



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

# Representaciones del grupo simétrico en homologías

Tesis que para obtener el título de

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

presenta

Briseida Guadalupe Trejo Escamilla

bajo la dirección de

Dr. Rafael Villarroel Flores

Pachuca, Hidalgo. Junio de 2013.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
 INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
 ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Briseida Guadalupe Trejo Escamilla  
 P R E S E N T E

Por este conducto le comunico que el Jurado que le fue asignado a su trabajo de tesis titulado *Representaciones del grupo simétrico en homologías*, después de revisarlo en reunión han decidido autorizar la impresión del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación se anotan las firmas de conformidad de los integrantes del Jurado:

  
 Presidente: Dr. Fernando Barrera Mora

  
 Secretario: Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz

  
 Primer Vocal: Dr. Jorge Viveros

  
 Segundo Vocal: Dra. Rocío Leonel Gómez

  
 Tercer Vocal: Dr. Rafael Villarroel Flores

Atentamente  
 "Amor, Orden y Progreso"  
 Mineral de la Reforma, Hidalgo, a 23 de enero de 2014

  
 Dr. Rafael Villarroel Flores  
 Secretario del Comité de Titulación  
 de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas



U A E H  
 BIBLIOTECA

c.c.p. Archivo

☒ Ciudad Universitaria, Carr. Pachuca-Tulancingo Km. 4.5  
 Mineral de la Reforma, Hidalgo 42184 México  
 ☎ 01 (771) 71 72 158    ☎ 01 (771) 71 72 091

# Agradecimientos

Primero quisiera agradecer a las personas más importantes de mi vida, mi familia, por su cariño y constante preocupación por mi bienestar.

Este trabajo no sería posible sin el apoyo de mi asesor, el Dr. Rafael Villarroel Flores, a quien agradezco su tiempo, motivación, dedicación, y sobre todo su paciencia.

Agradezco a mis sinodales, Dr. Fernando Barrera Mora, Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz, Dra. Rocío Leonel Gómez y Dr. Jorge Viveros Rogel, por el tiempo que les tomó revisar este trabajo y por sus valiosas sugerencias. A los profesores investigadores del Área Académica de Matemáticas y Física por compartir sus conocimientos. También agradezco a mis amigos Beto y Liz por las experiencias compartidas.

## Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo analizar módulos de homología de ciertos espacios topológicos (complejos simpliciales) construidos a partir de una gráfica simple finita en donde actúa el grupo simétrico  $S_n$ .

A partir de gráficas completas de  $n$  vértices  $K_n$ , se construyen las gráficas de emparejamientos  $G_n$ , de las cuales obtenemos las gráficas de clanes  $K(G_n)$ . Con estas gráficas se definen los complejos simpliciales  $\Delta(G_n)$  y  $\Delta(K(G_n))$ .

En este trabajo se muestra por métodos elementales la descomposición en submódulos irreducibles de los módulos de homología de  $\Delta(G_n)$  y  $\Delta(K(G_n))$ , para  $n = 4, 5, 6$ . La descomposición en irreducibles de los módulos de homología de  $\Delta(G_n)$  ha sido ya exhibida por Bouc (1984).

## Abstract

In this work we analyze the homology modules of certain topological spaces (simplicial complexes) built from a finite graph where the symmetric group  $S_n$  acts.

From complete graphs with  $n$  vertices, we built the matching graphs  $G_n$ , and then we get clique graphs  $K(G_n)$ . With these graphs we define the simplicial complexes  $\Delta(G_n)$  and  $\Delta(K(G_n))$ .

We show by elementary methods the decomposition into irreducible submodules of the homology modules for  $\Delta(G_n)$  and  $\Delta(K(G_n))$ . The decomposition into irreducibles of the homology modules  $\Delta(G_n)$  has already been shown by Bouc (1984).

# Índice general

Índice general	5
<b>1 Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1 Álgebra lineal . . . . .	12
1.2 Grupos . . . . .	15
1.3 Anillos . . . . .	19
1.4 Módulos . . . . .	20
1.5 Representaciones de grupos . . . . .	21
1.6 Reducibilidad . . . . .	26
1.7 $G$ -homomorfismo y lema de Schur . . . . .	28
1.8 Caracteres de representaciones . . . . .	30
1.9 Producto interno de caracteres . . . . .	33
1.10 Caracteres y módulos inducidos . . . . .	35
1.11 Gráficas . . . . .	40
<b>2 Representaciones del grupo simétrico</b>	<b>43</b>
2.1 Tablero de Young . . . . .	44
2.2 Tabloides y módulo de permutación $M^\lambda$ . . . . .	46
2.3 Módulo de Specht . . . . .	48
<b>3 Homología de complejos simpliciales</b>	<b>53</b>
3.1 Complejos simpliciales abstractos . . . . .	53
3.2 Homología simplicial . . . . .	57
3.3 Complejo de cadenas . . . . .	61
3.4 Homomorfismos inducidos . . . . .	62
<b>4 Homologías de <math>M_n</math> y <math>K(M_n)</math></b>	<b>65</b>
4.1 Complejo de emparejamientos . . . . .	65
4.2 Módulos de homología reducida de $M_4$ . . . . .	67
4.3 Módulos de homología reducida de $M_5$ . . . . .	71
4.4 Módulos de homología reducida de $K(M_5)$ . . . . .	77

4.5	Módulos de homología reducida de $M_6$ . . . . .	84
4.6	Módulos de homología reducida de $K(M_6)$ . . . . .	90
<b>Bibliografía</b>		<b>99</b>

# Introducción

En matemáticas, como en otras ciencias, es importante descomponer cierto objeto en piezas y mejor aún si tales piezas son pequeñas. Por ejemplo, del teorema fundamental de la aritmética sabemos que todo número entero positivo puede ser expresado como producto de potencias de primos. En álgebra lineal, dado un operador lineal  $T$  en un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita es deseable descomponer a  $V$  en una suma directa de subespacios  $T$ -invariantes propios, es decir, cuando se aplica el operador a cada elemento del subespacio lo envía a otro elemento del mismo subespacio. Esta descomposición de  $V$  resulta útil, puesto que ciertas propiedades de  $T$  pueden ser inferidas a través de su comportamiento en cada uno de los sumandos directos, es decir, de la restricción de  $T$  a un subespacio  $T$ -invariante  $W$ . En el mejor de los casos, si  $T$  es diagonalizable, entonces  $V$  puede descomponerse en una suma directa de subespacios  $T$ -invariantes unidimensionales, que son los subespacios generados por los vectores de la base formada por los vectores propios de  $T$ .

En álgebra lineal se estudian espacios vectoriales sobre campos arbitrarios. Para nosotros, nos será útil el concepto de módulo, el cual es una generalización de espacio vectorial. Se obtiene la generalización simplemente reemplazando el campo por algún anillo. Ahora hagamos ciertas analogías relacionando algunos conceptos de la teoría de representaciones con el lenguaje ya conocido de álgebra lineal: asociamos módulo con espacio vectorial, submódulo con subespacio y submódulo irreducible con subespacio  $T$ -invariante.

A cada campo  $F$  y cada grupo  $G$  se le asocia un anillo denotado por  $F^G$  llamado el anillo de grupo. Estudiar módulos sobre el anillo de grupo  $F^G$  es equivalente a estudiar nuevas estructuras llamadas  $G$ -módulos, y estas a su vez son equivalentes a estudiar representaciones de  $G$  en  $V$ , donde  $V$  es un espacio vectorial sobre  $F$ . Usaremos tales conceptos según sea conveniente, por ejemplo, nos referimos a una representación de  $G$  en  $V$  cuando consideramos caracteres y  $G$ -módulos cuando descomponemos tales módulos en submódulos irreducibles.

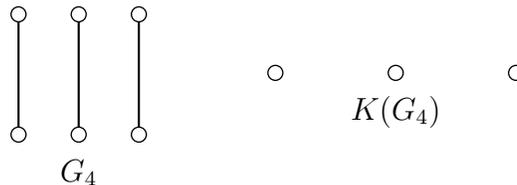
El teorema fundamental de la aritmética es análogo al teorema de Maschke ([15], teorema 1.5.3, p.16), el cual sigue la idea de descomponer a un módulo en sus piezas más pequeñas. El teorema de Maschke enuncia que, bajo ciertas hipótesis en el campo  $F$  y grupo  $G$  (que se cumplen para todo grupo finito  $G$  en caso de que  $F$  sea el campo de los números complejos), todo  $F^G$ -módulo es completamente reducible, es decir, es suma directa de submódulos irreducibles.

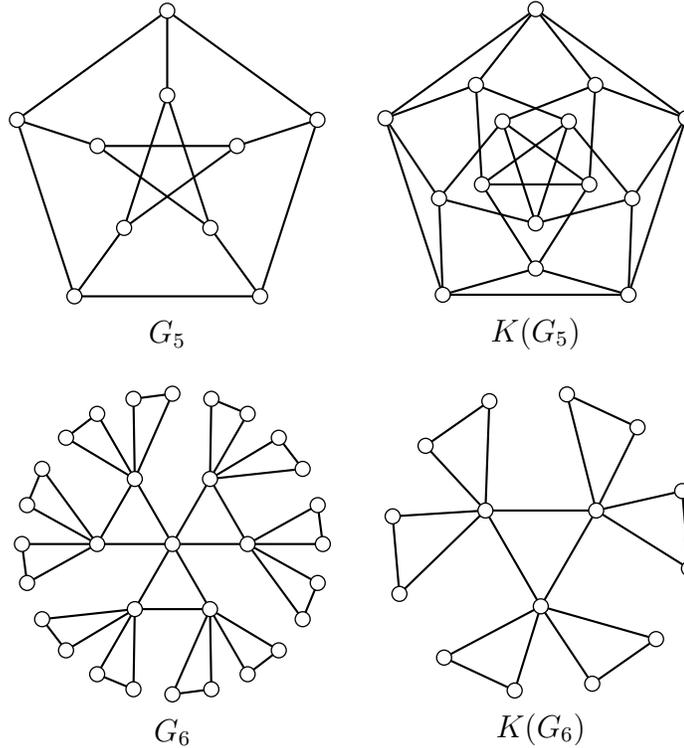
Nos interesa la llamada teoría ordinaria de representaciones de grupos finitos, en la cual se considera al grupo actuando en un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo de los números complejos y más generalmente sobre campos de característica que no divide al orden del grupo. Esta restricción en la característica es necesaria para que se cumplan las hipótesis del teorema de Maschke. Por otra parte, la teoría modular estudia módulos sobre anillos de grupo  $F^G$  donde la característica del campo  $F$  divide al orden del grupo  $G$ , en este caso pueden existir módulos que no son completamente reducibles, como se muestra en el ejemplo 1.6.8. En este trabajo no consideraremos la teoría modular.

Los  $G$ -módulos que estudiaremos resultan a partir de una construcción topológica que a continuación describimos. Un complejo simplicial  $\Delta$  está formado por un conjunto de vértices y una colección de subconjuntos de vértices, llamados simplejos, tal que si  $A$  es un elemento de  $\Delta$ , cada subconjunto no vacío de  $A$  pertenece a  $\Delta$ . A cada complejo simplicial se le puede asociar un espacio topológico  $|\Delta|$ , llamado su realización geométrica. Los complejos simpliciales son una herramienta fundamental para introducir conceptos topológicos dentro de la combinatoria.

Consideraremos complejos simpliciales obtenidos a partir de gráficas. Es decir, a cada gráfica  $G$  simple finita se le asocia un espacio topológico por medio del complejo simplicial  $\Delta(G)$ , cuyos simplejos son las subgráficas completas.

Estamos interesados en la gráficas de emparejamientos  $G_n$  las cuales se construyen a partir de gráficas completas de  $n$  vértices, a su vez,  $K(G_n)$  denota ciertas gráficas (llamadas gráficas de clanes) obtenidas a partir de  $G_n$ . Con estas gráficas se definen los complejos simpliciales  $M_n = \Delta(G_n)$  y  $K(M_n) = \Delta(K(G_n))$ . Todos los cálculos que realizamos son para  $n = 4, 5, 6$  y sus respectivas gráficas aparecen abajo.





La homología es una herramienta algebraica que puede entenderse como un modo de obtener información sobre espacios topológicos (en nuestro caso complejos simpliciales), por ejemplo, espacios homeomorfos tienen módulos de homología isomorfos. Aunque hay varias teorías de homología ([12, §26]), la homología que usamos en este trabajo es la homología simplicial, pues sus módulos de homología son fáciles de calcular comparados con los módulos de homología singular. Si  $G$  actúa en un complejo simplicial  $\Delta$ , los espacios de homología de  $\Delta$  con coeficientes en el campo de los números complejos serán denotados por  $H_{k-1}(\Delta)$ , y definen módulos sobre el grupo  $G$ .

La idea de este trabajo surge a partir del teorema de Bouc ([2], proposición 4, p.172]), el cual describe la descomposición del  $S_n$ -módulo  $H_{k-1}(M_n)$  en suma directa de submódulos irreducibles, en donde actúa el grupo simétrico  $S_n$ , para todo  $n, k \geq 1$ .

En este trabajo reproducimos el resultado de Bouc para  $n = 4, 5, 6$ , por medio de argumentos elementales de representaciones de grupos y topología. Además se calcula la descomposición en módulos irreducibles de  $H(K(M_n))$ , es decir, de los módulos de homología de los complejos simpliciales obtenidos a partir de la gráfica de clanes  $K(G_n)$  en donde también actúa el grupo simétrico  $S_n$ , con  $n = 5, 6$ .

En el primer capítulo se estudian conceptos de álgebra lineal, grupos, anillos, módulos, representaciones de grupos y gráficas, los cuales se usarán

en los capítulos posteriores. Siendo los conceptos más importantes el de representación de un grupo  $G$  en un espacio vectorial  $V$ ,  $G$ -módulos y  $F^G$ -módulos. Se enuncia el teorema de Maschke. Además, se definen las gráficas de emparejamientos, clanes y bipartita clásica.

En el segundo capítulo, estudiamos la relación entre tableros de Young y representaciones del grupo simétrico. Describimos la construcción de módulos de Specht los cuales dan una lista completa de las representaciones irreducibles de  $S_n$ .

El tema del capítulo 3 es el de los espacios de homología de complejos simpliciales. En la sección 3.1 se desarrollan conceptos como: complejo simplicial abstracto  $\Delta$ , espacio de cadenas  $C_p(\Delta)$ , el operador frontera  $\partial_p$ . En la sección 3.2, se define espacio de homología de un complejo simplicial. Se presentan los complejos de cadenas abstractos en la sección 3.3 y por último, en la sección 3.4, se definen espacios topológicos homotópicos, se menciona que los espacios de homología de espacios homotópicos son isomorfos y a las gráficas finitas se les asocia complejos simpliciales.

Finalmente, en el capítulo 4 se utilizará la teoría presentada en los capítulos anteriores. Se define el complejo de emparejamientos y se enuncia el teorema de Bouc. Además, calculamos la descomposición de los módulos de homología reducida de complejos de emparejamientos  $M_n$  en submódulos irreducibles, para  $n = 4, 5, 6$ . Este trabajo amplía los resultados de [14], pues de forma análoga se calculan los módulos de homología reducida de los complejos simpliciales obtenidos de las gráficas de clanes  $K(G_n)$ , para  $n = 5, 6$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

El objetivo de este capítulo es estudiar conceptos de álgebra lineal, álgebra abstracta (grupos, anillos y módulos), representaciones de grupos y teoría de gráficas, los cuales usaremos en los próximos capítulos.

En la sección 1.1 se revisan algunas definiciones y teoremas de espacios vectoriales y transformaciones lineales que usaremos en el desarrollo de este trabajo. Entre las definiciones que utilizamos frecuentemente son la suma directa de espacios vectoriales y espacio cociente. Se construye el espacio vectorial  $F^X$  con base  $X$  sobre el campo  $F$ . Las pruebas que se omiten se puede consultar en [4] y [6].

De la sección 1.2, los conceptos importantes son: grupo, homomorfismo e isomorfismo de grupos, grupo simétrico, acción de un grupo  $G$  en un conjunto no vacío. Las demostraciones de grupos que no incluiremos explícitamente se pueden encontrar en [3]. En la sección 1.3 y 1.4 se definen anillos y módulos respectivamente.

Se desarrollan conceptos de representaciones de grupos de la sección 1.5 a la sección 1.10. Más específicamente, en la sección 1.5 observamos que si  $F$  es un campo y  $G$  un grupo, se define la multiplicación en el espacio vectorial  $F^G$  construido en la sección 1.1 y se obtiene un anillo. Se muestra que estudiar  $F^G$ -módulos es equivalente a estudiar  $G$ -módulos, que a su vez, es equivalente a estudiar representaciones de  $G$  en  $V$ , donde  $V$  es un espacio vectorial sobre  $F$ . Se discute en la sección 1.6 el teorema de Maschke, el cual enuncia que, bajo ciertas hipótesis, cualquier  $G$ -módulo  $V$  se puede descomponer como suma directa de  $G$ -submódulos irreducibles. En la sección 1.7 consideramos el lema de Schur, pues la idea de su prueba es similar a las demostraciones de ciertas proposiciones posteriores de esta sección. Por otra parte, los caracteres de una representación nos proporcionan información acerca de esta, lo cual se describe con detalle en la sección 1.8. Además, por medio del producto interno de caracteres podemos determinar si una

representación es irreducible, cuándo dos representaciones son equivalentes; así como la multiplicidad de cierto submódulo irreducible en la descomposición de un  $G$ -módulo, entre otros teoremas que se muestran en la sección 1.9. En la sección 1.10, se expone la reciprocidad de Frobenius y la fórmula para obtener el carácter de una representación inducida.

El propósito de la sección 1.11 es definir gráficas, gráfica de emparejamientos, gráfica de clanes y gráfica bipartita clánica.

## 1.1 Álgebra lineal

En esta sección  $F$  denota un campo, y todos los espacios vectoriales se suponen sobre  $F$ .

**Definición 1.1.1.** Sean  $W_1$  y  $W_2$  dos subconjuntos no vacíos de un espacio vectorial  $V$ , la **suma** de  $W_1$  y  $W_2$ , que se expresa como  $W_1 + W_2$ , se define como el conjunto  $\{x + y : x \in W_1 \text{ y } y \in W_2\}$ . La suma de cualquier número finito de subconjuntos no vacíos de  $V$ :  $W_1, \dots, W_n$ , se define análogamente como el conjunto

$$W_1 + \dots + W_n = \{x_1 + \dots + x_n : x_i \in W_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}$$

Se tiene en general que si  $W_1$  y  $W_2$  son subespacios de  $V$ , entonces  $W_1 + W_2$  es subespacio de  $V$ .

**Definición 1.1.2.** Un espacio vectorial  $V$  es la **suma directa** de  $W_1$  y  $W_2$ , denotada como  $V = W_1 \oplus W_2$ , si  $W_1$  y  $W_2$  son subespacios de  $V$  tales que  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$  y  $W_1 + W_2 = V$ .

**Teorema 1.1.3.** ([4], corolario 1.13, p.53). *Sean  $W_1$  y  $W_2$  subespacios de  $V$  tales que  $V = W_1 + W_2$ . Luego,  $V = W_1 \oplus W_2$  si y solo si*

$$\dim(V) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

**Definición 1.1.4.** Sea  $W$  un subespacio de un espacio vectorial  $V$ . Para toda  $v \in V$  el conjunto  $\{v\} + W = \{v + w : w \in W\}$  se llama **clase lateral de  $W$** . Es frecuente expresar a esta clase lateral como  $v + W$  en vez de  $\{v\} + W$ .

Se puede demostrar lo siguiente:

- $v_1 + W = v_2 + W$  si y solo si  $v_1 - v_2 \in W$ .

Denotemos por  $V/W$  al conjunto de todas las clases laterales de  $W$ .

**Lema 1.1.5** ([6], lema 4.2, p.160). Sean  $V$  un espacio vectorial y  $W$  un subespacio de  $V$ , entonces  $V/W$  es un espacio vectorial, donde para  $v_1 + W, v_2 + W \in V/W$  y  $\lambda \in F$ , se define:

- $(v_1 + W) + (v_2 + W) = (v_1 + v_2) + W$  para todos  $v_1, v_2 \in V$ .
- $\lambda(v_1 + W) = \lambda v_1 + W$  para todo  $v_1 \in V$  y  $\lambda \in F$ .

Llamamos a  $V/W$  el **espacio cociente de  $V$  módulo  $W$** .

**Teorema 1.1.6.** ([6], lema 4.8, p.168). *Sea  $(V/W)$  el espacio cociente de  $V$  módulo  $W$ , se tiene:*

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W).$$

**Teorema 1.1.7.** ([4], corolario 2.3, p.69). *Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales y  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Si  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$ , entonces  $\text{im}(T) = \langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle$ .*

**Teorema 1.1.8.** ([4], teorema 2.22, p.98). *Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales de dimensión finita sobre el mismo campo  $F$ . Entonces  $V$  es isomorfo a  $W$  si y solo si  $\dim(V) = \dim(W)$ .*

**Teorema 1.1.9** (Teorema de isomorfismo). ([6], teorema 4.A, p.160). *Si  $f : V \rightarrow W$  es una transformación lineal, el espacio cociente  $V/\ker(f)$  es isomorfo a  $\text{im}(f)$ . Un isomorfismo entre estos dos espacios es el siguiente:*

$$\phi : V/\ker(f) \rightarrow \text{im}(f)$$

*definido por  $\phi(v + \ker(f)) = f(v)$ .*

A continuación, construiremos un espacio vectorial que usaremos más adelante en la sección 1.5.

Sea  $X$  un conjunto no vacío. Se define  $F^X$  como:

$$F^X = \{f : X \rightarrow F \mid \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \text{ es finito}\}.$$

**Lema 1.1.10.**  $F^X$  es un espacio vectorial, donde la suma y el producto por escalares están definidos como:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , donde  $f, g \in F^X$ ,
- $(rf)(x) = rf(x)$ , con  $r \in F$ .

*Demostración.* Para verificar que la suma está bien definida, verifiquemos que si  $f, g \in F^X$ , entonces  $(f+g) \in F^X$ . Sean  $f, g \in F^X$  y  $A, B$  subconjuntos finitos de  $X$ , tales que  $f(x) = 0$  para  $x \notin A$  y  $g(y) = 0$  para  $y \notin B$ . Notemos que  $A \cup B$  es un subconjunto finito de  $X$  y  $(f+g)(z) = 0$  para  $z \notin A \cup B$ , por tanto,  $(f+g) \in F^X$ . De forma similar, comprobemos que el producto por escalar está bien definido. Si  $r \in F$ ,  $f \in F^X$  y  $C$  es un subconjunto finito de  $X$ , tal que  $f(x) = 0$  para  $x \notin C$ , entonces  $(rf)(x) = 0$  para  $x \notin C$ , por tanto  $(rf) \in F^X$ . Es inmediato demostrar que se cumplan las otras condiciones de espacio vectorial.  $\square$

Consideremos la función  $\varphi : X \rightarrow F^X$ , tal que:

$$\varphi(x)(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \\ 0, & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Notemos que  $\varphi$  es inyectiva, puesto que si  $x, y \in X$  y  $x \neq y$ , entonces  $\varphi(x)(y) \neq \varphi(y)(y)$ , ya que  $\varphi(x)(y) = 0$  y  $\varphi(y)(y) = 1$ , así  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ . Se obtiene que  $\varphi(X)$  es un subconjunto de  $F^X$  que se identifica con  $X$ .

**Teorema 1.1.11.**  $\varphi(X)$  es base del espacio vectorial  $F^X$ .

*Demostración.* Sea  $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un subconjunto finito de  $X$ . Consideremos  $\sum_{x_i \in D} \lambda_{x_i} \varphi(x_i) = 0$ , con  $\lambda_{x_i} \in F$ . Sea  $y \in D$ , entonces

$$\sum_{x_i \in D} \lambda_{x_i} \varphi(x_i)(y) = \lambda_{x_j},$$

si  $y = x_j$ , entonces  $\lambda_{x_j} = 0$ . Por tanto,  $\{\varphi(x_i) \mid x_i \in D\}$  es linealmente independiente.

Por otra parte, sea  $E$  un subconjunto finito de  $X$ . Sea  $f \in F^X$ , tal que  $f(x) \neq 0$  para  $x \in E$ , tenemos:

$$\sum_{x \in X} f(x) \varphi(x) = \sum_{x \in E} f(x) \varphi(x) + \sum_{x \notin E} f(x) \varphi(x) = \sum_{x \in E} f(x) \varphi(x)$$

Ahora, tomemos  $y \in E$ , entonces  $\sum_{x \in E} f(x) \varphi(x)(y) = f(y)$ . Por tanto, se puede escribir a  $f$  como  $f = \sum_{x \in X} f(x) \varphi(x)$ .  $\square$

Por abuso de notación y ya que  $\varphi$  es inyectiva se identifica cada elemento  $x \in X$  con la función  $\varphi(x)$ . Con esta notación, cada elemento  $f$  del espacio vectorial  $F^X$  se escribe como combinación lineal de los elementos de  $X$ :

$$f = \sum_{x \in X} f(x)x. \quad (1.1)$$

## 1.2 Grupos

**Definición 1.2.1.** Una **operación binaria** en un conjunto  $G$  es una función de la forma  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$ . Para cada  $(a, b) \in G \times G$ , denotaremos al elemento  $*((a, b)) \in G$  por  $ab$ .

**Definición 1.2.2.**<sup>1</sup> Un **grupo** es un conjunto no vacío  $G$ , junto con una **operación binaria**  $*$  que satisface las siguientes condiciones:

1. La operación es asociativa, es decir,  $a(bc) = (ab)c$ , para todos  $a, b, c \in G$ .
2. Existe un elemento neutro  $1 \in G$  tal que  $a1 = 1a = a$ , para todo  $a \in G$ .
3. Para cada  $a \in G$ , existe  $a^{-1} \in G$  tal que  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ . A  $a^{-1}$  se le llama inverso de  $a$ .

Un grupo  $G$  es **abeliano** si para cualquier  $a, b \in G$  se tiene  $ab = ba$ .

El número de elementos de un grupo  $G$ , es el **orden** de  $G$ , y lo denotamos por  $|G|$ . Cuando  $|G|$  es finito, decimos que  $G$  es un **grupo finito**.

