UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

"Procesos de razonamiento empleados por estudiantes de licenciatura durante la justificación de resultados geométricos básicos"

T E S I S :

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

PRESENTA:
LIC. LAURA AGUILAR CASTRO

DIRIGIDA POR:
DR. FERNANDO BARRERA MORA
DR. AARÓN REYES RODRÍGUEZ

Mineral de la Reforma, Hidalgo, Febrero 2015.

ICBI-AAMyF/045/2015

M. EN A. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR
PRESENTE.

Por este conducto le comunico que el jurado asignado la pasante de la *Maestría en Ciencias en Matemáticas* y su Didáctica, **C. Lic. Laura Aguilar Castro**, quien presenta el trabajo de titulación: **"Procesos de razonamiento empleados por estudiantes de licenciatura durante la justificación de resultados geométricos básicos"**, después de revisar el trabajo en reunión de Sinodales ha decidido ***autorizar la impresión*** del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación se anotan las firmas de conformidad de los integrantes del Jurado:

PRESIDENTE:	Dr. Roberto Ávila Pozos	
PRIMER VOCAL:	Dr. Fernando Barrera Mora	
SECRETARIO:	Dr. Arturo Criollo Pérez	
SUPLENTE:	Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez	

Sin otro particular, reitero a usted la seguridad de mi atenta consideración.

ATENTAMENTE
"AMOR, ORDEN Y PROGRESO"
Mineral de la Reforma, Hgo., 26 de enero de 2015.
EL DIRECTOR

DR. ORLANDO ÁVILA POZOS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO ICBI DIRECCIÓN

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Carretera Pachuca - Tulancingo Km. 4.5, Ciudad Universitaria,
Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C.P. 42184
Tel. +52 771 7172000 exts. 2231, Fax 2109
avilap@uaeh.edu.mx

DEDICATORIA

A Dios,
por todo cuanto tengo y cuanto soy.

A Rubicel,
el gran amor y compañero de mi vida, por su apoyo incondicional, su paciencia, su tolerancia, sus sabios consejos, por motivarme a continuar y sobre todo, por estar conmigo en las situaciones difíciles y momentos felices de mi vida.

A mi Padre,
a quien le debo mucho de lo que soy y, sobre todo porque me ha enseñado la fortaleza de espíritu para superar los grandes fracasos y vicisitudes de la vida.

A mi Madre,
a quién me hubiera gustado decirle lo mucho que la admiraba y amaba, de quién aprendí a ser más humana y por quién espero llegar a ser una mejor persona.

A mi hermano y hermanas,
porque siempre han confiado en mí, los quiero mucho.

A la familia de mi esposo,
por haberme brindado su apoyo incondicional y por preocuparse por mí en todo momento.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado, así como la confianza que depositaron en mí y las facilidades que me dieron para el logro de esta meta.

A cada uno de los académicos que formaron parte de mi formación profesional, al Dr. Arturo Criollo, al Dr. Rafael Villarroel, al Dr. Ricardo Cruz, al Dr. Hugo Espinosa, a la Mtra. Jazmín Licona, al Dr. Orlando y al Dr. Roberto Ávila, a todos ellos les agradezco sus enseñanzas y consejos, nunca los olvidare.

Le agradezco de manera muy especial al Dr. Aarón Reyes y al Dr. Fernando Barrera, por haberme apoyado en cada paso para concluir con éxito esta meta. Gracias por su apoyo, regaños y enseñanzas, los aprecio y admiro.

A los estudiantes que participaron en esta investigación, sin su apoyo no hubiera sido posible la realización del presente trabajo.

A mis compañeros de grupo, ya que de ellos aprendí y seguiré aprendiendo.

"Nuestra recompensa se encuentra en el esfuerzo y no en el resultado. Un esfuerzo total es una victoria completa"

Mahatma Gandhi.

RESUMEN

El presente trabajo tiene el propósito de documentar y analizar las formas de razonamiento empleadas por estudiantes de licenciatura, al abordar actividades que implican demostrar resultados básicos de geometría. El marco conceptual de este trabajo está basado en la perspectiva de resolución de problemas, así como en la caracterización de los tipos de razonamiento y argumentación que desarrollan los estudiantes al enfrentar situaciones problemáticas. La metodología empleada en este trabajo es cualitativa. Se recopiló información sobre la forma en que estudiantes de licenciatura demuestran resultados geométricos básicos, mediante pruebas escritas y entrevistas grabadas en video. Los resultados de este trabajo muestran que durante la elaboración de demostraciones los estudiantes tienen oportunidades para diseñar sus propias estrategias y rutas de solución, así como desarrollar diferentes formas de razonamiento.

Abstract

The aim of this research is to document and analyze cognitive process developed by undergraduate students when developing proofs of basic geometry results. The conceptual framework that guided data interpretation was constructed around the problem solving model as well as the characterization of ways of reasoning and arguments that students can offer to convince themselves and convince others about the validity of a mathematical result. The methodology employed was qualitative. The sources of data were written records and semi-structured interviews, which were video recorded. The principal results are that proof tasks offered students opportunities to design their own strategies and solutions routes, and to develop different ways of creative reasoning.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tiene el objetivo de documentar y analizar las formas de razonamiento que emplean estudiantes de una licenciatura en matemáticas durante la demostración de resultados geométricos básicos. Este tema fue elegido dada la importancia que tiene para los profesores conocer cómo piensan los estudiantes, ya que esta información constituye la base para determinar las características de las tareas y estrategias de instrucción que pueden favorecer el desarrollo del pensamiento matemático y la construcción de un aprendizaje con entendimiento. Asimismo, el conocer diferentes rutas para resolver un problema robustece las aproximaciones didácticas que el profesor puede emplear para diseñar tareas y escenarios de instrucción.

En el primer capítulo describimos, desde un contexto histórico, la importancia del estudio de la Geometría Euclidiana, así como también algunos referentes normativos tanto nacionales como internacionales (SEP[1] y NCTM[2], respectivamente) y que orientan la enseñanza de la geometría en Educación Básica y Educación Media Superior. De la misma manera, en este capítulo planteamos el objetivo general y las preguntas que orientan la investigación.

En el segundo capítulo, exponemos los elementos que integran el marco conceptual y se explican las razones que permitieron su elección y articulación. El marco de esta investigación se construyó a partir de considerar algunos conceptos básicos del marco de resolución de problemas (Polya, 1981; Schoenfeld, 1985; Santos Trigo, 2010; Barrera y Reyes, 2013), así como la clasificación de los tipos de razonamiento que emplean los estudiantes durante la resolución de problemas (Lithner, 2007; Lithner y Bergqvist, 2011) y las formas de justificación utilizadas para convencerse a sí mismos y convencer a otros acerca de la validez de un resultado matemático (Harel y Sowder, 1997).

---

[1] Secretaría de Educación Pública
[2] Por sus siglas en inglés National Council of Teachers of Mathematics

En el capítulo 3, detallamos la metodología empleada durante la investigación. Explicamos el propósito, características de las tareas y realizamos un análisis previo de las mismas. Describimos algunas características de los participantes de la investigación, así como los instrumentos mediante los cuales se llevó a cabo la recolección de información. Además, llevamos a cabo el procesamiento y el análisis de la información recabada, el cual incluye resumir la información, describir las rutas de solución seguidas por cada estudiante para resolver las tareas y construir algunos diagramas que permitan visualizar las diferencias y semejanzas de las diferentes aproximaciones, así como los elementos cognitivos puestos en juego en cada una de las rutas de solución, enfatizando el tipo de razonamiento, los esquema de prueba y las heurísticas empleadas.

En el capítulo 4, analizamos las formas de argumentación que los participantes emplearon para asegurarse y convencerse de sus respuestas (Hersh, 1993; Moore, 1994; Weber, 2001 Villiers; Raman, 2003; Recio y Godino, 2001; Segal, 2000; Selden y Selden, 2003), y el papel de las heurísticas empleadas en la construcción de las rutas de solución (Polya, 1981; Schoenfeld, 1985). Cabe mencionar que la forma en que los estudiantes se convencen a sí mismos o convencen a otros de un resultado no se restringe al uso de argumentos deductivos, sino que incluyen la utilización de elementos visuales o empíricos (Harel y Sowder, 1998), los cuales son aspectos que apoyan la construcción de argumentos formales.

En el capítulo 5, realizamos una reflexión sobre los resultados y elaboramos algunas de las conclusiones que consideramos relevantes. Es importante señalar que dada la naturaleza del trabajo, estos resultados no pretenden establecer generalizaciones respecto al tipo de razonamiento o argumentaciones que podrían llevar a cabo los estudiantes al abordar tareas en las que demuestren resultados geométricos, sino resaltar aquellos aspectos que resultaron relevantes en el contexto específico en el que se implementó el trabajo de investigación. Además de aportar información útil respecto a las diferentes rutas o aproximaciones que los estudiantes siguieron y ejemplificar una posible forma para analizar las características de pensamiento desarrollado por los estudiantes. Finalmente, formulamos algunas observaciones y sugerencias que podrían servir como referente para futuras investigaciones.

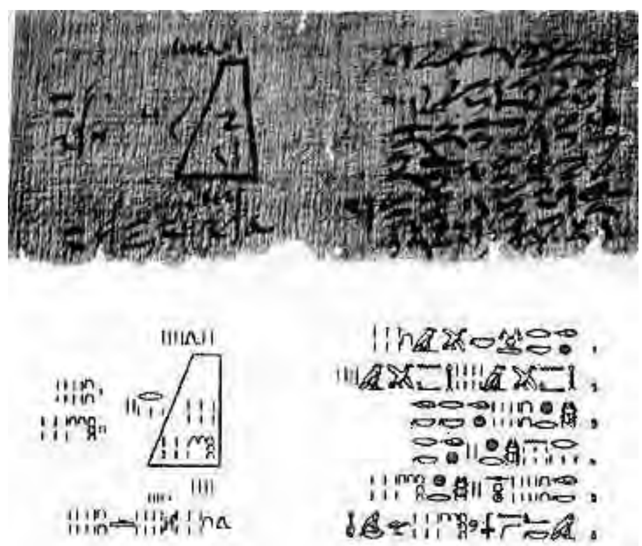
CAPÍTULO I

I. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

I.1. Antecedentes

La palabra geometría proviene de la unión de dos palabras griegas *geo*, tierra y *metría*, medida, que juntas significan medición de la tierra. Los conocimientos geométricos fueron empleados por los egipcios con la finalidad de resolver problemas relacionados con la pérdida de tierras durante las crecidas del rio Nilo y con la orientación de sus construcciones, sin embargo, éstos consistían esencialmente en reglas que tenían una finalidad práctica. Una evidencia del tipo de conocimientos matemáticos que poseían los antiguos egipcios se encuentra en diferentes papiros que se conservan en la actualidad (figura 1.1).

(a) [3]



(b)[4]

Figura 1.1. Problemas matemáticos en el papiro de Rhind (a) y el papiro de Moscú (b).

[3] Imagen recuperada de http://www.um.es/docencia/pherrero/mathis/egipto/papiros.htm
[4] Imagen recuperada de http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Egyptian_papyri.html

El saber matemático de los egipcios fue trasladado a Grecia a través de Tales de Mileto (640-546 a. C.); ya que de acuerdo con Proclo (siglo V d. C.), Tales visitó Egipto y ahí aprendió geometría (Anglin, 1994). Proclo comenta en el *Sumario de Edemo*[5], que Tales estableció cuatro teoremas: (i) el círculo se biseca por su diámetro, (ii) los ángulos de la base de un triángulo con dos lados iguales son iguales, (iii) los ángulos opuestos de líneas rectas que se intersecan, son iguales y (iv) si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno son iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los triángulos son congruentes. Se cree que Tales empleaba razonamientos lógicos para justificar las proposiciones matemáticas y no confiaba sólo en la intuición, como lo hacían los egipcios. Es decir, Tales fue uno de los primeros matemáticos en demostrar una afirmación matemática mediante un procedimiento deductivo. Incluso algunos autores mencionan que la primera demostración de la que se tiene registro es la prueba elaborada por Tales de que el diámetro del círculo divide a éste en dos partes iguales (Bramlett y Drake, 2013).

La simplicidad y obviedad de los teoremas enunciados y demostrados por Tales son un indicador de que este matemático conocía la importancia de la prueba. Tales demostró estos resultados no porque tuviera dudas acerca de su veracidad, sino porque trataba de desarrollar una técnica sistemática para justificar resultados (Turchin, 1977; Davis y Hersh, 1982). Un aspecto que caracteriza a las demostraciones de esta época es que se expresaban de forma retórica, ya que el simbolismo algebraico como lo conocemos actualmente fue desarrollado hasta el siglo XVI por Vieta y perfeccionado en el siglo XVII por Descartes.

Euclides (330 - 275 a. C.), fue un matemático griego reconocido como el autor de los *Elementos* (figura 1.2), una colección de libros que constituyen un tratado de geometría y de teoría de números. La característica central del trabajo de Euclides es que cada resultado era demostrado mediante argumentos deductivos partiendo de un pequeño conjunto de axiomas, definiciones, postulados, nociones comunes y otras proposiciones demostradas previamente; lo cual constituye lo que se conoce actualmente como método axiomático.

[5] Edemo de Rodas fue estudiante de Aristóteles 320 a. C.

Figura 1.2. Teorema de Pitágoras como aparece en “Los Elementos”. [6]

En México, también se tienen vestigios del empleo de la geometría que utilizaron varias de las culturas mesoamericanas, entre ellas podemos mencionar a la cultura Olmeca. Para Ysunza y Ogazon (1974), esta civilización tuvo su origen entre 1800 a. C. a 100 a. C. mientras que otros autores la señalan como la primer civilización política mesoamericana (Flores, 2007). Esta cultura empleo sus conocimientos de geometría para esculpir gigantescas cabezas de piedra, figurillas y estelas, además de establecer un calendario, el juego de pelota y algunas obras arquitectónicas como las pirámides, que fueron edificaciones usadas para llevar a cabo cultos religiosos. Su conocimiento sobre el uso de la Geometría se fue trasmitiendo a otras culturas como la Teotihuacana y la Maya, por mencionar algunas. Las culturas mesoamericanas realizaron construcciones de gran esplendor arquitectónico como las pirámides de la Luna, Pirámide del Sol, el templo de Quetzalcóatl, Templo de las Inscripciones o el Tajín. Existen otras construcciones arquitectónicas mesoamericanas que muestran la grandeza y el conocimiento de la geometría que se tenía entre esas culturas pero sería necesario hacer un estudio más amplio de este tema.

[6] Imagen recuperada de http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/html/grecia/grecia.html

El conocimiento de estas civilizaciones sobre el empleo de la geometría fue con fines meramente prácticos, no se conoce documento a la fecha que date de esa época y que nos permita saber si ese conocimiento fue utilizado para realizar demostraciones más profundas como en el caso de los griegos. Sin embargo y a pesar de no tener evidencias de esto último, en la revista México desconocido número 219 del año de 1995, se publicó un artículo que describe el análisis geométrico realizado por el matemático Oliverio Sánchez en 1992, quién basándose en investigaciones y descubrimientos de Antonio León y Gama[7], Alfonso Caso[8] y de Raúl Noriega [9]; éste asegura que tres monolitos prehispánicos (la Piedra del Sol, la Piedra de Tizoc y la Piedra de Moctezuma) muestran información relevante sobre el conocimiento y empleo de la geometría por los mexicas. En dicho documento se asegura que para Oliverio, la Piedra del Sol contiene información sobre la construcción de polígonos regulares complejos como: el pentágono, el heptágono, el heptacontakaidecágono, así como también el cuadrado, hexágono, nonágono y sus múltiplos; así mismo afirma que se describe el procedimiento para trisecar un ángulo de 120°. Lo anterior a base de emplear solo regla y compás.

Oliverio menciona que la Piedra de Tizoc y la de Moctezuma contienen el procedimiento para construir polígonos regulares de lados 40, 48, 64, 128, 192 y 240 hasta 480. La primera piedra, muestra también la construcción de polígonos de 15 lados; mientras que la segunda contiene el procedimiento para trazar polígonos de 11 y 13 lados y la construcción de este último polígono permite resolver un problema geométrico como lo es la cuadratura del círculo con una aproximación de 35 diezmilésimas.

---

[7] Antonio León y Gama (1735-1802), fue en su tiempo un jurista, científico e historiador. Sin embargo fue también un apasionado de la astronomía, lo cual le permitió escribir la obra *Descripción histórica y cronológica de las dos Piedras que con ocasión del nuevo empedrado que se está formando en la Plaza principal de México*, el año de 1790. De hecho fue el primero en estudiar la Piedra del Sol y la estatua de la Coatlicue, desde un punto de vista cultural más que de relaciones geométricas.

[8] Alfonso Caso (1896-1970), fue quizá el mayor representante de la arqueología mexicana mesoamericana. Fue el primero en estudiar y difundir la arquitectura de templos, piedras, esculturas, escritura, cerámica, libros, mapas y muchas otras obras relacionadas a las culturas precolombinas. su estudio sobre la Piedra del Sol fue muy limitada pero originó que arqueólogos, matemáticos e historiadores, profundizaran en su estudio.

[9] Raúl Noriega (1907-1975), fue un investigador muy dedicado. En 1953 realiza un análisis matemático sobre la Piedra del Sol y establece la relación del calendario con los movimientos del Sol, Venus, la Luna y la Tierra, mientras que relaciona la Piedra de Tizoc con los movimientos de Venus.

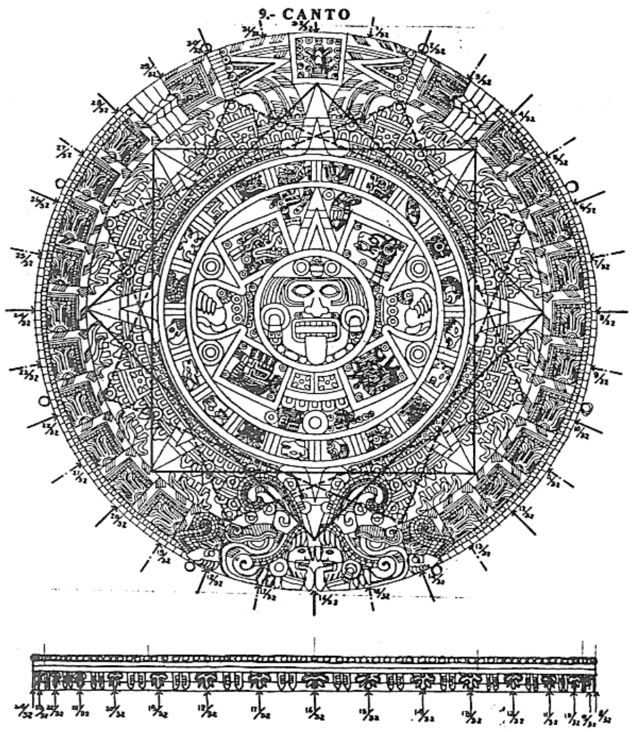


Figura 1.3. La Piedra del Sol, mostrando los módulos relacionados con la composición circular
Fuente: México desconocido, 1995, p.63.

Una investigación reciente sobre el empleo de la geometría en la cultura mesoamericana es el estudio llamado *Geometría Mesoamericana* (Martínez, 2000), el cual lleva a cabo un análisis detallado sobre las relaciones geométricas que se encuentran en varias obras mesoamericanas como: estucos, códices, esculturas, centros ceremoniales, puntas de lanza o cuchillos de sacrificio, instrumentos musicales e incluso el asentamiento de sus ciudades.

> Los geómetras mesoamericanos idearon la división del círculo en 360 grados -un grado por cada día del año-, dejando fuera los cinco *nemontemi* o días nefastos que no tenían cabida en dicha división; conocían, por lo tanto, la bipartición de un ángulo. Es probable que el problema de obtener el ángulo de un grado haya sido resuelto no a través de rectángulos. Desarrollaron las progresiones tanto aritméticas como geométricas y conocieron la "Divina Proporción" o proporción áurea; el Número de Oro o ϕ; el número π, que expresa la relación del diámetro de un circulo con su circunferencia; los rectángulos estáticos y dinámicos; el rectángulo perfecto, llamado también *rectángulo áureo* o RECTÁNGULO ϕ, y su armónico, el RECTÁNGULO K o $\sqrt{\phi}$;

el RECTÁNGULO Σ, característico del arte mesoamericano; los RECTÁNGULOS $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\, y\, \sqrt{5}$; los RECTÁNGULOS ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3 y sus recíprocos, además de los entrelazados y combinaciones de los anteriores. (Martínez, 2000, p. 248)

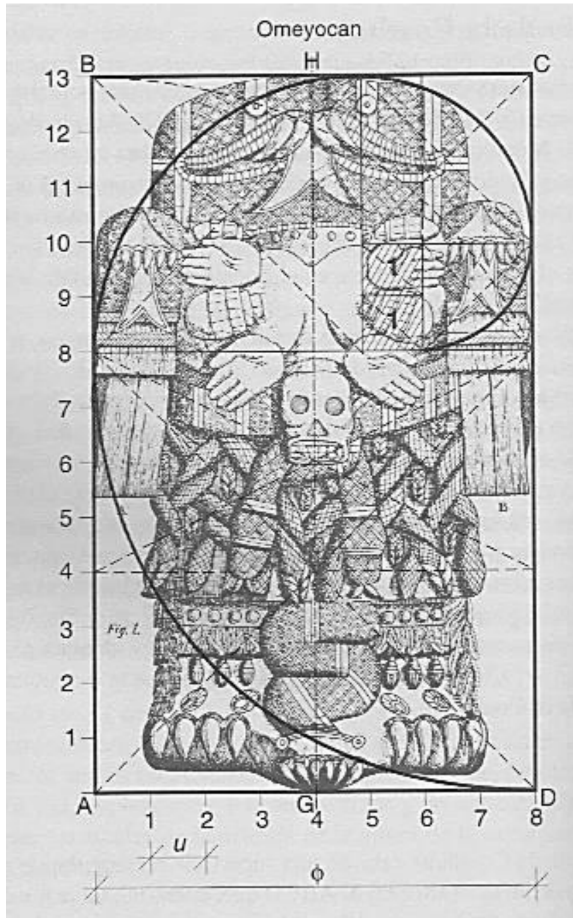


Figura 1.4. Frente de la Coatlicue, mostrando la espiral ϕ.
Fuente: Martínez, 2000, p. 156.

Para Martínez (2000), las obras mesoamericanas están diseñadas por *RECTÁNGULOS BÁSICOS*[10] los cuales dependen de las relaciones establecidas según el material de análisis, es decir, cada pieza contiene una unidad específica de medida que genera su RECTÁNGULO BÁSICO.

Cabe señalar que para estas culturas, esas relaciones geométricas no solo fueron realizadas con fines estéticos más bien tenían un profundo significado místico y a la

[10] La autora se refiere a rectángulos que se generan del cuadrado y su diagonal; define como módulo (M) a la razón entre la altura y la base del rectángulo. Define varios *RECTÁNGULOS* generados a partir del RECTÁNGULO GENERADOR o CUADRADO UNIDAD.

vez el propósito de relacionar el todo con cada una de sus partes y cada una de sus partes con el todo, principalmente con el Universo.

Con base en lo expresado en párrafos anteriores, podríamos asegurar que para las culturas mesoamericanas fue importante establecer relaciones geométricas en la mayoría de sus artes plásticas y por lo tanto aplicaron un pensamiento deductivo para realizar registros astronómicos y arquitectónicos, además, de auxiliarse de la geometría para lograr la perfección en sus cálculos y construcciones. Es aquí donde nos damos cuenta de que fue parte fundamental el desarrollar habilidades que les permitieran aplicar su conocimiento geométrico en sus diversas obras.

En cuanto a la enseñanza de la geometría entre estas culturas, el conocimiento era trasmitido de generación a generación y de acuerdo al estatus social de cada grupo, no se podía aprender un nuevo conocimiento si la persona no pertenecía a un grupo social conformado de antemano; es decir, los oficios como arquitectos, alfareros, guerreros o sacerdotes era un cargo que se transmitía de generación en generación.

A partir de la conquista de México el 12 de octubre de 1942, la educación de los grupos mesoamericanos da un giro de 180° y con este suceso se pierden vestigios importantes sobre las costumbres de las culturas prehispánicas como documentos, incluso se destruyen construcciones que nos permitirían actualmente entender más sobre estas culturas.

Durante el dominio español se establece la necesidad de educar al pueblo conquistado, en principio, con el fin de establecer la lengua castellana como un medio de comunicación, luego se pretende educar al pueblo en oficios; en este último, se puede decir que se comienza a observar un intento de educar al pueblo en algunos temas de geometría, por ejemplo, en oficios como la carpintería o la escultura con el propósito de prolongar la servidumbre a la elite española. En esta etapa no se tenía el propósito de desarrollar las capacidades de los individuos, sin embargo, a partir de 1822 la educación en México comienza a tomar importancia para la creación de las primeras Escuelas Primarias Públicas con las escuelas Lancasterianas. Posteriormente en 1833 Valentín Gómez Farías establece las Escuelas Primarias del Distrito Federal y con ello el que uno de los puntos fuera enseñar a los niños a leer, escribir y contar (Villalpando, 2014). Hasta este punto se observa que aún en sus inicios la enseñanza de la geometría no es relevante. Para 1889 se discute en el Congreso de Instrucción, entre varios temas, la enseñanza de nociones prácticas de geometría entre los diversos contenidos propuestos para Primaria Elemental[11]y Primaria Superior[12], mismas que como lo menciona José M. Villalpando, el fin primordial de la educación era la adquisición sistemática de conocimientos (Villalpando, 2014). En el mismo Congreso se estableció que la Educación Preparatoria debía durar 6 años y comenzar por enseñar Matemática y Lógica.

Para el año de 1977, el Programa de Estudio de Primaria de Sexto, propone que la enseñanza de la Geometría debía "lograr una comprensión más amplia del mundo que nos rodea, a través del estudio de sus relaciones con algunos elementos geométricos" (p. 71), además, éste recomienda desglosar y dosificar de manera programática los contenidos matemáticos durante el transcurso de la Educación Primaria y revisarlos en ocho unidades de aprendizaje con el fin de evitar el desinterés de los estudiantes. Considerando la curricula señalada por el Programa de Estudio- Sexto Grado de Educación Primaria, en cada uno de los grados de Primero a Sexto se proponía revisar un tema de Matemáticas específicamente y en cuanto a la enseñanza de la geometría se buscaba revisarla en el Quinto grado y cuyos temas a tratar fueran: la simetría bilateral, la rotación o simetría de rotación, el área y volumen, el dibujo a escala y la geometría cartesiana.

De acuerdo al Archivo Histórico de la SEP (1928), el Plan de Estudios de Secundaria de 1926, contemplaba en Primer año la enseñanza del dibujo constructivo, en el Segundo año el dibujo de imitación mientras que en el Tercer año no se contemplaba materia relacionada con la enseñanza de la Geometría (pp. 394 - 395); para 1932 se cambiaba a la enseñanza del dibujo de imitación en Primer año y el dibujo constructivo en el Segundo ciclo (Irigoyen, 2003). En cuanto a los Planes de Estudio de Bachillerato entre los años 1996 y 2006, se propone que en los dos primeros

[11] Enseñanza para niños de entre 6 a 12 años.
[12] El estudio equivalente a lo que hoy se conoce como Educación Secundaria Básica, ésta se cursaría después de terminar la primaria elemental y duraría en un inicio 2 años.

semestres se revisen temas de Geometría y en el tercer y cuarto semestre temas de Geometría Analítica (UNAM, 1996).

En 1996, los Libros para el Maestro de Matemáticas de los grados de Primero a Sexto de Educación Primaria, recomendaba que los estudiantes en el primer año, reconocieran y diferenciaran las características de las figuras y además identificaran cuadrados, rectángulos, triángulos y círculos en su entorno (SEP, 1996a); en el segundo grado, se proponía que identificaran por su forma y nombre a figuras como: cuadrados, rectángulos, triángulos, círculos, trapecios, rombos, romboides, pentágonos y hexágonos (SEP, 1996b); en el tercer grado, se esperaba que se desarrollara la intuición geométrica y la imaginación espacial a través del análisis del espacio físico, de los objetos y figuras del entorno, y de su ubicación y representación en el plano, así como el desarrollar la habilidad para realizar trazos y mediciones, utilizando instrumentos como la regla y la escuadra (SEP, 1996c); en el cuarto grado, se buscaba desarrollar la habilidad en el manejo de diferentes instrumentos de geometría, para el trazo de líneas paralelas y perpendiculares, figuras, ejes de simetría y cuerpos geométricos (SEP, 1996d); en el quinto año, se esperaba desarrollar habilidades para clasificar, comparar y relacionar figuras geométricas, de acuerdo con la simetría, paralelismo, perpendicularidad y ángulos, así como las destrezas para la construcción de algunos cuerpos geométricos, utilizando instrumentos como la escuadra, la regla, el transportador y el compás (SEP, 1996e); finalmente, en el sexto grado se proponía desarrollar habilidades para clasificar, comparar y relacionar figuras geométricas, de acuerdo con la simetría, el paralelismo, la perpendicularidad y ángulos, así como destrezas para la construcción de algunos cuerpos geométricos, utilizando instrumentos como la escuadra, la regla, el transportador y el compás (SEP, 1996f).

En cuanto a la enseñanza de la Geometría en la Educación Secundaria, los Planes y Programas de Estudio 1993 y en los Planes y Programas de Estudio de 1997, establecían que en Primer año los temas de geometría a abordarse debían ser: el dibujo y los trazos geométricos, la simetría axial, la medición y el cálculo de áreas y perímetros; en el Segundo año, se pretendía que los estudiantes conocieran las figuras básicas y los trazos geométricos, la simetría axial y la central, los ángulos entre paralelas y una secante, la equivalencia de figuras, el cálculo de áreas y los sólidos, y en el Tercer año el estudio de los triángulos y cuadriláteros, el círculo, la semejanza, el teorema de Pitágoras, los sólidos y los elementos de trigonometría.

En la Reforma Integral de Primaria 2009[13], se cambia la forma de organizar los contenidos y se dividen los contenidos matemáticos por ejes. Uno de estos es llamado *Forma, espacio y medida* y en el cuál se incluyen los temas de Geometría. En este eje se estableció que el estudio de la geometría y la medición en la Educación Básica permitiera que el alumno: explorará las características y propiedades de las figuras geométricas, se generasen condiciones para que los alumnos ingresaran en un trabajo con características deductivas y debían conocer los principios básicos de la ubicación espacial y el cálculo geométricos. De la misma manera, se pretende que los estudiantes pudieran resolver problemas de manera autónoma, comunicarán información matemática, validaran sus procedimientos y resultados, y manejaran técnicas eficientemente. En cuanto a los temas de geometría, se pretendía que estos permitieran que los estudiantes: conocieran las propiedades básicas de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, prismas y pirámides; pudieran calcular perímetros, áreas o volúmenes y expresar medidas en distintos tipos de unidad. En la Reforma Integral de Educación Básica 2011, se busca que los estudiantes de Educación Primaria, de Primero a Sexto año, conozcan y usen las propiedades básicas de ángulos y diferentes tipos de rectas, así como del círculo, triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares e irregulares, prismas, pirámides, cono, cilindro y esfera al realizar algunas construcciones y calcular medidas, expresar e interpretar medidas con distintos tipos de unidad, para calcular perímetros y áreas de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares e irregulares.

En cuanto a los Programas de Estudio 2006 de Educación Básica Secundaria, en la asignatura de Matemáticas; se propone organizar los contenidos matemáticos en tres ejes: *Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico*, *Forma, Espacio y Medida* y,

---

[13] Se conoce como Reforma Integral de Primaria a la modificación curricular que se efectuó en los Planes y Programas de Estudio de Primero a Sexto de Primaria en el año 2009, con la finalidad de articular el proceso de enseñanza-aprendizaje basado en el enfoque de competencias.

Manejo de la Información, en donde los temas de geometría se revisan en el segundo eje. En el mismo documento se recomendaba que en Primer grado, se revisaran temas como las transformaciones (movimientos en el plano), las formas geométricas (rectas y ángulos, figuras planas), la medida (justificación de fórmulas, estimar medir y calcular); en Segundo grado, la medida (justificación de fórmulas), las formas geométricas (figuras planas, rectas y ángulos, cuerpos geométricos) y las transformaciones (movimientos en el plano); en Tercer grado, las formas geométricas (figuras planas, rectas y ángulos, semejanza), la medida (justificar fórmulas, estimar, medir y calcular) y las trasformaciones (movimientos en el plano).

En los Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas. se continua la misma organización de contenidos en los tres ejes del 2006, pero a diferencia de éste, se pretende revisar los temas de los tres grados de la siguiente manera: en Primer grado, el estudio de figuras y cuerpos (trazo de triángulos con juego de geometría, análisis de altura, medianas, mediatrices y bisectrices, construcción de polígonos regulares, ángulo interno y externo, construcción de círculos) y la medida (justificación de fórmulas, área de polígonos regulares y transformación de figuras, perímetro y área de polígonos, longitud de una circunferencia su área y perímetro). En el Segundo grado, el estudio de las figuras y cuerpos (ángulos entre paralelas, justificación de ángulos interiores de triángulos y paralelogramos, construcción de triángulos, suma de ángulos interiores de polígonos, cubrimiento del plano, construcción de figuras simétricas) y la medida (cálculo de áreas de figuras compuestas, áreas laterales de prismas y pirámides, justificación de fórmulas de volumen de cubos y pirámides rectas, relación entre medidas de volumen y capacidad, sistema internacional de medidas, ángulos inscritos y centrales en un círculo, medida de ángulos inscritos y centrales, arcos, sectores y corona). En Tercer grado, las figuras y cuerpos (congruencia y semejanza, rotación y traslación, simetría axial y central, rotación y traslación, teorema de Tales, homotecia, cilindros y conos) y la medida (teorema de Pitágoras, razones trigonométricas seno, coseno y tangente, secciones del cono y cilindro, cálculo del volumen de cilindros y conos).

En general se puede observar que en los Planes y Programas de Estudio del Sistema Educativo Mexicano, el estudio de la Geometría se considera importante; sin embargo, era frecuente ubicar su tratamiento en los últimos bloques de enseñanza puesto que gran parte de los profesores de Educación Básica seguía la secuencia marcada en los Planes y Programas sin salirse de ella; esto pudo ocasionar el no poder cubrir en su totalidad los contenidos propuestos para el estudio de la Geometría.

Actualmente, los Programas de Estudios de Educación Secundaria recomiendan abordar las ideas geométricas paralelamente con ideas de *Sentido Numérico, Pensamiento Algebraico y el Manejo de la información*, e incluso vincular al estudio de la Geometría con el de otros temas y asignaturas como la Geografía y la Física, entre otras. Por ejemplo, en los Programas de Estudio de Secundaria (SEP, 2011) se intenta revisar en cada bloque algunos temas de geometría y relacionar su enseñanza con otros ejes temáticos dentro del mismo bloque como el álgebra (figura 1.3).

Bloque II

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente			
Aprendizajes esperados	Ejes		
	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Forma, espacio y medida	Manejo de la información
• Resuelve problemas aditivos con monomios y polinomios. • Resuelve problemas en los que sea necesario calcular cualquiera de las variables de las fórmulas para obtener el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos. Establece relaciones de variación entre dichos términos.	Problemas aditivos • Resolución de problemas que impliquen adición y sustracción de monomios. • Resolución de problemas que impliquen adición y sustracción de polinomios. Problemas multiplicativos • Identificación y búsqueda de expresiones algebraicas equivalentes a partir del empleo de modelos geométricos.	Medida • Justificación de las fórmulas para calcular el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos. • Estimación y cálculo del volumen de cubos, prismas y pirámides rectos o de cualquier término implicado en las fórmulas. Análisis de las relaciones de variación entre diferentes medidas de prismas y pirámides.	Proporcionalidad y funciones • Identificación y resolución de situaciones de proporcionalidad inversa mediante diversos procedimientos. Nociones de probabilidad • Realización de experimentos aleatorios y registro de resultados para un acercamiento a la probabilidad frecuencial. Relación de ésta con la probabilidad teórica.

Figura 1.3. Organización de los aprendizajes de Matemáticas del Bloque II, de Segundo Año de Secundaria.
Fuente: Programa de Estudios 2011. Guía para el maestro.
Educación Básica Secundaria. Matemáticas, p. 40.

En cuanto a la importancia del estudio de la Geometría, en Educación Básica, encontramos que en *el libro del maestro de Educación Secundaria de Matemáticas* (SEP, 1997a: pp. 223-224) se señala que el estudio de la geometría es importante porque promueve que los estudiantes desarrollen la imaginación, la capacidad de explorar, representar y describir su entorno físico, para comprender ideas relacionadas con la medición, el número y otras partes de la matemática. Se considera que mediante el estudio de la Geometría el estudiante adquiere las bases para estudiar otras ramas de las matemáticas y otras disciplinas científicas. En el *Programa de Estudios 2006. Educación Básica Secundaria de Matemáticas* (SEP, 2006), en el eje de *Forma, Espacio y Medida*; se propone implementar actividades de instrucción que despierten el interés de los estudiantes, que promuevan la reflexión, que los inviten a encontrar formas de resolver problemas, formular argumentos y validar resultados y en donde se privilegie el razonamiento más que la memorización.

En el caso del Bachillerato —de carácter obligatorio a partir de la Reforma Integral de la Educación Media Superior 2009 (RIEMS, 2009)— se señalan como competencias disciplinares básicas[14] el construir e interpretar modelos matemáticos para comprender y analizar situaciones reales, hipotéticas o formales; formular y resolver problemas matemáticos; explicar e interpretar los resultados, argumentar las soluciones obtenidas mediante un lenguaje verbal, matemático y el empleo de las tecnologías de la información y comunicación, entre otros. En este nivel educativo los contenidos geométricos que se recomiendan revisar en los dos primeros semestres se incluye al teorema de Pitágoras, congruencia y semejanza de triángulos, el teorema de Tales, ángulos entre paralelas, propiedades de polígonos y la circunferencia, razones trigonométricas, leyes de senos y cosenos. En los siguientes dos semestres, se abordan temas como: lugar geométrico, ecuación de la recta, elipse, parábola y circunferencia.

[14] Se define como competencia disciplinar básica al conjunto de "conocimientos, habilidades y actitudes asociados con las disciplinas en las que tradicionalmente se ha organizado el saber y que todo bachiller debe adquirir. Se desarrollan en el contexto de un campo disciplinar específico y permiten un dominio más profundo de éste." (SEP/Acuerdo 442, 2008: pp. 2-3)

Es importante señalar que no solamente se ha dado importancia al estudio de la Geometría en Educación Básica o Educación Media ya que actualmente gran parte de las Universidades Públicas de nuestro País, y en las cuales se imparte alguna Licenciatura en Matemáticas (solo los Estados de Baja California Sur, Campeche, Tamaulipas y Quintana Roo no tienen carreras de Licenciatura en Matemáticas y por lo tanto no fueron consideradas para este análisis), incluyen en su Plan de Estudios la revisión de alguna asignatura de Geometría. Solo el 62% de las Universidades Públicas que consideramos en este estudio, incluyen la revisión específica del tema de Geometría Euclidiana y en algunos casos incluyen la revisión de geometrías más complejas como la Geometría Diferencial o la Geometría Riemanniana entre otras (Véase Apéndice Q).

Con respecto a recomendaciones internacionales sobre la enseñanza de la Geometría, algunas propuestas curriculares de carácter internacional como los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000), describen características particulares para una educación de alta calidad así como los contenidos y procedimientos matemáticos que los estudiantes deben aprender desde el Nivel Preescolar hasta el Bachillerato. Esta propone que a través del estudio de la Geometría los estudiantes pueden aprender acerca de las formas y las figuras, el análisis de estructuras así como de las características de las mismas y sus relaciones. La Geometría permite desarrollar el razonamiento de los estudiantes y su habilidad de justificación. El razonamiento y la prueba deben ser elementos indispensables en la formación de todos los estudiantes para fomentar un aprendizaje con entendimiento (Hiebert, *et al*., 1997).

> El razonamiento matemático y la prueba ofrecen formas poderosas de desarrollar y expresar la comprensión de un amplio rango de fenómenos. Las personas que razonan y piensan analíticamente tienden a notar patrones, estructuras, o regularidades en situaciones del mundo real y en el mundo de los objetos simbólicos; estas personas se cuestionan si esos patrones son accidentales o si ocurren por alguna razón; además formulan y justifican conjeturas. En última instancia una prueba matemática es un medio formal de expresar tipos particulares de razonamiento y justificación.
>
> Ser capaz de razonar es esencial para el entendimiento de las matemáticas. Por medio del desarrollo de ideas, la exploración de fenómenos, la justificación de

> resultados y el uso de conjeturas en todas las áreas y—con diferentes expectativas de sofisticación— a todos los niveles escolares, los estudiantes deben ver y esperar que las matemáticas tengan sentido. (NCTM, 2000, p. 56)

El razonamiento es un hábito de la mente y como tal debe desarrollarse a través de su uso consistente en diversos contextos. Sin embargo y a pesar de la importancia que se le da al diseño de actividades que permiten desarrollar el razonamiento y la justificación, la investigación en educación matemática ha obtenido evidencia de que los estudiantes presentan diversas dificultades para elaborar demostraciones geométricas y para razonar creativamente. Lithner (2007) propone algunas características para diferenciar el razonamiento imitativo del razonamiento creativo mostrado por los estudiantes durante la solución de problemas. Los estudiantes aprenden a razonar observando cómo otras personas razonan, por lo que toman como modelo el razonamiento mostrado y/o reforzado por el profesor (Lithner y Bergqvist, 2012). En esta misma línea de ideas, Hiebert (1997) hace énfasis en la importancia del diseño de tareas que permitan a los estudiantes mostrar y compartir sus estrategias de solución ya que esto les permitirá ir desarrollando un razonamiento creativo. Otras investigaciones han documentado que los estudiantes muestran diversas dificultades al momento de realizar tareas que requieren justificar sus afirmaciones. Por ejemplo, los estudiantes frecuentemente fracasan al construir pruebas y al explicar por qué las cosas funcionan de cierta manera. Por esta razón es necesario estudiar los procesos mentales que muestran los estudiantes cuando construyen dichas pruebas (Weber, 2012), y explicar el estado de habilidad intelectual desarrollado por los estudiantes al momento de probar conjeturas (Harel y Sowder, 1998).

I.2. Revisión de la literatura

En Geometría es muy común emplear pruebas o demostraciones para justificar resultados, pero, ¿qué significa demostrar un resultado o conjetura?, ¿en qué consiste una demostración?, ¿cuál es la finalidad de una demostración?, no hay una idea o definición única de lo que es una demostración, la historia de las matemáticas muestra que es un concepto que ha cambiado y evolucionado a lo largo del tiempo. En diversas culturas de la antigüedad, como Egipto o Babilonia, no existía la idea de demostración. En las matemáticas babilónicas no existen afirmaciones generales, tampoco hay indicios de métodos deductivos o incluso de explicaciones razonables de la validez de un resultado (Kleiner, 1991). Fue hasta la época de la Grecia clásica en que la demostración fue vista como un elemento importante de la actividad matemática. Incluso muchos matemáticos de épocas posteriores no realizaban de forma consistente demostraciones de sus resultados o descubrimientos que satisficieran los estándares actuales. Newton, por ejemplo, no dio una demostración del teorema del binomio, sino que basó su comprensión y certeza sobre este resultado en ejemplos y analogías (Polya, 1981, p. 91).

En el ámbito de la educación matemática algunos investigadores han tratado de establecer qué es una demostración y cuál es su función en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, sin embargo no se ha llegado a una definición o conceptualización unánime. Por ejemplo, algunos autores consideran que una demostración "es un razonamiento para dar validez a una afirmación, una argumentación que puede asumir formas diferentes, mientras sea convincente" (Hanna, 1989; citado en De Villiers, 1993, p. 17); mientras que para otros la prueba "es una explicación aceptada por una comunidad en un momento dado" (Balacheff; citado en Lupiañez, 1999, p. 2).

En lo que respecta a la función de la demostración en el aprendizaje de la disciplina, las opiniones también son diversas. Hersh (1993), por ejemplo, considera que la función de la demostración, en el ámbito de las matemáticas profesionales, es convencer a un conjunto de jueces calificados, es decir, al grupo de revisores quienes evalúan un artículo de investigación; mientras que la función de la demostración en el salón de clase es explicar por qué las cosas funcionan como lo hacen. De Villiers (1993) propone cinco funciones de las demostraciones: *medio de verificación*, autoridad absoluta para establecer la validez de una conjetura; *medio de explicación*, proporcionar las razones de por qué son ciertas dichas proposiciones; *medio de sistematización*, organización lógica de axiomas, definiciones y teoremas; *medio de* *descubrimiento*, la exploración, análisis, descubrimiento e inventiva; y *como medio de comunicación*, interacción social y de negociación de significados.

La creencia general de los profesores es que la función de una demostración es establecer la validez de una conjetura, es decir, obtener certeza de que las relaciones establecidas en una conjetura son ciertas, sin embargo la convicción acerca de la validez de un resultado es un prerrequisito para la búsqueda de una demostración. Cuando una persona se convence de que un teorema es verdadero, entonces tiene el aliciente para buscar una demostración. "Las demostraciones son el sello distintivo de las matemáticas, son una parte esencial de la contribución de las matemáticas a la cultura general. El estudiante que no ha quedado impresionado por una demostración matemática carece de una experiencia mental básica" (Polya, 1945, p. 126).

La investigación relacionada con la prueba en matemáticas ha seguido diversas rutas, por un lado existen investigaciones que han documentado las dificultades que muestran los estudiantes al realizar demostraciones (Harel y Sowder, 1998; Moore, 1994; Weber, 2001) o que han analizado cómo los estudiantes validan o evalúan si los argumentos en una demostración son aceptables (Raman, 2003; Recio y Godino, 2001; Segal, 2000; Selden y Selden, 2003).

