



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DEL ESTADO DE HIDALGO**



**INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN Y SISTEMAS**

---

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL  
DISEÑO Y SINTONIZACIÓN DE LEYES DE CONTROL CON  
RETARDOS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL**

**PRESENTA:**

**ING. LEOPOLDO VITE HERNÁNDEZ**

**ASESOR:**

**DR. RAÚL VILLAFUERTE SEGURA**

**PACHUCA DE SOTO HGO., MÉXICO 22 DE SEPTIEMBRE DE 2017**



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO**  
**Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería**  
*Institute of Basic Sciences and Engineering*  
**Área Académica de Computación y Electrónica**  
*Computer Science and Electronics Department*

Mineral de la Reforma, Hgo., a 28 de agosto de 2017  
 Oficio No. MCAC43\_2017

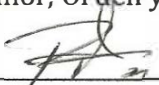
Ing. Leopoldo Vite Hernández  
 P R E S E N T E

Por medio de la presente y en mi calidad de coordinador de la Maestría en Ciencias en Automatización y Control, del Área Académica de Computación y Electrónica (AACyE) de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), me es grato informarle que el Jurado asignado para la revisión de su trabajo de tesis titulado: **“Diseño y sintonización de leyes de control con retardos”**, dirigido por el Dr. Raúl Villafuerte Segura, que para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Automatización y Control fue presentado por usted, ha tenido a bien en reunión de sinodales, autorizarlo para impresión. A continuación se integran las firmas de conformidad de los integrantes del Jurado:

- |                                |              |                    |
|--------------------------------|--------------|--------------------|
| Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez | (Presidente) | UAEH               |
| Dr. Gilberto Ochoa Ortega      | (Secretario) | UP-Valle de México |
| Dr. Raúl Villafuerte Segura    | (Vocal 1)    | UAEH               |
| Dr. Joel Suárez Cansino        | (Vocal 2)    | UAEH               |



Atentamente  
 “Amor, Orden y Progreso”

  
 Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver  
 Coordinador de la Maestría en Ciencias en Automatización y Control  
 Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO



Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería  
 Área Académica de Computación y Electrónica

c.c.p. Dr. Dr. Oscar Rodolfo Suárez Castillo, Director del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería  
 c.c.p. Dr. Hugo Romero Trejo, Jefe del Área Académica de Computación y Electrónica  
 c.c.p. Expediente/ apl

Ciudad del Conocimiento  
 Carretera Pachuca - Tulancingo km. 4.5  
 Colonia Carboneras  
 Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C.P. 42184  
 Tel. +52 771 7172000 exts. 2250 y 2251  
[jesus\\_ordaz@uaeh.edu.mx](mailto:jesus_ordaz@uaeh.edu.mx)



[www.uaeh.edu.mx](http://www.uaeh.edu.mx)



Ing. Leopoldo Vite Hernández

**Diseño y sintonización de  
leyes de control con  
retardos**



Gracias a

**CONACYT** por la beca de Maestría  
otorgada durante el periodo  
Agosto 2015 - Julio 2017.

**CITIS-UAEH** por la formación  
académica brindada durante el  
posgrado y el apoyo para la  
realización del presente trabajo de  
investigación.



# Agradecimientos

*A mis padres, por la motivación y por el apoyo brindado durante mi formación personal y profesional.*

*A mi director de tesis, a mis profesores y tutores por el conocimiento compartido a lo largo de mi formación académica.*

*A mis amigos, por brindarme su apoyo y soporte incondicional durante estos dos años de estudio y trabajo.*





# Resumen

En el presente trabajo de investigación se desarrolla la teoría referente a la sintonización del controlador proporcional retardado (PR) garantizando un máximo decaimiento exponencial alcanzable para una clase de sistemas lineales de orden  $n$ . Los resultados teóricos son implementados en un brazo de robot de unión flexible. Además, dada la naturaleza no lineal de la plataforma experimental, para la implementación del controlador PR, se propone el empleo de una ley de control basada en la estrategia por realimentación linealizante.

Por otra parte, se realiza el diseño y la sintonización de una ley de control no lineal basada en una suma convexa de controladores del tipo proporcional integral retardada (PIR) para estabilizar una clase de sistemas no lineales. La ley de control propuesta aquí es analizada en el marco frecuencial empleando el método de  $\mathcal{D}$ -Particiones y el lugar geométrico de las raíces. Esta estrategia de control es aplicable para sistemas no lineales de una entrada una salida (SISO) que puedan modelarse mediante la metodología propuesta por Takagi-Sugeno (T-S), es decir, que puedan expresarse como una suma convexa de subsistemas lineales. Los resultados teóricos son ejemplificados sobre la plataforma experimental Carro-Péndulo. Para mostrar el desempeño del controlador PIR no lineal en tareas de estabilización, se realiza una comparación con la clásica ley de control compensación paralela distribuida (PDC).



# Abstract

The present contribution is about the theoretical development of the tuning of a proportional retarded (PR) controller to guarantee the maximum achievable exponential decay rate for a class of Linear Time-Invariant (LTI) systems of  $n$ -order. Theoretical results are exemplified by means of a flexible-joint robotic arm. Given the nonlinear nature of the previous experimental platform, a control law based on feedback linearization is proposed for the implementation of the PR controller.

On the other hand, the design and tuning of a nonlinear control law based on a convex sum of proportional integral delayed controllers (PIR) to stabilize a class of nonlinear systems are presented. The control law proposed here is analyzed in the frequency domain using the  $\mathcal{D}$ -partition methodology and the root locus. Furthermore, this method is applicable to Single-Input Single-Output (SISO) nonlinear systems that can be modeled employing the methodology proposed by Takagi-Sugeno (T-S). The convex sum of PIR controllers is implemented over Cart-Pendulum system. The performance of nonlinear system response in close-loop with PIR controller is compared with a classic Parallel Distributed Compensation (PDC).



# Acrónimos

BPR	Borroso Proporcional Retardado.
IR	Integral Retardado.
LMI	Desigualdad Lineal Matricial (Linear Matrix Inequality).
P	Proporcional.
PD	Proporcional Derivativo.
PDC	Compensación Paralela Distribuida (Parallel Distributed Compensation).
PI	Proporcional Integral.
PID	Proporcional Integral Derivativo.
PIR	Proporcional Integral Retardado.
PR	Proporcional Retardado.
SISO	Una entrada una salida (Single-Input-Single-Output).
SNL	Sistema No Lineal.
T-S	Takagi-Sugeno.



# Glosario

- **Proceso.** Operación o desarrollo natural progresivo, marcado por una serie de cambios que se suceden unos a otros de una forma relativamente fija y que conducen a un resultado o propósito determinado [36].
- **Sensor.** Los sensores captan el valor de la variable de proceso y envían una señal de salida predeterminada. También se denomina detector o elemento primario por estar en contacto con la variable, con lo que utiliza o absorbe energía del medio controlado para dar, al sistema de medición, una indicación en respuesta a la variación de la variable [45].
- **Sistema.** Un sistema es una combinación de componentes que actúan conjuntamente para alcanzar un objetivo específico [36].
- **Sistemas de control en lazo abierto.** Los sistemas en los cuales la salida no tiene efecto sobre la acción de control se denominan sistemas de control en lazo abierto [36].
- **Control realimentado.** El control realimentado se refiere a una operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia [36].
- **Sistema lineal.** Un sistema es lineal si y sólo si posee la propiedad de homogeneidad y superposición [52].
- **Sistema no lineal.** Sistema que no cumple con ambos o con alguno de los principios de superposición y homogeneidad [37].
- **Estado.** Se define estado de un sistema como la mínima cantidad de información necesaria en un instante para que, conociendo la entrada a partir de ese instante, se pueda determinar cualquier variable del sistema en cualquier instante posterior. [13].
- **Vector de estado.** Si se necesitan  $n$  variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces esas  $n$  variables de estado se pueden considerar como las  $n$  componentes de un vector  $X$ . Este vector se denomina vector de estado. Un vector de estado es, por lo tanto, un

vector que determina unívocamente el estado del sistema  $X(t)$  en cualquier instante de tiempo  $t \geq t_0$ , una vez que se conoce el estado en  $t = t_0$  y se especifica la entrada  $u(t)$  para  $t \geq t_0$  [36].

- **Espacio de estado.** El espacio  $n$ -dimensional cuyos ejes de coordenadas están formadas por el eje  $x_1$ , eje  $x_2, \dots$ , eje  $x_n$ , donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las variables de estado, se denomina espacio de estado [36].



# Contenido

Agradecimientos . . . . .	V
Resumen . . . . .	VII
Abstract . . . . .	IX
Índice general . . . . .	XIV
Índice de figuras . . . . .	XVII
Índice de tablas . . . . .	XIX
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	3
1.1.1. Plataformas experimentales . . . . .	3
1.1.2. Realimentación linealizante . . . . .	4
1.1.3. Sistemas con retardos . . . . .	4
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	5
1.3. Justificación . . . . .	5
1.4. Objetivos . . . . .	6
1.4.1. Objetivo general . . . . .	6
1.4.2. Objetivos específicos . . . . .	6
1.5. Hipótesis . . . . .	7
1.6. Metodología . . . . .	7
1.7. Organización de la tesis . . . . .	8
<b>2. Marco teórico</b>	<b>9</b>
2.1. Realimentación linealizante . . . . .	9
2.2. Sistemas Takagi-Sugeno (T-S) . . . . .	12
2.2.1. Controlador PDC . . . . .	14
2.3. Sistemas con retardos . . . . .	15
2.3.1. $\mathcal{D}$ -Particiones . . . . .	17
2.3.2. Controlador PIR . . . . .	18
Regiones de estabilidad . . . . .	19
Punto de colapso . . . . .	19
Máximo decaimiento exponencial alcanzable . . . . .	20

Sintonización del control PIR . . . . .	20
2.4. Banco de pruebas experimentales . . . . .	21
2.4.1. Brazo de Robot de Unión Flexible . . . . .	21
2.4.2. Carro-Péndulo . . . . .	24
2.5. Conclusiones del Capítulo . . . . .	25
<b>3. Ley de control PR para sistemas lineales de orden <math>n</math></b>	<b>27</b>
3.1. Sintonización de la Ley de control PR para sistemas lineales de orden $n$	27
3.1.1. Fronteras de estabilidad . . . . .	28
3.1.2. Máximo decaimiento exponencial alcanzable . . . . .	30
3.2. Diseño y sintonización de la ley de control PR + realimentación lineal- lizante para el brazo de robot de unión flexible . . . . .	31
3.3. Resultados de simulación . . . . .	37
3.4. Resultados experimentales . . . . .	40
3.4.1. Ley de control PID . . . . .	40
3.4.2. Ley de control por modos deslizantes . . . . .	42
3.4.3. Ley de control PR . . . . .	44
3.5. Conclusiones del Capítulo . . . . .	46
<b>4. Suma convexa de controladores PIR</b>	<b>47</b>
4.1. Diseño y sintonización de una suma convexa de controladores PIR . .	47
4.2. Caso de estudio: Carro-Péndulo . . . . .	51
4.2.1. Regiones $\sigma$ -estables . . . . .	53
4.2.2. Lugar geométrico de las raíces dominantes . . . . .	56
4.3. Resultados de simulación . . . . .	58
4.4. Resultados experimentales . . . . .	60
4.5. Conclusiones del Capítulo . . . . .	62
<b>5. Conclusiones y Trabajo futuro</b>	<b>63</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	63
5.2. Trabajo futuro . . . . .	64
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>
<b>A. Ley de control PID y control por modos deslizantes</b>	<b>70</b>
A.1. Ley de control PID . . . . .	70
A.2. Ley de control por modos deslizantes . . . . .	70

# Índice de figuras

2.1. Diseño del controlador PDC. . . . .	14
2.2. Ubicación de las raíces de un sistema del tipo retardado. . . . .	17
2.3. Brazo de robot de unión flexible. . . . .	22
2.4. Carro-Péndulo. . . . .	24
3.1. Regiones $\sigma$ -estables en el espacio paramétrico $(\tau, k_r)$ . . . . .	29
3.2. Regiones $\sigma$ -estables del sistema en lazo cerrado (3.19). . . . .	35
3.3. Ubicación de las raíces dominantes en $s = -\sigma^*$ del sistema en lazo cerrado (3.19). . . . .	37
3.4. Señal de salida y señal de referencia del brazo de robot (simulación). . . . .	38
3.5. Velocidad angular del brazo de robot (simulación). . . . .	38
3.6. Señal de control PR aplicado al brazo de robot (simulación). . . . .	39
3.7. Error de posición angular del brazo de robot (simulación). . . . .	39
3.8. Señal de salida $\theta_1(t)$ del robot y señal de referencia. . . . .	41
3.9. Señal de salida $y_{PID}(t)$ y señal de referencia $y^*(t)$ del brazo de robot. . . . .	41
3.10. Señal de control PID aplicado al brazo de robot. . . . .	42
3.11. Error de posición angular del brazo de robot (PID). . . . .	42
3.12. Señal de salida $y_{ISM}(t)$ y señal de referencia $y^*(t)$ del brazo de robot. . . . .	43
3.13. Señal de control por modos deslizantes aplicado al brazo de robot. . . . .	43
3.14. Error de posición angular del brazo de robot (Control por modos deslizantes). . . . .	44
3.15. Señal de salida $y_{PR}(t)$ y señal de referencia $y^*(t)$ del brazo de robot. . . . .	44
3.16. Señal de control PR aplicado al brazo de robot. . . . .	45
3.17. Error de posición angular del brazo de robot (PR). . . . .	45
4.1. Diseño de la suma convexa de controladores PIR. . . . .	48
4.2. Regiones $\sigma$ -estables del subsistema (4.7). . . . .	54
4.3. Ubicación de las raíces dominantes del subsistema (4.7). . . . .	54
4.4. Regiones $\sigma$ -estables del subsistema (4.8). . . . .	55
4.5. Ubicación de las raíces dominantes del subsistema (4.8). . . . .	55

---

4.6. Intersección de las regiones $\sigma$ -estables. . . . .	56
4.7. Lugar geométrico de las raíces dominantes del cuasipolinomio (4.12). . . . .	57
4.8. Funciones de membresía. . . . .	57
4.9. Señal de salida y señal de referencia del sistema Carro-Péndulo (simulación). . . . .	58
4.10. Velocidad angular del sistema Carro-Péndulo (simulación). . . . .	58
4.11. Señal de control aplicado al Carro-Péndulo (simulación). . . . .	59
4.12. Error de posición angular del sistema Carro-Péndulo (simulación). . . . .	59
4.13. Señal de salida y señal de referencia del Carro-Péndulo. . . . .	60
4.14. Velocidad angular del Carro-Péndulo. . . . .	60
4.15. Señal de control aplicado al Carro-Péndulo. . . . .	61
4.16. Error de posición angular del Carro-Péndulo. . . . .	61

# Índice de tablas

3.1. Media, mediana y desviación estándar del error de posición angular para el brazo de robot (simulación). . . . .	40
3.2. Media, mediana y desviación estándar del error de posición angular para el Brazo de robot vía experimentación. . . . .	46
4.1. Media, mediana y desviación estándar del error de posición angular (Carro-Péndulo). . . . .	62



# Notación

$\mathbb{R}$	Conjunto de números reales
$\mathbb{R}^n$	Espacio vectorial de dimensión $n$ con entradas en $\mathbb{R}$
$i$	Unidad imaginaria, $i^2 = -1$
$\mathbb{C}$	Conjunto de números complejos
$Re(s), Im(s)$	Parte real e imaginaria de un número complejo $s \in \mathbb{C}$
$I_n$	Matriz identidad de dimensión $n$
$A^T$	Transpuesta de una matriz $A$
$\  \cdot \ $	Norma Euclidiana
$x(t)$	Vector de estado
$\dot{x}(t)$	Derivada de $x(t)$ con respecto al tiempo $t$ , $\frac{dx(t)}{dt}$
$u(t)$	Vector de entrada
$y(t)$	Vector de salida
$z_i$	$i$ -ésima variable de programación
$M_{i,j}$	Conjunto difuso de la $j$ -ésima variable en la $i$ -ésima regla
$M_{i,j}(z_j)$	Grado de pertenencia de $z_j$ en el conjunto difuso $M_{i,j}$
$w_i$	Función de membresía para la regla $i$
$m_i$	Función de membresía normalizada para la regla $i$
$r$	Número de reglas
$\mathcal{L}$	Lagrangiano
$L_f h(x)$	Derivada de Lie de $h(x)$ con respecto a $f(x)$





# Capítulo 1

## Introducción

El diseño de controladores para la manipulación y estabilización de sistemas no lineales es una tarea complicada, más aún, debido al constante cambio tecnológico generado por las necesidades del hombre, lo cual conlleva al desarrollo de sistemas cada vez más sofisticados con dinámicas más complejas. Generalmente las leyes de control lineal son aplicadas a los sistemas no lineales (SNL), aún cuando estas estrategias de control estabilizan a esta clase de sistemas, el desempeño de los controladores lineales en diversas zonas de operación no es el deseado, lo cual repercute en la respuesta transitoria y estacionaria de los sistemas, afectando las tareas de estabilización o seguimiento. Por lo tanto, resulta natural diseñar estrategias de control no lineal para la manipulación de SNL [44]. Sin embargo, el diseño y la sintonización de este tipo de controladores suele ser complicado, laborioso y de difícil implementación. Los modelos T-S son una alternativa a este problema debido a que permiten manipular sistemas no lineales en las diversas zonas de operación empleando estrategias de control semejantes a las lineales. Los modelos T-S fueron propuestos por Takagi, Sugeno y Kang en 1985 [49], esta metodología representa las dinámicas de un sistema no lineal mediante una suma convexa de subsistemas lineales.

Una estrategia clásica para manipular sistemas T-S es la ley de control PDC, esta metodología ofrece una solución eficaz a los problemas de control en el mundo real, ver [28] y [43], generando respuestas adecuadas sobre la dinámica de los sistemas. Aunque el control PDC es eficiente para la manipulación de SNL, éste requiere el conocimiento del estado completo del sistema, lo cual conlleva el empleo de acciones derivativas para una clase de sistemas. Generalmente las derivadas se obtienen mediante algoritmos en diferencias finitas, sin embargo la implementación de estos algoritmos suelen resultar ruidosos, lo cual implica el uso de filtros; por otra parte, la aplicación de algoritmos de aproximación como lo es un observador [14], aparentemente no presenta el problema de amplificar ruido en las mediciones, pero su implementación puede resultar costosa desde un punto de vista computacional en sistemas digitales de bajas prestaciones.

Un enfoque distinto es emplear controladores de tipo retardado, los cuales evitan el uso de términos derivativos incluyendo acciones retardadas, de tal manera, la amplificación de ruido presente en la mediciones es evitada conservando las ventajas de la acción derivativa.

Las leyes de control con retardos no son un tópico nuevo ya que se han estudiado desde hace muchos años, ver [1] y [11]. Algunas investigaciones se realizan en [53], en ella se reporta la teoría referente a la sintonización del controlador PR para estabilizar sistemas lineales de segundo orden. Recientemente, en [17] y en [39] se muestra cómo las acciones de controlador PIR mejoran el desempeño de una planta en comparación con el efecto producido por el control PID. Una limitante de la ley de control PIR es su sintonización, ya que la información reportada en el marco referencial de la teoría de control es aplicable únicamente para una clase de sistemas lineales, sin embargo, el empleo de la metodología propuesta por T-S permite la aplicación de este tipo de controlador hacia los sistemas no lineales.

En la presente investigación se propone una estrategia de sintonización para la ley de control PR garantizando un máximo decaimiento exponencial alcanzable para sistemas lineales de orden  $n$ . Además, los resultados teóricos son implementados en un brazo de robot de unión flexible, debido a las no linealidades del sistema, se desarrolla primeramente una linealización por realimentación. También se implementa un controlador PID para la posición angular de la base del robot independientemente de la posición angular del brazo de robot, esto con la finalidad de ilustrar las oscilaciones inducidas en el efector final debido a la unión flexible del sistema.

Por otra parte, se aplican los resultados propuestos en [40] para diseñar y sintonizar una ley de control formada por una suma convexa de controles PIR con el fin de  $\sigma$ -estabilizar sistemas no lineales que puedan modelarse mediante la metodología propuesta por T-S. La sintonización de la ley de control propuesta aquí, se realiza dentro del marco frecuencial empleando el método  $\mathcal{D}$ -Particiones y el lugar geométrico de las raíces. El desempeño del controlador PIR no lineal en tareas de estabilización se compara con la clásica ley de control PDC. En este caso, los experimentos se realizan en una plataforma que consiste en un péndulo invertido sobre un móvil.

## 1.1. Antecedentes

A continuación se presentan algunos estudios reportados en el marco referencial de la teoría de control sobre la estabilización y seguimiento de trayectorias para el brazo de robot de unión flexible y para la plataforma Carro-Péndulo. También se describen los antecedentes sobre la estrategia de control por realimentación linealizante, así como los sistemas con retardos.

### 1.1.1. Plataformas experimentales

Los estudios referentes al seguimiento de trayectorias para la plataforma brazo de robot de unión flexible se han realizado desde los años 80, por ejemplo en [32] se aplica una ley de control no lineal basada en la estrategia por realimentación linealizante. Otras investigaciones se realizan en [18], [24] y [30], en ellas se implementan leyes de control adaptables para el seguimiento de trayectorias del sistema. La estrategia de control basada en lógica difusa también ha sido implementada para la manipulación del brazo flexible, ver [3] y [22]. En [2] se presenta una ley de control diferencial de alto orden, cuyo desempeño es comparado con una ley de control PID.

Algunos estudios recientes se pueden encontrar en [5], en el cual se obtiene el modelo del sistema basado en el formalismo Euler-Lagrange. Además, se propone una ley de control robusta basada en modos deslizantes. Por otra parte, en [41] se aborda el problema de seguimiento de trayectorias para el brazo de robot de unión flexible mediante el empleo de la estrategia de control por realimentación linealizante y una ley de control por modos deslizantes. También en [23] se aplica un regulador lineal cuadrático para el seguimiento de trayectorias minimizando las oscilaciones presentes en el sistema.

Referente a la plataforma Carro-Péndulo, en [4] se realiza la identificación del sistema mediante redes neuronales, mientras que en [51] se realiza la estabilización del sistema mediante lógica difusa. De la misma manera en [56], una ley de control difusa es aplicada para abordar el problema de seguimiento de trayectorias. En [26] se realiza la estabilización del Carro-Péndulo mediante la aplicación de un controlador PID y un regulador lineal cuadrático. Por otra parte, en [8] se reporta la teoría referente a un controlador adaptable optimizado para el seguimiento de trayectorias. Algunos estudios recientes se realizan en [25], en ella se obtiene el modelo matemático del sistema y se propone una ley de control adaptable para la estabilización de la plataforma Carro-Péndulo. En [12] la estabilización de la plataforma se realiza aplicando una ley de control por realimentación de estado, además, el trabajo se realiza de manera remota.

### 1.1.2. Realimentación linealizante

La teoría referente a la estrategia de control por realimentación linealizante ha sido explorada desde los años 80, esta estrategia se basa en un cambio de coordenadas no lineales y en una realimentación de estado no lineal. Algunas investigaciones se realizan en [7], en ella se reportan las condiciones necesarias y suficientes para la linealización de sistemas no lineales en tiempo continuo, de la misma manera, en [21] se presentan los estudios referentes para los sistemas no lineales discretos. Una de las primeras aplicaciones de esta técnica de control se presenta en [57], en ella se realiza un controlador basado en redes neuronales y en la realimentación linealizante para la estabilización y seguimiento de una clase de sistemas no lineales SISO en tiempo continuo. En [46] se estudia un sistema subactuado conocido como acrobot: robot planar de dos grados de libertad con un sólo actuador, en el cual, el problema de estabilización se aborda aplicando el método de realimentación linealizante de manera parcial. En [10] se describe un control dinámico linealizante para un motor de inducción, esta estructura de control requiere el cambio entre dos diferentes transformaciones para evitar singularidades. Recientemente en [29] se aplica el método de control por realimentación linealizante basado en la estimación de perturbaciones y observadores de estado para el control de altura satelital con perturbaciones desconocidas, incertidumbres paramétricas y estado desconocido. En [58] se realiza un ley de control basada en la realimentación linealizante más un control por modos deslizantes para regular la corriente de un generador hidráulico con perturbaciones externas. De la misma manera, en [31] se presenta el control de vuelo en formación descentralizada para un grupo de cuadricópteros empleando la clásica realimentación linealizante.