Enseguida se muestran ejemplos de grupos que usaremos posteriormente.

**Ejemplo 1.2.3.** El conjunto de matrices invertibles  $n \times n$  con entradas en un campo  $F$ , denotado como  $GL(n, F)$ , junto con el producto usual de matrices es un grupo.

**Ejemplo 1.2.4.** El conjunto de operadores lineales invertibles en un espacio vectorial  $V$  sobre el campo  $F$ , denotado por  $GL(V)$ , junto con la operación composición de operadores es un grupo.

**Definición 1.2.5.** Sea  $H$  un subconjunto no vacío del grupo  $G$ . Si  $h_1, h_2 \in H$  implica  $h_1h_2 \in H$ , el elemento neutro del grupo  $G$  está en  $H$  y dado  $h \in H$ , se tiene que  $h^{-1} \in H$ , decimos que  $H$  es un **subgrupo** de  $G$  y lo denotamos como  $H \leq G$ .

Sea  $G$  un grupo y  $g \in G$ , definimos las potencias de  $g$  como sigue:  $g^0 = 1$ ,  $g^1 = g$ ,  $g^2 = gg$ ,  $g^3 = gg^2$ ,  $\dots$ ,  $g^k = gg^{k-1}$  para  $k \geq 0$  y  $g^{-k} = (g^{-1})^k$  para  $k < 0$ . Se puede demostrar que se cumple  $g^n g^m = g^{n+m}$ , para cualesquiera  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

---

<sup>1</sup>Se puede definir grupo ([1], definición 1.2.1, p.21), cambiando 2 y 3 por las condiciones de que exista el neutro por la izquierda, es decir,  $1x = x$  y el inverso por la izquierda  $a^{-1}a = 1$ . Se puede demostrar posteriormente que también existe el neutro por la derecha, es decir,  $x1 = x$  y el inverso por la derecha,  $aa^{-1} = 1$ , como se hace en [1], teorema 1.2.2, p.22, para obtener la definición 1.2.2.

**Teorema 1.2.6** ([3], teorema 5.17, p.53). Si  $G$  un grupo y  $g \in G$ , el conjunto

$$\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

es un subgrupo de  $G$ . El grupo  $\langle g \rangle$  se llama **subgrupo cíclico generado** por  $g$ .

**Definición 1.2.7.** Un grupo  $G$  es un **grupo cíclico** si existe un elemento  $g \in G$  tal que  $G = \langle g \rangle$ . Al elemento  $g$  se le llama un **generador** de  $G$ .

**Teorema 1.2.8** ([16], teorema 3.5, p.25). Si  $C_n$  es un grupo cíclico finito de orden  $n$ , entonces los elementos de  $C_n$  son potencias positivas del generador  $g$  de  $C_n$ , desde  $g^0 = 1$  hasta  $g^{n-1}$ . Es decir:

$$C_n = \{1 = g^0, g, g^2, g^3, \dots, g^{n-1}\}.$$

**Definición 1.2.9.** Una **permutación de un conjunto**  $Y$  es una función biyectiva  $\pi : Y \rightarrow Y$ .

**Teorema 1.2.10.** ([3], teorema 8.5, p.77). Sea  $Y$  un conjunto no vacío y sea  $S_Y$  el conjunto de todas las permutaciones de  $Y$ . Entonces  $S_Y$  es un grupo con la operación dada por la composición de permutaciones.

**Definición 1.2.11.** Sea  $Y$  el conjunto finito  $\{1, 2, \dots, n\}$ . El grupo de todas las permutaciones de  $Y$  es el **grupo simétrico** y es denotado por  $S_n$ . Dado  $\pi \in S_n$ , usaremos la siguiente notación para designar a  $\pi$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

donde debajo de cada  $x \in Y$  se encuentra su imagen  $\pi(x) \in Y$ . Sea la **función identidad**  $\text{id}_n : Y \rightarrow Y$  dada por  $\text{id}_n(x) = x$ , para cualquier  $x \in Y$ .

**Definición 1.2.12.** Sea  $Y$  el conjunto finito  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Si  $\pi \in S_n$  es una permutación y  $x \in Y$  es un elemento, diremos que  $\pi$  fija a  $x$  si  $\pi(x) = x$ . En caso contrario, diremos que  $\pi$  mueve a  $x$ . Ahora, si  $i_1, i_2, \dots, i_k$  son enteros distintos que pertenecen a  $Y$  y si  $\pi \in S_n$  es tal que

$$\pi(i_1) = i_2, \pi(i_2) = i_3, \dots, \pi(i_{k-1}) = i_k, \pi(i_k) = i_1$$

y  $\pi$  fija a los elementos de  $Y$  distintos de  $i_1, i_2, \dots, i_k$ , entonces, diremos que  $\pi$  es un **ciclo de longitud**  $k$  o un  **$k$ -ciclo** y se denota por  $\pi = (i_1 i_2 \dots i_k)$ . Un ciclo de longitud 2 es una **transposición**. Algunas veces denotamos a la permutación identidad por  $\text{id}_n = (1)$ .

**Ejemplo 1.2.13.** Consideremos la permutación  $\pi \in S_5$ , dada por:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (124).$$

Así,  $\pi$  es un 3-ciclo.

**Definición 1.2.14.** Dos ciclos de un conjunto  $Y = \{1, 2, \dots, n\}$  son **disjuntos** si ningún elemento de  $Y$  es movido por ambos ciclos.

**Ejemplo 1.2.15.** Sea  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Los ciclos (125) y (346) son disjuntos, mientras que los ciclos (125) y (246) no lo son.

**Teorema 1.2.16.** ([16], teorema 4.5, p.35). *Si  $n \geq 2$ , toda permutación  $\pi \neq \text{id}_n$  en  $S_n$  se puede expresar de manera única, como producto de ciclos disjuntos de longitud  $\geq 2$ , salvo por el orden en el que aparecen los ciclos.*

**Definición 1.2.17.** Sea una permutación  $\pi \in S_n$ . La **estructura en ciclos** de  $\pi$  son las longitudes de los ciclos de la descomposición de  $\pi$  como producto de ciclos disjuntos. Listando las longitudes en orden decreciente.

**Ejemplo 1.2.18.**

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (123)(45).$$

Así,  $(123)(45) \in S_5$  tiene la estructura en ciclos (3,2).

**Definición 1.2.19.** Dos elementos  $g, g_1 \in G$  son **conjugados** si

$$g = hg_1h^{-1},$$

para algún  $h \in G$ . El conjunto de todos los elementos conjugados dado  $g$  es llamado **clase de conjugación** de  $g$  y es denotado por  $K_g$ .

**Teorema 1.2.20.** ([16], teorema 4.12, p.43). *Dos elementos de  $S_n$  son conjugados si y solo si tienen la misma estructura en ciclos.*

**Teorema 1.2.21.** ([3], corolario 9.12, p.90). *Toda permutación  $\pi \in S_n$  es producto de transposiciones.*

**Teorema 1.2.22.** ([3], teorema 9.15, p.91). *Sea  $\pi \in S_n$ . Si expresamos a  $\pi$  como  $\pi = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_k = \psi_1\psi_2 \cdots \psi_s$ , donde  $\tau_i$  y  $\psi_j$  son transposiciones para  $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, s$ , entonces  $k$  y  $s$  son ambos pares o bien ambos impares.*

**Definición 1.2.23.** Si  $G$  y  $H$  son grupos, entonces un **homomorfismo** de  $G$  en  $H$  es una función  $\rho : G \rightarrow H$  la cual satisface

$$\rho(ab) = \rho(a)\rho(b),$$

para todo  $a, b \in G$ . Si  $\rho$  es biyectiva diremos que  $\rho$  es un **isomorfismo**.

**Teorema 1.2.24.** ([3], teorema 13.2, p.128). *Sea  $\rho : G \rightarrow G'$  un homomorfismo de grupos. Entonces*

1.  $\rho(1) = 1'$ , donde  $1 \in G$  y  $1' \in G'$  son los neutros respectivos.
2. Si  $g \in G$ , entonces  $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$ .

Denotemos con  $S_Y$  al grupo de permutaciones de un conjunto  $Y$ . Del teorema de Cayley ([6], teorema 2.F, p.77) se deduce que cualquier grupo  $G$  es isomorfo a un subgrupo de  $S_Y$  para un conjunto  $Y$  suficientemente grande. Formalmente, esto significa que se puede construir un homomorfismo inyectivo  $f : G \rightarrow S_Y$ , así que  $G \cong f(G)$ . Cada permutación  $f(g) \in S_Y$  “representa” al elemento del grupo  $g \in G$ .

Si tenemos un homomorfismo  $\phi : G \rightarrow S_Y$ , no necesariamente inyectivo, el grupo  $G$  permuta el conjunto  $Y$  como sigue: dado  $\phi : G \rightarrow S_Y$ , y denotando a  $\phi(g)$  como  $\phi_g$ , se define  $*$  :  $G \times Y \rightarrow Y$  como  $g * y = \phi_g(y)$ . Por propiedades de homomorfismo esta función tiene las siguientes propiedades:

- $1 * y = \phi_1(y) = y$ ,
- $(gh) * y = \phi_{gh}(y) = \phi_g(y)\phi_h(y) = \phi_g(\phi_h(y)) = \phi_g(h * y) = g * (h * y)$ .

Abstrayendo estas propiedades, obtenemos la siguiente definición:

**Definición 1.2.25.** Sea  $G$  un grupo y  $X$  un conjunto no vacío. Una **acción de  $G$  en  $X$**  es una función  $*$  :  $G \times X \rightarrow X$  tal que

1.  $1 * x = x$  para todo  $x \in X$ .
2.  $(g_1g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$  para todo  $x \in X$  y  $g_1, g_2 \in G$ .

Bajo estas condiciones, también decimos que  $X$  es un  **$G$ -conjunto**. En ocasiones, por abuso de notación, escribiremos  $gx$  en lugar de  $g * x$ .

Por otro lado, dada una acción del grupo  $G$  en el conjunto  $Y$ , se puede definir un homomorfismo  $\phi : G \rightarrow S_Y$  por medio de  $\phi_g(y) = g * y$ . Esto establece una correspondencia biyectiva entre el conjunto de homomorfismos  $\phi : G \rightarrow S_Y$  y el conjunto de las acciones de  $G$  en  $Y$ .

## 1.3 Anillos

**Definición 1.3.1.** Un conjunto no vacío  $R$  se dice que es un **anillo** si en  $R$  están definidas dos operaciones suma y producto, denotadas por  $+$  y  $\cdot$  respectivamente, tal que  $R$  es un grupo abeliano bajo la suma y además:

1.  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ ,
2.  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ,
3.  $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ .

para cualesquiera  $a, b, c \in R$ .

Si existe un elemento  $1 \in R$  tal que  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$  para todo  $a \in R$ , diremos que  $R$  es un **anillo con identidad**.

Si la multiplicación de  $R$  es tal que  $a \cdot b = b \cdot a$  para todo  $a, b \in R$  entonces llamamos a  $R$  **anillo conmutativo**.

Un anillo con identidad es un **anillo con división** si sus elementos distintos de cero forman un grupo bajo la multiplicación.

Usaremos la notación  $ab$  en lugar de  $a \cdot b$ , para  $a, b \in R$ .

A continuación se muestran ejemplos de anillos.

**Ejemplo 1.3.2.** Un campo es un anillo conmutativo con división.

**Ejemplo 1.3.3.** El conjunto de los enteros  $\mathbb{Z}$  junto con la suma y la multiplicación usual forman un anillo conmutativo con identidad.

**Ejemplo 1.3.4.** El conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ , los números racionales  $\mathbb{Q}$  y los números complejos  $\mathbb{C}$  con las operaciones usuales son campos y por tanto también son anillos.

**Ejemplo 1.3.5.** El conjunto de matrices  $M_n(\mathbb{Z})$   $n \times n$  con entradas enteras es un anillo no conmutativo con identidad.

**Ejemplo 1.3.6.** ([8], teorema 3.1, p.160). Sea  $A$  un grupo abeliano, denotemos a los endomorfismos de  $A$  como el siguiente conjunto:

$$\text{End}(A) = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ es un homomorfismo de grupos}\}.$$

Sea  $f, g \in \text{End}(A)$ , definimos el producto  $fg$  por  $(fg)(x) = f(g(x))$  y la suma  $f + g$  por  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ . Entonces se puede demostrar que con estas operaciones,  $\text{End}(A)$  tiene estructura de anillo.

**Definición 1.3.7.** Sean  $R$  y  $R'$  anillos con identidades  $1_R$  y  $1_{R'}$  respectivamente. Un **morfismo de anillos** es una función  $\phi : R \rightarrow R'$  tal que:

1.  $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$ ,
2.  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ ,
3.  $\phi(1_R) = 1_{R'}$ ,

para  $a, b \in R$ .

En un anillo  $R$ , para  $a \in R$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , denotamos  $na = a + \cdots + a$ , donde hay  $n$  sumandos.

**Definición 1.3.8.** La **característica** de un anillo  $R$  es el menor entero positivo  $n$  tal que  $nx = 0$  para toda  $x \in R$ . Si no existe tal entero, decimos que  $R$  tiene característica cero.

La definición 1.3.8 se usará en el teorema 1.6.7.

## 1.4 Módulos

Sea  $R$  un anillo con identidad,  $A$  un grupo abeliano. Dado un morfismo de anillos  $\phi : R \rightarrow \text{End}(A)$ , y denotando a  $\phi(r)$  como  $\phi_r$ , se puede definir una acción de  $R$  en  $A : R \times A \rightarrow A$  por medio de:  $r \cdot a = \phi_r(a)$  para  $r \in R$  y  $a \in A$ . Con lo cual tenemos:

- $r \cdot (a + b) = \phi_r(a + b) = \phi_r(a) + \phi_r(b) = r \cdot a + r \cdot b$ ,
- $(r + s) \cdot a = \phi_{r+s}(a) = \phi_r(a) + \phi_s(a) = r \cdot a + s \cdot a$ ,
- $(rs) \cdot a = \phi_{rs}(a) = \phi_r(a)\phi_s(a) = \phi_r(\phi_s(a)) = \phi_r(s \cdot a) = r \cdot (s \cdot a)$ ,
- $1 \cdot a = \phi_1(a) = a$ .

para cualesquiera  $a, b \in A$  y  $r, s \in R$ . En adelante, escribiremos  $ra$  en lugar de  $r \cdot a$ .

Las propiedades anteriores nos sirven para definir la estructura algebraica de  $R$ -módulo.

**Definición 1.4.1.** Sea  $R$  un anillo con identidad. Se dice que un conjunto  $M$  es un  $R$ -**módulo** o **módulo** sobre  $R$  si  $M$  es un grupo abeliano bajo una operación  $+$ , tal que para cada  $r \in R$  y  $m \in M$  existe un elemento  $rm \in M$  de tal modo que:

1.  $r(m + n) = rm + rn$ ,
2.  $(r + s)m = rm + sm$ ,

$$3. (rs)m = r(sm),$$

$$4. 1m = m.$$

para cualesquiera  $m, n \in M$  y  $r, s \in R$ .

**Ejemplo 1.4.2.** Si  $R$  es un campo, cada espacio vectorial sobre  $R$  es de hecho un  $R$ -módulo.

Por otra parte, sea  $A$  un grupo abeliano y  $R$  un anillo con identidad. Dado  $A$  un  $R$ -módulo, definimos un morfismo de anillos  $\phi : R \rightarrow \text{End}(A)$  dado por:  $\phi_r(a) = ra$  para  $r \in R$  y  $a \in A$ . Por tanto tenemos una correspondencia biyectiva entre el conjunto de morfismos de anillos  $\phi : R \rightarrow \text{End}(A)$  y el conjunto de  $R$ -módulos  $A$ .

## 1.5 Representaciones de grupos

La idea básica de teoría de representaciones es estudiar grupos considerándolos como transformaciones lineales. Esto se hace como sigue: dado un grupo  $G$  y un espacio vectorial  $V$  sobre el campo  $F$ , se asocia a cada  $g \in G$  una transformación lineal  $\rho(g) \in GL(V)$  de manera que la función  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  es un homomorfismo de grupos llamado la **representación de  $G$  en  $V$** .

Dada cierta representación  $\rho$ , se sigue que  $\rho(G)$  es un subgrupo de  $GL(V)$ , al cual se le puede aplicar las ideas de álgebra lineal. Si  $\rho$  es inyectiva, entonces  $G \cong \rho(G)$ . En la práctica nos interesaría que el espacio vectorial  $V$  no sea muy grande, por lo cual supondremos en adelante que  $V$  es de dimensión finita.

Sea  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  una representación de  $G$  en  $V$ , denotamos a  $\rho(g)$  como  $\rho_g$ , se define una función  $*$  :  $G \times V \rightarrow V$  dada por  $g * v = \rho_g(v)$  para  $g \in G$  y  $v \in V$ . Como se hizo anteriormente, por abuso de notación escribiremos  $gv$  en lugar de  $g * v$ . Por las propiedades del homomorfismo de grupos  $\rho$ , conseguimos establecer la estructura de un  $G$ -módulo en la definición 1.5.1.

**Definición 1.5.1.** Sea  $G$  un grupo y  $V$  un espacio vectorial sobre el campo  $F$ . Una **acción lineal de  $G$  en  $V$**  es una función

$$* : G \times V \rightarrow V$$

que satisface los axiomas:

1.  $1v = v$ , para todo  $v \in V$  (donde 1 es el neutro de  $G$ ).

2.  $(g_1g_2)v = g_1(g_2v)$  para todos  $v \in V$  y  $g_1, g_2 \in G$ .
3.  $g_1(v + w) = g_1v + g_1w$ , para  $g_1 \in G$  y  $v, w \in V$ .
4.  $g_1(\lambda v) = \lambda(g_1v)$ , para  $\lambda \in F$ ,  $v \in V$  y  $g_1 \in G$ .

A un espacio vectorial  $V$  equipado con una acción lineal de  $G$  en  $V$  se le llama un  **$G$ -módulo**.

Inversamente a partir de una acción lineal de  $G$  en  $V$  se define una representación  $\rho : G \rightarrow V$  como  $\rho_g(v) = gv$  para  $g \in G$  y  $v \in V$ . Enseguida en el teorema 1.5.2 se demuestra con detalle la correspondencia biyectiva entre el conjunto de representaciones de  $G$  en  $V$  y el conjunto de acciones lineales de  $G$  en  $V$ .

**Teorema 1.5.2.** *Sea  $G$  un grupo y  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo  $F$ . Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de acciones lineales de  $G$  en  $V$  y el conjunto de representaciones de  $G$  en  $V$ .*

*Demostración.* Supongamos primero que se tiene una acción lineal

$$* : G \times V \rightarrow V$$

para cada  $g \in G$ , usando esta acción definamos la función  $\rho_g : V \rightarrow V$  dada por  $\rho_g v = gv$  para todo  $v \in V$ .

Enseguida demostraremos que  $\rho_g$  es una transformación lineal invertible. Sean  $v, w \in V$ ,  $\lambda \in F$ , entonces:

$$\begin{aligned}\rho_g(v + w) &= g(v + w) = gv + gw = \rho_g(v) + \rho_g(w), \\ \rho_g(\lambda v) &= g(\lambda v) = \lambda(gv) = \lambda\rho_g(v).\end{aligned}$$

Así que  $\rho_g$  es lineal, ahora veamos que es invertible. Como  $G$  es un grupo, existe  $g^{-1} \in G$ .

$$\begin{aligned}(\rho_g\rho_g^{-1})(v) &= \rho_g(\rho_g^{-1}(v)) = \rho_g(\rho_{g^{-1}}(v)) = \rho_g(g^{-1}v) = g(g^{-1}v) = (gg^{-1})v = v, \\ (\rho_g^{-1}\rho_g)(v) &= \rho_g^{-1}(\rho_g(v)) = \rho_{g^{-1}}(\rho_g(v)) = \rho_{g^{-1}}(gv) = g^{-1}(gv) = (g^{-1}g)v = v,\end{aligned}$$

por lo que  $\rho_g$  tiene como inversa a  $\rho_g^{-1}$ .

Ahora, observemos que la función  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  es un homomorfismo de grupos. Si  $g, h \in G$ , entonces para todo  $v \in V$ :

$$\rho_{gh}(v) = (gh)v = g(hv) = g(\rho_h(v)) = \rho_g(\rho_h(v)) = (\rho_g \circ \rho_h)(v) = (\rho_g\rho_h)(v)$$

por lo que  $\rho_{gh} = \rho_g\rho_h$ .

Suponga ahora que se tiene un homomorfismo de grupos  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ . Demostraremos que  $gv = \rho_g(v)$  define un acción lineal de  $G$  en  $V$ .

1. 1 es el neutro de  $G$ , entonces

$$1v = (\rho_1)v = 1_V(v) = v$$

para todo  $v \in V$ .

2. Si  $g, h \in G$  y  $v \in V$ , entonces

$$(gh)v = \rho_{gh}(v) = (\rho_g \circ \rho_h)(v) = \rho_g(\rho_h(v)) = g(\rho_h(v)) = g(hv).$$

3. Para  $g \in G$  y  $v, w \in V$ ,

$$g(v + w) = \rho_g(v + w) = \rho_g(v) + \rho_g(w) = gv + gw.$$

4. Para  $\lambda \in F$ ,  $v \in V$  y  $g \in G$ ,

$$g(\lambda v) = \rho_g(\lambda v) = \lambda \rho_g(v) = \lambda(gv).$$

como queríamos demostrar.  $\square$

Así, el teorema 1.5.2 dice que estudiar las representaciones de  $G$  en  $V$ , es equivalente a estudiar  $G$ -módulos  $V$ . En lo sucesivo, y como es usual en la literatura sobre representaciones de grupos, aplicaremos indistintamente conceptos definidos usando acciones lineales, o bien morfismos  $G \rightarrow GL(V)$ . Por ejemplo: más adelante definiremos la propiedad de que cierto  $G$ -módulo es irreducible. Diremos entonces que la representación  $G \rightarrow GL(V)$  asociada al módulo es irreducible.

Ahora seguimos la construcción del anillo de grupo dada en ([5], sección 3.4, p.36). Para un grupo  $G$ , cualquier representación de  $G$  asocia a cada elemento del grupo un operador lineal. Por tanto, en el contexto de teoría de representaciones, los grupos pueden ser considerados como conjuntos abstractos de operadores lineales. Consideremos al espacio vectorial  $F^G$  construido como en el lema 1.1.10, en donde  $X$  es el grupo  $G$ . Daremos al espacio vectorial  $F^G$  una operación multiplicación.

Si consideramos a los elementos del grupo  $G$  como operadores lineales invertibles podemos multiplicar elementos de  $F^G$  exactamente como multiplicaríamos sumas de transformaciones lineales:

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) \left(\sum_{h \in G} \mu_h h\right) = \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} \lambda_g \mu_h gh.$$

Esta definición de multiplicación convierte a el espacio vectorial  $F^G$  en un anillo con identidad, al cual llamamos **anillo de grupo de  $G$** .

Sea  $V$  un  $G$ -módulo, es decir, se tiene la acción lineal de  $G$  en  $V$

$$* : G \times V \rightarrow V,$$

entonces se define la acción lineal del anillo de grupo  $F^G$  en  $V$  justo como lo hace  $G$ , es decir, se define la función  $\cdot : F^G \times V \rightarrow V$  como:

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right)v = \sum_{g \in G} \lambda_g (gv),$$

para cada  $\sum_{g \in G} \lambda_g g \in F^G$  y  $v \in V$ . Así,  $V$  es un  $F^G$ -módulo.

Ahora supongamos que se tiene un módulo sobre  $F^G$ , bajo la restricción de  $G$ , se define un  $G$ -módulo, como la función  $* : G \times V \rightarrow V$  dada por:

$$gv = \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right)v$$

para cada  $g \in G$  y  $v \in V$ .

Resulta entonces que es equivalente estudiar  $F^G$ -módulos y  $G$ -módulos, ya que tenemos una correspondencia biyectiva entre estas estructuras.

Recordemos que  $GL(n, F)$  es el grupo de matrices invertibles  $n \times n$  con entradas en el campo  $F$  (ver ejemplo 1.2.3). Y  $GL(V)$  son los operadores lineales invertibles en un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita  $n$  sobre  $F$  (ver ejemplo 1.2.4). Cada base de  $V$  define un isomorfismo entre los grupos  $GL(V)$  y  $GL(n, F)$ .

**Definición 1.5.3.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo  $F$ . Una **representación matricial de un grupo  $G$**  es un homomorfismo de grupos

$$X : G \rightarrow GL(n, F),$$

notemos que esta es la definición de representación de  $G$  en  $V$ , simplemente resaltamos que para cada  $g \in G$ ,  $X(g)$  es la matriz invertible  $n \times n$  con entradas en  $F$ .

**Ejemplo 1.5.4** (Representación trivial). Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita  $n$  sobre un campo  $F$ . La representación trivial de un grupo  $G$  es el homomorfismo  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  dado por  $\rho(g) = 1_V$ , para todo  $g \in G$ , donde  $1_V$  es la función identidad  $1_V : V \rightarrow V$ .

**Ejemplo 1.5.5** (Representación signo). Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita  $n$  sobre un campo  $F$ . Si  $\pi \in S_n$  y  $\pi = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k$ , donde  $\tau_i$  son transposiciones (ver definición 1.2.12 y teorema 1.2.21), definimos la función signo  $\text{sgn} : S_n \rightarrow GL(V)$  mediante:

$$\text{sgn}(\pi) = (-1)^k 1_V,$$

debido al teorema 1.2.22, la función signo está bien definida.

**Ejemplo 1.5.6** (Módulo de permutaciones). Sean  $G$  un grupo,  $F$  un campo,  $X$  el conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  el cual es un  $G$ -conjunto y  $F^X$  el espacio vectorial construido como en el lema 1.1.10, es decir, si  $x \in F^X$ , podemos escribir a  $x$  como hicimos en la expresión 1.1, es decir:

$$V = F^X = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in F\}.$$

La suma y la multiplicación por escalar en  $F^X$  está definida por:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) + (\lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \dots + \lambda'_n x_n) \\ = (\lambda_1 + \lambda'_1) x_1 + (\lambda_2 + \lambda'_2) x_2 + \dots + (\lambda_n + \lambda'_n) x_n \end{aligned}$$

y

$$c(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) = (c\lambda_1) x_1 + (c\lambda_2) x_2 + \dots + (c\lambda_n) x_n,$$

respectivamente. Sean  $v \in V$ , con  $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$  y  $g \in G$ , entonces la acción de  $G$  en  $V$  está dada por

$$gv = g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1(gx_1) + \lambda_2(gx_2) + \dots + \lambda_n(gx_n).$$

Así,  $F^X$  resulta ser un  $G$ -módulo de dimensión  $|X|$ . A  $F^X$  le llamamos **módulo de permutaciones**. Los elementos del conjunto  $X$  forman una base para  $F^X$ .