Otros investigadores han enfocado su punto de vista en la naturaleza social de la prueba y en la construcción de ambientes de instrucción en los cuales los estudiantes llevan a cabo un proceso de negociación para determinar lo que constituye una justificación matemática aceptable (Selden y Selden, 1995). También se han realizado trabajos en los que se analiza el papel y función de la demostración en matemáticas (De Villiers, 1993, Hersh, 1993), así como estudios cuyo interés ha sido clasificar el tipo de justificaciones y argumentos elaborados por los estudiantes (Edwards, 1999; Harel y Sowder, 1998).

I.3. Planteamiento del problema

A pesar de que en la escuela se debe preparar a los estudiantes en el desarrollo del pensamiento geométrico, es difícil comprender las deficiencias que estos presentan durante la justificación de relaciones matemáticas; razón por la cual resulta interesante conocer el tipo de procesos cognitivos o formas de razonamiento que emplean los estudiantes al elaborar demostraciones, considerando a esta como una tarea de resolución de problemas (Weber, 2005).

El presente trabajo tiene la finalidad de identificar las formas de razonamiento que desarrollan estudiantes de licenciatura, durante la demostración de resultados geométricos básicos que puedan abordar con base en sus conocimientos previos. Es decir, problemas que no son demasiado fáciles, pero tampoco demasiado difíciles para los estudiantes. Como parte de la investigación se propone analizar también el tipo de heurísticas utilizadas por los participantes durante el proceso de construcción de las demostraciones. Los objetivos específicos del trabajo son:

(1) Identificar y documentar algunas características del tipo de razonamiento que emplean estudiantes de licenciatura en la resolución de problemas de geometría.

(2) Analizar el tipo de argumentos y las heurísticas que emplean los estudiantes durante el proceso de justificación.

A partir de estas consideraciones será necesario definir las preguntas que han de servir de guía para la realización de este trabajo, entre las que podemos señalar:

(1) ¿Qué tipo de razonamiento emplean estudiantes de licenciatura para resolver problemas geométricos y justificar el proceso de solución?

(2) ¿Cuáles argumentos y heurísticas emplean estudiantes de licenciatura durante la justificación de resultados geométricos básicos?

CAPÍTULO II

II. MARCO CONCEPTUAL

II.1. Introducción

Un marco de investigación está formado por una estructura de ideas y conceptos que orientan la observación y análisis de un fenómeno desde una perspectiva u óptica particular. De lo anterior se desprende que un problema de investigación puede abordarse utilizando diferentes marcos. Así, resulta importante explicitar aquellas ideas con base en las cuales se realizará la recolección de la información y el análisis de la misma; ya que esto permitirá al lector comprender las acciones llevadas a cabo por el investigador, así como dar sentido a la interpretación de los datos. En los trabajos en educación matemática, el marco de investigación generalmente incluye una concepción sobre la naturaleza de las matemáticas y, en consecuencia, una visión de lo que significa enseñar y aprender la disciplina.

De acuerdo con Eisenhart (1991), un marco conceptual es una estructura de explicaciones y argumentos de por qué eligen determinados conceptos, relaciones, ideas o puntos de vista y no otros, para sustentar una investigación. En el marco conceptual se argumenta por qué los conceptos elegidos, así como las relaciones entre ellos son apropiados y útiles dado el problema de investigación. Una ventaja de un marco conceptual, respecto de otros marcos de investigación (teóricos o prácticos) es que puede estructurarse a partir de diferentes posiciones teóricas compatibles, así como de conocimiento práctico del investigador, en la medida en que este pueda ofrecer argumentos sobre la relevancia de los mismos para la investigación.

El marco conceptual de este trabajo está estructurado a partir de considerar tres elementos importantes: (1) la resolución de problemas, (2) el tipo de razonamiento empleado por los estudiantes al resolver problemas y (3) las formas de justificación que utilizan los estudiantes para convencerse a sí mismos y convencer a otros respecto de la validez de un resultado. La relación que consideramos existente entre estos referentes teóricos se explica al finalizar el apartado II.4 mediante la figura 2.1.

II.2. La resolución de problemas

La resolución de problemas es un marco que considera que las matemáticas es la ciencia de los patrones, es decir, una disciplina que estudia las regularidades que aparecen en los números, las formas, el movimiento, el azar, entre otras. También es un marco que considera que el aprendizaje de las matemáticas va más allá de la memorización de fórmulas y la aplicación de procedimientos rutinarios, más bien para aprender matemáticas los estudiantes deben llevar a cabo actividades análogas a las desarrolladas por los matemáticos al crear nuevo conocimiento disciplinar (Simon y Blume, 1996). Es decir, el aprendizaje de las matemáticas requiere que los estudiantes exploren relaciones, que experimenten y analicen casos particulares, formulen conjeturas y las justifiquen, comuniquen resultados, que propongan sus propios problemas y diseñen los métodos o estrategias para resolverlos. Los estudiantes aprenden matemáticas y construyen significado de las ideas centrales de la disciplina cuando son capaces de inventar y analizar métodos para resolver problemas (Hiebert *et al*., 1997).

Otro aspecto importante del marco de resolución de problemas es que el estudiante debe ser capaz de problematizar las tareas, es decir, considerar las situaciones problemáticas en términos de dilemas que necesitan resolverse. Por otra parte, deben desarrollar una actitud inquisitiva, la cual consiste en preguntarse o cuestionarse constantemente sobre la validez de los resultados, la forma de encontrar más de un camino o ruta de solución o de cuestionarse si la solución es única.

Los antecedentes del marco de resolución de problemas se remontan al trabajo de Polya (1981), quien identificó y caracterizó cuatros fases por las que un resolutor[15] transita al resolver un problema: (i) comprender el problema, (ii) concebir un plan, (iii) ejecutar ese plan y (iv) examinar o verificar la solución. Otro aporte importante de Polya fue la identificación de diversas heurísticas, las cuales son sugerencias de carácter general que pueden ayudar en el proceso de solución de un problema, pero que no garantizan el éxito. En este trabajo, un aspecto de interés radica en la identificación de las diferentes heurísticas utilizadas por los estudiantes durante el proceso de justificación de resultados geométricos. Algunas de las heurísticas que consideramos importantes para el desarrollo de este trabajo son:

Trazo de figuras. Este consiste en auxiliarse de una figura para representar el problema a resolver; considerando que en la figura se representan los datos, así como algunas relaciones relevantes entre estos y la incógnita del problema. Por ejemplo, en el problema de hallar la longitud de la diagonal de un cubo, será de utilidad hacer una representación que incluya los datos del problema (véase Fig. A).

Empleo de analogías consiste en buscar similitudes entre problemas u objetos matemáticos, se considera también el buscar un ejemplo más sencillo de resolver. Por ejemplo, en el problema de hallar el volumen de un cilindro; un problema análogo podría ser el obtener en primera instancia el área de un círculo que tenga las mismas dimensiones de la base de dicho cilindro para posteriormente considerar el apilar varios de ellos hasta formar una torre de círculos que se volverán en conjunto el volumen del cilindro.

Descomponer y recomponer el problema. Descomponer el problema implica examinar detalladamente cada una de las condiciones o datos del problema y comprenderlos en su totalidad antes de intentar diseñar una ruta de solución. El recomponer el problema requiere de combinar elementos para convertirlo en un problema más sencillo y que pueda servir para resolver el problema inicial conservando los elementos, datos e incógnitas relevantes, a esto le denominaremos

[15] Con la palabra resolutor se hace referencia a la persona que resuelve un problema.

“problema auxiliar”. Por ejemplo, en el problema de encontrar la longitud de la diagonal de un cubo es importante pensar primero cómo obtener la longitud de la diagonal en un rectángulo (véase Fig. A).

Introducción de elementos auxiliares. Este consiste en agregar elementos en una figura geométrica en la que están representados los datos del problema, con la finalidad de que estos elementos adicionales apoyen la identificación de nuevas relaciones entre los objetos que componen una configuración geométrica. En el problema de encontrar la longitud de la diagonal de un cubo (véase Fig. A), además de emplear el dibujo, establecer las relaciones entre los datos y buscar analogías, sería necesario introducir un elemento auxiliar que nos permita aplicar algunos conocimientos previos; en este caso, se puede observar que para trazar una diagonal del cubo, puede utilizarse una de las caras y una arista perpendicular a ésta (ver la figura A). Ahora el problema de calcular la longitud de la diagonal del cubo se ha reducido a la aplicación del Teorema de Pitágoras al triángulo obtenido de la forma descrita (obsérvese el triángulo rectángulo sombreado en color azul de la figura A).

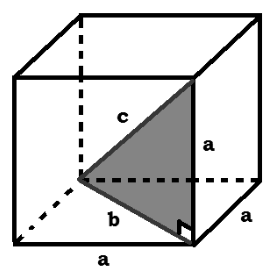


Figura A

Un siguiente avance en la construcción del marco de resolución de problemas lo llevó a cabo Schoenfeld (1985) quien propuso que las heurísticas mencionadas por Polya son de carácter muy general, por lo que se deben ejemplificar formas particulares de aplicación. Por otra parte, Schoenfeld caracterizó un conjunto de variables que influyen sobre la actividad de resolución de problemas: (i) los recursos o conocimientos previos, (ii) las heurísticas; (iii) el control, que son los procesos de monitoreo que lleva a cabo un estudiante para analizar su propio proceso de pensamiento y (iv) el sistema de creencias. Para los fines de este trabajo, además de las heurísticas, resulta de interés la consideración de los conocimientos previos, los cuales son la base con la que cuenta un resolutor para abordar un problema o una situación problemática.

Los problemas constituyen la base para que los estudiantes desarrollen formas matemáticas de pensar y un aprendizaje con entendimiento, pero ¿qué es un problema? Para Schoenfeld *un problema* es una tarea que es intelectualmente difícil para un individuo, sin embargo es posible que encuentre una solución a partir de sus recursos. En esta misma línea de ideas, Santos-Trigo (2007) señala que un *problem*a es una tarea o situación en la que aparecen componentes como la existencia de un interés, la no existencia de una solución inmediata, la presencia de diversos caminos o métodos de solución y la atención por parte de una persona o grupo de personas para resolver la tarea.

Por lo tanto, consideraremos como **un problema** a una tarea[16] o situación que requiere del resolutor un esfuerzo intelectual para abordarla; y la cual implicará que éste busque los caminos necesarios (no precisamente correctos) para intentar solucionar la tarea o situación planteada. Cuando un resolutor se enfrenta a un problema no son obvias las acciones que tiene que llevar a cabo para plantear una ruta o rutas de solución.

¿Por qué utilizar el marco de resolución de problemas para analizar el proceso de razonamiento llevado a cabo por un estudiante al elaborar una demostración? De acuerdo con Weber (2005), el proceso de construcción de una demostración puede considerarse como una tarea de resolución de problemas, en donde al estudiante se le pide elaborar una justificación de por qué una determinada afirmación es cierta. La elaboración de una demostración se basa primeramente en información inicial, a partir de la cual el resolutor tiene que deducir información adicional, la cual debe organizarse y estructurarse hasta obtener la conclusión deseada. Es decir, al realizar

[16] De acuerdo a la Real Academia Española, se define como el trabajo a realizarse en un tiempo limitado o como un ejercicio que se encarga al estudiante, sin embargo, en esta investigación optaremos por definirlo como el conjunto de actividades o problemas que requerirán del estudiante un esfuerzo intelectual mayor al requerido para resolver de forma mecánica una serie de ejercicios matemáticos.

una demostración el resolutor tiene que construir el método de solución por sí mismo, en este sentido las demostraciones son verdaderos problemas (Lithner, 2012).

II.3. Tipos de razonamiento

Un aspecto fundamental en la tarea de resolver problemas es precisamente el identificar el tipo de razonamiento que los estudiantes emplean al momento de resolverlos. Sin embargo, dado que cada persona posee diferentes referentes cognitivos (conocimientos previos, incluyendo estrategias y formas de trabajo), estos propiciaran diferencias en las rutas empleadas al resolver un mismo problema. Por lo tanto, conocer el tipo de razonamiento que emplean estudiantes al momento de resolver problemas de geometría básica será relevante en esta investigación.

¿Qué entendemos por razonamiento?, de acuerdo con Lithner (2007), el *razonamiento* es la línea del pensamiento mediante la cual se formula y estructura un conjunto de afirmaciones para alcanzar conclusiones en la resolución de tareas. No está basada necesariamente en la lógica formal, por lo tanto no se limita a la demostración y puede aún ser incorrecta en tanto existan razones que la respalden. El *razonamiento* es producto del pensamiento que comienza con una pregunta o una situación problemática y finaliza con una respuesta. El análisis de las formas de razonamiento de los estudiantes provee información de fondo acerca del proceso mental que los estudiantes desarrollan a través de la actividad de resolver problemas (Lithner, 2007; Lithner y Bergqvist, 2011; Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez, 2013). En este trabajo, el análisis de las formas de razonamiento que llevan a cabo los estudiantes al realizar demostraciones de resultados geométricos básicos se basa en la siguiente clasificación de tipos de razonamiento propuesta por Lithner y Bergqvist (2005):

Razonamiento imitativo. En este identificamos dos tipos de razonamiento: memorístico y algorítmico.

El razonamiento memorístico cumple las siguientes condiciones: 1) la selección de la estrategia está fundada en recordar y completar la respuesta; 2) la implementación de la estrategia consiste solo en anotar la respuesta.

El razonamiento algorítmico (AR) tiene las siguientes características: 1) la estrategia seleccionada implica recordar la solución algorítmica. La argumentación puede ser de diferentes tipos pero no es necesario crear una solución; 2) las partes del razonamiento de la estrategia implementada es trivial para razonar. Solo un error por descuido puede evitar la respuesta deseada.

Razonamiento creativo (razonar matemáticamente de manera creativa —CMR—), cumple los siguientes criterios:

Novedad. Se crea una nueva secuencia de razonamiento o se recrea una secuencia que ya se ha olvidado. Aquí el estudiante inventa sus propias fórmulas o rutas de solución o es capaz de reconstruir las relaciones inmersas en una solución revisada previamente.

Flexibilidad. El estudiante emplea diferentes aproximaciones y adaptaciones para resolver la tarea o situación. Es decir, el estudiante es capaz de elegir distintos caminos para resolver el mismo problema.

Plausibilidad. Existen argumentos que soportan la estrategia seleccionada y/o la implementación de la estrategia. No son consideradas conjeturas o intuiciones vagas. El estudiante puede convencerse de que el resultado es válido empleando procedimientos que son viables aunque no necesariamente correctos.

Fundamentación matemática. Los argumentos están basados en propiedades matemáticas intrínsecas de los componentes implicados en el razonamiento. El estudiante utiliza una serie de recursos como teoremas, definiciones y/o notación matemática para justificar sus argumentaciones.

Durante el registro y análisis de las respuestas dadas por los estudiantes que participan en esta investigación haremos referencia a estos tipos de razonamiento:

razonamiento imitativo cuando los estudiantes no muestren ninguna dificultad para recordar y aplicar un conocimiento previo en la resolución de los problemas, es decir, que implique solo la aplicación directa de una fórmula, un teorema o procedimiento ya conocido; de la misma manera haremos referencia a un **razonamiento creativo** cuando los estudiantes diseñen su propia ruta de solución o que durante el proceso de resolución empleen sus conocimientos previos de manera no convencional y a su vez que les permitan dar una respuesta convincente al problema.

Durante el proceso de justificar resultados también es importante observar el tipo de argumentaciones que emplean los estudiantes para dar respuesta al problema, por lo que es necesario referirnos a la **argumentación** y entender esta definición. Krummheuer (1995. p. 260), plantea una clasificación sobre la argumentación la cual contiene cuatro componentes: conclusión, información, justificación y el acompañamiento. La información es el punto inicial que constituye la tarea y la justificación da soporte a la conclusión para registrar la validez de los pasos.

II.4. Los esquemas de prueba

Los argumentos que los estudiantes emplean para justificar sus conjeturas y comunicarlas a los demás constituyen un elemento importante en el análisis de sus formas de razonamiento. De acuerdo con Harel y Sowder (1998), una persona puede convencerse o tratar de convencer a otro de la verdad de una conjetura mediante argumentos deductivos, evidencia empírica, evidencia visual, creencias personales o la opinión de una autoridad. Estos autores crearon un conjunto de categorías que dan cuenta de estas diferentes formas que utilizan los estudiantes para justificar una observación o conjetura. “Cada categoría de los esquemas de prueba representa un estado cognitivo, una habilidad intelectual en el desarrollo matemático de los estudiantes” (Harel y Sowder, 1998, p. 244). Esta clasificación está integrada por tres categorías principales, esquemas de convicción externa, esquemas empíricos y esquemas analíticos. Estos se explican a continuación:

Esquemas de prueba de convicción externa. Son formas de justificación que centran la atención en la forma más que en el contenido del argumento, en la opinión de una autoridad y el uso de símbolos sin hacer referencia al significado de éstos.

Esquema de prueba ritual. La fuente de la validez reside en la apariencia del argumento. Este esquema lo podemos identificar cuando un estudiante no rechaza una prueba mal elaborada; ya que centra la atención en la apariencia del argumento más que la corrección del mismo. También lo identificamos cuando los estudiantes muestran dudas acerca de la validez de una demostración que no incluye notación matemática, expresiones simbólicas o cálculos expresados sólo de forma retórica.

Esquema de prueba autoritario. La convicción de los argumentos se basa en la afirmación de alguna autoridad, ya sea porque un hecho se observó en algún texto o fue explicado por el profesor. Algunas características de los estudiantes que utilizan este esquema son que esperan que el profesor les dé la respuesta y no se involucran en su construcción, solicitan ayuda sin hacer un esfuerzo previo para resolver la tarea, o bien, esperan la confirmación de una autoridad para validar sus resultados, justifican sus conjeturas únicamente expresándolas de forma diferente y son renuentes a preguntar sobre la validez de alguna afirmación aun cuando tienen elementos para sospechar que ésta es incorrecta.

Esquema de prueba simbólico. Los estudiantes piensan en los símbolos sin hacer referencia a sus posibles referentes funcionales o cuantitativos. Para quienes utilizan este esquema, la verdad o corrección de una afirmación es basado en el uso de símbolos; su principal característica es que tratan de elaborar una demostración o solucionar un problema sin primero comprender su significado, esto es, sin construir una imagen mental coherente de la situación problemática.

Esquemas de prueba empíricos. Las conjeturas son validadas, puestas en duda o rechazadas por referencia a hechos físicos, experiencias sensoriales o ejemplos. Hay dos tipos de pruebas de esquema empírico: El esquema de prueba inductivo y el esquema de prueba perceptual.

Esquema de prueba inductivo. Las conjeturas son demostradas al evaluar cuantitativamente uno o varios casos específicos, que les permite convencerse que la conjetura es correcta. La convicción acerca de la veracidad de una conjetura es particularmente fuerte cuando observan un patrón que sugiere que uno puede generar ejemplos suficientes para sustentar la conjetura.

Esquema de prueba perceptual. Las observaciones perceptuales son hechas por medios visuales, pero sin que se ponga en juego la transformación de los objetos o la anticipación de los resultados de una transformación. Por ejemplo, cuando justifican una afirmación en geometría a partir de un dibujo particular, sin considerar qué podría ocurrir si ese dibujo sufriera una modificación.

Esquemas de prueba analíticos. En este tipo de esquemas las conjeturas son validadas por medio de deducciones lógicas, es más cercano al método de demostración matemática. Esta caracterización tiene dos subcategorías las cuales son:

Esquema de prueba transformacional. El proceso de justificación implica la realización de operaciones sobre los objetos matemáticos y una anticipación de resultados derivados de esas operaciones, la cual se basa en procedimientos deductivos.

Esquema de prueba axiomático. Es un esquema que presenta todas las características de una demostración en matemáticas.

En la figura 2.1, presentamos algunas relaciones entre los tres referentes teóricos que son de utilidad para sustentar esta investigación.

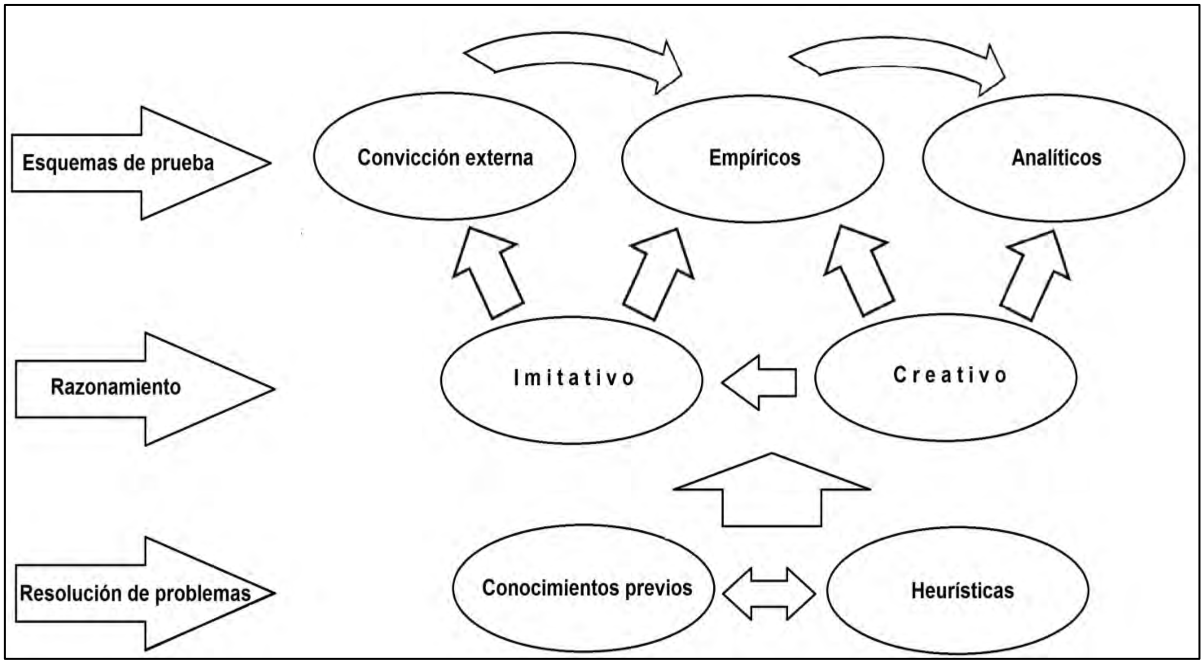


Figura 2.1. Elementos y relaciones que integran el marco conceptual.

En la figura 2.1, consideramos a los conocimientos previos como la base principal de la resolución de problemas, estos recursos se enriquecerán y su aplicación se verá potenciada por las heurísticas que empleen los resolutores. Al mismo tiempo, los conocimientos y heurísticas determinan las rutas de solución y el tipo de razonamiento.

La construcción de una ruta de solución involucra el desarrollo de justificaciones que permitirán a un resolutor convencerse o convencer a otros de su procedimiento de solución, es decir, si un resolutor muestra un razonamiento de tipo imitativo éste razonamiento posiblemente estará relacionado con esquemas de convicción externa ya que la ruta de solución no implicó una actitud inquisitiva. Los esquemas de prueba empíricos (esquemas de prueba perceptuales) son una de las primeras aproximaciones utilizadas durante el proceso de convencimiento, y es el paso previo para la construcción de argumentos deductivos. Es posible que el uso de esquemas de prueba empíricos se convierta en la base para la construcción de un pensamiento creativo, principalmente cuando el resolutor sea capaz de descomponer el problema en casos especiales para intentar observar un patrón que le permita hacer alguna generalización (esquemas de prueba inductivo), otra evidencia de un razonamiento creativo aparece al hacer empleo de diversos caminos de solución, o al identificar o descomponer el problema en casos especiales, emplear adecuadamente el uso de las propiedades de las figuras, teoremas, notación matemática y procedimientos válidos (esquemas de prueba axiomáticos) o anticipar el resultado de una operación, procedimiento o trasformación de una figura (esquemas de prueba transformacionales). Es importante reconocer que durante el proceso de justificación se pueden utilizar diversos esquemas de prueba. El proceso de instrucción busca promover que los estudiantes transiten de los esquemas de convicción externa a los empíricos y los deductivos.

CAPÍTULO III

III. METODOLOGÍA

III.1. Introducción

El tipo de metodología empleada en el presente trabajo es cualitativa, ya que interesa documentar las cualidades del proceso que siguen los estudiantes al resolver problemas de demostración, particularmente se busca identificar la estructura profunda de un problema, lo cual se refiere a la percepción lograda por los estudiantes, de los elementos o componentes clave como los recursos cognitivos con los que cuentan y que intervienen en el proceso de solución. El atender a la estructura profunda de los problemas implica reflexionar sobre la información proporcionada, el tipo de preguntas planteadas y las rutas potenciales de solución (Santos-Trigo, 1997). Es importante destacar que no interesa cuantificar el número de estudiantes que resolvió correctamente cada problema sino categorizar en forma cualitativa las características importantes de los procesos de solución, centrando la atención en la forma en que los participantes en el estudio dan sentido a los problemas, la forma en que elaboran justificaciones, así como el tipo de heurísticas que utilizan.

> La investigación cualitativa implica la utilización y recopilación de una gran variedad de materiales —entrevista, experiencia personal, historias de vida, observaciones, textos históricos, imágenes, sonidos— que describen la rutina y las situaciones problemáticas y los significados en la vida de las personas (Rodríguez, Gil & García, 1999, p. 32).

En este trabajo analizaremos el tipo de heurísticas utilizadas, así como los procesos de razonamiento llevadas a cabo por los estudiantes durante la resolución de problemas de demostración; manteniendo una postura exploratoria, al interpretar lo que ocurre durante el proceso de solución de problemas geométricos, posteriormente haremos un registro de las observaciones-mediante pruebas escritas, entrevistas, video entrevistas, etc.-; se contemplara la dinámica que surge al momento de resolver las tareas y entablaremos un dialogo libre con los participantes en la investigación –al indagar el tipo de procedimiento que emplearon o las herramientas que les auxiliaron en la construcción o justificación de resultados, etcétera (Rodríguez, Gil y García).

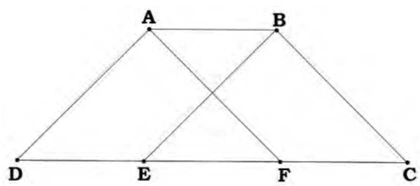
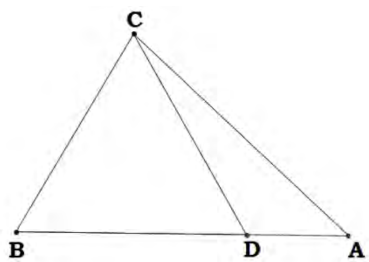
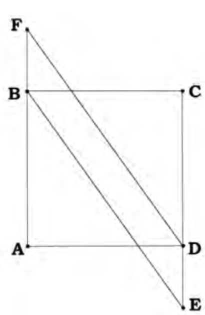
Como se señaló con anterioridad, la recolección de datos fue realizada por medio de pruebas escritas y entrevistas informales que fueron video-grabadas. Las pruebas escritas estuvieron integradas por diez problemas de geometría que fueron resueltos de manera individual por estudiantes de una licenciatura en matemáticas con conocimientos previos sobre algunos resultados básicos de geometría euclidiana.

Se les notificó a los participantes que sus datos personales son confidenciales, es decir que no aparecerán en el reporte de investigación, esto con el fin de propiciar una participación más libre durante la resolución de problemas geométricos. El procesamiento de la información incluyó la transcripción de los videos, el resumen de la información, el registro de las observaciones relevantes y el análisis de las formas de razonamiento, el tipo de argumentos, así como las heurísticas que emplearon los estudiantes para resolver los problemas planteados.

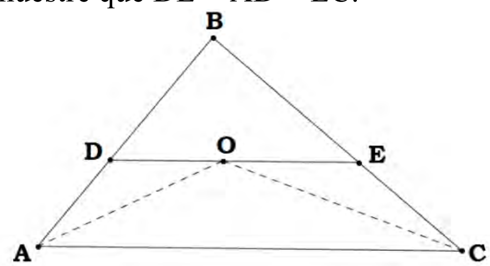
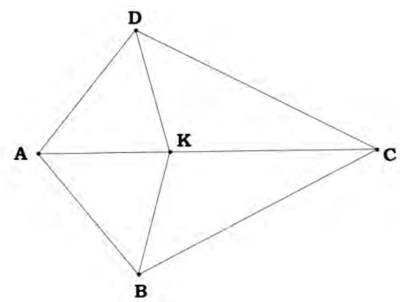
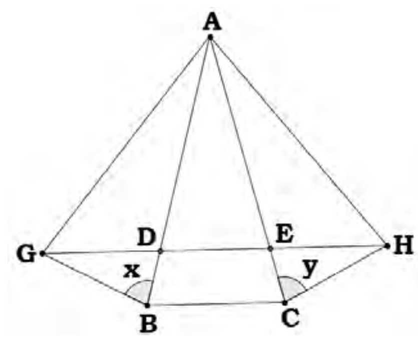
III.2. Las tareas

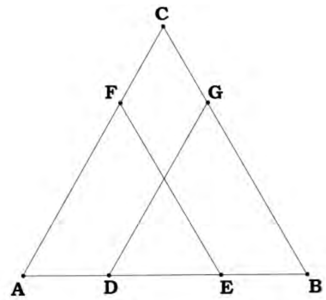
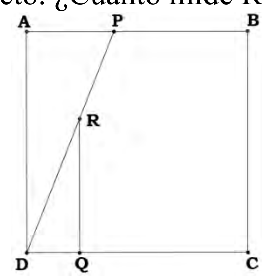
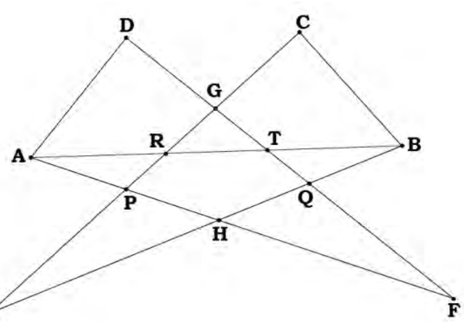
Se seleccionaron problemas que no tuvieran una solución inmediata o que la solución no fuera tan evidente y que los estudiantes pudieran abordar a partir del conjunto de conocimientos previos básicos con los que contaban en ese momento; estos conocimientos debían considerar el empleo del teorema de Pitágoras, ángulos entre paralelas cortadas por una secante, ángulos opuestos por el vértice, ángulos inscritos en una circunferencia, criterios de semejanza y congruencia de triángulos, definiciones y propiedades de figuras geométricas como triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares, así como también el empleo de fórmulas para el cálculo del área y perímetro.

La tabla 1, muestra las tareas propuestas así como también algunos conocimientos previos con los cuales los estudiantes podrían abordarlas y los cuales se determinaron a partir del análisis preliminar de cada tarea. Es importante señalar que los conocimientos previos que aquí se indican son únicamente una referencia para el investigador, ya que los estudiantes podrían seguir rutas alternativas de solución o utilizar recursos y estrategias diferentes de las consideradas en este análisis preliminar.

TAREAS PROPUESTAS	CONOCIMIENTOS PREVIOS (sugeridos)
1. El cuadrilátero ABCD es un trapecio, con AB paralela a DC y ∠ADC=∠BCD= 45°. E y F son puntos sobre el lado DC tales que DE = EF = FC = 1. Además, el trapecio tiene la propiedad de que AF es paralela a BC y BE es paralela a AD. ¿Cuál es el perímetro del trapecio?  Fuente: Problema y figura tomada de SMM [17] (2006; p. 10)	• Congruencia de triángulos • Ángulos entre paralelas • Propiedades de los cuadriláteros • Suma de ángulos internos en el triángulo • Teorema de Pitágoras • Razones trigonométricas • Definición de perímetro • Definición de perpendicular
2. En el triángulo ABC, ∠A+∠B=110°, y D es un punto sobre el segmento AB tal que CD=CB y ∠DCA=10°. ¿Cuánto mide ∠A?  Fuente: Problema y figura tomada de SMM (2006; p. 1)	• Suma de ángulos internos en el triángulo • Propiedades de los triángulos (equiláteros) • Ángulos suplementarios
3. ABCD es un cuadrado y *BFDE* un paralelogramo. Si AF = 7 y AD=5. ¿Cuál es el valor de la suma de las áreas del cuadrado y el paralelogramo?  Fuente: Figura tomada de Rubinstein (1963; p. 374)	• Propiedades de los paralelogramos • Teorema de Pitágoras • Semejanza de triángulos • Proporcionalidad • Despeje de variables • Aditividad de áreas

[17] Por sus siglas, Sociedad Matemática Mexicana

4. En el △ABC, las bisectrices de los ángulos en A y en C se cortan en el punto O. Por O se traza una recta paralela al lado AC, la cual corta a los lados AB y BC en los puntos D y E respectivamente. Demuestre que DE = AD + EC.  Fuente: Problema y figura tomada de Rubinstein (1963; p. 377)	• Ángulos entre paralelas • Propiedades de los triángulos (equiláteros) • Equivalencia entre segmentos
5. En la figura DC=BC y DK = BK. Demostrar que AD=AB  Fuente: Problema y figura tomada de Moise (1970; p. 147)	• Congruencia de triángulos • Ángulos suplementarios
6. En la figura, si AB=AC, AD=AE y ∠x=∠y, entonces AG=AH.  Fuente: Problema y figura tomada de Moise (1970; p. 147)	• Congruencia de triángulos • Suma de ángulos interiores de un triangulo • Ángulos opuestos por el vértice • Propiedades de los triángulos (equiláteros)
7. En la figura, si ∠A=∠B, AD=BE y ∠ADG= ∠BEF. Demostrar que ∠CFE=∠CGD.	• Congruencia de triángulos • Ángulos suplementarios • Equivalencia entre segmentos

 Fuente: Problema y figura tomada de Moise (1970; p. 142)	
8. En la figura se muestra un cuadrado de lado 12, donde la longitud de AP es 4, la de DQ es 3 y el ∠RQC es recto. ¿Cuánto mide RB?  Fuente: Problema y figura tomada de SMM (2012; p. 12)	• Semejanza de triángulos • Proporcionalidad • Teorema de Pitágoras • Aditividad de áreas
9. En la siguiente figura, los ángulos ∠D y ∠C son ángulos rectos y △APR ≅△BQT. Demostrar que el △ADF ≅ △BCE.  Fuente: Problema y figura tomada de Moise (1970; p. 194)	• Congruencia de triángulos • Equivalencia entre segmentos • Ángulos opuestos por el vértice
10. En la figura ABCD es un cuadrado, M es el punto medio de AD y MN es perpendicular a AC. Si el área del cuadrado es 120 cm^2. ¿Cuál es el área del triángulo sombreado?	• Definición de perpendicularidad • Teorema de Pitágoras • Semejanza de triángulos • Empleo de fórmulas para obtener áreas de triángulos

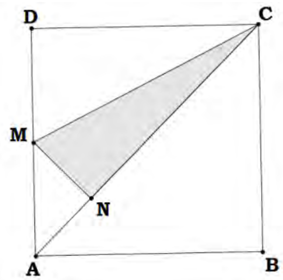
 Fuente: Problema y figura tomada de SMM (2013; p. 3)	

Tabla 1. Tareas propuestas y conocimientos previos sugeridos

III.3. Análisis previo de las tareas

En este apartado mostramos algunas rutas para resolver cada tarea, cabe señalar que en la mayoría de los casos se muestra más de una ruta de solución, con la finalidad de determinar los recursos, estrategias, formas de razonamiento y justificación utilizados, así como la potencialidad de cada ruta para estructurar y organizar el conocimiento.

Tarea 1. Una primera ruta de solución consiste en trazar perpendiculares al segmento DC por los puntos D y C, prolongar el segmento AB hasta que interseque a las perpendiculares para formar un rectángulo. Posteriormente se trazarán perpendiculares al segmento AB que pasan por los puntos A y B, formando un cuadrado de lado 1 por 1, considerando que a los lados opuestos iguales se oponen ángulos iguales y se sabe que tanto DA como BC son sus diagonales y forman ángulos de 45°. Después, en los triángulos $\triangle$ADE y $\triangle$BFC con el teorema de Pitágoras obtenemos que $DA = BC = \sqrt{2}$. Finalmente obtenemos que el perímetro es:

$$P_{ABCD} = 4 + 2\sqrt{2}\,.$$

Otra solución consiste en observar que dentro de la figura y con las condiciones de paralelismo entre segmentos se forman dos paralelogramos ADEB y AFCB. Por definición de trapecio, también sabemos que AB es paralelo a DC; con esto podemos afirmar que AB mide lo mismo que DE y por propiedad de los ángulos opuestos de los cuadriláteros, el ángulo ∠BAC y ∠ABE miden 45°. Con este dato y considerando que ∠AFD y ∠BCE también miden 45° podemos afirmar que el ∠DAF y ∠EBC miden 90°, por la suma de ángulos internos en los triángulos △DAF y △EBC respectivamente. Con estos datos podemos afirmar que el △DAF≅△EBC por criterio de congruencia ALA (45°, 2, 45°) y con ello podemos establecer que DA= BC por ser lados correspondientes de triángulos congruentes. Posteriormente, podemos identificar que estos dos triángulos al ser triángulos rectángulos podemos emplear identidades trigonométricas para obtener el valor de un cateto (lados DA y BC respectivamente), se puede establecer que en el triángulo △EBC, los catetos son EB y BC, así como EC es la hipotenusa con valor de 2; en este caso nos interesa establecer una razón trigonométrica para encontrar el valor del segmento BC, por lo tanto escribimos:

$$sen\ 45° = \frac{BC}{2}$$

$2\ sen\ 45° = B$; pero, $\quad sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$2\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = BC$$

$$BC = \sqrt{2}\,.$$

Pero, sabemos que DA=BC, por lo tanto:

$$DA = BC = \sqrt{2}\,.$$

Lo único que nos resta sería sumar los valores para obtener el perímetro del trapecio, el cual es:

$$P_{ABCD} = 4 + 2\sqrt{2}\,.$$

Tarea 2. En este problema se puede emplear un procedimiento algebraico para encontrar los valores de los ángulos. Lo primero que se hizo, fue considerar que el △CBD es un triángulo isósceles y por criterio de los ángulos opuestos a lados congruentes también son congruentes, es decir, ∠CBD = ∠CDB, los nombramos α

y, al ángulo $\angle$BCD como γ, con esto y la suma de ángulos internos en el $\triangle$BCD podemos establecer la ecuación:

$$\gamma + 2\alpha = 180° \qquad (1)$$

En el $\triangle$BCA, también nombramos $\angle$A como β y establecemos la ecuación:

$$\alpha + \beta + \gamma + 10° = 180° \qquad (2)$$

También al $\angle$CDA como θ, al mismo tiempo sabemos que por suma de ángulos suplementarios que:

$$\alpha + \theta = 180° \qquad (3)$$

Con los datos iniciales sabemos que:

$$\alpha + \beta = 110° \qquad (4)$$

Al sustituir (4) en (2) y despejar a γ, tenemos que:

$$\gamma = 60°.$$

Al sustituir este valor en (1), tenemos que:

$$\alpha = 60°.$$

Con este valor y (4), se tiene que:

$$\beta = 50°.$$

Y finalmente, tenemos que:

$$\theta = 120°.$$

Tarea 3. Después de analizar el problema, decidimos primero encontrar el área del cuadrado ABCD haciendo empleo de la fórmula de área, es decir:

$$A = lxl$$

$$A_{cuadrado} = (5u)(5\,u) = 25u^2.$$

Posteriormente obtenemos el área del paralelogramo FBED, empleando la fórmula de área que indica multiplicar la base por la altura, consideramos BF=2 como base y AD=5 como altura y obtenemos:

$$A_{paralelogramo} = (2u)(5u) = 10u^2.$$

Finalmente, sumamos tanto el área del cuadrado ABCD y el paralelogramo FBDE, quedando que la respuesta al problema es:

$$A_{total} = 25u^2 + 10u^2 = 35u^2 \ .$$

Otra forma de solucionar la tarea consiste en nombrar como Q al punto de intersección de BC con FD y P la intersección de AD con BE, luego identificamos la semejanza entre los triángulos FAD y BAP y establecemos las siguientes relaciones de proporcionalidad entre lados semejantes:

$$\frac{FA}{BA} = \frac{AD}{AP} \ .$$

Sustituimos valores y asignamos x a la distancia de A a P y despejamos x:

$$\frac{7}{5} = \frac{5}{x} \ .$$

Obtenemos que:

$$x = \frac{25}{7} \ .$$

Con ese valor y nombrando como y la distancia de P a D, obtenemos que:

$$y = 5 - \frac{25}{7}; \qquad y = \frac{10}{7} \ .$$

Obtenemos el área de la figura formada por las áreas de los triángulos FBQ y DEP y llamemos a esa área M:

$$M = 2\left(\frac{10}{7}\right); \qquad M = \frac{20}{7} \ .$$

Nombramos con N a la figura formada por BPDQ y obtenemos su área; consideramos el área del cuadrado ABCD y le restamos el área de los triángulos BAP y DCQ, es decir:

$$N = 25 - 2(5)\left(\frac{25}{7}\right); \qquad N = \frac{50}{7} \ .$$

Obtenemos que el área del paralelogramo FBED es:

$$Paralelogramo_{FBED} = M + N = \frac{20}{7} + \frac{50}{7} = \frac{70}{7} = 10 \, .$$

Finalmente, sumamos el área del cuadrado ABCD (etiquetada Q) y el área del paralelogramo FBED (etiquetada P):

$$P + Q = 10u^2 + 25u^2 = 35\,u^2 \, .$$

Tarea 4. Para resolver dicha tarea, lo que optamos por emplear fueron trazos auxiliares, por lo que al prolongamos CO y AO a manera de intersecar con lo lados AB y BC; y nombramos M y N a los puntos de intersección respectivamente. Observamos y establecimos las siguientes relaciones que enumeramos para referirnos a estas:

1. Igualdad de ángulos ∠MOD=∠OCA y ∠NOE=∠OAC por ser correspondientes entre paralelas.
2. Igualdad de ángulos ∠MOD=∠EOC y ∠DOA=∠NOE por ser opuestos por el vértice.
3. Igualdad de ángulos ∠EOC=∠ECO por definición de bisectriz y relaciones 1 y 2.
4. Identificamos al △EOC como triángulo isósceles.
5. Igualdad de segmentos EO=EC por relación 4 y propiedades de los triángulos isósceles.
6. Igualdad de ángulos ∠DOA=∠DAO por definición de bisectriz y relaciones 1 y 2.
7. Identificamos al △DAO como triángulo isósceles.
8. Igualdad de segmentos DO = AD por razón 7 y propiedades de los triángulos isósceles.

9. Pero, por hipótesis sabemos que la suma de segmentos DO + OE = DE, de ahí concluimos que AD + EC = DE.

Tarea 5. Para resolver la tarea y después de considerar los datos, identificamos que $\triangle DKC \cong \triangle CKB$ por criterio de congruencia LLL, los datos dados por hipótesis y el hecho de que comparten KC.

Consideramos la igualdad de ángulos $\angle DKC = \angle CKB$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas.

Por adición de ángulos $\angle DKC + \angle DKA = 180°$ y $\angle CKB + \angle BKA = 180°$ por ser ángulos suplementarios.

Igualamos estas ecuaciones y eliminamos los ángulos equivalentes, de ahí que:

$$\angle DKA = \angle BKA,$$

$\angle DKA = \angle BKA$ por criterio LAL.

Por lo tanto concluimos que AD = AB por ser lados correspondientes de triángulos congruentes.

Tarea 6. Por hipótesis establecimos las siguientes relaciones:

$$AD + DB = AE + EC.$$

Eliminando segmentos equivalentes:

$$DB = EC.$$

El $\triangle ADE$ es triángulo isósceles, de ahí tenemos que:

Los ángulos $\angle ADE = \angle AED$ por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes.

Los ángulos $\angle GDB = \angle HEC$ son opuestos por el vértice y propiedad de los triángulos isósceles.

Los ángulos $\angle DGB = \angle EHC$ por suma de ángulos internos de un triángulo.

Identificamos que $\triangle GDB \cong \triangle HEC$ por criterios ALA.

Los segmentos GB = CH por ser lados correspondientes de triángulos congruentes.

Identificamos que $\triangle AGB \cong \triangle ACH$ por criterio LAL.

Finalmente, concluimos que AG = AH por ser lados correspondientes de triángulos congruentes.

Tarea 7. En la figura que se nos muestra en esta tarea, logramos identificar que:

Por adición de ángulos $\angle FEA + \angle FEB = 180°$ y $\angle GDA + \angle GDB = 180°$ por ser ángulos suplementarios.

Que $\angle FEA = \angle GDB$ pero también que $\angle GDA = \angle FEB$.

Ambos, los igualamos y redujimos términos equivalentes, con lo que obtuvimos que:

$$\angle FEA = \angle GDB.$$

Luego, por adición de segmentos obtuvimos que AD + DE = DE + EB por AD = BE y DE es compartido.

Identificamos que el $\triangle FAE \cong \triangle GDB$ por criterio de congruencia de triángulos LAL.

Los ángulos $\angle EFA = \angle DGB$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas.

Por adición de ángulos $\angle CFE + \angle EFA = 180°$ y $\angle CGD + \angle DGB = 180°$ por ser ángulos suplementarios.

Igualamos y redujimos términos equivalentes, con lo que obtuvimos que:

$$\angle CFE = \angle CGD.$$

Tarea 8. En esta tarea, decidimos emplear trazos auxiliares; prolongamos el segmento QR hasta intersectar a AB en el punto M, luego identificamos dos triángulos rectángulos semejantes:

Identificamos que △PAD~△PMR por criterio de semejanza AAA, de ahí establecimos la siguiente relación de proporcionalidad:

$$\frac{12}{4} = \frac{MR}{1},$$

despejamos a MR, obteniendo que MR =3.