### 1.1.3. Sistemas con retardos

En el marco referencial de la teoría de control es muy conocido que la presencia de retardos temporales en los procesos de control puede inducir un mal desempeño e incluso inestabilizar la respuesta de un sistema dinámico. De la misma manera, para algunos sistemas los retardos pueden tener efectos de estabilización, por ejemplo, en [11] se proponen algunas condiciones bajo las cuales un sistema lineal permanece estable ante la presencia de retardos. Por otra parte, en [47] se muestra que una acción retardada puede ser empleada en el diseño de controladores. Algunas aplicaciones se realizan en la estabilización de sistemas oscilatorios [42] y en la estabilización de una cadena de integradores [35], incluso se ha combinado con la ley de control PID [61]. Recientemente en [53] se presenta una técnica para la sintonización del control PR sobre sistemas lineales de segundo orden, en ella se proveen fórmulas explícitas para el cálculo de las ganancias del controlador. También, en [38] se aplica un control integral retardado (IR) para el control de velocidad de servomotores de corriente continua, de

la misma manera, en [39] se realiza el estudio del control PIR inspirado por el control PID, donde el término integral corrige el error en estado estacionario garantizando robustez contra perturbaciones constantes, además, la ausencia del término derivativo en el control PIR evita la amplificación de ruido indeseado.

La aplicación de los controles retardados se ha extendido hacia una clase de sistemas no lineales por medio de la metodología basada en modelos T-S. Algunos resultados sobre el análisis de esta clase de sistemas se obtienen en [60], donde se presenta un enfoque para resolver el problema de estabilidad y estabilización de sistemas T-S con retardos; por otra parte, en [6] se describen algunas condiciones de estabilidad usando el enfoque de Lyapunov-Krasovskii. En [9] se emplea un control descentralizado robusto en el modelo T-S con retardo, mientras que en [59] los resultados son formulados en forma de desigualdades matriciales lineales (LMI's), siendo estas muy conservativas. En [54] se presentan resultados referentes al diseño de una ley de control borrosa proporcional retardada (BPR) para estabilizar una clase de sistemas no lineales de segundo orden. A diferencia del controlador BPR, la ley de control propuesta aquí formada por la suma convexa de controladores PIR, se sugiere añadir una acción integral con la finalidad de eliminar el error en estado estacionario presente en algunos sistemas.

## 1.2. Planteamiento del problema

La mayoría de los sistemas existentes son de naturaleza no lineal, la manipulación y control de esta clase de sistemas mediante técnicas de control no lineal es una tarea complicada y de difícil implementación.

Una alternativa para controlar sistemas no lineales, es mediante la aplicación de técnicas de control lineal, por ejemplo los controles P, PD, PI y PID, sin embargo, estos sólo operan de manera correcta en una zona cercana al punto de operación del sistema no lineal. Por otra parte, las leyes de control con acciones derivativas presentan el problema de amplificación de ruido lo cual implica el empleo de filtros, además, requieren técnicas de aproximación como algoritmos en diferencias infinitas; o el empleo de observadores para estimar la acción derivativa, incrementando el costo computacional y la dificultad para su implementación.

## 1.3. Justificación

La dificultad de diseñar y sintonizar leyes de control no lineal conlleva a la búsqueda de nuevas alternativas para la manipulación de esta clase de sistemas. En esta

investigación se emplea la metodología basada en modelos T-S y en la técnica por realimentación linealizante para diseñar estrategias de control no lineal. Las metodologías aplicadas permiten extender la teoría desarrollada para los controladores del tipo retardado, como lo es el PR y el PIR, para la manipulación de sistemas no lineales, reduciendo la dificultad en el diseño y sintonización de controladores no lineales.

## 1.4. Objetivos

A continuación se describen el objetivo general y los objetivos específicos para el desarrollo del presente trabajo de investigación.

### 1.4.1. Objetivo general

Diseñar y sintonizar leyes de control del tipo retardado para estabilizar una clase de sistemas no lineales, mediante el empleo de estrategias de control por realimentación linealizante y la metodología propuesta por T-S.

### 1.4.2. Objetivos específicos

- a) Obtener condiciones analíticas para sintonizar la ley de control PR, garantizando un máximo decaimiento exponencial alcanzable para una clase de sistemas lineales de orden  $n$ , mediante un análisis en el dominio de la frecuencia.
- b) Aplicar los resultados obtenidos en el punto anterior junto con la estrategia de control por realimentación linealizante para estabilizar un brazo de robot de unión flexible vía simulación y experimentación, mediante el empleo de tarjetas de adquisición de datos y la herramienta de programación MATLAB-SIMULIK.
- c) Comparar el desempeño de ley de control PR con el control por modos deslizantes en tareas de seguimiento del brazo de robot de unión flexible para ilustrar el desempeño del controlador propuesto.
- d) Diseñar y sintonizar una ley de control basada en una suma convexa de controladores PIR para estabilizar sistemas no lineales SISO de segundo orden, empleando la metodología propuesta por T-S, el método de  $\mathcal{D}$ -Particiones y el lugar geométrico de las raíces.

- e) Simular e implementar la ley de control basada en una suma convexa de controladores PIR sobre la plataforma Carro-Péndulo para ilustrar el desempeño del controlador desarrollado, mediante el empleo de tarjetas de adquisición de datos y la herramienta MATLAB-SIMULIK.
- f) Comparar el desempeño de ley de control basada en una suma convexa de controladores PIR con la clásica ley de control PDC en tareas de estabilización de la plataforma Carro-Péndulo para validar la efectividad del controlador propuesto.

## 1.5. Hipótesis

Es posible estabilizar una clase de sistemas no lineales mediante la aplicación de controladores del tipo retardado junto con la técnica de realimentación linealizante, así como la metodología propuesta por T-S.

## 1.6. Metodología

A continuación se describe la metodología aplicada para alcanzar los objetivos definidos en el presente trabajo de investigación.

**Realimentación linealizante:** La estrategia de control llamada realimentación linealizante se basa en dos operaciones: en un cambio de coordenadas y en una realimentación no lineal. Con ambas operaciones, es posible emplear leyes de control lineal en los sistemas no lineales mejorando su desempeño en las diversas zonas de operación [44].

**Sistemas Takagi-Sugeno:** Metodología propuesta por Takagi, Sugeno y Kang en 1985 que permite obtener el modelo difuso de un sistema no lineal. La metodología consiste en representar las dinámicas locales de un sistema no lineal mediante subsistemas lineales, esta característica permite manipular sistemas no lineales en distintas zonas de operación empleando estrategias de control semejantes a las lineales [49].

**D-Particiones:** Método frecuencial propuesto por Neimark en 1949, el cual permite obtener las fronteras de estabilidad una ecuación característica [34].

**Lugar geométrico de las raíces:** La respuesta de un sistema se relaciona estrechamente con la localización de las raíces de su ecuación característica, por lo cual, es importante conocer su comportamiento en el plano complejo conforme a la variación de sus parámetros [33].

## 1.7. Organización de la tesis

- Capítulo 1 Introducción: Se detallan los antecedentes del tema de investigación, se explica la problemática y la justificación para realizar el trabajo, se proponen los objetivos a alcanzar, así como la formulación de la hipótesis.
- Capítulo 2 Marco teórico: Se definen los resultados preliminares para abordar la investigación.
- Capítulo 3 Ley de control PR para sistemas lineales de orden  $n$ : Se describe la metodología aplicada para la sintonización del controlador propuesto y se detallan las etapas para la aplicación del mismo.
- Capítulo 4 Suma convexa de controladores PIR: Se describe el diseño y la sintonización del controlador propuesto. Los resultados teóricos se ejemplifican en la plataforma Carro-Péndulo vía simulación y experimentación.
- Capítulo 5 Conclusiones y Trabajo futuro: Se resumen las principales aportaciones de la tesis y las conclusiones más importantes que de ellas se derivan. También se describen los posibles trabajos futuros así como recomendaciones que se pueden realizar para su mejora.



# Capítulo 2

## Marco teórico

En el presente Capítulo se define la teoría referente a la estrategia de control por realimentación linealizante, a los sistemas T-S, al controlador PDC, a los sistemas con retardos, al método  $\mathcal{D}$ -Particiones, así como la ley de control PIR.

### 2.1. Realimentación linealizante

La ley de control conocida como realimentación linealizante ha sido aplicada en tareas de estabilización y seguimiento de trayectorias para sistemas no lineales, ver [10], [29], [31], funcionando adecuadamente en un amplio rango de operación. A continuación se presentan algunos resultados preliminares para interpretar los fundamentos de esta estrategia de control. Se considera el sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x) + g(x)V(t), \\ y(t) &= h(x),\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado del sistema;  $V(t) \in \mathbb{R}$  es la entrada del sistema;  $y(t) \in \mathbb{R}$  es la salida del sistema;  $f(x) \in \mathbb{R}^n$  y  $g(x) \in \mathbb{R}^n$  son vectores de funciones no lineales; y  $h(x) \in \mathbb{R}$  es una función no lineal.

En primer lugar se define la derivada de una función escalar a lo largo de un campo vectorial también conocida como derivada de Lie.

**Definición 1** (*Derivada de Lie*) [44] Sea  $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar y  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial. Se define la derivada de Lie o derivada direccional de  $h(x)$  con respecto a  $f(x)$  como la función escalar dada por

$$L_f h(x) := \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x),$$

también se define la derivada de Lie de orden superior

$$L_f^k h(x) := L_f L_f^{k-1} h(x), \quad k \geq 1, \quad L_f^0 := f(x).$$

Considerando la definición anterior, al derivar la salida del sistema (2.1) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{y}(t) &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} \dot{x}, \\
 &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)V(t)], \\
 &= \underbrace{\frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x)}_{L_f h(x)} + \underbrace{\frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x)}_{L_g h(x)} V(t), \\
 &= L_f h(x) + L_g h(x)V(t).
 \end{aligned}$$

Se asume que la primera derivada de la salida no es afectada por la señal de entrada, es decir,  $L_g h(x) = 0$  y  $\dot{y}(t) = L_f h(x)$ . Mientras que la segunda derivada  $\ddot{y}(t)$  es

$$\begin{aligned}
 \ddot{y}(t) &= \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} \dot{x}, \\
 &= \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)V(t)], \\
 &= L_f(L_f h(x)) + L_g(L_f h(x))V(t), \\
 &= L_f^2 h(x) + \underbrace{L_g(L_f h(x))}_{=0} V(t).
 \end{aligned}$$

De la misma manera se asume que  $L_g(L_f h(x)) = 0$ . Por inducción resulta

$$\begin{aligned}
 \dot{y}(t) &= L_f h(x), \\
 \ddot{y}(t) &= L_f^2 h(x), \\
 &\vdots \\
 y^{(r)} &= L_f^r h(x) + L_g(L_f^{r-1} h(x))V(t).
 \end{aligned}$$

Sea  $r$  la  $r$ -ésima derivada de  $y(t)$  en la cual aparece la señal de entrada  $V(t)$ , es decir  $L_g(L_f^{r-1} h(x)) \neq 0$ , entonces el valor  $r$  es conocido como grado relativo del sistema.

Para el diseño de la ley de control por realimentación linealizante se parte del sistema no lineal de la forma (2.1) con grado relativo  $r = n$ , es decir, exactamente igual a la dimensión del espacio de estado. Esta técnica se basa en dos operaciones: en un cambio de coordenadas no lineales y en una realimentación de estado no lineal. El cambio de coordenadas requerido es dado por

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix}$$

es decir, por la función  $h(x)$  y sus primeras  $n - 1$  derivadas a lo largo de  $f(x)$ . En las nuevas coordenadas

$$z_i = \phi_i(x) = L_f^{i-1} h(x), \quad 1 \leq i \leq n,$$

el sistema es descrito por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= L_f^n h(x) + V(t) L_g L_f^{n-1} h(x), \end{aligned}$$

donde  $z = (z_1, \dots, z_n)$ . Al definir la siguiente ley de control linealizante

$$V(t) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} (-L_f^n h(x) + u(t)), \quad L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0, \quad (2.2)$$

resulta el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= u(t). \end{aligned}$$

Con el cambio de coordenadas no lineal  $\Phi(x)$  y la ley de control linealizante (2.2), la ecuación (2.1) es transformada a un sistema lineal, con lo cual es posible aplicar estrategias de control del tipo retardado. Sin embargo, la aplicación de los controladores retardados hacia los sistemas no lineales mediante la estrategia antes mencionada es de manera indirecta, en la siguiente sección se presenta la metodología propuesta por T-S, representando otra alternativa para la manipulación de sistemas no lineales.

## 2.2. Sistemas Takagi-Sugeno (T-S)

Tradicionalmente, los sistemas lineales invariantes en el tiempo han dominado tanto el análisis de sistemas dinámicos, así como el área de la teoría de control [16]. Esta clase de sistemas son relativamente fáciles de analizar debido a su linealidad e invarianza en el tiempo, además, existe una gran cantidad de algoritmos y métodos efectivos para el diseño de sus controladores. Una característica de estos modelos es que tienen un comportamiento local aceptable, sin embargo fallan de manera global. Esto debido a que una aproximación precisa de un sistema no lineal sólo puede alcanzarse en la proximidad de un punto de equilibrio.

En lo subsecuente se describen los sistemas T-S en tiempo continuo, estos sistemas son modelos matemáticos con la propiedad de representar de manera exacta o de manera aproximada a una clase de sistemas no lineales en distintas zonas de operación [49].

Se considera el sistema no lineal SISO de n-ésimo orden de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ y(t) = g(x(t), u(t)), \end{cases} \quad (2.3)$$

donde  $x(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la entrada de control,  $y(t) \in \mathbb{R}$  es la salida del sistema,  $f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones suaves. Los sistemas T-S consisten en un conjunto finito de reglas del tipo **si-entonces** expresadas en la forma,

**Regla del subsistema  $i$ :**

**si**  $z_1(t)$  está en  $M_{i1}$  y ... y  $z_p(t)$  está en  $M_{ip}$ ,

**entonces**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t). \end{cases}$$

Aquí,  $M_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  es el conjunto difuso y  $r$  es el número de reglas;  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  es el vector de salida,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ;  $z_1(t), \dots, z_p(t) \in \mathbb{R}$  son variables conocidas que pueden estar en función del estado, perturbaciones externas, y/o del tiempo. Cada variable  $z_1(t), \dots, z_p(t)$  es una cantidad medible, son llamadas variables de programación debido a que estas determinan el grado de activación de cada regla.

Dado un par  $(x(t), u(t))$ , el modelo T-S correspondiente al sistema no lineal (2.3)

se infiere como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r m_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \\ y(t) = \sum_{i=1}^r m_i(z(t)) C_i x(t), \end{cases} \quad (2.4)$$

donde  $z(t) = [z_1(t), \dots, z_p(t)]^T$ ,  $m_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$  y  $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t))$ . El término  $M_{ij}(z_j(t))$  es el grado de pertenencia de  $z_j(t)$  en el conjunto difuso  $M_{ij}$ . El valor de una regla se determina en base a las premisas conocidas utilizando el operador producto algebraico

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t)),$$

con  $w_i(z(t))$  normalizada

$$m_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))},$$

asumiendo que  $\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0$ , es decir, que para cualquier combinación de  $z(t)$ , al menos una regla tiene un valor mayor a cero. Dado que  $\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0$ ,  $w_i(z(t)) \geq 0$ , se tiene  $\sum_{i=1}^r m_i(z(t)) = 1$ ,  $m_i(z(t)) \geq 0$ . Debido a la normalización  $m_i(z(t))$ ,  $i = 1, \dots, r$ , es decir,  $m_i(z(t)) \geq 0$  y  $\sum_{i=1}^r m_i(z(t)) = 1$ , los sistemas T-S son una suma convexa de modelos locales lineales [27].

## Construcción de modelos T-S

Los métodos para generar el modelo T-S de un sistema no lineal son

### a) Sector no lineal.

El enfoque sector no lineal fue descrito por Ohtake en 2001 [55]. Esta metodología genera una representación exacta del modelo no lineal, es decir, es una reescritura del propio sistema. Estos modelos poseen la ventaja de ser susceptibles a un análisis de estabilidad de manera sistemática por medio del segundo método de Lyapunov [15].

### b) Aproximación local.

Una metodología para aproximar sistemas no lineales por modelos T-S es mediante la linealización local. Esta linealización es una expansión en series de Taylor en diferentes puntos de operación del sistema bajo estudio [15].

### 2.2.1. Controlador PDC

Una estrategia de control clásica para los sistemas T-S es conocida como compensación paralela distribuida [50]. En la Figura 2.1 se esquematiza la metodología para el diseño de controladores PDC.

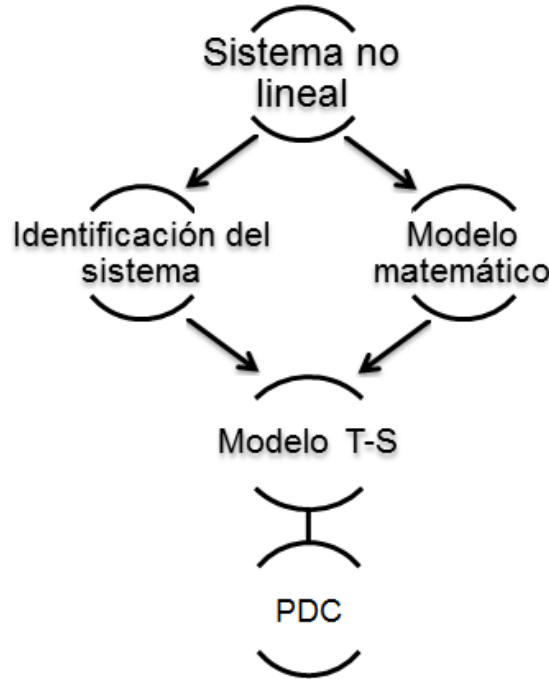


Figura 2.1: Diseño del controlador PDC.

Este controlador posee un conjunto de reglas expresadas de la forma

**Regla del controlador  $i$ :** *si*  $z_1(t)$  está en  $M_{i1}$  y ... y  $z_p(t)$  está en  $M_{ip}$ ,

**entonces**  $u(t) = -F_i x(t)$ , donde  $F^T = [f_{i1}, \dots, f_{in}]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Las reglas anteriores infieren un controlador no lineal de la forma

$$u(t) = \sum_{i=1}^r m_i(z(t)) F_i x(t). \quad (2.5)$$

Las ganancias del controlador PDC pueden obtenerse mediante la solución de una desigualdad matricial lineal (LMI), tal como se describe en el teorema siguiente.

**Teorema 1** [50] *El equilibrio de un sistema T-S (2.4) en lazo cerrado con la ley de control (2.5) es globalmente asintóticamente estable, si las siguientes desigualdades se satisfacen de forma simultánea*

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P + P G_{ii} &< 0, \\ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) &\leq 0, \\ i < j \text{ s.t. } m_i \cap m_j &\neq \emptyset, \end{aligned}$$

donde  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ .

Cabe destacar que los modelos T-S describen a los sistemas no lineales mediante una suma convexa de subsistemas lineales. Esta característica permite aplicar estrategias de control semejantes a las lineales sobre sistemas no lineales, con la ventaja de que la sintonización es funcional en las diversas zonas de operación.

### 2.3. Sistemas con retardos

Un sistema dinámico puede ser modelado mediante ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \\ x_0 &= x(t_0), \end{aligned}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado del sistema. Mediante el modelo matemático, la evolución de las variables de estado puede determinarse a partir de la condición inicial  $x(t_0)$ . Sin embargo, existen sistemas que no pueden ser modelados a partir de ecuaciones diferenciales ordinarias. Concretamente, existen ciertos sistemas en los que la evolución futura de las variables de estado no depende únicamente del valor actual del estado, sino de los valores pasados dentro de una ventana temporal. Este tipo de sistemas son conocidos como sistemas con retardos temporales.

El comportamiento de los sistemas con retardos se pueden describir a partir de ecuaciones diferenciales funcionales (EDFs) o ecuaciones diferenciales en diferencias. Las ecuaciones diferenciales funcionales se diferencian de las ecuaciones diferenciales ordinarias en que al menos uno de los argumentos de la función no depende directamente del tiempo  $t$ , sino a través de una función  $g(t)$  de modo que

$$\dot{x}(t) = f(t, x(g(t))).$$

Para cierto sistema con retardo  $\tau$  la dinámica es dada por

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t - \tau)),$$

donde la condición inicial del estado  $x(t)$  en cualquier instante de tiempo arbitrario se define a partir de la evolución histórica del estado en una ventana temporal [20].

A continuación se formaliza lo dicho anteriormente, para ello se considera un sistema lineal invariante en el tiempo con retardo de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau), \\ x(\theta) = \psi(\theta); \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (2.6)$$

donde  $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices constantes,  $\tau \in \mathbb{R}^+$  es el retardo y  $\psi \in \mathbf{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  es la condición inicial del sistema (2.6). Aquí  $\mathbf{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  es el espacio de Banach de las funciones reales y continuas definidas en el intervalo  $[-\tau, 0]$  con norma

$$\|\psi\|_\tau := \max_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\psi(\theta)\|,$$

donde  $\|\cdot\|$  denota la norma en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Además, se considera que para cada condición inicial  $\psi \in \mathbf{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  y  $t \geq 0$ , existe una única solución o trayectoria  $x(t; \psi)$  del sistema (2.6) [20]. Como extensión de la condición inicial, el segmento  $x_t(\psi) := \{x(t + \theta; \psi) \mid \theta \in [-\tau, 0]\}$ ,  $t \geq 0$ , es llamado estado del sistema (2.6).

La sintonización de los controladores desarrollados en el presente trabajo de investigación se basan en la  $\sigma$ -estabilidad de los sistemas, es decir, en el estudio de la estabilidad con respecto a un cambio de variable  $s = s - \sigma$ .

**Definición 2** ( $\sigma$ -estabilidad) [19] *Sea  $\sigma$  una constante positiva dada. El sistema (2.6) es  $\sigma$ -estable si todas las raíces de su cuasipolinomio característico tienen parte real menor o igual a  $-\sigma$ , es decir*

$$a_0 \leq -\sigma, \sigma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

donde  $a_0 = \max_{j=1, \dots, \infty} \{Re\{s_j\} : p(s_j) = 0; s_j \in \mathbb{C}\}$ ,  $p(s_j) = \det(sI_n - A_0 - A_1 e^{-s\tau})$  es el cuasipolinomio característico de (2.6),  $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz identidad.

En la Figura 2.2 se ilustra la ubicación de las raíces de un sistema del tipo retardado, en este caso el sistema es  $\sigma$ -estable ya que todas las raíces poseen parte real menor o igual a  $-\sigma$ . Tal como se observa, dada una línea paralela al eje imaginario del plano complejo, un sistema del tipo retardado posee un número finito de raíces ubicadas a la derecha de esta línea, como una consecuencia, estos sistemas son de orden exponencial y su decaimiento es determinado por la parte real de sus raíces dominantes.



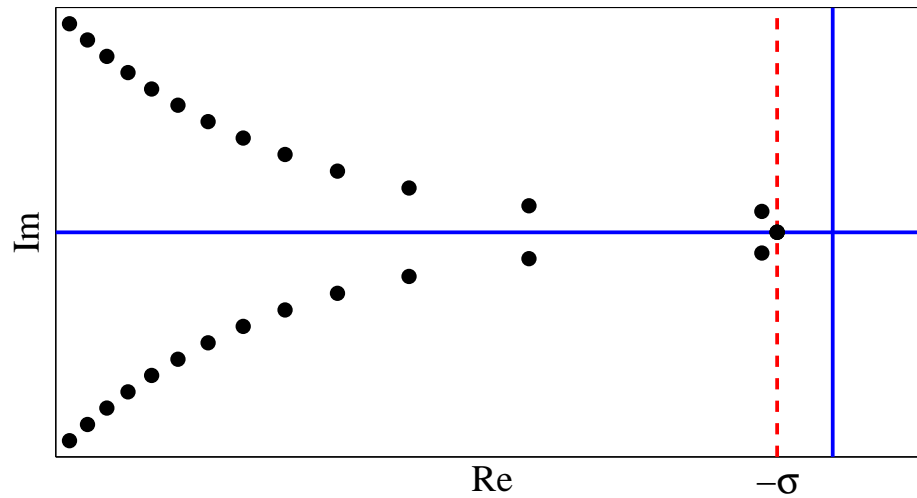


Figura 2.2: Ubicación de las raíces de un sistema del tipo retardado.