Por ejemplo, el grupo simétrico  $S_n$  actuando en el conjunto de los números naturales desde el 1 hasta  $n$ .

$$F^n = \{\lambda_1 1 + \lambda_2 2 + \dots + \lambda_n n \mid \lambda_i \in F\},$$

sea  $\pi \in S_n$ , la acción es

$$\pi(\lambda_1 1 + \lambda_2 2 + \dots + \lambda_n n) = \lambda_1 \pi(1) + \lambda_2 \pi(2) + \dots + \lambda_n \pi(n).$$

Consideremos un caso específico, el de  $S_2 = \{(1), (12)\}$  actuando en el conjunto  $\{1, 2\}$ . Determinemos las matrices asociadas respecto a la base  $\{1, 2\}$ . Para  $\pi = (12)$ , calculamos  $(12)1=2$  y  $(12)2=1$ . Así que

$$X((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la otra representación matricial  $X((1))$  es:

$$X((1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Entonces  $F^2$  es un  $S_2$ -módulo de permutaciones.

**Ejemplo 1.5.7** (Módulo regular). Sea  $G$  un grupo y  $F$  un campo. Un caso particular del ejemplo 1.5.6, es cuando  $X = G$ , es decir,  $G$  actúa sobre el espacio vectorial  $F^G$  con el producto usual de grupo. De modo que,  $F^G$  es un  $G$ -módulo, al cual llamamos **módulo regular**.

## 1.6 Reducibilidad

En esta sección,  $G$  denota un grupo finito y  $V$  un  $G$ -módulo. Como se dijo anteriormente, en adelante aplicaremos indistintamente los conceptos definidos para  $G$ -módulos  $V$  como para representaciones de  $G$  en  $V$ . Para ejemplificar esto, definimos los conceptos de submódulo y módulo irreducible, así como también escribimos sus definiciones equivalentes en el lenguaje de representaciones, es decir, subrepresentación y representación irreducible.

**Definición 1.6.1.** Un  **$G$ -submódulo** de  $V$  es un subespacio vectorial  $W$  que es invariante bajo la acción de  $G$ , es decir,  $gw \in W$  para todos  $w \in W$ ,  $g \in G$ , tal que  $W$  junto con la acción de  $G$  es en sí mismo un  $G$ -módulo. Escribiremos  $W \leq V$  si  $W$  es submódulo de  $V$ .

**Definición 1.6.2.** Sean  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  una representación de  $G$  en  $V$  y  $W$  un subespacio vectorial de  $V$ . Diremos que  $W$  es **invariante** bajo  $G$  si para cualquier  $g \in G$  y  $w \in W$  se tiene que  $\rho_g(w) \in W$ . Si  $W$  es invariante bajo  $G$ , se sigue que la restricción de  $\rho$  a  $W$  es una representación de  $G$  en  $W$ . Diremos entonces que  $\rho_W : G \rightarrow GL(W)$  es una **subrepresentación** de  $\rho$ .

**Ejemplo 1.6.3.** Cualquier  $G$ -módulo  $V$  tiene a los submódulos  $0$  y  $V$ . Estos dos submódulos son llamados triviales.

**Definición 1.6.4.** Sea  $V$  un  $G$ -módulo no trivial. Decimos que  $V$  es **irreducible** si los únicos submódulos de  $V$  son  $0$  y  $V$ . Esta definición de  $G$ -módulo irreducible es equivalente al de representación **irreducible**, es decir si  $\rho$  es una representación de  $G$  en  $V$ , sus únicas subrepresentaciones son  $\rho$  y  $\rho_0$ .

**Ejemplo 1.6.5.** Todo  $G$ -módulo  $V$  de dimensión 1 es irreducible, ya que los únicos subespacios posibles son el  $0$  y  $V$ .

**Definición 1.6.6.** Se dice que  $V$  es **completamente reducible**, si  $V$  se descompone en suma directa de submódulos irreducibles, es decir,

$$V = W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus \dots \oplus W^{(k)},$$

donde cada  $W^{(i)}$  es un  $G$ -submódulo irreducible de  $V$ . Nos referiremos en ocasiones a tal descomposición de  $V$  simplemente como una descomposición en irreducibles.

**Teorema 1.6.7** (Teorema de Maschke). ([15], teorema 1.5.3, p.16). *Sea  $F$  un campo tal que su característica no divide al orden de  $G$ . Entonces  $V$  es completamente reducible.*

En el siguiente ejemplo, no se cumple la hipótesis del teorema de Maschke, pues la característica del campo divide al orden del grupo. Y en este ejemplo  $V$  no es completamente reducible.

**Ejemplo 1.6.8.** Sea el campo  $F = \{0, 1\}$  y  $G = C_2 = \{g^0, g^1\}$  el grupo cíclico de dos elementos. Sea el espacio vectorial  $V = F^2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , donde  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Definimos la función  $\phi : G \rightarrow GL(V)$  como:

$$\phi(g^r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix},$$

la cual determina un homomorfismo de grupos.

Queremos determinar si la estructura de  $G$ -módulo de  $V$  tiene algún submódulo propio. Como  $V$  tiene dimensión 2, un submódulo propio  $W$  deberá tener dimensión 1, es decir, sería generado por un elemento diferente de cero.

Primero notemos que los subespacios  $\langle v_3 \rangle$  y  $\langle v_4 \rangle$  no son invariantes.

$$g^1 v_3 = \phi(g^1) v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_4,$$

como  $v_4 \notin \langle v_3 \rangle$ , por tanto el subespacio  $\langle v_3 \rangle$  no es invariante, es decir,  $\langle v_3 \rangle$  no es submódulo propio de  $V$ .

$$g^1 v_4 = \phi(g^1) v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_3,$$

similarmente,  $v_3 \notin \langle v_4 \rangle$ , el subespacio  $\langle v_4 \rangle$  no es submódulo propio de  $V$ .

A continuación se verifica que  $\langle v_2 \rangle = \{v_1, v_2\}$  es el único submódulo propio de  $V$ , pues  $\langle v_2 \rangle$  es invariante bajo la acción de  $G$ , ya que  $g^0 v_1 = v_1$ ,  $g^1 v_1 = v_1$ ,  $g^0 v_2 = v_2$  y

$$g^1 v_2 = \phi(g^1) v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2.$$

Por tanto,  $V$  no es completamente reducible, es decir, no podemos escribir a  $V$  como  $V \cong \langle v_2 \rangle \oplus W$ , pues el submódulo  $W$  debería tener dimensión 1, y el único submódulo con dimensión 1 es  $\langle v_2 \rangle$ .

Debido a que queremos usar el teorema de Maschke,  $F$  será un campo de característica cero. Así, todo  $G$ -módulo será completamente reducible.

## 1.7 $G$ -homomorfismo y lema de Schur

**Definición 1.7.1.** Dados dos  $G$ -módulos  $V$  y  $W$ . Un  $G$ -**homomorfismo** (o simplemente un **homomorfismo**) es una transformación lineal  $\phi : V \rightarrow W$  tal que

$$\phi(gv) = g\phi(v),$$

para todo  $g \in G$  y  $v \in V$ . Decimos entonces que  $\phi$  *preserva* la acción de  $G$ .

**Definición 1.7.2.** Dados dos  $G$ -módulos  $V$  y  $W$ . Un  $G$ -**isomorfismo** es un  $G$ -homomorfismo  $\phi : V \rightarrow W$  el cual es biyectivo. En este caso decimos que  $V$  y  $W$  son  $G$ -**isomorfos** y lo denotaremos como  $V \cong W$ .

**Definición 1.7.3.** Sean  $G$  un grupo y  $V, W$  espacios vectoriales. Si  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  y  $\rho' : G \rightarrow GL(V')$  son dos representaciones de  $G$ , diremos que son **isomorfas** si existe un isomorfismo  $f : V \rightarrow V'$  tal que para todo  $g \in G$  se tiene que  $f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f$ .

**Ejemplo 1.7.4.** Del ejemplo 1.5.6, un submódulo de  $F^n$  de dimensión  $n - 1$  es:

$$E = \left\{ (\lambda_1 1 + \lambda_2 2 + \cdots + \lambda_n n) \in F^n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \right\}.$$

Este submódulo se llama **módulo estándar**.

Tenemos también que  $T = \{ \lambda_1 1 + \lambda_2 2 + \cdots + \lambda_n n \mid \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n \}$  es submódulo de  $F^n$ , el cual tiene dimensión 1 y de hecho es isomorfo a la representación trivial. Se sigue que:

$$F^n = E \oplus T.$$

**Proposición 1.7.5.** ([15], proposición 1.7.9, p.21). *Sean  $V, W$   $G$ -módulos y  $\phi : V \rightarrow W$  un  $G$ -homomorfismo. Entonces*

1.  $\ker \phi$  es un  $G$ -submódulo de  $V$ , y
2.  $\text{im } \phi$  es un  $G$ -submódulo de  $W$ .

Si  $W$  es submódulo de  $V$ , entonces en el espacio cociente  $V/W$  puede darse una acción de  $G$  como  $g(v + W) = gv + W$ , la cual está bien definida (pues  $W$  es invariante bajo la acción de  $G$ ), y satisface los axiomas de módulo sobre  $G$ , por lo que obtenemos una estructura de  $G$ -módulo en  $V/W$  llamada **módulo cociente**.

**Teorema 1.7.6** (Teorema de isomorfismo de módulos). *Sea  $\phi : V \rightarrow W$  un  $G$ -homomorfismo. Entonces el módulo cociente  $V/\ker \phi$  es isomorfo a  $\text{im } \phi$  por medio de  $v + \ker \phi \mapsto \phi(v)$ .*

**Teorema 1.7.7** (Lema de Schur). *Si  $V$  y  $W$  son  $G$ -módulos irreducibles, y  $\phi : V \rightarrow W$  es un  $G$ -homomorfismo no trivial, entonces  $\phi$  es un isomorfismo.*

*Demostración.* Como  $\ker \phi \leq V$ , y  $V$  es irreducible, entonces  $\ker \phi = 0$  o  $\ker \phi = V$ , pero  $\ker \phi \neq V$  pues  $\phi$  es no trivial, así que  $\ker \phi = 0$  y por lo tanto,  $\phi$  es inyectiva.

Análogamente,  $\text{im } \phi \leq W$  e  $\text{im } \phi \neq 0$ , así que  $\text{im } \phi = W$  y entonces  $\phi$  es suprayectiva.  $\square$

**Proposición 1.7.8.** *Sean  $V, W$  dos  $G$ -módulos. Sea  $f : V \rightarrow W$  un  $G$ -homomorfismo, y supongamos  $S \leq V$  con  $S$  irreducible. Entonces  $f(S) \cong S$  o  $f(S) = 0$ .*

*Demostración.* Tomemos el siguiente  $G$ -homomorfismo  $S \xrightarrow{i} V \xrightarrow{f} W$  donde  $i$  es la función inclusión. Así, por el teorema 1.7.6,  $S/\ker(f \circ i) \cong \text{im}(f \circ i)$ . Como  $\ker(f \circ i) \leq S$  entonces  $\ker(f \circ i) = 0$  o  $\ker(f \circ i) = S$ , pues  $S$  es irreducible.

Si  $\ker(f \circ i) = 0$ , se sigue que

$$S \cong S/0 \cong \text{im}(f \circ i) = f(S).$$

Por otro lado, si  $\ker(f \circ i) = S$ , tenemos

$$0 = S/S \cong \text{im}(f \circ i) = f(S).$$

como queríamos demostrar.  $\square$

Otra manera de pensar en la demostración anterior es observar que  $\ker f \cap S \leq S$ , por lo que  $\ker f \cap S = 0$  o bien  $\ker f \cap S = S$ . En el primer caso se tiene que  $f$  envía inyectivamente a  $S$  dentro de  $W$ , por lo cual  $S \cong f(S)$ . En el segundo caso, todos los elementos de  $S$  están en  $\ker f$ , por lo cual  $f(S) = 0$ .

Como se puede observar en [6, p. 194], si  $V$  es un  $G$ -módulo, se obtiene que la intersección de cualquier colección de submódulos de  $V$  es un submódulo de  $V$ , y además si  $W_1, W_2$  son submódulos de  $V$ , se tiene que  $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$  es un  $G$ -submódulo de  $V$ .

**Proposición 1.7.9.** *Sea  $V$  un  $G$ -módulo. Supongamos que  $S \leq V$ , donde  $S$  es irreducible. Supongamos además que  $S$  tiene multiplicidad 1 en la descomposición en irreducibles de  $V$ , y sea  $S' \leq V$ , tal que  $S' \cong S$ . Entonces  $S = S'$ .*

*Demostración.* Consideremos  $S \cap S' \leq S$ , así que  $S \cap S' = 0$  o  $S \cap S' = S$ , pues  $S$  es irreducible.

Como  $S$  y  $S'$  son submódulos de  $V$ , se tiene que  $S + S'$  es submódulo de  $V$ . Ahora, si  $S \cap S' = 0$ , la suma directa  $S \oplus S'$  es submódulo de  $V$ , así que  $V$  tendría un submódulo isomorfo a dos copias de  $S$ , lo cual no es posible por hipótesis.

Por otro lado, si  $S \cap S' = S$ , entonces  $\dim(S \cap S') = \dim(S)$ , además por hipótesis  $S \cong S'$ , así  $\dim(S) = \dim(S')$ . Por tanto,  $\dim(S \cap S') = \dim(S')$  y dado que  $S \cap S' \leq S'$ , tenemos que  $S \cap S' = S'$ , con lo que  $S = S'$ . Como se quería demostrar.  $\square$

Nótese que la conclusión de la proposición 1.7.9 es que no existe en  $V$  un submódulo isomorfo a  $S$  que no sea exactamente el mismo  $S$ . Esto resultará muy útil en los cálculos de las homologías en los capítulos siguientes.

## 1.8 Caracteres de representaciones

En esta sección,  $F$  es un campo. Mucha información contenida en una representación  $X : G \rightarrow GL(n, F)$  puede ser obtenida de la traza de  $X(g)$  con  $g \in G$ . De esto se ocupa la teoría de caracteres.

**Definición 1.8.1.** Sea  $X(g)$  una representación matricial con  $g \in G$ . Entonces el **carácter** de  $X$  es

$$\chi(g) = \text{tr} \circ X(g),$$

donde  $\text{tr}$  denota la traza de una matriz dada. Dicho de otro modo,  $\chi$  es la función

$$G \xrightarrow{\text{tr} \circ X} F.$$

Si  $V$  es un  $G$ -módulo, se define el carácter de  $V$  como el carácter de una representación de  $G$  en  $V$  (por propiedades de la traza, el carácter no depende de la base de  $V$  escogida). En ocasiones, para resaltar que el carácter corresponde al  $G$ -módulo  $V$  lo denotaremos como  $\chi_V$ .

Parte de la terminología utilizada para representaciones se usará para los correspondientes caracteres. Por ejemplo, si  $X$  tiene carácter  $\chi$ , diremos que  $\chi$  es irreducible siempre que  $X$  lo sea.

Se muestra al final de esta sección, un ejemplo de cómo calcular caracteres de la representación trivial, signo y estándar con la acción de  $S_3$ .

**Proposición 1.8.2.** ([15], proposición 1.8.5, p.32). *Sea  $G$  un grupo finito y sea  $\chi$  el carácter de una representación  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  de grado  $n$ . Entonces,*

1.  $\chi(1) = n$ .
2. Si  $K$  es una clase de conjugación de  $G$ , entonces  $\chi(g) = \chi(h)$  para  $g, h \in K$ .

**Definición 1.8.3.** Una **función de clase** es una función  $\theta : G \rightarrow F$  que es constante en clases de conjugación de  $G$ , es decir, si  $K$  es una clase de conjugación de  $G$ , entonces  $\theta(g) = \theta(h)$  para  $g, h \in K$ . El conjunto de todas las funciones de clase en  $G$  es denotado por  $R(G)$ .

Un ejemplo de funciones de clase son los caracteres (ver proposición 1.8.2).

La suma de funciones de clase es una función de clase y el producto por escalar de una función de clase es una función de clase, por lo que se sigue que  $R(G)$  es un subespacio vectorial del espacio de todas las funciones de  $G$  en  $F$ .

Seguindo a Isaacs ([7], §2, p.15), en adelante, para que se cumpla el teorema de Maschke y el teorema 1.8.4, el campo  $F$  serán los números complejos  $\mathbb{C}$ . Sin embargo, se puede trabajar con cualquier campo algebraicamente cerrado de característica que no divida a  $|G|$  o bien el campo de los elementos algebraicos en  $\mathbb{C}$ , es decir, el campo de los números complejos que son raíz de algún polinomio con coeficientes enteros.

**Teorema 1.8.4.** ([15], proposición 1.10.1, p.40, proposición 1.10.2, p.42). Sea  $G$  un grupo finito. Entonces,

1. Los caracteres irreducibles  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r$  de  $G$  forman una base del espacio de funciones de clase  $R(G)$ .
2. La cantidad de distintas representaciones irreducibles de  $G$ , salvo isomorfismos, es igual a la cantidad de clases de conjugación de  $G$ .

En general no se logra una correspondencia biyectiva natural entre las representaciones de  $G$  y las clases de conjugación. Sin embargo, en el siguiente capítulo observamos que en el caso del grupo simétrico sí se cuenta con esta correspondencia.

Si  $K$  es una clase de conjugación y  $\chi$  es un carácter, se define  $\chi_K$  el valor del carácter en la clase dada.

$$\chi_K = \chi(g)$$

para cualquier  $g \in K$ . Esto sugiere la definición de tabla de caracteres de un grupo.

**Definición 1.8.5.** Sea  $G$  un grupo finito. La **tabla de caracteres** de  $G$  es una tabla cuyos renglones están indexados por los caracteres irreducibles de  $G$  y las columnas indexadas por las clases de conjugación. La entrada de la tabla en el renglón  $\chi$  y la columna  $K$  es

$$\begin{array}{c|ccc} & \cdots & K & \cdots \\ \hline \vdots & & \vdots & \\ \chi & \cdots & \chi_K & \\ \vdots & & & \end{array}$$

Por convención, el primer renglón corresponde al carácter trivial, y la primera columna corresponde a la clase identidad  $K = (1)$ .

**Ejemplo 1.8.6.** Sea  $G = S_3$ . A continuación calcularemos el carácter  $\chi_V(g)$  de tres  $S_3$ -módulos  $V$  y elementos  $g \in S_3$ . Basta calcular  $\chi_V : S_3 \rightarrow \mathbb{C}$  en representantes de cada clase de conjugación de  $S_3$ , como  $(1)$ ,  $(12)$  y  $(123)$ .

Primero consideremos  $V = \mathbb{C}$ , la representación trivial. El espacio  $V$  es de dimensión 1 (por lo que  $\chi_V$  es la traza de la matriz  $1 \times 1$ ) y tiene a  $1 \in \mathbb{C}$  como base. Tenemos que  $(1)1 = 1$ , por lo que  $\chi_V((1)) = 1$ , así también  $(12)1 = 1$  y  $(123)1 = 1$ , se sigue que  $\chi_V((12)) = 1$  y  $\chi_V((123)) = 1$ .

Ahora denotemos al espacio de representación de la representación signo como  $V = \hat{\mathbb{C}}$ . Nuevamente  $\dim V = 1$ , pero  $(1)1 = 1$ ,  $(12)1 = -1$  y  $(123)1 = 1$ , por lo que  $\chi_V((1)) = 1$ ,  $\chi_V((12)) = -1$  y  $\chi_V((123)) = 1$ .

Por último, sea  $V = E$ , la representación estándar. Es decir,

$$E \cong \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

En este caso,  $\dim V = 2$ , y una base de  $E$  es  $\beta = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ . Si  $g = (1)$ , entonces la matriz asociada a  $g_V$  en la base dada es la matriz identidad  $2 \times 2$ , por lo que  $\chi_V((1)) = 2$ .

Por otro lado, si  $g = (12)$ , tenemos:

$$\begin{aligned} (12)(1, -1, 0) &= (-1, 1, 0) = -1(1, -1, 0) + 0(1, 0, -1), \\ (12)(1, 0, -1) &= (0, 1, -1) = -1(1, -1, 0) + 1(1, 0, -1) \end{aligned}$$

por lo que

$$[g_V]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

así que  $\chi_V((12)) = 0$ .

Finalmente, si  $g = (123)$ , tenemos:

$$\begin{aligned}(123)(1, -1, 0) &= (0, 1, -1) = -1(1, -1, 0) + 1(1, 0, -1), \\ (123)(1, 0, -1) &= (-1, 1, 0) = -1(1, -1, 0) + 0(1, 0, -1)\end{aligned}$$

por lo que

$$[g_V]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

así que  $\chi_V((123)) = -1$ .

Con los cálculos realizados obtenemos la tabla de caracteres de  $S_3$  (ver tabla 1.1). El primer renglón indica el número de elementos en cada clase de conjugación, y en el segundo renglón se coloca un elemento representativo de cada clase de conjugación.

	1	3	2
$S_3$	(1)	(12)	(123)
$\chi_{\mathbb{C}}$	1	1	1
$\chi_{\hat{\mathbb{C}}}$	1	-1	1
$\chi_E$	2	0	-1

Tabla 1.1: Tabla de caracteres de  $S_3$

Las tablas de caracteres que utilizaremos en el capítulo 4 se encuentran en [9], §16, p.159.

## 1.9 Producto interno de caracteres

Mediante el producto interno de caracteres podemos determinar si una representación es irreducible o cuándo dos representaciones son equivalentes. Además de otros resultados que veremos a continuación.

**Definición 1.9.1.** Si  $\chi, \psi$  son funciones de  $G$  en  $\mathbb{C}$ , definimos el producto interno de  $\chi$  y  $\psi$  como:

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}.$$

**Teorema 1.9.2.** ([15], teorema 1.9.3, p.35). Sean  $V$  y  $W$  representaciones irreducibles de un grupo  $G$  con caracteres  $\chi, \psi$  respectivamente. Entonces

$$\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi\psi} := \begin{cases} 1, & \text{si } V \cong W \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Corolario 1.9.3.** ([15], corolario 1.9.4, p.37). Sea  $V$  un  $G$ -módulo con carácter  $\chi_V$  y supongamos que

$$V \cong m_1V^{(1)} \oplus m_2V^{(2)} \oplus \cdots \oplus m_kV^{(k)},$$

donde  $V^{(1)}, \dots, V^{(k)}$  son  $G$ -módulos irreducibles no isomorfos entre sí y  $m_i$  denota la multiplicidad de  $V_i$ , es decir la cantidad de sumandos directos isomorfos a  $V^{(i)}$  en la descomposición en irreducibles de  $V$ . Entonces

1.  $\chi_V = m_1\chi_{V^{(1)}} + m_2\chi_{V^{(2)}} + \cdots + m_k\chi_{V^{(k)}}$ .
2.  $\langle \chi_V, \chi_{V^{(j)}} \rangle = m_j$  para cada  $j$ .
3.  $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_k^2$ .
4.  $V$  es un  $G$ -módulo irreducible si y solo si  $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ .
5. Sea  $W$  otro  $G$ -módulo con carácter  $\chi_W$ . Entonces

$$V \cong W \text{ si y solo si } \chi_V(g) = \chi_W(g)$$

para cada  $g \in G$ .

En el siguiente ejemplo se calcula el producto interno entre caracteres.

**Ejemplo 1.9.4.** Del ejemplo 1.8.6, calculamos los siguientes productos internos basados en los valores de la tabla 1.1:

$$\begin{aligned} \langle \chi_C, \chi_C \rangle &= \frac{1}{6}(1(\chi_C(1))(\chi_C(1)) + 3(\chi_C(12))(\chi_C(12)) + 2(\chi_C(123))(\chi_C(123))) \\ &= \frac{1}{6}(1(1)(1) + 3(1)(1) + 2(1)(1)) = 1, \\ \langle \chi_{\widehat{C}}, \chi_{\widehat{C}} \rangle &= \frac{1}{6}(1(1)(1) + 3(-1)(-1) + 2(1)(1)) = 1, \\ \langle \chi_E, \chi_E \rangle &= \frac{1}{6}(1(2)(2) + 3(0)(0) + 2(-1)(-1)) = 1. \end{aligned}$$

Por el inciso 4 del corolario 1.9.3, las representaciones trivial, signo y estándar son representaciones irreducibles de  $S_3$ .

**Corolario 1.9.5.** Sean  $V$  y  $W$   $G$ -módulos, entonces  $\langle \chi_V, \chi_W \rangle$  es un número entero no negativo.

*Demostración.* Sea  $\{V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(k)}\}$  una lista completa de  $G$ -submódulos irreducibles. Escribimos a  $V$  como  $V \cong m_1V^{(1)} \oplus m_2V^{(2)} \oplus \cdots \oplus m_kV^{(k)}$  y a  $W$  como  $W \cong r_1V^{(1)} \oplus r_2V^{(2)} \oplus \cdots \oplus r_kV^{(k)}$  por el teorema de Maschke

(ver teorema 1.6.7), donde  $m_i$  y  $r_i$  es la multiplicidad del módulo irreducible  $V^{(i)}$ , se sigue que

$$\begin{aligned}\langle \chi_V, \chi_W \rangle &= \langle \chi_V, r_1 \chi_{V^{(1)}} + r_2 \chi_{V^{(2)}} + \cdots + r_k \chi_{V^{(k)}} \rangle \\ &= r_1 \langle \chi_V, \chi_{V^{(1)}} \rangle + r_2 \langle \chi_V, \chi_{V^{(2)}} \rangle + \cdots + r_k \langle \chi_V, \chi_{V^{(k)}} \rangle \\ &= r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_k m_k,\end{aligned}$$

así que  $\langle \chi_V, \chi_W \rangle$  es un entero no negativo.  $\square$

## 1.10 Caracteres y módulos inducidos

Dados un grupo  $G$  con subgrupo  $H \leq G$ , hay una forma de obtener representaciones de  $G$  a partir de representaciones de  $H$  y viceversa, usando operaciones de restricción e inducción.