El △MRB es un triángulo rectángulo en donde MB=9. Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$RB^2 = 9^2 + 3^2,$$

resolvimos la operación y simplificamos resultados, tenemos que:

$$RB = 3\sqrt{10}\,.$$

Tarea 9. Un procedimiento que consideramos para resolver la tarea, fue emplear algunas relaciones de la siguiente forma:

1. Los segmentos AR=TB; AP=QB por ser lados correspondientes de triángulos congruentes.
2. Los ángulos ∠RAP=∠TBQ por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes.
3. La igualdad del segmento RT = RT por identidad.
4. Identificamos que el △AHB es triángulo isósceles y por relación 2, de ahí que AP+PH=BQ+QH.
5. De las relaciones 1 y 4, obtuvimos que PH=QH.
6. Los ángulos ∠TQB=∠FQH y ∠RPA=∠EPH por ser ángulos opuestos por el vértice.

7. Pero también, ∠TQB=∠RPA por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes.
8. De ahí que: ∠FQB =∠EPH.
9. Los ángulos ∠QHF =∠PHE por ser ángulos opuestos por el vértice.
10. Identificamos que △HPE ≅ △FQH por criterio de congruencia ALA.
11. De ahí que: ∠DFA =∠CEB; HF=EH por ser ángulos y lados correspondientes de triángulos congruentes.
12. Observamos que también: EB=EH+HQ+QB y AF=AP+PH+HF, pero por relaciones 1, 5 y 11 concluimos que: EB=AF.
13. Al mismo tiempo en el △ADF y △BCE, la suma de ángulos interiores suma 180°, pero como ∠C =∠D y ∠F =∠E, entonces que ∠A =∠B.
14. De ahí que: △DAF≅ △CBE por criterio de congruencia ALA.

Tarea 10. Luego de considerar todos los datos, observamos que la figura se podía descomponer en triángulos rectángulos más pequeños, por lo cual decidimos comenzar a calcular el área del △ABC = 60 cm^2, por ser la mitad del cuadrado ABCD y del mismo modo el área del △DMC= 30 cm^2 por ser la mitad del △ABC. Al mismo tiempo tomamos en cuenta que los lados del cuadrado ABCD miden $2\sqrt{30}$ y el $DM = \sqrt{30}$, por lo tanto, en el △DMC y el △ABC, por teorema de Pitágoras obtuvimos que $MC = 5\sqrt{6}$ y $AC = 4\sqrt{15}$ respectivamente. Consideramos que el área del △MAC es de 30 cm^2 y que además el MN es la altura de dicho triángulo, pero con la base $AC = 4\sqrt{15}$, con estos datos procedimos a realizar los despejes correspondientes para hallar el MN, de ahí que:

$$\frac{MN \cdot (4\sqrt{5}\, cm)}{2} = 30\, cm^2, \qquad MN = \frac{30\, cm^2}{2\sqrt{15}\, cm} = \sqrt{15}\, cm\,.$$

Conociendo el valor de MN y considerando el △MNC, aplicamos nuevamente el teorema de Pitágoras para obtener el segmento NC, de ahí que $NC = 3\sqrt{15}$. Finalmente, encontramos que el área del △MNC es de 22.5 cm^2.

III.4. Participantes

Los participantes en esta investigación fueron 15 estudiantes de primer semestre de una Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, turno matutino; cuyas edades oscilaban entre 17 y 19 años. La realización de los problemas se dio en el marco del curso denominado "Razonamiento Matemático", cuyo objetivo es el que los estudiantes comprendan los principios básicos de la formulación de conjeturas y la demostración de resultados en matemáticas. Los conocimientos previos relacionados con la Geometría Euclidiana fueron revisados durante un periodo de dos semanas. Los temas abordados incluyeron la identificación de ángulos que son iguales cuando un par de paralelas son cortadas por una secante, el teorema de Pitágoras, el teorema de Tales, el teorema del ángulo inscrito, así como los criterios de congruencia y semejanza de triángulos.

El conocer el tipo de estrategias que emplean los estudiantes al momento de resolver problemas geométricos, nos dará un referente sobre las distintas maneras o caminos que estos emplean al abordar y resolver un problema de geometría el cual puede estar influido por las experiencias previas de cada participante. El conocer la forma de razonamiento de los estudiantes, permitirá evidenciar la capacidad que muestran al momento de resolver problemas básicos de geometría, así como su habilidad para aplicar sus conocimientos previos al momento de establecer relaciones que les permitan justificar sus resultados.

Las dificultades o errores que los estudiantes externen al momento de resolver las tareas de geometría, pueden servir de referentes para futuras intervenciones didácticas o investigaciones, además de que constituyen información relevante para los profesores de matemáticas, ya que permite comprender la forma en cómo piensan los estudiantes, ya que éste diagnóstico puede ser el primer paso en el diseño de tareas y escenarios de instrucción que permitan favorecer un aprendizaje con entendimiento[18].

---

[18] De acuerdo con Hiebert y otros autores, se refiere a aquel aprendizaje que promueve en el alumno un entendimiento basado en la reflexión y en la comunicación; donde "entender" significa que es capaz de

III.5. Instrumentos de recolección de la información

Se realizaron **entrevistas informales**, las cuales fueron registradas mediante video grabaciones y se tomaron **notas de campo**. Las entrevistas y notas tuvieron la finalidad de conocer las formas de razonamiento utilizadas y las rutas de solución seguidas por los estudiantes para resolver los problemas de geometría propuestos. Dichos recursos se recabaron después de haber cubierto el periodo aproximado de una semana y luego de asignar a los estudiantes una serie de 15 tareas a resolver de manera individual y sin ayuda de otros fuentes; esto con la intensión de poder obtener información que nos permitiera reflexionar sobre el procedimiento que emplearon para resolver cada una de las tareas.

La información acerca del trabajo desarrollado por los estudiantes, para resolver los problemas de forma individual, se obtendrá a través de un reporte escrito que los estudiantes entregarán de forma previa a la realización de las entrevistas.

Las entrevistas se hicieron de manera individual, ya que la intención era recoger información personalizada de las rutas de solución y los argumentos dados por cada estudiante al momento de resolver dos de las diez tareas propuestas, además, pretendemos que las respuestas dadas por cada uno de los estudiantes no influyan en las estrategias o rutas de solución elegidas por otros. Para ello emplearemos el cubículo del catedrático responsable del grupo observado así como su apoyo para guiar la entrevista.

Pretendemos que tanto los reportes escritos como las observaciones, sean datos que se recojan de manera individual, esto con el fin de identificar y registrar el tipo de razonamiento mostrado por cada estudiante al momento de resolver los problemas geométricos. No interesa conocer si llegaron al resultado correcto ya que nos enfocaremos en la manera en la cual fueron desarrollando su estrategia de solución y las argumentaciones ofrecidas para justificar las soluciones.

---

establecer varias relaciones de lo aprendido y es capaz de aplicar ese conocimiento en distintas situaciones.

III.6. Procesamiento y análisis de la información

Una vez realizadas las videograbaciones, éstas se transcribieron y se identificaron aquellos procedimientos e ideas considerados como evidencia relevante del tipo de razonamiento y argumentos que emplearon los estudiantes para responder a cada tarea; entre éstas podemos señalar el empleo de conocimientos previos, el uso de simbología matemática, empleo de argumentaciones y heurísticas. Después, realizamos el análisis de los procedimientos mostrados en los trabajos escritos; con la información obtenida se resumió en una tabla en la cual se comparó la ruta de solución seguida de manera individual para cada uno de ellos en cada una de las tareas, tomando como referente las rutas argumentadas por los estudiantes y que al mismo tiempo mostraban un procedimiento distinto a los demás.

Posteriormente, realizamos la comparación de las rutas de solución argumentadas y escritas; con ello se realizó un esquema que representara la ruta de solución seguida por el estudiante, tanto de manera individual como en cada una de las tareas. También incluimos las rutas de solución que fueron cambiadas por algunos estudiantes durante la entrevista, en relación con la ruta planteada en el trabajo escrito. Finalmente se elaboraron tablas; una en la que se resume el tipo de procedimiento empleado por cada uno de los estudiantes y la similitud entre estos procedimientos o rutas de solución y una tabla general donde se muestra el tipo de razonamiento, clasificación de argumentación, heurísticas y conocimientos previos que cada estudiante empleo en cada una de las tareas propuestas.

CAPÍTULO IV

IV. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

IV.1. Introducción

En este capítulo mostramos las rutas de solución, así como las heurísticas y conocimientos previos de geometría que los estudiantes emplearon al momento de resolver las tareas que se les propusieron. Es importante indicar que las tareas que los estudiantes abordaron durante las entrevistas fueron seleccionadas al azar (véase apéndice D) y tienen el propósito de evidenciar el tipo de razonamiento empleado por los estudiante al momento de resolver dichas tareas.

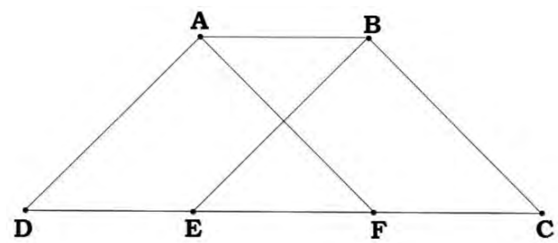
Este análisis se basó principalmente en la recolección de argumentos orales (videograbados), los cuales fueron expresados por los estudiantes en el momento de justificar la ruta de solución que siguieron en cada tarea. Del mismo modo, fue necesario analizar las producciones escritas y realizar la triangulación de la información proporcionada por cada una de las fuentes (tanto de manera escrita como de manera verbal y el análisis de las rutas de solución) para encontrar si emplearon la misma ruta, cambiaron de ruta o reafirmaban su ruta de solución.

Después de analizar cada ruta de solución elaboramos un diagrama cuya finalidad es contrastar con facilidad las diferentes aproximaciones empleadas por los estudiantes para abordar un mismo problema e incluso se logró identificar las distintas rutas seguidas por un mismo estudiante en la misma tarea (apéndices B y C). Dichos diagramas se complementaron con información de los trabajos escritos entregados por los estudiantes (apéndice E y apéndices del G al P). También hicimos un análisis general del tipo de razonamiento así como las heurísticas, conocimientos previos y argumentaciones empleadas por los estudiantes al momento de resolver las tareas asignadas a partir de la información proporcionada por las entrevistas (apéndice F).

IV.2. Análisis de la información

Análisis de la tarea 1

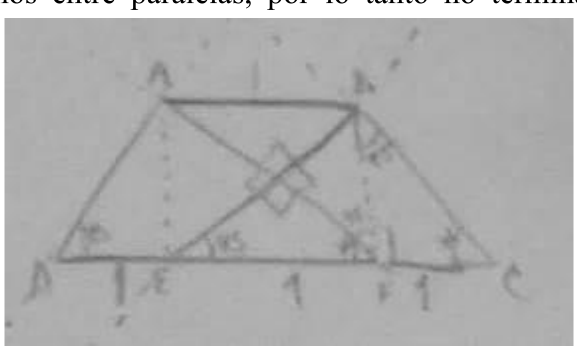
El cuadrilátero ABCD es un trapecio, con AB paralela a DC y ∠ADC=∠BCD = 45°. E y F son puntos sobre el lado DC tales que DE = EF = FC = 1. Además, el trapecio tiene la propiedad de que AF es paralelo a BC y BE es paralelo a AD. ¿Cuál es el perímetro del trapecio?



Fuente: Problema y figura tomada de SMM (2006; p. 10)

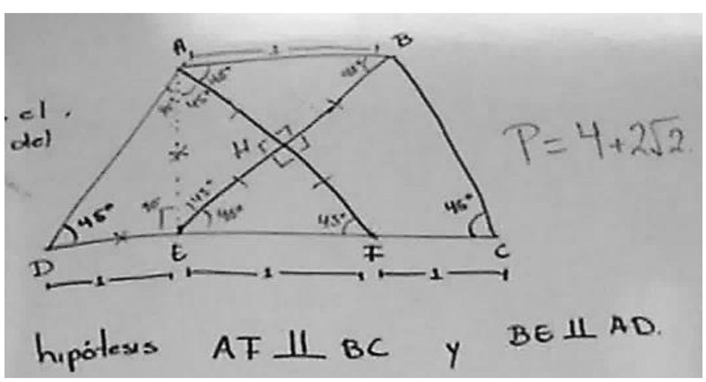
Estudiante 1

Identificó los ángulos correspondientes entre las paralelas ∠BCD=∠AFD y ∠ADC=∠BEC y con ello concluye que en el △EPF es isósceles (el punto P se agregó para indicar la intersección de los segmentos AF y BE, puesto que el estudiante solo indicaba esa intersección pero no le asignó una etiqueta), el ∠EPF es de 90° y justifica su argumentación empleando la propiedad de que "la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°", y afirma que al trazar los segmentos FB y a EA éstos son perpendiculares a AB y DC, con lo cual se forma un cuadrado ABFE, pero al ser cuestionado por el profesor sobre la razón de que estos segmentos sean perpendiculares, el estudiante no logró relacionar todos los datos en el problema para justificar esa afirmación, es decir, no observa otras relaciones como el empleo de ángulos alternos internos entre paralelas, por lo tanto no termina de justificar su solución.



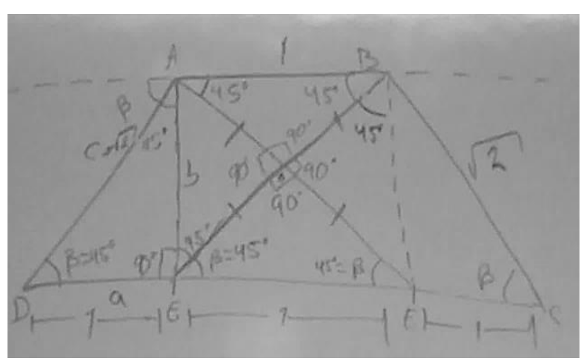
Estudiante 4

Logra identificar los ángulos correspondientes entre las paralelas AD y BE, así como AF y BC, por lo cual afirma que ∠BCD=∠AFD y ∠ADC=∠BEC y empleando el hecho de que “la suma de los ángulos internos de cualquier triangulo es 180°”, logra establecer que el ∠EHF = 90°, del mismo modo que ∠BHA= 90° por ser “ángulos opuestos por el vértice”, donde H es la intersección de los segmentos AF y BE. Posteriormente, al observar que AB‖DC y AD‖BE, afirma que AB =1 y además determina que ∠FAB=∠AFD y ∠ABE=∠BEC y que estos valen 45° por la relación de los “ángulos alternos internos entre paralelas” y por hipótesis. Luego asegura que el △EHF≅△AHB por el criterio de congruencia de triángulos ALA y porque traza una perpendicular a DC que pasa por E y A, pero al ser cuestionado por el profesor de la certeza de que dicha perpendicular también pasa por A, el estudiante busca las relaciones que le permiten hacer esta afirmación; comenta que al ser perpendicular a DC y pasar por E, el ∠HEA = 45° porque es complementario al ∠FEH y que por lo tanto el ∠EAH= 45° por la “suma de ángulos internos de un triángulo” (intuimos que observa el triángulo DEA), de esta manera también establece que los triángulos formados en el centro de la figura son congruentes (△EAH, △BHA, △BHF y △FHE) y que EF=1 y BF=1. Con estos datos, aplica el teorema de Pitágoras “El cuadrado de la hipotenusa es la suma de los cuadrados de sus catetos” y obtiene que AD= y AE=1. Finalmente suma las longitudes de la figura y obtiene que el perímetro de la figura es: $P=4+2\sqrt{2}$.



Estudiante 8

El estudiante etiqueta a O como la intersección de los segmentos AF y BE, después traza por E una perpendicular a DC y asegura que dicha perpendicular pasa por A; el estudiante al ser cuestionado por el profesor sobre la veracidad de esta afirmación, este justifica su respuesta que AB ∥ DC, AD ∥ BE y BC ∥ AF y DC al ser secante el ∠BCE = ∠AFE =45° por ser correspondientes y que ∠DAF=90° porque emplea "la suma de ángulos interiores de un triángulo suman 180°", lo anterior le permite afirmar que el △DAF es un triángulo rectángulo y de la misma manera con el △EBC y concluye que AF y EB forman ángulos de 90°. Establece por el criterio de congruencia de triángulos ALA que el △EOA~△FOE y por lo tanto EO=OF (aquí el estudiante emplea una simbología de semejanza ~ para referirse a la congruencia), al ser nuevamente cuestionado sobre esta última igualdad de segmentos; el estudiante, después observar varias relaciones establece que por ángulos alternos internos entre paralelas y ángulo suplementario que el ∠DAF=90°, pero al mismo tiempo ∠DAB=135° por lo que ∠FAB=45° y hace el mismo procedimiento con el valor de ∠EBC para asegurar el valor de ∠ABE y afirma nuevamente la relación de semejanza (nuevamente hace empleo indiscriminado de los conceptos de semejanza y congruencia)de los △EOA y △FOE está dada por el criterio ALA ya que comparten el lado EO y ∠AEB = ∠BEF y EF =AB y que AO=OE y al ser un triángulo isósceles el ∠EAF=45°. Aplica el mismo procedimiento para establecer la semejanza de los △BOF y △EOF y afirma que los △AOE, △EOF, △FOB y △BOA también son semejantes, de lo anterior afirma que BF=1. Aplica el teorema de Pitágoras al △BFC y en donde los catetos son BF=FC=1 y obtiene que BC= , realiza el mismo procedimiento, con DA y al sumar los segmentos del trapecio ABCD, obtiene que el perímetro es: $P=4+2\sqrt{2}$.

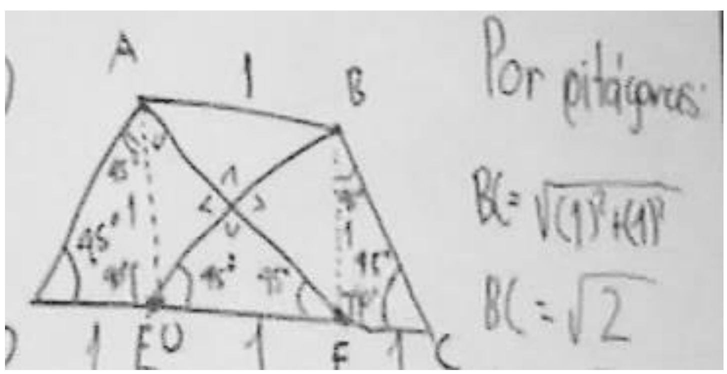


Estudiante 9

El estudiante afirma que al trazar perpendiculares a DC, por E y F, éstas pasan por A y B respectivamente, pero al ser cuestionado por el profesor sobre la seguridad de que dichas perpendiculares pasen por A y B el estudiante no puede explicarlo y cambia su argumento manejando a AE como bisectriz (refiriéndose al ∠DAF), por lo que opta por incluir un punto sobre DF el cual etiqueta como O, tal que se cumple que DO=OF y con esta afirmación asegura que △ADE≅△AFE y que la base de éste es 2 (toma ese dato de la hipótesis) y establece el sistema de ecuaciones (1) con el cual obtiene que DO=1 y OF =1

$$\begin{array}{l} DO - \cancel{OF} = 0 \\ DO + \cancel{OF} = 2 \\ \hline 2\,DO \quad = 2 \\ \quad DO = 1 \end{array} \qquad (1)$$

De esta manera demuestra que la bisectriz de ∠DAF pasa por E, sin embargo, ya no prosigue la demostración.



Estudiante 10

Coloca a G como la intersección de los segmentos AE y BE e identifica a DC como secante de las paralelas formadas por AB y DC y afirma con ello que ∠BCD≅∠AFD y ∠BEC≅∠ADC , además asegura que △GEF es un triángulo isósceles porque observa que tiene dos ángulos de 45° y concluye que ∠EGF = 90° porque "*la suma de ángulos internos de cualquier triangulo suman 180°*", pero ya tiene 90° y le hacen falta otros 90° para cumplir esta propiedad. Posteriormente hace la deducción de que ∠AGE=∠BGF=90° por ser "*opuestos por el vértice*". Luego afirma que ∠BEC es "*alterno interno*" con ∠ABE y deduce que EG=GF y con ∠EGF=90°, a EF lo identifica como la hipotenusa y EG con GF como los catetos y considera EG=GF y que $EF^2=1$ y resuelve: $1=2EG^2$ => $EG^2=1/2$; EG=1/ y GB=AG=1/ . Posteriormente asegura que △AGB≅△EGF y AD=BE por ser AD∥BE y AB∥DC por lo que AF=BC.

Posteriormente establece las siguientes relaciones:

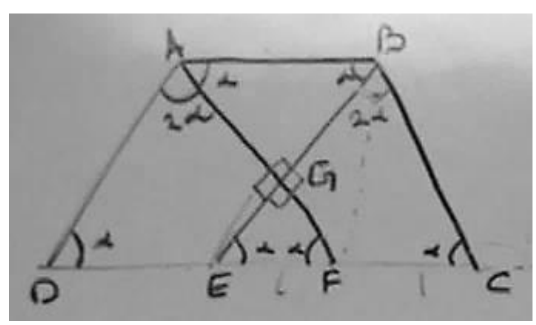
BC/EB=1, y como EF=FC=1 concluye que BC: GF=EF:FC .

Otras relaciones que establece son ∠ABE=45°, ∠BCM =135° (se colocó M como un punto a la derecha del punto C para indicar el ángulo señalado por el estudiante) y ∠ABG=45° por ser alterno interno, afirma que ∠GBC=2α y que BF es bisectriz, además de ∠BGF=90° y ∠GBF=45° por lo que ∠AFB=∠EBF=45°, emplea el mismo procedimiento para ∠EGF (90°). FB la considera hipotenusa (considera el △BGF) ya que ∠BGF=90° y ∠AFB=∠EBF=45° por lo que deduce que GF=BG y $FB = \sqrt{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1} = 1.$

Además, asegura que como el ∠BFC=90° y ∠GFB=45° eso le permite deducir que BF=FC=1 y aplica el teorema de Pitágoras, con ello realiza la operación:

$$BC^2 = 2BF^2 \ y \ BC = \sqrt{2}.$$

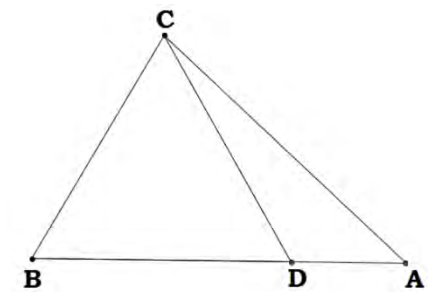
Emplea la misma idea para hallar AD y finalmente con estos datos resuelve y sustituye los valores para encontrar el perímetro, es decir, suma los lados y obtiene que el perímetro de la figura es: $P=4+2\sqrt{2}$.



La comparación de los distintos procedimientos realizados por los estudiantes pueden observarse en el apéndice G.

Análisis de la tarea 2

En el triángulo ABC, $\angle A+\angle B=110°$, y D es un punto sobre el segmento AB tal que CD=CB y $\angle DCA=10°$. ¿Cuánto mide $\angle A$?



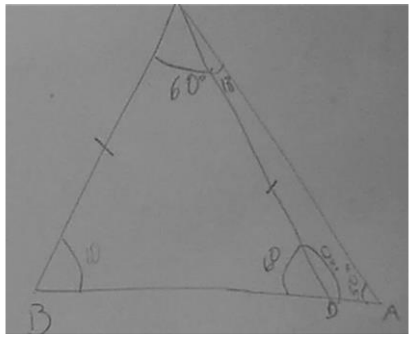
Fuente: Problema y figura tomada de SMM (2006; p. 1)

Estudiante 1

El estudiante parte del hecho que $\angle A + \angle B=110°$ y sabe que en el $\triangle ABC$ los ángulos interiores suman 180° y concluye que el $\angle C=70°$ pero se da cuenta de que una parte del $\angle C$ vale 10° ($\angle DCA$) por lo que deduce que $\angle BCD=60°$ y que por condición "*dos lados de un triángulo isósceles son iguales y por lo tanto sus ángulos son iguales*" el $\triangle CBD$ es isósceles y por lo tanto $\angle CBD=\angle CDB= \angle\alpha$ y al tener en cuenta que "*la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo suman 180°*" realiza la operación:

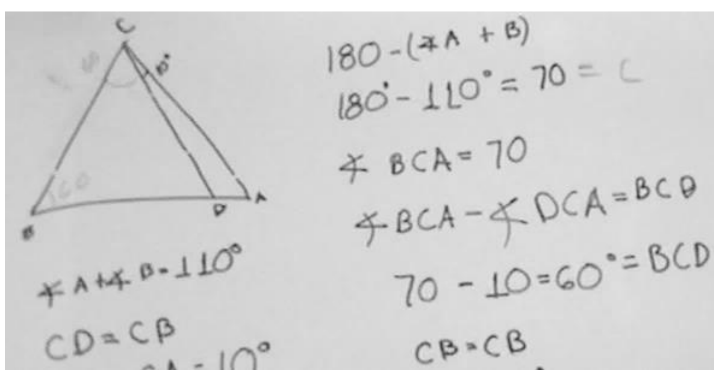
$$180 - 60 = 2 \propto;\ \propto = 60\,.$$

Identifica al $\angle D$ como ángulo llano (ángulo cuya medida vale 180°) y teniendo en cuenta que el $\angle CDA=120°$ y al considerar tanto la suma de ángulos internos del $\triangle ACD$ igual a 180°, como el valor de los $\angle CDA$ y $\angle ACD$, concluye que el $\angle A=50°$.



Estudiante 5

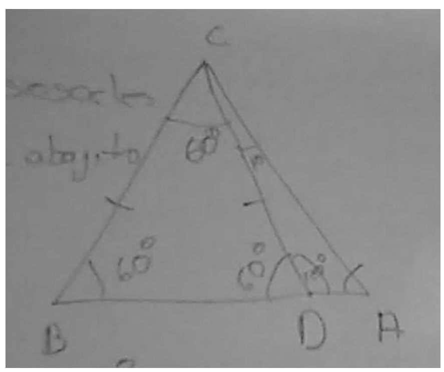
El estudiante emplea en el △ABC "*la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180°*" y considera datos de inicio como ∠A +∠ B = 110° y resta 180° - 110° para encontrar el valor de∠ C =70°, pero al mismo tiempo observa que ese ángulo está dividido en dos partes y que una de ellas mide 10°, de ahí concluye que en el △BCD el ∠BCD=60° y con esto afirma que ∠CBD, ∠BDC y ∠BCD miden 60°. El profesor le cuestiona esta última afirmación y el estudiante responde que - la suma de los ángulos internos da 180° y al medir ∠BCD=60°, los dos ángulos también miden lo mismo-, al ser cuestionado nuevamente por el profesor sobre la posibilidad de que uno de ellos mida 70° y otro 50°; el estudiante argumenta que como CD es igual a CB y considerando que es "un triángulo isósceles, los ángulos de la base son iguales"; esto le permite sustentar su conclusión, posteriormente encuentra que ∠B = 60° y lo resta a 110° para encontrar el valor del ángulo. Finalmente concluye que ∠A=50°.



Estudiante 7

Inicia identificando que el $\triangle$BCD es isósceles y que BC=CD, considera también $\angle$A+$\angle$B=110° y que “la suma de ángulos interiores del $\triangle$ABC es 180°”, con ello concluye que $\angle$DCA=10° y por lo tanto afirma que $\angle$BCD=60°. Al saber que el $\triangle$BCD es isósceles, que el $\angle$BCD =60°, resta a 180° los 60° del ángulo $\angle$BCD y considera que 120° deben ser igual a la suma de $\angle$CBD +$\angle$CDB =120° pero al tener en cuenta que son “ángulos opuestos a lados iguales” del $\triangle$BCD, divide entre dos y afirma que cada ángulo mide 60° ($\angle$CBD=$\angle$CDB=60°). Posteriormente afirma que $\angle$BDC y $\angle$CDA son “suplementarios” y al tener que $\angle$BDC=60°, encuentra que $\angle$CDA = 120°.

Al tener, dos ángulos del $\triangle$ADC y tomar en cuenta que “la suma de los ángulos internos da 180°”. Suma $\angle$ACD + $\angle$CDA= 130° y resuelve 180° – 130°= 50°, por lo tanto, concluye que $\angle$A=50°.



Estudiante 8

Identifica al $\triangle$BCD como triángulo isósceles porque CB=CD y afirma que con ello dos de sus ángulos deben ser iguales y los etiqueta como α ($\angle$CBD y $\angle$BDC) y el restante lo etiqueta como θ ($\angle$BCD), posteriormente establece que:

$$\theta + 2\alpha = 180°.$$

En esta última afirmación el estudiante da por hecho el empleo de “la suma de ángulos internos de un triángulo”. Posteriormente, al darse cuenta de que para encontrar los valores de α y θ procede a establecer otra relación (aquí se observa que el estudiante a pesar de no mencionar este teorema emplea el del ángulo externo a un triángulo y el cuál menciona que “el ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes”) etiqueta al $\angle$CDA=γ y establece la ecuación:

$$\gamma = \theta + \alpha \, .$$

Luego argumenta que como la suma de ángulos del $\triangle$DCA es 180° realiza las anotaciones siguientes, considerando que el estudiante etiqueta al ángulo $\angle$A como β :

$$180° = 10° + \beta + \gamma \; .$$

Sustituye γ, despeja β y realiza las siguientes operaciones:

$$\beta = 110° - \alpha$$

$$180° = 110° + 110° - \cancel{\alpha} + \theta + \cancel{\alpha}$$

$$180° = 120° + \theta$$

$$180° - 120° = \theta$$

$$\theta = 60° \, .$$

Luego considera que:

$$180° = \theta + 2\alpha$$

$$180° = 60° + 2\alpha$$

$$120° = 2\alpha$$

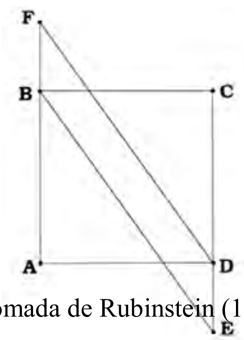
$$60° = \alpha \, .$$

Con lo anterior, encuentra el valor de γ, y suma $\alpha + \beta$ = 120° y resta 180°–130° y concluye que β =50°. Argumenta que como la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180° y como la suma de γ+ $\angle$BCA= 120° +10° =130° + β. Despeja y obtiene que β=50°.

La comparación de los distintos procedimientos realizados por los estudiantes pueden observarse en el apéndice H.

Análisis de la tarea 3

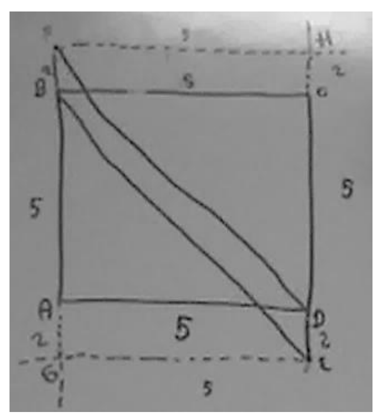
ABCD es un cuadrado y *BFDE* un paralelogramo. Si AF = 7 y AD=5. ¿Cuál es el valor de la suma de las áreas del cuadrado y el paralelogramo?



Fuente: Figura tomada de Rubinstein (1963; p. 374)

Estudiante 3

Lo primero que hace es prolongar las líneas BA y DC, lo mismo hace con HP y GE (H es punto de intersección de prolongar CD y la $\perp$ a F y paralela a BC y, G la intersección de BA con $\perp$ E y paralela a AD) para formar un rectángulo *FHEG* y obtiene el área de este multiplicando 5 x 9 =45 u^2. Luego identifica dos triángulos que asegura son congruentes por tener igual la medida de sus lados: 7 y 5, estos son △FDH y△EBG. Obtiene que como su base es 5 y su altura 7, aplica la fórmula para obtener su área y argumenta que mide 17.5 u^2, posteriormente al área del rectángulo FHGE le resta el área de los dos triángulos △FDH y △CBG, es decir: 45 u^2–35 u^2=10 u^2.

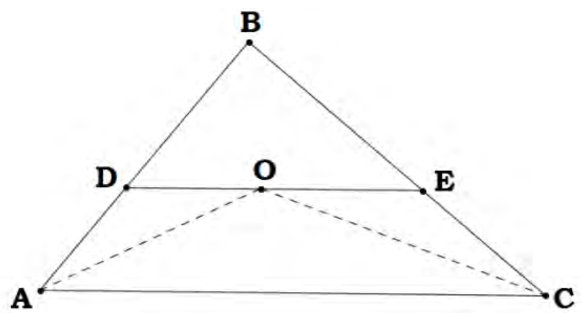


Para obtener el área del cuadrado y el trapecio, suma el área del cuadrado y el trapecio: ABCD + BFDE = 25 u^2+10 u^2=35 u^2.

La comparación de los distintos procedimientos realizados por los estudiantes pueden observarse en el apéndice I.

Análisis de la tarea 4

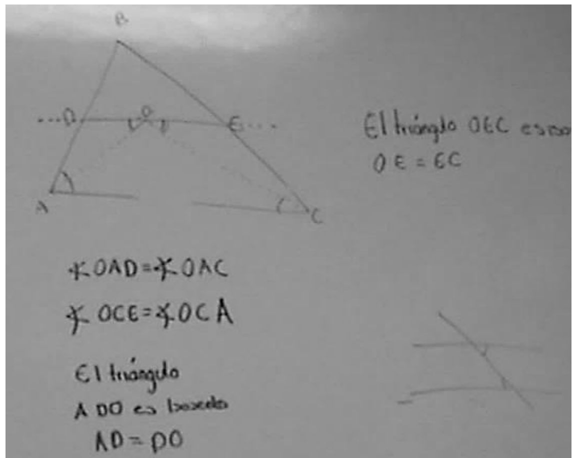
En el △ABC, las bisectrices de los ángulos en A y en C se cortan en el punto O. Por O se traza una recta paralela al lado AC, la cual corta a los lados AB y BC en los puntos D y E respectivamente. Demuestre que DE = AD + EC.

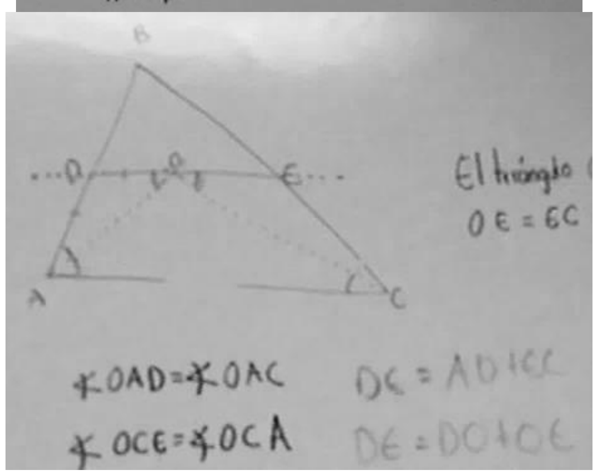


Fuente: Problema y figura tomada de Rubinstein (1963; p. 377)

Estudiante 5

El estudiante identifica que al ser DE∥AC y, CO y AO bisectrices argumenta que el ∠ECO y ∠OCA son iguales, al igual que ∠DAO y ∠OAC. Posteriormente afirma que el ∠EOC=∠ECA, esto último al ser cuestionado por el profesor, el estudiante solo argumenta *–porque estamos trabajando con paralelas-*, sin embargo, este no logra identificar el teorema que le permite asegurar su afirmación, por lo que el profesor le solicita que trace en un dibujo a parte, dos rectas paralelas y una secante que las corte, de esta manera el estudiante logra identificar y aplicar el teorema de los ángulos alternos internos entre paralelas para sostener sus afirmaciones. Posteriormente, el estudiante al identificar la igualdad de los ángulos afirma que los triángulos △DAO y △OEC son triángulos isósceles por tener dos ángulos iguales, de ahí argumenta también que al tener dos ángulos iguales, los lados opuestos a estos también son iguales por lo que afirma que DO =AD y OE=EC. Con esto asegura que DE=DA+EC, nuevamente es cuestionado por el profesor en esta última afirmación y el estudiante expresa que al ser DO=DA y OE=EC, se cumple la igualdad expresada además de que DE= DO + OE.

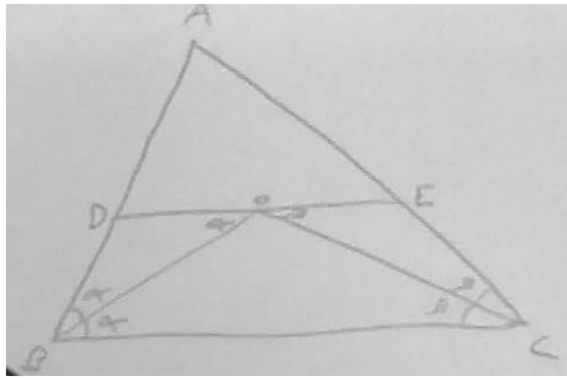




Estudiante 12

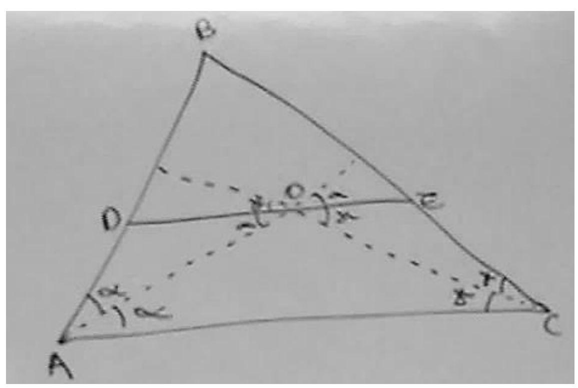
El estudiante emplea las condiciones iniciales del problema, como la del paralelismo entre DE y BC e identifica a BO y CO como secantes que cortan a las rectas paralelas, con ello y el teorema de los "ángulos alternos internos entre paralelas", establece que ∠DBO=∠OBC y los etiqueta como ángulo α, del mismo modo lo hace con ∠ECO=∠OCB y los identifica como ángulo β. Lo anterior le permite afirmar que

△ODB y △OEC son triángulos isósceles por lo que asegura que BD=DO y BD + EC= DO +OE y que DO + OE = DE.



Estudiante 15

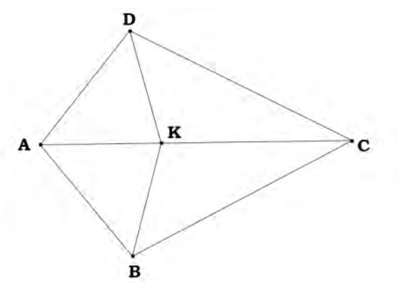
El estudiante prolonga las bisectrices AO y CO (llamaremos a N y M respectivamente, a las intersecciones de estas prolongaciones con los lados AB y BC) y afirma que los ángulos ∠OAC=∠MOE y ∠OCA=∠NOD por ser “correspondientes entre paralelas”. Posteriormente asegura que ∠NOD=∠ EOC y ∠MOE=∠DOA por ser “ángulos opuestos por el vértice”, de ahí establece que el △ADO es isósceles ya que los lados de la base son iguales y que de la misma manera el △CEO también es isósceles. Con ello argumenta que AD=DO y CE =OE y que DE = AO + OE y de ahí concluye que DE = AD + CE.



La comparación de los distintos procedimientos realizados por los estudiantes pueden observarse en el apéndice J.

Análisis de la tarea 5

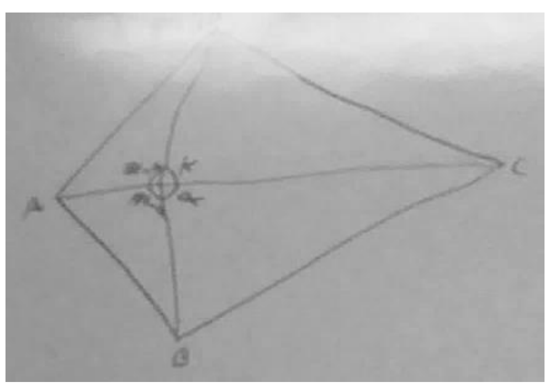
En la figura se tiene que DC=BC y DK=BK. Demostrar que AD=AB



Fuente: Problema y figura tomada de Moise (1970; p. 147)

Estudiante 12

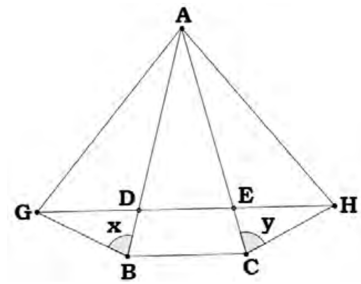
El estudiante establece que por criterio LLL de congruencia de triángulos el $\triangle DCK \cong \triangle BCK$, de ahí asegura que $\angle DKC = \angle CKB$ por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes. Posteriormente, nombra al $\angle DKC$ como α y asegura que $\angle AKD = 180 - \alpha$; del mismo modo establece que $\angle AKB = 180 - \alpha$ y argumenta que "por criterio LAL" de congruencia de triángulos $\triangle ADK \cong \triangle ABK$ ya que AK es lado que comparten, $\angle AKD = \angle AKB$ y por hipótesis DK=BK, esto le permite concluir que AD=AB (el estudiante da por hecho que "lados y ángulos correspondientes de triángulos congruentes, son iguales").



La comparación de los distintos procedimientos realizados por los estudiantes pueden observarse en el apéndice K.

Análisis de la tarea 6

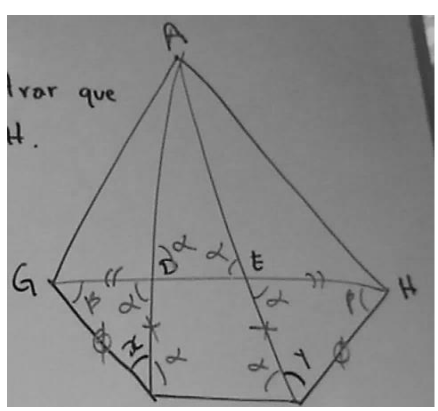
En la figura, si AB=AC, AD=AE y ∠x=∠y, entonces demostrar que AG=AH.



Fuente: Problema y figura tomada de Moise (1970; p. 147)

Estudiante 4

Considerando los datos iniciales del problema, el estudiante afirma que DB=EC e identifica al △BAC como triángulo isósceles, por lo que ∠ABC=∠ACB por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles. Considera que al GH‖BC el ∠ABC es "ángulo alterno interno" con ∠GDB y al mismo tiempo ∠GDB=∠ADE por ser "opuestos por el vértice", con GH‖BC y AC como secante, afirma que el ∠ACB=∠HEC y asegura que △GDB ≅ △HEC por el criterio ALA de congruencia de triángulos (el estudiante da por hecho que "lados y ángulos correspondientes de triángulos congruentes, son iguales"). Con ello puede afirmar que ∠DGB=∠EHC y que al DB=EC; GD=EH y GB=HC los △AGB≅△AHC por criterio LAL y esto le permite concluir que AG=AH.

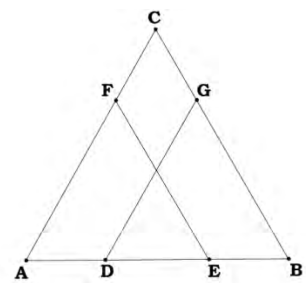


Cabe señalar que el estudiante cambia su argumentación cuando se le pide exponer su ruta de solución, considerando que su prueba escrita muestra una ruta distinta a la aquí mostrada (véase apéndice B).

La comparación de los distintos procedimientos realizados por los estudiantes pueden observarse en el apéndice L.

Análisis de la tarea 7

En la figura, si ∠A =∠B, AD=BE y ∠ADG =∠BEF. Demostrar que ∠CFE=∠CGD.



Fuente: Problema y figura tomada de Moise (1970; p. 142)

Estudiante 11

El estudiante identifica el cuadrilátero CGDA y emplea la propiedad de los cuadriláteros de que “la suma de los ángulos internos da 360°” y escribe:

$$\angle C + \angle G + \angle D + \angle A = 360° .$$

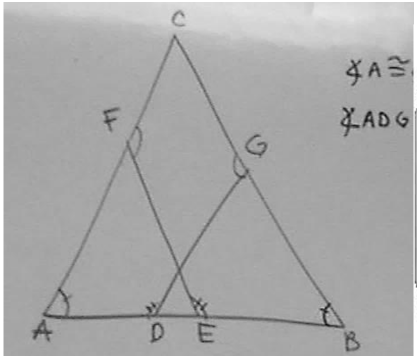
Con los datos de la hipótesis sustituye ∠D por ∠E y ∠A por ∠B, establece la siguiente relación:

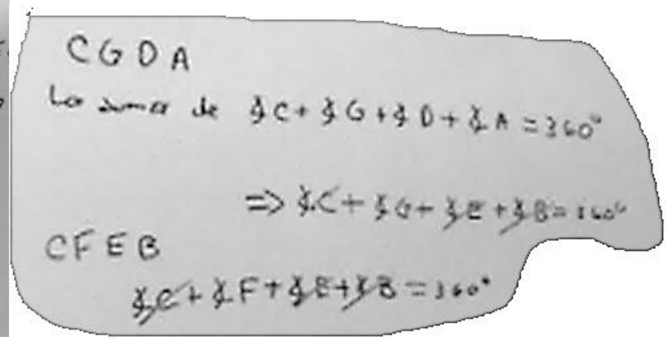
$$\angle C + \angle G + \angle E + \angle B = 360° .$$

Hace lo mismo en el cuadrilátero CFEB y escribe:

$$\angle C + \angle F + \angle E + \angle B = 360° .$$

Luego, procede a igualar estas dos ecuaciones y elimina ∠C, ∠E y ∠B, con ello concluye que ∠F =∠G



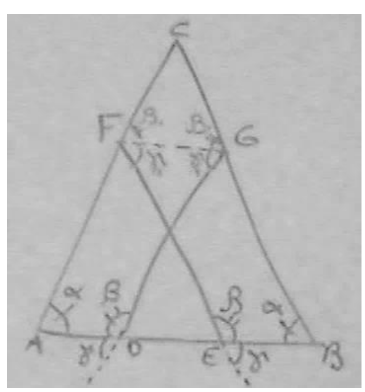


Es importante señalar que el estudiante cambia su argumentación cuando se le pide exponer su ruta de solución, considerando que su prueba escrita muestra una ruta distinta a la aquí mostrada (véase apéndice C).

