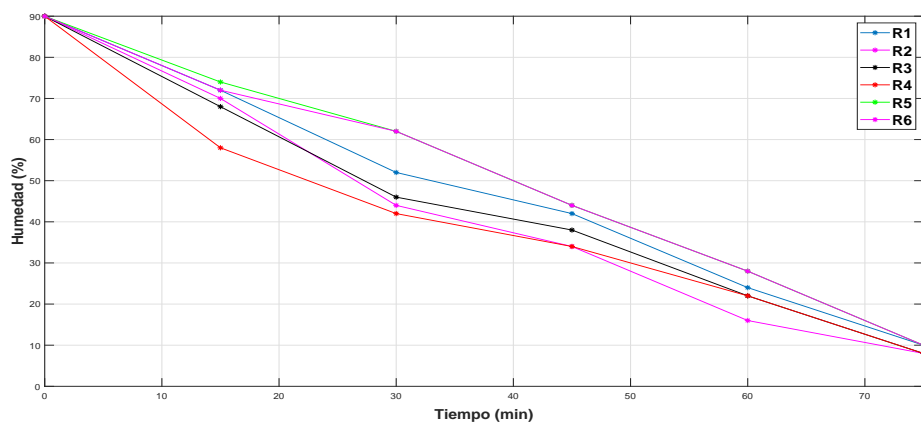


Figura 4.23: Curvas de deshidratación a 60°C.

Para una temperatura de referencia de 70°C, la respuesta del sistema en lazo cerrado puede observarse en la Figura 4.24.

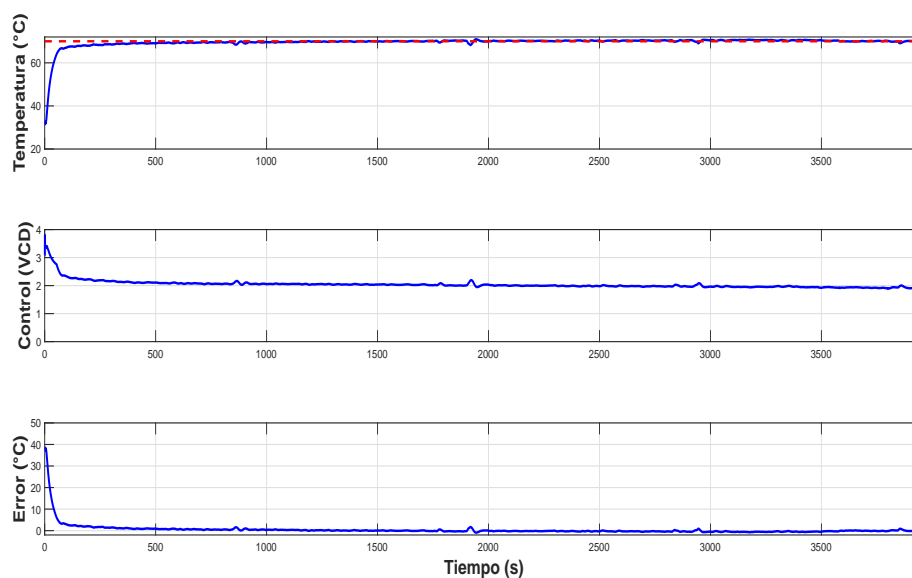


Figura 4.24: Experimento control óptimo predictor robusto a 70°C.

En la Figura 4.25 pueden observarse las curvas de deshidratación de las rebanadas de jitomate para el experimento a 70°C como temperatura de referencia.

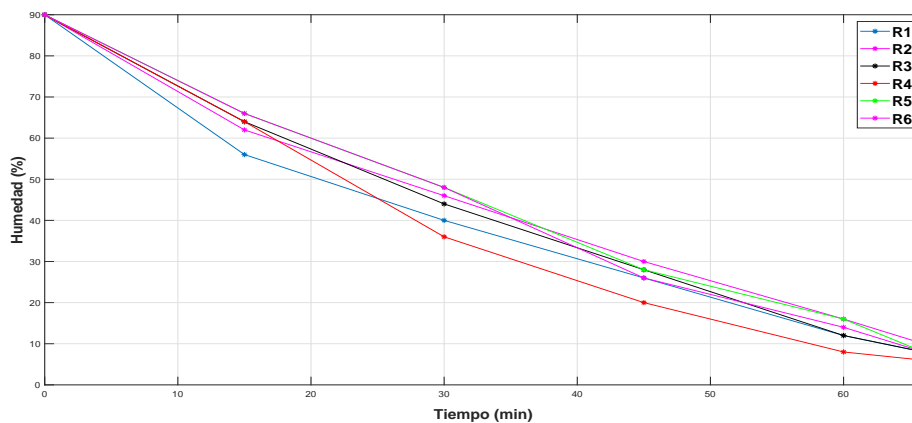


Figura 4.25: Curvas de deshidratación a 70°C.

En la Figura 4.26 se muestra el producto final, el proceso se realizó usando el control óptimo predictor robusto.

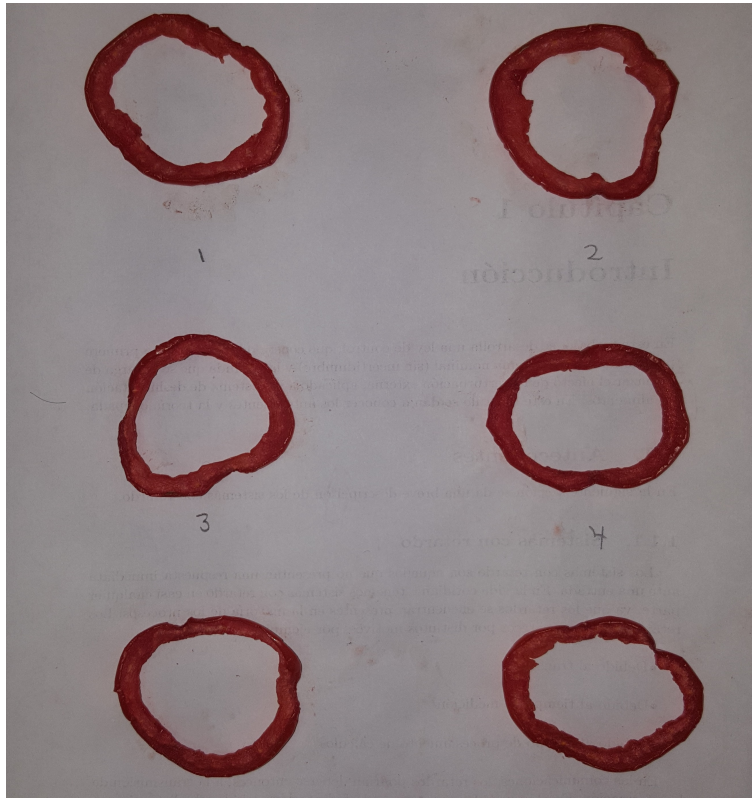


Figura 4.26: Jitomate deshidratado usando el control óptimo predictor robusto.

4.6. Control PID

Con el objetivo de comparar los resultados obtenidos por las leyes de control de las secciones anteriores, se utilizó un controlador PID industrial de la marca Honeywell modelo DC1040. Para la región de 50°C se utilizó una banda proporcional $PB = 2.4$, para la región de 60°C se utilizó una banda proporcional $PB = 1.41$ y para la región de 70°C se usó una banda proporcional $PB = 1$, en las tres regiones se usó un tiempo de integración $T_i = 6$ y un tiempo derivativo $T_d = 1.5$. Estos valores fueron obtenidos mediante el método de sintonización de Ziegler- Nichols (Z-N) [30].

La respuesta del sistema en lazo cerrado con el control PID a una temperatura de 50°C se muestra en la Figura 4.27.

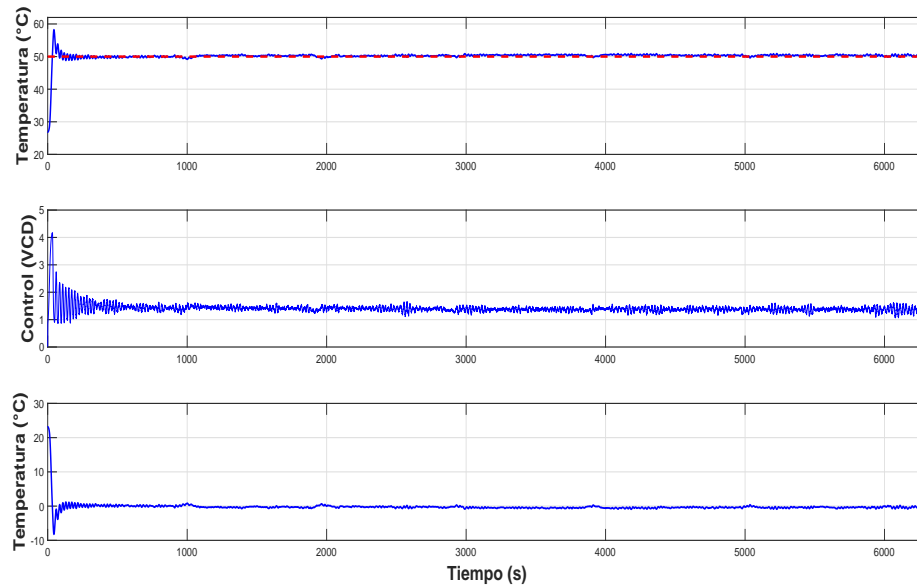


Figura 4.27: Experimento control PID a 50°C.

Las curvas de deshidratación de las rebanadas de jitomate al aplicar el controlador PID a una temperatura de referencia de 50°C se muestran en la Figura 4.28.

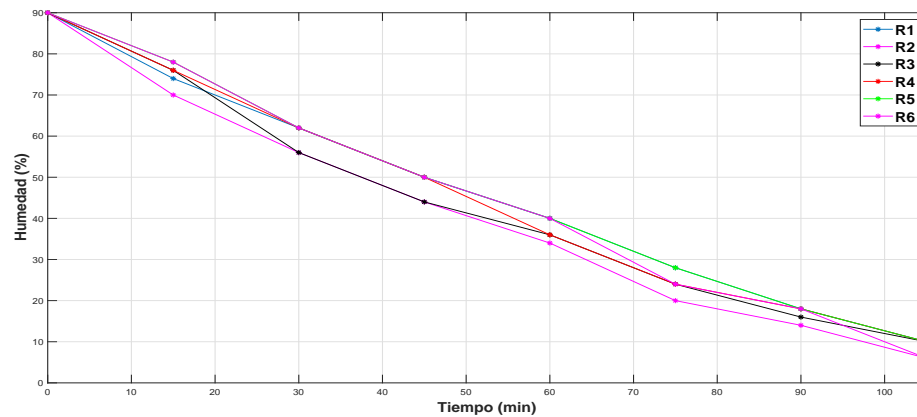


Figura 4.28: Curvas de deshidratación a 50°C.

La respuesta del sistema en lazo cerrado con el controlador PID a una temperatura de 60°C se muestra en la Figura 4.29.