En lo subsecuente se describe la metodología aplicada para determinar las fronteras  $\sigma$ -estables de los sistemas del tipo retardado.

### 2.3.1. $\mathcal{D}$ -Particiones

En el desarrollo de la investigación se trabaja en el dominio de la frecuencia empleando el método  $\mathcal{D}$ -Particiones para analizar la  $\sigma$ -estabilidad de los sistemas con retardos. La metodología fue propuesta por el científico Neimark en 1949 [34], consiste en dividir el espacio paramétrico de un sistema en regiones estables e inestables. A continuación se describe la metodología para obtener tales regiones:

- a) Obtener la ecuación característica del sistema bajo estudio, la estabilidad se determina por la ubicación de las raíces dominantes de su cuasipolinomio característico en el plano complejo  $\mathbb{C}$ .
- b) Analizar la ecuación característica cuando las raíces son puramente imaginarias ( $s = -i\omega$ ) y cuando tienen parte real y parte imaginaria igual a cero ( $s = 0$ ).
- c) Encontrar las ecuaciones paramétricas que describan las particiones en el plano paramétrico.
- d) Graficar las regiones de estabilidad e inestabilidad con las ecuaciones paramétricas obtenidas en el paso anterior.

### 2.3.2. Controlador PIR

En [39] se presenta una estrategia de control libre de términos derivativos llamado control proporcional integral retardado, así como su aplicación para sistemas lineales invariantes en el tiempo de segundo orden. Por medio del análisis en el dominio de la frecuencia, se construyen las regiones de estabilidad del sistema en lazo cerrado. La exploración de estas regiones permite obtener una estrategia de sintonización asignando tres raíces reales dominantes que corresponden al máximo decaimiento exponencial alcanzable.

La sintonización de la ley de control PIR se realiza para sistemas lineales de segundo orden de la forma

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = cu(t), \quad (2.7)$$

donde  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ . Definiendo el error  $e(t) := r - y(t)$ , la ecuación (2.7) resulta

$$\ddot{e}(t) + a\dot{e}(t) + be(t) = c[d - u(t)], \quad (2.8)$$

aquí  $r$  es una referencia y  $d = br/c$  es considerado como una perturbación.

La ley de control PIR se define como

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\phi) d\phi - k_r e(t - \tau), \quad (2.9)$$

en donde se puede observar que evita el empleo del término derivativo incluyendo una acción retardada, de esta manera se remueve la amplificación de ruido presente en las mediciones, conservando la propiedad de eliminar el error en estado estacionario del estándar PID. Aquí  $k_p, k_i, k_r$  es la ganancia proporcional, integral y retardada respectivamente.

La ecuación característica del sistema (2.8) en lazo cerrado con la ley de control (2.9) está descrita por el cuasipolinomio

$$p(s) = s^3 + as^2 + (b + ck_p)s + ck_i - ck_r se^{-s\tau} = 0. \quad (2.10)$$

Se realiza el cambio de variable  $s \rightarrow (s - \sigma)$  para analizar la  $\sigma$ -estabilidad de  $p(s)$  [53]. Así, el cuasipolinomio (2.10) resulta

$$\begin{aligned} p_\sigma(s) = & s^3 - (3\sigma - a)s^2 + (3\sigma^2 - 2a\sigma + b + ck_p)s - \sigma^3 \\ & + a\sigma^2 - (b + ck_p)\sigma + ck_i - ck_r e^{-\tau(s-\sigma)}(s - \sigma) = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde  $\sigma$  es el decaimiento exponencial alcanzable. Observe que el análisis de la  $\sigma$ -estabilidad del sistema (2.10) es análogo a la estabilidad marginal del cuasipolinomio transformado (2.11) para cualquier  $\sigma$  dado.

## Regiones de estabilidad

Se presenta la construcción de las regiones de estabilidad en el plano paramétrico  $(\tau, k_r)$  usando el método  $\mathcal{D}$ -Particiones. Basado en la propiedad de continuidad de espectro del sistema en lazo cerrado, las fronteras donde ocurren cambios de estabilidad son detectados analizando el comportamiento de las raíces a lo largo del eje imaginario del plano complejo, es decir, cuando  $s = 0$  y  $s = \pm i\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^+$ ,  $i^2 = -1$  [34].

Las regiones  $\sigma$ -estables del quasipolinomio (2.10) son caracterizadas por las siguientes ecuaciones:

cuando  $s = 0$

$$k_r(\tau) = \frac{\sigma^3 - a\sigma^2 + (b + ck_p)\sigma - ck_i}{ce^{\tau\sigma}\sigma},$$

cuando  $s = i\omega$

$$\begin{aligned} \tau(\omega) &= \frac{1}{\omega} \operatorname{arccot}[f(\omega, \sigma)] + \frac{1}{\omega} \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega}\right) + \frac{n\pi}{\omega}, \\ k_r(\omega) &= \frac{\sigma^3 - a\sigma^2 + (b + ck_p)\sigma - (3\sigma - a)\omega^2 - ck_i}{ce^{\sigma\tau(\omega)}[\sigma \cos(\tau(\omega)\omega) - \omega \sin(\tau(\omega)\omega)]}, \end{aligned}$$

donde  $n = 0, 1, 2, \dots$  y

$$f(\omega, \sigma) = \frac{-\omega^3 + (3\sigma^2 - 2a\sigma + b + ck_p)\omega}{(3\sigma - a)\omega^2 - \sigma^3 + a\sigma^2 - (b + ck_p)\sigma + ck_i}.$$

Una característica de las regiones  $\sigma$ -estables es que poseen forma concéntrica, a medida que  $\sigma$  incrementa las regiones tienden a ser más pequeñas hasta colapsar en un punto, el cual representa la máxima cota de decaimiento exponencial alcanzable. A continuación se presentan las ecuaciones para determinar el punto de colapso de las regiones de estabilidad.

## Punto de colapso

**Teorema 2** [39] *Sea  $\bar{\sigma}$  el valor de  $\sigma$  donde ocurre el colapso de las regiones de estabilidad. Se asume que los parámetros  $a, b$  y  $c$  de (2.7) son conocidos, entonces  $\bar{\sigma}$  está contenida en el discriminante*

$$\Delta(\sigma) = 2\sigma^6 - 2a\sigma^5 + [a^2 - 2(b + ck_p)]\sigma^4 + 8ck_i\sigma^3 - 4ack_i\sigma^2 + 2ck_i(b + ck_p)\sigma - c^2k_i^2,$$

con las ganancias  $k_p$  y  $k_i$  dadas por

$$k_p = \frac{(\sigma - a)^2 + 2(\sigma^2 - b)}{2c} + \lambda,$$

$$k_i = \frac{\sigma}{c} \left[ 2\sigma(2\sigma - a) + (b + ck_p) - \sqrt{g(\sigma, k_p)} \right],$$

respectivamente, donde  $\lambda > 0$  es un parámetro libre y

$$g(\sigma, k_p) = [\sigma(3\sigma - 2a) + b + ck_p]^2 + \sigma^2(3\sigma - a)^2.$$

**Lema 1** [39] *Las regiones de estabilidad colapsan en*

$$\bar{\sigma} := \min_{n=1,2,\dots} \{r_n \in \mathbb{R}^+ : \Delta(r_n) = 0, r_n > a/2\}. \quad (2.12)$$

### Máximo decaimiento exponencial alcanzable

**Teorema 3** [39] *Dados los parámetros  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  y las ganancias  $k_p, k_i \in \mathbb{R}^+$  fijas tal que*

$$k_p + \frac{b}{c} - \frac{k_i}{a} > 0,$$

entonces el máximo decaimiento exponencial para el sistema en lazo cerrado (2.10) es

$$\sigma_m \equiv \bar{\sigma}$$

el cual es alcanzado en el espacio paramétrico  $(\tau, k_r)$  con

$$\tau^* = \frac{2\sigma_m^3 - a\sigma_m^2 + ck_i}{\sigma_m^4 - a\sigma_m^3 + (b + ck_p)\sigma_m^2 - ck_i\sigma_m}, \quad (2.13)$$

$$k_r^* = \frac{2(\sigma_m^3 - ck_i)}{c\tau^{*2}\sigma_m^3 e^{\tau^*\sigma_m}}. \quad (2.14)$$

Más aún, en  $\sigma_m$  las regiones de estabilidad colapsan en un punto caracterizado por tres raíces reales dominantes en  $-\sigma_m$  en el eje real del plano complejo.

En lo subsecuente se presenta una estrategia de sintonización para el controlador PIR.

### Sintonización del control PIR

Dado un decaimiento exponencial deseado  $a/2 < \sigma_d < 17a$ , la asignación de tres raíces reales dominantes en  $-\sigma_d$  en el plano complejo se logra mediante la siguiente

sintonización del controlador PIR

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{1}{2c} [(\sigma_d - a)^2 + 2(\sigma_d^2 - b) + \xi(\varphi - \xi)], \\ k_i &= \frac{\sigma_d}{2c} [2\sigma_d^2 - 2\xi(\sigma_d + \xi) + \xi(\varphi - \xi)], \\ \tau &= \frac{1}{3\xi\sigma_d}(\varphi - 3\xi), \\ k_r(\omega) &= \frac{\xi}{c\tau^2\sigma_d^2 e^{\tau\sigma_d}} [2(\sigma_d + \xi) - (\varphi - \xi)], \end{aligned}$$

donde  $\xi = 3\sigma_d - a$  y  $\varphi = \sqrt{9\xi^2 + 12\xi\sigma_d}$ .

La teoría descrita anteriormente es extendida hacia los sistemas no lineales de segundo orden aplicando la metodología propuesta por T-S. Como resultado se obtiene una ley de control formada por una suma convexa de controladores PIR.

## 2.4. Banco de pruebas experimentales

A continuación se describen las plataformas experimentales empleadas para la implementación de las leyes de control propuestas en los capítulos 3 y 4.

### 2.4.1. Brazo de Robot de Unión Flexible

El diseño y la sintonización del control PR + realimentación linealizante es aplicado al brazo de robot de unión flexible, ver Figura 2.3.

La plataforma experimental incorpora un motor acoplado a una base rotatoria mediante un sistema de poleas. La unión flexible consiste en un brazo principal unido a la base rotatoria a través de resortes.

El principal problema que presenta el prototipo son las oscilaciones inducidas en el efector final debido a la unión flexible entre la base y el brazo de robot.

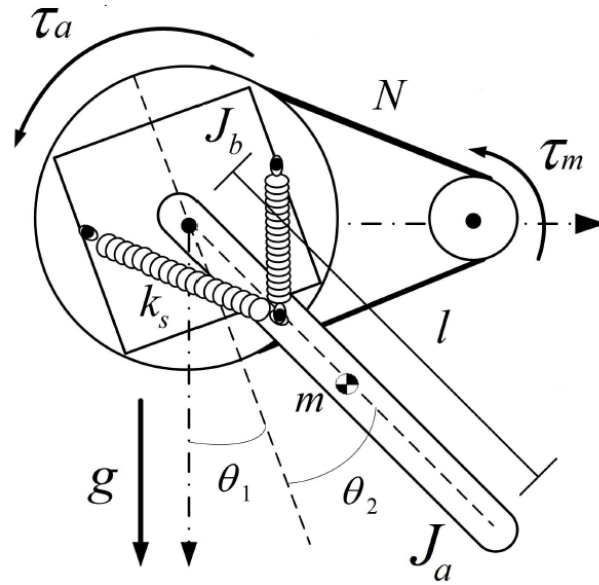


Figura 2.3: Brazo de robot de unión flexible.

Las variables del sistema son

- $\theta_1$  Posición angular de la base rotatoria,
- $\theta_2$  Posición angular del brazo,
- $J_a$  Momento de inercia del brazo,
- $J_b$  Momento de inercia de la base rotatoria,
- $m$  Masa del brazo,
- $l$  Longitud del brazo,
- $k_s$  Rigidez del resorte,
- $\tau_a$  Par aplicado,
- $\tau_m$  Par del motor.

La posición angular en el extremo del robot se define por la relación  $\vartheta = \theta_1 + \theta_2$ . Para determinar el modelo dinámico de la plataforma se procede mediante el formalismo Euler-Lagrange. El Lagrangiano del sistema es

$$\mathcal{L} = K - P,$$

donde  $K$  representa la energía cinética y  $P$  la energía potencial del sistema. La energía cinética es dada por

$$K = K_b + K_a,$$

aquí  $K_b$  representa la energía cinética de la base rotatoria y  $K_a$  representa la energía cinética del brazo. La energía potencial del sistema satisface la relación

$$P = P_s + P_a,$$

donde  $P_s$  es la energía potencial asociada al resorte y  $P_a$  es la energía potencial asociada con el brazo. Así, el Lagrangiano del sistema es

$$\mathcal{L} = \frac{J_b}{2}\dot{\theta}_1^2 - \frac{k_s}{2}\theta_2^2 + \frac{J_a}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{mgl}{2}\cos(\theta_1 + \theta_2).$$

Aplicando el formalismo Euler-Lagrange para las coordenadas generalizadas  $\theta_1$  y  $\theta_2$  se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned}\tau_a &= J_b\ddot{\theta}_1 + J_a\ddot{\theta}_2 + \frac{mgl}{2}\sin(\theta_1 + \theta_2), \\ 0 &= J_a\ddot{\theta}_1 + K_s\theta_2 + \frac{mgl}{2}\sin(\theta_1 + \theta_2).\end{aligned}$$

Por otro lado, el par del motor  $\tau_m$  y el par aplicado al sistema están relacionados como:  $\tau_a = N\tau_m$ ,  $N$  representa la ventaja mecánica del sistema de poleas. El voltaje aplicado al motor y el par generado es descrito por

$$\tau_m = \frac{k_\tau}{R_m}V(t) - \frac{k_\tau^2 N}{R_m}\dot{\theta}_1,$$

donde  $R_m$  denota la resistencia de armadura,  $k_\tau$  representa la constante de par del motor y la entrada de control es denotado por  $V(t)$ . Con la última ecuación, la dinámica del robot de unión flexible es

$$\begin{aligned}\frac{Nk_\tau}{R_m}V(t) &= (J_b + J_a)\ddot{\theta}_1 + J_a\ddot{\theta}_2 + \frac{k_\tau^2 N^2}{R_m}\dot{\theta}_1 \\ &\quad + \frac{mgl}{2}\sin(\theta_1 + \theta_2),\end{aligned}\tag{2.15}$$

$$0 = J_a(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + K_s\theta_2 + \frac{mgl}{2}\sin(\theta_1 + \theta_2).\tag{2.16}$$

Al definir  $\theta = [\theta_1 \ \theta_2]^T$ , el sistema (2.15)-(2.16) puede ser expresado como

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\dot{\theta}, \theta)\dot{\theta} + g(\theta) + f(\dot{\theta}) = \tau_a,$$

donde

$$\begin{aligned}M(\theta) &= \begin{bmatrix} J_a + J_b & J_a \\ J_a & J_a \end{bmatrix}, & C(\theta) &= [0]_{2 \times 2}, \\ g(\theta) &= \begin{bmatrix} \frac{mgl}{2}\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ k_s\theta_2 + \frac{mgl}{2}\sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}, \\ f(\dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} \frac{k_\tau^2 N^2}{R_m} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \tau_a &= \begin{bmatrix} \frac{k_\tau N}{R_m}V(t) \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores,  $\ddot{\theta}$  resulta

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= \frac{k_s}{J_b}\theta_2 - \frac{k_\tau^2 N^2}{J_b R_m}\dot{\theta}_1 + \frac{k_\tau N}{J_b R_m}V(t), \\ \ddot{\theta}_2 &= -\frac{k_s(J_a + J_b)}{J_a J_b}\theta_2 - \frac{mgl}{2J_a}\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &\quad + \frac{k_\tau^2 N^2}{J_b R_m}\dot{\theta}_1 - \frac{k_\tau N}{J_b R_m}V(t).\end{aligned}$$

Los parámetros del brazo de robot usados en la implementación del control son:  $l = 0.5[\text{m}]$ ,  $m = 0.1633[\text{Kg}]$ ,  $J_a = 0.0136[\text{Kg}\cdot\text{m}^2]$ ,  $J_b = 0.002405[\text{Kg}\cdot\text{m}^2]$ ,  $k_s = 4[\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}]$  y  $N = 16$ , mientras que los parámetros del motor:  $k_\tau = 0.0724[\text{N}\cdot\text{m}/\text{A}]$  y  $R_m = 2.983 [\Omega]$ .

### 2.4.2. Carro-Péndulo

La ley de control formada por la suma convexa de controladores PIR puede ser aplicada a una gran variedad de sistemas dinámicos, sin embargo para ejemplificar los resultados teóricos se realiza sobre la plataforma Carro-Péndulo. Cabe mencionar que para este caso de estudio sólo es considerada la dinámica del péndulo. En la Figura 2.4 se ilustra el diagrama de cuerpo libre del sistema bajo estudio.

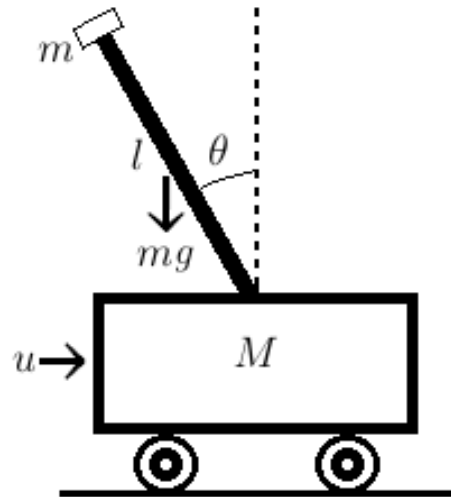


Figura 2.4: Carro-Péndulo.



El modelo matemático empleado es el sugerido en [27], descrito por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g \sin(x_1(t)) - amlx_2^2(t) \sin(2x_1(t))/2 - a \cos(x_1(t))u(t)}{4l/3 - aml \cos^2(x_1(t))}, \end{aligned}$$

donde

$x_1(t)$  = posición angular del péndulo respecto al eje vertical ( $\theta$ ),

$x_2(t)$  = velocidad angular del péndulo ( $\dot{\theta}$ ),

$M$  = masa del carro,

$m$  = masa del péndulo,

$l$  = longitud del péndulo,

$g$  = constante de gravedad,

$u$  = entrada de control,

$a = 1/(m + M)$ .

Aquí  $g = 9.81m/s^2$ ,  $m = 0.23kg$ ,  $M = 0.52kg$  y  $l = 0.32m$ .

## 2.5. Conclusiones del Capítulo

En el presente Capítulo se ha descrito la metodología de  $\mathcal{D}$ -Particiones empleado para analizar la  $\sigma$ -estabilidad de los controladores del tipo retardado. Además, se ha explicado la estrategia de control por realimentación linealizante, misma que permite la aplicación del controlador PR hacia los sistemas no lineales. También se ha descrito la metodología propuesta por T-S, así como la ley de control PIR. Mediante la aplicación de los temas previos se propone el diseño de una ley de control basada en una suma convexa de controladores PIR. Por otra parte, se presentan las plataformas experimentales sobre las cuales se implementan las leyes de control desarrolladas en los capítulos 3 y 4.



# Capítulo 3

## Ley de control PR para sistemas lineales de orden $n$

En el presente Capítulo se detallan los primeros resultados obtenidos durante el desarrollo de la investigación. En la sección 3.1 se describe la sintonización del controlador PR para  $\sigma$ -estabilizar sistemas lineales de orden  $n$ . Además, se emplea la estrategia de control conocida como realimentación linealizante con el fin de extender la aplicación de los resultados hacia sistemas no lineales. En este caso, la implementación de la ley de control se realiza en un brazo de robot de unión flexible. Por otra parte, los resultados vía simulación y experimentación son presentados en las secciones 3.3 y 3.4 respectivamente.

### 3.1. Sintonización de la Ley de control PR para sistemas lineales de orden $n$

A través de un análisis en el dominio de la frecuencia se obtiene un conjunto de ecuaciones paramétricas para generar las fronteras  $\sigma$ -estables del sistema en lazo cerrado. Más aún, mediante la exploración de estas regiones se obtiene una estrategia de sintonización analítica para el controlador PR garantizando el máximo decaimiento exponencial alcanzable para una clase de sistemas lineales.

Se considera el cuasipolinomio general de la forma

$$Q(s, k_p, k_r, c_1, \dots, c_n) = p(s, k_p, c_1, \dots, c_n) + k_r q(s) e^{-s\tau}, \quad (3.1)$$

donde  $p(\cdot)$  y  $q(\cdot)$  son polinomios con coeficientes reales,  $k_p, k_r, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , son las ganancias del controlador,  $\tau > 0$  es el retardo y  $s \in \mathbb{C}$ .

El objetivo de esta sección es el estudio de la  $\sigma$ -estabilidad del sistema (3.1). Para ello, se considera  $\sigma > 0$  y se realiza el cambio de variable  $s \rightarrow (s - \sigma)$ , de tal manera el cuasipolinomio (3.1) toma la forma

$$\begin{aligned} Q_\sigma(s, k_p, k_r, c_1, \dots, c_n) &:= Q(s - \sigma, k_p, k_r, c_1, \dots, c_n) \\ &= p(s, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) + k_r e^{\sigma\tau} q(s, \sigma) e^{-s\tau}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Observe que el análisis de la  $\sigma$ -estabilidad de (3.1) es análogo al análisis de la estabilidad marginal del cuasipolinomio transformado (3.2) para cualquier  $\sigma$  dado.

### 3.1.1. Fronteras de estabilidad

A continuación se caracterizan las regiones  $\sigma$ -estables aplicando el método  $\mathcal{D}$ -Particiones, esta metodología determina el cruce de raíces cuando  $s = 0$  y  $s = \pm i\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^+$ ,  $i^2 = -1$ . Al evaluar  $s = 0$  en la ecuación (3.2) resulta

$$p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) + k_r e^{\sigma\tau} q(0, \sigma) = 0,$$

con  $p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) \neq 0$  y  $q(0, \sigma) \neq 0$ , o equivalentemente

$$k_r = -\frac{p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(0, \sigma) e^{\sigma\tau}}.$$

Evaluando  $s = i\omega$  en (3.2) se tiene

$$p(i\omega, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) + k_r e^{\sigma\tau} q(i\omega, \sigma) e^{-i\omega\tau} = 0,$$

o lo que es igual

$$-\frac{1}{k_r e^{\sigma\tau}} \left( \frac{p(i\omega, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} \right) = e^{-i\omega\tau},$$

y con ello

$$\cos(\omega\tau) = -\frac{1}{k_r e^{\sigma\tau}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{p(i\omega, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} \right\}, \quad (3.3)$$

$$-\sin(\omega\tau) = -\frac{1}{k_r e^{\sigma\tau}} \operatorname{Im} \left\{ \frac{p(i\omega, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} \right\}. \quad (3.4)$$

Mediante operaciones algebraicas entre las expresiones (3.3)-(3.4) se obtiene

$$\tau = -\frac{1}{\omega} \cot^{-1} \left( \frac{\operatorname{Re} \left\{ \frac{p(i\omega, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} \right\}}{\operatorname{Im} \left\{ \frac{p(i\omega, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} \right\}} \right) + \frac{\pi n}{\omega},$$

para  $\omega \neq 0$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , mientras que de la ecuación (3.4) resulta

$$k_r = \frac{1}{\sin(\omega\tau) e^{\sigma\tau}} \operatorname{Im} \left\{ \frac{p(i\omega, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} \right\}.$$

Los resultados anteriores se resumen a continuación.