Estudiante 13

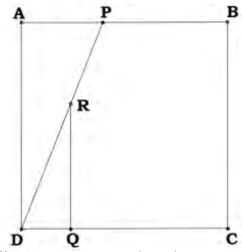
El estudiante toma en cuenta los datos y etiqueta a $\angle$A y $\angle$B como α y al $\angle$ADG=$\angle$BEF como β, posteriormente indica una línea paralela a AB por FG (emplea un trazo auxiliar); sin embargo, el profesor le cuestiona si verdaderamente la paralela a AB pasa exactamente por ambos puntos E y G. El estudiante hace una breve reflexión y argumenta nuevamente que $\angle$A y $\angle$B son α y $\angle$ADG y $\angle$DEF son β e indica que son "*ángulos paralelos*"; nuevamente es cuestionado por el profesor sobre esta afirmación, el estudiante corrige pero con inseguridad - *¿cómo se dice?..., son ángulos… ¿externos internos?*- el profesor intenta auxiliar al estudiante cuestionándole cuando dos líneas son paralelas pero el estudiante no puede avanzar y no concluye la tarea.

Los distintos procedimientos realizados por los estudiantes pueden observarse en el apéndice M.



Análisis de la tarea 8

En la figura se muestra un cuadrado de lado 12, donde la longitud de AP es 4, la de DQ es 3 y el ∠RQC es recto. ¿Cuánto mide RB?



Fuente: Problema y figura tomada de SMM (2012; p. 12)

Estudiante 6

El estudiante comienza trazando la recta QR hasta cortar con la recta AB y llama ese punto O, posteriormente argumenta que ese punto cumple con AO= 3 y OP =1, de ahí afirma que el △ADP es semejante al △ORP por el "criterio de semejanza de triángulos AAA"; comparten el ∠APD, el ∠OAD=∠POR=90° y por lo tanto el ∠ACD = ∠ORP, de lo anterior establece la siguiente relación:

$$\frac{AD}{OR} = \frac{AP}{OP} \;.$$

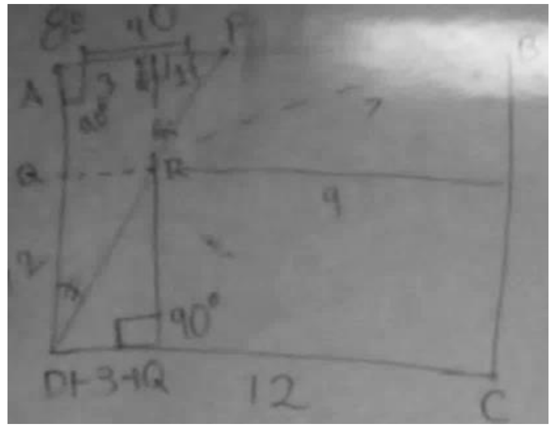
Considera los valores dados en el problema, sustituye en la relación anterior y concluye que OR=3, es decir, escribe:

$$\frac{12}{OR} = \frac{4}{1} \qquad\qquad OR = \frac{12}{4} \qquad\qquad OR = 3 \;.$$

Luego, identifica al △ORB como triángulo rectángulo y aplica el "teorema de Pitágoras" para obtener la hipotenusa; con OB=12-3=9 y OR=3, establece que como $9^2+3^2=90$ y (se intuye que el alumno asigna a=RB) realizando operaciones aritméticas concluye que:

$$a = \sqrt{90}$$

$a = 3\sqrt{10}$.



Estudiante 15

El estudiante comienza por trazar una paralela a DC que pasa por R y prolonga el segmento QR hasta tocar el segmento AB y lo llama S. Luego afirma que DQ=3 y SB=9 y observa que △ADP es semejante al △SRP y las razones que da para asegurarlo es que tienen un ángulo recto, comparten el ∠SPD y que por lo tanto ∠SRP=∠ADP; aquí se observa que el estudiante emplea el “criterio de semejanza AAA”. Después, afirma que se cumple la siguiente relación por “teorema de Tales”:

$$\frac{AP}{SP} = \frac{AD}{SR} \ .$$

Sin embargo, el profesor le cuestiona la aplicación de este teorema y el estudiante argumenta que es una relación de semejanza. El estudiante continúa su explicación y detalla su procedimiento; primero despeja a SR de la expresión y luego sustituye los valores de manera que escribe lo siguiente:

$$SR = \frac{AD \cdot SP}{AP} \qquad SR = \frac{12 \cdot 1}{4} \qquad SR = 3 \ .$$

Al tener las longitudes de SB y SR e identificar el △SRB como “triángulo rectángulo”, decide aplicar el “teorema de Pitágoras” para encontrar a RB y lo escribe de la siguiente manera:

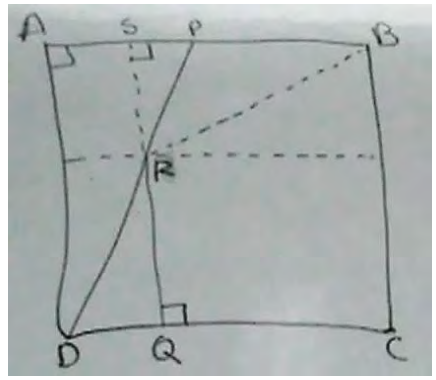
$$RB = \sqrt{9 + 81}$$

$$RB = \sqrt{100} \ .$$

El estudiante, comete un error aritmético y el profesor nuevamente le cuestiona; el estudiante corrige, prosigue su procedimiento y encuentra al valor de RB.

$$RB = \sqrt{90}$$

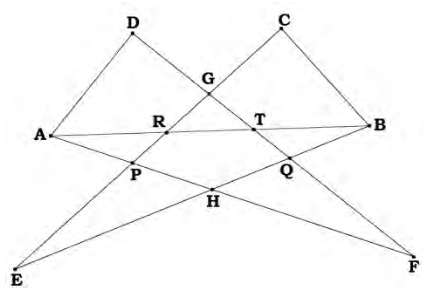
$$RB = 3\sqrt{10}\,.$$



Los distintos procedimientos realizados por los estudiantes pueden observarse en el apéndice N.

Análisis de la tarea 9

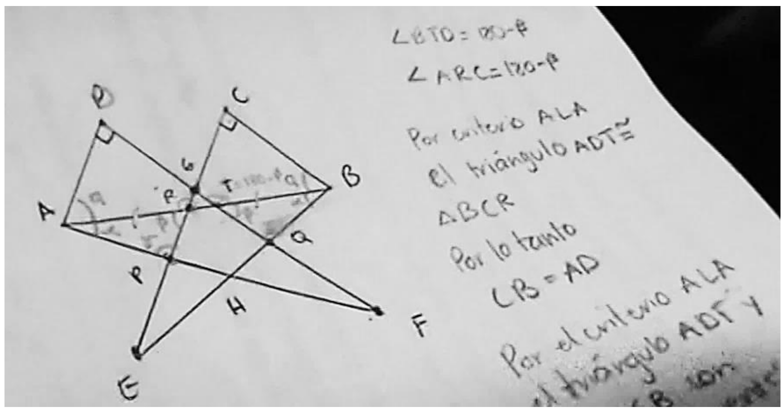
En la siguiente figura, los ángulos ∠D y ∠C son ángulos rectos y △APR≅△BQT. Demostrar que el △ADF ≅△BCE.



Fuente: Problema y figura tomada de Moise (1970; p. 194)

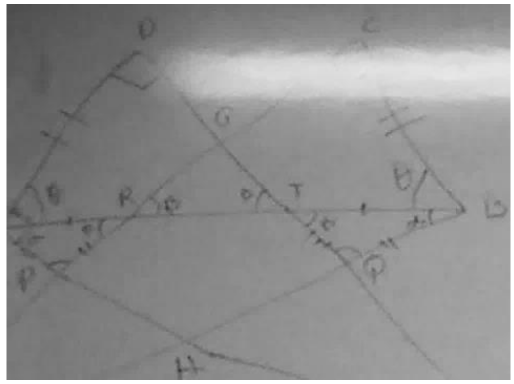
Estudiante 2

Comienza considerando los datos iniciales y toma en cuenta que △PAR ≅ △QTB y afirma que por esa condición sus ángulos miden lo mismo (refiriéndose a los ángulos correspondientes), etiqueta a ∠ARP y ∠BTQ como β y emplea el teorema de los ángulos opuestos por el vértice para establecer que también ∠DTA=∠CRB=β y que tanto ∠BTD como ∠ARC miden 180°–β. Lo anterior le permite afirmar que el △CBR tiene los mismos ángulos que △DAT (aquí el estudiante emplea el “criterio de congruencia de elementos iguales de triángulos congruentes”) y que al tener AR=TB y compartir RT ambos triángulos son congruentes por el criterio ALA y por lo tanto CB=AD por ser “correspondientes de triángulos congruentes” (en esta parte el estudiante no da más información que sustente su afirmación y se le permite proseguir), finalmente concluye que el △FAD≅△ECB por el criterio ALA (suponemos que da por hecho que ∠A=∠B para realizar tal aseveración).



Estudiante 7

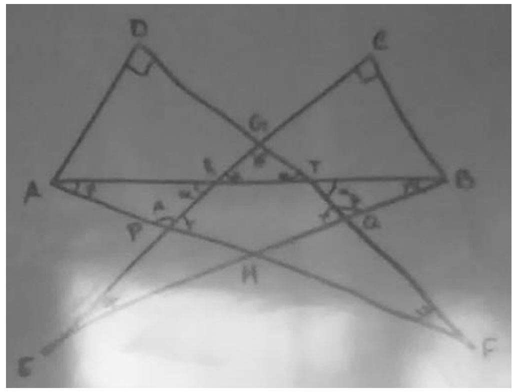
Comienza considerando la congruencia entre los triángulos △APR y △BQT y afirma que en ambos triángulos todos los lados y ángulos correspondientes son iguales, continua etiquetando a los ángulos ∠ARP y ∠BTQ como β, *∠RAP=∠TBQ=*α *y ∠RPA=∠TQB (*estos últimos solo son indicados en la figura pero no los etiqueta*)* ; posteriormente, emplea el teorema de los ángulos opuestos por el vértice para etiquetar también a ∠GTR y ∠GRT como β e indica la igualdad entre ellos. Luego, prosigue a emplear la condición de que ∠D=∠C, ∠GRT = ∠GTR=β y asegura que ∠DAT=∠CBR (se intuye que el estudiante emplea la suma de ángulos internos de un triángulos para realizar dicha afirmación) y al saber que AR=TB y RT es un segmento compartido concluye que el △ADT ≅ △BCR por el criterio ALA. Con esta afirmación establece que DA=CB y considera que ∠CBE=∠DAF (ambos ángulos los etiqueta como $\theta + \alpha$; siendo θ los ∠DAB y ∠ABC y, α los ∠ BAF y ∠ABE). Finalmente concluye que △ADF≅△CBE.



Estudiante 14

Toma en cuenta los datos iniciales para argumentar que al ser △APR y △BQT congruentes, sus "ángulos correspondientes son iguales" y los etiqueta como α , β y γ (∠ARP=∠BTQ, ∠APR=∠BQT y ∠TBQ=∠RAP respectivamente). Luego, establece que∠GTR=∠GRT= α , por ser opuestos por el vértice y afirma que △GRT es isósceles, etiqueta al ∠RGT como θ y considera que al ser AF una línea recta el ∠RPH =180°– β y emplea el mismo argumento para establecer que ∠GQH=180°– β.

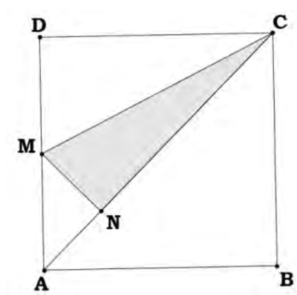
De lo anterior asegura que∠GPH =∠GQH y por el "criterio ALA" el △GQE ≅△GPF. Para sostener su afirmación el estudiante argumenta que comparte el θ (∠EGF), la igualdad de ∠GPF y ∠GQE y GP=GQ , en esta última afirmación el estudiante se apoya de que GR=GT y que △GRT es isósceles; luego señala que △GEQ≅△GFP por lo que también △ADF ≅△BCE, esta última afirmación le es cuestionada al estudiante y éste argumenta que AF=BE porque PF=QE ya que △GQE≅△GPF y el △APR≅△BQT por lo que QB=AP y ∠E=∠F. Posteriormente etiqueta al ∠DAR como 90°– (γ+ ∠QFH) y al ∠CBT como 90°– (γ+ ∠PEH) y los iguala, lo anterior le permite afirmar que ∠QFH= ∠PEH. Finalmente concluye que por el "criterio ALA" el △ADF≅△BCE.



Los distintos procedimientos realizados por los estudiantes pueden observarse en el apéndice O.

Análisis de la tarea 10

En la figura ABCD es un cuadrado, M es el punto medio de AD y MN es perpendicular a AC. Si el área del cuadrado es 120 cm^2. ¿Cuál es el área del triángulo sombreado?



Fuente: Problema y figura tomada de SMM (2013; p. 3)

Estudiante 2

El estudiante comienza empleando la raíz cuadrada de 120 para encontrar la medida de cada lado del cuadrado; prosigue obteniendo que el área del △ABC es 60, considerando el procedimiento siguiente:

$$\frac{\sqrt{120}\, X \,\sqrt{120}}{2} \; .$$

Luego considera que M al ser punto medio del DA, el $DM = \frac{\sqrt{120}}{2}$ y toma ese valor como la base del △ DMC y con el valor de la altura $DC = \sqrt{120}$ encuentra que el área del △DMC es igual a 120/4= 30. Posteriormente, prolonga la línea MN hasta intersecar a AB (llamaremos P al punto de intersección y el cuál posteriormente el estudiante nombra como F) y afirma que MN mide lo mismo que AN asegurando que los ángulos de la base son iguales y miden 45° (∠NMA y ∠MAN); esta afirmación le es cuestionada por el profesor y el estudiante argumenta que al alargar MN el ángulo ∠ANP mide 90° y que al valer también el ∠DAB= 90°, el ángulo ∠MPA midiera 45° al igual que el ∠NAP y que AN=NP. Luego, afirma que ∠AMN=∠MAN = 45° y por lo tanto △MAN es un triángulo isósceles y que △ANP y △MAN valen lo mismo.

Posteriormente, el estudiante hace referencia a la prolongación de MN hacia AB y etiqueta F a ese punto de intersección (punto que anteriormente llamamos P) y afirma que F es punto medio de AB; aquí el profesor le cuestiona sobre la seguridad de tal aseveración y el estudiante afirma que como M es punto medio y es perpendicular a AC el punto F es punto medio y que vale 120/2 (refiriéndose al segmento AF). Luego, anota las siguientes operaciones para encontrar el valor de MF:

$$MF = \sqrt{\frac{120 + 120}{4}}$$

$$MF = \sqrt{60}\ .$$

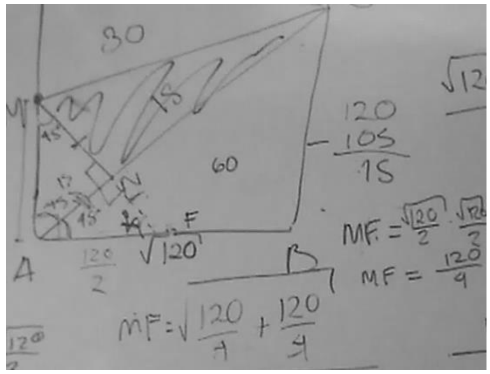
Con este valor argumenta que el valor de MN es:

$$MN = \frac{\sqrt{60}}{2}\ .$$

Y considera que MN=MA y empleando el "teorema de Pitágoras" encuentra el valor del lado AN y con ello ya podría obtener el área del △AMN…, aquí el estudiante anota varias operaciones como la siguiente:

$$A = \frac{\frac{\sqrt{60}}{2} \cdot \frac{\sqrt{60}}{2}}{2} = \frac{\frac{60}{4}}{2} = \frac{60}{8}\ .$$

Posteriormente, revisa sus procedimientos pero no concluye la tarea (al parecer aplica la fórmula para calcular el área del MAN considerando MA como base y MN como su altura).



Estudiante 6

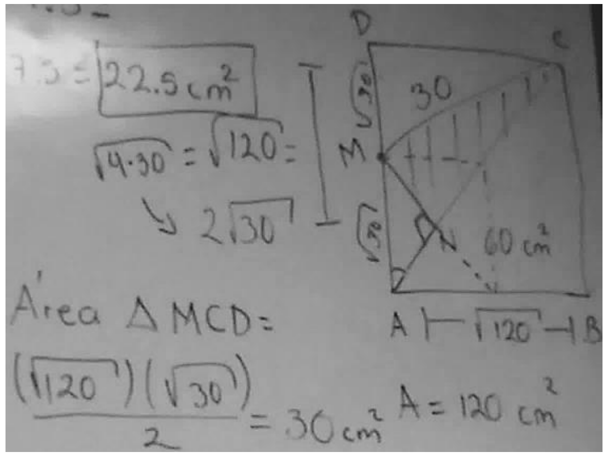
El estudiante comienza calculando un lado de cuadrado e indica que este tiene el valor de $\sqrt{120}$ que es equivalente a $2\sqrt{30}$, de la misma manera establece que AM=$\sqrt{30}$ y MD=$\sqrt{30}$ por ser M el punto medio de DA. Después, obtiene que el área de △DMC:

$$\Delta DMC = \frac{\sqrt{120}\ \cdot\ \sqrt{30}}{2} = 30\,.$$

Del mismo modo obtiene el área del △ACB:

$$\Delta ACB = \frac{\sqrt{120}\ \cdot\ \sqrt{120}}{2} = 60\ .$$

Luego, traza una perpendicular sobre AB con medida $\sqrt{30}$ (considerando segmento de A hacia B), hace lo mismo en el punto M para y forma un cuadrado (considerando $\sqrt{30}$ por lado), a continuación obtiene el área de dicho cuadrado y el resultado lo divide entre cuatro para obtener el área del △ANM y la cuál mide 7.5. Posteriormente, al área del △MAC le resta el área △ANM y obtiene que es 22.5 cm^2. Esto último le es cuestionado por el profesor y el estudiante argumenta que obtiene esa área restando al área del cuadrado ABCD el área del △ACB, △DMC y △ANM, concluyendo de esa manera la tarea.



Estudiante 14

Comienza obteniendo la medida de los lados e indica que miden $\sqrt{120}$, luego calcula el área del △ABC y toma como base AB y la altura CB y escribe lo siguiente:

$$(ABC) = \frac{\sqrt{120} \cdot \sqrt{120}}{2} = \frac{120}{2} = 60\ cm^2\ .$$

Realiza el mismo procedimiento para encontrar el área del △DCM con DC de base y DM como altura, para encontrar el valor de DM el estudiante argumenta que como M es punto medio de DA y como DA=$\sqrt{120}$, entonces, DM=$\frac{\sqrt{120}}{2}$. Con esto escribe lo siguiente:

$$(DCM) = \frac{\sqrt{120} \cdot \frac{\sqrt{120}}{2}}{2} = \frac{\frac{120}{2}}{2} = \frac{60}{2} = 30cm^2\ .$$

Luego, calcula el área del △ACM considerando el área total (del cuadrado ABCD) y suma las áreas de △DCM y △ABC y escribe:

$$(AMC) = 120cm^2 - (30cm^2 + 60cm^2)$$
$$(AMC) = 120cm^2 - 90cm^2$$
$$(AMC) = 30cm^2\ .$$

Posteriormente, se fija en el $\triangle$ABC y lo identifica como triángulo rectángulo y calcula el lado AC empleando el teorema de Pitágoras y realiza sus anotaciones de la siguiente manera:

$$AC^2 = \left(\sqrt{120}\right)^2 + \left(\sqrt{120}\right)^2 \qquad AC^2 = 240$$
$$AC^2 = 120 + 120 \qquad AC = \sqrt{240}\ .$$

Prosigue con la obtención del área del $\triangle$AMC, considera AC como base y MN como su altura, al mismo tiempo, es consciente de que desconoce la altura y realiza operaciones que le permiten encontrar ese valor, escribe lo siguiente:

$$(AMC) = \frac{AC \cdot MN}{2} \qquad 60 = \sqrt{240} \cdot MN$$
$$30 = \frac{\sqrt{240} \cdot MN}{2} \qquad \frac{60}{\sqrt{60} \cdot 2} = \frac{60}{\sqrt{60}\ \cdot \sqrt{4}} = \frac{60}{\sqrt{240}} = MN\ .$$

Luego, simplifica ese valor y lo escribe del siguiente modo:

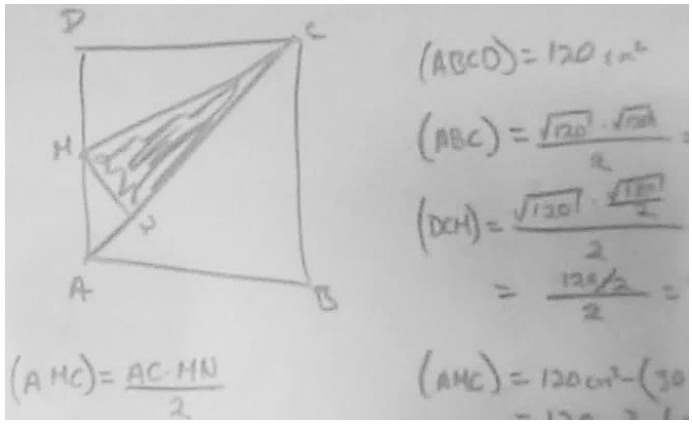
$$MN = \frac{30}{\sqrt{60}}.$$

Continúa con el cálculo del área del $\triangle$AMN y realiza el siguiente procedimiento:

$$(AMN) = \frac{\sqrt{60} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{30}{\sqrt{60}}\right)}{2}$$
$$(AMN) = \frac{\sqrt{2} \bullet 30}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{30}{2}$$
$$(AMN) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 15$$

Finalmente, para encontrar el área del $\triangle$MNC, el estudiante resta al área del $\triangle$MAC el área del $\triangle$AMN, realiza el siguiente procedimiento y concluye la tarea:

$$(MNC) = 30 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 15$$



Los distintos procedimientos realizados por los estudiantes pueden observarse en el apéndice P.

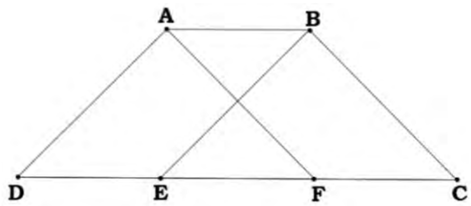
IV.3. Algunos ejemplos de análisis de las rutas de solución

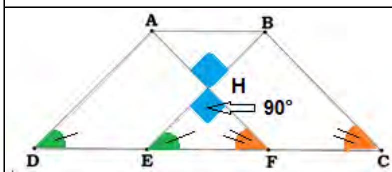
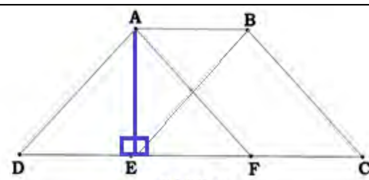
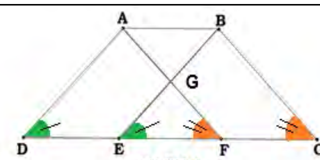
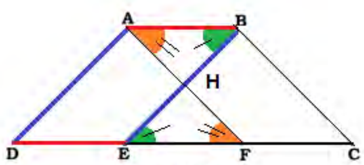
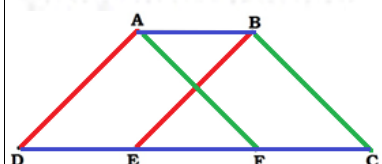
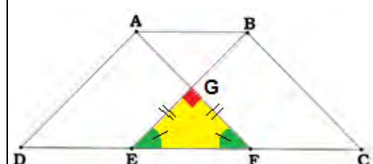
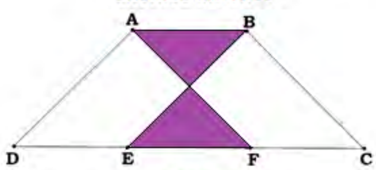
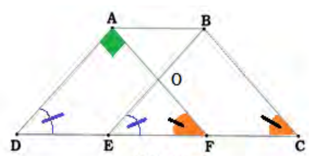
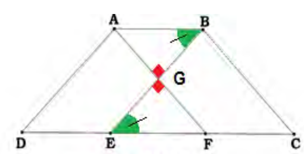
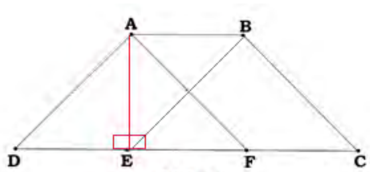
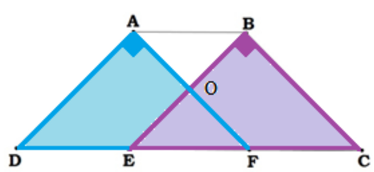
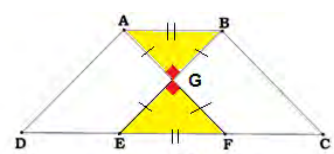
Las rutas de solución nos ofrecen información relevante sobre la manera en la cual los estudiantes son capaces de movilizar sus recursos cognitivos para construir respuestas plausibles a los problemas planteados. Cabe señalar que todas las tareas propuestas evidenciaron el empleo de distintas estrategias de solución, como lo muestran los esquemas de las rutas de solución (véanse apéndices G al P y, B y C) y las rutas descritas en el apartado IV.2. Sin embargo, consideramos necesario explicar detalladamente el cómo los estudiantes fueron construyendo estas rutas de solución.

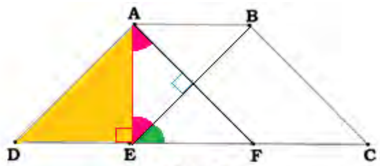
A continuación mostramos los pasos que siguieron algunos de ellos para resolver las tareas 1, 9 y 10 (tabla 2, 3 y 4 respectivamente); estas tareas se seleccionaron porque consideramos que representan en gran medida algunas de las estrategias, conocimientos previos, heurísticas y argumentaciones que los estudiantes emplean frecuentemente para dar respuesta a las tareas.

Tarea 1

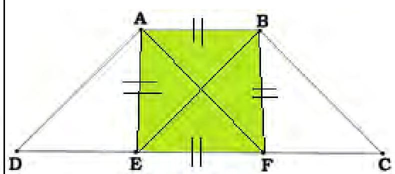
El cuadrilátero ABCD es un trapecio, con AB paralela a DC y $\angle ADC = \angle BCD = 45°$. E y F son puntos sobre el lado DC tales que DE=EF=FC= 1. Además, el trapecio tiene la propiedad de que AF es paralela a BC y BE es paralela a AD. ¿Cuál es el perímetro del trapecio?



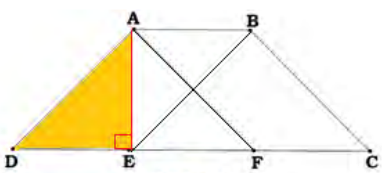
Estudiante 4	Estudiante 8	Estudiante 10
 PASO 1. Identifica ángulos correspondientes y por suma de ángulos internos de un triángulo determina el $\angle EHF=90°$	 PASO 1. Afirma trazar una perpendicular a DC por E que pasa por A, esto le es cuestionado	 PASO 1. Identifica $\angle ADF = \angle BEF$ y $\angle AFD = \angle BCE$ como correspondientes
 PASO 2. Identifica lados paralelos y ángulos alternos internos	 PASO 2. Establece el paralelismo de AD y BE; AF y BC; AB y DC; y DC secante	 PASO 2. Identifica el triángulo GEF como isósceles y $\angle EGF=90°$
 PASO 3. Afirma la congruencia de triángulos con el criterio ALA	 PASO 3. Establece $\angle AFD = \angle BCE$ por ser correspondientes y $\angle DAF=90°$ por suma de ángulos en un triángulo (suponemos que considera $\angle ADF = \angle BEC$)	 PASO 3. Identifica $\angle GEF = \angle GBA$ por alternos internos y $\angle BGA = \angle EGF = 90°$ por opuestos
 PASO 4. Afirma trazar una perpendicular a DC por el punto D, esto le es cuestionado	 PASO 4. Identifica como triángulos rectángulos FAD y EBC	 PASO 4. Identifica como triángulos rectángulos BGA y EGF y aplica teorema de Pitágoras con $EF^2=1$ e indica que: $GB=AG=\frac{1}{\sqrt{2}}$



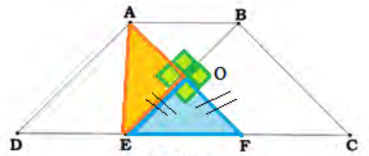
PASO 5.
Argumenta el complemento de ángulos y suma de ángulos en un triángulo. Identifica el triángulo rectángulo DEA



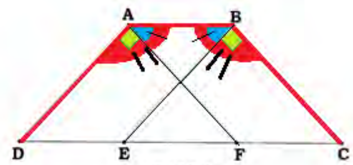
PASO 6.
Identifica la congruencia de triángulos y establece EF=BF=EA=1



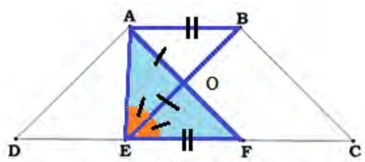
PASO 7.
Aplica teorema de Pitágoras y concluye $P = 4 + 2\sqrt{2}$



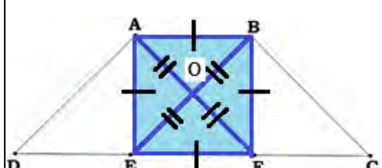
PASO 5.
Identifica $\angle AOE = \angle EOF = \angle FOB = \angle BOA = 90°$ y afirma que por criterio ALA los triángulos AOE y EOF son iguales y EO=OF, esto le es cuestionado



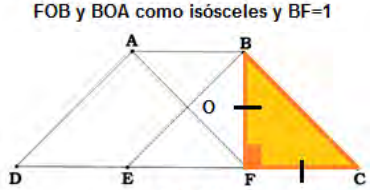
PASO 6.
Establece $\angle DAB = \angle CBA = 135°$, $\angle DAF = \angle CBE = 90°$ y $\angle FAB = \angle ABE = 45°$



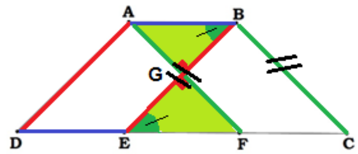
PASO 7.
Establece $\angle AEO = \angle OEF$; AO=EO y AB=EF y por cirterio ALA que son iguales los triángulos AOE y EOF



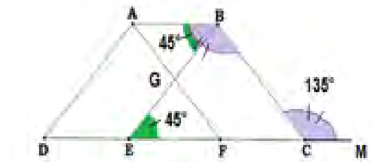
PASO 8.
Identifica los triángulos AOE, EOF, FOB y BOA como isósceles y BF=1



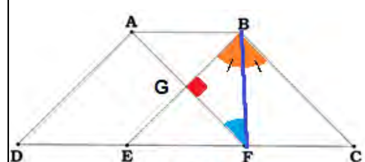
PASO 9.
Identifica el triángulo rectángulo BFC y con BF=FC=1 aplica teorema de Pitágoras para obtener: $BC = \sqrt{2}$
Finalmente concluye que: $P = 4 + 2\sqrt{2}$



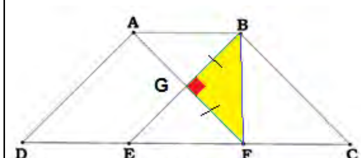
PASO 5.
Establece la congruencia de los triángulos BGA y EGF, y EB=BC



PASO 6.
Identifica $\angle ABC = \angle BCM$ y $\angle ABG = \angle EFG$ por ser alternos internos y $\angle EBC = 90°$



PASO 7.
Traza BF como bisectriz de $\angle$EBC y con $\angle BGF = 90°$, deduce $\angle AFB = 45°$



PASO 8.
Identifica como triángulo rectángulo a BGF y con GB=GF, obtiene que:

$$FB = \sqrt{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

PASO 9.
Identifica a BFC como triángulo rectángulo y aplica teorema de Pitágoras para obtener

$$BC = \sqrt{2}$$

Análogamente obtiene AD=BC y concluye

$$P = 4 + 2\sqrt{2}$$

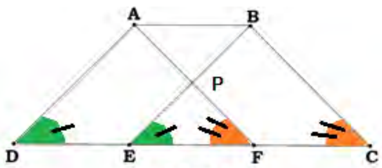
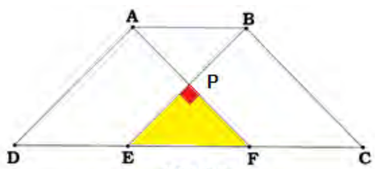
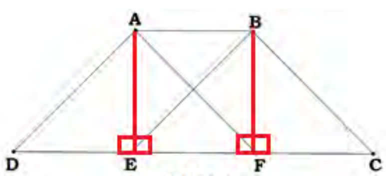
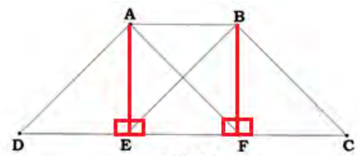
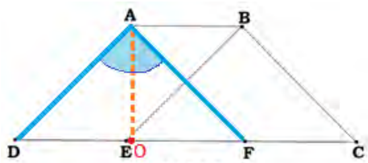
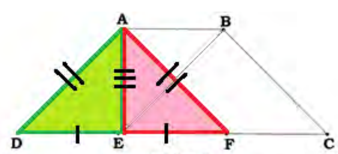
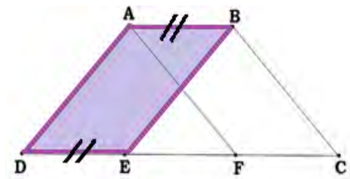
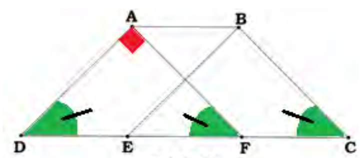
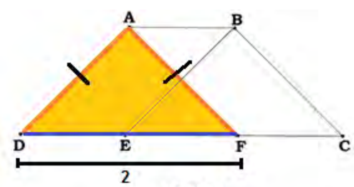
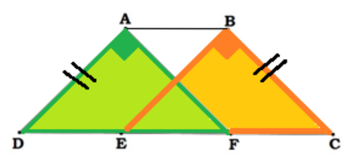
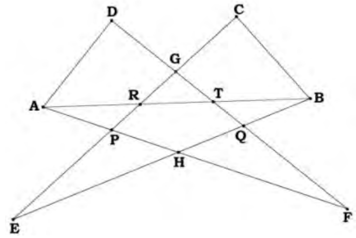
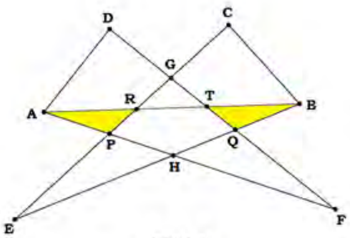
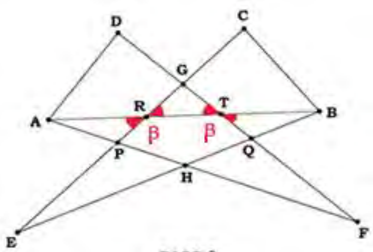
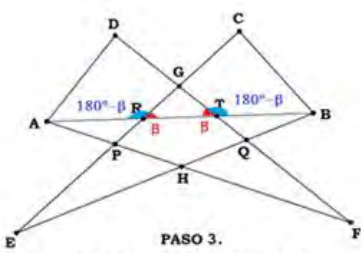
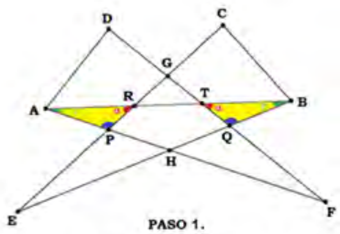
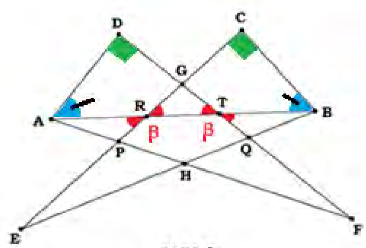
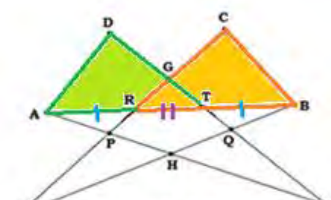
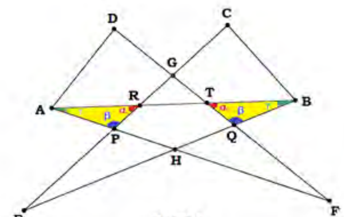
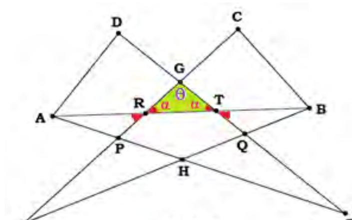
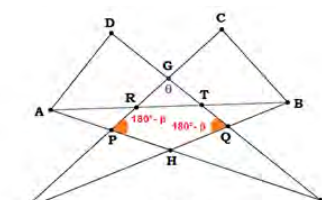
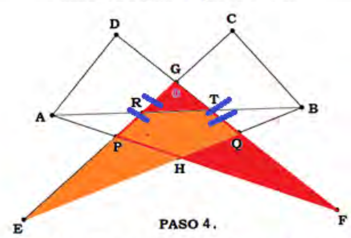
Estudiante 1	Estudiante 9	Estudiante 14 *
 PASO 1. Establece ∠D=∠BEF y ∠C=∠AFE por ser correspondientes  PASO 2. Identifica el triángulo PEF y asegura ∠EPF=90° por suma de ángulos internos  PASO 3. Afirma que al trazar las perpendiculares a DC por E y F, estas pasan por A y B. Esto le es cuestionado. — No concluye la tarea —	 PASO 1. Afirma que al trazar las perpendiculares a DC por E y F, estas pasan por A y B. Esto le es cuestionado.  PASO 2. Marca un punto O sobre DC y establece AO es bisectriz de ∠DAF  PASO 3. Establece que los triángulos ADE y AFE son congruentes y DAF es triángulo isósceles PASO 4. Establece las ecuaciones $DO - \cancel{OF} = 0$ $DO + \cancel{OF} = 2$ $2\,DO = 2$ $DO = 1$ concluye que DO= DE y AE es bisectriz de <DAF — No concluye la tarea —	 PASO 1. Identifica el paralelogramo ADEB y que AB=DE=1  PASO 2. Establece ∠ADF=∠AFD=∠BCD=45° y por suma de ángulos en el triángulo DAF, el ∠DAF=90°  PASO 3. Identifica AD=AF y DF=2  PASO 4. Establece que DAF y CBE son triángulos rectángulos y aplica teorema de Pitágoras para: $AD^2+AF^2=2^2$ $AD=AF=BC=\sqrt{2}$ Finalmente concluye: $P=4+2\sqrt{2}$ * Este procedimiento fue tomado del trabajo escrito, no se tiene el argumento del estudiante de esta ruta de solución

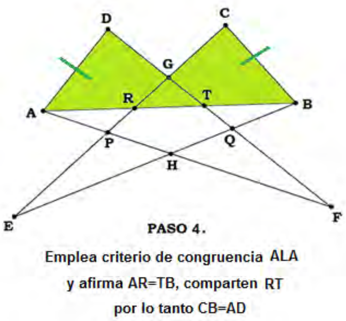
Tabla 2. Rutas de solución de la Tarea 1

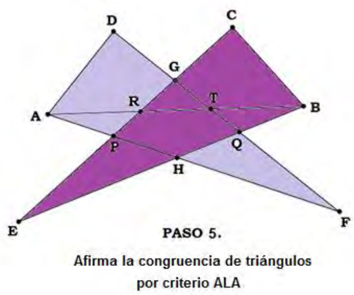
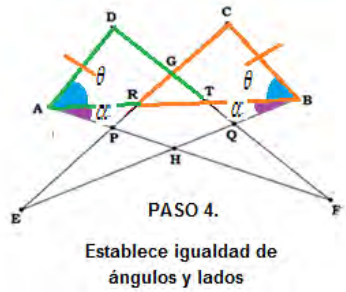
Tarea 9

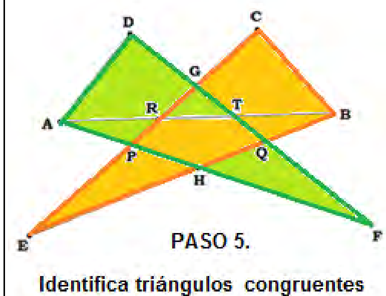
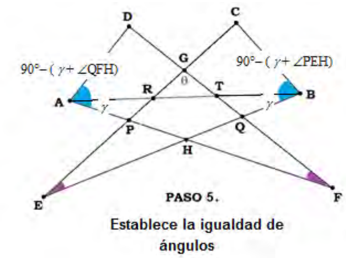
En la siguiente figura, los ángulos $\angle D$ y $\angle C$ son ángulos rectos y $\triangle APR \cong \triangle BQT$. Demostrar que el $\triangle ADF \cong \triangle BCE$.



Estudiante 2	Estudiante 7	Estudiante 14
 **PASO 1.** identifica triángulos congruentes  **PASO 2.** Emplea "teorema de los ángulos opuestos por el vértice"  **PASO 3.** Establece medidas de ángulos considerándolos suplementarios	 **PASO 1.** Afirma la congruencia y etiqueta 2 ángulos, indica el tercer ángulo  **PASO 2.** Emplea ángulos opuestos y considera la suma de ángulos internos en el triángulo  PASO 3. Identifica triángulos congruentes por criterio ALA	 **PASO 1.** Afirma la congruencia y etiqueta ángulos correspondientes  **PASO 2.** Identifica un triángulo, ángulos opuestos etiqueta al ángulo restante  **PASO 3.** Identifica ángulos suplementarios  **PASO 4.** Identifica congruencia de triángulos criterio ALA, GP = GQ

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>


</td>
<td>

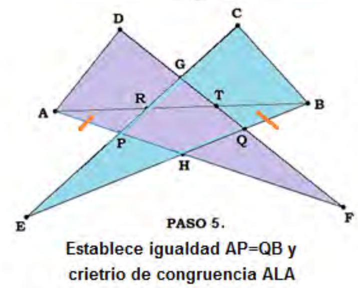
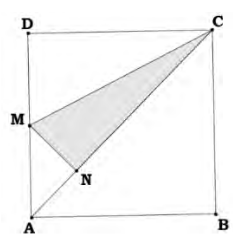
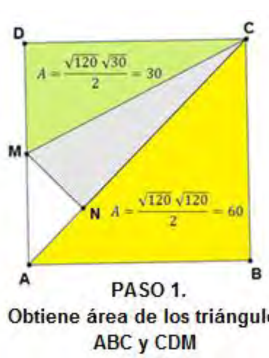
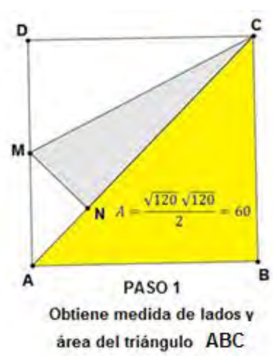
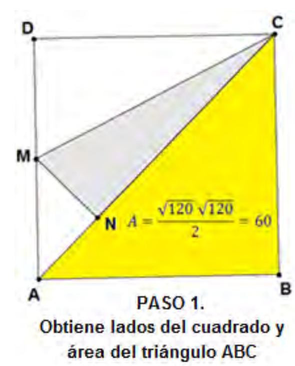

</td>
</tr>
</table>

Tabla 3. Rutas de solución de la Tarea 9

<table>
<tr>
<td colspan="3">Tarea 10
En la figura ABCD es un cuadrado, M es el punto medio de AD y MN es perpendicular a AC. Si el área del cuadrado es 120 cm^2. ¿Cuál es el área del triángulo sombreado?
</td>
</tr>
<tr>
<td>Estudiante 2</td>
<td>Estudiante 6</td>
<td>Estudiante 14</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

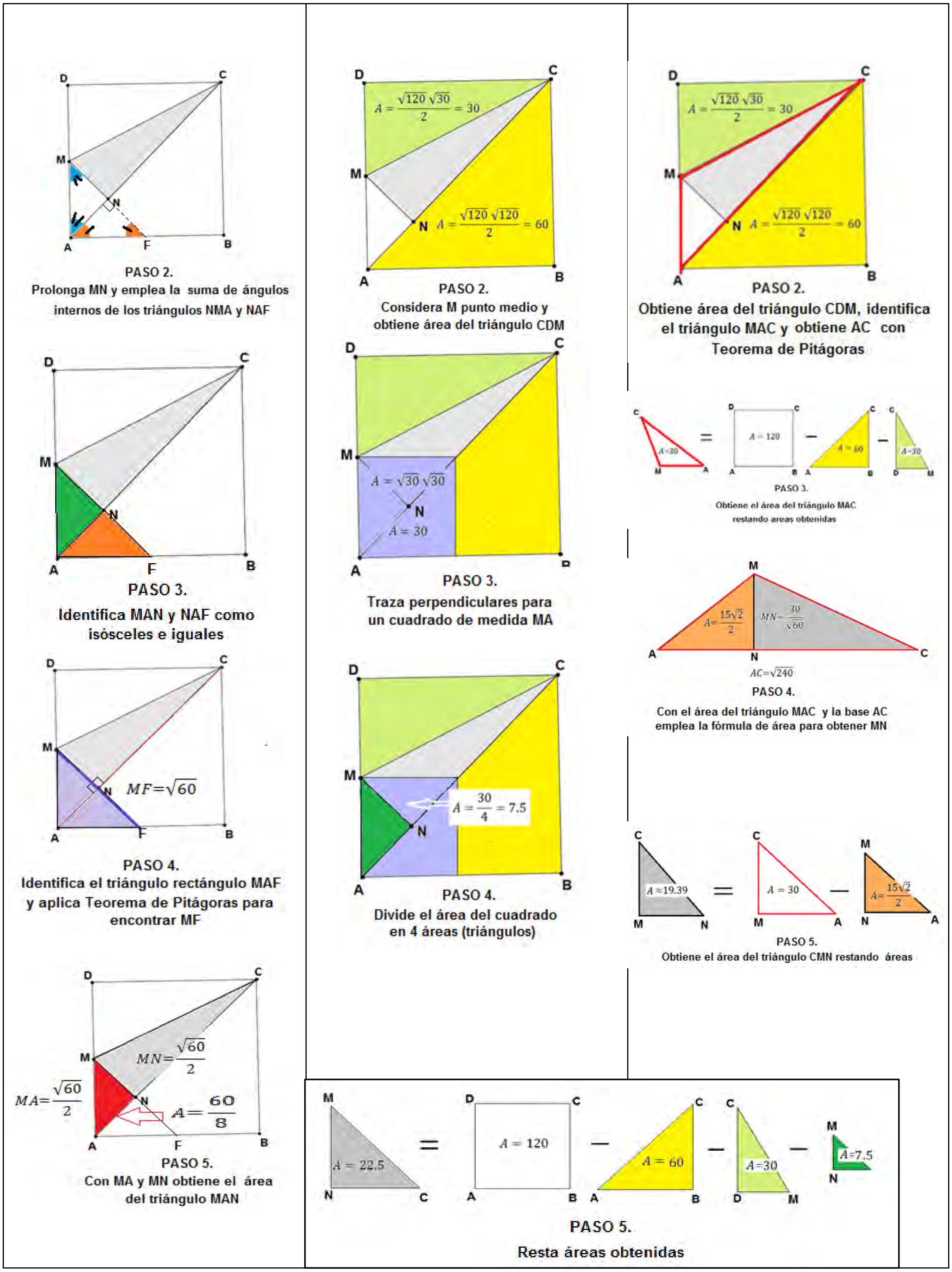


Tabla 4. Rutas de solución de la Tarea 10

En estas tres tareas se puede observar que los estudiantes, al contar con cierto conjunto de conocimientos previos, se auxilian de algunas heurísticas que aplican de manera distinta y aunque algunos no logran finalizarla si fueron capaces de crear una ruta de solución que les permite ir construyendo una posible respuesta a la tarea.