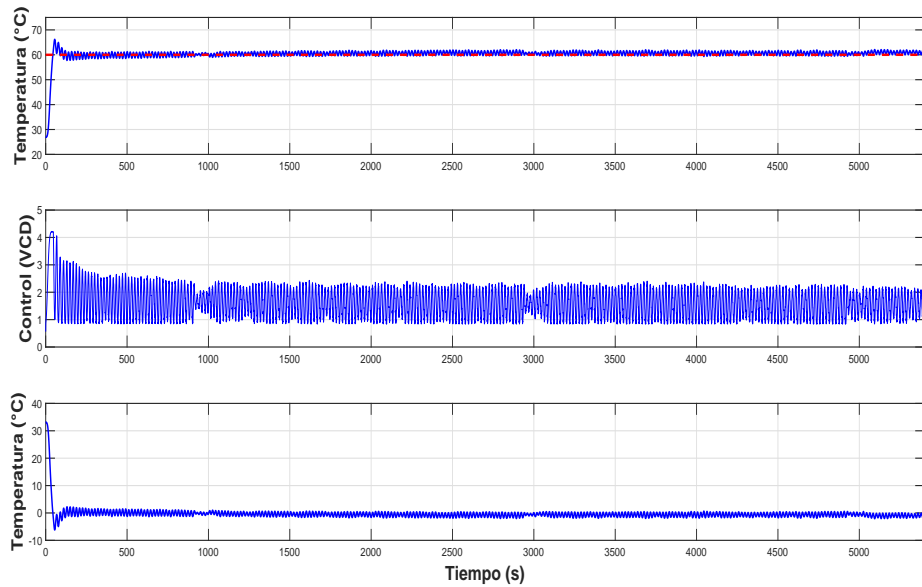


Figura 4.29: Experimento control PID a 60°C.

Las curvas de deshidratación de las rebanadas de jitomate al aplicar el controlador PID a una temperatura de referencia de 60°C se muestran en la Figura 4.30.

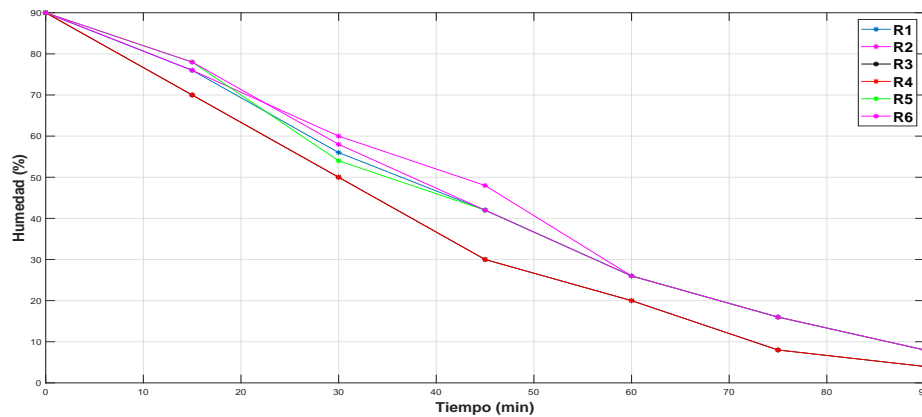


Figura 4.30: Curvas de deshidratación a 60°C.

Para una temperatura de referencia de 70°C, la respuesta del sistema en lazo cerrado puede observarse en la Figura 4.31.

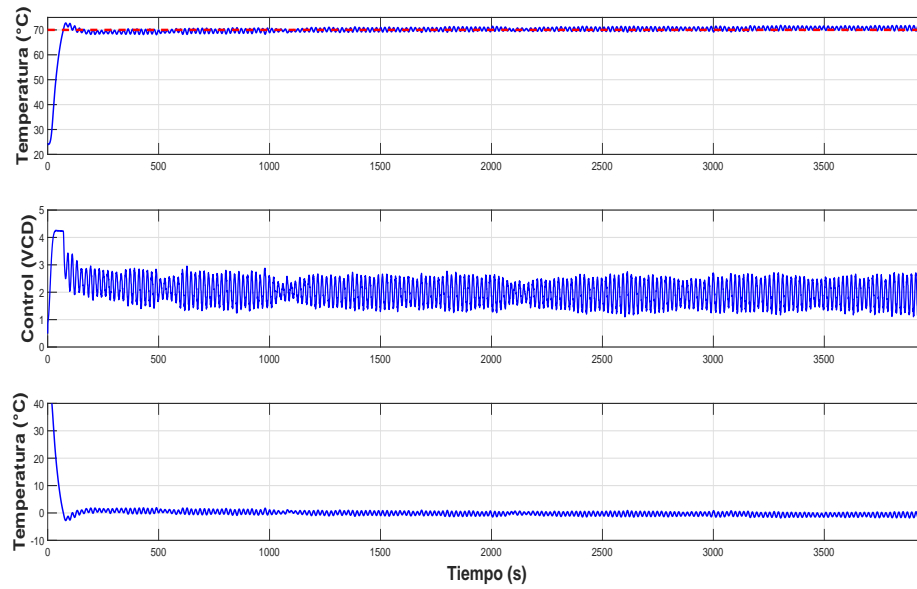


Figura 4.31: Experimento control PID a 70°C.

En la Figura 4.32 pueden observarse las curvas de deshidratación de las rebanadas de jitomate para el experimento a 70°C como temperatura de referencia.

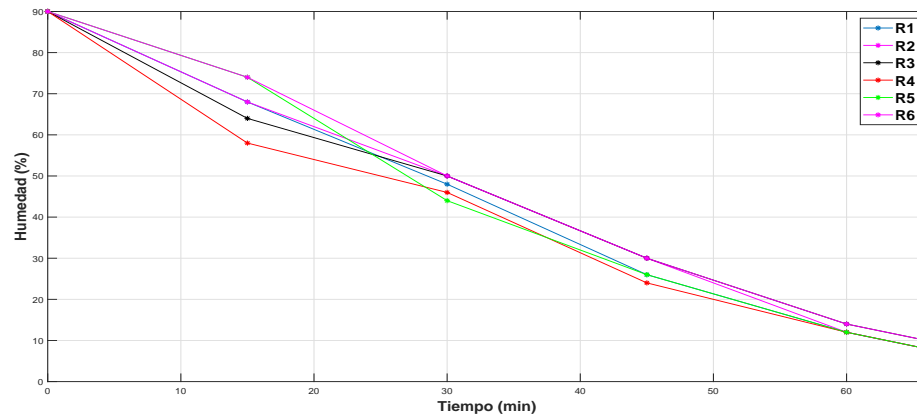


Figura 4.32: Curvas de deshidratación a 70°C.

4.7. Comparativo entre leyes de control aplicadas al sistema de deshidratación.

Con el fin de comparar el desempeño de las leyes de control aplicadas en el sistema de deshidratación atmosférica, se registran datos de cada experimento en las Tablas de resultados para cada región de operación 4.5, 4.6 y 4.7. Se muestran algunas características de la respuesta del sistema en lazo cerrado, para medir en algún sentido, el desempeño de cada controlador. Se muestra la integral del error absoluto (IAE) que se calcula obteniendo el valor absoluto del error del experimento para posteriormente aproximar la integral mediante el comando *trapz* de Matlab, el valor absoluto de la señal de control aplicada $|u(t)|$, el máximo sobreimpulso M_p en porcentaje, el tiempo de establecimiento T_{ss} aplicando el criterio del $\pm 2\%$, la desviación estándar generalizada del experimento σ_G que describe la medida de dispersión generalizada de la humedad entre las rodajas de jitomate y la duración de cada experimento en minutos.

Las Figuras 4.33, 4.34, 4.35 facilitan el comparativo visual de desempeño de los 4 controladores aplicados al sistema de deshidratación, por lo que es posible contrastar los datos mostrados en las Tablas 4.5, 4.6 y 4.7.

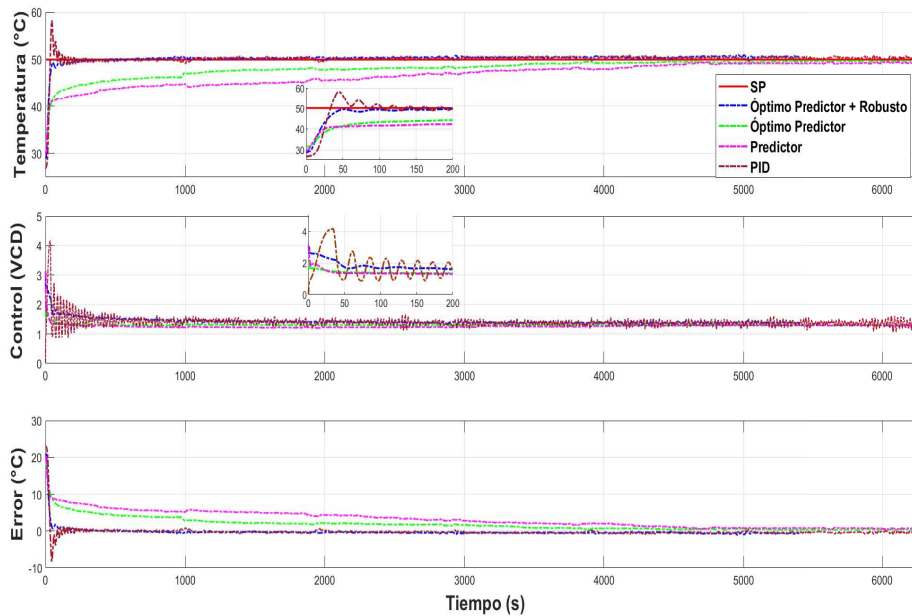


Figura 4.33: Comparativo entre controladores a 50°C.

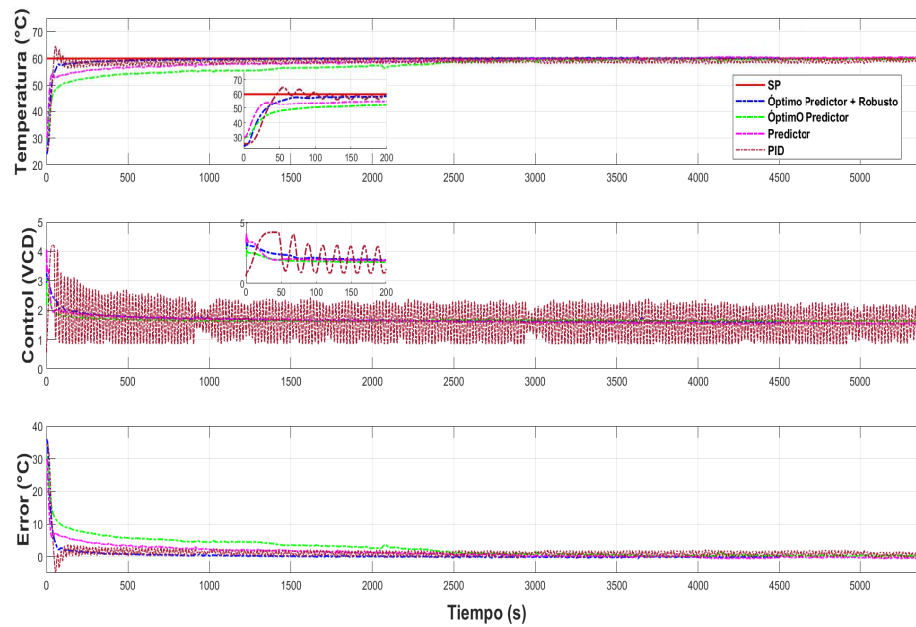


Figura 4.34: Comparativo entre controladores a 60°C.