**Definición 1.10.1.** Sea  $H$  un subgrupo de  $G$  y sea  $V$  un  $G$ -módulo. Si para  $h \in H$ ,  $v \in V$  definimos  $hv$  por medio de la estructura de  $G$ -módulo en  $V$ , se obtiene una acción lineal de  $H$  en  $V$ . El  $H$ -módulo obtenido se denota con  $V \downarrow_H^G$  y se le llama **restricción** de  $V$  de  $G$  a  $H$ .

Notemos que  $\chi_{V \downarrow_H^G} = \chi_V \downarrow_H^G$ .

Habiendo obtenido de manera sencilla una representación de  $H$  a partir de una de  $G$  por medio de restricción, definiremos ahora un procedimiento, llamado inducción, para obtener una representación del grupo  $G$  a partir de una representación de su subgrupo  $H$ . La inducción resultará muy útil en los siguientes capítulos para obtener una expresión simplificada de un  $G$ -módulo  $V$  a partir de una elección juiciosa de un subgrupo adecuado  $H$  de  $G$  y subespacio  $W$  de  $V$ .

**Proposición 1.10.2.** Una función de clase  $\theta : G \rightarrow \mathbb{C}$  es un carácter si y solo si  $\theta \neq 0$  y  $\langle \theta, \chi \rangle$  es un entero no negativo para todo carácter irreducible  $\chi$  de  $G$ .

*Demostración.* Si  $\theta$  es un carácter, entonces  $\theta(1) > 0$ , por lo tanto  $\theta \neq 0$ . Además, por el inciso 2 del corolario 1.9.3,  $\langle \theta, \chi \rangle$  es un entero no negativo si  $\chi$  es irreducible.

Supongamos ahora  $\langle \theta, \chi_j \rangle = a_j$  para  $j = 1, \dots, k$ , donde  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$  forman una colección completa de caracteres irreducibles y  $a_j$  es un entero no negativo. Por el corolario 1.9.3 se obtiene que  $\theta = \sum_{j=1}^k a_j \chi_j$ , de donde  $\theta$  es el carácter del módulo  $a_1 V^{(1)} \oplus a_2 V^{(2)} \oplus \cdots \oplus a_k V^{(k)} \neq 0$ .  $\square$

**Definición 1.10.3.** Sean  $H \leq G$  y  $\theta : H \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Definimos la función  $\theta \uparrow_H^G : G \rightarrow \mathbb{C}$  como:

$$\theta \uparrow_H^G (g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}gx \in H}} \theta(x^{-1}gx). \quad (1.2)$$

Decimos que la función  $\theta \uparrow_H^G$  es **inducida** por la función  $\theta$ .

En la suma del lado derecho de la ecuación 1.2, dado  $g \in G$ , los sumandos están indexados por los elementos  $x \in G$  tales que  $x^{-1}gx \in H$ . Una expresión equivalente puede obtenerse por medio del concepto de transversal. Si  $H$  es un subgrupo no necesariamente normal de  $G$ , una **transversal izquierda** de  $H$  en  $G$  es una colección de representantes de las clases laterales izquierdas de  $H$ , de modo que si  $T = \{t_1, \dots, t_s\}$  entonces  $G = t_1H \cup \dots \cup t_sH$ .

Observemos que si  $H \leq G$ , y  $x, g \in G$  son tales que  $x^{-1}gx \in H$ , entonces para todo  $h \in H$  se tiene que  $(xh)^{-1}g(xh) = h^{-1}(x^{-1}gx)h \in H$ . Recíprocamente, si  $(xh)^{-1}g(xh) \in H$ , entonces  $x^{-1}gx \in H$ . Además, si  $\theta$  es una función de clase,  $\theta(h^{-1}(x^{-1}gx)h) = \theta(x^{-1}gx)$ . Es decir, el hecho de que  $x^{-1}gx \in H$  depende únicamente de la clase lateral donde esté  $x$ , y similarmente, el valor de la función  $\theta(x^{-1}gx)$  es constante para todo  $x$  en una clase lateral fija.

Puesto que toda clase lateral tiene  $|H|$  elementos, se tiene que si  $\theta : H \rightarrow \mathbb{C}$  es una función de clase, podemos calcular a  $\theta \uparrow_H^G$  por medio de la fórmula:

$$\theta \uparrow_H^G (g) = \sum_{\substack{x \in T, \\ x^{-1}gx \in H}} \theta(x^{-1}gx). \quad (1.3)$$

Por ejemplo, tenemos que:

$$\theta \uparrow_H^G (1) = \sum_{\substack{x \in T, \\ x^{-1}1x \in H}} \theta(x^{-1}1x) = \sum_{\substack{x \in T, \\ 1 \in H}} \theta(1) = |T|\theta(1) = [G : H]\theta(1).$$

donde  $[G : H]$  es el número de clases laterales de  $H$  en  $G$ , llamado el *índice* de  $H$  en  $G$ .

**Proposición 1.10.4.** Si  $H \leq G$  y  $\theta : H \rightarrow \mathbb{C}$  es una función de clase, entonces  $\theta \uparrow_H^G : G \rightarrow \mathbb{C}$  es una función de clase.

*Demostración.* Para  $g, y \in G$  tenemos que

$$\begin{aligned}
\theta \uparrow_H^G (ygy^{-1}) &= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}(ygy^{-1})x \in H}} \theta(x^{-1}ygy^{-1}x) \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G \\ (y^{-1}x)^{-1}g(y^{-1}x) \in H}} \theta((y^{-1}x)^{-1}g(y^{-1}x)) \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{yu \in G \\ u^{-1}gu \in H}} \theta(u^{-1}gu) \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{u \in G \\ u^{-1}gu \in H}} \theta(u^{-1}gu) \\
&= \theta \uparrow_H^G (g)
\end{aligned}$$

en donde se hizo el cambio de variable  $u = y^{-1}x$  (esto es  $x = yu$ ), y notamos que  $yu \in G$  si y solo si  $u \in G$ .  $\square$

En el teorema siguiente ocupamos el concepto de producto interno de funciones de la definición 1.9.1.

**Teorema 1.10.5** (Reciprocidad de Frobenius). *Sea  $H \leq G$  y  $\theta : H \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$  funciones de clase. Entonces*

$$\langle \theta \uparrow_H^G, \phi \rangle = \langle \theta, \phi \downarrow_H^G \rangle.$$

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \theta \uparrow_H^G, \phi \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \theta \uparrow_H^G (g) \overline{\phi(g)} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G \\ x^{-1}gx \in H}} \theta(x^{-1}gx) \right) \overline{\phi(g)} \\
&= \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{\{(g,x) | g,x \in G, x^{-1}gx \in H\}} \theta(x^{-1}gx) \overline{\phi(g)}.
\end{aligned}$$

Aquí hacemos el cambio de variable  $u = x^{-1}gx$ , de donde  $g = xux^{-1}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{\{(xux^{-1}, x) \mid xux^{-1}, x \in G, u \in H\}} \theta(u) \overline{\phi(xux^{-1})} \\ &= \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{\{(xux^{-1}, x) \mid xux^{-1}, x \in G, u \in H\}} \theta(u) \overline{\phi(u)} \\ &= \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} |G| \sum_{u \in H} \theta(u) \overline{\phi(u)} \end{aligned}$$

pues si  $u \in H$ , entonces  $xux^{-1} \in G$  para todo  $x \in G$ , y además  $\phi(xux^{-1}) = \phi(u)$ , por ser  $\phi$  una función de clase

$$= \langle \theta, \phi \downarrow_H^G \rangle$$

como queríamos demostrar.  $\square$

**Corolario 1.10.6.** *Si  $H \leq G$  y  $\theta : H \rightarrow \mathbb{C}$  es un carácter, entonces la función  $\theta \uparrow_H^G : G \rightarrow \mathbb{C}$  es un carácter.*

*Demostración.* Ya sabemos que  $\theta \uparrow_H^G$  es una función de clase. Aplicamos el criterio de la proposición 1.10.2. Tenemos que  $\theta \uparrow_H^G(1) = [G : H]\theta(1) > 0$  y si  $\chi$  es un carácter irreducible de  $G$ , entonces

$$\langle \theta \uparrow_H^G, \chi \rangle = \langle \theta, \chi \downarrow_H^G \rangle,$$

el cual es un entero no negativo, pues es el producto interno de dos caracteres (ver corolario 1.9.5). El resultado se sigue entonces de la proposición 1.10.2.  $\square$

Supondremos en lo que resta de esta sección que  $G$  es un grupo,  $H$  un subgrupo de  $G$  y  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_s\}$  una transversal izquierda de  $H$  en  $G$  fija, donde  $t_1 = 1$ .

Si  $W$  es un  $H$ -módulo, el corolario 1.10.6 implica que  $(\chi_W) \uparrow_H^G$  es un carácter. Queremos encontrar un  $G$ -módulo  $V$  tal que  $\chi_V = (\chi_W) \uparrow_H^G$ .

**Definición 1.10.7.** Sea  $V$  un  $G$ -módulo, y  $W$  un subespacio de  $V$  tal que  $\{g \in G \mid gW = W\} = H$  (de modo que  $W$  tiene estructura de  $H$ -módulo). Decimos que el  $G$ -módulo  $V$  es **inducido** por el  $H$ -módulo  $W$  si  $V = \bigoplus_{i=1}^s t_i W$  como espacio vectorial.

Notemos que la definición no depende de la transversal escogida, pues si  $t = t'h$  con  $h \in H$ , entonces  $tW = t'hW = t'W$ .

**Proposición 1.10.8.** *Si el  $G$ -módulo  $V$  es inducido por el  $H$ -módulo  $W$ , entonces  $\chi_V = (\chi_W) \uparrow_H^G$ .*

*Demostración.* Si  $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$  es base de  $W$ , entonces para  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ , se tiene que  $t_j\beta = \{t_jw_1, \dots, t_jw_r\}$  es base de  $t_jW$  y por lo tanto,  $\gamma = \bigcup_{j=1}^s t_j\beta$  es base de  $V$ . Dado  $g \in G$ , calcularemos  $\chi_V(g)$  usando esa base. Así,

$$\chi_V(g) = \text{tr}([g]_\gamma) = \sum_{\{j|gt_jW=t_jW\}} \text{tr}([g]_{t_j\beta}), \quad (1.4)$$

donde usamos el hecho de que  $V = \bigoplus_{i=1}^s t_iW$  y de que la acción de  $g$  permuta los sumandos, pues si  $gt_j = t_ih$  con  $t_i \in T$ ,  $h \in H$ , entonces  $gt_jW = t_ihW = t_iW$ . Al cálculo de la traza contribuyen exactamente los sumandos tales que  $gt_jW = t_jW$ .

Tenemos que  $gt_jW = t_jW$  si y solo si  $t_j^{-1}gt_jW = W$ , y por nuestras hipótesis, esto sucede si y solo si  $t_j^{-1}gt_j \in H$ . Veamos que  $[g]_{t_j\beta} = [t_j^{-1}gt_j]_\beta$ , si  $t_j^{-1}gt_j \in H$ . Tomemos  $w_k \in \beta$ , y escribamos a  $gt_jw_k$  como:

$$gt_jw_k = \lambda_1 t_jw_1 + \dots + \lambda_r t_jw_r$$

de modo que,

$$t_j^{-1}gt_jw_k = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r$$

por tanto,

$$[g(t_jw_k)]_{t_j\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = [t_j^{-1}gt_j(w_k)]_\beta.$$

De donde  $[g]_{t_j\beta} = [t_j^{-1}gt_j]_\beta$  siempre que  $t_j^{-1}gt_j \in H$ . Por lo anterior, tenemos que

$$\text{tr}([g]_{t_j\beta}) = \text{tr}([t_j^{-1}gt_j]_\beta) = \chi_W(t_j^{-1}gt_j).$$

si  $t_j^{-1}gt_j \in H$ .

Continuando la ecuación 1.4:

$$\begin{aligned} \chi_V(g) &= \text{tr}([g]_\gamma) = \sum_{\{j|gt_jW=t_jW\}} \text{tr}([g]_{t_j\beta}) \\ &= \sum_{\substack{t_j \in T, \\ t_j^{-1}gt_j \in H}} \chi_W(t_j^{-1}gt_j) = (\chi_W) \uparrow_H^G (g). \end{aligned}$$

en donde en la última igualdad, hemos usado la ecuación 1.3.  $\square$

Por lo tanto, dado un grupo finito  $G$  con subgrupo  $W$ , y dado  $W$  un  $H$ -módulo, hemos definido el concepto de  $G$ -módulo inducido  $W \uparrow_H^G$ . Además, también hemos definido una operación de inducción en funciones de clase, de tal modo que el carácter de un módulo inducido  $W \uparrow_H^G$  es igual a la inducción del carácter  $\chi_W$ .

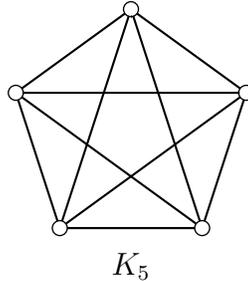
## 1.11 Gráficas

**Definición 1.11.1.** Una **gráfica**  $G$  consiste de un conjunto finito no vacío  $V = V(G)$  de  $p$  **vértices** junto con un conjunto  $E = E(G)$  de  $q$  pares no ordenados de vértices distintos pertenecientes al conjunto  $V(G)$ . Cada par  $e = \{u, v\}$  de vértices en  $E$  es una **arista** de  $G$ , y se dice que  $e$  une a  $u$  y  $v$ . Escribimos a  $e = uv$  y decimos que  $u$  y  $v$  son **adyacentes**. Dos aristas  $e$  y  $f$  son **ajenas** si  $e \cap f = \emptyset$ . Un **camino** es una sucesión finita de vértices tal que exista una arista entre cada vértice y el siguiente.

Una manera natural de ver una gráfica es poner puntos para los vértices y una línea entre dos puntos si los vértices correspondientes son adyacentes.

**Definición 1.11.2.** Decimos que  $G$  es una gráfica **completa** si para todos  $u, v \in V(G)$  con  $u \neq v$  se tiene que  $uv \in E(G)$ . Una gráfica completa con  $n$  vértices se denota como  $K_n$ .

**Ejemplo 1.11.3.** Gráfica completa de 5 vértices.

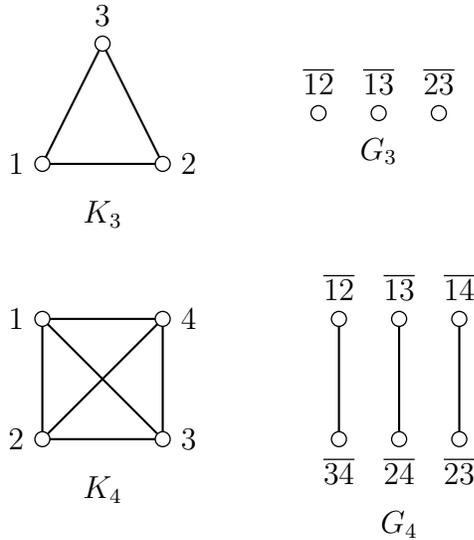


**Definición 1.11.4.** Consideremos la gráfica completa de  $n$  vértices  $K_n$  cuyos vértices están etiquetados como  $1, 2, \dots, n$ . Además  $\overline{ij}$  denotará la arista que une al vértice  $i$  con el vértice  $j$  (donde  $\overline{ij} = \overline{ji}$ ).

Llamaremos **gráfica de emparejamientos** de orden  $n$  a la gráfica  $G_n$  tal que:

1. Su conjunto de vértices  $V(G_n)$  consta de las aristas de la gráfica  $K_n$ .
2. Si  $v_i = \overline{pq}$  y  $v_j = \overline{rs}$  están en  $V(G_n)$ ,  $\{v_i, v_j\}$  es una arista en  $E(G_n)$  si  $v_i$  y  $v_j$  son aristas ajenas de  $K_n$ , es decir, si  $\{p, q\} \cap \{r, s\} = \emptyset$ .

**Ejemplo 1.11.5.** A continuación se muestran ejemplos de gráficas de emparejamientos, obtenidas a partir de su respectiva gráfica completa.



**Definición 1.11.6.** Sea  $S$  un conjunto y  $F = \{S_1, \dots, S_p\}$  una familia de subconjuntos distintos no vacíos de  $S$  cuya unión es  $S$ . La **gráfica de intersección** de  $F$  es denotada por  $\Omega(F)$  y definida por  $V(\Omega(F)) = F$ , con  $S_i$  y  $S_j$  adyacentes siempre que  $i \neq j$  y  $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ .

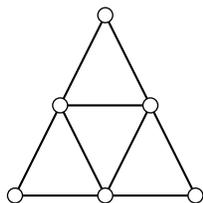
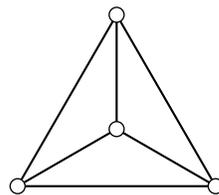
**Definición 1.11.7.** Una gráfica  $H$  se llama **subgráfica** de  $G$  si tiene todos sus vértices y aristas en  $G$ , es decir,  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ .

**Definición 1.11.8.** Un **clan** de una gráfica es una subgráfica completa maximal, es decir, no está contenida en ninguna otra subgráfica completa.

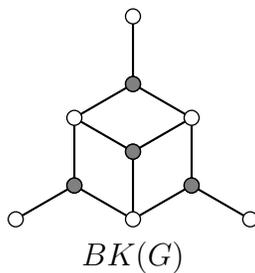
**Definición 1.11.9.** La **gráfica de clanes** de una gráfica dada  $G$  es la gráfica de intersección de la familia de clanes de  $G$ . Denotemos a la gráfica de clanes de  $G$  como  $K(G)$ .

**Ejemplo 1.11.10.** Los clanes de la gráfica de la figura 1.1 son sus cuatro subgráficas completas de 3 vértices. Como los cuatro clanes se intersecan dos a dos, la gráfica  $K_4$  de la figura 1.2 es la gráfica de clanes de  $G$  de la figura 1.1.

**Definición 1.11.11.** La **gráfica bipartita clánica** de  $G$  es definida como la gráfica  $BK(G)$  con  $V(BK(G)) = V(G) \cup V(K(G))$ , donde  $x \in V(G)$ ,  $c \in V(K(G))$  son adyacentes si  $x \in c$  y no hay otras adyacencias.

Figura 1.1:  $G$ Figura 1.2:  $K(G)$ 

**Ejemplo 1.11.12.** Sea  $G$  la gráfica de la figura 1.1. La gráfica bipartita clásica de  $G$  se muestra enseguida, donde los vértices en color gris corresponden a los clanes de  $G$  y los vértices restantes son los vértices de  $G$ .



## Capítulo 2

# Tableros de Young y representaciones del grupo simétrico

En este capítulo estudiamos la relación entre representaciones o módulos del grupo simétrico  $S_n$  y objetos combinatorios llamados tableros de Young. Continuaremos usando los términos representación y módulo indistintamente. Definiremos los tableros de Young en la sección 2.1, pero por ahora es suficiente decir que es el llenado de cierta configuración de cajas con elementos del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Un ejemplo se muestra a continuación:

1	2	4
3	5	6
7	8	
9		

Hay una elegante descripción de representaciones irreducibles de  $S_n$  mediante los tableros de Young. Recordemos que hay tres representaciones irreducibles de  $S_3$  (ver ejemplo 1.9.4), las cuales pueden ser descritas usando el conjunto de diagramas de Young con tres cajas. La correspondencia es ilustrada abajo.



Representación trivial.



Representación signo.



Representación estándar.

En general, las representaciones irreducibles de  $S_n$  pueden ser descritas usando diagramas de Young de  $n$  cajas. Además, podemos dar una base

para cada representación irreducible usando tableros de Young estándar, los cuales consisten en numerar las cajas de un diagrama de Young con  $1, 2, \dots, n$  tal que los renglones y las columnas sean crecientes. Por ejemplo, las base de la representación estándar de  $S_3$  corresponde a los siguientes dos tableros estándar:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

En este capítulo, describimos la relación entre los tableros de Young y representaciones de  $S_n$ . Las pruebas son omitidas, pero pueden encontrarse en el segundo capítulo de [15].

En la sección 2.1, introducimos diagramas de Young y tableros de Young. En la sección 2.2, introducimos los tabloides y los usamos para construir una representación de  $S_n$  conocida como módulo de permutación  $M^\lambda$ . Sin embargo, los módulos de permutación son generalmente reducibles. En la sección 2.3 construimos representaciones irreducibles de  $S_n$  conocidos como módulos de Specht  $S^\lambda$ , los cuales son submódulos del correspondiente  $M^\lambda$ . Los módulos de Specht  $S^\lambda$  corresponden biyectivamente a los diagramas de Young de forma  $\lambda$  y forman una lista completa de representaciones irreducibles de  $S_n$ .

## 2.1 Tablero de Young

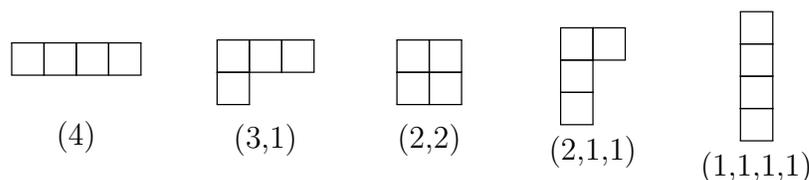
Primero establecemos algunas definiciones y notaciones considerando particiones y diagramas de Young.

**Definición 2.1.1.** Una **partición** de un entero positivo  $n$  es una sucesión de enteros positivos  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  que satisface  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$  y  $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l$ . Escribimos  $\lambda \vdash n$  para denotar que  $\lambda$  es una partición de  $n$ .

Por ejemplo, el número 4 tiene cinco particiones:  $(4)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 1)$ . Podemos también representar particiones usando diagramas de Young como sigue.

**Definición 2.1.2.** Si  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  es una partición de  $n$ , entonces el **diagrama de Young** de  $\lambda$  consiste de  $n$  cajas colocadas en  $l$  renglones alineados a la izquierda, donde el  $i$ -ésimo renglón tiene  $\lambda_i$  cajas.

Por ejemplo, los diagramas de Young correspondientes a las particiones del 4 son:

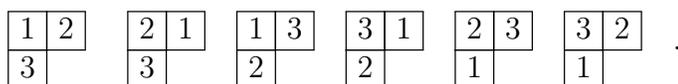


Existe una correspondencia biyectiva entre particiones y diagramas de Young, y nosotros usaremos los dos términos indistintamente.

Un tablero de Young es obtenido llenando las cajas de un diagrama de Young con números naturales.

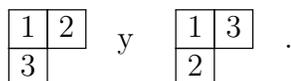
**Definición 2.1.3.** Sea  $\lambda \vdash n$ . Un **tablero  $t$  (de Young) de forma  $\lambda$** , se obtiene llenando las cajas de un diagrama de Young para  $\lambda$  con  $1, 2, \dots, n$ , los cuales aparecen exactamente una vez. En este caso, decimos que  $t$  es un  $\lambda$ -tablero.

Por ejemplo, aquí están todos los tableros correspondientes a la partición  $(2, 1)$ :

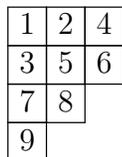


**Definición 2.1.4.** Un **tablero (de Young) estándar** es un tablero de Young cuyas entradas son crecientes en cada renglón y columna.

Los únicos tableros estándar para  $(2, 1)$  son:



Otro ejemplo de un tablero estándar es:



Antes de seguir adelante, recordaremos algunos hechos básicos sobre permutaciones. Cada permutación  $\pi \in S_n$  tiene una descomposición en ciclos disjuntos. Por ejemplo,  $(123)(45)$  denota la permutación que envía  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  e intercambia al 4 y 5 (si  $n > 5$ , entonces por convención los otros elementos permanecen fijos por  $\pi$ ). Recordemos que dos elementos de  $S_n$  son conjugados si y solo si tienen la misma estructura en ciclos (teorema 1.2.20). Esto significa que las clases de conjugación de  $S_n$  están

caracterizadas por la estructura en ciclos, y en consecuencia corresponden a las particiones de  $n$ , los cuales son equivalentes a los diagramas de Young de tamaño  $n$ . Recordemos del teorema 1.8.4, que el número de representaciones irreducibles de un grupo finito es igual al número de sus clases de conjugación. Así, nuestro objetivo en las próximas dos secciones es construir una representación irreducible de  $S_n$  correspondiente a cada diagrama de Young.

## 2.2 Tabloides y módulo de permutación $M^\lambda$

En esta sección, construimos representaciones de  $S_n$  usando clases de equivalencia de los tableros, conocidas como tabloides.

**Definición 2.2.1.** Dos  $\lambda$ -tableros  $t_1$  y  $t_2$  son **equivalentes por renglones**, denotado como  $t_1 \sim t_2$ , si los correspondientes renglones de los dos tableros contienen los mismos elementos. Un **tabloide** de forma  $\lambda$ , o  $\lambda$ -tabloide es la clase de equivalencia

$$\{t\} = \{t_1 \mid t_1 \sim t\}.$$

El tabloide  $\{t\}$  es dibujado como el tablero  $t$  sin las barras verticales.

Por ejemplo, si

$$t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

entonces  $\{t\}$  es el tabloide dibujado como

$$\overline{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}}$$

el cual representa la clase de equivalencia que contiene a los siguientes tableros:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} .$$

Como consecuencia de nuestras definiciones, el orden de las entradas entre cada renglón es irrelevante. Por ejemplo:

$$\overline{\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & \end{array}} = \overline{\begin{array}{ccc} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & \end{array}} \neq \overline{\begin{array}{ccc} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & \end{array}} .$$

Pretendemos definir una representación de  $S_n$  en un espacio vectorial cuya base es exactamente el conjunto de tabloides de una forma dada. Necesitamos una forma para que los elementos de  $S_n$  actúen en los tabloides, lo cual, se logra dejando que las permutaciones intercambien las entradas del tabloide.