**Proposición 1** Considere un cuasipolinomio de la forma (3.1), entonces las regiones de estabilidad están delimitadas por las ecuaciones siguientes:

i) Cuando  $s = 0$

$$k_r = -\frac{p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(0, \sigma)e^{\sigma\tau}}, \quad \tau \in \mathbb{R}^+.$$

ii) Cuando  $s = i\omega$

$$\tau = -\frac{1}{\omega} \cot^{-1} \left( \frac{\operatorname{Re} \left\{ \frac{p(i\omega, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} \right\}}{\operatorname{Im} \left\{ \frac{p(i\omega, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} \right\}} \right) + \frac{\pi n}{\omega},$$

para  $\omega \neq 0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$

$$k_r = \frac{1}{\sin(\omega\tau)e^{\sigma\tau}} \operatorname{Im} \left\{ \frac{p(i\omega, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} \right\}.$$

Las expresiones de la Proposición 1 definen las fronteras  $\sigma$ -estables en el espacio paramétrico  $(\tau, k_r)$ , ver Figura 3.1. El contorno exterior denota la frontera de estabilidad, es decir, provee el par  $(\tau, k_r)$  con lo cual las raíces del sistema (3.1) están sobre el eje imaginario ( $\sigma = 0$ ). Mientras que para cada uno de los contornos interiores, el par  $(\tau, k_r)$ , define las regiones donde el sistema es exponencialmente estable con una específica tasa de decaimiento  $\sigma > 0$ . El máximo decaimiento exponencial alcanzable denotado por  $\sigma^*$ , ocurre cuando todas las regiones  $\sigma$ -estables colapsan en un punto  $(\tau^*, k_r^*)$  del espacio paramétrico.

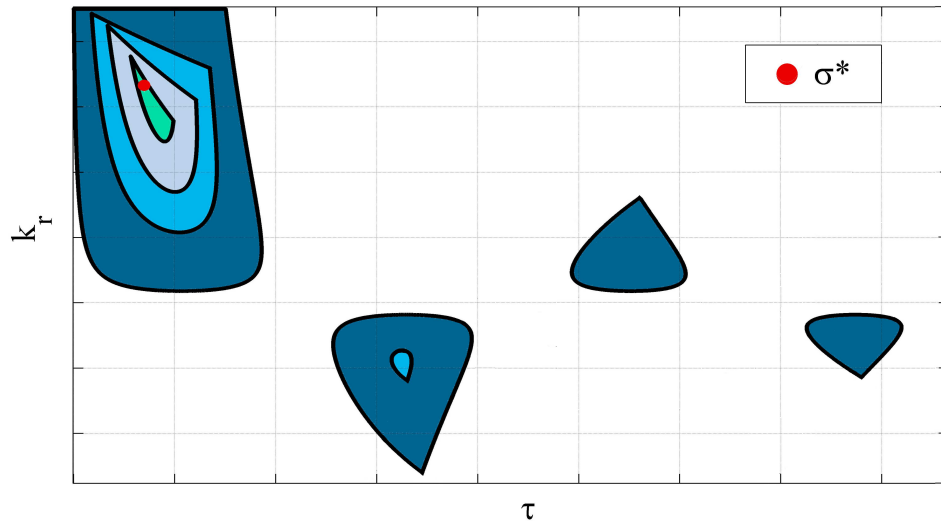


Figura 3.1: Regiones  $\sigma$ -estables en el espacio paramétrico  $(\tau, k_r)$ .

En la siguiente subsección, se obtienen las expresiones analíticas para determinar el máximo decaimiento exponencial  $\sigma^*$  y los parámetros asociados  $(\tau^*, k_r^*)$ .

### 3.1.2. Máximo decaimiento exponencial alcanzable

**Proposición 2** *Considere un cuasipolinomio de la forma (3.1), entonces se tiene una raíz de al menos multiplicidad tres en  $s = -\sigma^*$  si  $\tau = \tau(\sigma^*)$  y  $k_r = k_r(\sigma^*, \tau)$  satisfacen las expresiones siguientes*

$$\tau = - \frac{1}{p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)} \left[ \frac{\partial}{\partial s} p(s, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) - \frac{p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(0, \sigma)} \frac{\partial q(s, \sigma)}{\partial s} \right] \Bigg|_{s=0}, \quad (3.5)$$

$$k_r = - \frac{\frac{\partial}{\partial s} p(s, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) \Big|_{s=0}}{e^{\sigma\tau} \left[ \frac{\partial q(s, \sigma)}{\partial s} \Big|_{s=0} - \tau q(0, \sigma) \right]}, \quad (3.6)$$

y  $\sigma^*$  es la mínima solución real positiva del polinomio

$$\begin{aligned} f(\sigma) = & \frac{1}{p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)} \left[ \frac{\partial}{\partial s} p(s, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) - \frac{p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(0, \sigma)} \frac{\partial q(s, \sigma)}{\partial s} \right] \Bigg|_{s=0}^2 \\ & + \frac{2}{q(0, \sigma)} \frac{\partial q(s, \sigma)}{\partial s} \left[ \frac{\partial}{\partial s} p(s, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) - \frac{p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(0, \sigma)} \frac{\partial q(s, \sigma)}{\partial s} \right] \Bigg|_{s=0} \\ & + \left[ \frac{p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(0, \sigma)} \frac{\partial^2 q(s, \sigma)}{\partial s^2} \right] \Bigg|_{s=0} - \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} p(s, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) \right] \Bigg|_{s=0}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

**Demostración 1** *Si el cuasipolinomio (3.2) tiene tres raíces dominantes en  $s = 0$ , implica que (3.1) tiene tres raíces dominantes en  $s = -\sigma$ . De tal manera, las condiciones*

$Q_\sigma(\cdot) \Big|_{s=0} = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial s} Q_\sigma(\cdot) \Big|_{s=0} = 0$  y  $\frac{\partial^2}{\partial s^2} Q_\sigma(\cdot) \Big|_{s=0} = 0$  *deben cumplirse. Aquí*

$$0 = Q_\sigma(\cdot) \Big|_{s=0} = p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) + k_r e^{\sigma\tau} q(0, \sigma), \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial s} Q_\sigma(\cdot) \Big|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial s} p(s, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) \Big|_{s=0} + k_r e^{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial s} [q(s, \sigma) e^{-s\tau}] \Big|_{s=0}, \\ &= \frac{\partial}{\partial s} p(s, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) \Big|_{s=0} + k_r e^{\sigma\tau} \left[ \frac{\partial q(s, \sigma)}{\partial s} - \tau q(s, \sigma) \right] e^{-s\tau} \Big|_{s=0}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} Q_\sigma(\cdot) \Big|_{s=0} &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} p(s, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) \Big|_{s=0} + k_r e^{\sigma\tau} \frac{\partial^2}{\partial s^2} [q(s, \sigma) e^{-s\tau}] \Big|_{s=0}, \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} p(s, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) \Big|_{s=0} + k_r e^{\sigma\tau} \left[ \frac{\partial^2 q(s, \sigma)}{\partial s^2} - 2\tau \frac{\partial q(s, \sigma)}{\partial s} + \tau^2 q(s, \sigma) \right] e^{-s\tau} \Big|_{s=0}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

De (3.8) y (3.9) resulta

$$\tau = - \frac{1}{p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)} \left[ \frac{\partial}{\partial s} p(s, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) - \frac{p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(0, \sigma)} \frac{\partial q(s, \sigma)}{\partial s} \right] \Big|_{s=0}, \quad (3.11)$$

y de las ecuaciones (3.8), (3.10) implica que

$$0 = \left[ \tau^2 p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) - 2\tau \frac{p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(0, \sigma)} \frac{\partial q(s, \sigma)}{\partial s} \right] \Big|_{s=0} + \left[ -\frac{\partial^2}{\partial s^2} p(s, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) + \frac{p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(0, \sigma)} \frac{\partial^2 q(s, \sigma)}{\partial s^2} \right] \Big|_{s=0}. \quad (3.12)$$

Al sustituir (3.11) en (3.12) se obtiene

$$f(\sigma) = \frac{1}{p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)} \left[ \frac{\partial}{\partial s} p(s, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) - \frac{p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(0, \sigma)} \frac{\partial q(s, \sigma)}{\partial s} \right] \Big|_{s=0}^2 + \frac{2}{q(0, \sigma)} \frac{\partial q(s, \sigma)}{\partial s} \left[ \frac{\partial}{\partial s} p(s, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) - \frac{p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(0, \sigma)} \frac{\partial q(s, \sigma)}{\partial s} \right] \Big|_{s=0} + \left[ \frac{p(0, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma)}{q(0, \sigma)} \frac{\partial q^2(s, \sigma)}{\partial s^2} \right] \Big|_{s=0} - \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} p(s, k_p, c_1, \dots, c_n, \sigma) \right] \Big|_{s=0},$$

finalmente la ecuación (3.6) resulta directamente de (3.9).

La proposición anterior define el punto  $(\tau^*, k_r^*)$  donde colapsan las regiones  $\sigma$ -estables. Además, estos parámetros asignan 3 raíces reales dominantes en  $s = -\sigma^*$  del plano complejo.

## 3.2. Diseño y sintonización de la ley de control PR + realimentación linealizante para el brazo de robot de unión flexible

Para ejemplificar los resultados teóricos de la sección anterior se considera la dinámica del brazo de robot de unión flexible tal como se describe en la subsección 2.4.1

$$\ddot{\theta}_1(t) = a_1 \theta_2(t) - a_2 \dot{\theta}_1(t) + bV(t), \quad (3.13)$$

$$\ddot{\theta}_2(t) = -a_3 \theta_2(t) - a_4 \sin(\theta_1(t) + \theta_2(t)) + a_2 \dot{\theta}_1(t) - bV(t), \quad (3.14)$$

donde  $a_1 = \frac{k_s}{J_b}$ ,  $a_2 = \frac{k_r^2 N^2}{J_b R_m}$ ,  $a_3 = \frac{k_s(J_a + J_b)}{J_a J_b}$ ,  $a_4 = \frac{mgl}{2J_a}$  y  $b = \frac{k_r N}{J_b R_m}$ .

Con el cambio de variable  $x := [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\theta_1 \ \dot{\theta}_1 \ \theta_2 \ \dot{\theta}_2]^T$ , el sistema (3.13)-(3.14) es reescrito en la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x) + g(x)V(t), \\ y(t) &= h(x),\end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -a_2x_2 + a_1x_3 \\ x_4 \\ a_2x_2 - a_3x_3 - a_4 \sin(x_1 + x_3) \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}.$$

En primer lugar, para el diseño de la ley de control PR, el sistema no lineal es transformado a un sistema lineal mediante la estrategia conocida como linealización por realimentación. Se define la salida del sistema como

$$h(x) = x_1 + x_3,$$

al calcular la derivada, se tiene que

$$\dot{h}(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \dot{x} = L_f h(x) + L_g h(x),$$

donde  $L_f h(x)$  y  $L_g h(x)$  denota la derivada de Lie de  $h(x)$  con respecto a  $f(x)$  [44], dado por  $L_f h(x) = x_2 + x_4$ ,  $L_g h(x) = 0$ . Así, las derivadas de orden superior son expresadas como

$$\begin{aligned}\ddot{h}(x) &= L_f^2 h(x), \\ h^{(3)}(x) &= L_f^3 h(x), \\ h^{(4)}(x) &= L_f^4 h(x) + L_g L_f^3 h(x)V(t),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}L_f^2 h(x) &= (a_2 - a_3)x_3 - a_4 \sin(x_1 + x_3), \\ L_f^3 h(x) &= -a_4(x_2 + x_4) \cos(x_1 + x_3) + (a_2 - a_3)x_4, \\ L_f^4 h(x) &= (a_2 - a_3)(a_1x_2 - a_3x_3) + a_4(a_3 - a_2)x_3 \cos(x_1 + x_3), \\ &\quad + a_4 \sin(x_1 + x_3) [(x_2 + x_4)^2 - (a_2 - a_3) + a_4 \cos(x_1 + x_3)], \\ L_g L_f^3 h(x) &= -(a_2 - a_3)b.\end{aligned}$$

Por otra parte, realizando el siguiente cambio de coordenadas  $z_1 = h(x)$ ,  $z_2 = \dot{h}(x)$ ,  $z_3 = \ddot{h}(x)$ ,  $z_4 = h^{(3)}(x)$ , se tiene

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= L_f h(x), \\ \dot{z}_2 &= L_f^2 h(x), \\ \dot{z}_3 &= L_f^3 h(x), \\ \dot{z}_4 &= L_f^4 h(x) + L_g L_f^3 h(x)V(t).\end{aligned}\tag{3.15}$$



La trayectoria deseada al igual que sus derivadas temporales se denotan como  $h^*(x) = z_1^*$ ,  $h^{(i)*}(x) = z_{(i+1)}^*$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Además, los errores son definidos como  $e_{z_i} = z_i - z_i^*$ . Así, el control linealizante queda definido por

$$V(t) = \frac{1}{L_g L_f^3 h(x)} [u(t) - L_f^4 h(x)], \quad (3.16)$$

de tal manera, el sistema (3.15) en lazo cerrado con la ley de control (3.16) resulta

$$\begin{aligned} \dot{e}_{z_1} &= e_{z_2} \\ \dot{e}_{z_2} &= e_{z_3} \\ \dot{e}_{z_3} &= e_{z_4} \\ \dot{e}_{z_4} &= u(t), \end{aligned} \quad (3.17)$$

con lo cual es posible aplicar la ley de control PR.

## Esquema de control PR

Se considera el sistema (3.17) y se propone la ley de control siguiente

$$u(t) = -k_p e_{z_1} + k_r e_{z_1, \tau} - \alpha e_{z_3} - \beta e_{z_4}, \quad (3.18)$$

donde

$$\begin{aligned} e_{z_1} &= h(x) - h^*(x) = [x_1 + x_3] - [x_1^* + x_3^*], \\ e_{z_1, \tau} &= h(x_\tau) - h^*(x_\tau) = [x_1(t - \tau) + x_3(t - \tau)] - [x_1^*(t - \tau) + x_3^*(t - \tau)], \\ e_{z_3} &= h^{(3)}(x) - h^{(3)*}(x), \\ e_{z_4} &= h^{(4)}(x) - h^{(4)*}(x). \end{aligned}$$

Así, el sistema (3.17) con el control (3.18) se reescribe como

$$\dot{e}_z = A_0 e_z + A_1 e_{z, \tau},$$

donde  $e_z = (e_{z_1}, e_{z_2}, e_{z_3}, e_{z_4})^T$ ,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_p & 0 & -\alpha & -\beta \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_r & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuya ecuación característica es

$$Q(s, k_p, k_r, \alpha, \beta) = p(s, k_p, \alpha, \beta) + k_r q(s) e^{-s\tau}, \quad (3.19)$$

donde  $p(s, k_p, \alpha, \beta) = s^4 + s^3\beta + s^2\alpha + k_p$  y  $q(s) = -1$ . Para estudiar la  $\sigma$ -estabilidad se realiza el cambio de variable  $s \rightarrow (s - \sigma)$  en la ecuación (3.19) y se tiene

$$\begin{aligned} Q_\sigma(s, k_p, k_r, \alpha, \beta) &:= Q(s - \sigma, k_p, k_r, \alpha, \beta), \\ &= p(s, k_p, \alpha, \beta, \sigma) + k_r e^{\sigma\tau} q(s, \sigma) e^{-s\tau}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde

$$\begin{aligned} p(s, k_p, \alpha, \beta, \sigma) &= (s - \sigma)^4 + (s - \sigma)^3 \beta + (s - \sigma)^2 \alpha + k_p, \\ &= s^4 + (-4\sigma + \beta) s^3 + (\alpha + 6\sigma^2 - 3\beta\sigma) s^2 \\ &\quad + (-2\alpha\sigma - 4\sigma^3 + 3\beta\sigma^2) s + \sigma^4 + \alpha\sigma^2 - \beta\sigma^3 + k_p, \\ q(s, \sigma) &= -1. \end{aligned}$$

## Regiones $\sigma$ -estables

Con base en la Proposición 1, las regiones  $\sigma$ -estables del cuasipolinomio (3.19) son caracterizadas por las ecuaciones paramétricas siguientes:

cuando  $s = 0$

$$k_r = \frac{\sigma^4 + \alpha\sigma^2 - \beta\sigma^3 + k_p}{e^{\sigma\tau}},$$

cuando  $s = i\omega$

$$\tau = -\frac{1}{\omega} \cot^{-1} \left( \frac{\operatorname{Re} \left\{ \frac{p(i\omega, k_p, \alpha, \beta, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} \right\}}{\operatorname{Im} \left\{ \frac{p(i\omega, k_p, \alpha, \beta, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} \right\}} \right) + \frac{\pi n}{\omega},$$

para  $\omega \neq 0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,

$$k_r = \frac{1}{\sin(\omega\tau) e^{\sigma\tau}} \operatorname{Im} \left\{ \frac{p(i\omega, k_p, \alpha, \beta, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} \right\},$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{p(i\omega, k_p, \alpha, \beta, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} &= -((i\omega - \sigma)^4 + (i\omega - \sigma)^3 \beta + (i\omega - \sigma)^2 \alpha + k_p), \\ &= -(\sigma^4 - \beta\sigma^3 + (\alpha - 6\omega^2) \sigma^2 + 3\beta\omega^2\sigma + \omega^4 - \alpha\omega^2 + k_p) \\ &\quad + \omega (4\sigma^3 - 3\beta\sigma^2 + (-4\omega^2 + 2\alpha) \sigma + \beta\omega^2) i, \end{aligned}$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{p(i\omega, k_p, \alpha, \beta, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} \right\} &= -(\sigma^4 - \beta\sigma^3 + (\alpha - 6\omega^2) \sigma^2 + 3\beta\omega^2\sigma + \omega^4 - \alpha\omega^2 + k_p), \\ \operatorname{Im} \left\{ \frac{p(i\omega, k_p, \alpha, \beta, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} \right\} &= \omega (4\sigma^3 - 3\beta\sigma^2 + (-4\omega^2 + 2\alpha) \sigma + \beta\omega^2) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\frac{\operatorname{Re} \left\{ \frac{p(i\omega, k_p, \alpha, \beta, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} \right\}}{\operatorname{Im} \left\{ \frac{p(i\omega, k_p, \alpha, \beta, \sigma)}{q(i\omega, \sigma)} \right\}} = - \frac{\sigma^4 - \beta \sigma^3 + (\alpha - 6\omega^2) \sigma^2 + 3\beta \omega^2 \sigma + \omega^4 - \alpha \omega^2 + k_p}{\omega (4\sigma^3 - 3\beta \sigma^2 + (-4\omega^2 + 2\alpha) \sigma + \beta \omega^2)}.$$

La Figura 3.2 ilustra las regiones  $\sigma$ -estables para el cuasipolinomio (3.19). El contorno exterior define estabilidad marginal del sistema en lazo cerrado, es decir, para cada par  $\tau, k_r$  ubicado sobre la frontera de la región, las raíces dominantes del sistema se localizan en el eje imaginario del plano complejo. Mientras que los contornos interiores definen una cota de decaimiento exponencial específica  $\sigma$ , a medida que las regiones decrecen, la cota exponencial incrementa. La máxima cota de decaimiento exponencial  $\sigma^*$  se alcanza en el punto  $\tau^*, k_r^*$  donde las regiones colapsan. Además, los parámetros  $\tau^*, k_r^*$  colocan tres raíces reales dominantes sobre  $s = -\sigma^*$ .

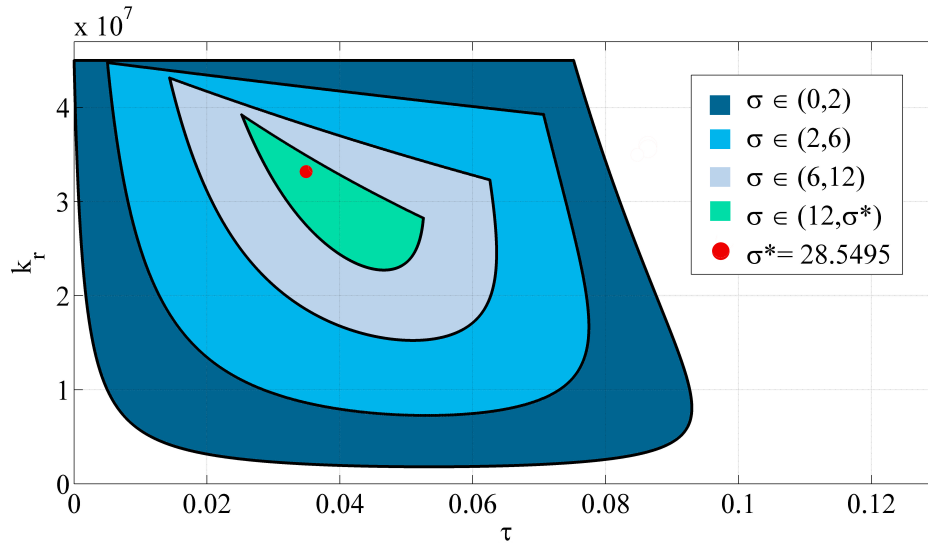


Figura 3.2: Regiones  $\sigma$ -estables del sistema en lazo cerrado (3.19).

En resumen, el sistema en lazo cerrado (3.19) puede ser  $\sigma$ -estabilizado aplicando la proposición 1, incluso es posible hallar la estabilidad exponencial máxima  $\sigma^*$  mediante el punto de colapso  $\tau^*, k_r^*$ . Por otra parte, en la siguiente subsección se aplica la proposición 2 para determinar  $\sigma^*$  de manera analítica.

## Máximo decaimiento exponencial alcanzable

A continuación se presentan los cálculos para obtener la máxima cota de decaimiento exponencial alcanzable  $\sigma^*$  para el cuasipolinomio (3.19). De acuerdo con las expresiones de

la Proposición 2, al tomar  $Q_\sigma(s, k_p, k_r, \alpha, \beta) |_{s=0}$  y calcular sus derivadas, se obtiene

$$e^{\sigma\tau} k_r = \sigma^4 - \sigma^3\beta + \sigma^2\alpha + k_p, \quad (3.21)$$

$$\tau e^{\sigma\tau} k_r = 4\sigma^3 - 3\sigma^2\beta + 2\sigma\alpha, \quad (3.22)$$

$$\tau^2 e^{\sigma\tau} k_r = 12\sigma^2 - 6\sigma\beta + 2\alpha. \quad (3.23)$$

De (3.21) y (3.22) resulta

$$\tau = \frac{4\sigma^3 - 3\sigma^2\beta + 2\sigma\alpha}{\sigma^4 - \sigma^3\beta + \sigma^2\alpha + k_p}, \quad (3.24)$$

y de las ecuaciones (3.21) y (3.23)

$$\tau^2 = \frac{12\sigma^2 - 6\sigma\beta + 2\alpha}{\sigma^4 - \sigma^3\beta + \sigma^2\alpha + k_p}. \quad (3.25)$$

Sustituyendo (3.24) en (3.25) se tiene

$$\begin{aligned} f(\sigma) = & 4\sigma^6 - 6\sigma^5\beta + (2\alpha + 3\beta^2)\sigma^4 - 4\beta\alpha\sigma^3 \\ & + (2\alpha^2 - 12k_p)\sigma^2 + 6\beta k_p\sigma - 2\alpha k_p. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sea  $\sigma^*$  la mínima solución real y positiva del polinomio (3.26), entonces los parámetros que determinan  $\sigma^*$ -estabilidad de la ecuación (3.19) son

$$\tau^* = \frac{4(\sigma^*)^3 - 3(\sigma^*)^2\beta + 2\sigma^*\alpha}{(\sigma^*)^4 - (\sigma^*)^3\beta + (\sigma^*)^2\alpha + k_p}, \quad (3.27)$$

$$k_r^* = \frac{(\sigma^*) (4(\sigma^*)^2 - 3\sigma^*\beta + 2\alpha)}{\tau^* e^{\sigma^*\tau^*}}, \quad (3.28)$$

donde las ganancias  $k_p, \alpha, \beta$  se seleccionan de forma que las dinámicas del sistema en lazo cerrado sigan las dinámicas del polinomio

$$p_a(s) = (s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)^2,$$

esto es

$$\begin{aligned} k_p &> \sqrt{\frac{(4\xi\omega^3)^3}{24\xi\omega}} + \omega^4, \\ \alpha &= 2\omega^2 + 4\xi^2\omega^2 + \frac{(4\xi\omega^3)^2}{2(k_p - \omega^4)}, \\ \beta &= 4\xi\omega - \frac{(4\xi\omega^3)^3}{6(k_p - \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

En resumen, dados los parámetros  $k_p = 0.45e8$ ,  $\alpha = 57000$  y  $\beta = 80$ , la solución mínima real del polinomio (3.26) es  $\sigma^* = 28.5495$ , así, de (3.27) y (3.28) se tiene que  $\tau^* = 0.0349$  y  $k_r^* = 3.3305e7$ . Al igual que la proposición 1, estos parámetros  $\sigma$ -estabilizan

al cuasipolinomio (3.19) con la mayor cota de decaimiento exponencial, además, colocan tres raíces reales dominantes en  $s = -\sigma^*$  del plano complejo, ver Figura 3.3.