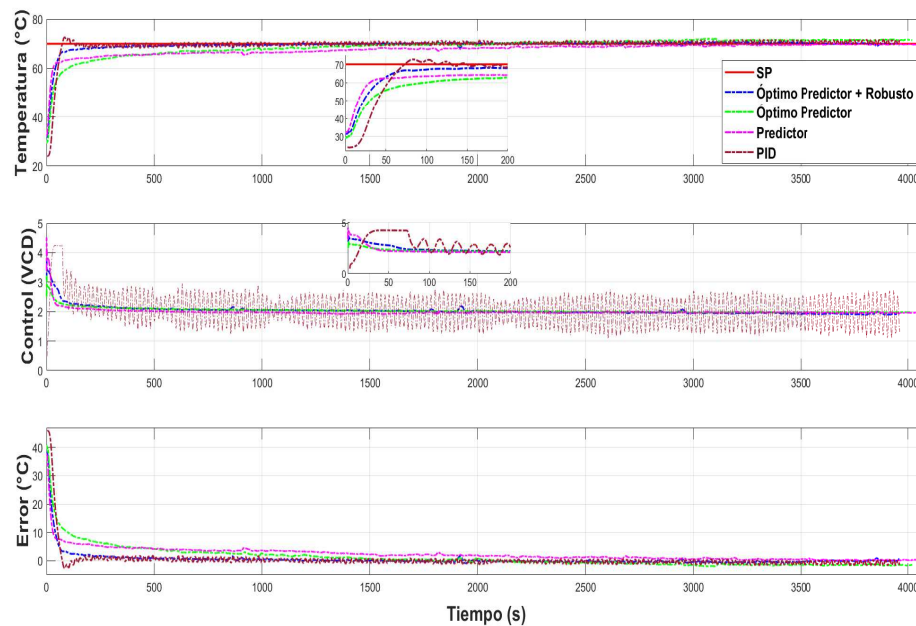


Figura 4.35: Comparativo entre controladores a 70°C.

Se observa que el control óptimo predictor robusto logra un menor valor de IAE en las tres regiones de operación del sistema, además de una convergencia mucho más

rápida que los controles predictor y óptimo predictor. En comparación con el PID el tiempo de establecimiento es similar, pero el IAE y el tiempo de duración del experimento son menores en las regiones de 50°C y 60°C.

De acuerdo trabajo [23], además del ahorro energético es importante tener en cuenta la retención de nutrientes del producto final. Para el caso de rebanadas de jitomate, se considera el licopeno, el ácido ascórbico y el contenido total de polifenoles, ya que son indicadores de la calidad del producto final y del proceso de deshidratado. De acuerdo a dicho trabajo, valores menores de IAE derivan en una mayor calidad del deshidratado.

Tabla 4.5: Indicadores de desempeño en la región de 50°C.

Control	IAE	$ u(t) $	$M_p(\%)$	$T_{ss}(s)$	σ_G	Duración(min)
Predictor	14,134.21	8,940.66	0	3,440	1.42	105
Óptimo predictor	11,342.34	8,226.38	0	3,400	1.38	105
Óptimo predictor + robusto	2,671	7,723.14	0	160	1.41	90
PID Industrial	2,887.75	8,873.79	16.4	180	1.43	105

Tabla 4.6: Indicadores de desempeño en la región de 60°C.

Control	IAE	$ u(t) $	$M_p(\%)$	$T_{ss}(s)$	σ_G	Duración(min)
Predictor	7,199.49	8,884.49	0	2,056	1.54	90
Óptimo predictor	13,200.24	8,965.93	0	2,550	1.43	90
Óptimo predictor + robusto	2,285.9	7,591.04	0	300	1.49	75
PID Industrial	5,048.46	8,709.54	7.83	590	1.57	90

Tabla 4.7: Indicadores de desempeño en la región de 70°C.

Control	IAE	$ u(t) $	$M_p(\%)$	$T_{ss}(s)$	σ_G	Duración(min)
Predictor	9,215.60	8,130.31	0	2,155	1.51	68
Óptimo predictor	8,882.95	8,183.17	0	1,260	1.58	67
Óptimo predictor + robusto	2,946.95	8,046.47	0	270	1.57	66
PID Industrial	4,137.44	8,121.91	4.28	600	1.61	66

En las Tablas 4.8, 4.9 y 4.10 se muestra el el comparativo de consumo energético entre los controladores implementados en la plataforma experimental. Se calcula la potencia promedio [22] de la etapa de alto voltaje como $P_a = \frac{1}{T} \int_0^T P(t)dt$, en donde T es la duración del experimento y $P(t)$ es la potencia instantánea. Para el cálculo del costo aproximado por año laborable se considera un uso de 8 horas diarias, 5 días a la semana. Se considera el precio promedio de 3.395 MXN por kWh dado para el mes de Julio del año 2019 por la Comisión Federal de Electricidad (CFE) en [4].

Tabla 4.8: Comparativo de consumo energético entre controles a 50°C.

Control	Consumo energético promedio (kWh)	Costo MXN (año)
Predictor	0.306	1,997
Óptimo predictor	0.269	1,755
Óptimo predictor + robusto	0.265	1,733
PID Industrial	0.303	1,976

Tabla 4.9: Comparativo de consumo energético entre controles a 60°C.

Control	Consumo energético promedio (kWh)	Costo MXN (año)
Predictor	0.383	2,498
Óptimo predictor	0.388	2,532
Óptimo predictor + robusto	0.331	2,160
PID Industrial	0.378	2,466

Tabla 4.10: Comparativo de consumo energético entre controles a 70°C.

Control	Consumo energético promedio (kWh)	Costo MXN (año)
Predictor	0.505	3,293
Óptimo predictor	0.513	3,345
Óptimo predictor + robusto	0.504	3,285
PID Industrial	0.508	3,314

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se consideró el modelo de un sistema de deshidratación atmosférica que presenta retardos tanto en el estado como en la entrada de control, además de que se consideró a la temperatura externa como término de perturbación.

Con el objetivo de compensar el retardo en la entrada y de minimizar un índice de desempeño se propuso la implementación de un control óptimo predictivo, además se propuso la estructura de una ley de control óptimo predictivo mas un término que agrega robustez al diseño y se implementó la ley de control en un controlador industrial cDAQ-9132 de National Instruments, mediante el cual se regula la temperatura de un proceso de deshidratación atmosférica de rebanadas de jitomate.

Se realizó la comparación de los resultados obtenidos al implementar el control predictivo, que únicamente compensa el retardo en la entrada; el control óptimo predictivo que compensa el retardo en la entrada de control y minimiza un índice de desempeño, el control óptimo predictivo mas el término robusto que fue sintetizado de acuerdo a la técnica del rediseño de Lyapunov y un controlador PID sintonizado mediante las reglas de Z-N [30], que es uno de los métodos más usados en la industria. La comparación de desempeño de las leyes de control mencionadas se realizó en las regiones de operación de 50°C, 60°C y 70°C.

Es posible observar que el control óptimo predictor robusto propuesto en este trabajo de tesis presenta ciertas ventajas sobre las demás leyes de control sometidas a comparación, tales como un menor valor de error absoluto (IAE) y un menor tiempo de establecimiento (tomando en cuenta el criterio del $\pm 2\%$). Lo anterior representa una mayor calidad del producto final de acuerdo a [23] teniendo en cuenta la retención de nutrientes. Para el caso de rebanadas de jitomate, se considera el licopeno, el ácido ascórbico y el contenido total de polifenoles.

5.1. Trabajo futuro

Como trabajo a futuro se propone el uso de una funcional de Lyapunov Krasovskii cuyas cotas superior e inferior sean cuadráticas. O bien acompletar la funcional (2.1.3) con motivo de que sus cotas sean cuadráticas. Esto facilitará la tarea del cálculo de la cota última para las soluciones del sistema (1.3) en lazo cerrado con el control óptimo predictor robusto, propuesto en este trabajo.

Bibliografía

- [1] Y. Alekal, P. Brunovsky, D. H. Chyung, and E. Lee. The quadratic problem for systems with time delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):673–687, 1971.
- [2] C. D. Chicala. *Adquisición de datos: medir para conocer y controlar*. Cengage Learning, 2015.
- [3] M. Corless. Control of uncertain nonlinear systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 115(2):362–372, 1993.
- [4] Comisión Federal de Electricidad. Consulta de tarifas vigentes. <https://app.cfe.mx/Aplicaciones/CCFE/Tarifas/TarifasCRENegocio/Tarifas/PequenaDemandaBT.aspx>, Julio de 2019.
- [5] F. Kelly. Mathematical modelling of the internet. In *Mathematics unlimited 2001 and beyond*, pages 685–702. Springer, 2001.
- [6] H. K. Khalil and J. W. Grizzle. *Nonlinear systems*. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [7] V. Kharitonov. *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] V. Kharitonov. An extension of the prediction scheme to the case of systems with both input and state delay. *Automatica*, 50(1):211–217, 2014.
- [9] R. H. King. *Introduction to data acquisition with LabVIEW*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2008.
- [10] D. E. Kirk. *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation, 2012.
- [11] V. Kolmanovskii and A. Myshkis. *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Springer Science & Business Media, 2013.

-
- [12] N. N. Krasovskii. On the analytic construction of an optimal control in a system with time lags. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 26(1):50–67, 1962.
- [13] Z. Li, Q. Wang, and H. Gao. Control of friction oscillator by lyapunov redesign based on delayed state feedback. *Acta Mechanica Sinica*, 25(2):257–264, 2009.
- [14] H. A. López-Labra. Control óptimo con características de robustez para sistemas lineales con retardo en el estado. *Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*, 2018.
- [15] P. H. M. Marfil, E. M. Santos, and V. R. N. Telis. Ascorbic acid degradation kinetics in tomatoes at different drying conditions. *LWT-Food Science and Technology*, 41(9):1642–1647, 2008.
- [16] R. M. Murray. *Control in an information rich world: Report of the panel on future directions in control, dynamics, and systems*. SIAM, 2003.
- [17] Y. I. Neimark. Robust stability and d-partition. *Automation and Remote Control*, 53(7):957–965, 1992.
- [18] L. Rodríguez-Guerrero, S. Mondié, and O. Santos-Sánchez. Guaranteed cost control using lyapunov redesign for uncertain linear time delay systems. *IFAC-PapersOnLine*, 48(12):392–397, 2015.
- [19] F. Rodríguez-Rubio and M. J. López. *Control adaptativo y robusto*.
- [20] D. W. Ross. Controller design for time lag systems via a quadratic criterion. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):664–672, 1971.
- [21] D. W. Ross and I. Flügge-Lotz. An optimal control problem for systems with differential-difference equation dynamics. *SIAM Journal on Control*, 7(4):609–623, 1969.
- [22] M. N. Sadiku and C. K Alexander. *Fundamentals of electric circuits*. McGraw-Hill Higher Education, 2007.
- [23] N. F. Santos-Sánchez, R. Salas-Coronado, O. J. Santos-Sánchez, H. Romero, and E. Garrido-Aranda. On the effects of the temperature control at the performance of a dehydration process: energy optimization and nutrients retention. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 86(9-12):3157–3171, 2016.
- [24] O. J. Smith. Closer control of loops with dead time. *Chemistry Engineering Progress*, 53(5):217–219, 1957.