IV.4. Análisis general de las características de razonamiento, argumentaciones y heurísticas empleadas por los estudiantes

De acuerdo a los procedimientos y argumentos que los estudiantes emplearon durante la fase de observación, caracterizamos el tipo de razonamiento mostrado, así como también, el tipo de esquemas de prueba empleados para sustentar sus argumentos. Identificamos también algunas de las heurísticas de las cuales se apoyaron durante el desarrollo de las tareas. El análisis detallado para cada estudiante en cada una de las tareas se puede observar en el apéndice G.

Las siguientes tablas muestran un análisis general de la actividad desarrollada por cada estudiante (únicamente de aquellos estudiantes que participaron en la entrevista), así como una clasificación del tipo de razonamiento, argumentos y heurísticas empleadas por cada uno de ellos en el desarrollo de cada tarea que les fue asignada.

Estudiante 1		
Tipo de razonamiento	**Esquemas de prueba empleados**	**Heurísticas empleadas**
Imitativo y Creativo El estudiante emplea un razonamiento memorístico cuando hace empleo de conocimientos aprendidos previamente, además emplea simbología matemática para asegurar la medida de ciertos ángulos sin tener bien comprendidos los conceptos como "perpendicular" (algorítmico), sin embargo, se observa que el estudiante puede identificar algunas sub-figuras como triángulos y cuadrados	**Esquema de prueba empírico** **(prueba perceptual)** El estudiante da por hecho que el empleo de algunos trazos cumple con ciertas características; en la tarea 1 da por hecho que el trazado de perpendiculares en el trapecio cumplen con formar un cuadrado a simple vista, sin embargo, no puede asegurar esta afirmación. **(prueba inductivo)** En la tarea 2, el estudiante hace empleo de triángulos isósceles así como la	En la tarea 1; traza perpendiculares (trazos auxiliares) en la figura para intentar armar un cuadrado y triángulos rectángulos (descomponer y recomponer el problema). En la tarea 2; se apoya de un problema análogo como el uso de triángulos isósceles para posteriormente dar respuesta al problema general.

dentro del problema 1 e intenta apoyarse de estos para justificar sus resultados (creativo-novedoso, plausible y flexible). En el problema 2. El estudiante muestra un tipo de razonamiento creativo ya que identifica argumentos que le permiten dar respuesta al problema (plausible y flexible), además, emplea la simbología matemática para asegurar dichas afirmaciones (fundamentación matemática).	constante de sumar los ángulos interiores de un triángulo para luego asegurar la validez de un problema más general. **Esquema de prueba analítico** **(prueba axiomático)** En la tarea 2, el estudiante emplea tanto la simbología matemática como propiedades, conceptos y teoremas para justificar de manera convincente su resultado.	

Estudiante 2		
Tipo de razonamiento	**Esquemas de prueba empleados**	**Heurísticas empleadas**
Imitativo y creativo Es imitativo cuando hace empleo correcto de teoremas aunque no se observa una comprensión completa de estos ya que da por hecho que se cumplen ciertas condiciones (Tarea 9). Es creativo (plausible) ya que intenta buscar elementos como triángulos dentro de la figura –tarea 9 y tarea 10-que le permitan resolver el problema empleando diversos argumentos (flexible), como la congruencia de triángulos o la reconstrucción de fórmulas (novedoso) para obtener suma de áreas –tarea 10-.	**Esquemas de prueba de convicción externa** **(prueba simbólico)** El estudiante, en la tarea 9, da por hecho que se cumplen ciertas condiciones de congruencia de triángulos sin percatarse de que su argumento no es convincente en su totalidad, da por hecho que el anotar el criterio justifica su afirmación. **Esquemas de prueba empíricos** **(prueba perceptual y prueba inductivo)** El estudiante, en la tarea 9 y 10, basa sus argumentos en la identificación de triángulos y la construcción de triángulos congruentes. El estudiante, en la tarea 9 busca emplear criterios de congruencia en los distintos triángulos percibidos; en la tarea 10, intenta aplicar fórmulas para obtener áreas de triángulos. **Esquema de prueba analítico** **(prueba axiomático)** En ambas tareas, el estudiante emplea tanto la simbología matemática como la argumentación para justificar de manera convincente su resultado.	En la tarea 9; intenta hacer uso de problemas análogos como el uso de triángulos dentro de la figura dada o el empleo de ciertos teoremas de congruencia, sin embargo, no son comprendidos correctamente o en su totalidad por el estudiante. En la tarea 10; prolonga una recta (MN) para intentar formar varios triángulos (descomponer y recomponer el problema) con los que intenta apoyar sus argumentos (trazos auxiliares), sin embargo, no concluye el problema.

Estudiante 3		
Tipo de razonamiento	**Esquemas de prueba empleados**	**Heurísticas empleadas**
Imitativo y creativo En imitativo (memorístico) no muestra dificultades para aplicar algunos conocimientos aprendidos previamente (tarea 3) aplica sin dificultad la fórmula para obtener el área de triángulos y cuadrados, sin embargo también se observa un razonamiento flexible ya que en la misma tarea intenta reconstruir una fórmula que le permite dar respuesta al problema (novedoso y flexible), lo descompone en varias sub-figuras como triángulos. Además, hace empleo de la sustracción de áreas.	**Esquema de prueba empírico.** **(prueba perceptual)** En la tarea 3, el estudiante, justifica sus resultados basándose en la obtención de áreas de varias sub-figuras. **Esquema de prueba analítico** **(prueba transformacional y prueba axiomático)** En la tarea 3, el estudiante emplea trazos auxiliares de manera intencional para obtener figuras más sencillas. Emplea tanto la simbología matemática como la argumentación para justificar de manera convincente su resultado.	En la tarea 3; prolonga las rectas AB y CD y traza perpendiculares (trazos auxiliares) para formar dos triángulos rectángulos y cuadrados (descomponer y recomponer el problema).

Estudiante 4		
Tipo de razonamiento	**Esquemas de prueba empleados**	**Heurísticas empleadas**
Imitativo y creativo El estudiante emplea, en ambos problemas un razonamiento memorístico ya que hace empleo de conocimientos aprendidos previamente y al mismo tiempo se observa un razonamiento creativo ya que en las tareas 1 y 6; hace la descomposición de la figuras en otras sub-figuras como triángulos y cuadriláteros para justificar sus argumentos (novedoso), además, emplea adecuadamente diversos teoremas como Pitágoras, ángulos opuestos por el vértice, etc. (flexible y plausible).	**Esquema de prueba empírico.** **(prueba perceptual y prueba inductivo)** En las tareas 1 y 6, el estudiante, justifica sus resultados basándose primeramente en la identificación de sub-figuras de las cuales se apoya para emplear argumentos más elaborados. Generaliza los criterios de congruencia de triángulos. **Esquemas de prueba analítico** **(prueba axiomático**) El estudiante, solamente en la tarea 1, hace empleo de la descomposición de los problemas en problemas más sencillos como el empleo de triángulos y emplea la notación matemática para justificar sus argumentos.	En la tarea 1; el estudiante traza perpendiculares (trazos auxiliares).para formar triángulos y emplearlos para resolver el problema (descomponer y recomponer el problema). En la tarea 6; el estudiante emplea problemas análogos como triángulos isósceles para resolver la tarea (descomponer y recomponer el problema).

Estudiante 5		
Tipo de razonamiento	**Esquemas de prueba empleados**	**Heurísticas empleadas**
Imitativo y creativo El estudiante muestra un razonamiento memorístico ya que aplica conocimientos previamente aprendidos, también muestra un razonamiento	**Esquemas de prueba de convicción externa.** **(prueba ritual)** El estudiante, en la tarea 4, es apoyado por el docente para convencerse de su	En la tarea 2; el estudiante hace empleo de analogías como el uso de triángulos isósceles para resolver un problema más general (descomponer y recomponer el problema).

algorítmico cuando da por hecho que el uso de ciertos conceptos se cumplen sin percatarse de las condiciones del problema; también se observa un razonamiento creativo cuando emplea la descomposición en sub-figuras (tarea 2 y 5) y uso adecuado de propiedades de triángulos isósceles, ángulos entre paralelas y la suma de ángulos internos en un triángulo para encontrar la solución de las dos tareas (novedoso y flexible).	afirmación (identificación de ángulos alternos internos entre paralelas). **Esquemas de prueba empírico** **(prueba perceptual y prueba inductivo)** El estudiante basa sus argumentaciones en la observación de sub-figuras dentro del problema como triángulos equiláteros e isósceles (tarea 2 y 5), se observó que en algún momento el profesor tuvo que apoyarlo para que pudiera recordar alguno de ellos (tarea 5). En la tarea 2, el estudiante generaliza la suma de ángulos internos en varios triángulos. **Esquemas de prueba analíticos** **(prueba axiomático)** El estudiante hace empleo de la notación matemática y teoremas que le permiten justificar sus resultados en ambas tareas.	En la tarea 5; el estudiante prolonga rectas CO y AO (trazos auxiliares) para luego apoyar sus conjeturas, también emplea la descomposición y composición del problema en triángulos isósceles.

Estudiante 6		
Tipo de razonamiento	**Esquemas de prueba empleados**	**Heurísticas empleadas**
Imitativo y creativo El estudiante muestra un razonamiento memorístico ya que aplica conocimientos aprendidos previamente, sin embargo también se observa un razonamiento creativo ya que identifica sub-figuras como triángulos rectángulos dentro de cada problema (novedoso) y hace un empleo adecuado de fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, el teorema de Pitágoras o proporcionalidad entre triángulos (flexible y plausible) y notación matemática para resolver los problemas 8 y 10 (plausible y fundamentación matemática).	**Esquemas de prueba empírico** **(prueba perceptual y prueba inductivo)** El estudiante tanto en la tarea 8 como en la tarea 10, identifica sub-figuras como triángulos o cuadrados para comenzar a resolver dichas tareas. En la tarea 8, aplica los criterios de semejanza de triángulos. En la tarea 10, identifica triángulos y cuadrados y aplica fórmulas para encontrar sus áreas. **Esquemas de prueba analítico** **(prueba transformacional y prueba axiomático)** En la tarea 10, el estudiante se apoya de trazos para transformar la figura en triángulos y cuadrados para aplicar fórmulas para áreas. Basa sus argumentaciones en la identificación de sub-figuras como triángulos rectángulos en las tareas 8 y 10 y hace empleo de la simbología matemática para apoyar sus conjeturas.	En la tarea 8; el estudiante traza perpendiculares y prolonga varios trazos como RO y PC (trazos auxiliares) y emplea analogías como el uso de triángulos rectángulos para apoyar sus conjeturas. En la tarea 10; el estudiante prolonga trazos y hace uso de perpendiculares (trazos auxiliares) para formar cuadrados y triángulos; la suma de áreas de triángulos (analogías) que le permiten resolver el tarea.

Estudiante 7		
Tipo de razonamiento	**Esquemas de prueba empleados**	**Heurísticas empleadas**
Imitativo y creativo El estudiante muestra un razonamiento memorístico cuando emplea sin dificultad algunos conocimientos aprendidos previamente, también se observa un razonamiento creativo cuando identifica sub-figuras como triángulos congruentes (tarea 2) o triángulos isósceles (tarea 9), además hace empleo de teoremas como congruencia de triángulos o bien propiedades de la figuras como la suma de ángulos internos de un triángulo o propiedades de los triángulos isósceles parta apoyar sus conjeturas (flexible y plausible), y hace empleo de la notación matemática para justificar sus resultados (fundamentación matemática).	**Esquemas de prueba empírico** **(prueba perceptual y prueba inductivo)** El estudiante, en la tarea 2 y 9, basa sus argumentaciones en la identificación y empleo de sub-figuras como triángulos dentro de cada tarea. En ambas tareas, generaliza la suma de ángulos internos de un triángulo y en la tarea 9 generaliza además los criterios de congruencia de triángulos. **Esquemas de prueba analíticos** **(prueba axiomático)** El estudiante hace empleo de la notación matemática y teoremas que le permiten justificar sus resultados en ambas tareas.	En la tarea 2; el estudiante emplea analogías como triángulos isósceles para resolver un problema más general (descomponer y recomponer el problema). En la tarea 9; el estudiante emplea analogías como uso de triángulos y ángulos opuestos por el vértice dentro de la figura, para resolver un problema más general (descomponer y recomponer el problema).

Estudiante 8		
Tipo de razonamiento	**Esquemas de prueba empleados**	**Heurísticas empleadas**
Imitativo y creativo El estudiante muestra un razonamiento memorístico cuando emplea sin dificultad algunos conocimientos aprendidos previamente; se observa también un razonamiento creativo cuando hace empleo de la descomposición de los problemas en problemas más sencillos (novedoso) como el uso de triángulos isósceles o triángulos rectángulos (tarea 1 y 2, respectivamente) para resolver un problema más general. Se observa también el empleo adecuado de propiedades de los triángulos isósceles, suma de ángulos internos en un triángulo, ángulos entre paralelas, teorema de Pitágoras, congruencia de triángulo y definiciones de bisectriz y perpendicularidad (flexible y plausible), además se observa el empleo de la simbología matemáticas para apoyar sus resultados (fundamentación matemática).	**Esquemas de prueba empírico** **(prueba perceptual y prueba inductivo)** El estudiante en las tareas 1 y 2 comienza con identificar sub-figuras como los triángulos para posteriormente resolverlas. En las tarea 1 el estudiante generaliza los criterios de congruencia de triángulos, mientras que en la tarea 2, generaliza la suma de ángulos internos de un triángulo. **Esquemas de prueba analítico** **(prueba axiomático)** El estudiante en ambos problemas (tarea 1 y 2) hace uso de teoremas, propiedades de las figuras y simbología matemática para apoyar sus argumentos.	En la tarea 1; el estudiante hace empleo de trazos auxiliares como perpendiculares y prolongación de rectas, además, emplea analogías como uso de triángulos isósceles dentro de la figura dada (descomponer y recomponer el problema). En la tarea 2; el estudiante hace uso de triángulos isósceles para resolver un problema más general (descomponer y recomponer el problema) y para establecer relaciones algebraicas que le permiten justificar sus argumentos.

Estudiante 9		
Tipo de razonamiento	**Esquemas de prueba empleados**	**Heurísticas empleadas**
Imitativo y creativo El estudiante emplea el razonamiento memorístico cuando hace uso de conocimientos aprendidos previamente , principalmente cuando da por hecho que se cumplen ciertas condiciones, por ejemplo, al momento de emplear trazos auxiliares o definiciones como perpendicularidad (tarea 1). Emplea el razonamiento creativo y flexible cuando identifica o descompone sub-figuras dentro del problema para intentar resolverlo (tarea 1).	**Esquemas de prueba de convicción externa** **(prueba ritual)** El estudiante hace un empleo deficiente de teoremas y definiciones al momento de justificar sus resultados (tarea 1). **Esquemas de prueba empírico** **(prueba perceptual)** En la tarea el estudiante basa sus argumentaciones en la identificación de sub-figuras, como triángulos.	En la tarea 1; el estudiante traza perpendiculares (trazos auxiliares) para formar triángulos rectángulos (analogías) para resolver un problema más general, aunque no finaliza el tarea.

Estudiante 10		
Tipo de razonamiento	**Esquemas de prueba empleados**	**Heurísticas empleadas**
Imitativo y creativo El estudiante muestra una razonamiento memorístico cuando hace uso de conocimientos aprendidos previamente y un razonamiento creativo cuando hace empleo de la descomposición de los problemas en sub-figuras como triángulos (tarea 1), emplea adecuadamente conceptos como ángulos suplementarios, ángulos entre paralelas, ángulo recto, teorema de Pitágoras y congruencia de triángulos para justificar sus argumentos (plausible) y emplea la notación matemática para justificar sus resultados (fundamentación matemática).	**Esquemas de prueba empírico** **(prueba perceptual y prueba inductivo)** El estudiante, en la tarea 1, se basa inicialmente en la identificación de sub-figuras, principalmente triángulos, que posteriormente le sirven para dar argumentos más elaborados. El estudiante generaliza los criterios de congruencia de triángulos. **Esquemas de prueba analítico** **(prueba axiomático)** El estudiante hace uso adecuado de conceptos y teoremas, además de la simbología matemática para apoyar sus argumentos y justificar sus resultados.	En la tarea 1; el estudiante hace empleo de problemas análogos como ángulos entre paralelas, ángulos suplementarios y la identificación de triángulos dentro de la figura dada (descomponer y recomponer el problema).

Estudiante 11		
Tipo de razonamiento	**Esquemas de prueba empleados**	**Heurísticas empleadas**
Imitativo y Creativo El estudiante emplea el razonamiento **creativo** cuando identifica o descompone el problema en sub-figuras (novedoso) como cuadriláteros	**Esquemas de prueba empírico** **(prueba perceptual y prueba inductivo)** El estudiante, en la tarea 7 se basa inicialmente en la identificación de sub-	En la tarea 7; el estudiante hace empleo de analogías como la identificación de cuadriláteros en el interior de la figura dada (descomponer y recomponer el problema).

(tarea 7) o la suma de ángulos internos de un cuadrilátero, ángulos suplementarios, ángulos opuestos por el vértice, además, emplea la simbología matemáticas para justificar sus resultados (fundamentación matemática).	figuras como triángulos y cuadriláteros que posteriormente le sirven para dar argumentos más elaborados. El estudiante generaliza la suma de ángulos internos de un cuadrilátero. **Esquemas de prueba analítico** **(prueba axiomático)** El estudiante hace un empleo adecuado de conceptos, teorema, propiedades de las figuras y uso de simbología matemática para apoyar sus argumentos y justificar sus resultados.	

Estudiante 12		
Tipo de razonamiento	**Esquemas de prueba empleados**	**Heurísticas empleadas**
Imitativo y creativo El estudiante muestra una razonamiento memorístico cuando aplica sin mayor dificultad conocimientos aprendidos previamente, sin embargo, también muestra un razonamiento creativo cuando identifica o descompone el problema en sub-figuras (novedoso) como el identificar triángulos isósceles (tarea 4) o triángulos congruentes (tarea 5). Hace empleo de teoremas y propiedades de las figuras como ángulos entre paralelas, ángulos suplementarios, triángulos isósceles y criterios de congruencia de triángulos (flexible y plausible), emplea además, la simbología matemática para justificar sus resultados (fundamentación matemática).	**Esquemas de prueba empírico** **(prueba perceptual)** El estudiante, en ambas tareas (4 y 5), se basa inicialmente en la identificación de sub-figuras como triángulos los cuales le sirven para dar argumentos más elaborados. **Esquemas de prueba analíticos** **(prueba axiomático)** El estudiante hace un empleo adecuado de teoremas, definiciones, propiedades de las figuras y la simbología matemática para sustentar sus argumentos y justificar resultados (tarea 4).	En la tarea 4; el estudiante hace uso de analogías como el uso de ángulos entre paralelas, triángulos isósceles y suma de segmentos (descomponer y recomponer el problema). En la tarea 5; el estudiante identifica triángulos congruentes dentro de la figura (descomponer y recomponer el problema).

Estudiante 13		
Tipo de razonamiento	**Esquemas de prueba empleados**	**Heurísticas empleadas**
Imitativo y creativo El estudiante muestra un razonamiento memorístico cuando emplea conocimientos aprendidos previamente y muestra una razonamiento **algorítmico** cuando realiza trazos auxiliares que asegura cumplen ciertas condiciones, por ejemplo, el trazo de paralelas que pasan por ciertos puntos (tarea	**Esquemas de prueba de convicción externa** **(prueba ritual)** El estudiante hace un empleo deficiente de teoremas y conceptos para justificar sus resultados (tarea 7). **Esquemas de prueba empírico** **(prueba perceptual)**	En la tarea 7; el estudiante prolonga varias rectas (trazos auxiliares) para identificar triángulos (descomponer y recomponer el problema), sin embargo, no logra concluir la tarea.

7). Hace empleo del razonamiento **creativo** cuando al realizar trazos auxiliares pretende descomponer el problema en sub-figuras como triángulos isósceles (novedoso y flexible).	El estudiante se basa inicialmente en la identificación de sub-figuras como los triángulos que posiblemente le permitan resolver la tarea.	

Estudiante 14		
Tipo de razonamiento	**Esquemas de prueba empleados**	**Heurísticas empleadas**
Imitativo y creativo El estudiante muestra un razonamiento memorístico cuando hace empleo de conocimientos aprendidos previamente, sin embargo, también muestra un razonamiento creativo cuando identifica o descompone el problema en sub-figuras (novedoso) como el identificar triángulos rectángulos (tarea 9), triángulos isósceles o suma de áreas (tarea 10). Hace empleo de teoremas y propiedades de las figuras como los criterios de congruencia de triángulos, ángulos opuestos por el vértice, ángulos suplementarios, descomposición de áreas, teorema de Pitágoras, definiciones como punto medio y cuadrado (flexible y plausible), emplea además, la simbología matemática para justificar sus resultados (fundamentación matemática).	**Esquemas de prueba empírico** **(prueba perceptual y prueba inductivo)** El estudiante, en ambas tareas (9 y 10), se basa inicialmente en la identificación de sub-figuras como el identificar triángulos y ángulos que posteriormente le sirven para dar argumentos más elaborados. En la tarea 9 generaliza la aplicación de los criterios de congruencia de triángulos, la suma de ángulos suplementarios y los ángulos opuestos por el vértice. Mientras que en la tarea 10 generaliza la identificación de triángulos para obtener áreas. **Esquemas de prueba analítico** **(prueba axiomático)** El estudiante, hace empleo adecuado de definiciones, teoremas, propiedades de las figuras y uso de simbología matemática para apoyar sus argumentos y justificar sus resultados (tarea 9 y 10).	En la tarea 9; el estudiante hace empleo nuevamente de analogías como identificar triángulos rectángulos, además de sumar áreas para encontrar la respuesta al problema (componer y recomponer el problema). En la tarea 10; el estudiante hace empleo de problemas análogos como uso de diversos triángulos (descomponer y recomponer el problema) dentro de la figura dada.

Estudiante 15		
Tipo de razonamiento	**Esquemas de prueba empleados**	**Heurísticas empleadas**
Imitativo y creativo El estudiante muestra un razonamiento memorístico cuando aplica sin dificultad conocimientos aprendidos previamente, también se observa un razonamiento creativo cuando hace empleo de la descomposición del problema (novedoso) en sub-figuras como triángulos rectángulos (tarea 8) y trazos auxiliares para identificar triángulos isósceles (tarea 4). Emplea teoremas, propiedades o	**Esquemas de prueba empírico** **(prueba perceptual y prueba inductivo)** El estudiante, en las tareas 4 y 8, se basa inicialmente en la identificación de sub-figuras como triángulos rectángulos y que posteriormente le sirven para dar argumentos más elaborados. En la tarea 8 generaliza los criterios de semejanza de triángulos. **Esquemas de prueba analítico**	En la tarea 4; el estudiante prolonga rectas (trazos auxiliares) para luego emplear analogías como el uso de ángulos opuestos por el vértice, ángulos entre paralelas y suma de segmentos (descomponer y recomponer el problema). En la tarea 8; el estudiante hace empleo de rectas paralelas y prolonga otras rectas (trazos auxiliares), luego emplea analogías como triángulos rectángulos semejantes dentro

conceptos como la definición de bisectriz y paralelismo, ángulos entre paralelas, propiedades de los triángulos isósceles y rectángulos, criterios de congruencia de triángulos, triángulos semejantes, teorema de Tales y teorema de Pitágoras (flexible y plausible), además, emplea la simbología matemática para justificar sus resultados (fundamentación matemática).	**(axiomático)** El estudiante en las tareas 4 y 8 hace empleo adecuado de definiciones, propiedades de las figuras, teoremas y simbología matemática para apoyar sus argumentos y justificar sus resultados.	de la figura dada (descomponer y recomponer el problema).

Las características específicas del razonamiento y del tipo de argumentaciones dadas por los estudiantes, así como los conocimientos de geometría y las heurísticas empleadas por éstos en cada una de las tareas, se pueden observar en el apéndice F.

CAPÍTULO V

V. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

V.1. Introducción

Es interesante señalar que después de realizar una observación meticulosa de las rutas de solución que los estudiantes emplearon en cada una de las tareas, tanto en las entrevistas como en sus pruebas escritas, pudimos identificar que éstos no siempre eligen un mismo camino para llegar a la solución, incluso se puede decir que los estudiantes fueron capaces de conectar sus recursos de forma efectiva y no acudieron sólo a la memoria para explicar sus rutas de solución. También podemos decir que estos procedimientos o rutas pueden parecerse o no a los empleados por otros compañeros. Sin embargo, es importante señalar que aunque no todos ellos llegan al resultado correcto, sí mostraron que cuentan con una variedad de estrategias y conocimientos previos que les permitieron avanzar en el diseño de una estrategia de solución.

Durante la investigación se pudo observar que el uso de razonamiento memorístico es importante, ya que un elemento central al resolver varias de las tareas incluye aplicar los conocimientos aprendidos en cursos previos con fluidez. Los estudiantes muestran también un razonamiento creativo ya que su conjunto de estrategias y conocimientos les permitieron construir alguna ruta de solución, por ejemplo, constatamos que muchos de ellos fueron capaces de identificar o descomponer el problema en sub-figuras, de las cuales se apoyaron para intentar responder a problemas parciales. De la misma manera pudimos constatar que muestran un pensamiento flexible, ya que no se limitan a emplear un único camino o ruta de solución, principalmente cuando se dan cuenta que éste no les lleva a la respuesta correcta y buscan otras alternativas que les permiten avanzar para resolver la tarea (estudiantes 4 y 11en las tareas 6 y 7 respectivamente – véanse apéndices B y C–). Otra característica es que los estudiantes emplean un razonamiento creativo, principalmente un pensamiento plausible, cuando la mayoría de ellos soporta sus conjeturas en argumentos convincentes y en algunos casos hacen empleo de la fundamentación matemática como: el uso correcto de algún teorema, propiedades de las figuras, empleo de ecuaciones o establecimiento de relaciones para apoyar sus conjeturas (estudiante 4, 8 y 10-Tarea 1; Estudiante 1, 5, 7 y 8-Tarea 2; Estudiante 5, 12 y 15-Tarea 4; Estudiante 11-Tarea 7; Estudiante 6 y 15-Tarea 8; Estudiante 2, 7 y 14-Tarea 9; Estudiante 2, 6 y 14-Tarea 10).

Otra situación que observamos, fue el manejo de ciertos contenidos geométricos que los estudiantes emplearon para apoyar sus argumentos al momento de resolver problemas de geometría, entre estos se pudo verificar que emplean constantemente: los criterios de congruencia de triángulos, el teorema de Pitágoras, ángulos entre paralelas, ángulos complementarios, ángulos inscritos en una circunferencia y propiedades de los triángulos (suma de ángulos interiores). Fue muy raro observar otros contenidos empleados, por ejemplo, el identificar cuadriláteros dentro del problema (estudiante 6–tarea 10, estudiante 11–tarea 7 y estudiante 14–Tarea 1), o bien, el teorema del ángulo externo (estudiante 8-tarea 2; estudiante 10–Tarea 1).

Otro aspecto importante, fue el evidenciar el tipo de heurísticas que los estudiantes emplearon durante la resolución de problemas. Entre estas podemos mencionar que los estudiantes comúnmente emplean: la descomposición y composición del problema, es decir, intentan encontrar figuras más sencillas de resolver; el realizar trazos auxiliares, como el prolongar trazos dentro de las figuras para armar otras nuevas (tarea 1, estudiantes: 1, 4, 8, 9 y 10; tarea 3, estudiante 3; tarea 4, estudiante 15; tarea 7, estudiante 13; tarea 8, estudiantes: 6 y 15; tarea 10: estudiantes 2 y 6). También la identificación de casos análogos, como el identificar triángulos o figuras más sencillas o aplicar un teorema de un caso similar (tarea 1, estudiantes 1,4,8,9 y 10; tarea 2, estudiantes: 1,5,7 y 8; tarea 3, estudiante 3; tarea 4, estudiantes: 5, 12,15; tarea 5, estudiante 12; tarea 6, estudiante 4; tarea 7, estudiante 11 y 13; tarea 8, estudiantes: 6 y 15; tarea 9, estudiantes 2, 7 y 14; tarea 10: estudiantes 2 , 6 y 14). Un aspecto muy interesante observado entre las estrategias empleadas por los estudiantes, y que no es muy común observar, fue el empleo del principio de aditividad de áreas, el cual consiste en sumar o restar áreas de sub-figuras para obtener un área específica (estudiante 3-tarea 3 y estudiantes 2, 6 y 14 en la tarea 8). Esto nos indica que es probable que los estudiantes han tenido la oportunidad de realizar actividades que les permiten poner en juego sus conocimientos previos sobre temas de geometría, así como también, la manera en la cual emplean dichos conocimientos para intentar convencerse y/o convencer al docente sobre la veracidad de sus procedimientos y resultados, esto último también es indicativo del tipo de creencia que tiene cada uno de los estudiantes sobre sus conocimientos de geometría.

También, fue necesario identificar el tipo de esquemas de prueba que emplearon los estudiantes durante la solución de problemas ya que estos nos permitieron analizar y comprender la manera en la cual los estudiantes hacen empleo de distintos tipos de argumento para justificar sus resultados, entre ellos observamos que son pocos los estudiantes que hacen uso de los **esquemas de convicción externa,** principalmente se puede asegurar que emplean este tipo de esquemas cuando no tienen bien comprendido un teorema, un concepto o solo emplean los algoritmos o propiedades de las figuras de manera mecánica sin hacer un análisis previo de la tarea (estudiante 1,4 y 9-tarea 1, estudiante 2- tarea 9 y 10, estudiante 4-tarea 1, estudiante 5-tarea 4 y estudiante 13- tarea 7). También podemos observar que gran parte de ellos emplea los **esquemas de prueba empírico**, principalmente el **esquema de prueba perceptual**, es decir, justifican ciertas afirmaciones basándose en las figuras que perciben de manera inmediata como lo pueden ser el identificar figuras como triángulos, cuadrados, etc., y a partir de estas sub-figuras los estudiantes pretenden resolver el problema (todos los estudiantes fueron capaces de identificar sub-figuras, véase apéndice F), también se observó el empleo de los **esquemas de prueba inductivos** cuando los estudiantes se enfocaron en observar casos específicos como: la identificación de triángulos para la generalización de los criterios de congruencia, propiedades de la suma de ángulos internos, obtención de áreas; o bien, ángulos opuestos por el vértice y ángulos suplementarios (estudiantes 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 y 14).

Otro esquema de prueba empleado por los estudiantes, fue el uso de los **esquemas de prueba analíticos**, principalmente los **esquemas de prueba axiomático**; en estos esquemas de prueba los estudiantes emplearon adecuadamente tanto teoremas, conceptos, propiedades de las figuras así como la simbología matemática para argumentar y justificar procedimientos y resultados obtenidos en los problemas planteados (estudiantes 4, 8 y 10 en la tarea 1; estudiantes 1,5,7 y 8 en la tarea 2; estudiantes 5, 12 y 15 en la tarea 4; estudiante 11 en la tarea7; estudiantes 6 y 15 en la tarea 8; estudiantes 2, 7 y 14 en la tarea 9 y estudiantes 2, 6 y 10 en la tarea 10).

En general, podemos asegurar que los estudiantes emplean diversos esquemas de prueba durante la justificación de resultados, ya que dependiendo del conjunto de conocimientos previos con los que cuenten y del tipo de problema que se les plantee, pueden transitar entre diferentes formas argumentativas. Sabemos que si la tarea representa hasta cierto punto un problema sencillo e incluso conocido previamente por el estudiante, éste mostrará un esquema de prueba de convicción externa si la tarea se vuelve un poco más compleja pero, si el estudiante logra identificar patrones o percibe nuevas sub-figuras éste hará uso de los esquemas de prueba empíricos.

Sin embargo, si la tarea le exige al estudiante elaborar deducciones más complejas y hace uso de demostraciones matemáticas más elaboradas se dirá que el estudiante hace uso de los esquemas de prueba analíticos. Durante esta investigación fue común observar que los estudiantes transitan por estas clasificaciones de argumentación ya que pueden estar empleando en un inicio esquemas de prueba empírico y luego convencerse de sus conjeturas haciendo uso de los esquemas de prueba analíticos (tarea 1, estudiantes 4, 8 y 10; tarea 2, estudiantes 1, 5, 7 y 8; tarea 3, estudiante 3; tarea 4, estudiantes 5, 12 y 15; tarea 7, estudiante 11; tarea 8, estudiantes 6 y 15; tarea 9, estudiantes 2, 7 y 14 y tarea 10, estudiantes 2, 6 y 14), o bien, hacer uso de los esquemas de prueba perceptuales (empíricos) y posteriormente hacer uso de los esquemas de convicción externa o viceversa y convencerse dando por hecho que se cumplen ciertas propiedades (estudiante 1, 4 y 9 en la tarea 1, estudiante 2 en las tareas 9 y 10, , estudiante 5-tarea 4, y estudiante 11-tarea 7).

Lo anterior nos permite intentar comprender la manera en la cual los estudiantes resuelven problemas básicos de geometría y emplear este estudio en investigaciones posteriores.

V.2. Respuesta a las preguntas de investigación

Para contestar a la pregunta, *¿qué tipo de razonamiento emplean estudiantes de licenciatura para resolver problemas geométricos y justificar el proceso de solución*?, basándonos en las observaciones realizadas, podemos afirmar que la gran mayoría de los estudiantes que participaron en esta investigación desarrollan un razonamiento creativo ya que usan la descomposición del problema en sub-figuras e intentan crear distintos caminos para contestar al problema planteado. Sin embargo, cabe la posibilidad de que algunos estudiantes recurran al razonamiento imitativo, principalmente cuando las tareas no representan un reto o un problema para ellos.

Con respecto a la pregunta *¿cuáles argumentos y heurísticas emplean estudiantes de licenciatura durante la justificación de resultados geométricos básicos?*, podemos asegurar que los estudiantes hacen uso de diversas heurísticas como: la identificación de sub-figuras dentro de la figura inicial del problema y de las cuales se apoyan para responder a una figura más elaborada; hacen trazos auxiliares que en ocasiones les son de utilidad; generalmente se observa que los estudiantes intentan aplicar teoremas y propiedades que les son factibles de aplicación o que la solución de la tarea a resolver es similar a casos conocidos previamente por el estudiante.

V.3. Alcances y limitaciones del estudio

Esta investigación tiene la limitación de que el grupo de estudiantes que participaron no es representativo de los estudiantes universitarios. Durante la asignación de las 10 tareas escritas, los estudiantes contaron con tiempo suficiente y abierto para su resolverlas, además, al no existir una supervisión constante y llevar un registro sobre el tiempo real que emplearon los estudiantes para resolver dichas tareas, y sobre todo del registro de los procedimientos que éstos pudieron emplear durante la construcción de las rutas de solución, no pudimos determinar el tipo de estrategias y las razones por las cuales algunas de estas pudieron ser descartadas durante el proceso de solución. Por otra parte, la sugerencia de que resolvieran los problemas de manera individual no descarta la posibilidad de que algunas rutas de solución estuvieran influenciadas por sugerencias de fuentes externas (ayuda de terceras personas como compañeros de clase, profesores, libros o uso de fuentes electrónicas de información). Sin embargo, esto lo intentamos controlar mediante la realización de las entrevistas informales (argumentaciones dadas por los estudiantes al momento de justificar sus resultados).

Algunos estudiantes no lograron contestar a todas las tareas que les fueron planteadas y otros no pudieron construir un argumento convincente para justificar sus resultados, además, al no contar con el tiempo suficiente para recabar información sobre las argumentaciones dadas por cada uno de los estudiantes en cada una de las tareas, no se pudo determinar el tipo de razonamiento, así como tampoco el tipo de argumentación empleados por estos.

Otro aspecto que pudo ser omitido fue, la posibilidad de que algunos de los estudiantes que participaron en esta investigación tuviesen mayor habilidad en la resolución de problemas de geometría básica, al haber pertenecido a algún grupo de Olimpiadas Matemáticas Mexicanas; lo cual podría modificar significativamente el desempeño aquí analizado.

Fue difícil realizar un análisis completo y detallado de la historia de la enseñanza de la geometría en México ya que son pocos los estudios que se tienen al respecto, aunado a la pérdida de documentos de las culturas mesoamericanas y a la poca información que es facilitada por las instituciones educativas. Este punto puede abrir un campo de investigación, por un lado en el área educativa y por el otro del matemático, principalmente el de la geometría.

V.4. Reflexiones finales

Se pudo constatar que los estudiantes que participaron en esta investigación evidenciaron el empleo algunos elementos del pensamiento matemático como: la descomposición y composición de figuras, la generalización de casos, el empleo de casos particulares, el uso de definiciones, propiedades de las figuras, teoremas, notación y procedimientos algebraicos durante la construcción de una ruta de solución en cada tarea. Además, se pudo verificar que dichos estudiantes hacen empleo de diversas argumentaciones, principalmente cuando son motivados a justificar y convencer a otros o a sí mismos de sus resultados, según lo propuesto por Harel y Sowder (1998) pero con la característica de que los estudiantes no se encuentran estáticos en una clasificación, más bien, transitan de una a otra según el tipo de tarea o bien del conjunto de estrategias con las que cuenten. Sería ideal que los docentes promuevan el empleo de problemas que permita a los estudiantes el desarrollar un razonamiento creativo y el manejo de argumentaciones cercanas a los esquemas de prueba analíticos.

Sería interesante complementar esta investigación con el empleo de herramientas como el uso de un software dinámico de geometría. Así como evidenciar algunas ventajas del uso de un software en relación con el pensamiento matemático. Podría resultar enriquecedor, además, si se recopilaran los argumentos de la mayor parte de los estudiantes que participen en tareas donde deban argumentar sus procesos de solución. También sería interesante analizar hasta qué punto puede influir el trabajo en equipo en la elaboración de rutas de solución. Otro aspecto importante sería conocer la metodología empleada por los docentes durante el diseño de tareas, principalmente de temas de geometría euclidiana en educación básica.

Puede resultar de ayuda el hacer un estudio previo, y mucho más profundo, que implique considerar los conocimientos previos de cada estudiante, es decir, si existiese la posibilidad de que los estudiantes cuenten con recursos cognitivos más profundos de geometría básica con respecto a sus iguales (compañeros) y si esta situación pudiese suponer una ventaja significativa en su desempeño académico.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Anglin, W. S. (1994). *Mathematics: A concise history and philosophy*. New York: Springer-Verlag.

AHSEP, (1928). *El esfuerzo educativo en México*. México: SEP

Barrera-Mora, F. & Reyes-Rodríguez, A. (2013). Enhancing Mathematical Thinking and Reasoning Through the use of digital tools in problem solving. *Far East Journal of Mathematical Education*, 10 (2), 109-134.

Bergqvist, T. & Lithner, J. Simulating. Creative Reasoning in Mathematics Teaching. Research reports in Mathematics Education, No. 2, 2005.

Bramlett, D. C., & Drake, C. T. (2013). A History of Mathematical Proof: Ancient Greece to the Computer Age. *Journal of Mathematical Sciences and Mathematics Education, 8* (2), 20-33.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1982). *The Mathematical Experience*. Boston: Hougton Mifflin.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon, 26,* 15-30.

Edwards, L. D. (1999). Odds and evens: Mathematical reasoning and informal proof among high school students. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(4), 489-504.

Eisenhart, M. A. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: ideas from a cultural anthropologist; implication for mathematics education researchers. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1. (pp. 202-219). Blacksburg, Virginia: PME-NA.

Guerrero, A. B. (2006). *Geometría. Desarrollo Axiomático.* Bogotá, D.C.: ECOE Ediciones.

Hanna, G. (2001). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44,* 5-23. Klumer Academic Publishers. Netherlands.

Harel, G. & Sowder, H. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Issues in mathematics education: Vol. 7. Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-282). Providence, RI: American Mathematical Society.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 389-399.

Hiebert, J., Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., et al. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. USA:

Irigoyen, P. *Las escuelas secundarias en el Distrito Federal de 1926 a 1946. Su creación y desarrollo*. Tesis (Maestría en Historia).México, UAM- Iztapalapa, 2003.

Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics Magazine, 64* (5), 291-314.

Lithner, J. (2007). A research framework for creative and imitative reasoning. 255-276. Springer Science + Businness Media B.V. 2007. Department of Mathematics, Umeaa University, Sweden

Lithner, J. (2012). Learning mathematics by creative or imitative reasoning. *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Seoul, Korea.

Martínez, M. (2000). *Geometría mesoamericana*. México: FCE.

Moise, E. E. & Downs, F. L. (1970). *Geometry*. (Trad. Mariano García). E.U.A: Addison-Wesley Iberoamericana.

Moreno-Armella, L. (2001). Cognición, mediación y tecnología. *Avance y Perspectiva, 20*, 65-68.

Newman, J. R. (1997). *El mundo de las matemáticas. SIGMA* [1ra. ed. Vol. 1]. New York: Grijalbo

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and Standars for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem solving* (Combined Edition). New York: John Wiley & Sons.

Recio A., & Godino, J. (2002). Institutional and personal meaning of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 83-99. Klumer Academic Publisher. Netherlands.

Rodríguez, G., Gil, J. & García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Aljibe

Rubinstein, S.L. (1963). *El ser y la conciencia y el pensamiento y los caminos de investigación*. Enciclopedia de Filosofía [2da. Serie]. (Trad. Augusto Vidal). México: Grijalbo.

Santos Trigo, M. (2010). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Santos Trigo, M. (1997). La transferencia del conocimiento y la formulación o rediseño de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 2(3), 11-30.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Florida: Academic Press.

SEP-DGB-DCA. (2011a). *Documento Base del Bachillerato General*. México

SEP-DGB-DCA. (2011b). *Programas de estudios Bachillerato. Matemáticas* I y II. México

SEP (2011). *Programas de Estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas.* México.

SEP (2006). *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de Estudio*. México: SEP

SEP (1997). *Planes y Programas de Estudios de Educación Secundaria*. México: SEP.

SEP (1997a). *Libro para el Maestro. Educación Secundaria. Matemáticas*. México.

SEP (1996a). *Libro para el maestro. Matemáticas Primer Grado*. México: SEP.

SEP (1996b). *Libro para el maestro. Matemáticas Segundo Grado*. México: SEP.

SEP (1996c). *Libro para el maestro. Matemáticas Tercer Grado*. México: SEP.

SEP (1996d). *Libro para el maestro. Matemáticas Cuarto Grado*. México: SEP.

SEP (1996e). *Libro para el maestro. Matemáticas Quinto Grado*. México: SEP

SEP (1996f). *Libro para el maestro. Matemáticas Sexto Grado*. México: SEP.

SEP (1993). *Planes y Programas de Estudio de Educación Secundaria*. México: SEP

SEP (1977). *Programa de Estudios - Sexto Grado de Educación Primaria*. México: CONALITEG.

Simon, M., y Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 3-31.