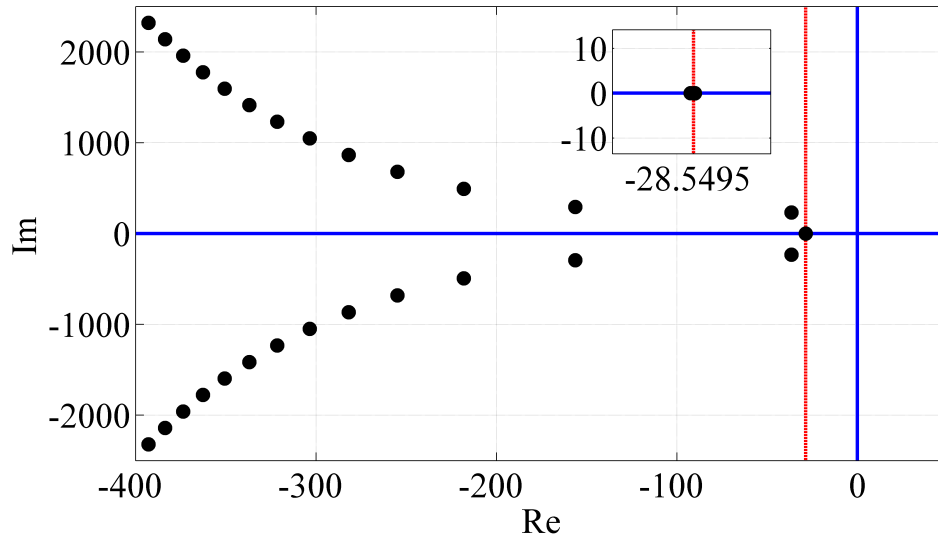


Figura 3.3: Ubicación de las raíces dominantes en  $s = -\sigma^*$  del sistema en lazo cerrado (3.19).

### 3.3. Resultados de simulación

Mediante el entorno de programación MATLAB-SIMULIK se simula la dinámica de la plataforma brazo de robot de unión flexible en lazo cerrado con la ley de control propuesta en la sección 3.2.

En lo subsecuente se presentan los resultados obtenidos en una serie de simulaciones para el seguimiento de trayectoria del brazo de robot considerando diversas cotas de decaimiento exponencial  $\sigma$ . Aquí se consideran fijos los parámetros del sistema tal como se describen en la subsección 2.4.1. Tomando en cuenta la región de estabilidad ilustrada en la Figura 3.2, se eligen 4 pares  $(\tau, k_r)$  los cuales definen cotas de decaimiento específicas.

En la Figura 3.4 se ilustra la señal de salida  $y(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t)$  del brazo robótico de unión flexible en lazo cerrado con el controlador PR (3.18) junto con el control por realimentación linealizante (3.16), de la misma manera, se ilustra la señal de referencia  $y^*(t)$ . Aquí  $y(t)$  corresponde a la posición angular en el extremo del robot.

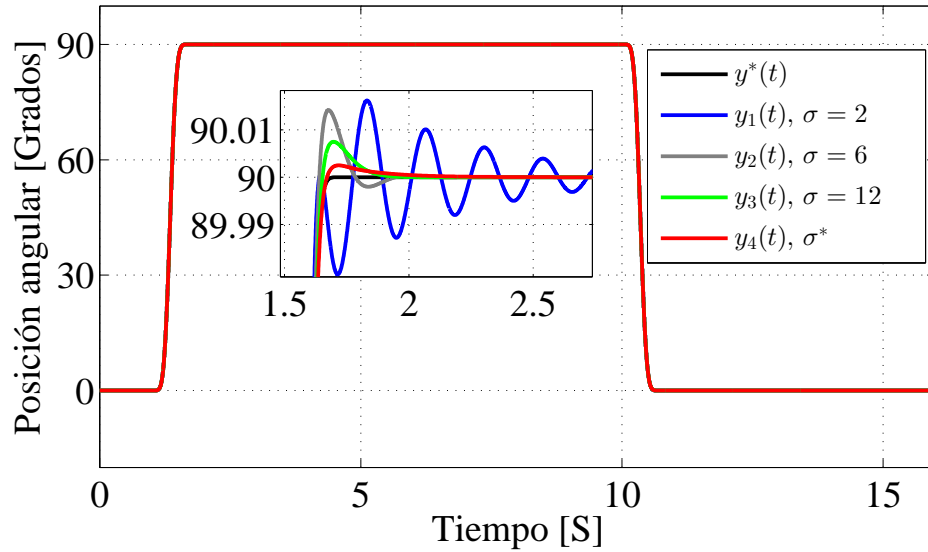


Figura 3.4: Señal de salida y señal de referencia del brazo de robot (simulación).

Tal como se observa en la Figura 3.4, cuando la cota de decaimiento  $\sigma$  es igual a 2, la salida  $y_1(t)$  posee mayor error en estado transitorio y además presenta oscilaciones. Estas oscilaciones decrecen a medida que  $\sigma$  incrementa. La ausencia de oscilaciones ocurre cuando  $\sigma^* = 28.5495$ , la cual es la máxima cota de decaimiento exponencial alcanzable. Por otra parte, la velocidad angular para el sistema es ilustrada en la Figura 3.5.

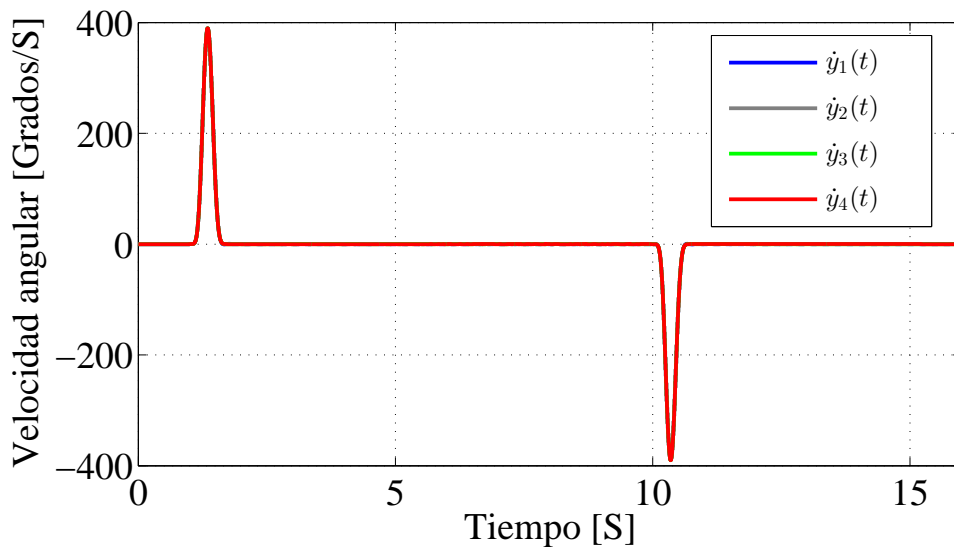


Figura 3.5: Velocidad angular del brazo de robot (simulación).

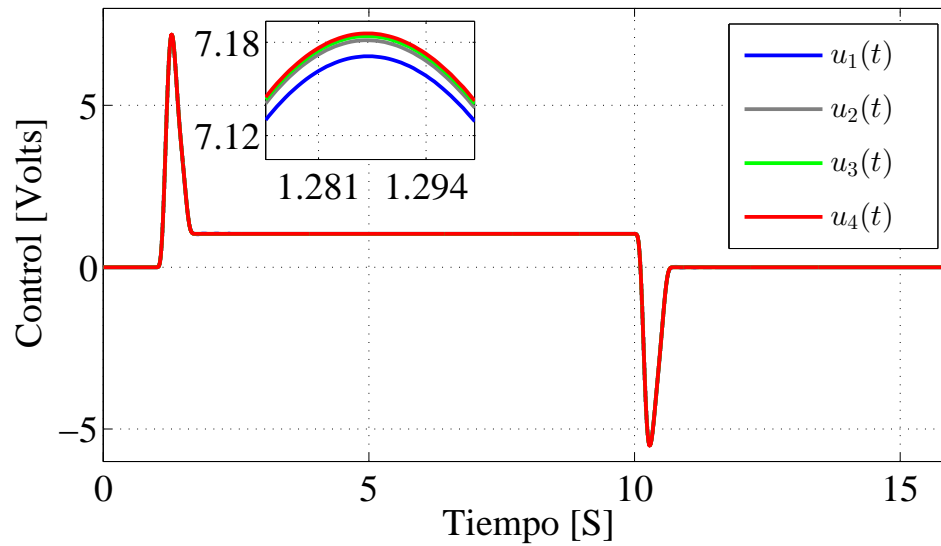


Figura 3.6: Señal de control PR aplicado al brazo de robot (simulación).

La señal de control PR y la señal de error son ilustradas en la Figura 3.6 y 3.7 respectivamente.

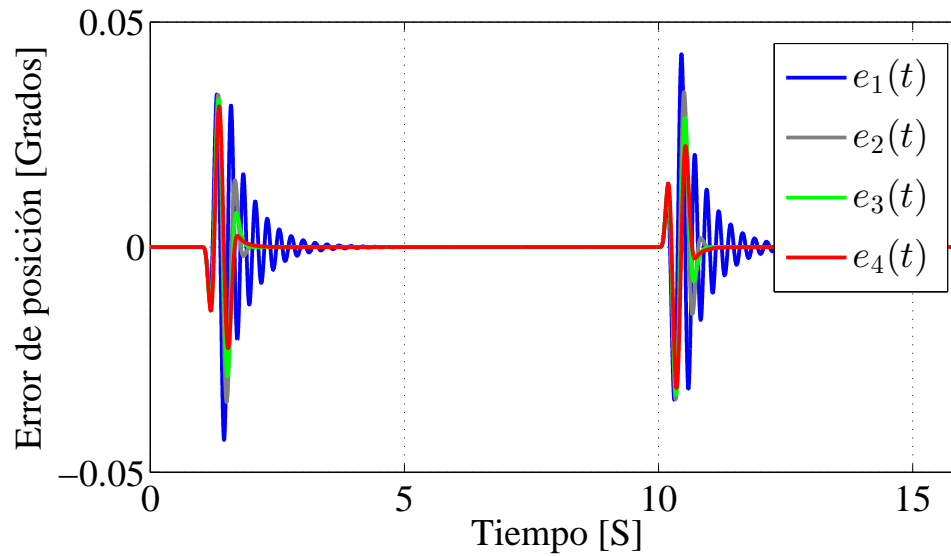


Figura 3.7: Error de posición angular del brazo de robot (simulación).

En la tabla siguiente se presenta la media, mediana y desviación estándar del error de posición angular para el brazo de robot vía simulación en lazo cerrado con el control PR.

Sim.	$\tau$	$k_r$	$\sigma$	Media	Mediana	Desviación estándar
1	0.0349	8.622e6	2	6.2706e-10	0	0.0067
2	0.0349	1.853e7	6	-1.1653e-11	0	0.0054
3	0.0349	2.750e7	12	-6.8549e-12	0	0.0049
4	0.0349	3.3305e7	28.5495	-4.5812e-12	0	0.0044

Tabla 3.1: Media, mediana y desviación estándar del error de posición angular para el brazo de robot (simulación).

## 3.4. Resultados experimentales

La ley de control propuesta en la sección 3.2 es implementada en la plataforma experimental brazo de robot mediante la herramienta de programación MATLAB-SIMULIK junto con la tarjeta de adquisición de datos Sensoray 626, en este caso, la tarjeta opera con un periodo de muestreo de 0.0005 segundos.

En primera parte se presentan los resultados obtenidos en la implementación de una ley de control PID, posteriormente se describen los resultados concernientes a una ley de control por modos deslizantes y finalmente se presentan los resultados referentes al controlador PR.

Para realizar la prueba experimental se considera la condición inicial  $[\theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0]$ . La trayectoria deseada inicia en el tiempo  $t = 0$  en la posición  $y^*(0) = 0$ . Cuando  $t = 1$ , la referencia se mueve durante 0.6 segundos a  $y^*(1.6) = 90$  y se mantiene en esta posición por 8 segundos, posteriormente  $y^*(t)$  se mueve a la condición inicial  $y^*(10.6) = 0$  en un lapso de 0.6 segundos y permanece en esta posición hasta finalizar el experimento.

### 3.4.1. Ley de control PID

Para ilustrar las oscilaciones inducidas en el efector final del robot debido a la unión flexible entre la base y el brazo, se implementa un controlador PID para la posición angular de la base  $\theta_1(t)$  sin considerar  $\theta_2(t)$ . En la Figura 3.8 se ilustra la señal de salida que corresponde a la posición angular  $\theta_1(t)$ , en este caso, se observa un buen desempeño en el seguimiento de la trayectoria deseada.



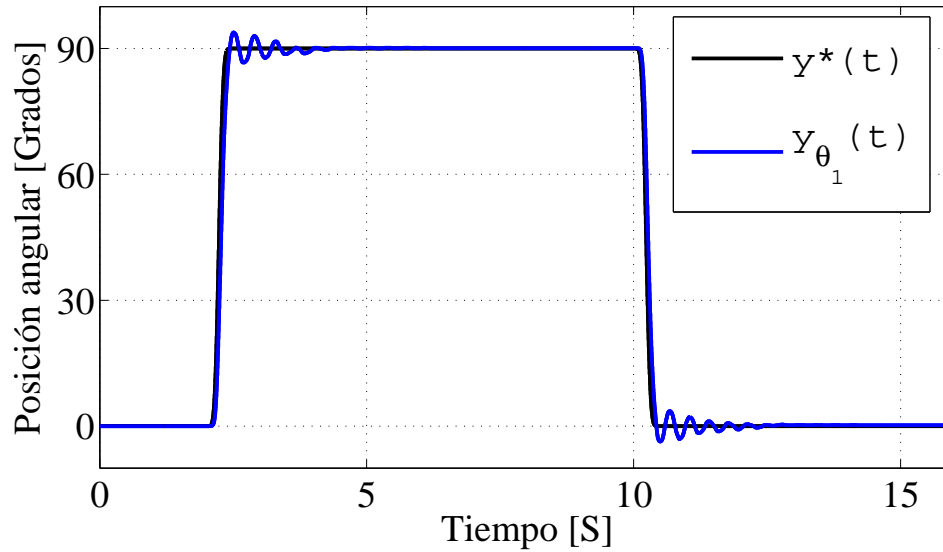


Figura 3.8: Señal de salida  $\theta_1(t)$  del robot y señal de referencia.

Sin embargo, la señal de salida en el extremo del robot  $y_{PID}(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t)$  ilustrada en la Figura 3.9 posee oscilaciones y además presenta error en estado estacionario debido a la unión flexible entre la base y el brazo.

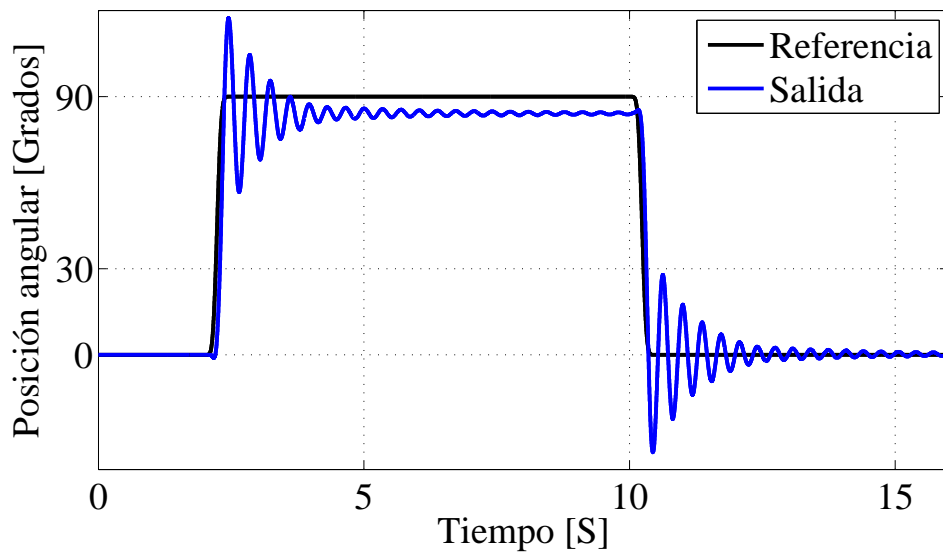


Figura 3.9: Señal de salida  $y_{PID}(t)$  y señal de referencia  $y^*(t)$  del brazo de robot.

La Figura 3.10 ilustra la señal de control PID aplicada al sistema. Ésta posee una amplitud máxima de  $\pm 15$  volts.

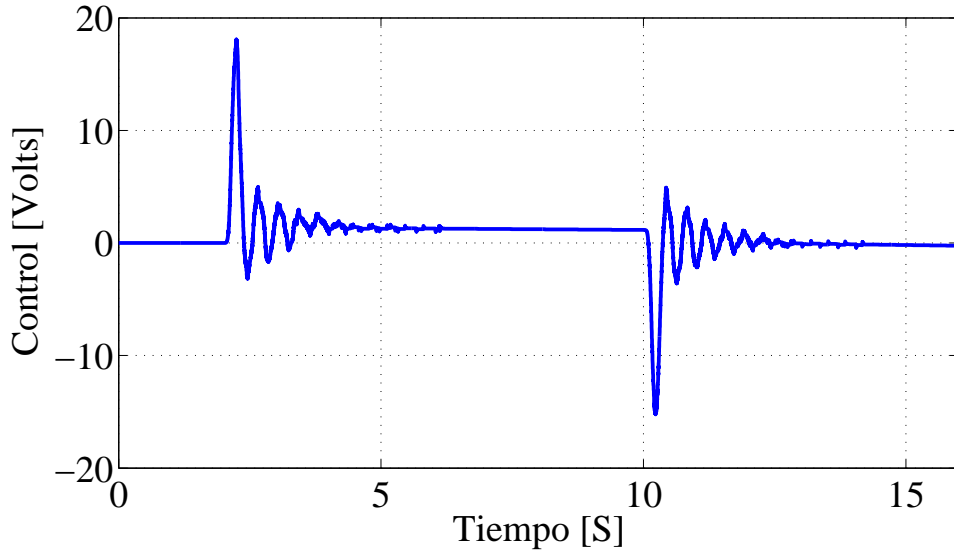


Figura 3.10: Señal de control PID aplicado al brazo de robot.

El error de posición angular es ilustrado en en la Figura 3.11.

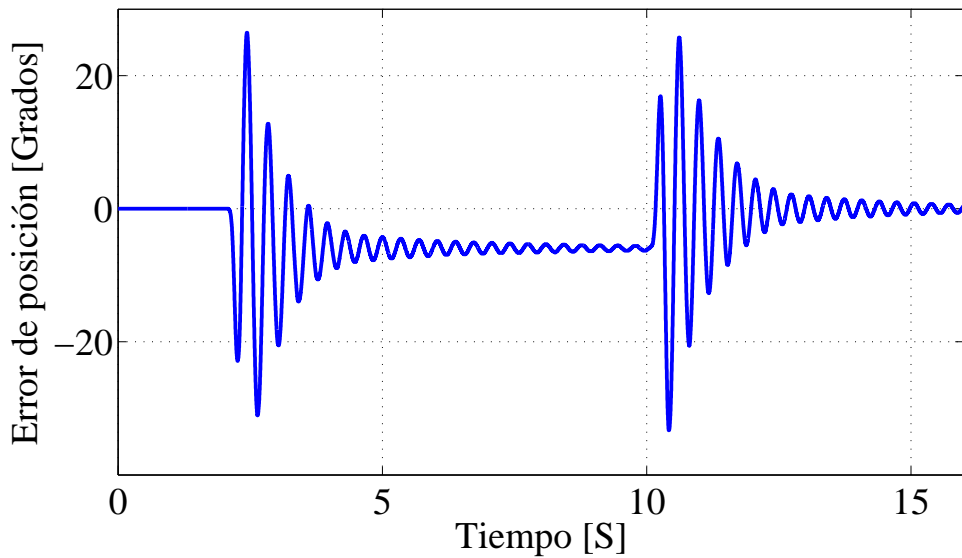


Figura 3.11: Error de posición angular del brazo de robot (PID).

### 3.4.2. Ley de control por modos deslizantes

En la Figura 3.12 se ilustra la señal de salida  $y_{ISM}(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t)$  del brazo robótico en lazo cerrado con un controlador por modos deslizantes, también se ilustra la señal de referencia  $y^*(t)$ . En este caso, la señal de salida  $y_{ISM}(t)$  presenta sobre impulso con ligeras oscilaciones.

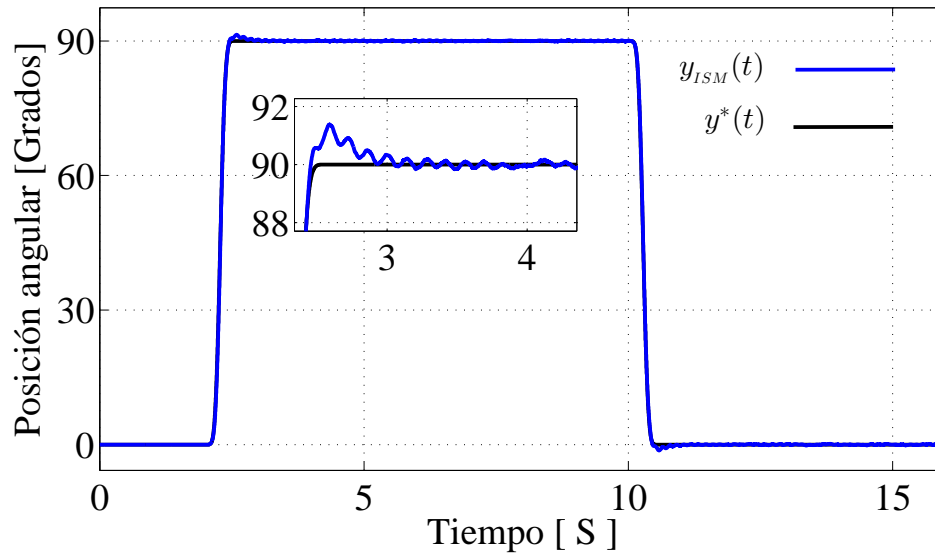


Figura 3.12: Señal de salida  $y_{ISM}(t)$  y señal de referencia  $y^*(t)$  del brazo de robot.

La Figura 3.13 ilustra la señal de control por modos deslizantes aplicada al sistema. La señal presenta el fenómeno indeseado conocido como chattering debido a la alta frecuencia de conmutación en el control.

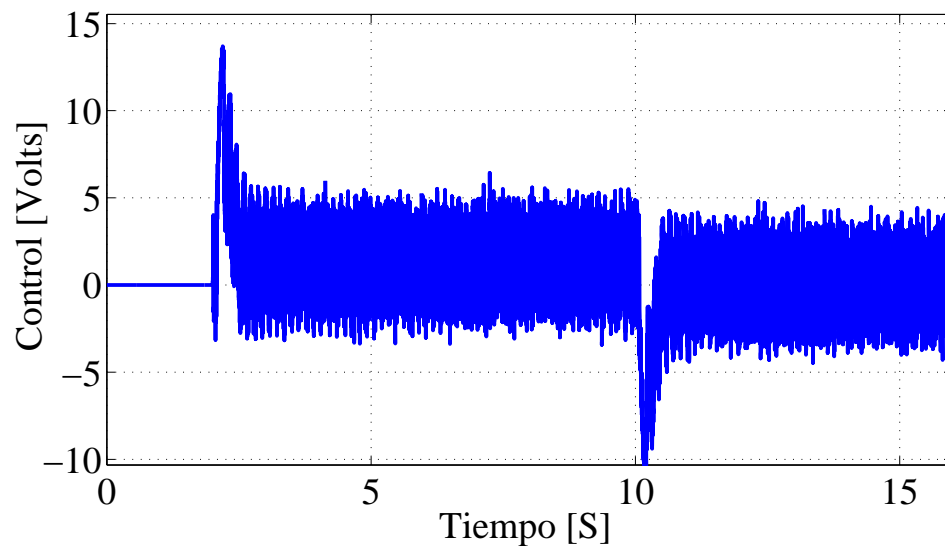


Figura 3.13: Señal de control por modos deslizantes aplicado al brazo de robot.