-
- [25] Y. Tipsuwan and M. Y. Chow. Network-based controller adaptation based on qos negotiation and deterioration. In *IECON'01. 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (Cat. No. 37243)*, volume 3, pages 1794–1799. IEEE, 2001.
- [26] A. P. Urwaye. *New food engineering research trends*. Nova Publishers, 2008.
- [27] T. Vyhlidal and P. Zítek. Mapping based algorithm for large-scale computation of quasi-polynomial zeros. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(1):171–177, 2009.
- [28] Hahn W. *Stability of motion*, volume 138. Springer, 1967.
- [29] P. E. E. Wellstead and M. B. Zarrop. *Self-tuning systems: control and signal processing*. John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [30] J. G. Ziegler and N. B. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of The American Society of Mechanical Engineers*, 64(11):759–768, 1942.

Apéndice A

Prueba alternativa para la construcción de $V(\varphi)$

Esta prueba alternativa fué tomada de [14]. Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t) \\ x(\theta) &= \varphi(\theta) \quad \theta \in [-h, 0]\end{aligned}\tag{A.1}$$

y de acuerdo al artículo de Krasovskii [12], se considera una ley de control óptima (condiciones necesarias) como sigue:

$$u(x_t) = K_0x(t) + \int_{-h}^0 K_1(\theta)x(t+\theta)d\theta,\tag{A.2}$$

donde K_0 y $K_1(\theta)$ son funciones tal que el sistema (A.1) en lazo cerrado con el control (A.2) es:

$$\dot{x}(t) = (A_0 + BK_0)x(t) + A_1x(t-h) + B \int_{-h}^0 K_1(\theta)x(t+\theta)d\theta,\tag{A.3}$$

ya que el control $u(x_t)$ dado por (A.2) es óptimo, entonces es admisible y (A.3) es estable, debido a que se satisface la ecuación de Hamilton Jacobi Bellman.

Reescribiendo el sistema, con $\tilde{A} = A_0 + BK_0$ y $G(\theta) = BK_1(\theta)$, de la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + A_1x(t-h) + \int_{-h}^0 G(\theta)x(t+\theta)d\theta.\tag{A.4}$$

La solución en la forma de Cauchy [11] de (A.4) es

$$x(t, \varphi) = K(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 K(t - \theta - h)A_1\varphi(\theta)d\theta + \int_{-h}^0 \int_{-h}^{\theta} K(t - \theta + \xi)G(\xi)d\xi\varphi(\theta)d\theta, \quad (\text{A.5})$$

donde $K(t)$ es la matriz fundamental de (A.4) y $\varphi(\theta) \in \mathcal{PC} : [-h, 0]$.

De otro modo se puede reescribir (A.5) como

$$x(t, \varphi) = K(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \underbrace{\left\{ K(t - \theta - h)A_1 + \int_{-h}^0 K(t - \theta + \xi)G(\xi)d\xi \right\}}_{\hat{K}} \varphi(\theta)d\theta, \quad (\text{A.6})$$

$$x(t, \varphi) = K(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \hat{K}(t, \theta)\varphi(\theta)d\theta, \quad (\text{A.6})$$

A continuación se define un índice de desempeño de la forma

$$J(\varphi, u) = \int_0^{\infty} g(x_t, u(t))dt, \quad (\text{A.7})$$

donde

$$g(x_t, u(t)) = x^T(t)Qx(t) + u^T(x_t)Ru(x_t), \quad (\text{A.8})$$

sustituyendo el control (A.2) en (A.8) tenemos que

$$\begin{aligned} g(x_t, u(t)) &= x^T(t)Qx(t) + \left[K_0x(t) + \int_{-h}^0 K_1(\theta)x(t + \theta)d\theta \right]^T \times \\ &\quad R \left[K_0x(t) + \int_{-h}^0 K_1(\theta)x(t + \theta)d\theta \right] \\ &= x^T(t)Qx(t) + x^T(t)K_0^T RK_0x(t) + x^T(t)K_0^T R \int_{-h}^0 K_1(\theta)x(t + \theta)d\theta + \\ &\quad \int_{-h}^0 x^T(t + \theta)K_1^T(\theta)d\theta RK_0x(t) + \\ &\quad \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x^T(t + \theta_1)K_1^T(\theta_1)RK_1(\theta_2)x(t + \theta_2)d\theta_1d\theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x^T(t) \underbrace{[Q + K_0^T R K_0]}_{M_1} x(t) + 2x^T(t) \int_{-h}^0 \underbrace{K_0^T R K_1(\theta)}_{M_2(\theta)} x(t + \theta) d\theta + \\
 &\quad \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x^T(t + \theta_1) \underbrace{K_1^T(\theta_1) R K_1(\theta_2)}_{M_3(\theta_1, \theta_2)} x(t + \theta_2) d\theta_1 d\theta_2,
 \end{aligned}$$

de otra forma, $g(x_t, u(x_t))$ se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
 g(x_t, u(x_t)) &= x^T(t) M_1 x(t) + 2x^T(t) \int_{-h}^0 M_2(\theta) x(t + \theta) d\theta \\
 &\quad + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x^T(t + \theta_1) M_3(\theta_1, \theta_2) x(t + \theta_2) d\theta_1 d\theta_2. \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

Entonces el índice de desempeño (A.7) se puede reescribir en función de $u(x_t)$ como sigue:

$$J(\varphi, u(x_t)) = \int_0^\infty g(x_t, u(x_t)) dt. \tag{A.10}$$

Si se sustituye (A.9) en (A.10) entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
 J(\varphi, u(x_t)) &= \int_0^\infty \left[x^T(t, \varphi) M_1 x(t, \varphi) + 2x^T(t, \varphi) \int_{-h}^0 M_2(\theta) x(t + \theta, \varphi) d\theta \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x^T(t + \theta_1, \varphi) M_3(\theta_1, \theta_2) x(t + \theta_2, \varphi) d\theta_1 d\theta_2 \right] dt, \tag{A.11}
 \end{aligned}$$

sustituyendo la solución en la forma de Cauchy (A.6), y al desarrollar, el índice de desempeño $J(\varphi, u(x_t))$ queda de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
 J(\varphi, u(x_t)) &= \varphi^T(0) \left[\int_0^\infty K^T(t) M_1 K(t) dt + 2 \int_0^\infty \int_{-h}^0 K^T(t) M_2(\theta) K(t + \theta) d\theta dt \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\infty \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 K^T(t + \theta_1) M_3(\theta_1, \theta_2) K(t + \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 dt \right] \varphi(0) \\
 &\quad + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) \left[\int_0^\infty \hat{K}^T(t, \theta) M_1 K(t) dt + 2 \int_0^\infty \int_{-h}^0 \hat{K}^T(t, \theta) M_2(\theta_2) K(t + \theta_2) d\theta_2 dt \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\infty \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \hat{K}^T(t + \theta_1, \theta) M_3(\theta_1, \theta_2) K(t + \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 dt \right] d\theta \varphi(0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varphi^T(0) \int_{-h}^0 \left[\int_0^\infty K^T(t)M_1\hat{K}(t,\theta)dt + 2 \int_0^\infty \int_{-h}^0 K^T(t)M_2(\theta_2)\hat{K}(t+\theta_2,\theta)d\theta_2dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^\infty \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 K^T(t+\theta_1)M_3(\theta_1,\theta_2)\hat{K}(t+\theta_2,\theta)d\theta_1d\theta_2dt \right] \varphi(\theta)d\theta \\
& + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \varphi^T(\xi) \left[\int_0^\infty \hat{K}^T(t,\xi)M_1\hat{K}(t,\theta)dt + 2 \int_0^\infty \int_{-h}^0 \hat{K}^T(t,\xi)M_2(\theta_2)\hat{K}(t+\theta_2,\theta)d\theta_2dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^\infty \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \hat{K}^T(t+\theta_1,\xi)M_3(\theta_1,\theta_2)\hat{K}(t+\theta_2,\theta)d\theta_1d\theta_2dt \right] \varphi(\theta)d\theta d\xi.
\end{aligned}$$

De lo anterior se pueden definir 4 términos:

$$\begin{aligned}
K_0 &= \int_0^\infty K^T(t)M_1K(t)dt + 2 \int_0^\infty \int_{-h}^0 K^T(t)M_2(\theta)K(t+\theta)d\theta dt + \\
& \quad \int_0^\infty \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 K^T(t+\theta_1)M_3(\theta_1,\theta_2)K(t+\theta_2)d\theta_1d\theta_2dt,
\end{aligned}$$

en donde K_0 es constante debido a que al abrir las integrales no hay variable en juego.

$$\begin{aligned}
K_1^T(\theta) &= \int_0^\infty \hat{K}^T(t,\theta)M_1K(t)dt + 2 \int_0^\infty \int_{-h}^0 \hat{K}^T(t,\theta)M_2(\theta_2)K(t+\theta_2)d\theta_2dt + \\
& \quad \int_0^\infty \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \hat{K}^T(t+\theta_1,\theta)M_3(\theta_1,\theta_2)K(t+\theta_2)d\theta_1d\theta_2dt,
\end{aligned}$$

en donde al abrir las integrales, queda sólo en juego la variable θ .

$$\begin{aligned}
K_1(\theta) &= \int_0^\infty K^T(t)M_1\hat{K}(t,\theta)dt + 2 \int_0^\infty \int_{-h}^0 K^T(t)M_2(\theta_2)\hat{K}(t+\theta_2,\theta)d\theta_2dt + \\
& \quad \int_0^\infty \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 K^T(t+\theta_1)M_3(\theta_1,\theta_2)\hat{K}(t+\theta_2,\theta)d\theta_1d\theta_2dt,
\end{aligned}$$

en donde al abrir las integrales, queda sólo en juego la variable θ .

$$\begin{aligned}
K_2(\xi,\theta) &= \int_0^\infty \hat{K}^T(t,\xi)M_1\hat{K}(t,\theta)dt + 2 \int_0^\infty \int_{-h}^0 \hat{K}^T(t,\xi)M_2(\theta_2)\hat{K}(t+\theta_2,\theta)d\theta_2dt + \\
& \quad \int_0^\infty \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \hat{K}^T(t+\theta_1,\xi)M_3(\theta_1,\theta_2)\hat{K}(t+\theta_2,\theta)d\theta_1d\theta_2dt,
\end{aligned}$$

en donde al abrir las integrales, quedan en juego las variables ξ y θ .