Por ejemplo, el ciclo  $(123) \in S_3$  actúa en el tabloide reemplazando el 1 por el 2, el 2 por el 3 y el 3 por el 1, como se muestra abajo:

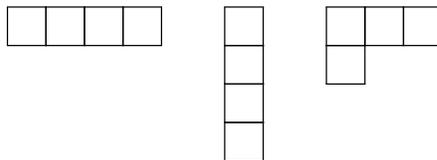
$$(123) \frac{\overline{1 \ 2}}{\underline{3}} = \frac{\overline{2 \ 3}}{\underline{1}} .$$

Debemos comprobar que esta acción está bien definida, esto es, si  $t_1$  y  $t_2$  son equivalentes por renglones, es decir,  $\{t_1\} = \{t_2\}$ , entonces el resultado de la permutación debe ser el mismo, esto es,  $\pi\{t_1\} = \pi\{t_2\}$ . Esto es claro, pues  $\pi$  simplemente da la instrucción de mover algún número de un renglón a otro.

Ahora que hemos definido una forma para que  $S_n$  actúe en los tabloides, podemos definir una representación de  $S_n$ . Recordemos que una representación de un grupo  $G$  en un espacio vectorial  $V$  sobre el campo de los números complejos es equivalente a extender a  $V$  a un  $G$ -módulo, por lo que usaremos el término módulo para describir representaciones.

**Definición 2.2.2.** Sea  $\lambda \vdash n$ .  $M^\lambda$  denota el espacio vectorial cuya base es el conjunto de  $\lambda$ -tabloides. Entonces  $M^\lambda$  es una representación de  $S_n$  conocida como **módulo de permutación correspondiente a  $\lambda$** .

Mostraremos algunos ejemplos de los módulos de permutación  $M^\lambda$ . Los módulos obtenidos a partir de los siguientes diagramas de Young son de hecho representaciones conocidas.



**Ejemplo 2.2.3.** Consideremos  $\lambda = (n)$ . Así que  $M^\lambda$  es el espacio vectorial generado por un solo tabloide:

$$\frac{\overline{1 \ 2 \ \cdots \ n}}{\underline{\quad}}$$

donde el tabloide está fijo por  $S_n$ , por lo que  $M^\lambda$  es una representación trivial de dimensión uno.

**Ejemplo 2.2.4.** Consideremos  $\lambda = (1^n) = (1, 1, \dots, 1)$ . Entonces un  $\lambda$ -tabloide es simplemente una permutación  $\{1, 2, \dots, n\}$  en  $n$  renglones y  $S_n$  actúa en los tabloides haciendo actuar la correspondiente permutación. Se sigue que  $M^{(1,1,\dots,1)}$  es isomorfo a la representación regular de  $S_n$  (ver ejemplo 1.5.7).

**Ejemplo 2.2.5.** Consideremos  $\lambda = (n - 1, 1)$ . Sea  $\{t_i\}$  un  $\lambda$ -tabloide con  $i$  en el segundo renglón. Entonces  $M^\lambda$  tiene base  $\{t_1\}, \{t_2\}, \dots, \{t_n\}$ . También, note que la acción de  $\pi \in S_n$  envía  $t_i$  a  $t_{\pi(i)}$ . Así,  $M^{(n-1,1)}$  es isomorfo a la representación  $F\mathbb{I}_n$  (ver ejemplo 1.5.6).

Por ejemplo, si  $n = 4$ , la representación  $M^{(3,1)}$  tiene la siguiente base:

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \quad t_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \quad t_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline & 3 & \\ \hline \end{array} \quad t_4 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline & 4 & \\ \hline \end{array}$$

### 2.3 Módulo de Specht

En la sección previa, construimos  $S_n$ -módulos  $M^\lambda$  conocidos como módulos de permutación. En esta sección, para cada  $\lambda$  consideramos un submódulo irreducibles de  $M^\lambda$ .

El grupo  $S_n$  actúa en el conjunto de tableros de Young de manera natural: para un tablero  $t$  de tamaño  $n$  y una permutación  $\sigma \in S_n$  el tablero  $\sigma t$  es el tablero que coloca el número  $\sigma(i)$  en la caja donde  $t$  coloca a  $i$ . Por ejemplo,

$$(123)(45) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 6 & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 5 & 4 \\ \hline 1 & 6 & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}$$

Observe que un tabloide está fijo por las permutaciones que permutan las entradas de los renglones entre ellos mismos. Estas permutaciones forman un subgrupo de  $S_n$ , al cual llamamos grupo renglón. Similarmente, definimos al grupo columna.

**Definición 2.3.1.** Para un tablero  $t$  de tamaño  $n$ , el **grupo renglón** de  $t$ , denotado por  $R_t$ , es el subgrupo de  $S_n$  que consiste de las permutaciones que solo mueven elementos entre cada renglón de  $t$ . Similarmente, el **grupo columna**  $C_t$  es el subgrupo de  $S_n$  que consiste de las permutaciones las cuales solo permutan los elementos entre cada columna de  $t$ .

Por ejemplo, si

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array} ,$$

entonces

$$R_t = S_{\{1,2,4\}} \times S_{\{3,5\}}, \quad y \quad C_t = S_{\{3,4\}} \times S_{\{1,5\}} \times S_{\{2\}}.$$

Seleccionaremos ciertos elementos del espacio  $M^\lambda$  que usaremos para generar un subespacio.

**Definición 2.3.2.** Si  $t$  es un tablero, entonces el **politabloide** asociado es

$$e_t = \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi) \pi\{t\}.$$

Entonces encontramos a  $e_t$  sumando todos los tabloides que resultan de las permutaciones columna de  $t$ , teniendo en cuenta el signo de la permutación columna. Por ejemplo, si

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array},$$

entonces

$$e_t = \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}} - \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}} - \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 2 \\ \hline 3 & 1 & \\ \hline \end{array}} + \overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 & \\ \hline \end{array}}.$$

Ahora, mediante el siguiente lema, vemos que  $S_n$  actúa en el conjunto de politabloides.

**Lema 2.3.3.** ([15], lema 2.3.3, p.61). Sea  $t$  un tablero y  $\pi$  una permutación. Entonces  $e_{\pi t} = \pi e_t$ .

Ahora podemos obtener un submódulo irreducible de  $M^\lambda$ .

**Definición 2.3.4.** Para cualquier partición  $\lambda$ , el correspondiente **módulo de Specht**, denotado como  $S^\lambda$ , es el submódulo de  $M^\lambda$  generado por los todos los politabloides  $e_t$  de forma  $\lambda$ .

**Ejemplo 2.3.5.** Considere  $\lambda = (n)$ , sólo hay un único politabloide, el cual es

$$\overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline \end{array}}.$$

Donde el politabloide está fijo por  $S_n$ , así  $S^{(n)}$  es la representación trivial de dimensión uno.

**Ejemplo 2.3.6.** Considere  $\lambda = (1^n) = (1, 1, \dots, 1)$ . Sea

$$t = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}.$$

Para cualquier  $\lambda$ -tablero  $t'$ , resulta que  $e_t = e_{t'}$  si  $t'$  es obtenido de  $t$  mediante una permutación par, o  $e_t = -e_{t'}$  si  $t'$  es obtenido de  $t$  mediante una permutación impar. Así,  $S^\lambda$  es una representación de dimensión uno. Del lema 2.3.3,  $\pi e_t = e_{\pi t} = \text{sgn}(\pi)e_t$ . De lo cual, observamos que  $S^{(1,1,\dots,1)}$  es la representación signo.

**Ejemplo 2.3.7.** Considere  $\lambda = (n-1, 1)$ . Continuando con la notación del ejemplo 2.2.5, donde usamos  $\{t_i\}$  para denotar el  $\lambda$ -tabloide con  $i$  en el segundo renglón, vemos que los politabloides tienen la forma  $\{t_i\} - \{t_j\}$ . En efecto, el politabloide construido del tablero

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline j & a & b & \dots \\ \hline i & & & \\ \hline \end{array}$$

es igual a  $\{t_i\} - \{t_j\}$ . Usemos temporalmente  $\mathbf{e}_i$  para denotar el tabloide  $\{t_i\}$ . Entonces  $S^\lambda$  es generado por los elementos de la forma  $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ , y se sigue que

$$S^{(n-1,1)} = \{c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \dots + c_n\mathbf{e}_n \mid c_1 + c_2 + \dots + c_n = 0\}.$$

Esta es la representación estándar y es irreducible. La suma directa de las representaciones estándar y la representación trivial nos da la representación  $F\mathbb{I}_n$  (ver ejemplo 1.7.4), es decir,  $S^{(n-1,1)} \oplus S^{(n)} = M^{(n-1,1)}$ .

Sabemos que  $S_3$  tiene tres representaciones irreducibles: trivial, signo y estándar. Estas son exactamente las descritas anteriormente. Además, hay exactamente tres particiones del 3:  $(3)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 1)$  y en este caso, las representaciones irreducibles son exactamente los módulos de Specht. Esto es cierto en general.

**Teorema 2.3.8.** ([15], teorema 2.4.6, p.66). *Los módulos de Specht  $S^\lambda$  para  $\lambda \vdash n$  forman una lista completa de representaciones irreducibles de  $S_n$  sobre  $\mathbb{C}$ .*

Recordemos que al final de la sección 2.1 notamos que el número de representaciones irreducibles de  $S_n$  es igual al número de diagramas de Young con  $n$  cajas. Este teorema da una biyección entre estos dos conjuntos.

Note que el conjunto de todos los politabloides es generalmente linealmente dependiente. Por ejemplo, como vimos en el ejemplo 2.3.6, cualquier par de politabloides en  $S^{(1,1,\dots,1)}$  son uno un múltiplo escalar del otro. Ya que sabemos que  $S^\lambda$  es generado por los politabloides, podemos preguntarnos cómo seleccionar una base. El siguiente teorema nos da la respuesta.

**Teorema 2.3.9.** ([15], teorema 2.5.2, p.67). *Sea  $\lambda$  cualquier partición. El conjunto*

$$\{e_t \mid t \text{ es un } \lambda\text{-tablero estándar}\}$$

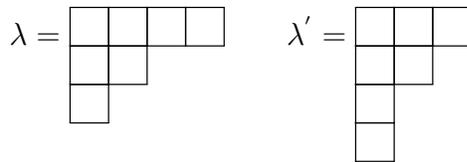
*es una base para  $S^\lambda$  como espacio vectorial.*

Enseguida se enuncian dos definiciones que usaremos en el capítulo 4 relacionados con la fórmula de Bouc.

**Definición 2.3.10.** Sea  $\lambda \vdash n$ . El **conjugado** de  $\lambda$  es la partición que se obtiene listando el número de cajas en cada columna del diagrama de Young asociado a la  $\lambda$ . El conjugado de  $\lambda$  se denota como  $\lambda'$ . Si  $\lambda = \lambda'$  se dice que  $\lambda$  es **autoconjugada**.

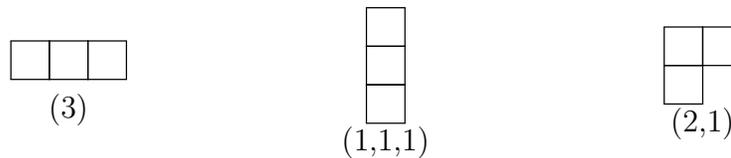
**Definición 2.3.11.** Sea  $\lambda \vdash n$ . Llamemos **diagonal** del  $\lambda$ -tablero, denotada por  $d(\lambda)$  al número de cajas en la diagonal del correspondiente tablero de forma  $\lambda$ .

**Ejemplo 2.3.12.** Sea  $\lambda = (4, 2, 1)$ , así que  $\lambda' = (3, 2, 1, 1)$



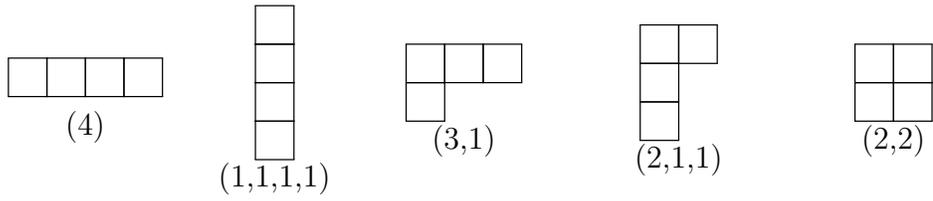
En este caso  $d(\lambda) = d(\lambda') = 2$ .

**Ejemplo 2.3.13.** Las particiones del número 3 son:



La única partición de 3 que es autoconjugada es  $\lambda = (2, 1) = \lambda'$ .

**Ejemplo 2.3.14.** Las particiones del número 4 son:



La única partición de 4 que es autoconjugada es  $\lambda = (2, 2) = \lambda'$ .

# Capítulo 3

## Homología de complejos simpliciales

En este capítulo se define homología y homología reducida de un complejo simplicial, para lo cual requerimos conceptos previos como: complejo simplicial abstracto  $\Delta$ , espacio de cadenas  $C_p(\Delta)$  y el operador frontera  $\partial_p$  descritos en la sección 3.1.

En la sección 3.2 se introducen los conceptos de ciclos, fronteras y la función aumento, para definir homología y homología reducida.

Se presentan los complejos de cadenas en la sección 3.3 y se establece cierto diagrama conmutativo de los complejos de cadenas en donde se define una transformación lineal entre los espacios de tales complejos de cadenas, la cual induce una transformación lineal de las homologías de los correspondientes espacios.

Por último en la sección 3.4, a los complejos simpliciales  $\Delta$  se les asocian conceptos topológicos por medio de su realización geométrica  $|\Delta|$ .

Las demostraciones que se omiten se pueden encontrar en [12].

### 3.1 Complejos simpliciales abstractos

**Definición 3.1.1.** Un **complejo simplicial abstracto** es una colección finita  $\Delta$  de conjuntos no vacíos, tal que si  $A$  es un elemento de  $\Delta$ , cada subconjunto no vacío de  $A$  pertenece a  $\Delta$ .

El elemento  $A$  de  $\Delta$  es llamado **simplejo** de  $\Delta$ . Si  $A$  tiene  $p+1$  elementos, decimos que  $A$  es un  **$p$ -simplejo** y su **dimensión** es  $p$ . La dimensión de  $\Delta$  es el máximo de las dimensiones de los simplejos de  $\Delta$ . Cada subconjunto no vacío de  $A$  es llamado **cara** de  $A$ . El conjunto de **vértices**  $V(\Delta)$  de  $\Delta$  es la unión de los 0-simplejos de  $\Delta$ . No haremos distinción entre un vértice  $v \in$

$V(\Delta)$  y el 0-simplejo  $\{v\} \in \Delta$ . Una subcolección de  $\Delta$ , que es a su vez es un complejo, se llama **subcomplejo** de  $\Delta$ .

**Definición 3.1.2.** El subcomplejo de  $\Delta$  que consiste de todos los simplejos de  $\Delta$  de dimensión a lo más  $p$ , se llama  **$p$ -esqueleto** de  $\Delta$  y se denota por  $\Delta^{(p)}$ . El 1-esqueleto  $\Delta^{(1)}$  de cualquier complejo simplicial de  $\Delta$  es una gráfica.

**Definición 3.1.3.** Un complejo simplicial  $\Delta$  es **conexo** si  $\Delta^{(1)}$  es una gráfica conexa, es decir, si existe un camino en  $\Delta^{(1)}$  entre cualquiera dos vértices.

Primero introducimos la idea de un  *$n$ -simplejo orientado*. Un **0-simplejo orientado** es un punto  $v$ . Un **1-simplejo orientado** es un segmento de línea dirigido  $v_0v_1$  uniendo los puntos  $v_0$  y  $v_1$  en dirección de  $v_0$  a  $v_1$  como se ilustra en la figura 3.1, así que  $v_0v_1 \neq v_1v_0$ , pero estaremos de acuerdo en que  $v_0v_1 = -v_1v_0$ . Un **2-simplejo orientado** es una región triangular  $v_0v_1v_2$  con dirección de  $v_0$  a  $v_1$  a  $v_2$  como se aprecia en la figura 3.2, claramente  $v_0v_1v_2$  tiene el mismo orden que  $v_1v_2v_0$  y  $v_2v_0v_1$ , pero con orientación opuesta a  $v_0v_2v_1$ ,  $v_2v_1v_0$  y  $v_1v_0v_2$ , es decir, estaremos de acuerdo que:

$$v_0v_1v_2 = v_1v_2v_0 = v_2v_0v_1 = -v_0v_2v_1 = -v_2v_1v_0 = -v_1v_0v_2,$$

es decir,  $v_iv_jv_k$  es igual a  $v_0v_1v_2$ , si

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

es una permutación par y es igual a  $-v_0v_1v_2$  si la permutación es impar.

Un **3-simplejo orientado** está dado por una secuencia ordenada  $v_0v_1v_2v_3$  de cuatro vértices de un tetraedro sólido como se observa en la figura 3.3 y acordaremos que  $v_0v_1v_2v_3 = \pm v_iv_jv_kv_s$ , dependiendo si la permutación es par o impar. Así, dos maneras de enumerar los vértices de un  $n$ -simplejo se considerarán equivalentes, o producen la misma orientación si difieren una de la otra por una permutación par.

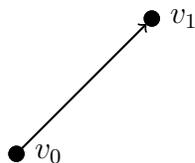


Figura 3.1: 1-simplejo

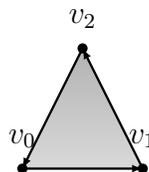


Figura 3.2: 2-simplejo

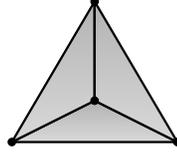


Figura 3.3: 3-simplejo

A continuación, vamos a realizar un procedimiento análogo a la construcción del espacio  $F^X$  (ver lema 1.1.10 y teorema 1.1.11), pero ahora en la construcción del espacio de  $p$ -cadenas  $C_p(\Delta)$ , tomando en cuenta la orientación de los simplejos.

**Definición 3.1.4.** Sea  $\Delta$  un complejo simplicial. Una  **$p$ -cadena** en  $\Delta$  es una función  $c$  del conjunto de  $p$ -simplejos orientados de  $\Delta$  al campo de los números complejos, tal que:  $c(\sigma) = -c(\sigma')$  si  $\sigma$  y  $\sigma'$  son orientaciones opuestas del mismo simplejo.

Sumamos  $p$ -cadenas sumando sus valores y producto por escalar de una  $p$ -cadena es la multiplicación de su valor por un elemento  $\lambda \in \mathbb{C}$ . El  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial resultante es denotado por  $C_p(\Delta)$  y es llamado el **espacio de  $p$ -cadenas (orientadas)** de  $\Delta$ . Si  $p < 0$  o  $p > \dim \Delta$ ,  $C_p(\Delta)$  denota al espacio trivial.

**Definición 3.1.5.** Si  $\sigma$  es un simplejo orientado, la **cadena elemental**  $c$  correspondiente a  $\sigma$  es la función definida como:

$$\begin{aligned} c(\sigma) &= 1, \\ c(\sigma') &= -1 \quad \text{si } \sigma' \text{ tiene orientación opuesta de } \sigma, \\ c(\tau) &= 0 \quad \text{para todos los otros simplejos orientados } \tau. \end{aligned}$$

Por abuso de notación, muchas veces usamos el símbolo  $\sigma$  para denotar no solo a un simplejo, o a un simplejo orientado, sino también a la  $p$ -cadena elemental  $c$  correspondiente al simplejo orientado  $\sigma$ . Con esta convención, si  $\sigma$  y  $\sigma'$  tienen orientaciones opuestas del mismo simplejo, entonces podemos escribir  $\sigma' = -\sigma$ , pues esta ecuación se mantiene cuando nos referimos a  $\sigma$  y  $\sigma'$  como cadenas elementales.

**Lema 3.1.6.** Una base para  $C_p(\Delta)$  se puede obtener tomando una orientación por cada  $p$ -simplejo y usando las correspondientes cadenas elementales como elementos de la base.

*Demostración.* Orientando (arbitrariamente) a cada  $p$ -simplejo de  $\Delta$ , toda  $p$ -cadena se puede escribir de manera única como una combinación lineal

finita

$$c = \sum n_i \sigma_i,$$

de las correspondientes cadenas elementales  $\sigma_i$ . La cadena  $c$  asigna el valor  $n_i$  al  $p$ -simplejo orientado  $\sigma_i$ , el valor  $(-n_i)$  a la orientación opuesta de  $\sigma_i$  y el valor 0 a todo  $p$ -simplejo orientado que no aparece en la suma.  $\square$

**Corolario 3.1.7.** ([12], corolario 5.2, p.36). *Toda función  $f$  de los  $p$ -simplejos orientados de  $\Delta$  en un espacio vectorial  $V$ , tal que  $f(-\sigma) = -f(\sigma)$  para todo  $p$ -simplejo orientado  $\sigma$  puede extenderse de manera única a una transformación lineal de  $C_p(\Delta) \rightarrow V$ .*

**Definición 3.1.8.** Sea  $\sigma = (v_0, \dots, v_p)$  un simplejo orientado con  $p > 0$  (sin embargo, también será denotado como  $\sigma = v_0 \dots v_p$  cuando no tengamos problemas de confusión), definimos la transformación lineal  $\partial_p : C_p(\Delta) \rightarrow C_{p-1}(\Delta)$  por medio de:

$$\partial_p(\sigma) = \partial_p(v_0 \dots v_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (v_0 \dots \widehat{v}_i \dots v_p), \quad (3.1)$$

al que llamamos el  **$p$ -ésimo operador frontera**, donde  $\widehat{v}_i$  indica que el vértice  $v_i$  es borrado del arreglo.

Puesto que  $C_p(\Delta)$  es el espacio trivial para  $p < 0$ , diremos que  $\partial_p$  es la *transformación cero* para  $p \leq 0$ . Mostremos ahora que  $\partial_p$  está bien definido y que  $\partial_p(-\sigma) = -\partial_p(\sigma)$ . Es suficiente mostrar que la ecuación (3.1) cambia de signo si intercambiamos dos vértices adyacentes en el orden  $v_0 \dots v_p$ , y para esto debemos comparar las expresiones:

$$\partial_p(v_0 \dots v_j v_{j+1} \dots v_p) \text{ y } \partial_p(v_0 \dots v_{j+1} v_j \dots v_p).$$

Para  $i \neq j, j + 1$ , el  $i$ -ésimo término de estas dos expresiones difieren precisamente por un signo; los términos son idénticos, excepto que  $v_j$  y  $v_{j+1}$  aparecen intercambiados. Veamos que sucede sobre el  $i$ -ésimo término cuando  $i = j$  y  $i = j + 1$ . En la primera expresión obtenemos:

$$(-1)^j (\dots v_{j-1} \widehat{v}_j v_{j+1} v_{j+2} \dots) + (-1)^{j+1} (\dots v_{j-1} v_j \widehat{v}_{j+1} v_{j+2} \dots),$$

mientras que en la segunda expresión tenemos:

$$(-1)^j (\dots v_{j-1} \widehat{v}_{j+1} v_j v_{j+2} \dots) + (-1)^{j+1} (\dots v_{j-1} v_{j+1} \widehat{v}_j v_{j+2} \dots).$$

Comparando estas dos expresiones observamos que solo difieren por un signo.

**Ejemplo 3.1.9.** De acuerdo a lo anterior, tenemos que

1. para un *1-simplejo*:  $\partial_1(v_0 v_1) = v_1 - v_0$ ,
2. para un *2-simplejo*:  $\partial_2(v_0 v_1 v_2) = v_1 v_2 - v_0 v_2 + v_0 v_1$ ,
3. para un *3-simplejo*:  $\partial_3(v_0 v_1 v_2 v_3) = v_1 v_2 v_3 - v_0 v_2 v_3 + v_0 v_1 v_3 - v_0 v_1 v_2$ .

## 3.2 Homología simplicial

**Definición 3.2.1.** El kernel de  $\partial_p : C_p(\Delta) \rightarrow C_{p-1}(\Delta)$  es llamado el espacio de  **$p$ -ciclos** y denotado por  $Z_p(\Delta)$ . La imagen de  $\partial_{p+1} : C_{p+1}(\Delta) \rightarrow C_p(\Delta)$  es llamado el espacio de  **$p$ -fronteras** y es denotado por  $B_p(\Delta)$ .

**Definición 3.2.2.** Sea  $\varepsilon : C_0 \rightarrow \mathbb{C}$  la transformación lineal suprayectiva definida por  $\varepsilon(v) = 1$  para cada vértice  $v \in \Delta$ . Entonces si  $c$  es una 0-cadena,  $\varepsilon(c)$  es igual a la suma de los valores de  $c$  en los vértices de  $\Delta$ , es decir:

$$\varepsilon\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i.$$

Llamaremos a  $\varepsilon$  la **función aumento** para  $C_0(\Delta)$ .

**Teorema 3.2.3.**  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$  para cualquier  $p$  y también  $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$ .

*Demostración.* Calculamos

$$\begin{aligned} \partial_{p-1} \partial_p(v_0 \dots v_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_{p-1}(v_0 \dots \widehat{v}_i \dots v_p) \\ &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j (\dots \widehat{v}_j \dots \widehat{v}_i \dots) \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} (\dots \widehat{v}_i \dots \widehat{v}_j \dots). \end{aligned}$$

Los términos de estas dos sumas se cancelan a pares.

Por otro lado  $\varepsilon(\partial_1(v_0 v_1)) = \varepsilon(v_1 - v_0) = 1 - 1 = 0$ . □

**Corolario 3.2.4.**  $B_p(\Delta)$  es subespacio de  $Z_p(\Delta)$ .

*Demostración.* Primero veamos que  $B_n(\Delta)$  es subconjunto de  $Z_n(\Delta)$ , tenemos que  $B_n(\Delta) = \partial[C_{n+1}(\Delta)]$ , si  $b \in B_n(\Delta)$ , podemos escribir a  $b$  como  $b = \partial_{n+1}(c)$  para algún  $c \in C_{n+1}(\Delta)$ . Así,

$$\partial_n(b) = \partial_n(\partial_{n+1}(c)) = 0.$$

Por lo tanto,  $b \in Z_n(\Delta)$ . Las otras condiciones se siguen de que  $\partial_{n+1}$  es una transformación lineal. □

De forma análoga se demuestra que  $B_0(\Delta)$  es subespacio de  $\ker(\varepsilon)$ .

**Definición 3.2.5.** El espacio cociente

$$H_p(\Delta) = Z_p(\Delta)/B_p(\Delta)$$

se llama el  **$p$ -ésimo espacio de homología de  $\Delta$** . Si  $H_p(\Delta)$  es un módulo cociente, se llama el  **$p$ -ésimo módulo de homología de  $\Delta$** .