El error de posición angular es ilustrado en en la Figura 3.14.

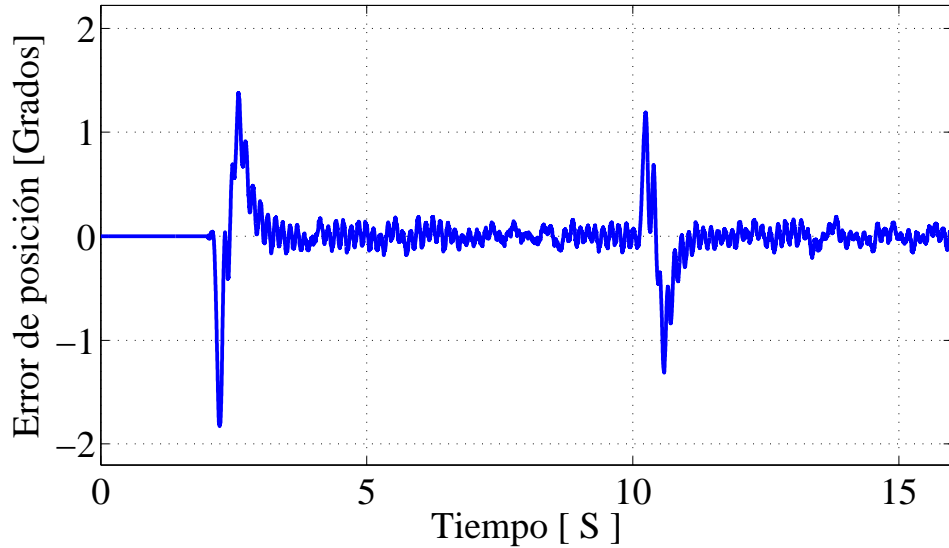


Figura 3.14: Error de posición angular del brazo de robot (Control por modos deslizantes).

### 3.4.3. Ley de control PR

En la Figura 3.15 se observa la señal de salida  $y_{PR}(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t)$  del brazo robótico de unión flexible en lazo cerrado con el controlador PR (3.18), de la misma manera, se ilustra la señal de referencia  $y^*(t)$ .

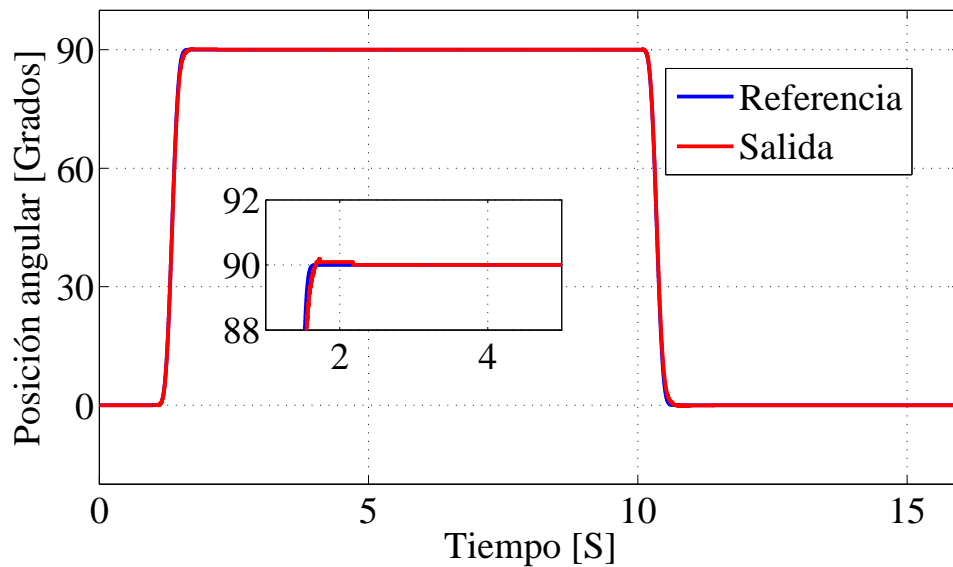


Figura 3.15: Señal de salida  $y_{PR}(t)$  y señal de referencia  $y^*(t)$  del brazo de robot.

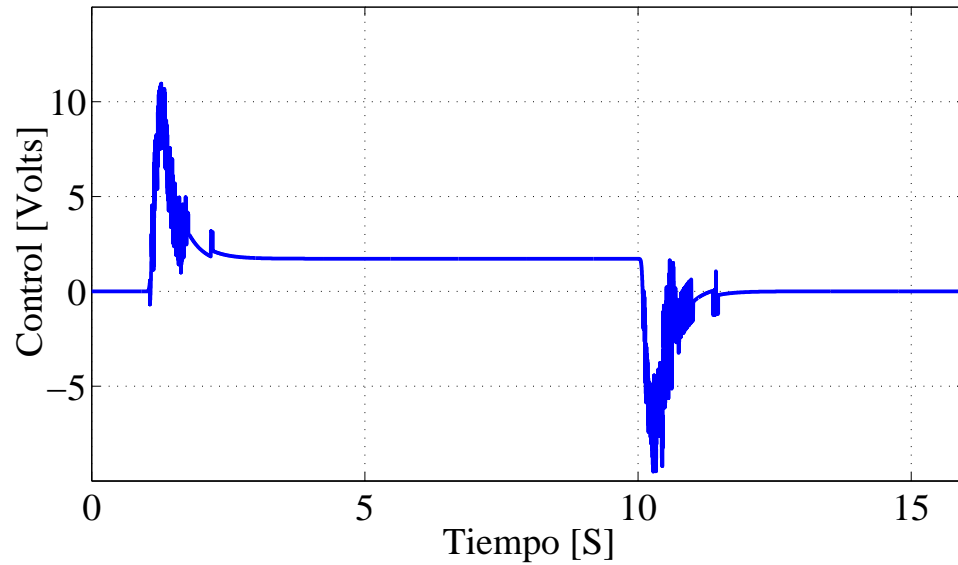


Figura 3.16: Señal de control PR aplicado al brazo de robot.

La señal de control aplicada al sistema es mostrada en la Figura 3.16, ésta posee una amplitud máxima de  $\pm 10.2$  volts y no presenta ruido cuando el sistema se encuentra en estado estacionario. El error de posición angular es ilustrado en en la Figura 3.17.

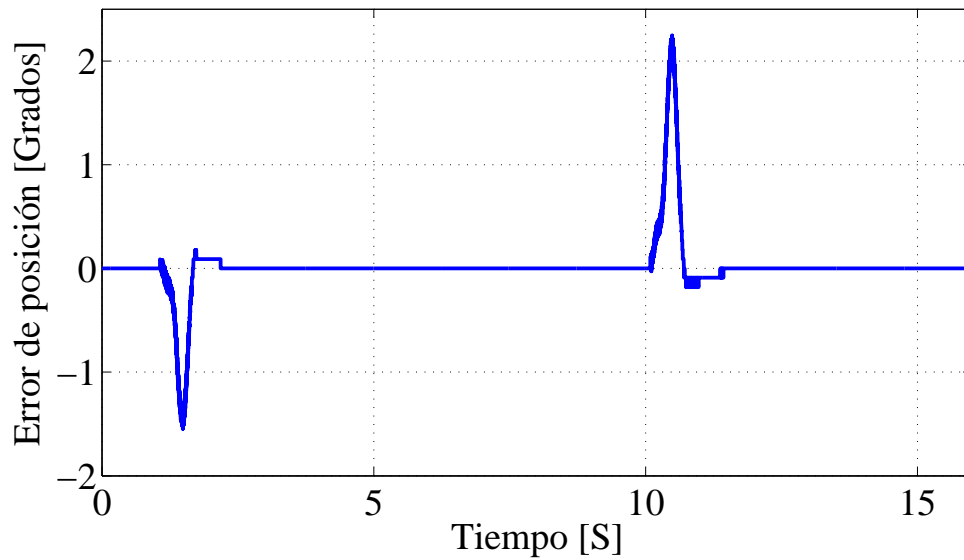


Figura 3.17: Error de posición angular del brazo de robot (PR).

En la tabla siguiente se registra la media, mediana y la desviación estándar del error de posición angular para el brazo de robot de unión flexible en cerrado con la ley de control PR.

Control	Media del error	Mediana de error	Desviación estándar del error
PR	0.0123	0	0.2746

Tabla 3.2: Media, mediana y desviación estándar del error de posición angular para el Brazo de robot vía experimentación.

A diferencia de la ley de control por modos deslizantes, el controlador PR posee menor amplificación de ruido, además posee menor sobre impulso.

### 3.5. Conclusiones del Capítulo

Los resultados principales del presente Capítulo se resumen a continuación: en primer lugar se obtiene una estrategia de sintonización analítica para la ley de control PR sobre sistemas lineales de orden  $n$ , garantizando un máximo decaimiento exponencial alcanzable. Más aún, al proponer el empleo de la estrategia de control por realimentación linealizante, ha sido posible implementar el controlador PR en un sistema no lineal. Una característica de la ley de control propuesta, es el empleo de retardos temporales, esto es con la finalidad de eliminar las desventajas que posee la acción derivativa tal como la amplificación de ruido y la saturación de voltaje en los actuadores. Por otra parte, la implementación del control PR a la plataforma experimental muestra la efectividad del controlador propuesto, logrando un buen desempeño para el seguimiento de trayectorias en el brazo de robot de unión flexible.

# Capítulo 4

## Suma convexa de controladores PIR

En el presente Capítulo se describe la segunda parte de los resultados obtenidos durante el desarrollo de la investigación. En la sección 4.1 se propone el diseño y la sintonización de una ley de control no lineal basada en una suma convexa de controladores PIR. La implementación de los resultados se realiza en la plataforma experimental Carro-Péndulo IP01. Por otra parte, los resultados vía simulación y experimentación se presentan en las secciones 4.3 y 4.4 respectivamente.

### 4.1. Diseño y sintonización de una suma convexa de controladores PIR

En esta sección se propone una ley de control no lineal basada en una suma convexa de controladores PIR. En la Figura 4.1 se esquematiza la metodología aplicada para el diseño del controlador. A diferencia del controlador PDC ilustrada en la Figura 2.1, en la presente investigación se sugiere añadir una acción integral más una acción retardada con la finalidad de eliminar el error en estado estacionario presente en algunos procesos de control, además de evitar el empleo de las acciones derivativas.

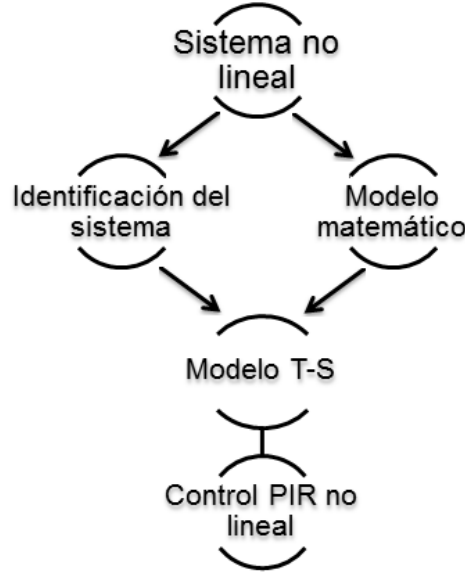


Figura 4.1: Diseño de la suma convexa de controladores PIR.

A continuación se formaliza lo dicho anteriormente, para ello, se parte del modelo T-S de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r m_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \\ y(t) = \sum_{i=1}^r m_i(z(t)) C_i x(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

aquí,  $r$  es el número de reglas;  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}$  es el vector de entrada,  $y(t) \in \mathbb{R}$  es el vector de salida,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ;  $z(t) = [z_1(t), \dots, z_p(t)]^T$  donde  $z_1(t), \dots, z_p(t) \in \mathbb{R}$  son variables conocidas que pueden estar en función de las variables de estado, perturbaciones externas y/o del tiempo;  $m_i(z(t))$  es el grado de activación de cada regla. El valor de una regla  $m_i(z(t))$  se determina en base a las variables conocidas  $z(t)$  utilizando el operador algebraico

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t)),$$

$$m_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))},$$

asumiendo que  $\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0$ , es decir, que para cualquier combinación de  $z(t)$ , al menos una regla tiene un valor mayor a cero. El término  $M_{ij}(z_j(t))$  es el grado de pertenencia de  $z_j(t)$  en el conjunto difuso  $M_{ij}$ .



Por otra parte, se considera el cambio de variable siguiente

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1(t), \\ &\vdots \\ \bar{x}_n &= x_n(t), \\ \bar{x}_{n+1} &= \int_0^t x_1(\phi) d\phi,\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= \dot{x}_1(t), \\ &\vdots \\ \dot{\bar{x}}_n &= \dot{x}_n(t), \\ \dot{\bar{x}}_{n+1} &= x_1(t).\end{aligned}$$

Con el cambio de variable anterior, el sistema (4.1) en el nuevo vector de estado  $\bar{x} = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}]$  resulta

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r m_i(z(t)) \{ \bar{A}_i \bar{x}(t) + \bar{B}_i(t) \bar{u}(t) \}, \\ \bar{y}(t) = \sum_{i=1}^r m_i(z(t)) \bar{C}_i(t) \bar{x}(t), \end{cases} \quad (4.2)$$

donde

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_i = [C_i \quad 0],$$

aquí  $\mathcal{A}_1 = [0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathcal{A}_2 = [1, \dots, 0] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ .

Para el diseño del controlador se considera el razonamiento siguiente

**Regla del controlador  $j$ :**

**si**  $z_1(t)$  está en  $M_{j1}$  y ... y  $z_p(t)$  está en  $M_{jp}$ ,

**entonces**  $u(t) = -K_{pj} \bar{x}(t) - K_{ij} \bar{x}(t) + K_{rj} \bar{x}(t - \tau_j)$ ,

donde

$K_{pj}^T = [k_{pj}, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  son las ganancias proporcionales,

$K_{ij}^T = [0, \dots, 0, k_{ij}]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  son las ganancias integrales,

$K_{rj}^T = [k_{rj}, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  son las ganancias retardadas,

así, la ley de control formada por la suma convexa de controladores PIR es

$$\bar{u}(t) = \sum_{j=1}^r m_j(z(t)) \left\{ -K_{pj} \bar{x}(t) - K_{ij} \bar{x}(t) + K_{rj} \bar{x}(t - \tau_j) \right\}, \quad (4.3)$$

donde  $\tau_j \in \mathbb{R}^+$  son los retardos,  $j = 1, \dots, r$ . De tal manera el sistema (4.2) en lazo cerrado con la ley de control (4.3) está descrito por

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r m_i(z(t))m_j(z(t)) \{G_{ij}\bar{x}(t) + R_{ij}\bar{x}(t - \tau_j)\}, \quad (4.4)$$

donde  $G_{ij} := \bar{A}_i - \bar{B}_i K_{p_j} - \bar{B}_i K_{i_j}$ ,  $R_{ij} := \bar{B}_i K_{r_j}$ ,  $i, j = 1, \dots, r$ .

Como se observa, la ley de control (4.3) evita el empleo de términos derivativos con la finalidad de resolver el problema de amplificación de ruido presente en algunas estrategias de control.

Para garantizar la  $\sigma$ -estabilidad del sistema en lazo cerrado (4.4), se realiza un análisis del lugar geométrico de las raíces dominantes del cuasipolinomio característico, que tiene la forma

$$p(s) = \det \left\{ sI_{n+1} - G_z - \sum_{j=1}^r R_z^j e^{-s\tau_j} \right\}, \quad (4.5)$$

donde

$$\begin{aligned} G_z &:= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r m_i(z(t))m_j(z(t))G_{ij}, \\ R_z^j &:= m_j(z(t))B_z K_{r_j}, \\ B_z &:= \sum_{i=1}^r m_i(z(t))\bar{B}_i. \end{aligned}$$

Sin embargo, ahora la pregunta es ¿cuáles son las ganancias  $K_{p_j}$ ,  $K_{i_j}$ ,  $K_{r_j}$  y  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  que  $\sigma$ -estabilizan el sistema en lazo cerrado (4.4) con la mayor cota de decaimiento exponencial?. En el siguiente apartado se presenta la metodología para sintonizar las ganancias del controlador (4.3) y así dar solución al problema planteado.

### ***Sintonización de la ley de control formada por una suma convexa de controladores PIR***

A continuación se describe la metodología para sintonizar la ley de control PIR no lineal considerando el caso  $n = 2$ :

1. Obtener el modelo T-S correspondiente al sistema no lineal bajo estudio, ver ec. (4.2).
2. Generar el sistema en lazo cerrado del modelo T-S obtenido en el paso anterior con la ley de control (4.3).
3. Graficar las regiones  $\sigma$ -estables de cada subsistema perteneciente a (4.4), cuando  $i = 1, \dots, r$  y  $j = i$ ; empleando las ecuaciones de la sección (2.3.2).
4. Determinar la intersección de todas las regiones  $\sigma$ -estables.

5. Seleccionar las ganancias  $k_{pj}, k_{ij}, k_{rj}, \tau_j$  pertenecientes a la intersección de las regiones  $\sigma$ -estables obtenida en el paso anterior para sintonizar el controlador de cada subsistema (4.4), cuando  $i = 1, \dots, r$  y  $j = i$ .
6. Obtener el lugar geométrico de las raíces dominantes del cuasipolinomio característico (4.5) para verificar la estabilidad del sistema en lazo cerrado.
7. Elegir las funciones de pertenencia para cada regla  $i, j$  en base a las variables conocidas  $z(t)$ .

## 4.2. Caso de estudio: Carro-Péndulo

Con el fin de aclarar la metodología propuesta en la sección anterior, se aplica la ley de control formada por una suma convexa de controladores PIR al sistema subactuado Carro-Péndulo. Se considera el modelo matemático descrito en la subsección 2.4.2

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g \sin(x_1(t)) - amlx_2^2(t) \sin(2x_1(t))/2 - a \cos(x_1(t))u(t)}{4l/3 - aml \cos^2(x_1(t))},\end{aligned}\tag{4.6}$$

donde  $x_1(t) = \theta$ ,  $x_2(t) = \dot{\theta}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $m = 0.23 \text{ kg}$ ,  $M = 0.52 \text{ kg}$  y  $l = 0.32 \text{ m}$ . A continuación se obtiene el modelo T-S del sistema (4.6) mediante aproximación local, para ello se consideran las reglas siguientes

**Regla del subsistema  $i=1$ :**

*si*  $x_1(t)$  está en 0,

**entonces**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t), \\ y(t) = C_1x(t). \end{cases}\tag{4.7}$$

**Regla del subsistema  $i=2$ :**

*si*  $x_1(t)$  está en  $\pm\pi/4$ ,

**entonces**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t), \\ y(t) = C_2x(t), \end{cases}\tag{4.8}$$

así, el modelo T-S es

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 m_i(x_1(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \\ y(t) = \sum_{i=1}^2 m_i(x_1(t)) C_i x(t), \end{cases}$$

donde  $m_i \in [0, 1]$ ,  $x^T(t) = [x_1(t), x_2(t)] = [\theta(t), \dot{\theta}(t)] \in \mathbb{R}^2$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$ ,  $\beta = \cos(\pi/4)$  y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3-aml} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3-aml} \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \ 0],$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\beta[8g(4l/3-aml\beta^2)-1]}{\pi(4l/3-aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3-aml\beta^2} \end{bmatrix}, \quad C_2 = [1 \ 0].$$

Realizando el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1(t), \\ \bar{x}_2 &= x_2(t), \\ \bar{x}_3 &= \int_0^t x_1(\phi) d\phi, \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \dot{x}_1(t), \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \dot{x}_2(t), \\ \dot{\bar{x}}_3 &= x_1(t), \end{aligned}$$

con lo cual resulta el sistema

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^2 m_i(z(t)) \{ \bar{A}_i \bar{x}(t) + \bar{B}_i(t) \bar{u}(t) \}, \\ \bar{y}(t) = \sum_{i=1}^2 m_i(z(t)) \bar{C}_i(t) \bar{x}(t), \end{cases} \quad (4.9)$$

donde  $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]$ ,

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{4l/3-aml} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3-aml} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_1 = [1 \ 0 \ 0].$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\beta[8g(4l/3-aml\beta^2)-1]}{\pi(4l/3-aml\beta^2)} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3-aml\beta^2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_2 = [1 \ 0 \ 0].$$

Por otra parte, se considera el razonamiento siguiente para el diseño del controlador

**Regla del controlador  $j=1$ :**

**si**  $\bar{x}_1(t)$  está en 0,

**entonces**  $u(t) = -K_{p1}\bar{x}(t) - K_{i1}\bar{x} + K_{r1}\bar{x}(t - \tau_1)$ ,

**Regla del controlador  $j=2$ :**

si  $\bar{x}_1(t)$  está en  $\pm\pi/4$ ,

entonces  $u(t) = -K_{p2}\bar{x}(t) - K_{i2}\bar{x} + K_{r2}\bar{x}(t - \tau_2)$ ,

donde

$$\begin{aligned} K_{p1} &= [k_{p1} \ 0 \ 0], & K_{i1} &= [0 \ 0 \ k_{i1}], & K_{r1} &= [k_{r1} \ 0 \ 0], \\ K_{p2} &= [k_{p2} \ 0 \ 0], & K_{i2} &= [0 \ 0 \ k_{i2}], & K_{r2} &= [k_{r2} \ 0 \ 0], \end{aligned}$$

con lo cual la suma convexa de controladores PIR es

$$\bar{u}(t) = \sum_{j=1}^2 m_j(z(t)) \left\{ -K_{pj}\bar{x}(t) - K_{ij}\bar{x} + K_{rj}\bar{x}(t - \tau_j) \right\}, \quad (4.10)$$

aquí  $z(t) = \bar{x}_1(t) \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_j \in \mathbb{R}^+$  son los retardos,  $j = 1, 2$ ;  $m_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^p w_i(z(t))}$  y  $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t))$ . El término  $M_{ij}(z_j(t))$  es el grado de pertenencia de  $z_j(t)$  en el conjunto difuso  $M_{ij}$ ,  $p = 1$ . Finalmente el sistema (4.9) en lazo cerrado con (4.10) resulta

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 m_i(\bar{x}_1(t)) m_j(\bar{x}_1(t)) \{G_{ij}\bar{x}(t) + R_{ij}\bar{x}(t - \tau_j)\}, \quad (4.11)$$

donde  $G_{ij} := \bar{A}_i - \bar{B}_i K_{pj} - \bar{B}_i K_{ij}$ ,  $R_{ij} := \bar{B}_i K_{rj}$ ,  $i, j = 1, 2$ .

### 4.2.1. Regiones $\sigma$ -estables

A continuación se obtienen las regiones de estabilidad para el sistema en lazo cerrado (4.11) empleando las ecuaciones de la subsección (2.3.2).

#### **Subsistema 1**

Dados los parámetros  $k_{p1} = -200$  y  $k_{i1} = -3$ , de (2.12), las regiones de estabilidad colapsan en  $\bar{\sigma} = 2.3244$ , así de (2.13) y (2.14), se tiene que  $\tau_1^* = 0.0088$  y  $k_{r1}^* = -188.7702$ . Estos parámetros  $\sigma$ -estabilizan al subsistema (4.7) con la máxima cota de decaimiento exponencial alcanzable  $\sigma_m = \bar{\sigma}$ , además, colocan tres raíces reales dominantes en  $-\sigma_m$  en el eje real del plano complejo.

La Figura 4.2 muestra las regiones  $\sigma$ -estables del subsistema (4.7) para varios valores de  $\sigma$ , con  $k_{p1} = -200$  y  $k_{i1} = -3$ .