Si se considera que $K_1 = K_1^T$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned} J(\varphi, u(x_t)) = V(\varphi) &= \varphi^T(0)K_0\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 K_1(\theta)\varphi(\theta)d\theta \\ &+ \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \varphi^T(\xi)K_2(\xi, \theta)\varphi(\theta)d\xi d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

y aquí la prueba queda concluida.

Apéndice B

Obtención del control óptimo $u(t)$ para sistemas con retardo

Si ahora se considera al estado completo x_t en la funcional (A.12), entonces es posible reescribir la expresión como:

$$V(x_t) = x^T(t)K_0x(t) + 2x^T(t) \int_{-h}^0 K_1(\theta)x(t+\theta)d\theta + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x^T(t+\xi)K_2(\xi, \theta)x(t+\theta)d\xi d\theta. \quad (\text{B.1})$$

Recordando el sistema:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t) \quad (\text{B.2})$$

y de las condiciones suficientes para la existencia del control óptimo para sistemas con retardo se calcula lo siguiente

$$\left. \frac{dV(x_t)}{dt} \right|_{(\text{B.2})} + f(x(t), x_t, u(t)) = 0, \quad t \geq 0,$$

en donde $f(x(t), x_t, u(t)) = x^T(t)Qx(t) + u^T(x_t)Ru(x_t)$.

Entonces

$$\left. \frac{d}{dt} [x^T(t)K_0x(t)] \right|_{(\text{B.2})} + \left. \frac{d}{dt} [2x^T(t) \int_{-h}^0 K_1(\theta)x(t+\theta)d\theta] \right|_{(\text{B.2})}$$

$$+\frac{d}{dt}\left[\int_{-h}^0\int_{-h}^0x^T(t+\xi)K_2(\xi,\theta)x(t+\theta)d\xi d\theta\right]\Big|_{(B.2)}+x^T(t)Qx(t)+u^T(x_t)Ru(x_t)=0$$

Aplicando las reglas de derivación correspondientes se tiene que

$$\begin{aligned} & \dot{x}^T(t)K_0x(t)+x^T(t)K_0\dot{x}(t) \\ & +2\dot{x}^T(t)\int_{-h}^0K_1(\theta)x(t+\theta)d\theta+2x^T(t)\int_{-h}^0K_1(\theta)\frac{\partial x(t+\theta)}{\partial t}d\theta \\ & +\int_{-h}^0\int_{-h}^0\frac{\partial x^T(t+\xi)}{\partial t}K_2(\xi,\theta)x(t+\theta)d\xi d\theta+\int_{-h}^0\int_{-h}^0x^T(t+\xi)K_2(\xi,\theta)\frac{\partial x(t+\theta)}{\partial t}d\xi d\theta \\ & +x^T(t)Qx(t)+u^T(x_t)Ru(x_t)=0, \end{aligned} \quad (B.3)$$

sustituyendo $\dot{x}(t)$ en la ecuación (B.3), y agrupando los términos que contienen $x^T(t)$ del lado izquierdo, $x(t)$ del lado derecho y renombrando la ecuación como

$$\begin{aligned} \Phi(t,x_t,u) & =x^T(t)[A_0^TK_0+K_0A_0]x(t)+x^T(t-h)A_1^TK_0x(t)+u^T(t)B^TK_0x(t) \\ & +x^T(t)K_0A_1x(t-h)+x^T(t)K_0Bu(t) \\ & +x^T(t)A_0^T\int_{-h}^0K_1(\theta)x(t+\theta)d\theta+x^T(t-h)A_1^T\int_{-h}^0K_1(\theta)x(t+\theta)d\theta \\ & +u^T(t)B^T\int_{-h}^0K_1(\theta)x(t+\theta)d\theta+2x^T(t)\int_{-h}^0K_1(\theta)\frac{\partial x(t+\theta)}{\partial t}d\theta \\ & +\int_{-h}^0\int_{-h}^0\frac{\partial x^T(t+\xi)}{\partial t}K_2(\xi,\theta)x(t+\theta)d\xi d\theta+\int_{-h}^0\int_{-h}^0x^T(t+\xi)K_2(\xi,\theta)\frac{\partial x(t+\theta)}{\partial t}d\xi d\theta \\ & +x^T(t)Qx(t)+u^T(x_t)Ru(x_t)=0. \end{aligned}$$

Se busca el mínimo de todos los controles admisibles u tal que

$$\min_{u\text{-admisibile}}\{\Phi(t,x_t,u(t))\}=\Phi(t,x_t,u^0(t)),$$

en donde x_t y $u^0(t)$ es la trayectoria óptima y el control óptimo, de manera que para realizar la minimización respecto a u , y por el teorema fundamental del cálculo de variaciones, se calcula la derivada parcial de $\Phi(t,x_t,u(t))$ respecto a $u(t)$ y se iguala la ecuación a cero.

$$\frac{\partial\Phi(x_t,u(t))}{\partial u(t)}=0$$

$$\frac{\partial \Phi(x_t, u(t))}{\partial u(t)} = 2B^T K_0 x(t) + 2B^T \int_{-h}^0 K_1(\theta) x(t + \theta) d\theta + 2Ru(t) = 0.$$

Al despejar $u(t)$ se tiene que el control óptimo para el sistema (B.2) es

$$u(t) = -R^{-1}B^T K_0 x(t) - R^{-1}B^T \int_{-h}^0 K_1(\theta) x(t + \theta) d\theta, t \geq 0. \quad (\text{B.4})$$

Finalmente se puede concluir que aunque en el artículo de D. Ross [21] no se da una prueba para la construcción de la funcional $V(\varphi)$, la prueba alternativa realizada nos lleva al mismo resultado, además con esta funcional fue posible confirmar que el control óptimo calculado es de la forma del control óptimo propuesto por Krasovskii en [12].

Apéndice C

Algoritmo para la obtención de ganancias para el control óptimo con retardo en el estado

En esta sección se explica el algoritmo dado en el artículo de D. Ross en [21] el cual nos permite realizar un cálculo aproximado de la matriz de Lyapunov para sistemas con retardo K_L la cual tiene como submatrices a K_0 , $K_1(\theta)$ y $K_2(\xi, \theta)$ que son parte esencial del control óptimo para sistemas con retardo.

C.1. Cálculo de las matrices K_0 , $K_1(\theta)$, $K_2(\xi, \theta)$

Considere el siguiente sistema retardado:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad (\text{C.1})$$

donde A_0 , $A_1 \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times r}$, $x \in R^{n \times 1}$, $u \in R^{r \times 1}$ y $h > 0$ es el retardo en el estado.

La ley de control óptimo propuesta en [20] es el resultado de hallar una solución aproximada de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales dado en el siguiente teorema:

Teorema 1. [20] *Una ley de control*

$$u(t) = -R^{-1}B^TK_0x(t) - R^{-1}B^T \int_{-h}^0 K_1(\theta)x(t+\theta)d\theta, \quad t \geq 0, \quad (\text{C.2})$$

produce un mínimo absoluto para el índice de desempeño cuadrático de horizonte infinito

$$J[\varphi, u(t)] = \int_0^\infty [x^T(t)Qx + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (\text{C.3})$$

sujeto al sistema dinámico (C.1) si se cumplen las siguientes condiciones:

- a) $u(t)$ es una ley de control que estabiliza a (C.1).
- b) K_0 es una matriz simétrica definida positiva la cual junto con $K_1(\theta) \in R^{n \times n}$, $\theta \in [-h, 0]$ y $K_2(\xi, \theta)$, $\xi, \theta \in [-h, 0]$ satisface las siguientes igualdades:
- c) $A_0^T K_0 + K_0 A_0 - K_0 B R^{-1} B^T K_0 + K_1^T(0) + K_1(0) + Q = 0$.
- d) $\frac{dK_1(\theta)}{d\theta} = (A_0^T - K_0 B R^{-1} B^T) K_1(\theta) + K_2(0, \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$.
- e) $\frac{\partial K_2(\xi, \theta)}{\partial \xi} + \frac{\partial K_2(\xi, \theta)}{\partial \theta} = -K_1^T(\xi) B R^{-1} B^T K_1(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, $\xi \in [-h, 0]$.
- f) $K_1(-h) = K_0 A_1$.
- g) $K_2(-h, \theta) = A_1^T K_1(\theta)$.

Además, bajo estas condiciones, la representación del índice de desempeño en términos de las condiciones iniciales es

$$J[\varphi, u] = \varphi^T(0) K_0 \varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 K_1(\theta) \varphi(\theta) d\theta + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \varphi^T(\xi) K_2(\xi, \theta) \varphi(\theta) d\xi d\theta.$$

Para resolver este conjunto de ecuaciones, D. Ross propone en [20] un algoritmo para obtener una solución aproximada de las matrices K_0 , $K_1(\theta)$, $K_2(\xi, \theta)$. Dicho algoritmo consiste básicamente en usar diferencias finitas para las derivadas. Después se particiona el intervalo $\theta \in [-h, 0]$ en m segmentos igualmente espaciados cuyos puntos finales son $-\frac{ih}{m}$, $0 \leq i \leq m$. También se particiona el cuadrado $-h \leq \xi \leq 0$, $-h \leq \theta \leq 0$ en pequeños cuadrados cuyos vértices son $(\xi, \theta) = (-\frac{ih}{m}, -\frac{jh}{m})$ para $0 \leq i \leq m$ y $0 \leq j \leq m$. Reemplazando estas consideraciones en las condiciones c) a g) previamente mencionadas se obtiene:

- c) $A_0^T K_0 + K_0 A_0 - K_0 B R^{-1} B^T K_0 + K_1^T(0) + K_1(0) + Q = 0$.
- d) $\frac{K_1(-i)h/m - K_1(-i-1)h/m}{i/m} = (A_0^T - K_0 B R^{-1} B^T) K_1(-i)h/m +$
 $\frac{K_2(0, -(i-1)h/m)}{i/m}$
- e) $\frac{K_2(-(i-1)h/m, -(j-1)h/m) - K_2(-ih/m, -(j-1)h/m)}{i/m} +$
 $\frac{K_2(-(i-1)h/m, -(j-1)h/m) - K_2(-(i-1)h/m, -jh/m)}{i/m} =$
 $-K_1^T(-i)h/m B R^{-1} B^T K_1(-(j-1)h/m)$.
- f) $K_1(-h) = K_0 A_1$.
- g) $K_2(-h, -j/m) = A_1^T K_1(-j/m)$.