**Definición 3.2.6.** Definimos el **espacio de homología reducida** de  $\Delta$  en dimensión 0, denotado por  $\tilde{H}_0(\Delta)$ , como

$$\tilde{H}_0(\Delta) = \ker \varepsilon / \text{im } \partial_1.$$

(Si  $p > 0$ ,  $\tilde{H}_p(\Delta)$  denota el espacio usual  $H_p(\Delta)$ .)

**Teorema 3.2.7.** ([12], teorema 7.2, p.43). *Sea  $\Delta$  un complejo simplicial no vacío, entonces*

$$H_0(\Delta) \cong \tilde{H}_0(\Delta) \oplus \mathbb{C}.$$

*Además,  $\tilde{H}_0(\Delta) = 0$  si  $\Delta$  es conexo.*

**Ejemplo 3.2.8.** Calculemos para  $n = 0, 1, 2$  los espacios  $Z_n(\Delta)$ ,  $B_n(\Delta)$  y  $H_n(\Delta)$  para la superficie  $\Delta$  del tetraedro.

Como  $C_{-1}(\Delta) = 0$  por definición, se sigue que

$$\mathbf{Z}_0(\Delta) = C_0(\Delta).$$

Por otro lado,  $C_1(\Delta) = \langle v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3 \rangle$ , así que por el teorema 1.1.7 tenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0(\Delta) &= \partial_1[C_1(\Delta)] \\ &= \langle \partial_1(v_0v_1), \partial_1(v_0v_2), \partial_1(v_0v_3), \partial_1(v_1v_2), \partial_1(v_1v_3), \partial_1(v_2v_3) \rangle \\ &= \langle v_1 - v_0, v_2 - v_0, v_3 - v_0, v_2 - v_1, v_3 - v_1, v_3 - v_2 \rangle \\ &= \langle v_1 - v_0, v_2 - v_0, v_3 - v_0 \rangle, \end{aligned} \tag{3.2}$$

pues los vectores  $v_2 - v_1, v_3 - v_1, v_3 - v_2$  son combinación lineal de los vectores de 3.2, ya que:

$$v_2 - v_1 = (v_2 - v_0) - (v_1 - v_0)$$

$$v_3 - v_1 = (v_3 - v_0) - (v_1 - v_0)$$

$$v_3 - v_2 = (v_3 - v_0) - (v_2 - v_0),$$

Así,  $\dim(B_0(\Delta)) = 3$ , además  $C_0(\Delta) = \langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle$ , por lo que  $\dim(Z_0(\Delta)) = \dim(C_0(\Delta)) = 4$ . Luego del teorema 1.1.6,  $\dim(Z_0(\Delta)/B_0(\Delta)) = 1$ , así mismo la  $\dim(\mathbb{C}) = 1$  y por el teorema 1.1.8, se sigue que  $Z_0(\Delta)/B_0(\Delta) \cong \mathbb{C}$ . Por lo tanto:

$$\mathbf{H}_0(\Delta) = Z_0(\Delta)/B_0(\Delta) \cong \mathbb{C}.$$

Un razonamiento similar se sigue para calcular los espacios de homología restantes. Ahora calculemos  $B_1(\Delta)$ . Sabemos que:

$$C_2(\Delta) = \langle v_0v_1v_2, v_0v_2v_3, v_0v_1v_3, v_1v_2v_3 \rangle.$$

Nuevamente por el teorema 1.1.7 tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_1(\Delta) &= \partial_2[C_2(\Delta)] = \langle \partial_2(v_0v_1v_2), \partial_2(v_0v_2v_3), \partial_2(v_0v_1v_3), \partial_2(v_1v_2v_3) \rangle \\
&= \langle v_1v_2 - v_0v_2 + v_0v_1, v_2v_3 - v_0v_3 + v_0v_2, \\
&\quad v_1v_3 - v_0v_3 + v_0v_1, v_2v_3 - v_1v_3 + v_1v_2 \rangle \\
&= \langle v_1v_2 - v_0v_2 + v_0v_1, v_2v_3 - v_0v_3 + v_0v_2, v_1v_3 - v_0v_3 + v_0v_1 \rangle \quad (3.3)
\end{aligned}$$

A continuación veremos que el conjunto generador de  $Z_1(\Delta)$  es el mismo que  $B_1(\Delta)$ . Sea  $c \in C_1(\Delta)$ , es decir,

$$c = n_1v_0v_1 + n_2v_0v_2 + n_3v_0v_3 + n_4v_1v_2 + n_5v_1v_3 + n_6v_2v_3$$

tal que:

$$\begin{aligned}
\partial_1(c) &= n_1(v_1 - v_0) + n_2(v_2 - v_0) + n_3(v_3 - v_0) \\
&\quad + n_4(v_2 - v_1) + n_5(v_3 - v_1) + n_6(v_3 - v_2) \\
&= (-n_1 - n_2 - n_3)v_0 + (n_1 - n_4 - n_5)v_1 \\
&\quad + (n_2 + n_4 - n_6)v_2 + (n_3 + n_5 + n_6)v_3 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así que tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
-n_1 \quad -n_2 \quad -n_3 &= 0 \\
n_1 \quad -n_4 \quad -n_5 &= 0 \\
n_2 \quad +n_4 \quad -n_6 &= 0 \\
n_3 \quad +n_5 \quad +n_6 &= 0.
\end{aligned}$$

Lo representamos en forma matricial.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y lo llevamos a su forma escalonada reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De lo cual concluimos:

$$\begin{aligned}
n_1 &= n_4 + n_5 \\
n_2 &= -n_4 + n_6 \\
n_3 &= -n_5 - n_6.
\end{aligned}$$

Entonces podemos escribir a  $c \in Z_1(\Delta)$  como:

$$\begin{aligned}
c &= (n_4 + n_5)v_0v_1 + (-n_4 + n_6)v_0v_2 + (-n_5 - n_6)v_0v_3 \\
&\quad + n_4v_1v_2 + n_5v_1v_3 + n_6v_2v_3 \\
&= n_4(v_0v_1 - v_0v_2 + v_1v_2) + n_5(v_0v_1 - v_0v_3 + v_1v_3) \\
&\quad + n_6(v_0v_2 - v_0v_3 + v_2v_3).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Por tanto, de la ecuación 3.4 tenemos:

$$\mathbf{Z}_1(\Delta) = \langle v_0v_1 - v_0v_2 + v_1v_2, v_0v_1 - v_0v_3 + v_1v_3, v_0v_2 - v_0v_3 + v_2v_3 \rangle.$$

De las ecuaciones 3.3 y 3.4, obtenemos que  $Z_1(\Delta)$  y  $B_1(\Delta)$  tienen el mismo conjunto generador, por lo tanto  $Z_1(\Delta) = B_1(\Delta)$ , en consecuencia,

$$\mathbf{H}_1(\Delta) = Z_1(\Delta)/B_1(\Delta) = 0.$$

Los simplejos de dimensión más alta son los 2-simplejos así que  $C_3(\Delta) = 0$  por lo que,

$$\mathbf{B}_2(\Delta) = \partial_3[C_3(\Delta)] = 0.$$

Determinaremos ahora  $Z_2(\Delta)$ . Si  $c \in C_2(\Delta)$ , es decir

$$c = n_1v_0v_1v_2 + n_2v_0v_2v_3 + n_3v_0v_1v_3 + n_4v_1v_2v_3$$

tal que

$$\begin{aligned}
\partial_2(c) &= n_1(v_1v_2 - v_0v_2 + v_0v_1) + n_2(v_2v_3 - v_0v_3 + v_0v_2) \\
&\quad + n_3(v_1v_3 - v_0v_3 + v_0v_1) + n_4(v_2v_3 - v_1v_3 + v_1v_2) \\
&= (n_1 + n_3)v_0v_1 + (-n_1 + n_2)v_0v_2 + (-n_2 - n_3)v_0v_3 \\
&\quad + (n_1 + n_4)v_1v_2 + (n_3 - n_4)v_1v_3 + (n_2 + n_4)v_2v_3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

entonces  $n_1 = n_2 = -n_3 = -n_4$ , así que podemos escribir a  $c$  de la siguiente forma:

$$c = n_1(v_0v_1v_2 + v_0v_2v_3 - v_0v_1v_3 - v_1v_2v_3),$$

de donde vemos que

$$Z_2(\Delta) = \langle v_0v_1v_2 + v_0v_2v_3 - v_0v_1v_3 - v_1v_2v_3 \rangle,$$

es decir,  $\mathbf{Z}_2(\Delta) \cong \mathbb{C}$ . Luego  $\mathbf{H}_2(\Delta) = Z_2(\Delta)/B_2(\Delta) \cong \mathbb{C}$ .

### 3.3 Complejo de cadenas

**Definición 3.3.1.** Un **complejo de cadenas**  $(A, \partial)$  es una sucesión

$$A = \{\dots, A_2, A_1, A_0, A_{-1}, A_{-2}, \dots\}$$

de espacios vectoriales  $A_k$ , junto con una colección de operadores frontera  $\partial = \{\partial_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  tales que  $\partial_k : A_k \rightarrow A_{k-1}$ .

**Teorema 3.3.2.** Sean  $(A, \partial)$  y  $(A', \partial')$  complejos de cadenas, y supongamos que hay una colección  $f$  de transformaciones lineales  $f_k : A_k \rightarrow A'_k$  como se indica en el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{k+2}} & A_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & A_k & \xrightarrow{\partial_k} & A_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & \dots \\ & & \downarrow f_{k+1} & & \downarrow f_k & & \downarrow f_{k-1} & & \\ \dots & \xrightarrow{\partial'_{k+2}} & A'_{k+1} & \xrightarrow{\partial'_{k+1}} & A'_k & \xrightarrow{\partial'_k} & A'_{k-1} & \xrightarrow{\partial'_{k-1}} & \dots \end{array}$$

Además, supongamos que para todo  $k$  se tiene

$$f_{k-1}\partial_k = \partial'_k f_k.$$

Entonces  $f_k$  induce una transformación lineal  $f_{*k} : H_k(A) \rightarrow H_k(A')$ .

*Demostración.* Sea  $z \in Z_k(A)$ . Ahora

$$\partial'_k(f_k(z)) = f_{k-1}(\partial_k(z)) = f_{k-1}(0) = 0,$$

así,  $f_k(z) \in Z_k(A')$ . Definamos  $f_{*k} : H_k(A) \rightarrow H_k(A')$  por

$$f_{*k}(z + B_k(A)) = f_k(z) + B_k(A'). \quad (3.5)$$

Primero debemos mostrar que  $f_{*k}$  está bien definida, es decir, independientemente de la elección de un representante de  $z + B_k(A)$ . Supongamos que  $z_1 \in (z + B_k(A))$ . Entonces  $(z_1 - z) \in B_k(A)$ , y existe  $c \in A_{k+1}$  tal que  $z_1 - z = \partial_{k+1}(c)$ . Pero,

$$f_k(z_1) - f_k(z) = f_k(z_1 - z) = f_k(\partial_{k+1}(c)) = \partial'_{k+1}(f_{k+1}(c))$$

y este último término es un elemento de  $\partial'_{k+1}[A'_{k+1}] = B_k(A')$ . Por lo tanto

$$f_k(z_1) \in (f_k(z) + B_k(A')).$$

Así dos representantes de la misma clase lateral en  $H_k(A) = Z_k(A)/B_k(A)$  son enviados en representantes de la misma clase lateral en el subespacio  $H_k(A') = Z_k(A')/B_k(A')$ . Esto muestra que  $f_{*k} : H_k(A) \rightarrow H_k(A')$  está bien definida por la ecuación (3.5).

Demostrar que  $f_{*k}$  es una transformación lineal se sigue de la linealidad de  $f_k$ .  $\square$

Notemos que si  $f_k$  es un isomorfismo, entonces  $f_k$  induce un isomorfismo  $f_{*k}$ , es decir,  $H_k(A) \cong H_k(A')$ .

### 3.4 Homomorfismos inducidos por funciones homotópicas

En esta sección  $I$  es el intervalo  $[0, 1]$  y el conjunto de vértices de un complejo simplicial  $\Delta$  es  $V(\Delta) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Es posible definir homología de un espacio topológico general por medio del concepto de la *homología singular* (ver [12], §51, p. 309). Por otro lado, a cada complejo simplicial  $\Delta$  se le puede asociar un espacio topológico denotado  $|\Delta|$  llamado la **realización geométrica** de  $\Delta$ , dado por:

$$|\Delta| = \left\{ \alpha : V(\Delta) \rightarrow I \mid \alpha^{-1}(0, 1] \in \Delta, \sum_{v \in V(\Delta)} \alpha(v) = 1 \right\}.$$

Podemos identificar a  $\alpha \in |\Delta|$  con su  $n$ -ada de valores  $(\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n))$ , de tal manera que  $|\Delta|$  se puede identificar con un subespacio topológico de  $\mathbb{R}^n$ .

A los complejos simpliciales se les asocian conceptos topológicos por medio de la realización geométrica. Por ejemplo, dos complejos se dicen homeomorfos si las realizaciones geométricas los son.

**Definición 3.4.1.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Dos funciones continuas  $h, k : X \rightarrow Y$  son **homotópicas** si existe una función continua

$$F : X \times I \rightarrow Y,$$

tal que  $F(x, 0) = h(x)$  y  $F(x, 1) = k(x)$  para todo  $x \in X$ . Si  $h$  y  $k$  son homotópicas, lo denotamos como  $h \simeq k$ . Pensamos a  $F$  como una forma de “deformar” a  $h$  continuamente en  $k$ , conforme  $t$  varía de 0 a 1.

Si dos espacios son homeomorfos, puede demostrarse que tienen homología isomorfas. Una condición más débil que homeomorfismo que implica el mismo resultado, es el de homotópicamente equivalentes.

**Definición 3.4.2.** Dos espacios topológicos  $X$  y  $Y$  se dicen **homotópicamente equivalentes** o bien **homotópicos**, si existen las funciones

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{y} \quad g : Y \rightarrow X$$

tales que  $g \circ f \simeq i_X$  y  $f \circ g \simeq i_Y$ . Las funciones  $f$  y  $g$  son llamadas **equivalencias homotópicas**, y  $g$  es la **inversa homotópica** de  $f$ .

Si  $X$  es homotópico a un punto, se dice que  $X$  es **contraíble**.

**Teorema 3.4.3.** ([12], teorema 19.5, p.108). Sean  $X, Y$  espacios topológicos, si  $X$  y  $Y$  son homotópicos, entonces  $\tilde{H}_n(X) \cong \tilde{H}_n(Y)$  para  $n > 0$ . En particular, si  $X$  es contraíble, entonces  $\tilde{H}_n(X) = 0$  para  $n > 0$ .

**Teorema 3.4.4.** ([12], teorema 34.3, p.194). Sea  $\Delta$  un complejo simplicial, entonces la homología simplicial de  $\Delta$  es isomorfa a la homología singular de su realización geométrica  $|\Delta|$ .

A cada gráfica  $G$  finita se le asocia un espacio topológico por medio del complejo simplicial  $\Delta(G)$  cuyos simplejos son las subgráficas completas. Entonces a  $G$  le podemos asociar conceptos topológicos por medio de  $\Delta(G)$ . Por ejemplo, escribiremos  $G_1 \simeq G_2$  si se tiene que  $\Delta(G_1) \simeq \Delta(G_2)$ .

Por otro lado si  $G$  tiene una acción del grupo simétrico  $S_n$ , entonces las homologías de  $G$  son módulos de  $S_n$ .

Ahora se ejemplifican los conceptos antes expuestos.

**Ejemplo 3.4.5.** Sea la gráfica  $G$  de la figura 3.4, entonces  $\Delta(G)$  consta de los subconjuntos no vacíos de  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{2, 3, 5\}$ ,  $\{2, 4, 5\}$ ,  $\{4, 5, 6\}$ . En la figura 3.5 se observa un dibujo de  $|\Delta(G)|$ . Así que  $|\Delta(G)| \simeq D^2$ , donde  $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$ .

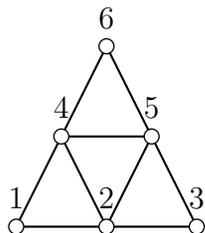


Figura 3.4:  $G$

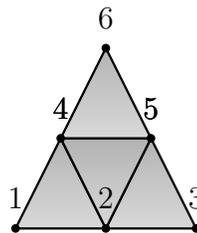


Figura 3.5:  $|\Delta(G)|$



# Capítulo 4

## Homologías del complejo de emparejamientos

En este capítulo se utilizarán todos los conceptos y resultados presentados en los capítulos anteriores. Se definirá el complejo de emparejamientos y finalmente conoceremos la fórmula de Bouc. Además, calcularemos los módulos de homología reducida de los complejos de emparejamientos y de sus respectivas gráficas de clanes para  $n \leq 6$ .

### 4.1 Complejo de emparejamientos

Recordemos que denotamos como  $G_n$  a la gráfica de emparejamientos de orden  $n$  (ver definición 1.11.4).

**Definición 4.1.1.** El **complejo de emparejamientos** de  $K_n$  será denotado entonces por  $M_n$ , y se define como  $M_n = \Delta(G_n)$

Puesto que  $S_n$  actúa de manera natural en  $G_n$ , los espacios  $C_p(M_n)$ ,  $Z_p(M_n)$ ,  $B_p(M_n)$  y por tanto  $\tilde{H}_p(M_n)$  se convierten en  $S_n$ -módulos sobre  $\mathbb{C}$ . En este capítulo consideramos la descomposición en módulos irreducibles de  $\tilde{H}_p(M_n) = \tilde{H}_p(\Delta(G_n))$ , para  $n = 4, 5, 6$  y  $\tilde{H}_p(\Delta(K(G_n)))$ , para  $n = 5, 6$ .

**Ejemplo 4.1.2.** Considérese la gráfica  $K_4$ ; construiremos el complejo de emparejamientos  $M_4$  dado por el conjunto de vértices

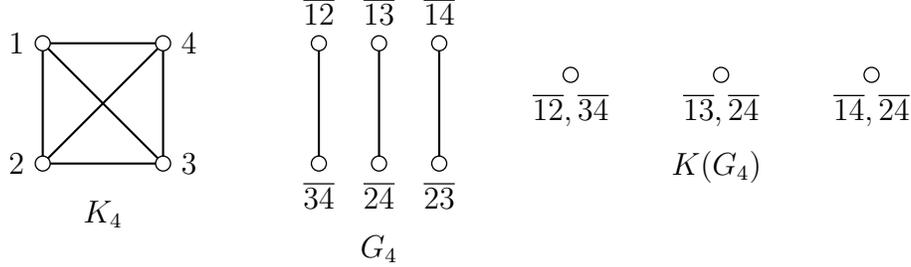
$$V = \{\overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{34}\},$$

que es el conjunto de aristas de la gráfica de  $K_4$ . La familia de 1-simplejos estará dada por el siguiente conjunto:

$$\{\{\overline{12}, \overline{34}\}, \{\overline{13}, \overline{24}\}, \{\overline{14}, \overline{23}\}\}.$$

Es decir,

$$M_4 = \{\{\overline{12}\}, \{\overline{13}\}, \{\overline{14}\}, \{\overline{23}\}, \{\overline{24}\}, \{\overline{34}\}, \{\overline{12}, \overline{34}\}, \{\overline{13}, \overline{24}\}, \{\overline{14}, \overline{23}\}\}.$$



El teorema 4.1.3 que se enuncia a continuación, nos muestra la descomposición en módulos de Specht de los módulos de homología reducida de complejos de emparejamientos  $\tilde{H}_p(M_n)$ .

**Teorema 4.1.3** (Teorema de Bouc). ([2], proposición 4, p.172). *Para todos  $n, k \geq 1$ :*

$$\tilde{H}_{k-1}(M_n) \cong_{S_n} \bigoplus_{\substack{\lambda: \lambda \vdash n \\ \lambda = \lambda' \\ d(\lambda) = n - 2k}} S^\lambda.$$

**Ejemplo 4.1.4.**

Sea  $n = 3$  y  $k = 1$ ,

$$\tilde{H}_0(M_3) \cong_{S_3} \bigoplus_{\substack{\lambda: \lambda \vdash 3 \\ \lambda = \lambda' \\ d(\lambda) = 3 - 2(1) = 1}} S^\lambda = S^{(2,1)} = S^{\boxplus}.$$

Sea  $n = 4$  y  $k = 1$ ,

$$\tilde{H}_0(M_4) \cong_{S_4} \bigoplus_{\substack{\lambda: \lambda \vdash 4 \\ \lambda = \lambda' \\ d(\lambda) = 4 - 2(1) = 2}} S^\lambda = S^{(2,2)} = S^{\boxplus\boxplus}.$$

Sea  $n = 5$  y  $k = 2$ ,

$$\tilde{H}_1(M_5) \cong_{S_5} \bigoplus_{\substack{\lambda: \lambda \vdash 5 \\ \lambda = \lambda' \\ d(\lambda) = 5 - 2(2) = 1}} S^\lambda = S^{(3,1,1)} = S^{\boxplus\boxplus\boxplus}.$$

Sea  $n = 6$  y  $k = 2$ ,

$$\tilde{H}_1(M_6) \cong_{S_6} \bigoplus_{\substack{\lambda: \lambda \vdash 6 \\ \lambda = \lambda' \\ d(\lambda) = 6 - 2(2) = 2}} S^\lambda = S^{(3,2,1)} = S^{\boxplus\boxplus\boxplus}.$$

En los ejemplos de las próximas secciones se calculan explícitamente por métodos elementales los siguientes módulos de homología reducida:  $\tilde{H}_p(M)$ , para  $n = 4, 5, 6$  y  $\tilde{H}_p(\Delta(K(G_n)))$ , para  $n = 5, 6$ .

## 4.2 Módulos de homología reducida de $M_4$

Enseguida, obtendremos los módulos de homología reducida de  $M_4$ . Tomando la notación de los  $p$ -simplejos orientados, los  $S_4$ -módulos de cadenas son:

$$C_0(M_4) = \langle (\overline{12}), (\overline{13}), (\overline{14}), (\overline{23}), (\overline{24}), (\overline{34}) \rangle.$$

$$C_1(M_4) = \langle (\overline{12}, \overline{34}), (\overline{13}, \overline{24}), (\overline{14}, \overline{23}) \rangle.$$

Sean

$$\begin{aligned} a_1 &= \overline{12} & a_4 &= \overline{23} & b_1 &= (\overline{12}, \overline{34}) \\ a_2 &= \overline{13} & a_5 &= \overline{24} & b_2 &= (\overline{13}, \overline{24}) \\ a_3 &= \overline{14} & a_6 &= \overline{34} & b_3 &= (\overline{14}, \overline{23}). \end{aligned}$$

Consideremos a  $\beta_0 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$  y  $\beta_1 = \{b_1, b_2, b_3\}$  como las bases de  $C_0(M_4)$  y  $C_1(M_4)$  respectivamente. Notemos que  $\dim C_0(M_4) = 6$  y  $\dim C_1(M_4) = 3$ . A continuación hacemos actuar un representante de cada clase de conjugación del grupo simétrico  $S_4$  sobre los elementos de la base de  $C_0(M_4)$  y  $C_1(M_4)$ .

$$\begin{aligned} (12)a_1 &= a_1 & (123)a_1 &= a_4 & (1234)a_1 &= a_4 & (12)(34)a_1 &= a_1 \\ (12)a_2 &= a_4 & (123)a_2 &= a_1 & (1234)a_2 &= a_5 & (12)(34)a_2 &= a_5 \\ (12)a_3 &= a_5 & (123)a_3 &= a_5 & (1234)a_3 &= a_1 & (12)(34)a_3 &= a_4 \\ (12)a_4 &= a_2 & (123)a_4 &= a_2 & (1234)a_4 &= a_6 & (12)(34)a_4 &= a_3 \\ (12)a_5 &= a_3 & (123)a_5 &= a_6 & (1234)a_5 &= a_2 & (12)(34)a_5 &= a_2 \\ (12)a_6 &= a_6 & (123)a_6 &= a_3 & (1234)a_6 &= a_3 & (12)(34)a_6 &= a_6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12)b_1 &= b_1 & (123)b_1 &= -b_3 & (1234)b_1 &= -b_3 & (12)(34)b_1 &= b_1 \\ (12)b_2 &= -b_3 & (123)b_2 &= b_1 & (1234)b_2 &= -b_2 & (12)(34)b_2 &= -b_2 \\ (12)b_3 &= -b_2 & (123)b_3 &= -b_2 & (1234)b_3 &= b_1 & (12)(34)b_3 &= -b_3. \end{aligned}$$

Entonces tenemos las representaciones  $\theta_1$  y  $\theta_2$  de  $S_4$  en  $C_0(M_4)$  y  $C_1(M_4)$  definidas respectivamente como se muestra enseguida:

$$\theta_1(12) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_1(123) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\theta_1(1234) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_1(12)(34) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\theta_2(12) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_2(123) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\theta_2(1234) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_2(12)(34) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de tal forma que:

$$\begin{aligned} \chi_{C_0(M_4)}((1)) &= 6, & \chi_{C_0(M_4)}((12)) &= 2, & \chi_{C_0(M_4)}((123)) &= 0, \\ \chi_{C_0(M_4)}((1234)) &= 0, & \chi_{C_0(M_4)}((12)(34)) &= 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{C_1(M_4)}((1)) &= 3, & \chi_{C_1(M_4)}((12)) &= 1, & \chi_{C_1(M_4)}((123)) &= 0, \\ \chi_{C_1(M_4)}((1234)) &= -1, & \chi_{C_1(M_4)}((12)(34)) &= -1. \end{aligned}$$

Añadiendo estos dos últimos caracteres a la tabla de caracteres de  $S_4$  tenemos la tabla 4.1.

No. Elementos	1	6	8	6	3
Clase	(1)	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
$\chi_C$	1	1	1	1	1
$\chi_{S(1,1,1,1)}$	1	-1	1	-1	1
$\chi_{S(3,1)}$	3	1	0	-1	-1
$\chi_{S(2,1,1)}$	3	-1	0	1	-1
$\chi_{S(2,2)}$	2	0	-1	0	2
$\chi_{C_0(M_4)}$	6	2	0	0	2
$\chi_{C_1(M_4)}$	3	1	0	-1	-1

Tabla 4.1: Tabla de caracteres de  $S_4$ ,  $C_0(M_4)$  y  $C_1(M_4)$ .