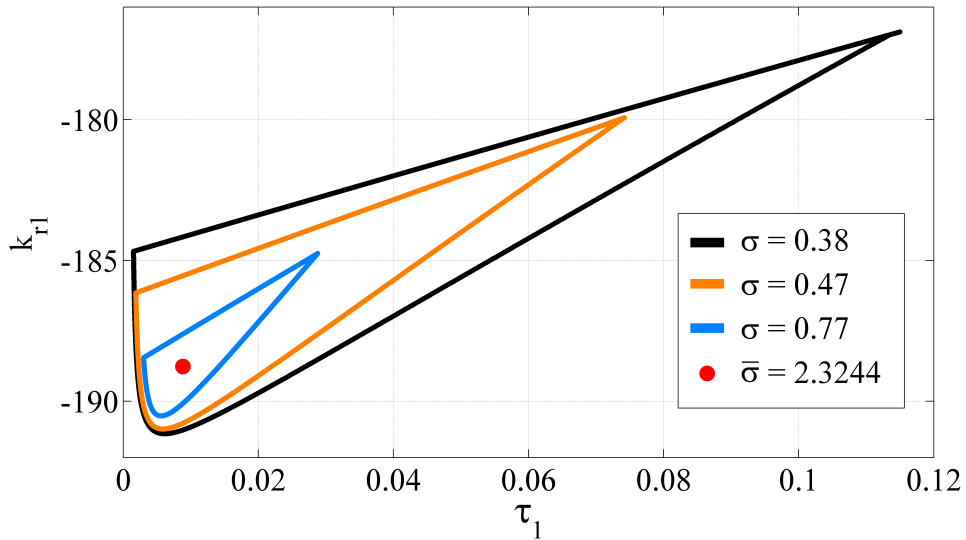


Figura 4.2: Regiones  $\sigma$ -estables del subsistema (4.7).

En la Figura 4.3 se observa la ubicación de las raíces dominantes en  $-\sigma_m = -2.3244$ .

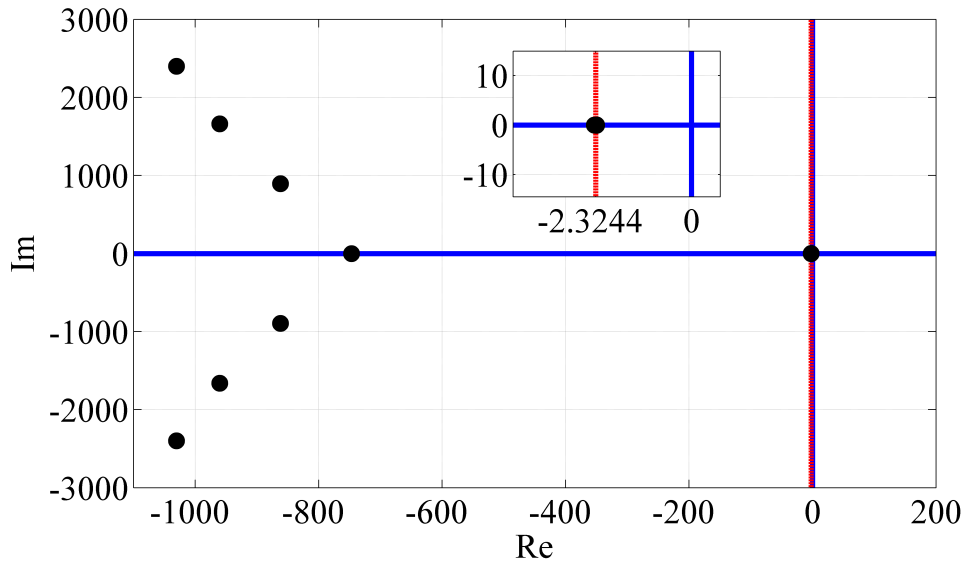


Figura 4.3: Ubicación de las raíces dominantes del subsistema (4.7).

### Subsistema 2

Por otra parte, la Figura 4.4 ilustra las regiones  $\sigma$ -estables del subsistema (4.8) para varios valores de  $\sigma$ , con  $k_{p2} = -200$  y  $k_{i2} = -3$  fijos. Las regiones de estabilidad colapsan en  $\bar{\sigma} = 1.9805$ , donde  $\tau_2^* = 0.0121$  y  $k_{r2}^* = -188.6193$ . De la misma manera, estos parámetros  $\sigma$ -estabilizan al subsistema (4.8) con la máxima cota de decaimiento exponencial alcanzable  $\sigma_m = \bar{\sigma}$  colocando tres raíces reales dominantes en  $-\sigma_m$  en el eje real del plano complejo.

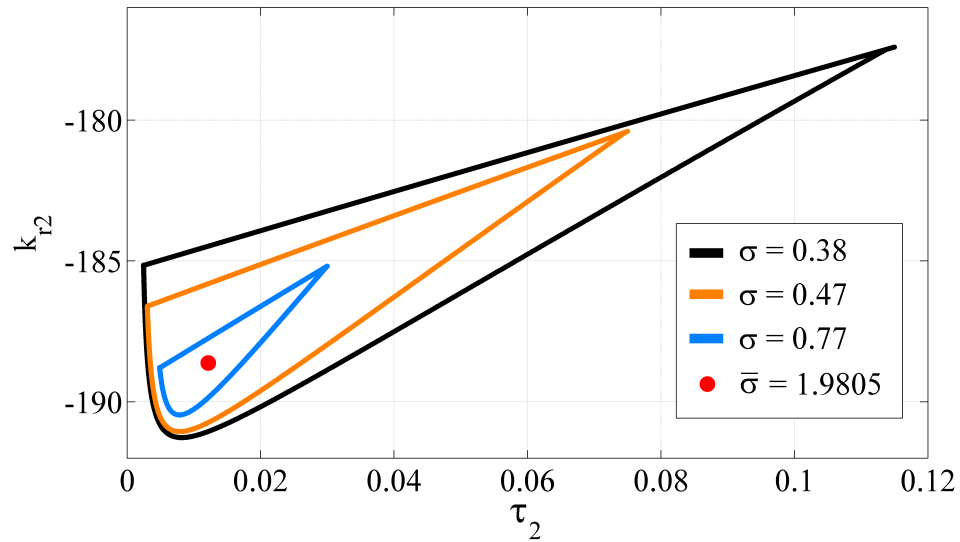


Figura 4.4: Regiones  $\sigma$ -estables del subsistema (4.8).

En la Figura 4.5 se observa la ubicación de las raíces dominantes en  $-\sigma_m = -1.9805$ .

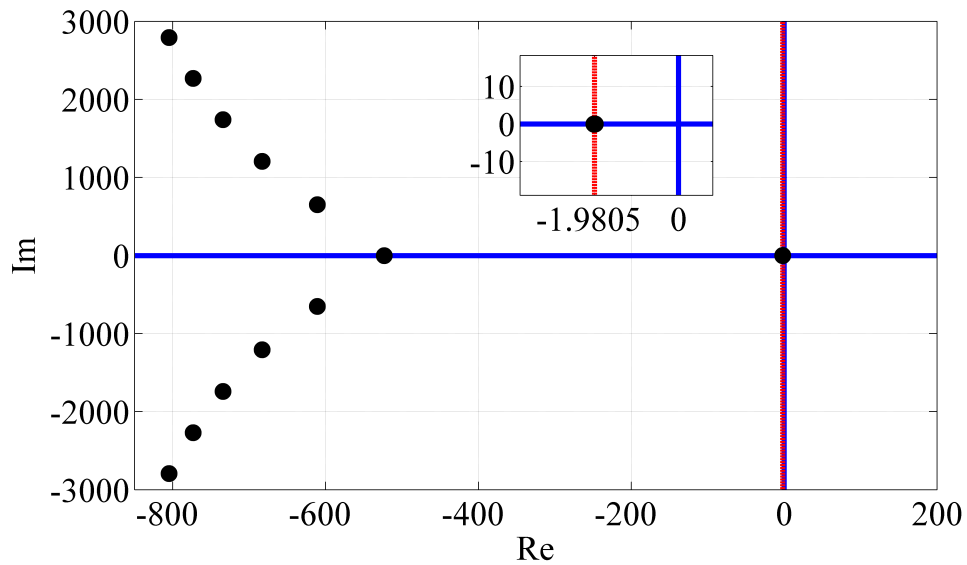


Figura 4.5: Ubicación de las raíces dominantes del subsistema (4.8).

Para garantizar la  $\sigma$ -estabilidad del sistema T-S (4.11) se sintoniza la ley de control (4.10) con ganancias  $k_{p_j}, k_{i_j}, k_{r_j}, \tau_j$  que pertenecen a la intersección de las regiones de estabilidad, ver Figura 4.6, en este caso se eligen las ganancias que determinan el mayor decaimiento exponencial de cada subsistema.

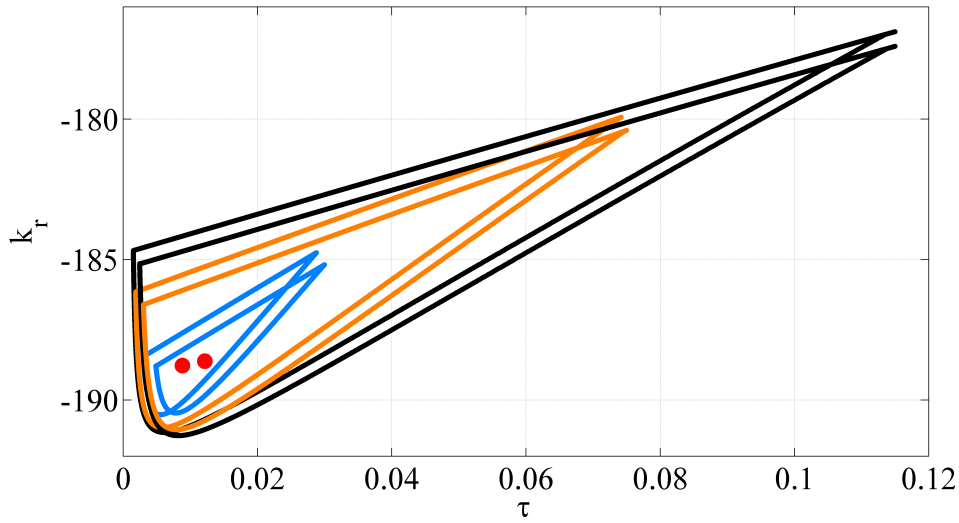


Figura 4.6: Intersección de las regiones  $\sigma$ -estables.

#### 4.2.2. Lugar geométrico de las raíces dominantes

A continuación se presenta el análisis del lugar geométrico de las raíces dominantes del cuasipolinomio característico correspondiente al sistema en lazo cerrado (4.11)

$$p(s) = \det(sI_{3 \times 3} - G_z - R_z^1 e^{-s\tau_1} - R_z^2 e^{-s\tau_2}), \quad (4.12)$$

donde

$$\begin{aligned} G_z &= m_1^2(\bar{x}_1)G_{11} + m_1(\bar{x}_1)m_2(\bar{x}_1)G_{12} + m_1(\bar{x}_1)m_2(\bar{x}_1)G_{21} + m_2^2(\bar{x}_1)G_{22}, \\ R_z^1 &= m_1(\bar{x}_1)B_z K_{r1}, \\ R_z^2 &= m_2(\bar{x}_1)B_z K_{r2}, \\ B_z &= m_1(\bar{x}_1)\bar{B}_1 + m_2(\bar{x}_1)\bar{B}_2. \end{aligned}$$

Aquí  $m_1(\bar{x}_1), m_2(\bar{x}_1) \in [0, 1]$  y  $m_1(\bar{x}_1) + m_2(\bar{x}_1) = 1$ . En la Figura 4.7 se observa el lugar geométrico de las raíces dominantes del cuasipolinomio (4.12) cuando  $m_1(\bar{x}_1)$  es variado entre 0 y 1; y  $m_2(\bar{x}_1) = 1 - m_1(\bar{x}_1)$ . Si  $m_1(\bar{x}_1) = 0$ , entonces el cuasipolinomio (4.12) tiene tres raíces reales dominantes sobre la abscisa  $-\sigma = -1.9805$ , al igual que en la Figura 4.5. Cuando  $m_1(\bar{x}_1) \in (0, 0.02]$  estas tres raíces se separan, una recorre el eje real hasta llegar a  $-\sigma = -2.4670$  y las dos restantes se mueven en sentido inverso hasta colocarse sobre la abscisa  $-\sigma = -1.7582$  con parte imaginaria  $\pm -0.3117$ . Cuando  $m_1(\bar{x}_1) = 0.5$  la raíz real alcanza  $-\sigma = -3.6092$  y las complejas a  $-\sigma = -1.5610$ , con parte imaginaria  $\pm 0.6234$ . Si  $m_1(\bar{x}_1) \in (0.5, 0.9]$  la raíz real toma un recorrido inverso hasta llegar a  $-\sigma = -3.2539$  y las complejas a  $-\sigma = -1.8573$ , con parte imaginaria  $\pm 0.5165$ . Cuando  $m_1(\bar{x}_1) \in (0.9, 1]$  las



tres raíces siguen su recorrido hasta colapsar en  $-\sigma = -2.3244$ , al igual que en la Figura 4.3.

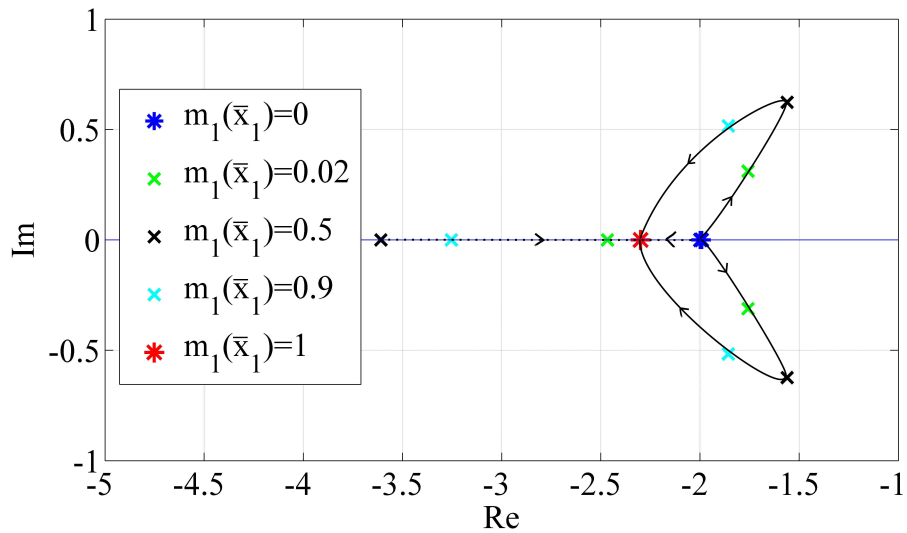


Figura 4.7: Lugar geométrico de las raíces dominantes del cuasipolinomio (4.12).

Por otra parte, las funciones de membresía empleadas para la inferencia difusa del sistema T-S (4.11) son funciones gaussianas representadas en la Figura 4.8.

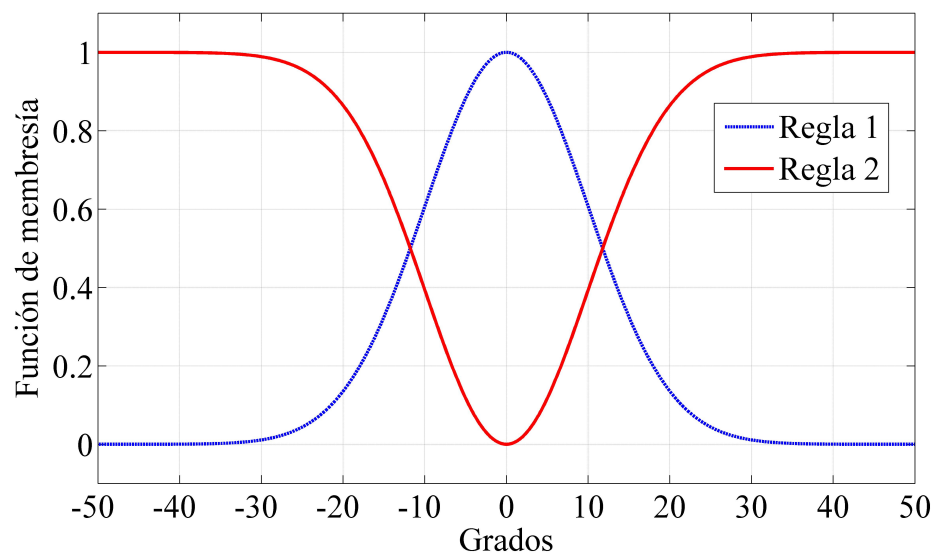


Figura 4.8: Funciones de membresía.

### 4.3. Resultados de simulación

En la Figura 4.9 se ilustra la señal de salida  $y(t) = \theta(t)$  del sistema (4.9) en lazo cerrado con la ley de control formada por la suma convexa de controladores PIR (4.10), de la misma manera, se ilustra la señal de referencia.

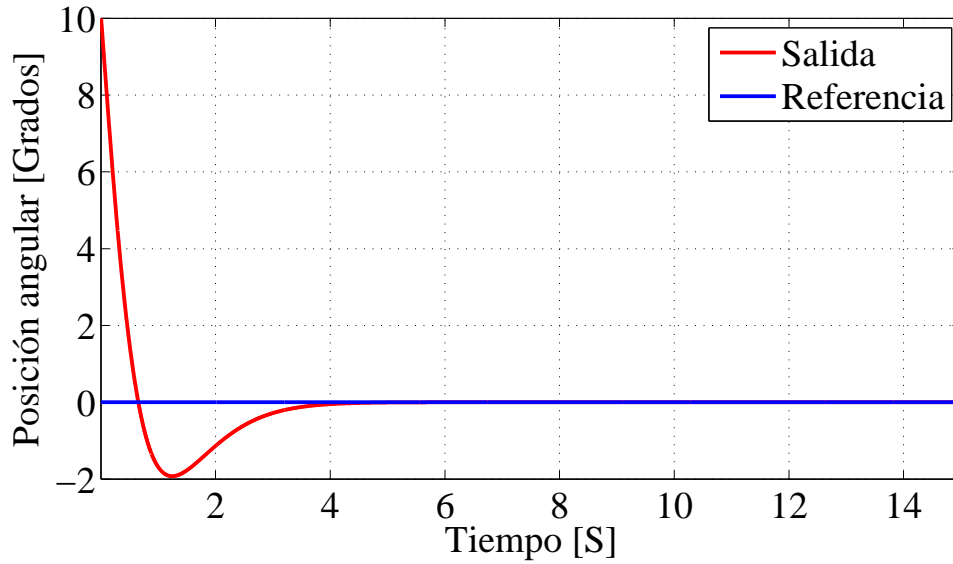


Figura 4.9: Señal de salida y señal de referencia del sistema Carro-Péndulo (simulación).

La velocidad angular para el Carro-Péndulo es ilustrada en la Figura 4.10.

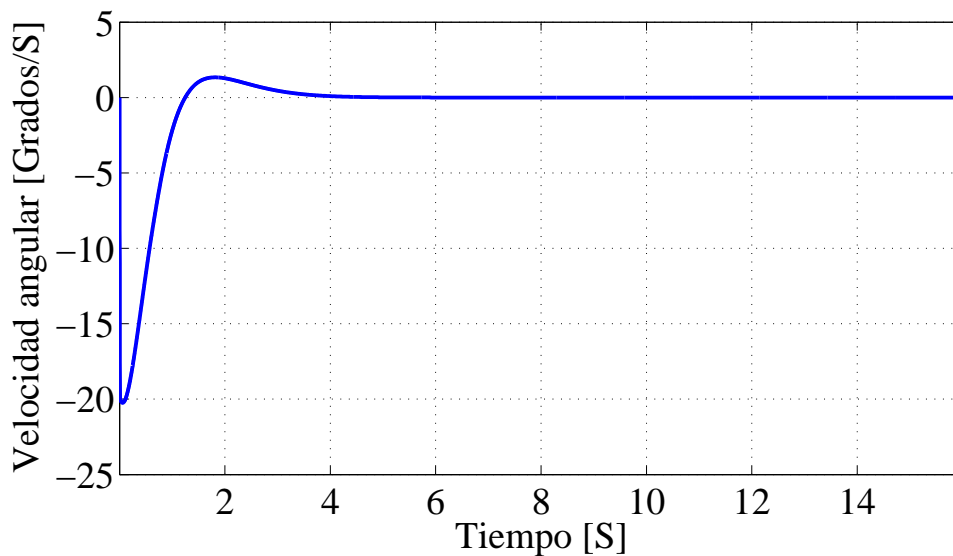


Figura 4.10: Velocidad angular del sistema Carro-Péndulo (simulación).

La señal de control y la señal de error son ilustradas en la Figura 4.11 y 4.12 respectivamente.

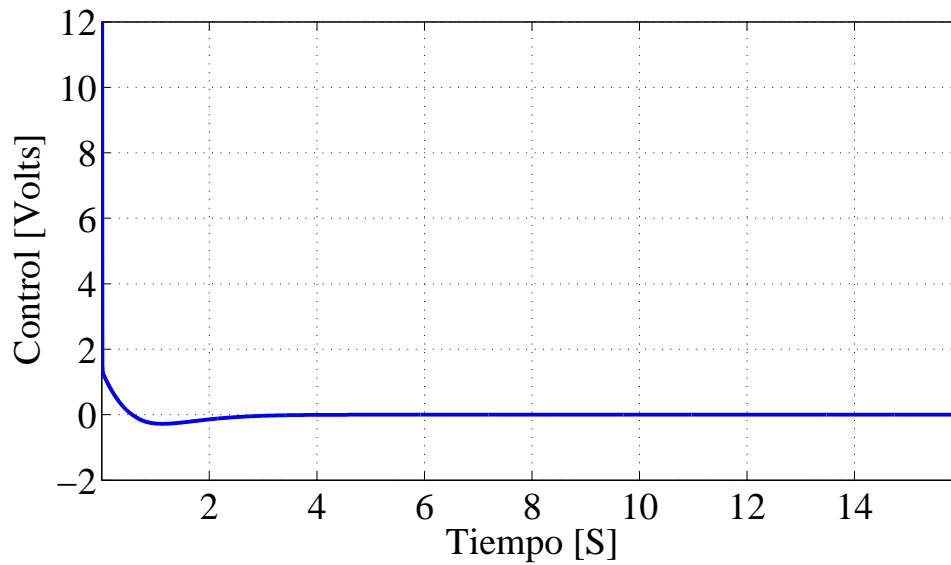


Figura 4.11: Señal de control aplicado al Carro-Péndulo (simulación).

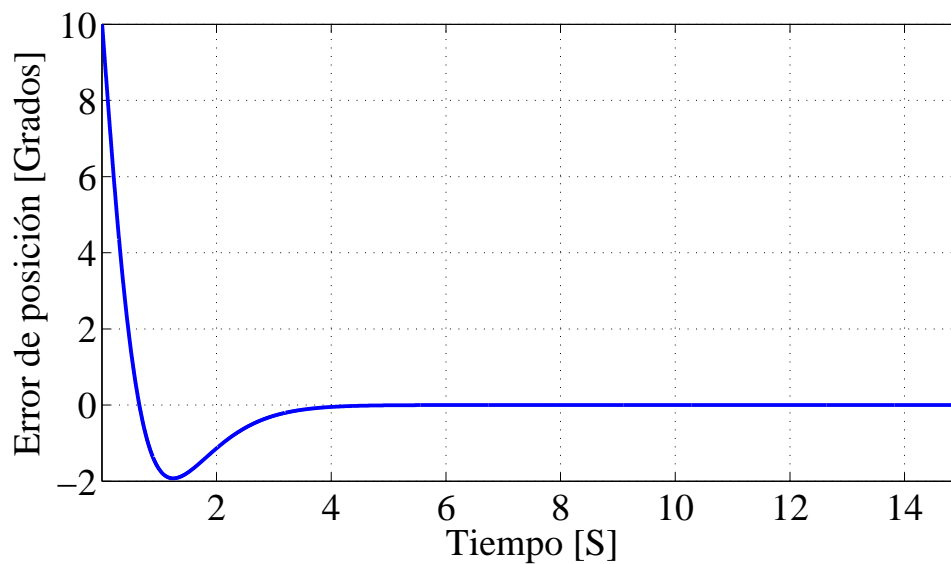


Figura 4.12: Error de posición angular del sistema Carro-Péndulo (simulación).

## 4.4. Resultados experimentales

La prueba experimental consiste en la estabilización del péndulo invertido considerando la condición inicial  $\theta(0) = 9$  grados. En este caso, la ley de control PIR no lineal es comparada con el control PDC. En la Figura 4.13 se muestra la señal de salida  $\theta$  y la señal de referencia del sistema Carro-Péndulo.