Donde $j \in [0, m]$, $i \in [0, m]$, la matriz K_L que contiene a las matrices K_0 , $K_1(\theta)$ y $K_2(\xi, \theta)$ es una matriz semidefinida positiva y es la solución de la ecuación algebraica

de tipo Riccati:

$$A_m^T K_L + K_L A_m - K_L B_m R^{-1} B_m^T K_L + Q_m = 0, \quad (C.4)$$

en donde A_m , B_m , Q_m están definidas como:

$$A_m = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_1 \\ mI & -mI & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & mI & -mI & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & mI & -mI \end{bmatrix}, \quad Q_m = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

I es una matriz identidad de $n \times n$, A_m y Q_m son matrices cuadradas de $n \times (m+1)$ filas y $n \times (m+1)$ columnas, B_m es una matriz de $n \times (m+1)$ filas y r columnas. La construcción de la matriz K_L , consiste en $(m+1)^2$ submatrices $K_{i,j}$ para $0 \leq i \leq m$ y $0 \leq j \leq m$ de dimensión $m \times m$,

$$K_L = \begin{bmatrix} K_{0,0} & K_{0,1} & \dots & K_{0,m} \\ K_{1,0} & K_{1,1} & \dots & K_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{m,0} & K_{m,1} & \dots & K_{m,m} \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

En específico

$$K_0 = K_{0,0} \quad (C.6)$$

$$K_1(-ih/m) = mK_{0,i+1}, \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad K_1(-h) = K_0 A_1 = K_{0,0} A_1 \quad (C.7)$$

$$K_2(-ih/m, -jh/m) = m^2 K_{i+1,j+1}, \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad 0 \leq j \leq m-1$$

$$K_2(-h, -jh/m) = A_1^T K_1(-jh/m), \quad 0 \leq j \leq m-1$$

$$K_2(-ih/m, -h) = K_1^T(-ih/m) A_1, \quad 0 \leq i \leq m-1 \quad (C.8)$$

Se realiza una secuencia de cálculos para cada $m = 1, 2, \dots$, se resuelve la ecuación algebraica de Riccati para hallar los valores de las submatrices $K_{i,j}$, enseguida, se utilizan las ecuaciones (C.6), (C.7) y (C.8) para determinar K_0 , $K_1(-i/m)$, $0 \leq i \leq m$, $K_2(-i/m, -j/m)$, para $i, j = 0, 1, \dots, m$.

La interpolación entre puntos da una aproximación a los valores óptimos de K_0 , $K_1(\theta)$ y $K_2(\xi, \theta)$. El cálculo termina cuando el valor de los elementos de las matrices antes mencionadas ya no cambie considerablemente.

Debido a que el cálculo de las matrices K_0 , $K_1(\theta)$, $K_2(\xi, \theta)$ resulta laborioso, el algoritmo previamente descrito se programa de forma general para un sistema $n \times n$ de la forma (C.1) en el entorno matemático MatLab.

Apéndice D

Publicaciones.

Network-based control system to compensate the input delay and minimize energy expenditure of a cooling plant

Liliam Rodríguez-Guerrero
and Omar J. Santos-Sánchez
Autonomous University of Hidalgo State
(UAEH), Mexico

E-mails: liliam_rodriguez, osantos@uaeh.edu.mx

Rodrigo E. Velasco-Rebollo
Master of Science student,
UAEH

E-mail: ve387696@uaeh.edu.mx

César A. García-Samperio
Electronic Engineering student,
UAEH

E-mail: ga259761@uaeh.edu.mx

Abstract—This paper presents the experimental development of a network control system which compensates the network delay and the inherent input delay of linear systems. The digital implementation of two input delay optimal compensators is carried out on an industrial controller. First, the input delay is compensated with a control law, whose structure has the form of a Proportional Integral controller, but the equation does not include integral term, then the second control is the optimal control for input time delay systems, which uses the prediction of the state. Moreover, a comparative study of the two controller performances and the system responses are shown for a cooling system with three different large delays.

Index Terms—network, control system, input delay, optimal control

I. INTRODUCTION

With a network control system the applications and processes connected through a network can be remotely controlled from a long-distance source [1]. The remote control systems include remote data acquisition systems and remote monitoring systems [2]. General data networks such as Ethernet and Internet are rapidly advancing and they are a good choice for many applications due to their flexibility and lower costs [1]. However, a problem in control of networked-based system is the delays arising due to the time to read a sensor measurement and to send a control signal to an actuator through the network, the delay value depends on network characteristics such as their topologies, routing schemes, etc. The delays may significantly affect the performance of the network control system causing degradation of the systems response and instability.

The problem of the delays on the network becomes more interesting when the plant to be controlled has inherent delays, result of phenomena associated with the transport of information, materia or energy, they are found in a great variety of disciplines such as engineering, physics, biology, and economics [3]- [7]. Control systems can operate in presence of small delays, however large delays are source of instability and performance degradation.

A classical technique for a good compensation of the input delay, when the plant is modeled as a scalar linear system and the delay is well identified, is the Smith predictor [8]. There is

another method, the predictor-based approach whose structure includes a distributed delay and whose realization may lead to instability [4], [9]- [11], a safe implementation requires the approximation of the distributed delay via numerical integration [12]. However, the approximation problem could be avoided by means of the truncated predictor feedback approach, for linear systems with input delay [13], where the integral term is neglected. Nevertheless, in [14] was exposed a study case, observing that the truncation ensures a safe implementation but the closed loop stability zone with the truncated predictor is smaller than the region with the whole predictor control law (including a distributed delay).

In this contribution, it is analyzed the performance of a plant with inherent input delay plus the network delay. Two optimal control strategies are revisited for comparing their performance when the control includes a distributed delay, which must be approximated by sums for a digital implementation, and when the control structure avoid it. In the one hand the optimal control for linear systems with input delay [15], where the assignment of the finite spectrum of the closed loop system characteristic equation starts after the time delay, that control law includes the prediction of the state, it means the presence of a distributed delay which must be approximated for the experimental realization. On the other hand, in [16], the state prediction for compensating the input delay in linear systems is avoided by means of a manipulation of the Cauchy formula, which results in an augmented system that includes the error dynamic and the integral of the error, then the controller is equivalent to a Proportional Integral (PI) controller with a time varying part (while the input delay lasts) and a time invariant part (for all the remaining time). Additionally the gains of this PI controller are computed such that a quadratic performance index is minimized, the damping factor and the natural frequency of the transient response can be specified.

It is worthy of mention that in the best knowledge of the authors the optimal PI controller given in [16] has not been implemented yet on any industrial controller, while the optimal control for time delays system was already programmed on a computer for regulating the temperature of a heating system

[19], in that case the distributed delay of the control law was considered, however in this work the distributed delay of the state is approximated.

The potential impact on the time of activity of the plant and the energy expenditure could be related to the control techniques that are apply, in this case the optimal control techniques [15], [16] are used to minimize energy expenditure. The digital versions of the aforementioned control schemes are implemented on an industrial controller cDAQ-9132 and remotely monitoring with the remote chassis cDAQ-9184 of National Instruments, so the reliability of the equipment could also improve the performance of the process.

The plant over which the control is applied is a cooling system (modeled as a linear system with input delay), whose actuator is a Peltier module that, in operation, demands a lot of current, so it is important apply techniques that help to save energy consumption.

Moreover, the Peltier thermoelectric device can be applied to a refrigeration chambers [25], and it could be used for medical devices [26], [27], sensor technology [28], [29], cooling integrated circuits [30], automotive applications and military applications.

The contribution is organized as follows: Section II describes the network and the experimental platform, Section III recalls preliminary results about the optimal PI, and the optimal control, both for linear input time delay systems, Section IV describes details of the digital implementations such as the approximated control law and the gain tuning. The experimental results are illustrated and contrasted in Section V, and finally some concluding comments.

II. DESCRIPTION OF THE NETWORK AND THE EXPERIMENTAL PLATFORM

In this section, the structure of the network and the cooling system are described.

The network has a direct structure [1] (see Figure 1), it means that sensors and actuators of the control loop are connected to a network directly, which provides better interaction between the components. The set of sensors and actuators are attached to a plant, while a controller is separated from the plant via a network connection. In this kind of structure, the controller can observe and process every measurement, performing the following steps:

- Read sensor measurements via the network.
- Compute control signals.
- Send the control signals to the set of actuators through the network.

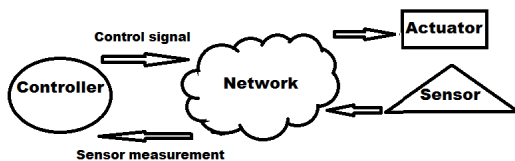


Fig. 1. Network structure

The network hardware components are illustrated in Figure 2, they are describe below:

- The industrial controller: 1.33 GHz Dual-Core Atom, 4-Slot, CompactDAQ Controller cDAQ-9132, which controls the timing, synchronization, and data transfer between C Series I/O modules and an integrated computer. It includes Intel Atom dual-core processing and 16 GB nonvolatile storage for data-logging and embedded monitoring. It runs Embedded Windows 7, includes SD storage, USB, Ethernet, RS232 serial, and trigger input.
- The 4-Slot, Ethernet CompactDAQ Chassis cDAQ9184, which controls the timing, synchronization, and data transfer between C Series I/O modules and an external host. The chassis also has four 32-bit general purpose counters/timers built in, PWM, event counting, pulse train generation, and period or frequency measurement. With multiple timing engines for running seven hardware-timed operations simultaneously, with three independent rates for analog input. The modules Input/Output modules are:
 - The reading module for thermocouple NI 9211.
 - The analog input module NI 9207.
 - The analog output module NI 9263.
- The network via WLAN, is connected by a RT-N66R Gigabit Router with transmission rate 600Mbps.

The control law is implemented by using the LabVIEW (acronym de Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench) software of National Instruments on the industrial controller cDAQ-9163 and the remote chassis cDAQ-9184 where the input/output modules are connected.

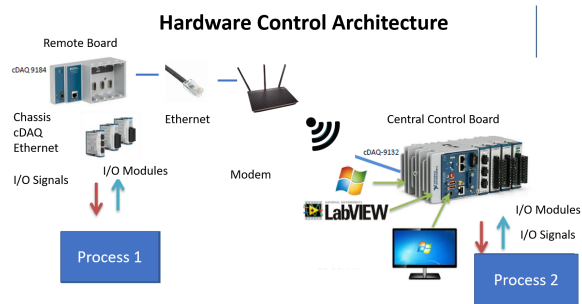


Fig. 2. Monitoring and controlling network components

A. Cooling system

The cooling system, shown in Figure 8, consist of a closed chamber with three temperature sensors distributed along it, the actuator is a thermoelectric Peltier module (model TEC1-12708) this thermoelectric device, can transfer heat across its surface, as an electrical current is running through it. This type of devices can be used as a way to reducing heat from an object, or keeping something warm, at a certain temperature in conjunction with a thermostat circuit. However, the amount of current required to run a Peltier module is

much more than a microcontroller can supply, so the use of a power circuit is required. This can be done by using a MOSFET transistor (Metal-oxide-semiconductor Field-effect transistor) that can be switched or controlled with PWM (Pulse Width Modulation) circuit to increase or decrease the temperature on the thermoelectric module. In order to decrease the temperature on the cooling side, the temperature of the warm side must be dissipate, to do so, an aluminum heatsink is attached to the warm surface of the thermoelectric module, while a DC fan is running. The temperature is measured with LM35 sensors (10mV/°C).