SMM (2013). *Problemas introductorios 27ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas*. México:

SMM (2012). *Problemas introductorios para la 26ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas*. México:

SMM (2006). *Problemas para la 20ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, problemas introductorios*. México:

Turchin, V. F. (1977). *The phenomenon of science: A cybernetic approach to human evolution*. New York: Columbia University Press.

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 351-360.

Weber, K. (2002). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 101-119. Klumer Academic Publisher. Netherlands

Wertsch, J. V. (1993). Voices of the Mind: a sociocultural approach to mediated action. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Miguel R., F. Primera visión de la geometría prehispánica. *Revista México desconocido*. (219): , 1995.

UNAM (1996). *Plan de Estudios Actualizado*. México: UNAM.

Villalpando N. , J.M. (2014). *Historia de la educación en México.* México: Porrua.

Ysunza U., S.y Ogazon, H. (1974). *Enseñanza Activa de la Historia de México*. México: Imprenta Arana.

Fuentes Electrónicas

Bergqvist, Ewa (2007). *Types of reasoning required in university exams in mathematics. Journal of Mathematical Behavior* (384-370). Recuperado el 7 septiembre de 2013, en: www.elsevier.com/locate/jmathb. Department of Mathematics and Mathematical Statistic.

Flores, E. (2007). *Los olmecas: el primer reino de Mesoamérica*. Revisado en: http://www.revistadelauniversidad.unam.mx/ojs_rum/index.php/rum/article/view/2810/4048

Lithner, Johan & Bergqvist, Tomas (2012). *Mathematical reasoning in teachers´presentations. The Journal of Mathematical Behavior*. Recuperado el 21 de septiembre de 2013, en: www.elsevier.com/locate/jmathb.

Lithner, Johan. (2007). *A research framework for creative and imitative reasoning.* Department of Mathematics, Umeaa University, S90187 Umeaa, Sweden. Springer.

Lupiañez, J. L. y Codina, A. (1999). *El razonamiento matemático: argumentar y demostrar*. Versión en internet, revisado el 19/08/13 en: http://funes.uniandes.edu.co/805/1/CodinaLupi1999.pdf

Jones, Keith (1999). *European Research in Mathematics Education I. Group 2- Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Vol. 1; (245-259). Internet-Versión, revisado en: http://www.fmd.uni_osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1_proceedings/cerme1_proceedings.html

SEP (28-09-2008). *Acuerdo número 442 por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en marco de diversidad*. Recuperado 17 marzo de 2014, de Acuerdos Secretariales: http://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/7aa2c3ff-aab8-479f-ad93-db49d0a1108a/a442.pdf

APÉNDICES

APÉNDICE A. Transcripción de las entrevistas

1. Tarea 1

2. **Estudiante 1.** Sé que este ángulo mide 45° (∠BCD), y este sé que mide 90° (∠BPD).
3. **Profesor.** ¿Por qué?
4. **Estudiante 1**. Porque es el cruce de 2 rectas (BE y AF) y como son cuatro ángulos, estos dos (∠BPA y ∠FPE) deben medir lo mismo, y estos dos (∠BPF y ∠APE) deben medir lo mismo.
5. **Profesor.** ¿Cómo sabe que miden 90°?
6. **Estudiante 1**. Porque son opuestos por el vértice
7. **Profesor.** Sí, pero no necesariamente miden 90°
8. **Estudiante 1**. Porque este (∠BCD) es correspondiente con este (∠AFD), entonces, este (∠AFD) mide 45° y este (∠BED) es correspondiente con este (∠ADF), entonces, miden 45°, entonces, a este (∠EPF) no le queda más que ser de 90°, lo mismo con este. Este como es un trapecio lo que forma en el centro (ABFE) es un cuadrado.
9. **Profesor.** ¿Pero, por qué?
10. **Estudiante 1**. Como aquí es de 45° (∠AFE) para que sea recto (∠DFB), este (∠BFA), debe medir 45°
11. **Profesor.** ¿Pero por qué mide 45°?
12. **Estudiante 1.** Porque tengo dos paralelas (AB y DC) y una secante (EB), este es de 45° (∠BAF y ∠EBF)
13. **Profesor.** Estos dos sí, pero ese de 45° que puso no le creo (∠BFD)
14. **Estudiante 1.** Como mi recta la trace por aquí (BF) y…, podría decir que es perpendicular
15. **Profesor**. No, ¿cómo sabe que es perpendicular?
16. **Estudiante 1**. Porque este es de 90° (∠BFC)
17. **Profesor.** Si, si demuestra que el otro es de 45° (∠FBC), el otro tiene que ser de 90°.

18. **Estudiante 1**. Estas son mis paralelas (AB y DC), y este (AF) es mi secante y este es mi correspondiente que mide 45° (∠CFA y ∠BAF), son correspondientes.
19. **Profesor.** No…
20. **Estudiante 1.** Como este es un trapecio, forma en el centro un rectángulo
21. **Profesor.** No, no sabe
22. **Estudiante 1**. No, un cuadrado
23. **Profesor.** Tiene que demostrármelo, no lo sabe.
24. **Estudiante 1.** Mmmm….(marca α - ∠CBE- y β -∠EB y recta FB- pero ya no prosigue con la demostración)

---

25. **Estudiante 4**. Tenemos que DE=1, EF=1 y FC=1 y el ∠ADC mide 45° y ∠BCD mide 45° y DA es paralela a EB y por otra parte BC es paralela a AF. Lo primero que hice fue encontrar las medidas de estos dos ángulos (∠AFD y ∠BEC). Tomando estas dos líneas paralelas (BC y AF) y esta secante (DC), este ángulo es igual a este ángulo (∠BCE y ∠AFD) porque son correspondientes.
26. **Estudiante 4.** Teniendo estas dos paralelas (AD y BE) y esta misma secante (DC), este ángulo es igual a este ángulo (∠ADE y ∠BEC), por lo mismo que son correspondientes, esta ángulo no le queda más que ser de 90° (∠EHF), porque la medida de los ángulos interiores de un triángulo tiene que dar 180°
27. **Estudiante 4.** Después de aquí este con este ángulo (∠EHF y ∠BHA) miden lo mismo porque son opuestos por el vértice, después de ahí, calcule la medida del AB. Como esas líneas (AB y DC) son paralelas y aquí (DE) mide 1, pues nunca se van a juntar; por lo tanto, esta misma medida es la misma (AB).
28. **Estudiante 4**. Después de ahí, el △EHF es isósceles y…, igual para calcular la medida de estos dos ángulos (∠FAB y ∠ABE), tomé que estas dos son paralelas (AB y DC), y esta es una secante AF. Este ángulo con este ángulo (∠BAF y ∠AFE) son alternos internos y son de 45°. Lo mismo, tomo esas líneas paralelas AB y DC y la secante EB.

29. **Estudiante 4.** Por lo tanto, este mide 45° y este mide 45° ($\angle$ABE y $\angle$BAF); es un triángulo isósceles y entonces el $\triangle$EHF es congruente al $\triangle$AHB por el criterio ALA. Después de ahí, trace una perpendicular al segmento DC que pase por E

30. **Profesor.** ¿Cómo sabe que esa perpendicular pasa por A?

31. **Estudiante 4.** Mmmm…, porque como estos dos triángulos ($\triangle$AHB y $\triangle$EHF) son congruentes porque el lado EH es igual a la medida de HA y como tienen una abertura de 90° ($\angle$AHE) por eso pasa por A

32. **Profesor.** ¿Pero si es por eso?

33. **Estudiante 4**. Y después como tengo trabajo con el $\triangle$EHF y tienen un lado en común y como este es una perpendicular (EA), aquí mide 90° ($\angle$DEA) y este ángulo mide 45° ($\angle$HEF), a este no le queda más que ser de 45° ($\angle$AEH), para que esto me dé 180° ($\angle$DEF) y este mide 45° ($\angle$EAH) y los triángulos que se forman aquí ($\angle$AHE, $\angle$EHF,$\angle$FHB y $\angle$BHA) son iguales, son congruentes.

34. **Profesor.** ¿Por qué?

35. **Estudiante 4.** Porque tienen la misma medida de sus lados y, entonces, como estos son iguales ($\triangle$AHB y $\triangle$EHF) no le queda más que medir 1 (EF) y después con el $\triangle$DEA aplicando el teorema de Pitágoras y me da que AD es igual a la raíz cuadrada de 2

36. **Profesor.** ¿Cómo sabe que AD es igual a la raíz cuadrada de 2?, ¿AE, cuánto vale?

37. **Estudiante 4**. Mide 1, entonces, este lado mide raíz de dos (DA) y este lado AD es igual a BC porque si trazo esta perpendicular (EA), este también mide 1 (BF), aplico el teorema de Pitágoras, por lo que BC mide raíz cuadrada de dos y, como AB=1, AE=1, DE=1, EF=1, AD es igual a la raíz cuadrada de 2 y BC es la raíz cuadrada de 2; entonces, el perímetro es igual a cuatro más dos veces la raíz cuadrada de 2.

38. **Estudiante 8.** Nos da un trapecio ABCD y ya con las condiciones lo que hice fue que estos dos ángulos son iguales β y son de 45° ($\angle$BCF, $\angle$AFE, $\angle$BEF y $\angle$ADE). Lo que hice fue trazar una perpendicular que pase por el punto E para así trazar un triángulo.

39. **Profesor.** ¿Pero cómo sabe que la perpendicular que va a pasar por el punto E también pasa por A?
40. **Estudiante 8.** Porque AB es paralela a DC y AD es paralela a BE y BC también es paralela a AF.
41. **Profesor.** ¿Es por eso?... Si trazo la perpendicular por E, nada me asegura que pase por A.
42. **Estudiante 8.** Lo que hice fue que como AE es paralela a BC, DC es una secante, entonces, los ángulos ∠BCE y ∠AFE son iguales por ser correspondientes que miden 45°, y este es un ángulo recto (∠DAF) y es un triángulo rectángulo (△DAF).
43. **Profesor.** ¿Cómo sabe que ese es rectángulo?
44. **Estudiante 8.** Porque β=45° y 45+45…, bueno, este ángulo no le queda más que ser de 90° (∠DAF). Lo mismo hice con el otro rectángulo, entonces, este ángulo también es de 90° (∠EBC) y con las rectas AF y EB se forma un triángulo aquí (∠EOF=90°), porque β y β son de 45° y estos dos ángulos son iguales (∠EOF y ∠AOB) y, estos dos (∠AOE y ∠BOF), lo que hice de ahí… como esos ángulos son iguales (∠OEF y ∠OFE), es un triángulo isósceles (△EOF) y estos dos lados son iguales (EO y OF); y establecí la relación que por ALA el △EOA≅△FOE.
45. **Profesor.** ¿Pero, cómo sabe que BO=AO?
46. **Estudiante 8.** No, esa relación la establecí mal, mmmm…,
47. **Estudiante 8.** Porque como trace los ángulos aquí (β del △EOF), los trace aquí (el 45° en △AOB)
48. **Profesor.** ¿Pero, cómo sabe que ese es de 45°?
49. **Estudiante 8.** Porque este ángulo es recto (∠EBC) y trace la bisectriz que lo divide en 45°
50. **Profesor.** ¿No era perpendicular?
51. **Estudiante 8.** Porque si es perpendicular, no es seguro que pase por F
52. **Profesor.** Pero aunque trace la bisectriz, no es seguro que pase por F. si traza la bisectriz del ∠BEC nada le asegura que pase por F.
53. **Estudiante 8.** Pero ya puedo establecer la relación de que estos lados midan lo mismo (FO y OB)

54. **Profesor.** ¿Por qué?

55. **Estudiante 8.** Porque este ángulo mide 45° (∠EBF)

56. **Profesor.** Pero ¿por qué mide 45°’

57. **Estudiante 8.** Porque es la bisectriz del ángulo recto (∠EBC)

58. **Profesor.** ¿Pero, cómo sabe que esa bisectriz pasa por F?. Su resultado es correcto pero la explicación no.

59. **Estudiante 8.** Porque este ángulo suplementario mide 135° (suplemento del ∠DAB) y este ángulo mide 135° (suplemento del ∠ADF)

60. **Profesor**. ¿Por qué?

61. **Estudiante 8.** Porque son alternos interno y como ya habíamos dicho que este ángulo mide 90° (∠DAF), le reste a 135° los 90° y me queda que ∠FAB mide 45°. Lo mismo hice con este lado (∠EBC) y se entiende que estos triángulos son semejantes (△AOB y △AEF).

62. **Profesor.** ¿Por qué semejantes?

63. **Estudiante 8.** Se puede establecer esta semejanza que el △BEA es semejante con el △BEF por ALA

64. **Profesor.** ¿Por qué?

65. **Estudiante 8.** Comparten ese lado (EB), este ángulo son iguales (∠AEB y ∠BEF) y este lado (EF) mide igual (AB). Lo que hice de ahí fue…, mmm…, que este mide 45° (∠EAF) y este lado es igual a este lado (AO y OE) por ser un triángulo isósceles y porque este mide 45° (∠EAF). Lo mismo pasa de este lado (lado izquierdo), y también es un triángulo rectángulo y, por el teorema de Pitágoras obtuve que c^2,…, bueno c^2.

66. **Profesor.** ¿De cuál triangulo me está hablando?

67. **Estudiante 8.** Del, mmm…, se puede decir que todos estos triángulos son semejantes (△AOE,△EOF,△FOB y △BOA) y como son semejantes eso quiere decir que son iguales.

68. **Profesor.** ¿Cómo que son iguales?

69. **Estudiante 8.** Por criterio LAL estos dos triángulos son semejantes (△BOF y △EOF) y como comparten este lado (OF), este lado es igual a este lado (EO=OB)

70. **Profesor.** Pero eso no es un criterio de semejanza, es de…

71. **Estudiante 8**. Congruencia. De ahí obtuve que BF=1.

72. **Profesor.** ¿Por qué?

73. **Estudiante 8**. Porque como los triángulos son congruentes (△EOF y △FOB), este lado es igual a este (EF=BF). De ahí obtuve con el teorema de Pitágoras en este triángulo rectángulo △BFC que $c^2=a^2+b^2$ (BF y FC catetos), y de ahí obtuve que es la raíz de 2 y como los dos triángulos son congruentes (△DAF y △EBC), solo sume las 4 unidades y las dos raíces.

---

74. **Estudiante 9.** Nos dan un dato, que el ∠ADC = B∠CD y esos son de 45°, trace dos perpendiculares de BF y AE tal que el 90°

75. **Profesor.** ¿Cómo sabe que es perpendicular?. Si traza una perpendicular por F, nada le asegura que pase por B y si trazar la recta BF, nada le asegura que sea perpendicular.

76. **Estudiante 9**. El △ADE y △AFE son congruentes, entonces, establecí que AD=AF porque son congruentes y sus lados son iguales y el lado que comparten (AE)

77. **Profesor.** ¿Por qué △ADE y △AFE son congruentes?

78. **Estudiante 9.** Porque es un triángulo isósceles (△DAF), DO y OF son iguales (O es un punto sobre DC), y el △DAF tiene de base 2. La suma de esas bases tiene que ser 2 (DO y OF) y al mismo tiempo tienen que ser iguales, entonces, resolví este sistema de ecuaciones y me queda que DO=1, y al sustituir DE también me queda que OF=1, entonces, concluyo que el punto O que yo tenía y que era la bisectriz, bueno, donde se intersecta con la bisectriz es el punto E, ya demostré que es perpendicular.

79. **Profesor.** No, ha demostrado eso. Solo demostró que la bisectriz pasa por E, tiene la bisectriz y esa bisectriz pasa por el punto E.

80. **Estudiante 9.** (Solo se queda observando el problema pero ya no concluye)

---

81. **Estudiante 10.** Empezamos porque por hipótesis el ∠ADC vale 45° y ∠BCD vale 45° ya que AD es paralela a BE. Se puede tomar a DC como una secante, de esta manera , por lo tanto, este es congruente con este (△ADF≅△BEC). De la misma

manera del otro lado, BC es paralela a AF y DC la secante, por lo tanto, ∠BCD=∠AFD. Entonces le ponemos G a la intersección de AF con BE.

82. **Estudiante 10**. El △GEF es un triángulo isósceles porque estos dos ángulos son iguales (∠GFE =∠GEF=α) , pero también la suma de los ángulos internos es 180°, entonces, es 180° menos 90° ya que α=45° y 45° son 90°. Eso significa que este ángulo vale 90° (∠EGF) y entonces, el ángulo suplementario de aquí (sobre EB), será de 90° (∠FGB), y también por ser opuestos por el vértice (∠AGB y ∠AGE) o también se pueden sacar por estos dos (∠AGB y ∠BGA)

83. **Profesor.** ¿Por qué esos son α?

84. **Estudiante 10.** Porque DC es paralela a AB, entonces, el ∠BEF va a ser alterno interno con ∠ABE. Entonces, EG y GF son iguales y como este es un ángulo recto (∠EGF), tenemos que…. EF va a ser la hipotenusa y, EG y GF van a ser los catetos, pero ya que EG y GF son iguales, llegamos a la conclusión de que EF por hipótesis vale 1 y va a ser doce veces el cuadrado de cualquiera de estos dos (EG y GF) porque son iguales, entonces:

85. $1 = 2GE^2 = 2EG^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = GE^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

86. EF^2 es 1 y va a ser la hipotenusa al cuadrado $\frac{1}{2}GE^2 \Rightarrow GE = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ese es nuestro valor de EG y GF, y por el mismo proceso AG y GB van a valer $\frac{1}{\sqrt{2}}$

87. **Estudiante 10**. Estos dos van a ser congruentes △AGB y △EGF y, luego trazamos BF y podemos demostrar que es una bisectriz del ∠ABC porque BC a AD, por la definición de trapecio, pero además AD=BE porque DC y AB son paralelas

88. **Profesor.** No le entendí eso último

89. **Estudiante 10.** BC y AD por definición tienen que ser iguales. pero al mismo tiempo la magnitud de AD =BC porque son paralelas y al mismo tiempo son cortadas por AB y DC que son paralelas, por lo tanto, deben ser iguales, por lo que AF=BC y que BC/EB vale 1 y, si conocemos que EF y FC valen 1, significa que BC/GF es igual a EF/FC, entonces, también tenemos que este vale α (∠ABE) y este ángulo vale 135° (suplemento de ∠BCF), entonces, todo este (∠CBA) como va a ser alterno interno (a 135°), este vale 45° (∠ABG) y este por lo tanto, vale 2 α.

90. **Estudiante 10.** Y como esta es bisectriz (BF del ∠CBE) y como ya tenemos 90° (∠BGF) y estos 45° (∠GBF) no queda más que ∠AFB también tenga 45°, entonces, es análogo al ∠EGF pero de la siguiente manera: FB va a ser la hipotenusa porque ∠BGF es el ángulo recto y además como el ∠AFB es igual al ∠EBF, los dos valen 45°, entonces, también GF y BG son iguales.

91. **Estudiante 10.** Entonces, para sacer la magnitud de BF, tenemos esta $FB = \sqrt{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$. Eso significa que FB vale 1, es análogo con el triángulo que se forma. Aquí tenemos que el ángulo que se forma es de 90° (∠BFC) y aquí tenemos otro α (∠GFB).

92. **Estudiante 10**. Entonces, ahí tenemos otro de Pitágoras BF=FC, porque los dos valen 1, entonces, $BC^2 = 2BF^2 = 2(1) = 2 \Rightarrow BC = \sqrt{2}$. Entonces, el perímetro va a estar dado por $\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{DA} + \mathrm{CD} = 4 + 2\sqrt{2}$

93. Tarea 2

94. **Estudiante 1.** Tenemos este triángulo y por hipótesis sabemos que el ∠A+∠B=110°, también, sabemos que el △ABC sus ángulos van a medir 180°, pero, como sabemos que el ∠A+∠B=110°; sustituyo y entonces, me da que el ∠C mide 170°

95. **Profesor.** ¿170°?

96. **Estudiante 1**. 70°, pero, como esta…, como aquí lo corta una recta (CD) y dice que este (∠CDA) mide 10°, entonces, para que todo mida 70°, este (∠BCD) debe medir 60°

97. **Estudiante 1**. También por hipótesis sabemos que este lado (BC) es igual a este lado (DC); por lo tanto, es un triángulo isósceles (△CBD) y sus dos ángulos de acá (∠CBD y ∠CDB) son iguales y, como el △BCD debe medir 180°, le restamos 60° y nos da que 2α nos da 120°, es decir, cada uno vale 60°

98. **Estudiante 1**. α más este ángulo ∠D, es un ángulo llano y debe medir 180°, por lo tanto, este (∠CDA) mide 120° y el △ACD igual, debe medir 180°, y, conocemos estos dos ángulos (∠CDA y ∠ACD), por eso, el ∠A mide 50°.

99. **Estudiante 5.** Nuestro problema dice que el △ABC, el ∠A y ∠B, la suma de esos ángulos mide 110° y D es un punto sobre el segmento BA, tal que CB=CD y el ángulo ∠DCA mide 10° y nos pide calcular cuánto mide el ∠A.

100. **Estudiante 5.** Entonces, como en todo triángulo, la suma de los ángulos interiores de un triángulo nos da 180°, entonces, restamos 180° menos la medida de estos ángulos ∠A y ∠B que serían 70 y, esto es igual al ∠C, pero, como en el ∠C está dividido en dos partes, hay una parte donde mide 10°, entonces, a 70° le restamos 10 para poder encontrar exactamente lo que mide aquí ∠BCD y nos da 60, y , por lo tanto, los tres ángulos ∠CBD,∠ BCD y ∠BDC miden 60

101. **Profesor.** ¿Por qué?

102. **Estudiante 5**. Porque la suma de los ángulos internos nos da 180°

103. **Profesor.** ¿Pero por qué?

104. **Estudiante 5**. Si porque ∠CBD y ∠BCD mide 60°

105. **Profesor.** ¿Y los otros?, ¿pero, no puede uno de ellos medir 70 y el otro 50?

106. **Estudiante 5.** No, porque nos está diciendo CD=CB

107. **Profesor.** ¿Y eso qué?

108. **Estudiante 5**. Eso quiere decir que los ángulos de su base también son iguales

109. **Profesor.** Aja

110. **Estudiantes 5**. Entonces, como ya encontramos cuánto mide el B=60, se lo restamos a 110° para encontrar el ∠A y eso nos da que el ∠A mide 50.

---

111. **Estudiante 7.** Lo único que conozco es que mi △BCD es isósceles porque tienen igual estos dos lados (BC y CD), y tengo que saber cuánto mide el ∠A.

112. **Estudiante 7**. Primero, tenemos el triángulo △ABC, la suma de dos de sus ángulos es 110°, que es lo que dice el problema ∠B + ∠A =110°. Como un triángulo tiene 180°, es decir, la suma de sus ángulos interiores, entonces, como ∠A más ∠B es igual a 110°, y además, ∠DCA es igual a 10°, entonces yo puedo conocer la longitud de este ángulo (∠BCD), lo calcule y es 60°

113. **Estudiante 7.** Entonces, como me dice mi problema que mi triángulo △BCD es isósceles, tiene dos lados iguales, por lo tanto, dos de sus ángulos también son

iguales. Entonces, como este vale 60° (∠BCD). Es 180° menos 60° es igual a 120°, y como 120 es igual a estos dos, 120° es igual a la suma de ∠CBD y ∠CDB, entre dos, me da 60°. Cada uno vale 60°

114. **Estudiante 7**. Ahora, el ángulo suplementario del ∠ABD es de 180°, entonces, como yo tengo este ángulo (∠BCD), pues, puedo calcular este (∠CDA) y es 120°.

115. **Estudiante 7.** Ahora, solo me concentro en este triángulo que es el △ADC. Como mi triangulo debe tener 180°, y yo conozco el de dos que es de 130°, pues a 180° resto 130° y, entonces, el ∠A es 50°

---

116. **Estudiante 8.** Nos da que la suma del ∠A + ∠B nos da 110°. Nos dice que CD=CD y nos dice que el ∠DCA=10°. Encontrar el valor de A.

117. **Estudiante 8.** Lo que hice primero fue que los dos lados del △ABC son iguales (CB y CD), eso quiere decir que es un triángulo isósceles, por lo que dos de sus ángulos son iguales (∠CDB y ∠CBD) y esos los nombre como AF y el ángulo restante lo llame como θ (∠BCD)

118. **Estudiante 8.** Después θ+ 2α=180°, para encontrar esos valores de α y θ tuve que encontrar otra relación que γ =α+β (al parecer aquí emplea el teorema del ángulo externo). La suma de los ángulos de este triángulo (∠DCA) es 180°, por lo que: $180° = 10° + \beta + \gamma$ y sustituí que $\gamma = \theta + \alpha$ y despeje β de $\beta + \alpha = 110°$ y me quedo que $180° = 110° + 110° - \alpha + \theta + \alpha$ (elimina α) y $180° = 120° + \theta$, $180° - 120° = \theta$, por lo que $\theta = 60°$

119. **Estudiante 8.** Y, $180° = \theta + 2\alpha$, queda $180° = 60° + 2\alpha$, y $120° = 2\alpha$, entonces, $\alpha = 60°$

120. **Estudiante 8**. De ahí, lo que hice, fue encontrar un γ que sume $\alpha + \beta = 120°$, y de ahí reste 180° menos 130° a β, y β me quedo que es 50°, y como la suma de los triángulos es 180° y la suma de $\gamma + \angle BCA = 120° + 10° = 130° + \beta$. De ahí despeje y obtuve que β=50°.

121. Tarea 3

122. **Estudiante 3**. BFDE es un paralelogramo y tengo que AF=7 y AD=5. Lo que tengo que hacer es saber cuál es la suma del área del cuadrado más la suma del área del trapecio (FBED)

123. **Estudiante 3.** Lo que hice primero, prolongue las líneas BA y DC, lo mismo con HP y GE para formar un rectángulo FHGE y saque su área que es 5 por 9 es igual a 45 u^2

124. **Estudiante 3**. De ahí forme dos triángulos que fue △FDH y △EBG y saque su área de…, bueno, puse que son congruentes porque tienen igual sus lados, el de y el de 5. Lo que hice después, fue sacar el área de los dos triángulos que es la base por la altura entre 2; su base es de 5 y su altura es 7 entre 2 es igual a 17.5 y son iguales.

125. **Estudiante 3**. Para sacar el área del trapecio fue, al área del rectángulo que se formó (FHGE), le reste las áreas de los triángulos (△FDH y △CBG) . $45u^2$ menos $35u^2$ es igual a 10 u^2.

126. **Estudiante 3.** Como me pide sacar el área del cuadrado y el trapecio, las sume. El área del cuadrado ABCD más BFDE es igual a $25u^2$ más $10u^2$ igual a $35u^2$.

127. Tarea 4

128. **Estudiante 5.** Las bisectrices de los ángulos ∠A y ∠C, se cortan en el punto O. Por O se traza una paralela a AC la cual corta a los lados AB y BC en los puntos D y E respectivamente. Demuestre que DE=AD+EC

129. **Estudiante 5.** Lo que hice…, como estas son paralelas (DE y AC) y trazo las bisectrices (CO y AO), este ángulo y este miden lo mismo (∠ECO y ∠OCA), por lo tanto, estos también miden lo mismo (∠DAO y ∠OAC), y como estas pueden ser también perpendiculares (CO y AO).

130. **Profesor.** ¿Cómo?

131. **Estudiante 5.** Son bisectrices pero si las prolongamos podríamos encontrar que este ángulo es igual a este (∠ECO y ∠EOC)

132. **Profesor.** ¿Por qué?

133. **Estudiante 5.** Porque estamos manejando paralelas

134. **Profesor.** ¿Qué tipo de ángulos son esos?
135. **Estudiante 5.** Son isósceles
136. **Profesor.** ¿Cuáles ángulos son iguales?
137. **Estudiante 5.** El ∠EOC y ∠ECO
138. **Profesor.** ¿Pero por qué?
139. **Estudiante 5.** Porque estamos trabajando con paralelas
140. **Profesor.** A ver, dibuja dos paralelas y una secante que las corte.
141. **Estudiante 5.** (El estudiante traza las líneas paralelas y la secante e identifica algunos ángulos) Como nuestro ángulo, se podrá decir que…, este ángulo y este miden lo mismo (ángulos correspondientes)
142. **Profesor**. Ese sí, pero no es el caso que le están preguntando ahí (problema inicial)
143. **Estudiante 5**. Los ángulos alternos internos
144. **Estudiante 5.** El ∠EOC y ∠OCA son alternos internos, y como este ∠OAC pasa el mismo caso que acá y entonces, este mide lo mismo (∠DOA) y como este (∠OAC) es igual a este (∠DAO), este mide lo mismo (∠AOD) y como nos dice que un triángulo es isósceles cundo tiene los ángulos de su base iguales, entonces, este y este miden lo mismo (DO y AD) y este miden lo mismo (DE y EC) por eso DE=DA+EC
145. **Profesor.** Bueno, explíqueme eso
146. **Estudiante 5.** Como este lado mide lo mismo que este (DO=DA), AD=CO y OE=EC. Se cumple esto: DE=AD+EC
147. **Profesor.** ¿Quién es ED?, ¿cómo puede escribir DE?
148. **Estudiante 5**. La recta paralela con respecto a AC
149. **Profesor.** Si es recta paralela pero DE cómo está conformado
150. **Estudiante 5.** DE=DO+OE, y por eso comprobamos.

---

151. **Estudiante 12.** Este es igual a este, por lo tanto son α (∠DBO y ∠ABC). Aquí el estudiante re etiqueta a B por A y a A por B.
152. **Profesor.** ¿Por qué?
153. **Estudiante 12.** Porque esta es la bisectriz (BO). Luego, por la misma razón ambos son β (∠ECO y ∠OCB).

154. **Estudiante 12.** Como esta es una paralela (DE ∥ BC), por alternos internos este ángulo es α (∠DOB) y, por la misma razón, este ángulo es β (∠EOC).

155. **Estudiante 12.** Como este es un ángulo isósceles (△OEC), entonces, EC=OE, y como este es un triángulo isósceles (△ODB), BD=DO y si los sumo BD+EC=DO+OE y DO+OE=DE

156. **Estudiante 15**. La bisectriz de este y este ángulo se intersectan en el punto O (AO y CO). Entonces, este ángulo y este ángulo son iguales por ser correspondientes (∠OAC y ∠MOE). Igual que estos dos (∠OCA y ∠NOD)

157. **Profesor.** ¿Pero por qué son correspondientes?

158. **Estudiante 15.** Porque esta línea y esta línea (DE y AC) son paralelas; y esta línea, corta a ambas (AO) y de este lado igual (OC).

159. **Estudiante 15.** Estos ángulos son iguales porque son opuestos por el vértice (∠NOD y ∠EOC), y este con este (∠MOE y ∠DOA).

160. **Profesor**. Ok

161. **Estudiante 15**. Entonces, tenemos que el △ADO es isósceles porque sus dos ángulos de la base son iguales. Igual que en este caso, el △CEO es isósceles porque sus lados de la base son iguales.

162. **Estudiante 15**. Entonces, esto quiere decir que AD = DO y CE=OE, y dice que tengo que demostrar que el segmento DE, es la suma de esta más este (DA +EC). Pero, DE= DO+OE

163. **Estudiante 15.** En este caso, como son iguales DE=AD+CE

164. Tarea 5

165. **Estudiante 12.** Por LLL el △DCK es igual con △BCK

166. **Profesor.** ¿Pero porque son iguales?

167. **Estudiante 12**. No, son congruentes

168. **Profesor.** Escriba la relación de congruencia.

169. **Estudiante 12.** (Corrige y escribe la relación y prosigue) Entonces, este ángulo es igual a este ángulo (∠DKC y ∠CKB)

170. **Profesor.** ¿Por qué sabe que esos son congruentes?

171. **Estudiante 12**. Por la congruencia, son congruentes esos dos triángulos y ese ángulo es correspondiente. Si a ese ángulo le llamamos α (∠DKC), este ángulo es 180° menos α (∠AKB), y este vale 180° menos α (∠AKD), y ahora, por LAL (AK, ∠AKB y KB)

172. **Profesor**. ¿Pero porque?

173. **Estudiante 12.** Por hipótesis y porque AK es compartido. Éste ángulo es igual (180° menos ALF), y por hipótesis DK=BK, entonces, por LAL el △ADK≅△ABK, por lo tanto, AD=AB.

174. Tarea 6

175. **Estudiante 4**. Lo que tengo que demostrar es de AG=AH y lo único que sé es que AB=AC y AD=AE y que x=y. Lo primero es…, como AB=AC no le queda más que DB=EC y después de ahí el △BAC es isósceles, por lo tanto, el ángulo ∠ABC no le queda que ser igual que el ángulo ∠ACB porque los ángulos de la base de un triángulo isósceles tienen que ser igual, después de ahí el triángulo…

176. **Estudiante 4.** Nos dice que también en la hipótesis que el lado GH es paralelo al lado BC y aquí aplico de que el ángulo ∠ABC es alterno interno con ∠GDB, por lo tanto, mide igual este ángulo (∠ADE y ∠GDB) y lo mismo de este lado; estas líneas son paralelas, esta es una secante (AC).

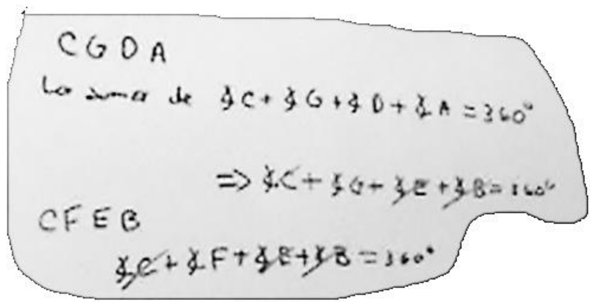
177. **Estudiante 4.** El ángulo ∠ACB es igual a ∠HEC, de ahí los triángulos △GDB es congruente con △HEC por criterio ALA y como este triángulo, estos dos triángulos tienen estos ángulos con la misma medida (ALA igual α), el ∠DGB es igual a ∠EHC, después, de ahí como tienen este lado que mide lo mismo DB=EC, GD=EH y GB=HC.

178. **Estudiante 4.** Después de ahí, tomo los triángulos △AGB y △AHC y son congruentes por el criterio LAL y, por lo tanto, AG tiene que ser igual a AH.

179. Tarea 7

180. **Estudiante 11.** Lo que me dice es que, teniendo estas hipótesis, demuestre que (∠CFE=∠CGD), este ángulo es igual a este.

181. **Estudiante 11.** Lo que yo me fije, es que, si tomamos el cuadrilátero CGDA sabemos que la suma de sus ángulos ∠C+∠G+∠A+∠D da 360°, y si sustituimos que ∠D por ∠E y ∠A por ∠B, por las hipótesis, entonces nos queda:

182. 

183. **Estudiante 11.** Tomando el otro cuadrilátero CFEB y hacemos lo mismo, la suma de sus ángulos da 360°. Entonces si igualamos estas dos, se irían ∠C, ∠E y ∠B, y nos quedaría que ∠F = ∠G.

---

184. **Estudiante 13.** A estos yo los llame α (∠A y ∠B), también, sabemos que la distancia de AD=EB y el ángulo △ADG≅△BEF, a este ángulo yo lo llame β. Ahora, lo que hice fue trazar una línea paralela a AB por EG

185. **Profesor.** ¿Pero cómo sabe que esa es paralela pasa por esos puntos?. Si trazo una paralela a AB por E, puede que no pase por G…, ¿Cómo sabe que pasa por G?

186. **Profesor.** Ahora, si traza de EG no sabe que sea paralela

187. **Estudiante 13.** (Observa su figura y borra la paralela y prolonga FE y DG). El ángulo ∠DEF “α”, yo lo llame al ∠A y ∠B como α. El ∠ADG y ∠BEF como β, entonces, al momento de sumar α…, luego, sabemos que este y este son iguales porque son ángulos paralelos (∠EAD y ∠GDE), este CA y GD

188. **Profesor.** ¿Cómo ángulos paralelos?

189. **Estudiante 13**. Son… ¿cómo se dice?..., son ángulos… ¿externos internos?

190. **Profesor.** ¿Cómo sabe que CA y DG son paralelas?, eso sería cierto si fueran paralelas, ¿se lo dice el problema?

191. **Estudiante 13.** (El estudiante se queda observando el problema y la figura que trazó, pero no concluye)

192. Tarea 8

193. **Estudiante 6.** Prolongamos la recta QR hasta tocar a la recta AB, le puse O al punto, y eso nos va a dividir que AO=3 y OP=1, entonces, me di cuenta de que el △ADP es semejante a este pequeño △ORP porque comparten este mismo ángulo (∠APD) y este ángulo recto (∠OAD y ∠POR), entonces, este no le queda más que ser igual (△ACD y △ORP), entonces, de ahí saque proporciones.

194. **Estudiante 6**. Entonces, vi que AD entre OR, es igual que AP entre AO

195. **Profesor.** ¿Entre AO?

196. **Estudiante 6.** No, entre OP, entonces, como conozco el valor de AD que es 12, desconozco la longitud de OR y conozco la longitud de AP y de OP, entonces, despejo a OR y me queda que es 3

197. **Estudiante 6.** Con el teorema de Pitágoras para sacar la hipotenusa, es este lado que mide 9 (OB), mide 12 menos 3 igual a 9, entonces, es nueve al cuadrado más, tres al cuadrado es 90, entonces a es igual a la raíz cuadrada de 90, que puede verse como a igual a tres por la raíz de 10.

---

198. **Estudiante 15.** El segmento QR, lo prolongue hasta que tocara a AB y trace una paralela que pasara por R

199. **Profesor.** ¿Paralela a quién?

200. **Estudiante 15.** Paralela a AB, y trace una recta que fuera de R a B que es lo que quiero encontrar. Entonces, me doy cuenta que es un triángulo rectángulo (△SRB), entonces, necesitaría yo, saber cuál es la distancia de acá a acá (S a B) porque tengo el lado que es 12 y sé que dé a A a S es de 3.

201. **Profesor.** ¿Pero cómo que de A a S es 3?

202. **Estudiante 15.** Porque de D a Q es tres, entonces de S a B es 9.

203. **Estudiante 15.** Pero necesitaría esta distancia (A a R), entonces, también, encuentro que el △ADP es semejante al △SRP porque tienen un ángulo recto, comparten este ángulo (∠SPD) y, en todo caso, este es igual (∠SRP), y en todo caso este es igual (∠SRP). Entonces, utilice el teorema de Tales

204. **Profesor.** ¿Pero cómo lo uso?

205. **Estudiante 15.** Puse que AP es sobre SP, es igual a AD sobre SR.

206. **Profesor.** Pero ese no es el teorema de Tales , nada más es semejanza

207. **Estudiante 15.** Bueno, con semejanza, entonces, ya que tuve esta igualdad despeje SR

208. $SR = \frac{AD \cdot SP}{AP}$

209. **Estudiante 15.** Como esos valores yo los conozco $SR = \frac{(12)(1)}{4}$ y $SR = 3$

210. **Estudiante 15**. Ya teniendo este lado y este (SB y SR), aplico teorema de Pitágoras

211. $RB = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{100}$

212. **Profesor.** ¿De 100?

213. **Estudiante 15.** De 90, $RB = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

214. Tarea 9

215. **Estudiante 2.** Por hipótesis, sabemos que el ∠D es de 90° y el ∠C también, y también, tenemos que el △PAR es congruente con el △QTB. De ahí, entonces, sabemos que sus ángulos van a medir lo mismo, entonces, el ángulo ∠BRC… mmm, este va a valer lo de 180°

216. **Estudiante 2.** Este por supuesto, va a valer β (∠CRB) y este de aquí, también (∠DTA). Entonces, tenemos que el △CBR tiene los mismos ángulos que el △ATD, pero como también sabemos que estos son congruentes; podemos saber que sus…, este lado que comparten…, que esto es lo mismo porque son congruentes (AR=TB), más este triángulo pequeño, este pequeño segmento (lado RT del △MRT)…, vamos a saber que este lado lo tienen iguales, entonces, por el criterio ALA, sabemos que el △ADT y △BCR son congruentes y entonces de ahí podemos

saber que estos ángulos (∠DAT y ∠CBR) de estos dos triángulos (△DAT y △CBR) van a ser iguales porque ya tenían igual el ángulo de 90° y este que es β, y de ahí también sabemos que… son congruentes…, entonces, el lado CB=AD, entonces, ya podemos aplicar por el criterio ALA que el △FAD ≅ △CBE.

217. **Estudiante 7**. Los datos que me dan es que estos dos triangulitos son congruentes (△APR y △BQT), y además que estos dos ángulos (∠D y ∠C) son iguales y además son rectos, entonces, si son congruentes todo lo tienen igual; sus lados y sus ángulos.
218. **Estudiante 7.** Por ejemplo β= β(∠QTB y ∠ARP), este α = α (∠RAP y ∠TBQ), y este con este (∠RPA y ∠TQB)
219. **Profesor.** ¿Ese dato cómo lo supo?
220. **Estudiante 7.** Porque son congruentes esos triángulos, entonces, yo le puse nombre, entonces, este (α del △QBT) es opuesto por el vértice con este (∠GTR), por lo que β=β (△TBQ y △GTR), y aquí pasa lo mismo (∠ARP y ∠GRT), pues, entonces estos dos son iguales (∠GRT y ∠GTR)
221. **Estudiante 7.** En estos dos triángulos △ADT y △BCR, tienen un ángulo común que es este (∠D y ∠C) y también tienen β y β (∠GRT y ∠GTR), entonces, este y este ángulo no les resta más que ser iguales (∠DAT y ∠CBR y a ambos los etiqueta como θ).
222. **Estudiante 7.** Entonces, como yo sé que esto es los mismo que esto (AR y TB), pues estos triángulos ya son congruentes (ADT y CBR) por el criterio ALA, por lo tanto, estos lados son iguales (DA y CB).
223. **Estudiante 7.** Ahora, tengo ∠D y ∠C, ahora, como ya tengo que mmmmm…, entonces, lo que yo hice aquí fue que lo único que me restaba era ubicarme en un ángulo o en un lado y yo me ubique en este ángulo (∠CBE). El ∠CBE=∠DAF y el igual a θ+α y como los dos son iguales ya tengo el criterio LAL y por ese criterio esos dos triángulos △ADF es congruentes con el △CBE

224. **Estudiante 14**. Primero, nos dice que el $\triangle APR$ es congruente con el $\triangle BQT$. Si son congruentes, sus ángulos son iguales α, β, γ. Tengo que el $\angle GTR$ es igual a α.

225. **Profesor.** ¿Por qué?

226. **Estudiante 14.** Porque son opuestos por el vértice, así mismo el $\angle GRT$ también es α ya que son opuestos por el vértice. Lo que nos deja que este triángulo de aquí ($\triangle GRT$) es un isósceles y el ángulo de aquí es $\angle RGT$, lo tome comoθ, luego tome el $\angle RPH$ y $\angle GPH$ y digo que es igual a 180° menosβ, porque también es una línea recta (AF).

227. **Estudiante 14.** Este ángulo de aquí mide β ($\angle RPH$), y este ángulo mide 180° menos β ($\angle RPH$). Así mismo, este de acá, el ángulo $\angle GQH$, este ángulo de aquí es β.

228. **Estudiante 14.** El ángulo de aquí es igual a 180° menos β ($\angle GQH$), lo que nos deja que el $\angle GPH$ es igual a $\angle GQH$, dado esto, tenemos que el $\angle GQE$ es congruente con $\angle GPF$ por el axioma de ALA

229. **Profesor.** ¿Cuál axioma?

230. **Estudiante 14.** Por el criterio; comparten el θ ($\angle EGF$), son iguales estos ángulos ($\angle GPF$ y $\angle GQE$) y GP=GQ, ya que estos lados son iguales (GR=GT) por ser del triángulo isósceles ($\triangle GRT$). De ahí que son triángulos congruentes ($\triangle GEQ$ y $\triangle GEP$), dado eso, entonces, tengo que el $\triangle ADF \cong \triangle BCE$

231. **Profesor.** ¿Por qué?

232. **Estudiante 14.** Son congruentes porque comparten este mismo lado AF, bueno, no. Son iguales el lado AF con BE.

233. **Profesor.** ¿Eso cómo lo sabe?

234. **Estudiante 14**. Tengo que PF= BE

235. **Profesor.** ¿ Y eso cómo lo sabe?

236. **Estudiante 14.** Porque son congruentes estos triángulos de aquí ($\triangle GQE$ y $\triangle GPF$)

237. **Profesor.** Aja

238. **Estudiante 14.** Y como el triángulo $\triangle APR \cong \triangle BQT$, entonces este lado de aquí es igual con este (QB y AP). Comparten este ángulo porque sus raíces son las mismas (E y F).

239. **Profesor.** ¿ Y eso por qué sabe que son iguales?

240. **Estudiante 14.** Por lo mismo, porque los triángulos son congruentes (△GEQ y △GPF) y , porque el ángulo de aquí (∠DAR) es, sería la diferencia de la suma 90°- (γ + ∠QFH). Del mismo modo, este ángulo de aquí (∠CBT) es igual a 90°- (γ + ∠PEH), y, entonces, si igualamos, llegamos a que el , este ángulo de aquí (∠QFH) es igual a ∠PEH

241. **Profesor.** ¿Cuáles ángulos?

242. **Estudiante 14**. El ángulo ∠PEH y ∠QFH.

243. Tarea 10

244. **Estudiante 2.** Bueno, el problema nos dice que el área del cuadrado (ABCD) es 120, entonces, un lado del cuadrado es la raíz de 120

245. **Estudiante 2.** Aquí saque el área del △ABC que es $A = \frac{\sqrt{120}\, X \sqrt{120}}{2}$ y eso es igual a 60, que es el área de este triángulo ABC

246. **Profesor.** ¿Por qué eso da 60?

247. **Estudiante 2**. Porque la raíz cuadrada de 120 por la raíz cuadrada de 120 es 120 y sobre dos

248. **Profesor.** ¿Qué más…?