Queremos escribir a  $C_0(M_4)$  como suma directa de módulos irreducibles de  $S_4$ , así que calculemos el producto interno de  $\chi_{C_0(M_4)}$  con los caracteres de los módulos irreducibles de  $S_4$  para conocer la multiplicidad con la que

aparecen estos últimos (corolario 1.9.3).

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{C_0(M_4)}, \chi_{\mathbb{C}} \rangle &= \frac{1}{24}((1)(1 \cdot 6) + (6)(1 \cdot 2) + (8)(1 \cdot 0) + (6)(1 \cdot 0) + (3)(1 \cdot 2)) \\
&= \frac{1}{24}(6 + 12 + 6) = 1, \\
\langle \chi_{C_0(M_4)}, \chi_{S^{(1,1,1,1)}} \rangle &= \frac{1}{24}((1)(1 \cdot 6) + (6)(-1 \cdot 2) + (8)(1 \cdot 0) + (6)(-1 \cdot 0) + (3)(1 \cdot 2)) \\
&= \frac{1}{24}(6 - 12 + 6) = 0, \\
\langle \chi_{C_0(M_4)}, \chi_{S^{(3,1)}} \rangle &= \frac{1}{24}((1)(3 \cdot 6) + (6)(1 \cdot 2) + (8)(0 \cdot 0) + (6)(-1 \cdot 0) + (3)(-1 \cdot 2)) \\
&= \frac{1}{24}(18 + 12 - 6) = 1, \\
\langle \chi_{C_0(M_4)}, \chi_{S^{(2,1,1)}} \rangle &= \frac{1}{24}((1)(3 \cdot 6) + (6)(-1 \cdot 2) + (8)(0 \cdot 0) + (6)(1 \cdot 0) + (3)(-1 \cdot 2)) \\
&= \frac{1}{24}(18 - 12 - 6) = 0, \\
\langle \chi_{C_0(M_4)}, \chi_{S^{(2,2)}} \rangle &= \frac{1}{24}((1)(2 \cdot 6) + (6)(0 \cdot 2) + (8)(-1 \cdot 0) + (6)(0 \cdot 0) + (3)(2 \cdot 2)) \\
&= \frac{1}{24}(12 + 12) = 1.
\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue:

$$C_0(M_4) \cong \mathbb{C} \oplus S^{(3,1)} \oplus S^{(2,2)}. \quad (4.1)$$

De la tabla 4.1, se observa que  $\chi_{C_1(M_4)} = \chi_{S^{(3,1)}}$ , así que por el corolario 1.9.3 inciso 5 tenemos:

$$C_1(M_4) \cong S^{(3,1)}. \quad (4.2)$$

Con lo cual tenemos el siguiente complejo de cadenas aumentado donde  $\partial_1, \partial_2, \varepsilon$  son los correspondientes operadores frontera y la función aumento:

$$\dots 0 \rightarrow 0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(M_4) \xrightarrow{\partial_1} C_0(M_4) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \dots$$

Sean  $f_0$  y  $f_1$  los isomorfismos obtenidos de las expresiones 4.1, 4.2 respectivamente, y definimos en general al homomorfismo  $\widehat{\partial}_k$  como  $\widehat{\partial}_k = f_{k-1} \circ \partial_k \circ f_k^{-1}$ , con lo cual tenemos el complejo de cadenas aumentado:

$$\dots 0 \rightarrow 0 \xrightarrow{\widehat{\partial}_2} S^{(3,1)} \xrightarrow{\widehat{\partial}_1} \mathbb{C} \oplus S^{(3,1)} \oplus S^{(2,2)} \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} \mathbb{C} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(M_4) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(M_4) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{C} \\
\downarrow & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow \\
0 & \xrightarrow{\widehat{\partial}_2} & S^{(3,1)} & \xrightarrow{\widehat{\partial}_1} & \mathbb{C} \oplus S^{(3,1)} \oplus S^{(2,2)} & \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} & \mathbb{C}
\end{array}$$

Figura 4.1: Diagrama conmutativo de los complejos de cadenas de  $M_4$

En la figura 4.1 se muestra diagrama conmutativo de los complejos de cadenas anteriores.

Ahora calculemos los módulos de homología reducida  $\widetilde{H}_0(M_4)$  y  $\widetilde{H}_1(M_4)$ .

Por el teorema 1.7.6 y como  $\widehat{\varepsilon}$  es suprayectiva tenemos:

$$(\mathbb{C} \oplus S^{(3,1)} \oplus S^{(2,2)}) / \ker \widehat{\varepsilon} \cong \text{im } \widehat{\varepsilon} = \mathbb{C},$$

entonces

$$\ker \widehat{\varepsilon} \cong S^{(3,1)} \oplus S^{(2,2)}. \quad (4.3)$$

Por otra parte, de la proposición 1.7.8, se tiene que  $\text{im } \widehat{\partial}_1 \cong S^{(3,1)}$ , o bien  $\text{im } \widehat{\partial}_1 = 0$ .

Como  $\partial_1((\overline{12}, \overline{34})) = \overline{34} - \overline{12}$ , tenemos que  $\text{im } \partial_1 \neq 0$  (en general  $\partial_k \neq 0$  por definición del operador frontera), se sigue que  $\text{im } \widehat{\partial}_1 \neq 0$  puesto que el diagrama es conmutativo. Por lo tanto,

$$\text{im } \widehat{\partial}_1 \cong S^{(3,1)}. \quad (4.4)$$

De las expresiones 4.3, 4.4 y de la proposición 1.7.9 concluimos:

$$\ker \widehat{\varepsilon} = S^{(3,1)} \oplus S^{(2,2)}. \quad (4.5)$$

$$\text{im } \widehat{\partial}_1 = S^{(3,1)}. \quad (4.6)$$

Nuevamente por el teorema 1.7.6,

$$S^{(3,1)} / \ker \widehat{\partial}_1 \cong \text{im } \widehat{\partial}_1 = S^{(3,1)},$$

entonces

$$\ker \widehat{\partial}_1 = 0. \quad (4.7)$$

Como  $\widehat{\partial}_2$  es un homomorfismo de módulos, tenemos

$$\text{im } \widehat{\partial}_2 = \widehat{\partial}_2(0) = 0. \quad (4.8)$$

Por lo tanto, de la ecuaciones 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8 obtenemos:

$$\widetilde{H}_0(M_4) = \ker \widehat{\varepsilon} / \text{im } \widehat{\partial}_1 = (S^{(3,1)} \oplus S^{(2,2)}) / S^{(3,1)} = S^{(2,2)},$$

$$\widetilde{H}_1(M_4) = \ker \widehat{\partial}_1 / \text{im } \widehat{\partial}_2 = 0/0 = 0.$$

### 4.3 Módulos de homología reducida de $M_5$

Consideremos ahora la gráfica  $G_5$  (ver figura 4.2) y el complejo de emparejamientos  $M_5$ , que está dado por el conjunto de vértices (aristas de la gráfica de  $K_5$ ):

$$V = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\},$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \overline{12} & a_2 &= \overline{13} & a_3 &= \overline{14} & a_4 &= \overline{15} & a_5 &= \overline{23} \\ a_6 &= \overline{24} & a_7 &= \overline{25} & a_8 &= \overline{34} & a_9 &= \overline{35} & a_{10} &= \overline{45}. \end{aligned}$$

Entonces la familia de 1-simplejos orientados estará dada por:

$$\begin{aligned} b_1 &= (a_1, a_8) & b_6 &= (a_2, a_{10}) & b_{11} &= (a_4, a_6) \\ b_2 &= (a_1, a_9) & b_7 &= (a_3, a_5) & b_{12} &= (a_4, a_8) \\ b_3 &= (a_1, a_{10}) & b_8 &= (a_3, a_7) & b_{13} &= (a_5, a_{10}) \\ b_4 &= (a_2, a_6) & b_9 &= (a_3, a_9) & b_{14} &= (a_6, a_9) \\ b_5 &= (a_2, a_7) & b_{10} &= (a_4, a_5) & b_{15} &= (a_7, a_8). \end{aligned}$$

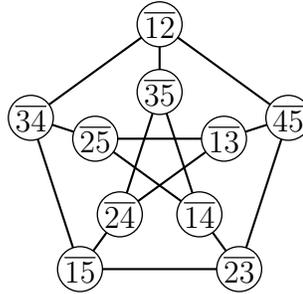


Figura 4.2: Gráfica de emparejamientos  $G_5$

No. Elementos	1	10	20	30	24	15	20
Clase	(1)	(12)	(123)	(1234)	(12345)	(12)(34)	(123)(45)
$\chi_{S^{(5)}}$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{S^{(1,1,1,1,1)}}$	1	-1	1	-1	1	1	-1
$\chi_{S^{(4,1)}}$	4	2	1	0	-1	0	-1
$\chi_{S^{(2,1,1,1)}}$	4	-2	1	0	-1	0	1
$\chi_{S^{(3,1,1)}}$	6	0	0	0	1	-2	0
$\chi_{S^{(3,2)}}$	5	1	-1	-1	0	1	1
$\chi_{S^{(2,2,1)}}$	5	-1	-1	1	0	1	-1

Tabla 4.2: Tabla de caracteres de  $S_5$

Con el teorema de la reciprocidad de Frobenius (teorema 1.10.5) obtendremos la descomposición de los  $S_5$ -módulos de cadenas  $C_0(M_5)$  y  $C_1(M_5)$  en módulos de Specht con un menor número de cálculos.

Consideremos:

$$\begin{aligned} V_0 &= \langle \overline{45} \rangle \\ H_0 &= \{g \in S_5 \mid gV_0 = V_0\} = \{((1), (12), (123), (45), (12)(45), (123)(45))\} \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} t_1 &= (1) & t_2 &= (14) & t_3 &= (15) & t_4 &= (24) & t_5 &= (25) \\ t_6 &= (34) & t_7 &= (35) & t_8 &= (14)(25) & t_9 &= (14)(35) & t_{10} &= (24)(35). \end{aligned}$$

Sea  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{10}\}$  la transversal izquierda de  $H_0$  en  $S_5$ , entonces

$$S_5 = t_1H_0 \cup t_2H_0 \cup \dots \cup t_{10}H_0.$$

Además  $C_0(M_5) = \bigoplus_{i=1}^{10} t_iV_0 = V_0 \uparrow_{H_0}^{S_5}$ , por la proposición 1.10.8 se tiene  $\chi_{C_0(M_5)} = \chi_{V_0 \uparrow_{H_0}^{S_5}}$ .

Aplicamos reciprocidad de Frobenius (ver teorema 1.10.5), para obtener la multiplicidad de cada módulo de Specht en la descomposición de  $C_0(M_5)$ .

No. Elementos	1	1	3	3	2	2
Clase	(1)	(45)	(12)	(12)(45)	(123)	(123)(45)
$\chi_{S^{(5)} \downarrow_{H_0}}$	1	1	1	1	1	1
$\chi_{S^{(1,1,1,1,1)} \downarrow_{H_0}}$	1	-1	-1	1	1	-1
$\chi_{S^{(4,1)} \downarrow_{H_0}}$	4	2	2	0	1	-1
$\chi_{S^{(2,1,1,1)} \downarrow_{H_0}}$	4	-2	-2	0	1	1
$\chi_{S^{(3,1,1)} \downarrow_{H_0}}$	6	0	0	-2	0	0
$\chi_{S^{(3,2)} \downarrow_{H_0}}$	5	1	1	1	-1	1
$\chi_{S^{(2,2,1)} \downarrow_{H_0}}$	5	-1	-1	1	-1	-1
$\chi_{V_0}$	1	1	1	1	1	1

Tabla 4.3: Caracteres de  $S_5$  restringidos a  $H_0$  y carácter de  $V_0$

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{C_0(M_5)}, \chi_{S^{(5)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0 \uparrow_{H_0}^{S_5}}, \chi_{S^{(5)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_0}, \chi_{S^{(5)} \downarrow_{H_0}} \rangle_{H_0} \\
&= \frac{1}{12}(1 + 1 + 3 + 3 + 2 + 2) = 1, \\
\langle \chi_{C_0(M_5)}, \chi_{S^{(1,1,1,1,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0 \uparrow_{H_0}^{S_5}}, \chi_{S^{(1,1,1,1,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_0}, \chi_{S^{(1,1,1,1,1)} \downarrow_{H_0}} \rangle_{H_0} \\
&= \frac{1}{12}(1 - 1 - 3 + 3 + 2 - 2) = 0, \\
\langle \chi_{C_0(M_5)}, \chi_{S^{(4,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0 \uparrow_{H_0}^{S_5}}, \chi_{S^{(4,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_0}, \chi_{S^{(4,1)} \downarrow_{H_0}} \rangle_{H_0} \\
&= \frac{1}{12}(4 + 2 + 6 + 0 + 2 - 2) = 1, \\
\langle \chi_{C_0(M_5)}, \chi_{S^{(2,1,1,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0 \uparrow_{H_0}^{S_5}}, \chi_{S^{(2,1,1,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_0}, \chi_{S^{(2,1,1,1)} \downarrow_{H_0}} \rangle_{H_0} \\
&= \frac{1}{12}(4 - 2 - 6 + 0 + 2 + 2) = 0, \\
\langle \chi_{C_0(M_5)}, \chi_{S^{(3,1,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0 \uparrow_{H_0}^{S_5}}, \chi_{S^{(3,1,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_0}, \chi_{S^{(3,1,1)} \downarrow_{H_0}} \rangle_{H_0} \\
&= \frac{1}{12}(6 + 0 + 0 - 6 + 0 + 0) = 0, \\
\langle \chi_{C_0(M_5)}, \chi_{S^{(3,2)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0 \uparrow_{H_0}^{S_5}}, \chi_{S^{(3,2)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_0}, \chi_{S^{(3,2)} \downarrow_{H_0}} \rangle_{H_0} \\
&= \frac{1}{12}(5 + 1 + 3 + 3 - 2 + 2) = 1, \\
\langle \chi_{C_0(M_5)}, \chi_{S^{(2,2,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0 \uparrow_{H_0}^{S_5}}, \chi_{S^{(2,2,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_0}, \chi_{S^{(2,2,1)} \downarrow_{H_0}} \rangle_{H_0} \\
&= \frac{1}{12}(5 - 1 - 3 + 3 - 2 - 2) = 0.
\end{aligned}$$

De los productos internos calculados anteriormente obtenemos:

$$C_0(M_5) \cong \mathbb{C} \oplus S^{(4,1)} \oplus S^{(3,2)}. \quad (4.9)$$

**Observación:** De la tabla 4.3, sean  $(45), (12) \in H_0$ ,  $(45)$  y  $(12)$  no son conjugados, pues no existe un elemento  $h \in H_0$  tal que  $(45) = h(12)h^{-1}$ , por lo que  $(45)$  y  $(12)$  están en diferentes columnas de la tabla 4.3. Sin embargo, para realizar los cálculos del producto interno de caracteres, se pudo haber considerado  $(45)$  en la misma columna de  $(12)$ . En las tablas de caracteres que restan en el capítulo, colocaremos las permutaciones que tengan la misma estructura en ciclos en la misma columna siempre y cuando tengan el mismo carácter, como la dimensión de todos los módulos inducidos considerados es 1, las permutaciones actuando en el simplejo que genera a tal módulo deben tener la misma orientación para que dichas permutaciones estén en la misma columna.

Ahora consideremos los siguientes conjuntos, nuevamente para usar reciprocidad de Frobenius.

$$\begin{aligned} H_1 &= \langle (\overline{13}, \overline{24}) \rangle, \\ V_1 &= \{g \in S_5 \mid gH_1 = H_1\}. \end{aligned}$$

Elementos	(1)	(24)	(1432)	(14)(23)	(13)(24)
	(13)	(1234)	(12)(34)		
$\chi_{S^{(5)} \downarrow_{H_1}}$	1	1	1	1	1
$\chi_{S^{(1,1,1,1,1)} \downarrow_{H_1}}$	1	-1	-1	1	1
$\chi_{S^{(4,1)} \downarrow_{H_1}}$	4	2	0	0	0
$\chi_{S^{(2,1,1,1)} \downarrow_{H_1}}$	4	-2	0	0	0
$\chi_{S^{(3,1,1)} \downarrow_{H_1}}$	6	0	0	-2	-2
$\chi_{S^{(3,2)} \downarrow_{H_1}}$	5	1	-1	1	1
$\chi_{S^{(2,2,1)} \downarrow_{H_1}}$	5	-1	1	1	1
$\chi_{V_1}$	1	1	-1	-1	1

Tabla 4.4: Caracteres de  $S_5$  restringidos a  $H_1$  y carácter de  $V_1$

$$\begin{aligned} \langle \chi_{C_1(M_5)}, \chi_{S^{(5)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{H_1}^{S_5}}, \chi_{S^{(5)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_1}, \chi_{S^{(5)} \downarrow_{H_1}} \rangle_{H_1} \\ &= \frac{1}{8}(1 + 2 - 2 - 2 + 1) = 0, \\ \langle \chi_{C_1(M_5)}, \chi_{S^{(1,1,1,1,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{H_1}^{S_5}}, \chi_{S^{(1,1,1,1,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_1}, \chi_{S^{(1,1,1,1,1)} \downarrow_{H_1}} \rangle_{H_1} \\ &= \frac{1}{8}(1 - 2 + 2 - 2 + 1) = 0, \\ \langle \chi_{C_1(M_5)}, \chi_{S^{(4,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{H_1}^{S_5}}, \chi_{S^{(4,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_1}, \chi_{S^{(4,1)} \downarrow_{H_1}} \rangle_{H_1} \\ &= \frac{1}{8}(4 + 4 + 0 + 0 + 0) = 1, \\ \langle \chi_{C_1(M_5)}, \chi_{S^{(2,1,1,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{H_1}^{S_5}}, \chi_{S^{(2,1,1,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_1}, \chi_{S^{(2,1,1,1)} \downarrow_{H_1}} \rangle_{H_1} \\ &= \frac{1}{8}(4 - 4 + 0 + 0 + 0) = 0, \\ \langle \chi_{C_1(M_5)}, \chi_{S^{(3,1,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{H_1}^{S_5}}, \chi_{S^{(3,1,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_1}, \chi_{S^{(3,1,1)} \downarrow_{H_1}} \rangle_{H_1} \\ &= \frac{1}{8}(6 + 0 + 0 + 4 - 2) = 1, \\ \langle \chi_{C_1(M_5)}, \chi_{S^{(3,2)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{H_1}^{S_5}}, \chi_{S^{(3,2)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_1}, \chi_{S^{(3,2)} \downarrow_{H_1}} \rangle_{H_1} \\ &= \frac{1}{8}(5 + 2 + 2 - 2 + 1) = 1, \\ \langle \chi_{C_1(M_5)}, \chi_{S^{(2,2,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{H_1}^{S_5}}, \chi_{S^{(2,2,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_1}, \chi_{S^{(2,2,1)} \downarrow_{H_1}} \rangle_{H_1} \\ &= \frac{1}{8}(5 - 2 - 2 - 2 + 1) = 0. \end{aligned}$$

De donde obtenemos:

$$C_1(M_5) \cong S^{(4,1)} \oplus S^{(3,1,1)} \oplus S^{(3,2)}. \quad (4.10)$$

En la figura 4.3 se muestra el diagrama conmutativo de los complejos de cadenas de  $M_5$ , donde  $f_0$  y  $f_1$  son los isomorfismos obtenidos de las expresiones 4.9 y 4.10.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(M_5) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(M_5) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\widehat{\partial}_2} & S^{(4,1)} \oplus S^{(3,1,1)} \oplus S^{(3,2)} & \xrightarrow{\widehat{\partial}_1} & \mathbb{C} \oplus S^{(4,1)} \oplus S^{(3,2)} & \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} & \mathbb{C} \end{array}$$

Figura 4.3: Diagrama conmutativo de los complejos de cadenas de  $M_5$

Calculemos los módulos de homología reducida  $\widetilde{H}_0(M_4)$  y  $\widetilde{H}_1(M_4)$ .

Como  $\widehat{\varepsilon}$  es suprayectiva y por el teorema 1.7.6 tenemos:

$$(\mathbb{C} \oplus S^{(4,1)} \oplus S^{(3,2)}) / \ker \widehat{\varepsilon} \cong \text{im } \widehat{\varepsilon} = \mathbb{C}$$

así que

$$\ker \widehat{\varepsilon} \cong S^{(4,1)} \oplus S^{(3,2)}.$$

Sabemos que  $\widetilde{H}_0(M_5) = \ker \widehat{\varepsilon} / \text{im } \widehat{\partial}_1 = 0$ , pues  $M_5$  es conexo. Se sigue entonces que  $\ker \widehat{\varepsilon} \cong \text{im } \widehat{\partial}_1$ , con lo cual:

$$\text{im } \widehat{\partial}_1 \cong S^{(4,1)} \oplus S^{(3,2)}. \quad (4.11)$$

Además del teorema 1.7.6 y la expresión 4.11, se tiene:

$$(S^{(4,1)} \oplus S^{(3,1,1)} \oplus S^{(3,2)}) / \ker \widehat{\partial}_1 \cong \text{im } \widehat{\partial}_1.$$

De lo anterior y la proposición 1.7.9 tenemos:

$$\ker \widehat{\partial}_1 = S^{(3,1,1)}. \quad (4.12)$$

Por otro lado,

$$\text{im } \widehat{\partial}_2 = \widehat{\partial}_2(0) = 0. \quad (4.13)$$

pues  $\widehat{\partial}_2$  es un homomorfismo de módulos.

De las ecuaciones 4.12 y 4.13 concluimos:

$$\widetilde{H}_1(M_5) = \ker \widehat{\partial}_1 / \text{im } \widehat{\partial}_2 = S^{(3,1,1)} / 0 = S^{(3,1,1)}.$$



lo llevamos a su forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como el rango de la matriz es 9, obtenemos  $\dim(\text{im } \partial_1) = 9$ , lo cual implica que  $\dim(\text{im } \widehat{\partial}_1) = 9$  (se sigue de la definición de  $\widehat{\partial}_1$ ).

Por el teorema 1.7.8 tenemos:

$$\widehat{\partial}_1(S^{(4,1)}) = S^{(4,1)} \quad \circ \quad \widehat{\partial}_1(S^{(4,1)}) = 0$$

$$\widehat{\partial}_1(S^{(3,1,1)}) = 0$$

$$\widehat{\partial}_1(S^{(3,2)}) = S^{(4,1)} \quad \circ \quad \widehat{\partial}_1(S^{(3,2)}) = 0$$

además  $\dim(S^{(4,1)}) = 4$  y  $\dim(S^{(3,2)}) = 5$ , luego

$$\text{im } \widehat{\partial}_1 = \widehat{\partial}_1(S^{(4,1)} \oplus S^{(3,1,1)} \oplus S^{(3,2)}) = S^{(4,1)} \oplus S^{(3,2)}.$$

## 4.4 Módulos de homología reducida de $K(M_5)$

La gráfica de clanes de  $G_5$ , es decir  $K(G_5)$ , se muestra en la figura 4.4. Consideremos ahora su complejo de subgráficas completas  $\Delta(K(G_5))$  al que denotaremos simplemente como  $K(M_5)$ . Este complejo tiene como vértices (aristas de la gráfica de  $M_5$ ):

$$\begin{array}{lll} a_1 = (\overline{12}, \overline{34}) & a_6 = (\overline{13}, \overline{45}) & a_{11} = (\overline{15}, \overline{24}) \\ a_2 = (\overline{12}, \overline{35}) & a_7 = (\overline{14}, \overline{23}) & a_{12} = (\overline{15}, \overline{34}) \\ a_3 = (\overline{12}, \overline{45}) & a_8 = (\overline{14}, \overline{25}) & a_{13} = (\overline{23}, \overline{45}) \\ a_4 = (\overline{13}, \overline{24}) & a_9 = (\overline{14}, \overline{35}) & a_{14} = (\overline{24}, \overline{35}) \\ a_5 = (\overline{13}, \overline{25}) & a_{10} = (\overline{15}, \overline{23}) & a_{15} = (\overline{25}, \overline{34}) \end{array}$$

La familia de 1-simplejos orientados estará dada por:

$$\begin{array}{llll}
b_1 = (a_1, a_2) & b_9 = (a_3, a_{13}) & b_{17} = (a_6, a_{13}) & b_{25} = (a_{10}, a_{11}) \\
b_2 = (a_1, a_3) & b_{10} = (a_4, a_5) & b_{18} = (a_7, a_8) & b_{26} = (a_{10}, a_{12}) \\
b_3 = (a_1, a_{12}) & b_{11} = (a_4, a_6) & b_{19} = (a_7, a_9) & b_{27} = (a_{10}, a_{13}) \\
b_4 = (a_1, a_{15}) & b_{12} = (a_4, a_{11}) & b_{20} = (a_7, a_{10}) & b_{28} = (a_{11}, a_{12}) \\
b_5 = (a_2, a_3) & b_{13} = (a_4, a_{14}) & b_{21} = (a_7, a_{13}) & b_{29} = (a_{11}, a_{14}) \\
b_6 = (a_2, a_9) & b_{14} = (a_5, a_6) & b_{22} = (a_8, a_9) & b_{30} = (a_{12}, a_{15}) \\
b_7 = (a_2, a_{14}) & b_{15} = (a_5, a_8) & b_{23} = (a_8, a_{15}) & \\
b_8 = (a_3, a_6) & b_{16} = (a_5, a_{15}) & b_{24} = (a_9, a_{14}) & 
\end{array}$$

Los 2-simplejos orientados son:

$$\begin{array}{llll}
c_1 = (a_1, a_2, a_3) & c_4 = (a_3, a_6, a_{13}) & c_7 = (a_5, a_8, a_{15}) & c_9 = (a_7, a_{10}, a_{13}) \\
c_2 = (a_1, a_{12}, a_{15}) & c_5 = (a_4, a_5, a_6) & c_8 = (a_7, a_8, a_9) & c_{10} = (a_{10}, a_{11}, a_{12}) \\
c_3 = (a_2, a_9, a_{14}) & c_6 = (a_4, a_{11}, a_{14}) & & 
\end{array}$$

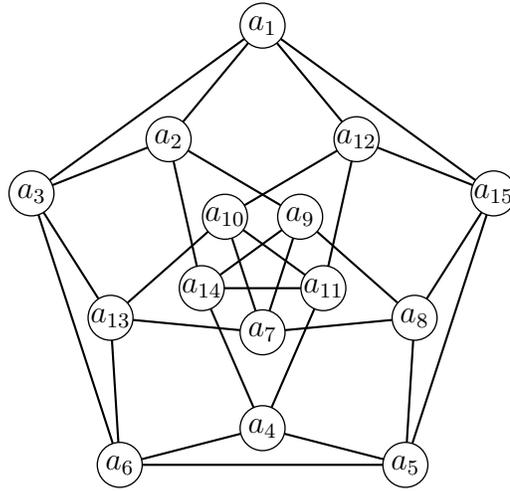


Figura 4.4: Gráfica de clanes  $K(G_5)$

A continuación obtendremos la descomposición de los  $S_5$ -módulos de cadenas  $C_k(K(M_5))$ , para  $k = 0, 1, 2$ , en módulos de Specht por medio del teorema 1.10.5 de la reciprocidad de Frobenius.