The instrumentation diagram can be seen in Figure 4.

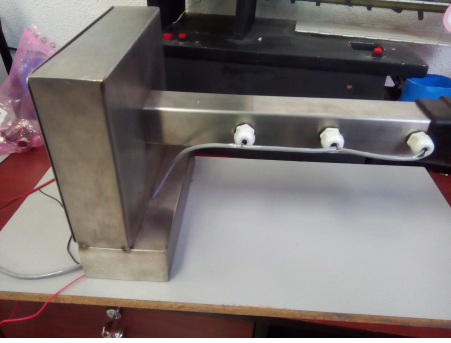


Fig. 3. Cooling system

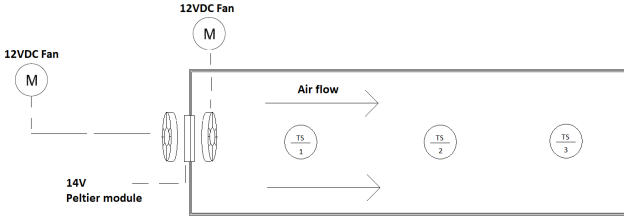


Fig. 4. Cooling system instrumentation diagram

The mathematical model that describes the dynamic of the system was obtained by means of the step response of the plant, and it is given by the transfer function

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-s\tau}}{Ts + 1}, \quad (1)$$

where K , τ , and T are the steady state gain, the time delay and the time constant for the plant, respectively. Figure 5 shows the step responses of the three operation regions, first the responses were obtained with a direct connection and then through the wireless network. The model parameters are in Tables I and II. After several experiments, the maximum values of the delays were 8 seconds for the operation region 16°C, 23 seconds for the operation region 20°C, and 50 seconds for the operation region 22°C.

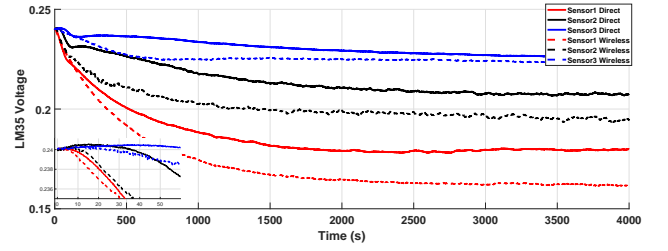


Fig. 5. Step Response of the cooling system

The state space representation is of the form (2), and the parameters for the three different delays are in Table I

TABLE I
PARAMETERS VIA DIRECT CONNECTION FOR MODEL (2) OF THE COOLING SYSTEM

Operation region	a	b	τ
18°C	-0.00216	0.000032	8
20.7°C	-0.00109	0.000088	23
22.6°C	-0.00068	0.000002	50

TABLE II
PARAMETERS VIA WIRELESS CONNECTION FOR MODEL (2) OF THE COOLING SYSTEM

Operation region	a	b	τ
16.2°C	-0.00192	0.000037	4
19.4°C	-0.00187	0.000021	10
22.2°C	-0.00243	0.00001	25

III. CONTROL STRATEGIES

In this section, the theoretical results used in this article are briefly recalled.

Consider the system whose transfer function is given by (1) with state space representation

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t - \tau), \quad (2)$$

where $a = -\frac{1}{T}$ and $b = \frac{K}{T}$ $x(t) \in \mathbb{R}$ is the state, $u(t - \tau) \in \mathbb{R}$ is the delayed input, $\tau > 0$ is the time delay, and the system parameters are $a, b \in \mathbb{R}$, the initial time is $t_0 \geq 0$, the initial condition for the state is $x(0) = x_0$, and the initial function for the input is $\psi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, it is assumed that ψ belongs to the space of piece-wise continuous function $PC([-\tau, 0], \mathbb{R})$.

A. Optimal PI

The ideas given in [16], for systems of the form (2), lead to a PI controller tuned via the Linear Quadratic Regulator (LQR) approach, which are briefly recalled here. The error dynamic equation (when the setpoint is equal to zero) is given by

$$\dot{e}(t) = -ae(t) - bu(t - \tau),$$

taking into account that $\frac{d}{dt} \int_0^t e(t)dt = e$, then the state equation can be written as

$$\dot{x} = Ax + Bu(t - \tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -b \end{bmatrix} u(t - \tau), \quad (3)$$

where $x = \left[\int_0^t e(t)dt, e \right]^T$. The state feedback gain is tuned via the LQR approach, which is combined to an algebraic manipulation of the Cauchy formula [17] for obtaining the controller

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -F e^{A_c t} e^{A(\tau-t)} x(t), & 0 \leq t < \tau, \\ -F e^{A_c \tau} x(t), & t \geq \tau, \end{cases} \quad (4)$$

where $A_c = A - BF$, $F = -R^{-1}B^T P$, P is the solution of the algebraic Riccati equation [18], $R > 0$, $Q \geq 0$ are the penalty matrices of the performance index

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + \bar{u}^T R \bar{u}) dt \quad (5)$$

subject to (3). Notice that controller (4) could be seen as a PI controller such that

$$\begin{aligned} \bar{u} &= Fx = [K_i, K_p] \begin{bmatrix} \int_0^t e(t)dt \\ e(t) \end{bmatrix} \\ &= K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t)dt. \end{aligned} \quad (6)$$

B. Optimal control for linear input time delay systems

In [15], it is presented the optimal control for system (2) that compensates the input delay, and it is possible to synthesize the controller according to the LQR problem [18]. That result is here presented for the scalar case and for infinite horizon as in [19]. On the interval $[-\tau, 0]$ the control law does not have influence on $x(t)$, hence the control could be chosen as $u(t) \equiv 0$ on this interval. On the interval $[0, \tau]$ $x(t)$ depends only of the initial value of the control, and the performance index is given by

$$J = \int_0^\tau x^2(t)Q dt + \int_\tau^\infty (x^2(t)Q + u^2(t-\tau)R) dt,$$

where $Q \geq 0$ and $R > 0$. The control action starts at $t = \tau$, and according to the optimality principle [20] it is only consider the performance index

$$J = \int_\tau^\infty (x^2(t)Q + v^2(t)R) dt,$$

where the control $v(t) = u(t-h)$ can be computed as a feedback law $v(t) = \bar{F}x(t)$, for $\tau \leq t \leq \infty$, where $\bar{F} = -R^{-1}bP$, and P satisfies an algebraic Riccati type equation [21]. However, it is only available $x(t-\tau)$ in the time $t-\tau$, then it is necessary to predict $x(t)$ from the knowledge of $x(t-\tau)$ and $u(s)$, $t-2\tau \leq s \leq t-\tau$. The controller is given by

$$v(t) = -\bar{F}e^{a\tau}x(t-\tau) - \bar{F} \int_{t-\tau}^\tau e^{-a(\theta-t)} b u(\theta-\tau) d\theta, \quad (7)$$

after some manipulations, control (7) could be rewritten as in the [19] as follows

$$v(t) = -\bar{F}x(t) - 2a\bar{F} \int_{-h}^0 e^{a\theta} x(t+\theta) d\theta. \quad (8)$$

where the control (8) only depends on the state variable.

IV. IMPLEMENTATION ISSUE

In this section, it is explained how the above control laws are implemented in a computer to be applied to the experimental processes. For the digital implementation, it is considered that $t = kT_s$, where T_s is a uniform sampling period and k represents the sampling instant; the discrete signal is denoted as $u(k)$.

A. Digital implementation of the optimal PI

The optimal PI (4) is implemented according to equation (6) as the difference differential equation [22], it yields to

$$\bar{u}(k) = \bar{u}(k-1) + (K_p + K_i T_s) e(k) - K_p e(k-1). \quad (9)$$

Notice that, when $t \geq \tau$ the gains K_p and K_i are constant, and before that they are time varying.

According to the tuning given in [16] (Theorem 3), when $t \geq \tau$, the damping factor (ξ) and the natural frequency (ω_n) of the LQR optimal closed loop system (3)-(4) can be specified to obtain a desired transient response, and obtain the values of matrix $Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} > 0$ as follows:

$$q_1 = \frac{\omega_n^4 R}{b^2}, \quad q_2 = \frac{[(4\xi^2 - 2)\omega_n^2 - a^2]R}{b^2}. \quad (10)$$

The gains for the first operation region are presented in Table III

TABLE III
GAINS FOR THE OPTIMAL PI (9)

Operation region	q_1	q_2	R	K_p	K_i
16°C	0.011	0.00126	17	4.35293	0.0085811

Although we proposed some ω_n and ξ , the formulas given in (10) provides values of q_1 and q_2 that result in large values of the gains K_p and K_i , which saturate the actuator all the time, for that reason the choice of q_1 and q_2 was made without that criteria.

B. Digital implementation of the optimal control

The implementation of the control law (8) requires the approximation of the distributed delay by using a quadrature method, we use the trapezoidal rule [23] and the approximated control law is

$$\begin{aligned} v(k) \approx & -\bar{F}(1+ag)e(k) - ag\bar{F}e^{-a\tau}e(k-\bar{\tau}) \\ & - 2a\bar{F} \sum_{i=1}^{N-1} e^{agi}e(k-\bar{\tau}+i) \end{aligned} \quad (11)$$

where $e(k)$ is the error, the equivalent instant of the delay is $\bar{\tau} = \frac{\tau}{T_s}$, the integration step is $g = \frac{\tau}{N}$, and N is the number of subdivisions of the integral over $[-\tau, 0]$.

The gains for the first operation region are presented in Table IV

TABLE IV
GAINS FOR THE OPTIMAL CONTROL (11)

Operation region	Q	R	F
16°C	10467.4556	10	10

C. PID

In order to compare the energy expenditure, the performance of the plant is compared to a digitally implemented Proportional Integral Derivative (PID) controller tuned with the well known Ziegler-Nichols tuning rules [24] with the gains: $K_p = 33.887846$, $K_i = 0.903194$, and $K_d = 317.867999$.

V. EXPERIMENTAL RESULTS AND COMPARATIVE OBSERVATIONS

Figures 6, 7 and 8, show the system responses, the errors, and the control signals, respectively for the case of direct connection. Table V summarizes some characteristics of the closed loop system responses to measure, in some sense, the plant performance for every controller. There are shown the integral absolute error (IAE), the absolute value of the applied control signal ($|u(t)|$), the actuator saturation time (T_{sat}) and the settling time (T_{ss}) with the criteria of $\pm 2\%$.