249. **Estudiante 2.** Y, después del área de este triángulo que es el △DMC y este como dice que M es el punto medio del lado AD, este (MD) es igual a raíz de 120 sobre 2, y, entonces, saque el área de este (△MDC); que la base que es $\frac{\sqrt{120}}{2}$ (DM), por la altura que es $\sqrt{120}$ (DC), y esto es igual a 120 entre 4, que es igual a 30, que es el área del triángulo de arriba (△DMC)

250. **Estudiante 2.** Y el área del triángulo ANM es igual a su…, bueno, si aquí lo completáramos (prolonga MN, hasta intersectar a AB), este lado (MN) va a medir lo mismo que este (AN) porque los ángulos de su base son iguales (∠NMA y ∠MAN = 45°)

251. **Profesor.** ¿Por qué mide 45°?

252. **Estudiante 2**. Porque si este lo alarga (MN), este (∠ANP) va a medir 90° y, entonces, este que es un ángulo de 90° (∠DAB), haría que este también midiera 45° (∠MPA) y, entonces, este ángulo (∠NAP) también mediría 45°, y estos lados (AN y NP) serían iguales, y como…para sacar el… este va a valer lo mismo, 45° y 45° (∠AMN y ∠MAN), igual por lo mismo, entonces, es un triángulo isósceles (△MAN), y estos dos van a valer lo mismo (∠ANP y ∠MAN), tengo que vale lo mismo…, todo MF, es….

253. **Estudiante 2.** Esta línea MN hasta que crucen el punto que igual sería el punto medio de AD

254. **Profesor**. ¿Por qué sería el punto medio de AD?

255. **Estudiante 2.** Porque M es punto medio y es perpendicular a AC, entonces, esta (MN) iría al punto medio de AB y, entonces, del AF sería, bueno, valdría 120 entre 2, y para saber cuánto mide MF, sería el cuadrado de … sería $\sqrt{\frac{120+120}{4}}$, entonces, el lado MF es igual a la raíz cuadrada de 60 y MN , entonces, sería igual a $\frac{\sqrt{60}}{2}$ y, como tengo que estos lados son iguales (MN y MA), ya por el teorema de Pitágoras sabría…, más bien, ya tengo cuánto vale este lado AN ya podría sacar el área de ese triángulo

256. **Profesor.** ¿Cuál es…?

257. **Estudiante 2.** El triángulo AMN … (anota varias operaciones pero ya no continua)

---

258. **Estudiante 6.** Lo que hice…., como el punto M parte en medio a un lado, entonces, un lado mide la raíz de 120, o lo podemos ver como $2\sqrt{30}$, entonces, como parten el punto medio $AM = \sqrt{30}$ y $MD = \sqrt{30}$.

259. **Estudiante 6.** Lo que hice fue sacar el área de este triángulo △DMC que es $\frac{\sqrt{120}\ X\ \sqrt{30}}{2}$ y me da que el área de ese triángulo es 30. Entonces, saque el área de todo este △ACB y es $\frac{\sqrt{120}\ X\ \sqrt{120}}{2}$ y eso de da 60, entonces, lo que hice para calcular este chiquito (△ANM), trace un cuadrado que diera también el punto medio de acá (AB) y fuera la misma longitud ($\sqrt{30}$).

260. **Estudiante 6.** Trace las diagonales y sé que eso me va a dar 4 triángulos iguales, entonces, saque el área de mi cuadrado y lo divido entre 4, eso me da 7.5, entonces el valor de este chiquito (△ANM) es 7.5.

261. **Estudiante 6.** Al área total de mi triángulo (△AMC), le reste 7.5 y me quede con 22.5 cm^2

262. **Profesor.** ¿Cómo saco el área del cuadrado?

263. **Estudiante 6**. Saque el área del cuadrado y después lo dividí entre 4. Entonces, al área del cuadrado le reste el área del triángulo △ACB, △DMC y △ANM

---

264. **Estudiante 14.** Tengo que el área del cuadrado ABCD es igual a 120 cm^2, entonces, cada uno de sus lados mide la raíz cuadrada de 120.

265. **Estudiante 14.** Lo primero que hice, fue calcular el área del △ABC, que sería base por altura, como AB por CB, entre dos. Y tengo que el área de esto es 60cm^2.

266. **Estudiante 14.** Luego, calcule el área del △DCM, aquí conozco la base que es $\sqrt{120}$ y la altura la tome como DM.

267. **Estudiante 14.** Dice que el punto M, es el punto medio entre D y A, entonces, DM mide $\frac{\sqrt{120}}{2}$. Para calcular el área, multiplico la $\sqrt{120}$ por $\frac{\sqrt{120}}{2}$, y todo eso entre dos. Luego, tengo que el área de este triángulo es 30 cm^2 (△DCM).

268. **Estudiante 14**. Luego, calculo el área del △ACM, con base a que el área total es de 120 cm^2 y sumo las dos áreas que ya conozco (△DCM y △ABC), y llego al área del △ACM igual a 30 cm^2.

269. **Estudiante 14.** Luego, calcule el lado AC para tomarlo como la base y tengo que…, usando el teorema de Pitágoras tengo que $AC^2 = \left(\sqrt{120}\right)^2 + \left(\sqrt{120}\right)^2$

270. **Profesor**. A ver, ¿cómo dice que lo hizo?

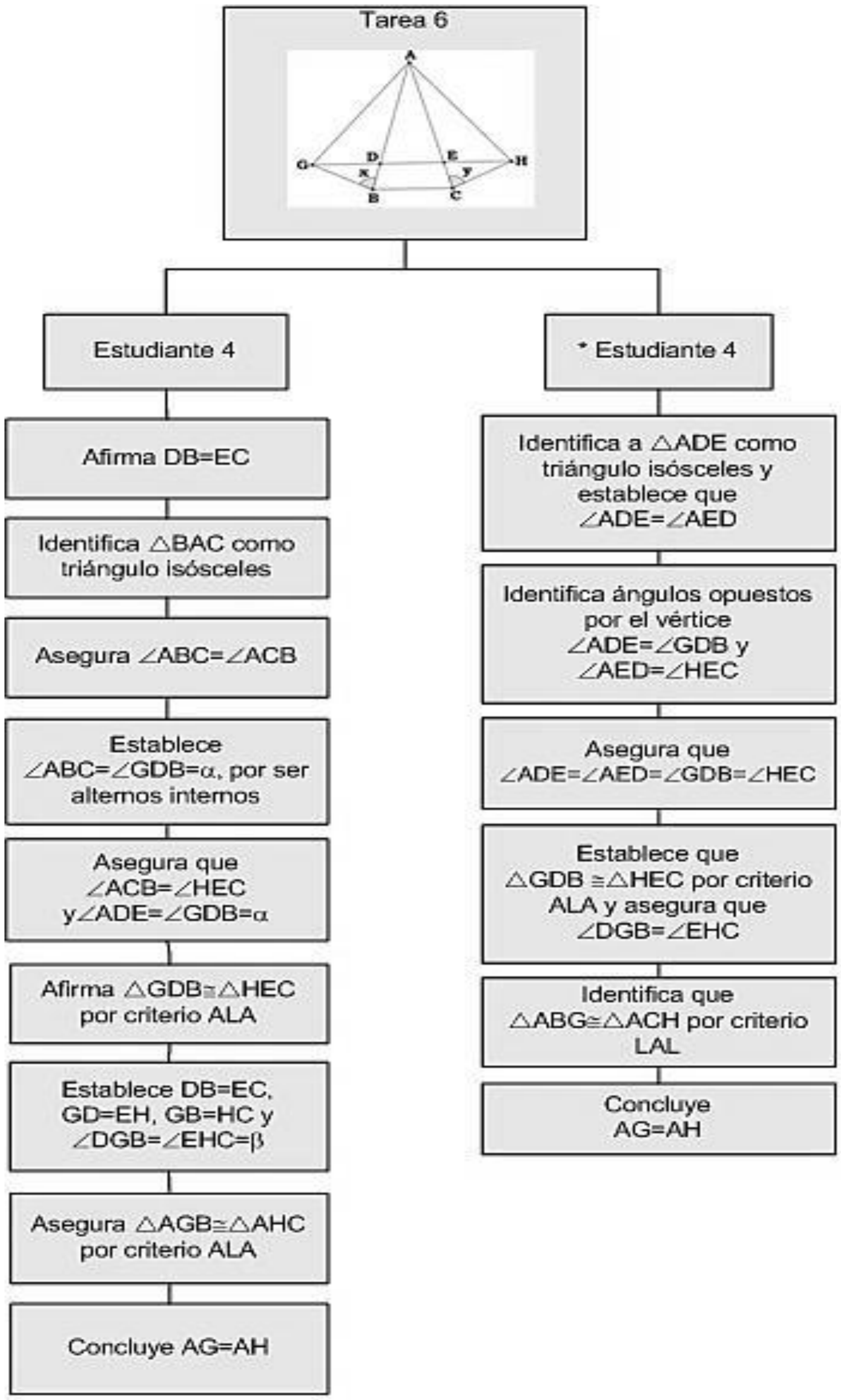
271. **Estudiante 14.** Calcule el lado AC, usando el teorema de Pitágoras, el cuadrado de AB más el cuadrado de BC, y llego a que $AC = \sqrt{240}$. Tengo el área del △AMC es igual a AC, que es la base, por la altura que es MN, todo eso sobre dos.

272. **Estudiante 14.** Conozco la base, conozco el área y, lo que desconozco es la altura. Entonces, sustituyo: $30 = \frac{\sqrt{240} \cdot MN}{2}$; despejo MN y llego a que: $MN = \frac{60}{\sqrt{240}}$. Aquí, lo que he tratado de hacer es simplificar y no sé…, creo que $\sqrt{120}$, la puedo escribir

como 60 por 4, entonces, eso es igual a $\frac{60}{2\sqrt{60}}$; $MN = \frac{30}{\sqrt{60}}$ …, y la verdad no sé si se pueda simplificar más pero…, yo ya lo deje ahí.

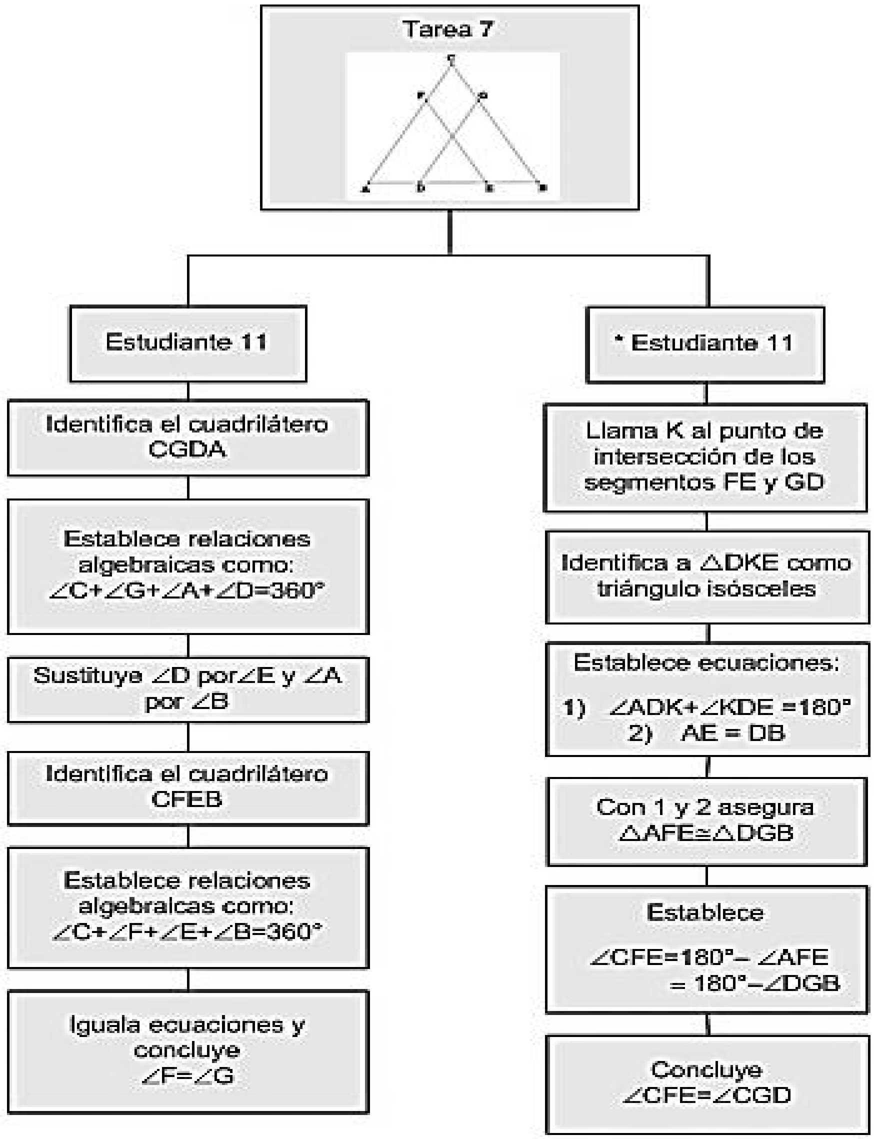
273. **Estudiante 14.** Ahora, calculo el área de △AMN para después, teniendo esta área (△AMN), le resto a △ACM para encontrar el área de △MNC.

APÉNDICE B. Ruta de solución del estudiante 4



* Indica que la ruta de solución fue tomada de la prueba escrita del estudiante

APÉNDICE C. Ruta de solución del estudiante 11



* Indica que la ruta de solución fue tomada de la prueba escrita del estudiante

APÉNDICE D. Asignación de tareas

TABLA GENERAL DE ASIGNACIÓN DE TAREAS PARA ARGUMENTACIÓN

	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4	Tarea 5	Tarea 6	Tarea 7	Tarea 8	Tarea 9	Tarea 10	TOTAL
Estudiante 1	X	X									2
Estudiante 2									X	X	2
Estudiante 3			X								1
Estudiante 4	X					X					2
Estudiante 5		X		X							2
Estudiante 6								X		X	2
Estudiante 7		X							X		2
Estudiante 8	X	X									2
Estudiante 9	X										1
Estudiante 10	X										1
Estudiante 11							X				1
Estudiante 12				X	X						2
Estudiante 13							X				1
Estudiante 14									X	X	2
Estudiante 15				X				X			2
TOTAL	5	4	1	3	1	1	2	2	3	3	25

APÉNDICE E. Rutas de solución

TABLA GENERAL DE RUTAS DE SOLUCIÓN

	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4	Tarea 5	Tarea 6	Tarea 7	Tarea 8	Tarea 9	Tarea 10
Estudiante 1	Propio	Propio	3	5	12	Propio	Propio	15	IN	NR
Estudiante 2	4	1	Propio	12	14	Propio	Propio	6	Propio	Propio
Estudiante 3	4	Propio	Propio	5	Propio	Propio	6	6	IN	Propio
Estudiante 4	Propio	3	3	5	3	Propio **	6	6	7	3
Estudiante 5	12	Propio	3	Propio	6	NR	NR	6	14	3
Estudiante 6	1	3	3	12	Propio	Propio	Propio	Propio	3	Propio
Estudiante 7	4	Propio	3	12	6	Propio	6	15	Propio	6
Estudiante 8	Propio	Propio	3	IN	6	6	6	15	14	Propio
Estudiante 9	Propio	Propio	IN	IN	12	4	IN	15	IN	Propio
Estudiante 10	Propio	9	Propio	12	12	Propio	Propio	6	Propio	6
Estudiante 11	Propio	Propio	IN	12	6	9	Propio **	6	NR	Propio
Estudiante 12	Propio	9	NR	Propio	Propio	9	Propio	15	3	9
Estudiante 13	11	5	IN	NR	12	9	NR	6	NR	14
Estudiante 14	Propio	5	15	5	Propio	Propio	1	15	Propio	Propio
Estudiante 15	4	Propio	Propio	Propio	IN	Propio	6	Propio	7	14

Propio Representa que el procedimiento empleado por el estudiante fue distinto a otros. No indica necesariamente que el estudiante no pudo basarse en ideas de otros compañeros o en fuentes externas como libros, ayuda de terceros,etc.

El número Indica que el procedimiento empleado por el estudiante es similar al empleado por el estudiante número "n"

NR Indica que el estudiante no resolvió la tarea

IN Indica que el procedimiento escrito empleado por el estudiante está incompleto y/o es confuso para analizarlo

****** Indica que el estudiante cambió su procedimiento al momento de argumentar la solución de la tarea

Ejemplos para entender la tabla

El estudiante 4 en la Tarea 6; la notación dice "Propio" indica que el estudiante empleo un procedimiento distinto a los otros estudiantes pero, los asteriscos (**) indicarán que cambio su procedimiento cuando tuvo que argumentar su solución.

El estudiante 3 en la Tarea 4, índica que el procedimiento empleado en la tarea es similar al empleado por el estudiante 5 en esa tarea.

APÉNDICE F. Análisis de desempeño Estudiante-Tarea

ESTUDIANTE	TAREA	TIPO DE RAZONAMIENTO		CLASIFICACIÓN DE ARGUMENTACIONES			CONOCIMIENTOS PREVIOS	HEURÍSTICAS
		IMITATIVO	CREATIVO	CONVICCIÓN EXTERNA	EMPÍRICO	ANALÍTICO		
1	1	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente No puede explicar algunos de sus procedimientos	Crea su propia ruta de solución, Emplea propiedades de las figuras y conceptos factibles de aplicación	(prueba ritual) Da por hecho que el trazo de perpendiculares cumple ciertas condiciones	(prueba perceptual) Observa triángulos dentro de la figura		Ángulos correspondientes entre paralelas Definición de perpendicularidad Suma de ángulos internos de un triángulo	Trazos auxiliares (perpendiculares) Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías
4	1	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente	Crea su propia ruta de solución, Emplea una estrategia distinta de solución al ser cuestionado por el docente Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos.	(prueba ritual) Da por hecho de que el trazo de perpendiculares cumple ciertas condiciones	(prueba perceptual) Observa triángulos dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (triángulos congruentes)	(prueba axiomático) Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	Ángulos correspondientes entre paralelas Ángulos opuestos por el vértice Criterios de congruencia de triángulos Definición de ángulos complementarios Definición de perpendicularidad Suma de ángulos internos de un triángulo Teorema de Pitágoras	Trazos auxiliares (perpendiculares) Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías
8	1	(memorístico) Aplica una serie	Crea su propia ruta de solución, Emplea una		(prueba perceptual)	(prueba axiomático)	Ángulos correspondientes entre paralelas	Trazos auxiliares (perpendiculares) Descomposición en

		de conocimientos aprendidos previamente	estrategia distinta de solución al ser cuestionado por el docente Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos.		Observa triángulos dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (triángulos congruentes)	Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	Criterios de congruencia de triángulos Definición de ángulos suplementarios Definición de perpendicularidad Propiedades de los triángulos isósceles y rectángulos Suma de ángulos internos de un triángulo Teorema de Pitágoras	sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías
9	1	(memorístico) Aplica una serie de propiedades y conocimientos aprendidos previamente Confunde conceptos	Intenta crear su propia ruta de solución Intenta emplear una estrategia distinta de solución al ser cuestionado por el docente Emplea algunas propiedades viables de aplicación Usa notación matemática y procedimientos convincentes	(prueba ritual) Da por hecho de que el trazo de perpendiculares cumple ciertas condiciones Confunde conceptos como perpendicular y bisectriz	(prueba perceptual) Observa triángulos dentro de la figura		Empleo de conceptos como bisectriz, perpendicular y base de un triángulo Uso de sistemas de ecuaciones	Trazos auxiliares (perpendiculares) Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías
10	1	(memorístico) Aplica una serie	Crea su propia ruta de solución, Emplea propiedades		(prueba perceptual)	(prueba axiomático)	Ángulos alternos internos Ángulos	Trazos auxiliares para formar triángulos Descomposición en

		de conocimientos aprendidos previamente	de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos.		Observa triángulos dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (triángulos congruentes)	Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	correspondientes entre paralelas Ángulos opuestos por el vértice Criterios de congruencia de triángulos Definición de bisectriz Propiedades de los triángulos rectángulos e isósceles Suma de ángulos internos de un triángulo Teorema de Pitágoras	sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías
1	2	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente	Crea su propia ruta de solución, Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos.		(prueba perceptual) Observa triángulos dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (suma ángulos internos de un triángulo)	(prueba axiomático) Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	Definición de ángulo llano Propiedades de los triángulos isósceles Suma de ángulos interiores de un triángulo	Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías

5	2	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente	Crea su propia ruta de solución, Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos.		(prueba perceptual) Observa triángulos dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (suma ángulos internos de un triángulo)	(prueba axiomático) Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	Propiedades del triángulo isósceles Suma de ángulos internos de un triángulo	Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías
7	2	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente	Crea su propia ruta de solución, Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos.		(prueba perceptual) Observa triángulos dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (suma ángulos internos de un triángulo)	(prueba axiomático) Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	Definición de ángulos suplementarios Propiedades del triángulo isósceles Suma de ángulos internos de un triángulo	Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías
8	2	(memorístico) Aplica una serie	Crea su propia ruta de solución, Emplea propiedades		(prueba perceptual)	(prueba axiomático)	Propiedades de triángulos isósceles	Descomposición en sub-figuras (triángulos)

		de conocimientos aprendidos previamente	de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos.		Observa triángulos dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (suma ángulos internos de un triángulo)	Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	Suma de ángulos internos de un triángulo Teorema del ángulo externo de un triángulo	Empleo de analogías
3	3	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente (algorítmico) El estudiante emplea algoritmos para encontrar área de triángulos y cuadrados	Crea su propia ruta de solución, Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos		(prueba perceptual) Observa triángulos dentro de la figura	(prueba transformacional) El empleo de trazos auxiliares le permite transformar el problema en figuras más sencillas (triángulos) (prueba axiomático) Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus	Fórmulas para la obtención de áreas (triángulos y cuadrados)	Trazos auxiliares para formar triángulos Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías

						procedimientos		
5	4	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente (algorítmico) El estudiante da por hecho que se cumplen ciertas propiedades por el hecho de indicar algunas relaciones viables	Crea su propia ruta de solución, Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos	(prueba ritual) Da por hecho que los ángulos alternos son iguales y el profesor le auxilia para convencerse de su afirmación	(prueba perceptual) Observa triángulos dentro de la figura	(prueba axiomático) Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	Definición de bisectriz Definición de paralelas Ángulos alternos internos entre paralelas Propiedades de los triángulos isósceles Suma de segmentos	Trazos auxiliares (ajenos a la figura inicial) para identificar ángulos entre paralelas Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías
12	4	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente	Crea su propia ruta de solución, Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos		(prueba perceptual) Observa triángulos dentro de la figura	(prueba axiomático) Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	Definición de paralelas Ángulos alternos internos entre paralelas Propiedades de los triángulos isósceles Suma de segmentos	Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías
15	4	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos	Crea su propia ruta de solución, Emplea propiedades de las figuras, conceptos y		(prueba perceptual) Observa triángulos dentro	(prueba axiomático) Emplea adecuadamente	Ángulos correspondientes entre paralelas Ángulos opuestos por el vértice	Trazos auxiliares (prolongación de rectas) Descomposición en sub-figuras

		previamente	simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos		de la figura	las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	Propiedades de los triángulos isósceles	(triángulos) Empleo de analogías
12	5	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente	Crea su propia ruta de solución, Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos		(prueba perceptual) Observa triángulos dentro de la figura		Criterios de congruencia de triángulos Propiedades de los triángulos congruentes	Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías
4	6	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente	Crea su propia ruta de solución, Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos		(prueba perceptual) Observa triángulos dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (triángulos congruentes)		Propiedades de los triángulos isósceles Ángulos alternos internos entre paralelas Ángulos opuestos por el vértice Criterios de congruencia de triángulos Propiedades de los triángulos congruentes	Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías
11	7	(memorístico)	Crea su propia ruta de solución,		(prueba perceptual)	(prueba axiomático)	Suma de ángulos internos en un	Descomposición en sub-figuras

		Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente	Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos		Observa triángulos dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (suma de ángulos internos de un cuadrilátero)	Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	cuadrilátero Igualdad de ángulos Sistemas de ecuaciones	(triángulos) Empleo de analogías
13	7	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente (algorítmico) El estudiante da por hecho que se cumplen ciertas propiedades por el hecho de indicar algunos trazos visualmente viables aunque no finaliza la tarea	Intenta crear su propia ruta de solución Intenta emplear una estrategia distinta de solución al ser cuestionado por el docente Intenta emplear algunas propiedades factibles de aplicación	(prueba ritual) Da por hecho que el trazo de elementos cumple ciertas condiciones, el profesor le auxilia sin embargo el estudiante no es capaz de formular nuevos argumentos además de confundir conceptos	(prueba perceptual) Observa triángulos dentro de la figura		Empleo incorrecto de propiedades y conceptos. (ángulos entre paralelas como ángulos externos internos)	Trazos auxiliares (prolongación de trazos y uso de otros)
6	8	(memorístico)	Crea su propia ruta de solución,		(prueba perceptual)	(prueba axiomático)	Criterios de semejanza de	Trazos auxiliares (prolonga trazos para

		Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente	Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos		Observa triángulos dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (semejanza entre triángulos rectángulos)	Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	triángulos Propiedades de los triángulos rectángulos Teorema de Pitágoras Proporcionalidad	formar nuevas figuras) Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías
15	8	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente	Crea su propia ruta de solución, Emplea distintos referentes de solución al ser cuestionado por el docente (proporcionalidad y teorema de Tales) Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos.		(prueba perceptual) Observa triángulos dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (semejanza entre triángulos rectángulos)	(prueba axiomático) Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	Criterios de semejanza de triángulos Propiedades de los triángulos rectángulos Teorema de Pitágoras Proporcionalidad Teorema de Tales	Trazos auxiliares (prolonga trazos para formar nuevas figuras) Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías
2	9	(memorístico) Aplica una serie	Crea su propia ruta de solución, Emplea propiedades	(prueba simbólico) El estudiante da	(prueba perceptual)	(prueba axiomático)	Ángulos opuestos por el vértice Ángulos	Descomposición en sub-figuras (triángulos)

		de conocimientos aprendidos previamente	de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos	por hecho que el empleo de los criterios de congruencia se cumplen por el hecho de anotarlos, pero no hace una justificación de las condiciones que los cumplen.	Observa triángulos y ángulos específicos dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (criterios de congruencia de triángulos)	Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	suplementarios Criterios de congruencia de triángulos Propiedades de triángulos congruentes	Empleo de analogías
7	9	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente	Crea su propia ruta de solución, Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos		(prueba perceptual) Observa triángulos y ángulos específicos dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (criterios de congruencia de triángulos y suma de ángulos internos en un triángulo)	(prueba axiomático) Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	Ángulos opuestos por el vértice Ángulos suplementarios Criterios de congruencia de triángulos Propiedades de los triángulos congruentes Suma de ángulos internos en un triángulo	Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías

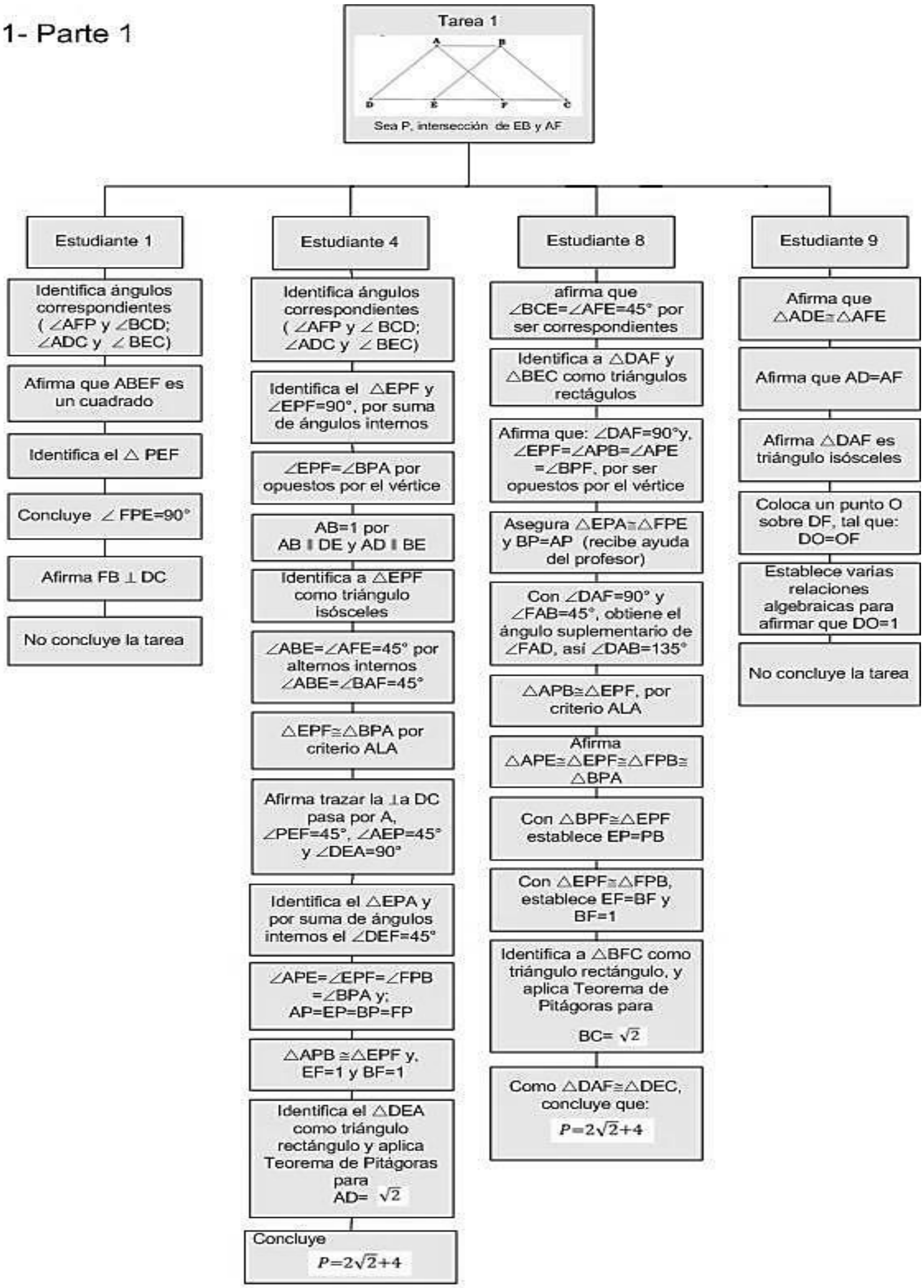
14	9	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente	Crea su propia ruta de solución, Emplea diversos referentes y estrategias de solución al ser cuestionado por el docente (congruencia de triángulos) Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos.		(prueba perceptual) Observa triángulos y ángulos dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (criterios de congruencia de triángulos , ángulos suplementarios y opuestos por el vértice)	(prueba axiomático) Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	Ángulos opuestos por el vértice Ángulos suplementarios Criterios de congruencia de triángulos Ecuaciones lineales Propiedades de los triángulos isósceles Propiedades de triángulos congruentes	Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías
2	10	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente (algorítmico) El estudiante aplica constantemente las fórmulas para encontrar áreas	Crea su propia ruta de solución, Emplea diversos referentes y estrategias de solución al ser cuestionado por el docente (congruencia de segmentos y ángulos) Emplea propiedades de las figuras, conceptos y	(prueba autoritario) Justifica sus procedimientos comentando la aplicación de propiedades memorizadas (definición de punto medio como la mitad de un segmento)	(prueba perceptual) Observa triángulos dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (identifica	(prueba transformacional) El empleo de trazos auxiliares le permite transformar el problema en figuras más sencillas (triángulos isósceles) (prueba	Cálculo de áreas de triángulos mediante fórmula Concepto de altura de un triángulo Congruencia de triángulos Criterios de congruencia de triángulos Definición de punto medio Definición y	Trazos auxiliares (prolongación de trazos para formar triángulos) Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías

		de triángulos	simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos.		triángulos para obtener áreas)	axiomático) Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	propiedad de perpendicularidad Propiedad del cuadrado Propiedades de los triángulos isósceles y rectángulos Propiedades del triángulo rectángulo Raíz cuadrada Suma de ángulos internos de un triángulo Teorema de Pitágoras	
6	10	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente (algorítmico) El estudiante aplica constantemente las fórmulas para encontrar áreas de triángulos y cuadrados	Crea su propia ruta de solución, Emplea diversos referentes y estrategias de solución al ser cuestionado por el docente (obtención del área de un triángulo) Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos.		(prueba perceptual) Observa triángulos y cuadrados dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (identifica triángulos y cuadrados para obtener áreas)	(prueba transformacional) El empleo de trazos auxiliares le permite transformar el problema en figuras más sencillas (triángulos y cuadrados) (prueba axiomático) Emplea adecuadamente las propiedades	Cálculo de áreas de triángulos y cuadrados mediante fórmulas Definición de punto medio Definición y propiedad de perpendicularidad Propiedad del cuadrado Raíz cuadrada Suma, resta y reparto de áreas	Trazos auxiliares (prolongación de trazos para formar triángulos y cuadrados) Descomposición en sub-figuras (triángulos y cuadrados) Empleo de analogías

						de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos		
14	10	(memorístico) Aplica una serie de conocimientos aprendidos previamente (algorítmico) El estudiante aplica constantemente las fórmulas para encontrar áreas de triángulos	Crea su propia ruta de solución, Emplea propiedades de las figuras, conceptos y simbología matemática convincente para justificar sus procedimientos		(prueba perceptual) Observa triángulos dentro de la figura (prueba inductivo) Observa un patrón que le permite generalizar una propiedad a otras figuras (identifica triángulos para obtener áreas)	(prueba axiomático) Emplea adecuadamente las propiedades de las figuras, conceptos y notación matemática para justificar sus procedimientos	Cálculo de áreas de triángulos mediante fórmula Concepto de altura en un triángulo Definición de punto medio Ecuaciones lineales Propiedad del cuadrado Propiedades de triángulos rectángulos Raíz cuadrada Suma y resta de áreas Teorema de Pitágoras	Descomposición en sub-figuras (triángulos) Empleo de analogías

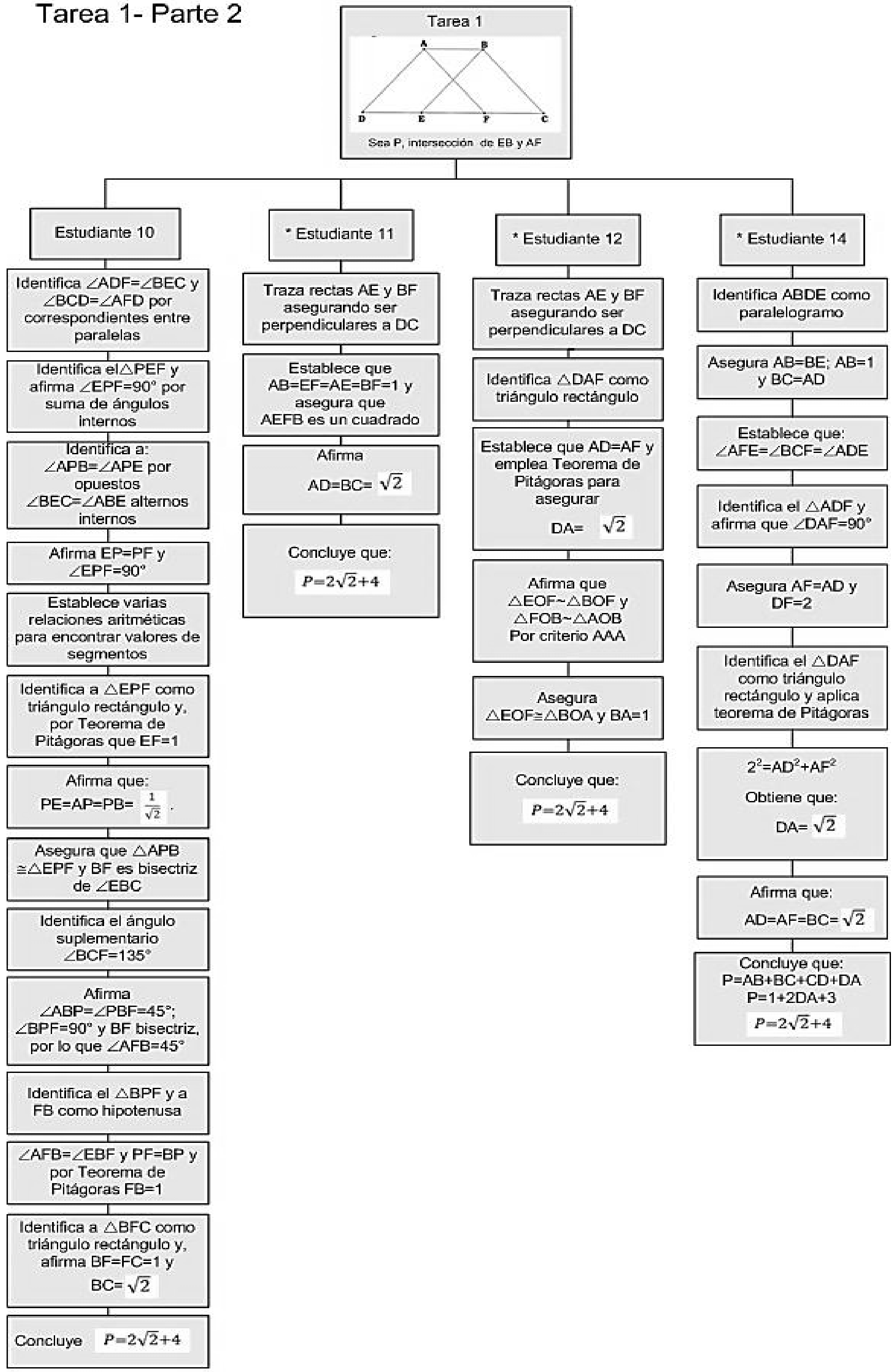
APÉNDICE G. Rutas de solución de la tarea 1

Tarea 1- Parte 1



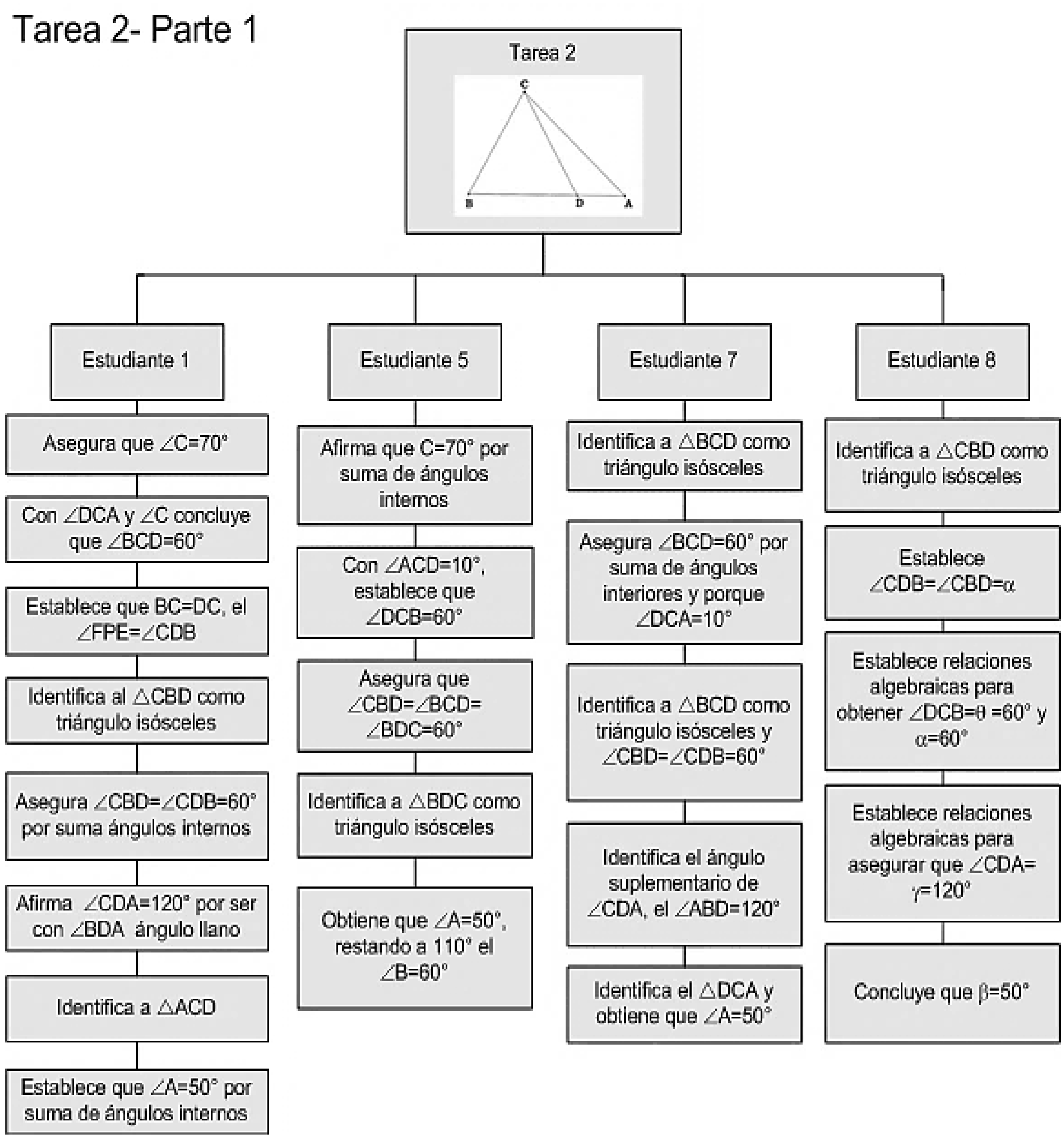
* Indica que la ruta de solución fue tomada de la prueba escrita de ese estudiante

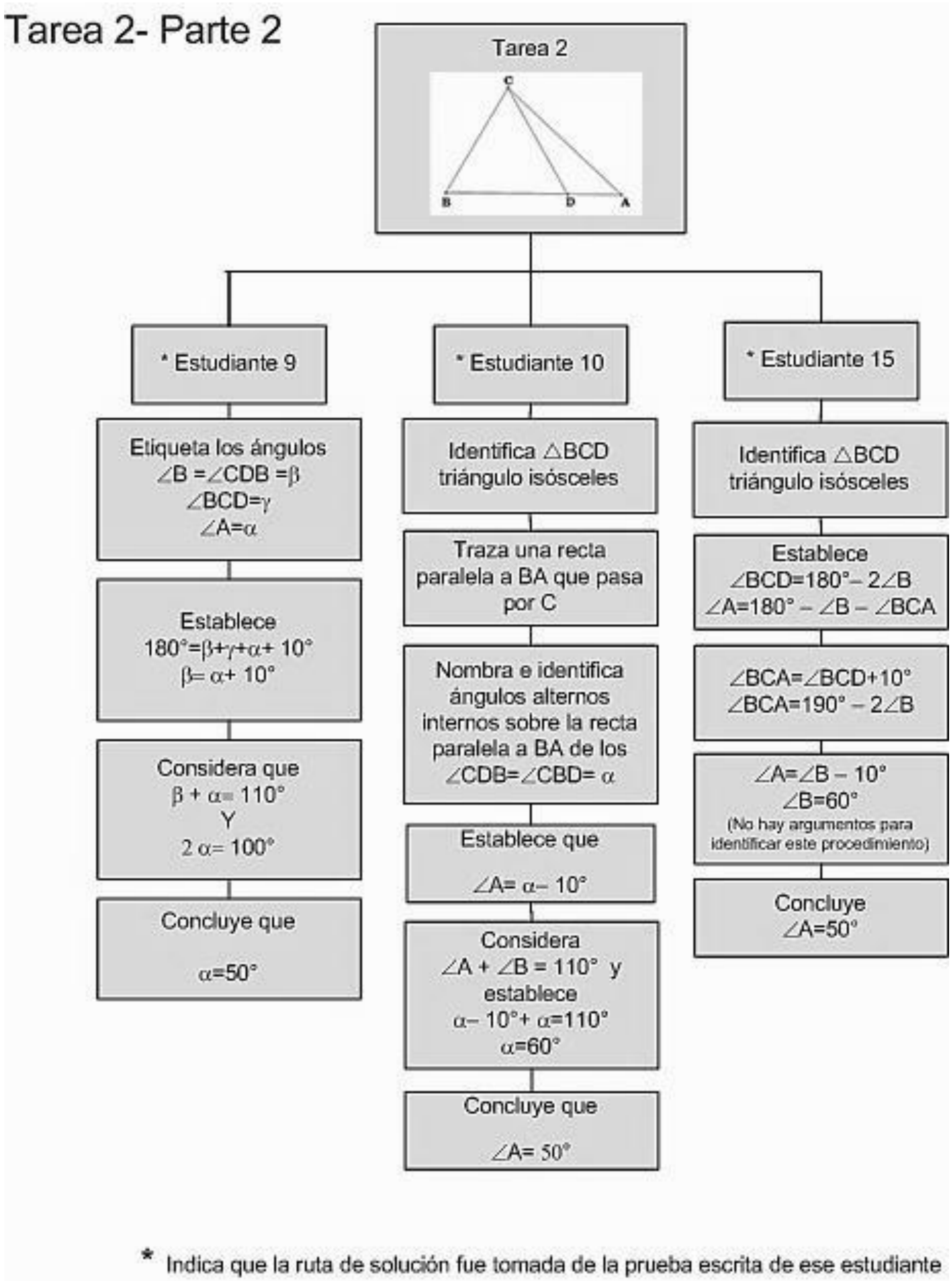
Tarea 1- Parte 2



* Indica que la ruta de solución fue tomada de la prueba escrita de ese estudiante