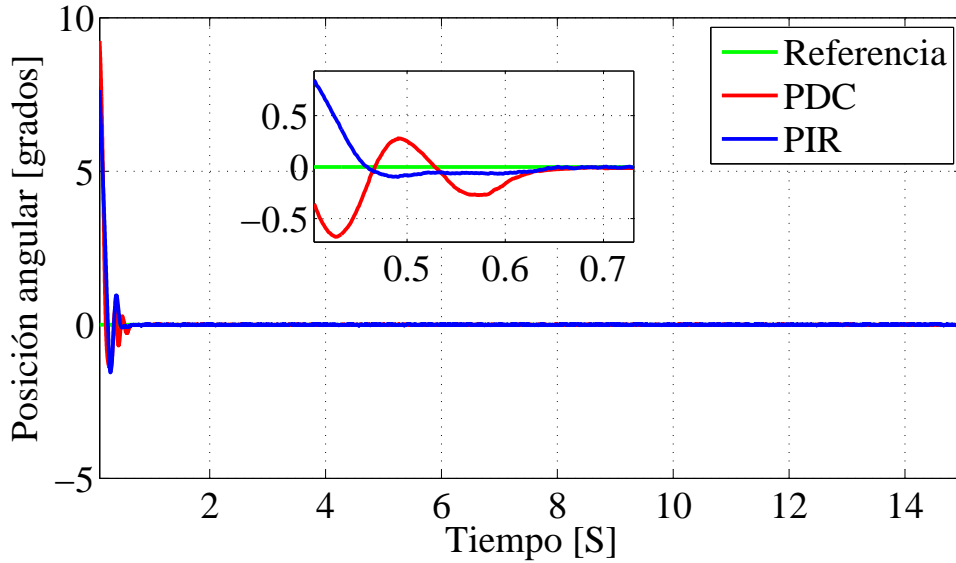


Figura 4.13: Señal de salida y señal de referencia del Carro-Péndulo.

Las velocidades angulares se ilustran en la Figura 4.14.

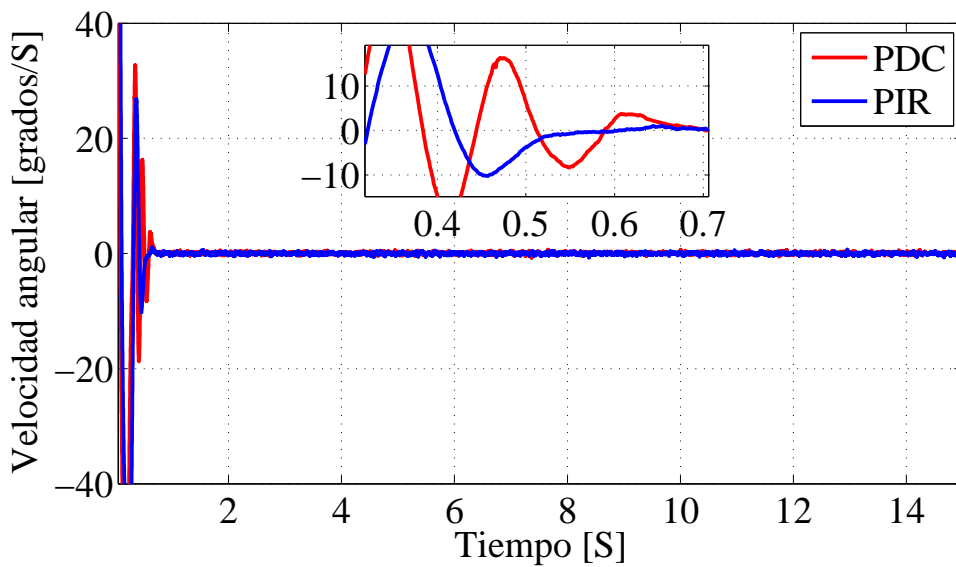


Figura 4.14: Velocidad angular del Carro-Péndulo.

Las señales de control aplicadas al Carro-Péndulo se ilustran en la Figura 4.15. Como se observa, la señal de control PDC opera entre  $\pm 15$  volts, mientras que el controlador PIR no lineal (azul) opera entre  $-7.5$  a  $15$  volts. Además, presenta menos amplificación de ruido.

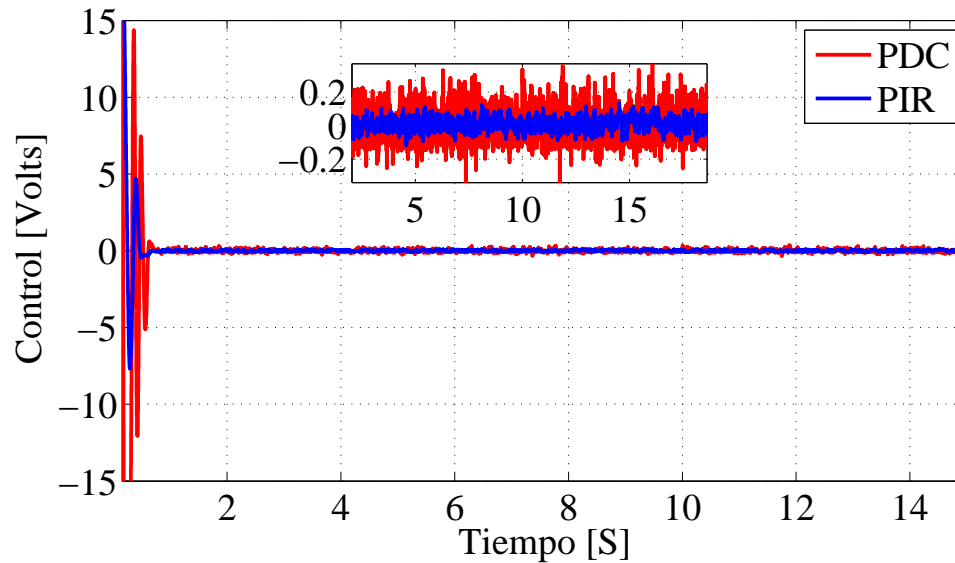


Figura 4.15: Señal de control aplicado al Carro-Péndulo.

El error de posición angular del Carro-Péndulo es ilustrado en la Figura 4.16.

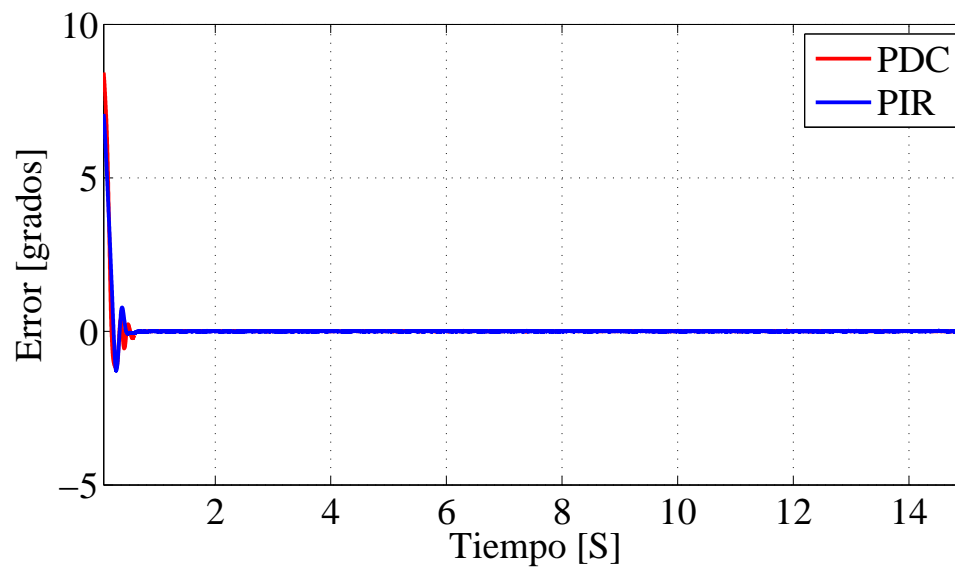


Figura 4.16: Error de posición angular del Carro-Péndulo.

En la tabla siguiente se registra la media, mediana y la desviación estándar del error de

posición angular para el sistema Carro-Péndulo en lazo cerrado con la ley de control PDC y la suma convexa de controladores PIR.

Control	Media del error	Mediana de error	Desviación estándar del error
PDC	0.0580	0.0067	0.6345
PIR no lineal	0.0534	0.0027	0.5419

Tabla 4.1: Media, mediana y desviación estándar del error de posición angular (Carro-Péndulo).

## 4.5. Conclusiones del Capítulo

En el presente Capítulo se emplea la metodología propuesta por T-S y los resultados expuestos en [39] para diseñar y sintonizar una ley de control formada por una suma convexa de controladores PIR. La suma convexa de controladores PIR ha sido implementada en la plataforma experimental Carro-Péndulo. Por otra parte, se realiza una comparación con la ley de control PDC. A diferencia de la ley de control PDC, el control PIR no requiere el empleo de acciones derivativas, además incluye una acción integral para eliminar el error en estado estacionario presente en algunos sistemas.

# Capítulo 5

## Conclusiones y Trabajo futuro

En este Capítulo se presentan las conclusiones y las principales aportaciones de la tesis, así como algunas sugerencias de trabajos futuros por desarrollar en esta línea de investigación.

### 5.1. Conclusiones

Mediante un análisis en el dominio de la frecuencia se obtiene una estrategia de sintonización gráfica para las leyes de control del tipo retardado. Para ello, a través de la metodología de  $\mathcal{D}$ -particiones se establecen ecuaciones paramétricas para generar las regiones  $\sigma$ -estables del sistema en lazo cerrado. Más aún, mediante la exploración de estas regiones, se definen las condiciones analíticas para la sintonización de los controladores propuestos garantizando un máximo decaimiento exponencial alcanzable.

La implementación del controlador PR junto con la estrategia de control por realimentación linealizante en la plataforma brazo de robot de unión flexible, muestra la efectividad del controlador propuesto para tareas de seguimiento en los sistemas no lineales. Cabe destacar que la plataforma antes mencionada presenta altas no linealidades, además de ser un sistema subactuado.

Por otra parte, los resultados teóricos y experimentales obtenidos en la plataforma Carro-Péndulo, muestran que es posible estabilizar sistemas no lineales SISO mediante una suma convexa de controladores PIR. Aquí, la acción integral del controlador PIR no lineal garantiza robustez ante perturbaciones constantes, mientras que la parte retardada presenta un comportamiento semejante a la acción derivativa con la ventaja de no requerir el empleo de técnicas de aproximación para su implementación.

En general, aplicando la estrategia de control por realimentación linealizante y por medio de la metodología propuesta por T-S es posible extender el campo de aplicación de los controladores del tipo retardado hacia los sistemas no lineales SISO. Además, la simplicidad de los controladores propuestos facilita su implementación y sintonización.

Con la sustitución de las acciones derivativas por acciones retardadas en el diseño de controladores, se resuelve el problema de amplificación de ruido presente en las mediciones, evitando problemas como la saturación de actuadores, el uso de filtros y el empleo de algoritmos en diferencias finitas.

A diferencia del trabajo realizado en [53], aquí se proponen condiciones analíticas para sintonizar la ley de control PR en sistemas de orden  $n$ . Por otra parte, los resultados propuestos en [39], son extendidos para aplicarlos en sistemas no lineales SISO de segundo orden.

## 5.2. Trabajo futuro

Dentro de los trabajos a futuro para mejorar y abarcar otros aspectos se propone:

- Realizar el análisis de la  $\sigma$ -estabilidad de los controladores PR y PIR en el dominio temporal.
- Aplicar la suma convexa de controladores PIR a una planta experimental considerando el enfoque sector no lineal.
- Implementar las leyes de control propuestas en sistemas de mayor orden.



# Bibliografía

- [1] C. Abdallah, P. Dorato, J. Benites-Read, and R. Byrne. Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. *American Control Conference*, pages 3106–3107, 1993.
- [2] J. Agee, Z. Bingul, and S. Kizir. Higher-order differential feedback control of a flexible-joint manipulator. *Journal of Vibration and Control*, 21(10):1976–1986, 2015.
- [3] M. Ahmad, M. Tumari, and A. Nasir. Composite fuzzy logic control approach to a flexible joint manipulator. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 10(1), 2013.
- [4] W. Anderson. Learning to control an inverted pendulum using neural networks. *IEEE Control Systems Magazine*, 9(3):31–37, 1989.
- [5] H. Aziz and J. Iqbal. Flexible joint robotic manipulator: Modeling and design of robust control law. *Robotics and Artificial Intelligence*, pages 63–68, 2016.
- [6] Y. Cao and Frank P. Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(2):200–211, 2000.
- [7] D. Cheng, T. Tarn, and A. Isidori. Global feedback linearization of nonlinear systems. *Proceedings of 23rd Conference on Decision and Control*, 23:74–83, 1984.
- [8] Y. Chenguang, L. Zhijun, and L. Jing. Trajectory Planning and Optimized Adaptive Control for a Class of Wheeled Inverted Pendulum Vehicle Models. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 43(1):24–36, 2013.
- [9] C. Chiang. Decentralized robust fuzzy-model-based control of uncertain large-scale systems with input delay. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 8(2):498–505, 2006.
- [10] J. Chiasson. A new approach to dynamic feedback linearization control of an induction motor. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3):391–397, 1998.
- [11] K.L. Cooke and Z. Grossman. Discrete delay, distributed delay and stability switches. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 86(2):592–627, 1982.

- 
- [12] B. Craig, W. Thomas, V. Xavier, and Kristofer S. Implementation and characterization of a multi-hop 6TiSCH network for experimental feedback control of an inverted pendulum. *Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc, and Wireless Networks (WiOpt), 2017 15th International Symposium on*, pages 1–8, 2017.
- [13] S. Domínguez, P. Campoy, J. Sebastián, and A. Jiménez. *Control en el espacio de estado*. Prentice Hall, 2nd edition, 2006.
- [14] G. Ellis. *Observers in control systems: a practical guide*. Academic Press, 2002.
- [15] G. Feng. A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(5):676–697, 2006.
- [16] G.F. Franklin, J.D Powell, and M.L. Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley, 1990.
- [17] R. Garrido and H. Arismendi-Valle. Estudio experimental del desempeño del controlador Proporcional Integral Retardado. *XVI COMRob 2014*, 2014.
- [18] F. Ghorbel, J. Hung, and M. Spong. Adaptive control of flexible-joint manipulators. *IEEE Control Systems Magazine*, 9(7):9–13, 1989.
- [19] K. Gu, J. Chen, and V.L. Kharitonov. *Stability of time-delay systems*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [20] J. Hale and S. Verduyn. *Introduccion to functional differential equations*. Springer-Verlag, 1993.
- [21] B. Jakubczyk. Feedback linearization of discrete-time systems. *Systems and Control Letters*, 9(5):411–416, 1987.
- [22] M. Kandroodi, F. Farivar, and M. Shoorehdeli. Control of Flexible Joint Manipulator via Variable Structure Rule-Based Fuzzy Control and Chaos Anti-Control with Experimental Validation. *Intelligence Systems in Electrical Engineering*, 12(16), 2013.
- [23] O. Khan, M. Pervaiz, E. Ahmad, and J. Iqbal. On the derivation of novel model and sophisticated control of flexible joint manipulator. *Revue Roumaine des Sciences Techniques-Serie Electrotechnique et Energetique*, 62(1):103–108, 2017.
- [24] K. Khorasani. Adaptive control of flexible-joint robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 8(2):250–267, 1992.
- [25] N. Krishna, K. Bindhu, and B. Vinod. Modeling and controller design of cart inverted pendulum system using MRAC scheme. *Frontiers of current trends in engineering and technology*, pages 21–24, 2016.
- [26] B. Lal, B. Tyagi, and H. Gupta. Optimal control of nonlinear inverted pendulum dynamical system with disturbance input using PID controller & LQR. *Control System, Computing and Engineering (ICCSCE)*, pages 540–545, 2011.

- [27] Z. Lendek, T.M. Guerra, R. Babuska, and B. Schutter. *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design Using Takagi-Sugeno Fuzzy Models*. Springer, 2010.
- [28] J. Li, H.O. Wang, and K. Tanaka. Dynamic parallel distributed compensation for Takagi-Sugeno fuzzy systems: An LMI approach. *Information Sciences*, 123:201–221, 2000.
- [29] E. Liu, Y. Yan, S. Wen, and Y. Yang. Feedback linearization control of uncertain satellite attitude based on disturbance estimation and state observation. *Proceedings of 2016 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference*, pages 1501–1507, 2016.
- [30] R. Lozano and B. Brogliato. Adaptive control of robot manipulators with flexible joints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(2):174–181, 1992.
- [31] A. Mahmood and Y. Kim. Decentralized formation flight control of quadcopters using robust feedback linearization. *Journal of the Franklin Institute*, 354(2):852–871, 2017.
- [32] R. Marino and M. Spong. Nonlinear control techniques for flexible joint manipulators: A single link case study. *Robotics and Automation*, 3(1):1030–1036, 1986.
- [33] F. Milsant. *Servosistemas lineales*. Editores Técnicos Asociados, 1st edition, 1972.
- [34] J. Neimark. D-subdivisions and spaces of Quasipolynomials. *Prikl Mat. Meh.*, 13:349–380, 1949.
- [35] S. Niculescu and W. Michiels. Stabilizing a Chain of Integrators Using Multiple Delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(5):802–807, 2004.
- [36] K. Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Prentice Hall, 5th edition, 2010.
- [37] T. Ogunfunmi. *Adaptive Nonlinear System Identification: The Volterra and Wiener Model Approaches*. Springer, 8th edition, 2007.
- [38] A. Ramirez, S. Mondie, and R. Garrido. Integral Retarded Control Velocity Control of DC Servomotors. *IFAC Proceedings Volumes*, 46(3):558–563, 2013.
- [39] A. Ramirez, S. Mondie, and R. Garrido. Proportional Integral Retarded Control of Second Order Linear Systems. *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2239–2244, 2013.
- [40] A. Ramirez, S. Mondie, R. Garrido, and R. Sipahi. Design of Proportional-Integral-Retarded (PIR) Controllers for Second-Order LTI Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(6):1688–1693, 2016.
- [41] M. Ramírez-Neria, G. Ochoa-Ortega, N. Lozada-Castillo, M. Trujano-Cabrera, J. Campos-López, and A. Luviano-Juárez. On the Robust Trajectory Tracking Task for Flexible-Joint Robotic Arm With Unmodeled Dynamics. *IEEE Access*, 4:7816–7827, 2016.

- 
- [42] D. Robinett, J. Petterson, and C. Fahrenholtz. Lag-Stabilized Force Feedback Damping. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 21(3):277–285, 1998.
- [43] M. Seidi and H.D. Markazi. Performance-oriented parallel distributed compensation. *Journal of the Franklin Institute*, 348(7):1231–1244, 2011.
- [44] J.J.E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, 1991.
- [45] A.C. Solé. *Instrumentación industrial*. Alfaomega, 8th edition, 2010.
- [46] M.W. Spong. The swing up control problem for the acrobot. *IEEE control systems*, 15(1):49–55, 1995.
- [47] H. Suh and Z. Bien. Use of time-delay actions in the controller design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3):600–603, 1980.
- [48] G.M. Swisher and S. Tenqchen. Design of proportional-minus-delay action feedback controllers for second and third order systems. *American Control Conference*, 8(3):254–260, 1988.
- [49] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15(1):116–132, 1985.
- [50] K. Tanaka and H.O. Wang. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis*. Jonh Wiley & Sons, 2001.
- [51] L. Tarek, L. Charles, and T. Ali. Cart-pendulum balancing problem using fuzzy logic control. *Creative Technology Transfer-A Global Affair*, pages 393–397, 1994.
- [52] A.N Tripathi. *Linear Systems Analysis*. New Age, 2nd edition, 2005.
- [53] R. Villafuerte, S. Mondie, and R. Garrido. Tuning of proportional retarded controllers: Theory and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(3):983–990, 2013.
- [54] R. Villafuerte and J-A. Ortega Melo. Diseño y sintonización de una ley de control borrosa proporcional retardada: enfoque frecuencial. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 12(4):467–475, 2015.
- [55] H. Wang, H. Ohtake, and K. Tanaka. Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Proceedings of the Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference*, 1:127–132, 2001.
- [56] L. Wang. Stable adaptive fuzzy controllers with application to inverted pendulum tracking. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 26(5):677–691, 1996.

- 
- [57] A. Yesildirek and F.L. Lewis. Feedback linearization using neural networks. *IEEE World Congress on Computational Intelligence*, 31(11):1659–1664, 1994.
- [58] X. Yuan, Z. Chen, Y. Yuan, and Y. Huang. Sliding mode controller of hydraulic generator regulating system based on the input/output feedback linearization method. *Mathematics and Computers in Simulation*, 119:18–34, 2016.
- [59] Y. Zhao and H. Gao. Fuzzy-model-based control of an overhead crane with input delay and actuator saturation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(1):181–186, 2012.
- [60] Y. Zhao, H. Gao, J. Lam, and B. Du. Stability and stabilization of delayed T-S fuzzy systems: A delay partitioning approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(4):750–762, 2009.
- [61] Q.C. Zhong and H.X. Li. A delay-type PID controller. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1):265–270, 2002.

# Apéndice A

## Ley de control PID y control por modos deslizantes

A continuación se describe el control PID y el control por modos deslizantes los cuales fueron implementados en la plataforma brazo de robot de unión flexible.

### A.1. Ley de control PID

Con el fin de ilustrar las oscilaciones inducidas en el efector final debido a la unión flexible entre la base y el brazo del robot, se implementa un controlador PID para la posición angular de la base  $\theta_1$  independientemente de la posición angular del brazo  $\theta_2$ . El control PID es expresado como

$$V_{PID}(t) = -k_p(\theta_1(t) - y^*(t)) - k_d(\dot{\theta}_1(t) - \dot{y}^*(t)) - k_i \int (\theta_1(t) - y^*(t)) dt,$$

donde  $k_p = 40$  es la ganancia proporcional,  $k_d = 2$  es la ganancia derivativa y  $k_i = 10$  es la ganancia integral.

### A.2. Ley de control por modos deslizantes

Se emplea la superficie deslizante siguiente [41]

$$\sigma(t) = (z_4 - z_4^*) + \alpha_3 (z_3 - z_3^*) + \alpha_2 (z_2 - z_2^*) + \alpha_1 (z_1 - z_1^*) + \alpha_0 \int_0^t (z_1(\gamma) - z_1(\gamma)^*) d\gamma,$$

donde los parámetros  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  se seleccionan de tal forma que sigan las dinámicas del polinomio siguiente

$$\begin{aligned} p(s)_{ISM} &= (s^2 + 2\xi_{ISM}\omega_{ISM}s + \omega_{ISM}^2)^2, \\ &= s^4 + \alpha_3s^3 + \alpha_2s^2 + \alpha_1s + \alpha_0, \end{aligned}$$

donde  $\xi_{ISM}, \omega_{ISM} \in \mathbb{R}^+$  y

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \omega_{ISM}^4, \\ \alpha_1 &= 4\xi_{ISM}\omega_{ISM}^3, \\ \alpha_2 &= 2\xi_{ISM}^2 + 4\xi_{ISM}^2\omega_{ISM}^2, \\ \alpha_3 &= 4\xi_{ISM}\omega_{ISM}. \end{aligned}$$

El controlador por modos deslizantes es de la forma

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{LgL_f^3h(x)}(-a\sqrt{|\sigma(t)|}\text{sign}(\sigma(t) + y), \\ \dot{y} &= -W\text{sign}(\sigma(t)), \end{aligned}$$

donde si se satisfacen las condiciones

$$\kappa_1 > \frac{2\delta\kappa_2}{\kappa_2 - 1}, \quad \kappa_2 > 1, \quad \kappa_3 = \frac{\kappa_2 - 1}{2\delta},$$

entonces las condiciones ( $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0$ ) se cumplen en tiempo finito, si los parámetros del controlador se seleccionan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} W &= \frac{\kappa_1 + a\kappa_2}{\kappa_3}, \\ a &= \frac{\kappa_2(\delta\kappa_3 - \kappa_1) - \kappa_3(1 - 2\delta\kappa_3)}{\kappa_2^2 - \kappa_1\kappa_3}. \end{aligned}$$