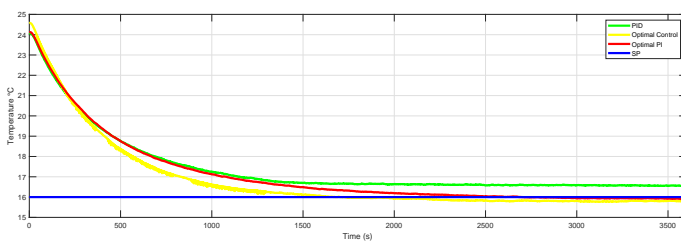


Fig. 6. System responses

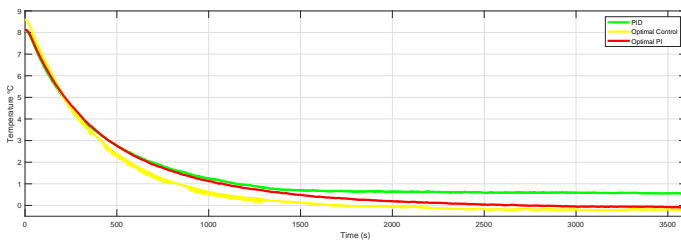


Fig. 7. Errors

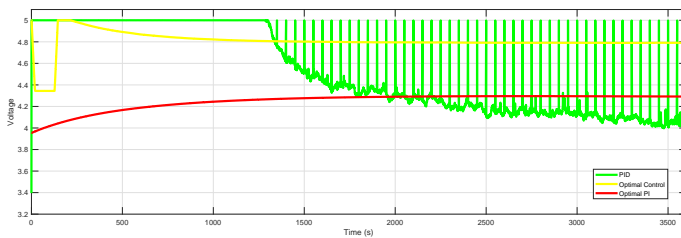


Fig. 8. Control Signals

TABLE V
CHARACTERISTICS OF THE CLOSED LOOP SYSTEM RESPONSE WITH DIRECT CONNECTION

Controller	Optimal PI	Optimal control	PID
IAE (units)	4021.9444	3561.1515	5115.0177
$ u(t) $ (units)	305794.8159	345906.3532	325454.6843
T_{sat} (sec)	0	77	1300
T_{ss} (sec)	1900	1650	2000

From these graphics, we can conclude that, for this system, it is achieved a significant energy saving, for the Optimal PI control described in (9) in comparison with the Optimal control and PID. It can be observed that, although the settling time of the Optimal PI is bigger than the settling time of the Optimal control, the saturation time of the actuator is zero on the Optimal PI control, which is one of the best features.

Figures 9, 10, 11 show the system responses, errors, and the control signals for the wireless connection. Table VI summarizes some characteristics of the closed loop system responses to measure, in some sense, the plant performance for every controller. There are shown the integral absolute error (IAE), the absolute value of the applied control signal ($|u(t)|$), the actuator saturation time (T_{sat}) and the settling time (T_{ss}) with the criteria of $\pm 2\%$.

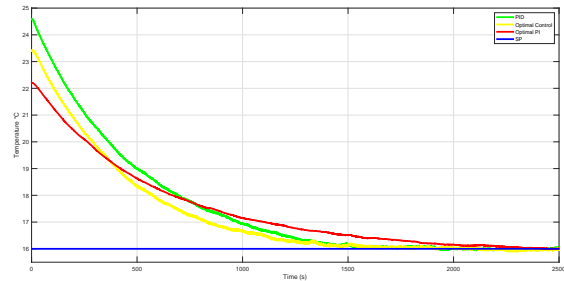


Fig. 9. System responses wireless connection

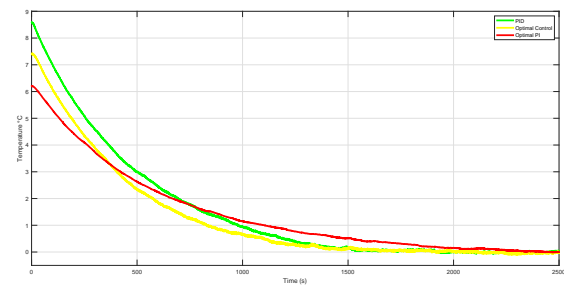


Fig. 10. Errors with wireless connection

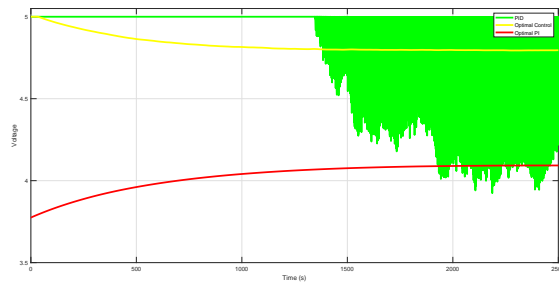


Fig. 11. Control Signals with wireless connection

 TABLE VI
 CHARACTERISTICS OF THE CLOSED LOOP SYSTEM RESPONSE WITH WIRELESS CONNECTION

Controller	Optimal PI	Optimal control	PID
IAE (units)	3592.2975	3156.1451	3845.5482
$ u(t) $ (units)	10288.3859	11315.5007	11627.4289
T_{sat} (sec)	0	33.5	1350
T_{ss} (sec)	1700	1440	1540

VI. CONCLUSIONS

The implementation of two optimal controllers was carried out for regulating the temperature of a cooling system. The experimental results show that the performance of both optimum controllers is satisfactory, nevertheless the Optimal Control saves more energy than the others, less error, managing to compensate the delay of the plant and the delay induced by the network.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by PRODEP-México UAEH-PTC-776, 511-617-8021.

REFERENCES

- [1] Chow, M. Y., & Tipsuwan, Y. (2001, November). In Industrial Electronics Society, 2001. IECON'01. The 27th Annual Conference of the IEEE (Vol. 3, pp. 1593-1602).
- [2] K. B. Lee and R. D. Schneeman, "Internet-based distributed measurement and control applications," *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, vol. 2, pp. 23-27, 1999.
- [3] A. Z. Manitius, "Feedback controllers for a wind tunnel model involving a delay: analytical design and numerical simulation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-29, no. 12, 1984, pp. 1058-1068.
- [4] A. Z. Manitius and A. W. Olbrot, "Finite spectrum assignment problem for systems with delays", *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-24, no. 4, 1979, pp. 541-553.
- [5] W. Michiels and S-I. Niculescu, "Stability and stabilization of time-delay systems: an eigenvalue based approach", In *Advances in design and control*, SIAM Publications, Philadelphia, 2007.
- [6] R. Sipahi, S-I. Niculescu, C. T. Abdallah, W. Michiels and K. Gu, "Stability and stabilization of systems with time delay, limitations and opportunities", *IEEE Control Syst Mag*, vol. 31, no. 1, 2011, pp. 38-65.
- [7] Insperger, T., & Stépán, G. (2011). *Semi-discretization for time-delay systems: stability and engineering applications* (Vol. 178). Springer Science & Business Media. , Springer, New York, 2011.
- [8] Smith, O. J. M. "A controller to overcome dead time," *ISA Journal*, vol. 6, no. 2, 1959, pp. 28-33.

- [9] K. Engelborghs, M. Dambrine and D. Roose, "Limitations of a class of stabilization methods for delay systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 46, no. 2, 2001, pp. 336-339.
- [10] V. Van Assche, M. Dambrine, J.-F. Lafay, J.-P. Richard, "Some problems arising in the implementation of distributed-delay control laws, *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pp.4668-4672, Phoenix, Arizona USA, 1999.
- [11] S. Mondié, M. Dambrine and O. Santos, "Approximation of control laws with distributed delays: a necessary condition for stability", *Kybernetika*, vol. 38, no. 5, 2002, pp. 541-551.
- [12] S. Mondié and W. Michiels, "Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation", *IEEE Trans Autom Control*, vol. 48, no. 12, 2003, pp. 2207-2212.
- [13] Zhou, B., Lin, Z., & Duan, G. R. "Truncated predictor feedback for linear systems with long time-varying input delays", *Automatica*, vol. 48, no. 10, pp. 2387-2399.
- [14] Rodríguez-Guerrero, L., Ramírez, A., & Cuvas, C. (2014). Predictive control and truncated predictor: A comparative study on numerical benchmark problems. In *Proc. of the 11th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*, 1-6.
- [15] Alekal, Y., Brunovsky, P., Chyung, D.H. and Lee, E.B. "The quadratic problem for systems with time delays", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.16, no. 6, pp. 673-687.
- [16] He, J. B., Wang, Q. G., & Lee, T. H. "PI/PID controller tuning via LQR approach", *Chemical Engineering Science*, vol. 55, no. 13, pp. 2429-2439.
- [17] Bellman, R. et al. "The stability of solutions of linear differential equations", *Duke Mathematical Journal*, vol. 10, no. 4, pp. 643-647.
- [18] Kirk, D. E. (2012). *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation.
- [19] Santos-Sánchez, O., Rodríguez-Guerrero, L. and López-Ortega, O. "", *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 33, no. 1, pp. 100-113.
- [20] Athans, M., & Falb, P. L. (2006). *Optimal control: an introduction to the theory and its applications*. Courier Corporation.
- [21] Kalman, R. E. "Contributions to the theory of optimal control", *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 2, pp. 102-119.
- [22] Franklin, G. F., Powell, J. D., & Workman, M. L. (1998). *Digital control of dynamic systems* (Vol. 3). Menlo Park: Addison-wesley.
- [23] Hoffman, J. D., & Frankel, S. (2001). *Numerical methods for engineers and scientists*. CRC press.
- [24] Ziegler, J. G., & Nichols, N. B. (1942). "Optimum settings for automatic controllers", *Trans. ASME*, 1942, vol. 64, no. 11, pp. 759-768.
- [25] Alaoui, C. (2011). "Peltier thermoelectric modules modeling and evaluation", *International Journal of Engineering*, 2011, vol. 5, no. 1, pp. 114.
- [26] Alaoui, C., & Salameh, Z. M. "Solid state heater cooler: design and evaluation", *2001 Large Engineering Systems Conference*, 2001, pp. 139-145.
- [27] Reynaud, J. C., Martini, F., Chatel, C., Buclin, M., Raggenbass, M., & Puizillout, J. J. "A new interface chamber for the study of mammalian nervous tissue slices", *Journal of neuroscience methods*, 1995, vol. 58, no. 1-2, pp. 203-208.
- [28] Ancey, P., Gschwind, M., & Vancauwenberghe, O. "New concept of integrated Peltier cooling device for the preventive detection of water condensation", *Sensors and Actuators B: Chemical*, 1995, vol. 27, no. 1-3, pp. 303-307.
- [29] Stachowiak, H., Lassue, S., Dubernard, A., & Gaviot, E. "A thermoelectric sensor for fluid flow measurement. principles, calibration and solution for self temperature compensation", *Flow Measurement and Instrumentation*, 1998, vol. 9, no. 3, pp. 135-141.
- [30] De Baetselier, E., Goedertier, W., & De Mey, G. "A survey of the thermal stability of an active heat sink", *Microelectronics Reliability*, 1997, vol. 37, no. 12, pp. 1805-1812.