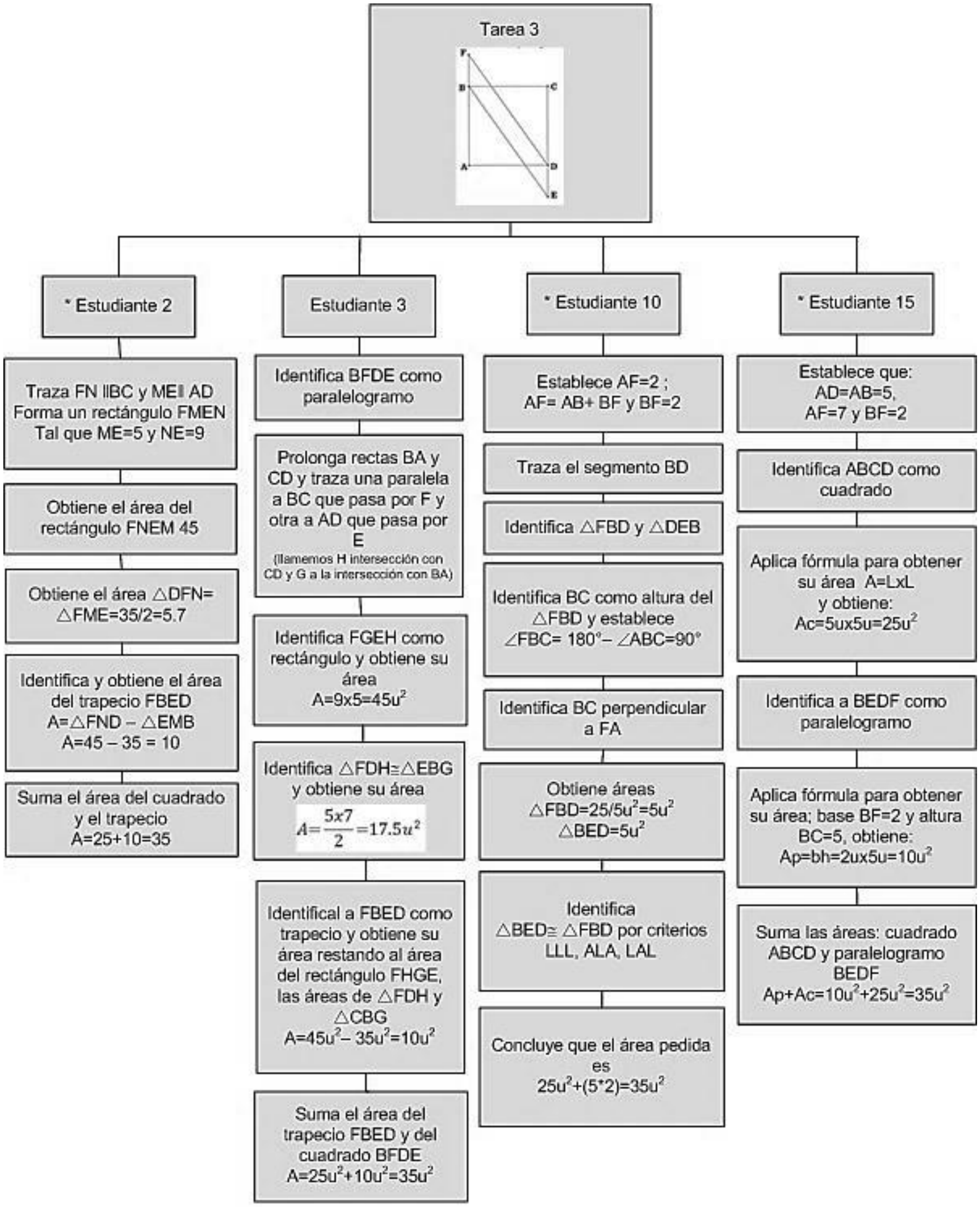
APÉNDICE H. Rutas de solución de la tarea 2





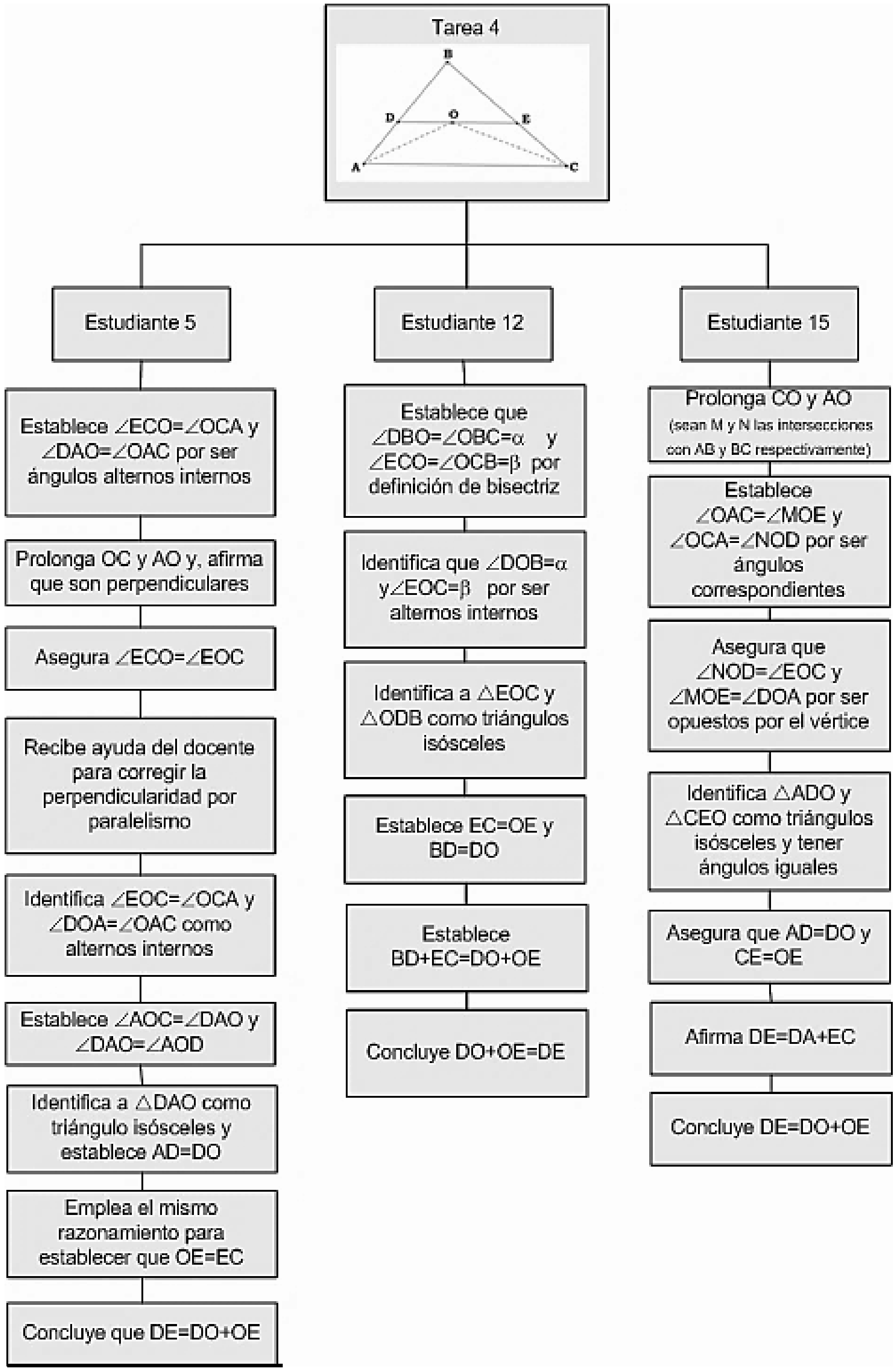
Tarea 2- Parte 2
Tarea 2
C
B
D
A
* Estudiante 9
Etiqueta los ángulos ∠B =∠CDB =β ∠BCD=γ ∠A=α
Establece 180°=β+γ+α+ 10° β= α+ 10°
Considera que β + α= 110° Y 2 α= 100°
Concluye que α=50°
* Estudiante 10
Identifica △BCD triángulo isósceles
Traza una recta paralela a BA que pasa por C
Nombra e identifica ángulos alternos internos sobre la recta paralela a BA de los ∠CDB=∠CBD= α
Establece que ∠A= α– 10°
Considera ∠A + ∠B = 110° y establece α– 10°+ α=110° α=60°
Concluye que ∠A= 50°
* Estudiante 15
Identifica △BCD triángulo isósceles
Establece ∠BCD=180°– 2∠B ∠A=180° – ∠B – ∠BCA
∠BCA=∠BCD+10° ∠BCA=190° – 2∠B
∠A=∠B – 10° ∠B=60° (No hay argumentos para identificar este procedimiento)
Concluye ∠A=50°
* Indica que la ruta de solución fue tomada de la prueba escrita de ese estudiante

APÉNDICE I. Rutas de solución de la tarea 3

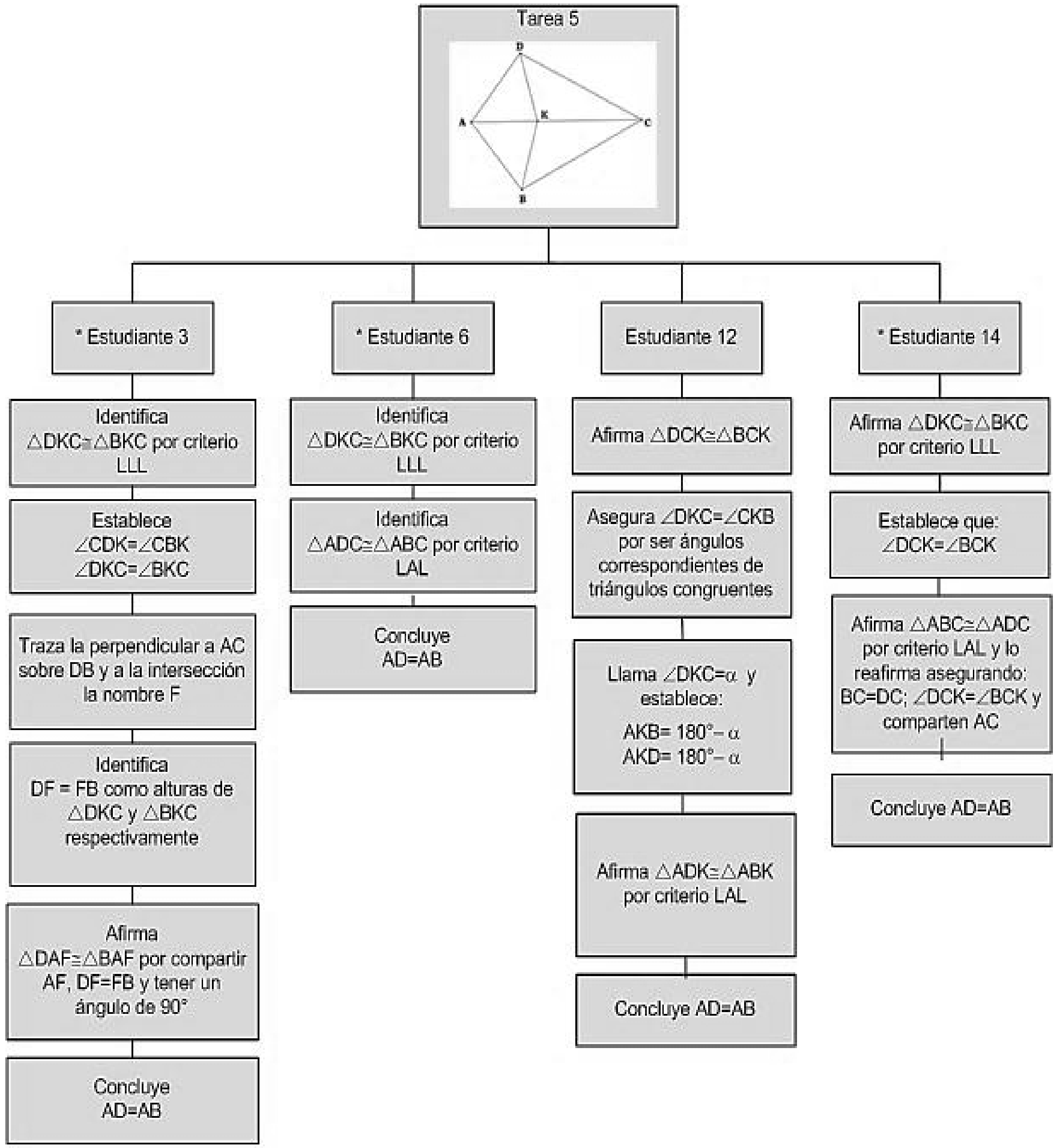


* Indica que la ruta de solución fue tomada de la prueba escrita de ese estudiante

APÉNDICE J. Rutas de solución de la tarea 4



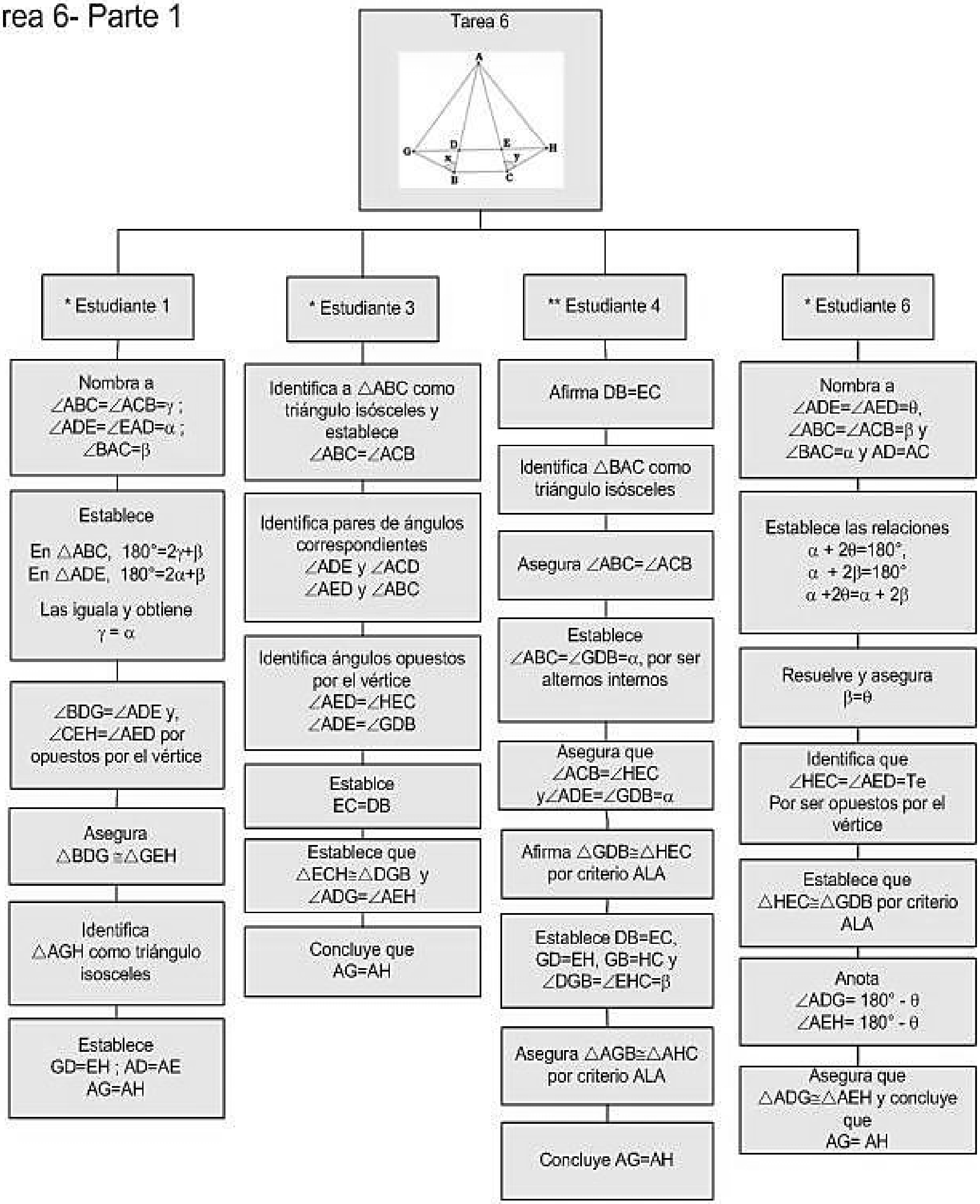
APÉNDICE K. Rutas de solución de la tarea 5



* Indica que la ruta de solución fue tomada de la prueba escrita de ese estudiante

APÉNDICE L. Rutas de solución de la tarea 6

Tarea 6- Parte 1

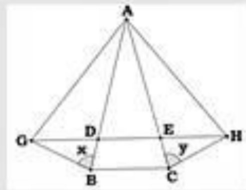


* Indica que la ruta de solución fue tomada de la prueba escrita de ese estudiante

** Indica que el estudiante cambió la ruta de solución al compararla con su prueba escrita

Tarea 6- Parte 2

Tarea 6



*** Estudiante 10**

- Identifica $\triangle ADE$ y $\triangle ABC$ como triángulos isósceles
- Establece $180° = \angle AEG + \angle AEH$, y $\angle CEH = \angle ADH = \alpha$ $\angle GEC = \angle GDA = \beta$ Por ser opuestos por el vértice
- Afirma que $\angle ADG = \angle HDB = \angle AEH = \angle GEC = \beta$ $\angle GDB = \angle ADH = \angle AEG = \angle CEH = \alpha$
- Establece $AB = AD + BD$ $AC = AE + CE$ $AD + BD = AE + CE$, $AD = AE$; $BD = CE$
- Afirma que $\triangle GDB \cong \triangle ECH$ por criterio ALA, y que $\triangle AGD \cong \triangle AEH$
- Concluye $AG = AH$

*** Estudiante 14**

- Identifica $\triangle ADB$ como triángulo isósceles
- Asegura $\angle GDB = \angle ADE$ $\angle HEC = \angle AED$ por ser opuestos por el vértice
- Establece $\angle GDB = \angle HEC = \alpha$ $\angle DGB = \angle DHC$
- Asegura que $BD = AB - AD$ y $CE = AC - AE$ Y por datos iniciales afirma $BD = CE$
- Afirma $\triangle GDB \cong \triangle HEC$ por criterio ALA
- Establece $\angle ADG = 180° - \alpha = \gamma$ $\angle AEH = 180° - \alpha = \gamma$ $\angle ADG = \angle AEH$
- Asegura $\triangle ADG \cong \triangle AEH$ por criterio LAL
- Concluye $AG = AH$

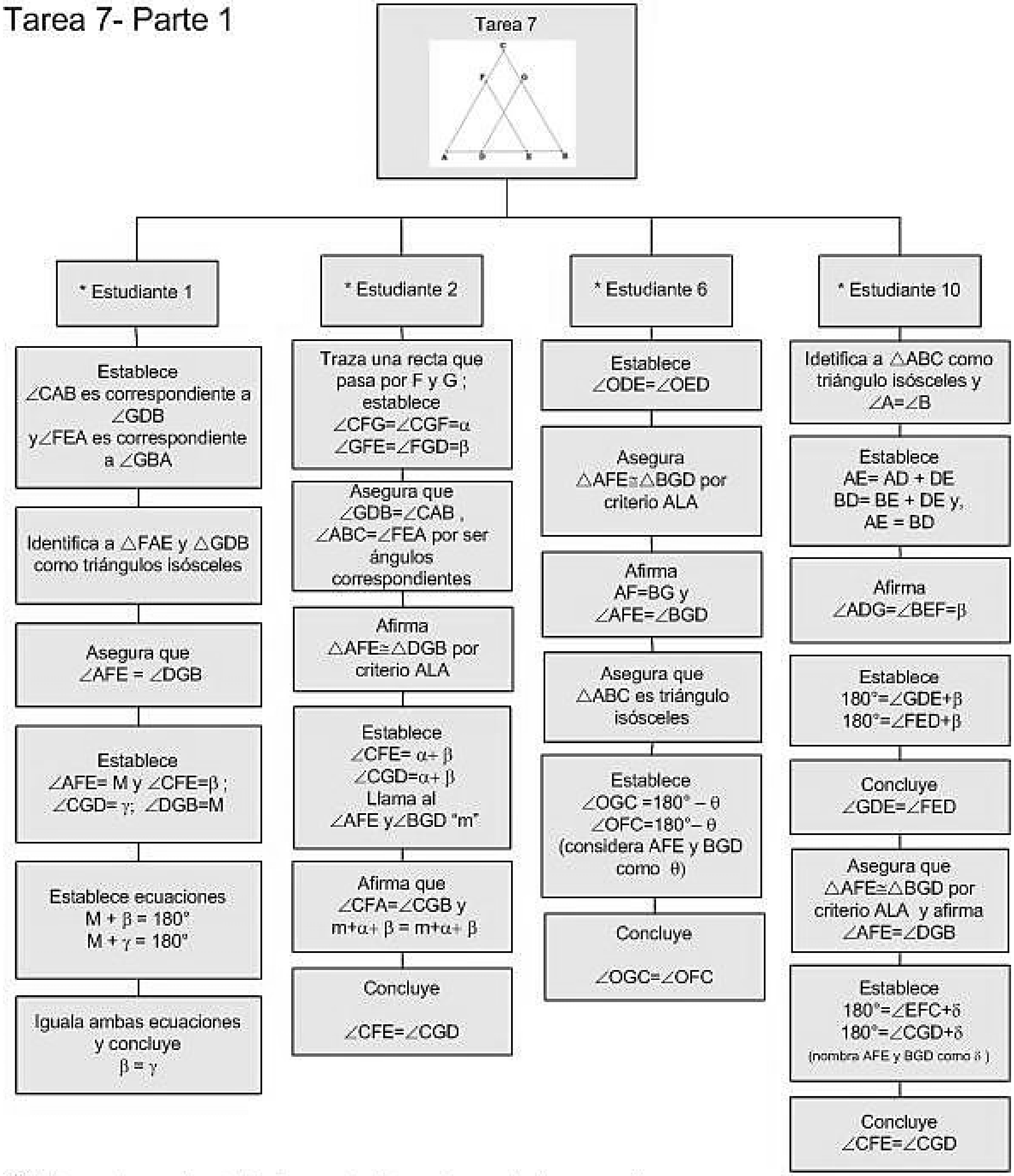
*** Estudiante 15**

- Identifica a $\triangle ADE$ como triángulo isósceles y establece $\angle ADE = \angle AED$
- Establece que $\angle ADE = \angle AED = \angle GDB = \angle HEC = \alpha$ $AB = AC$; $AD = AE$; $DB = EC$
- Establece que $\triangle ECH \cong \triangle DGB$ por criterio ALA, y $GD = HE$ $\triangle ADG \cong \triangle AEH$ por criterio LLL
- Concluye que $AG = AH$

* Indica que la ruta de solución fue tomada de la prueba escrita de ese estudiante

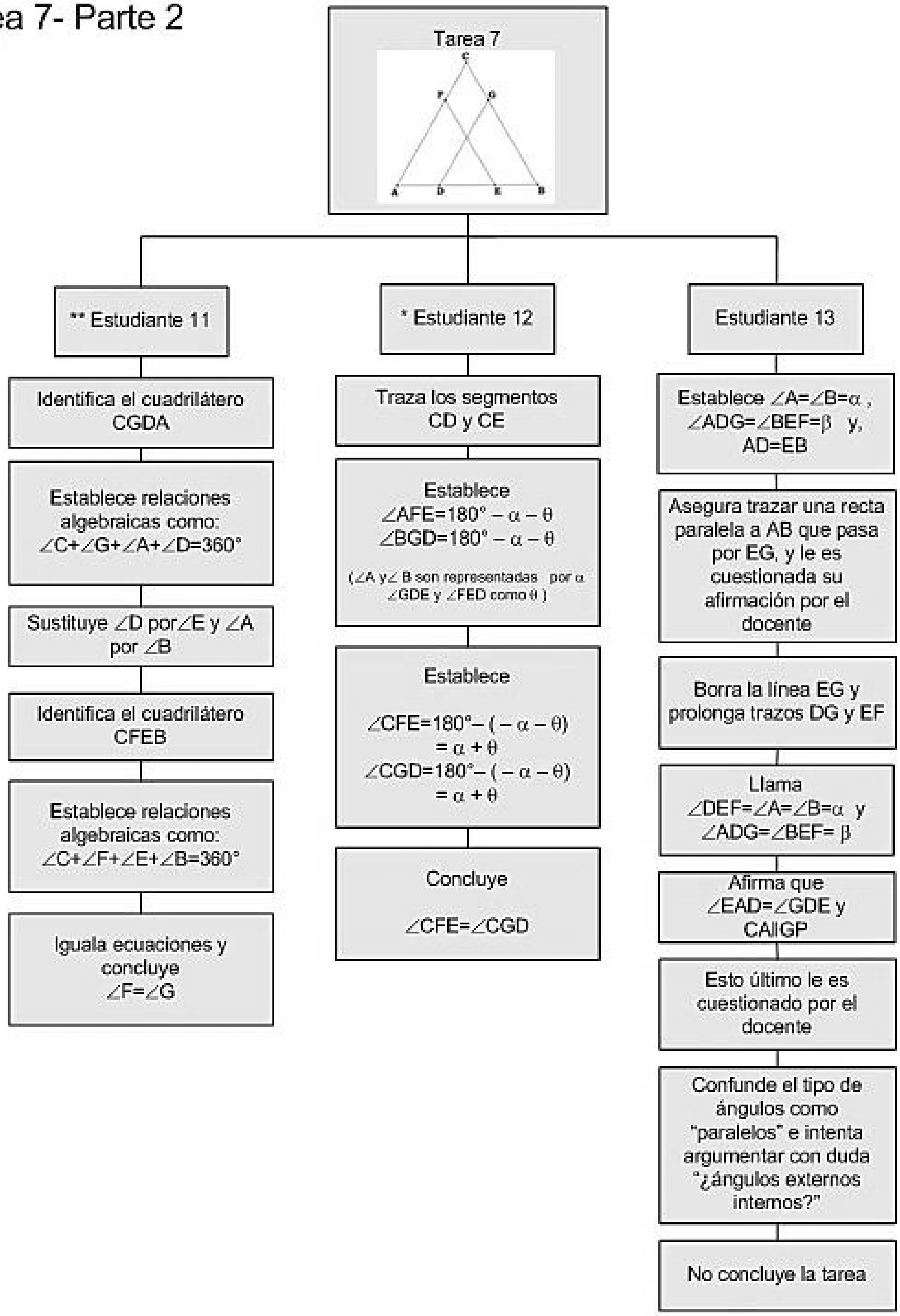
APÉNDICE M. Rutas de solución de la tarea 7

Tarea 7- Parte 1



* Indica que la ruta de solución fue tomada de la prueba escrita de ese estudiante

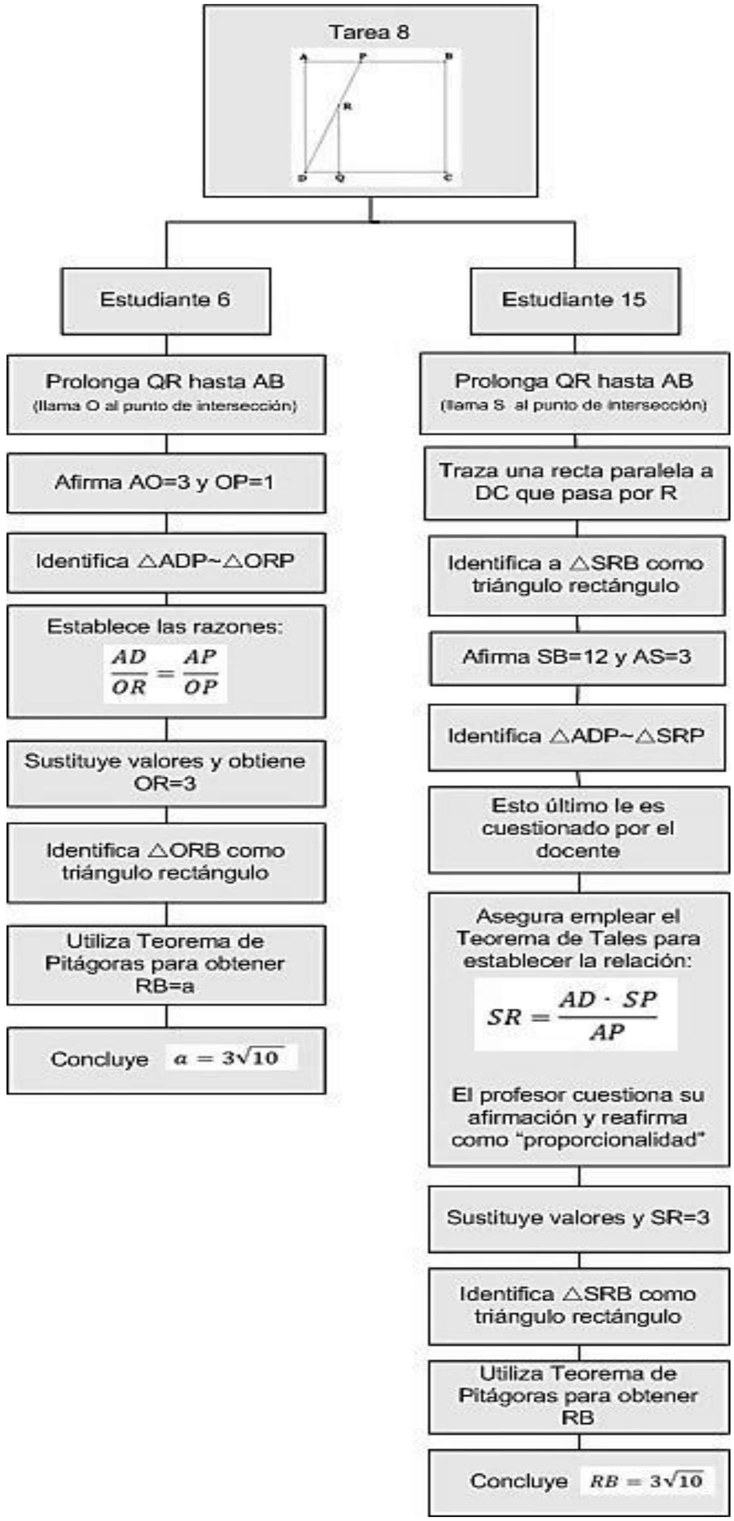
Tarea 7- Parte 2



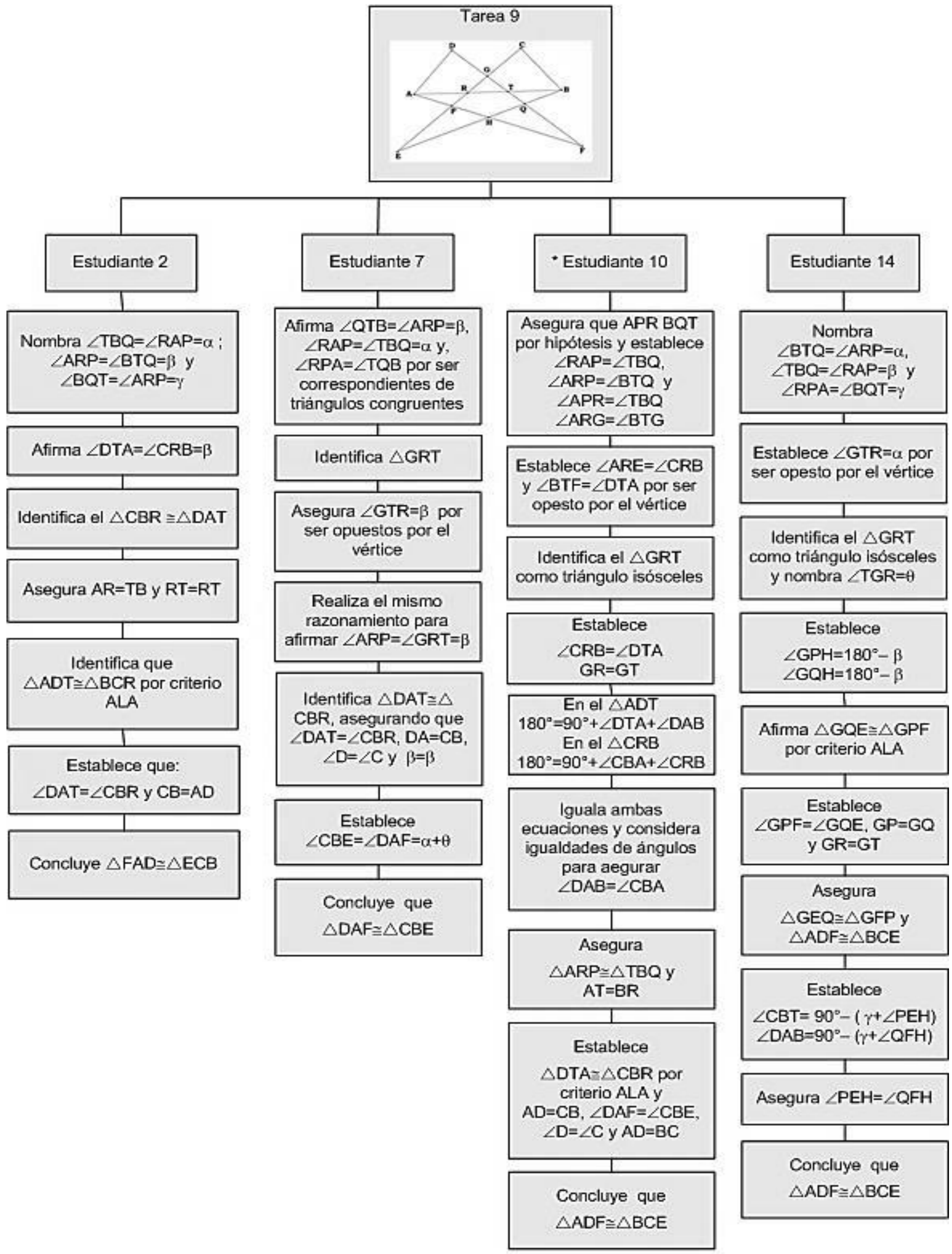
* Indica que la ruta de solución fue tomada de la prueba escrita de ese estudiante

** Indica que el estudiante cambió la ruta de solución al compararla con su prueba escrita

APÉNDICE N. Rutas de solución de la tarea 8

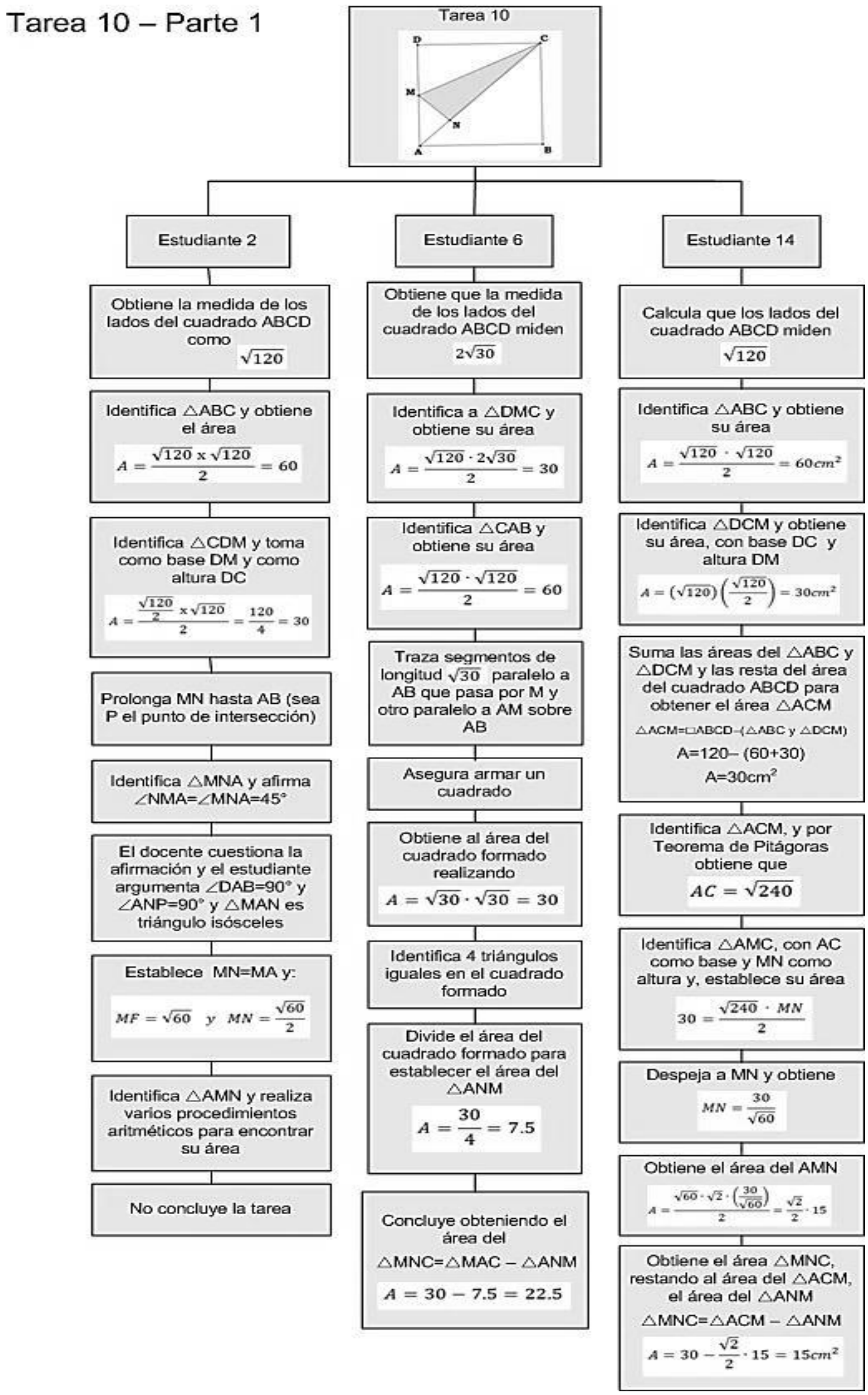


APÉNDICE O. Rutas de solución de la tarea 9



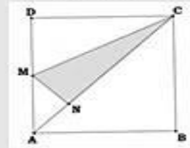
* Indica que la ruta de solución fue tomada de la prueba escrita de ese estudiante

APÉNDICE P. Rutas de solución de la tarea 10



Tarea 10 – Parte 2

Tarea 10



*** Estudiante 3**

- Obtiene la medida de los lados del cuadrado ABCD como $\sqrt{120}$
- Prolonga segmento MN hasta intersectar con AB y asegura ∠NMA, ∠MAN y ∠NAB miden 45°
- Considera M al ser punto medio MA= $\sqrt{30}$
- Emplea Teorema de Pitágoras para establecer $(MA)^2=(MN)^2+(AN)^2$
- Identifica △MAN como triángulo isósceles y afirma MN=NA
- Establece $(MA)^2=2(MN)^2$ y obtiene $\frac{30}{2}=\frac{2(MN)^2}{2}$ $\sqrt{15}=MN$
- Identifica △CBA como triángulo isósceles
- Emplea Teorema de Pitágoras y encuentra $AC=3\sqrt{15}$
- Encuentra el área del △MNC $(MNC)=\frac{NC\cdot MN}{2}=\frac{3\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}}{2}$
- Concluye que el área es 22.5 cm^2

*** Estudiante 8**

- Obtiene la medida de los lados del cuadrado ABCD empleando fórmula L^2 $2\sqrt{30}$
- Identifica el △ABC y obtiene su área $ABC=\frac{(2\sqrt{30})(2\sqrt{30})}{2}=60\ cm^2$
- En el △ABC emplea el Teorema de Pitágoras para establecer $AC=4\sqrt{15}$
- Identifica △ANM~△ABC y establece relaciones de proporcionalidad $\frac{AB}{AN}=\frac{BC}{NM}=\frac{AC}{AM}$
- Encuentra los valores $\sqrt{15}=MN$ $\sqrt{15}=AN$
- Concluye que $Área=\frac{(\sqrt{15})(3\sqrt{15})}{2}=22.5$

*** Estudiante 9**

- Calcula que los lados del cuadrado ABCD miden $2\sqrt{30}$
- Identifica △AMN y emplea Teorema de Pitágoras para establecer $\sqrt{15}=MN$
- Identifica △ABC y emplea el Teorema de Pitágoras para encontrar $AC=2\sqrt{60}$
- Realiza operaciones para encontrar el segmento NC $NC=2\sqrt{60}-\sqrt{15}=3\sqrt{15}$
- Concluye que $Área=\frac{(\sqrt{15})(3\sqrt{15})}{2}=\frac{42}{2}$

* Indica que la ruta de solución fue tomada de la prueba escrita de ese estudiante

APÉNDICE Q. Asignaturas por Carreras Universitarias en Matemáticas

Entidad Federativa	Nombre de la Universidad	Licenciatura en Matemáticas Aplicadas	Licenciatura en Matemáticas	Otra Licenciatura en Matemáticas	Dirección electrónica
		Las letras indican la (s) asignatura (s) de geometría relacionada(s) con la geometría euclidiana en el Plan de Estudios de esa carrera.			(Diciembre 2014)
Aguascalientes	Universidad Autónoma de Aguascalientes	S			http://www.uaa.mx/
Baja California	Universidad Autónoma de Baja California	S		Lic. Docencia de las matemáticas A, D	http://www.uabc.mx/
Chiapas	Universidad Autónoma de Chiapas		A, J*, N*		http://www.unach.mx/
Chihuahua	Universidad Autónoma de Ciudad Juárez		M		http://www.uacj.mx/
Coahuila	Universidad Autónoma de Coahuila	A, D, W			http://www.uadec.mx/
Colima	Universidad de Colima		B*,C*, J*, M, Q*	Lic. Educación Media especializado en Matemáticas D, I, M, T	http://www.ucol.mx/
Distrito Federal	Universidad Nacional Autónoma de México	D	B*, D, J, M, N*, O*, R*, V*		http://www.unam.mx/
	Instituto Politécnico Nacional			Lic. Física y Matemáticas A*,D, J*,N*	http://www.ipn.mx/
	Universidad Autónoma de México	A, D, F*, X	A*, J*		http://www.uam.mx/
	Universidad de la Ciudad de México			Lic. Modelación Matemática D	http://www.uacm.edu.mx/uacm/
Durango	Universidad Juárez del Estado de Durango	D			http://www.ujed.mx/
Estado de México	Universidad Autónoma del Estado de México		A, B*,D, G*, J, K*, L*, N*, O*, W*		http://www.uaemex.mx/
Guanajuato	Universidad de Guanajuato		A, M, W		http://www.ugto.mx/
Guerrero	Universidad Autónoma de Guerrero		Región: Norte, Sur, Centro y Tierra Caliente A, B*, D, J*, L*, M*, T*	Lic. Matemática Educativa A, D, E, M, X	http://www.uagro.mx/
Hidalgo	Universidad Autónoma de Hidalgo	A			http://www.uaeh.edu.mx/
Jalisco	Universidad de Guadalajara		A, B*, J*, T, O*, N*, X*		http://www.udg.mx/
Michoacán	Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo			Lic. Físico-Matemáticas A, F, J, M, N, S	http://www.umich.mx/
Morelos	Universidad Autónoma del Estado de Morelos			Lic. Ciencias (Matemáticas)	http://www.uaem.mx/

				A, J	
Nayarit	Universidad Autónoma de Nayarit		A, D, E, M		http://www.uan.edu.mx/
Nuevo León	Universidad Autónoma de Nuevo León		D, M		http://www.uanl.mx/
Oaxaca	Universidad Autónoma "Benito Juárez" de Oaxaca		A, D, J		http://www.uabjo.mx/
Puebla	Benemérita Universidad Autónoma de Puebla	D, E	D, E, J , P, T		http://www.buap.mx/
Querétaro	Universidad Autónoma de Querétaro	D, T			http://www.uaq.mx/
San Luis Potosí	Universidad Autónoma de San Luis Potosí	A, J, F, W*		Lic. Matemática Educativa A	http://www.uaslp.mx/
Sinaloa	Universidad Autónoma de Sinaloa		A, D, S		http://www.uas.edu.mx/web/
Sonora	Universidad de Sonora		A, D, J*, M*, W*		http://www.uson.mx/
Tabasco	Universidad Juárez Autónoma de Tabasco		A, B*, D, J*, M*, U*		http://www.ujat.mx/
Tlaxcala	Universidad Autónoma de Tlaxcala	D			http://www.uatx.mx/
Veracruz	Universidad Veracruzana		D, M		http://www.uv.mx/
Yucatán	Universidad Autónoma de Yucatán		A, B*,D, H*, J*, L*, M, O*	Lic. Enseñanza de las Matemáticas A, D, M*, U	http://www.uady.mx/
Zacatecas	Universidad Autónoma de Zacatecas		D, M		http://www2.uaz.edu.mx/

A. Geometría (Euclidiana)
B. Geometría Algebraica
C. Geometría Aritmética
D. Geometría Analítica
E. Geometría Analítica del Espacio
F. Geometría Computacional
G. Geometría Convexa
H. Geometría de Grupos
I. Geometría Descriptiva
J. Geometría Diferencial
K. Geometría Elíptica
L. Geometría Hiperbólica
M. Geometría Moderna
N. Geometría Proyectiva
O. Geometría Riemanniana
P. Geometría Sintética (o Pura)
Q. Geometría Simpléctica
R. Geometría Sumatoria
S. Geometría Vectorial
T. Geometrías No Euclidianas [i]
U. Didáctica de la Geometría
V. Seminario de Geometría
W. Temas Selectos de Geometría
X. Fundamentos de Geometría

* Materia señalada como OPTATIVA.

[i] El Plan de Estudios no especifica el tipo de geometrías a estudiar; se consideran: la geometría euclidiana, la hiperbólica y la elíptica como geometrías no euclidianas según wikipedia (http://es.wikipedia.org/wiki/)