Consideremos:

$$\begin{aligned}
V_0 &= \langle a_1 \rangle = \langle (\overline{12}, \overline{34}) \rangle, \\
H_0 &= \{g \in S_5 \mid gV_0 = V_0\}.
\end{aligned}$$

Entonces  $C_0(K(M_5)) = V_0 \uparrow_{H_0}^{S_5}$ .

Elementos	(12)(34)			
	(1)	(12)	(1324)	(13)(24)
$\chi_{S^{(5)}\downarrow_{H_0}}$	1	1	1	1
$\chi_{S^{(1,1,1,1,1)}\downarrow_{H_0}}$	1	-1	-1	1
$\chi_{S^{(4,1)}\downarrow_{H_0}}$	4	2	0	0
$\chi_{S^{(2,1,1,1)}\downarrow_{H_0}}$	4	-2	0	0
$\chi_{S^{(3,1,1)}\downarrow_{H_0}}$	6	0	0	-2
$\chi_{S^{(3,2)}\downarrow_{H_0}}$	5	1	-1	1
$\chi_{S^{(2,2,1)}\downarrow_{H_0}}$	5	-1	1	1
$\chi_{V_0}$	1	1	1	1

Tabla 4.5: Caracteres de  $S_5$  restringidos a  $H_0$  y carácter de  $V_0$ 

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{C_0(K(M_5))}, \chi_{S^{(5)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0\uparrow_{H_0}^{S_5}}, \chi_{S^{(5)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_0}, \chi_{S^{(5)}\downarrow_{H_0}} \rangle_{H_0} = 1, \\
\langle \chi_{C_0(K(M_5))}, \chi_{S^{(1,1,1,1,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0\uparrow_{H_0}^{S_5}}, \chi_{S^{(1,1,1,1,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_0}, \chi_{S^{(1,1,1,1,1)}\downarrow_{H_0}} \rangle_{H_0} = 0, \\
\langle \chi_{C_0(K(M_5))}, \chi_{S^{(4,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0\uparrow_{H_0}^{S_5}}, \chi_{S^{(4,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_0}, \chi_{S^{(4,1)}\downarrow_{H_0}} \rangle_{H_0} = 1, \\
\langle \chi_{C_0(K(M_5))}, \chi_{S^{(2,1,1,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0\uparrow_{H_0}^{S_5}}, \chi_{S^{(2,1,1,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_0}, \chi_{S^{(2,1,1,1)}\downarrow_{H_0}} \rangle_{H_0} = 0, \\
\langle \chi_{C_0(K(M_5))}, \chi_{S^{(3,1,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0\uparrow_{H_0}^{S_5}}, \chi_{S^{(3,1,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_0}, \chi_{S^{(3,1,1)}\downarrow_{H_0}} \rangle_{H_0} = 0, \\
\langle \chi_{C_0(K(M_5))}, \chi_{S^{(3,2)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0\uparrow_{H_0}^{S_5}}, \chi_{S^{(3,2)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_0}, \chi_{S^{(3,2)}\downarrow_{H_0}} \rangle_{H_0} = 1, \\
\langle \chi_{C_0(K(M_5))}, \chi_{S^{(2,2,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_0\uparrow_{H_0}^{S_5}}, \chi_{S^{(2,2,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_0}, \chi_{S^{(2,2,1)}\downarrow_{H_0}} \rangle_{H_0} = 1.
\end{aligned}$$

Con los productos internos calculados obtenemos:

$$C_0(K(M_5)) \cong \mathbb{C} \oplus S^{(4,1)} \oplus S^{(3,2)} \oplus S^{(2,2,1)}. \quad (4.14)$$

Consideremos ahora los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \langle b_1 \rangle = \langle (a_1, a_2) \rangle = \langle ((\overline{12}, \overline{34}), (\overline{12}, \overline{35})) \rangle, \\
H_1 &= \{g \in S_5 \mid gV_1 = V_1\} = \{(1), (12), (45), (12)(45)\}.
\end{aligned}$$

Elementos	(1)	(12)	(45)	(12)(45)
$\chi_{S^{(5)}\downarrow_{H_1}}$	1	1	1	1
$\chi_{S^{(1,1,1,1,1)}\downarrow_{H_1}}$	1	-1	-1	1
$\chi_{S^{(4,1)}\downarrow_{H_1}}$	4	2	2	0
$\chi_{S^{(2,1,1,1)}\downarrow_{H_1}}$	4	-2	-2	0
$\chi_{S^{(3,1,1)}\downarrow_{H_1}}$	6	0	0	-2
$\chi_{S^{(3,2)}\downarrow_{H_1}}$	5	1	1	1
$\chi_{S^{(2,2,1)}\downarrow_{H_1}}$	5	-1	-1	1
$\chi_{V_1}$	1	1	-1	-1

Tabla 4.6: Caracteres de  $S_5$  restringidos a  $H_1$  y carácter de  $V_1$ 

De la tabla 4.6 calculamos los productos internos:

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{C_1(K(M_5))}, \chi_{S^{(5)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{H_1}^{S_5}}, \chi_{S^{(5)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_1}, \chi_{S^{(5)}\downarrow_{H_1}} \rangle_{H_1} = 0, \\
\langle \chi_{C_1(K(M_5))}, \chi_{S^{(1,1,1,1,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{H_1}^{S_5}}, \chi_{S^{(1,1,1,1,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_1}, \chi_{S^{(1,1,1,1,1)}\downarrow_{H_1}} \rangle_{H_1} = 0, \\
\langle \chi_{C_1(K(M_5))}, \chi_{S^{(4,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{H_1}^{S_5}}, \chi_{S^{(4,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_1}, \chi_{S^{(4,1)}\downarrow_{H_1}} \rangle_{H_1} = 1, \\
\langle \chi_{C_1(K(M_5))}, \chi_{S^{(2,1,1,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{H_1}^{S_5}}, \chi_{S^{(2,1,1,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_1}, \chi_{S^{(2,1,1,1)}\downarrow_{H_1}} \rangle_{H_1} = 1, \\
\langle \chi_{C_1(K(M_5))}, \chi_{S^{(3,1,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{H_1}^{S_5}}, \chi_{S^{(3,1,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_1}, \chi_{S^{(3,1,1)}\downarrow_{H_1}} \rangle_{H_1} = 2, \\
\langle \chi_{C_1(K(M_5))}, \chi_{S^{(3,2)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{H_1}^{S_5}}, \chi_{S^{(3,2)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_1}, \chi_{S^{(3,2)}\downarrow_{H_1}} \rangle_{H_1} = 1, \\
\langle \chi_{C_1(K(M_5))}, \chi_{S^{(2,2,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_1 \uparrow_{H_1}^{S_5}}, \chi_{S^{(2,2,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_1}, \chi_{S^{(2,2,1)}\downarrow_{H_1}} \rangle_{H_1} = 1.
\end{aligned}$$

De donde resulta:

$$C_1(K(M_5)) \cong S^{(4,1)} \oplus S^{(2,1,1,1)} \oplus 2S^{(3,1,1)} \oplus S^{(3,2)} \oplus S^{(2,2,1)}. \quad (4.15)$$

Ahora tomemos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
V_2 = \langle c_1 \rangle &= \langle (a_1, a_2, a_3) \rangle = \langle ((\overline{12}, \overline{34}), (\overline{12}, \overline{35}), (\overline{12}, \overline{45})) \rangle, \\
H_2 &= \{g \in S_5 \mid gV_2 = V_2\}.
\end{aligned}$$

Con lo cual conseguimos la tabla 4.7.

Elementos			(34)	(12)(34)		
	(1)	(12)	(35)	(12)(35)	(345)	(12)(345)
	(1)	(12)	(45)	(12)(45)	(354)	(12)(354)
$\chi_{S^{(5)}\downarrow_{H_2}}$	1	1	1	1	1	1
$\chi_{S^{(1,1,1,1,1)}\downarrow_{H_2}}$	1	-1	-1	1	1	-1
$\chi_{S^{(4,1)}\downarrow_{H_2}}$	4	2	2	0	1	-1
$\chi_{S^{(2,1,1,1)}\downarrow_{H_2}}$	4	-2	-2	0	1	1
$\chi_{S^{(3,1,1)}\downarrow_{H_2}}$	6	0	0	-2	0	0
$\chi_{S^{(3,2)}\downarrow_{H_2}}$	5	1	1	1	-1	1
$\chi_{S^{(2,2,1)}\downarrow_{H_2}}$	5	-1	-1	1	-1	-1
$\chi_{V_2}$	1	1	-1	-1	1	1

Tabla 4.7: Caracteres de  $S_5$  restringidos a  $H_2$  y carácter de  $V_2$ 

La cual nos ayuda a calcular los siguientes productos internos:

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{C_2(K(M_5))}, \chi_{S^{(5)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_2\uparrow_{H_2}^{S_5}}, \chi_{S^{(5)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_2}, \chi_{S^{(5)}\downarrow_{H_2}} \rangle_{H_2} = 0, \\
\langle \chi_{C_2(K(M_5))}, \chi_{S^{(1,1,1,1,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_2\uparrow_{H_2}^{S_5}}, \chi_{S^{(1,1,1,1,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_2}, \chi_{S^{(1,1,1,1,1)}\downarrow_{H_2}} \rangle_{H_2} = 0, \\
\langle \chi_{C_2(K(M_5))}, \chi_{S^{(4,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_2\uparrow_{H_2}^{S_5}}, \chi_{S^{(4,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_2}, \chi_{S^{(4,1)}\downarrow_{H_2}} \rangle_{H_2} = 0, \\
\langle \chi_{C_2(K(M_5))}, \chi_{S^{(2,1,1,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_2\uparrow_{H_2}^{S_5}}, \chi_{S^{(2,1,1,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_2}, \chi_{S^{(2,1,1,1)}\downarrow_{H_2}} \rangle_{H_2} = 1, \\
\langle \chi_{C_2(K(M_5))}, \chi_{S^{(3,1,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_2\uparrow_{H_2}^{S_5}}, \chi_{S^{(3,1,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_2}, \chi_{S^{(3,1,1)}\downarrow_{H_2}} \rangle_{H_2} = 1, \\
\langle \chi_{C_2(K(M_5))}, \chi_{S^{(3,2)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_2\uparrow_{H_2}^{S_5}}, \chi_{S^{(3,2)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_2}, \chi_{S^{(3,2)}\downarrow_{H_2}} \rangle_{H_2} = 0, \\
\langle \chi_{C_2(K(M_5))}, \chi_{S^{(2,2,1)}} \rangle_{S_5} &= \langle \chi_{V_2\uparrow_{H_2}^{S_5}}, \chi_{S^{(2,2,1)}} \rangle_{S_5} = \langle \chi_{V_2}, \chi_{S^{(2,2,1)}\downarrow_{H_2}} \rangle_{H_2} = 0.
\end{aligned}$$

De donde obtenemos:

$$C_2(K(M_5)) \cong S^{(2,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1)}. \quad (4.16)$$

En la figura 4.5 se muestra el diagrama conmutativo de los complejos de cadenas de  $K(M_5)$ , donde  $f_0$ ,  $f_1$  y  $f_2$  son los isomorfismos obtenidos de las expresiones 4.14, 4.15 y 4.16.

Denotemos a  $\widehat{C}_k(K(M_5))$ , para  $k = 0, 1, 2$ , como sigue:

$$\begin{aligned}
\widehat{C}_0(K(M_5)) &= \mathbb{C} \oplus S^{(4,1)} \oplus S^{(3,2)} \oplus S^{(2,2,1)}. \\
\widehat{C}_1(K(M_5)) &= S^{(4,1)} \oplus S^{(2,1,1,1)} \oplus 2S^{(3,1,1)} \oplus S^{(3,2)} \oplus S^{(2,2,1)}. \\
\widehat{C}_2(K(M_5)) &= S^{(2,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \xrightarrow{\partial_3} & C_2(K(M_5)) & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(K(M_5)) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(K(M_5)) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{C} \\
\downarrow & & f_2 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow & & \downarrow \\
0 & \xrightarrow{\widehat{\partial}_3} & \widehat{C}_2(K(M_5)) & \xrightarrow{\widehat{\partial}_2} & \widehat{C}_1(K(M_5)) & \xrightarrow{\widehat{\partial}_1} & \widehat{C}_0(K(M_5)) & \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} & \mathbb{C}
\end{array}$$

Figura 4.5: Diagrama conmutativo de los complejos de cadenas de  $K(M_5)$ 

Calculemos los módulos de homología reducida  $\widetilde{H}_k(K(M_5))$ , para  $k = 0, 1, 2$ . Como  $\widehat{\varepsilon}$  es suprayectiva y por el teorema 1.7.6 tenemos:

$$(\mathbb{C} \oplus S^{(4,1)} \oplus S^{(3,2)} \oplus S^{(2,2,1)}) / \ker \widehat{\varepsilon} \cong \text{im } \widehat{\varepsilon} = \mathbb{C},$$

así que

$$\ker \widehat{\varepsilon} \cong S^{(4,1)} \oplus S^{(3,2)} \oplus S^{(2,2,1)}.$$

Sabemos que  $\widetilde{H}_0(K(M_5)) = \ker \widehat{\varepsilon} / \text{im } \widehat{\partial}_1 = 0$ , pues  $K(M_5)$  es conexo. Se sigue que  $\ker \widehat{\varepsilon} \cong \text{im } \widehat{\partial}_1$ , con lo cual:

$$\text{im } \widehat{\partial}_1 \cong S^{(4,1)} \oplus S^{(3,2)} \oplus S^{(2,2,1)}. \quad (4.17)$$

Además del teorema 1.7.6 y la expresión 4.17 se tiene:

$$(S^{(4,1)} \oplus S^{(2,1,1,1)} \oplus 2S^{(3,1,1)} \oplus S^{(3,2)} \oplus S^{(2,2,1)}) / \ker \widehat{\partial}_1 \cong \text{im } \widehat{\partial}_1.$$

De lo anterior y la proposición 1.7.9 tenemos:

$$\ker \widehat{\partial}_1 = S^{(2,1,1,1)} \oplus 2S^{(3,1,1)}. \quad (4.18)$$

Por otro lado,

$$\text{im } \widehat{\partial}_3 = \widehat{\partial}_3(0) = 0,$$

pues  $\widehat{\partial}_3$  es un homomorfismo de módulos. Ya que  $M_5 \simeq K(M_5)$  (resultado de [11]), por el teorema 3.4.3, tenemos que  $\widetilde{H}_2(M_5) \cong \widetilde{H}_2(K(M_5))$  y  $\widetilde{H}_2(M_5) = 0$ , así que:

$$\widetilde{H}_2(K(M_5)) = \ker \widehat{\partial}_2 / \text{im } \widehat{\partial}_3 = 0,$$

por lo que  $\ker \widehat{\partial}_2 = 0$ . Del teorema 1.7.6 tenemos:

$$(S^{(2,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1)}) / \ker \widehat{\partial}_2 \cong \text{im } \widehat{\partial}_2.$$

De lo anterior y la proposición 1.7.9 tenemos:

$$\text{im } \widehat{\partial}_2 = S^{(2,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1)}. \quad (4.19)$$

De las ecuaciones 4.18 y 4.19 tenemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_1(K(M_5)) &= \ker \widehat{\partial}_1 / \text{im } \widehat{\partial}_2 \\ &= (S^{(2,1,1,1)} \oplus 2S^{(3,1,1)}) / (S^{(2,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1)}) = S^{(3,1,1)}. \end{aligned}$$

Anteriormente usamos el hecho de que  $M_5 \simeq K(M_5)$  para concluir que  $\widetilde{H}_2(K(M_5)) = \widetilde{H}_2(M_5) = 0$ . Sin embargo veamos que es posible calcular  $\text{im } \widehat{\partial}_2$  por métodos elementales.

Verifiquemos primero que  $\dim(\text{im } \partial_2) = 10$ . Del teorema 1.1.7, sabemos que  $\text{im } \partial_2 = \langle \partial_2(c_1), \dots, \partial_2(c_{10}) \rangle$ , veamos que el número de vectores linealmente independientes de la  $\text{im } \partial_2$  es 10, es decir, si

$$\lambda_1 \partial_2(c_1) + \lambda_2 \partial_2(c_2) + \dots + \lambda_{10} \partial_2(c_{10}) = 0$$

así que:

$$\begin{aligned} &\lambda_1(a_2a_3 - a_1a_3 + a_1a_2) + \lambda_2(a_{12}a_{15} - a_1a_{15} + a_1a_{12}) + \lambda_3(a_9a_{14} - a_2a_{14} + a_2a_9) \\ &+ \lambda_4(a_6a_{13} - a_3a_{13} + a_3a_6) + \lambda_5(a_5a_6 - a_4a_6 + a_4a_5) + \lambda_6(a_{11}a_{14} - a_4a_{14} + a_4a_{11}) \\ &+ \lambda_7(a_8a_{15} - a_5a_{15} + a_5a_8) + \lambda_8(a_8a_9 - a_7a_9 + a_7a_8) + \lambda_9(a_{10}a_{13} - a_7a_{13} + a_7a_{10}) \\ &+ \lambda_{10}(a_{11}a_{12} - a_{10}a_{12} + a_{10}a_{11}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Claramente  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{10} = 0$ , intuitivamente esto se puede deducir de la gráfica 4.4. Sea  $b_j$  la frontera de algún 2-simplejo  $c_i$ , las aristas de  $b_j$  no pertenece a ningún otro triángulo distinto de  $c_i$ , por lo tanto  $\partial_2(c_j)$  no es combinación lineal de las fronteras  $\partial_2(c_i)$  con  $i \neq j$ .

Así que  $\dim(\text{im } \partial_2) = 10$ , lo cual implica que  $\dim(\text{im } \widehat{\partial}_2) = 10$  (se sigue de la definición de  $\widehat{\partial}_2$ ).

Ahora, por el teorema 1.7.8 tenemos:

$$\begin{aligned} \widehat{\partial}_2(S^{(2,1,1,1)}) = S^{(2,1,1,1)} \quad \circ \quad \widehat{\partial}_2(S^{(2,1,1,1)}) = 0 \\ \text{y} \\ \widehat{\partial}_2(S^{(3,1,1)}) = S^{(3,1,1)} \quad \circ \quad \widehat{\partial}_2(S^{(3,1,1)}) = 0. \end{aligned}$$

Además  $\dim(S^{(2,1,1,1)}) = 4$  y  $\dim(S^{(3,1,1)}) = 6$ , entonces:

$$\text{im } \widehat{\partial}_2 = \widehat{\partial}_2(S^{(2,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1)}) = S^{(2,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1)}.$$

## 4.5 Módulos de homología reducida de $M_6$

Consideremos el complejo de emparejamientos  $M_6$ , que se obtiene de la gráfica  $G_6$  que se muestra en 4.6. El complejo  $M_6$  tiene el conjunto de vértices (aristas de la gráfica de  $K_6$ ):

$$\begin{array}{ccccc} a_1 = \overline{12} & a_4 = \overline{15} & a_7 = \overline{24} & a_{10} = \overline{34} & a_{13} = \overline{45} \\ a_2 = \overline{13} & a_5 = \overline{16} & a_8 = \overline{25} & a_{11} = \overline{35} & a_{14} = \overline{46} \\ a_3 = \overline{14} & a_6 = \overline{23} & a_9 = \overline{26} & a_{12} = \overline{36} & a_{15} = \overline{56} \end{array}$$

los 1-simplejos:

$$\begin{array}{cccc} b_1 = (a_1, a_{10}) & b_{13} = (a_3, a_6) & b_{25} = (a_5, a_6) & b_{37} = (a_8, a_{10}) \\ b_2 = (a_1, a_{11}) & b_{14} = (a_3, a_8) & b_{26} = (a_5, a_7) & b_{38} = (a_8, a_{12}) \\ b_3 = (a_1, a_{12}) & b_{15} = (a_3, a_9) & b_{27} = (a_5, a_8) & b_{39} = (a_8, a_{14}) \\ b_4 = (a_1, a_{13}) & b_{16} = (a_3, a_{11}) & b_{28} = (a_5, a_{10}) & b_{40} = (a_9, a_{10}) \\ b_5 = (a_1, a_{14}) & b_{17} = (a_3, a_{12}) & b_{29} = (a_5, a_{11}) & b_{41} = (a_9, a_{11}) \\ b_6 = (a_1, a_{15}) & b_{18} = (a_3, a_{15}) & b_{30} = (a_5, a_{13}) & b_{42} = (a_9, a_{13}) \\ b_7 = (a_2, a_7) & b_{19} = (a_4, a_6) & b_{31} = (a_6, a_{13}) & b_{43} = (a_{10}, a_{15}) \\ b_8 = (a_2, a_8) & b_{20} = (a_4, a_7) & b_{32} = (a_6, a_{14}) & b_{44} = (a_{11}, a_{14}) \\ b_9 = (a_2, a_9) & b_{21} = (a_4, a_9) & b_{33} = (a_6, a_{15}) & b_{45} = (a_{12}, a_{13}) \\ b_{10} = (a_2, a_{13}) & b_{22} = (a_4, a_{10}) & b_{34} = (a_7, a_{11}) & \\ b_{11} = (a_2, a_{14}) & b_{23} = (a_4, a_{12}) & b_{35} = (a_7, a_{12}) & \\ b_{12} = (a_2, a_{15}) & b_{24} = (a_4, a_{14}) & b_{36} = (a_7, a_{15}) & \end{array}$$

y los 2-simplejos:

$$\begin{array}{ccc} c_1 = (a_1, a_{10}, a_{15}) & c_6 = (a_2, a_9, a_{13}) & c_{11} = (a_4, a_7, a_{12}) \\ c_2 = (a_1, a_{11}, a_{14}) & c_7 = (a_3, a_6, a_{15}) & c_{12} = (a_4, a_9, a_{10}) \\ c_3 = (a_1, a_{12}, a_{13}) & c_8 = (a_3, a_8, a_{12}) & c_{13} = (a_5, a_6, a_{13}) \\ c_4 = (a_2, a_7, a_{15}) & c_9 = (a_3, a_9, a_{11}) & c_{14} = (a_5, a_7, a_{11}) \\ c_5 = (a_2, a_8, a_{14}) & c_{10} = (a_4, a_6, a_{14}) & c_{15} = (a_5, a_8, a_{10}). \end{array}$$

La tabla 4.8 nos ayudará a construir las tablas de caracteres restringidas a los conjuntos que se establecen a continuación, esto para obtener la descomposición de los  $S_6$ -módulos de cadenas  $C_k(M_6)$ , para  $k = 0, 1, 2$ , en módulos de Specht de forma análoga como se hizo en los ejemplos anteriores.

Consideremos:

$$V_0 = \langle a_1 \rangle = \langle (\overline{12}) \rangle,$$

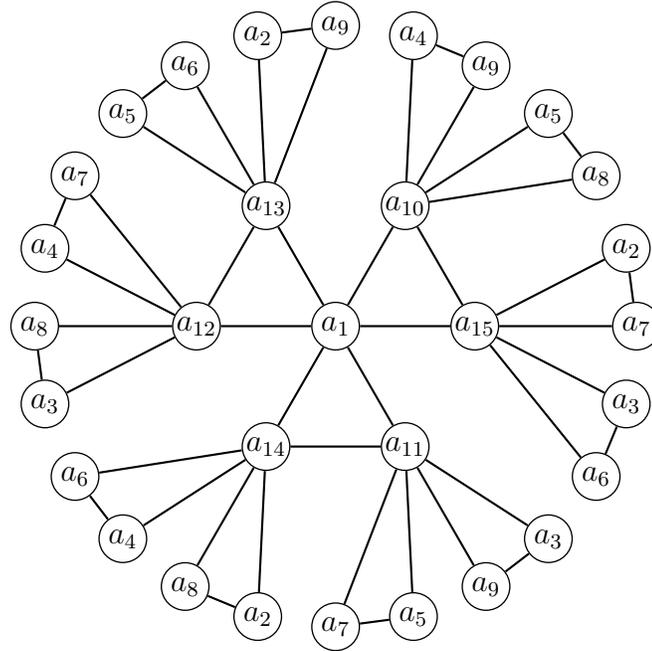


Figura 4.6: Gráfica de emparejamientos  $G_6$

No. de Elementos	720	48	18	16	8	6	5	48	18	8	6
Clase	(1)	(2)	(3)	(2,2)	(4)	(3,2)	(5)	(2,2,2)	(3,3)	(4,2)	(6)
$\chi_{S(6)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{S(1,1,1,1,1,1)}$	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
$\chi_{S(5,1)}$	5	3	2	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1
$\chi_{S(2,1,1,1,1)}$	5	-3	2	1	-1	0	0	1	-1	-1	1
$\chi_{S(4,1,1)}$	10	2	1	-2	0	-1	0	-2	1	0	1
$\chi_{S(3,1,1,1)}$	10	-2	1	-2	0	1	0	2	1	0	-1
$\chi_{S(4,2)}$	9	3	0	1	-1	0	-1	3	0	1	0
$\chi_{S(2,2,1,1)}$	9	-3	0	1	1	0	-1	-3	0	1	0
$\chi_{S(3,3)}$	5	1	-1	1	-1	1	0	-3	2	-1	0
$\chi_{S(2,2,2)}$	5	-1	-1	1	1	-1	0	3	2	-1	0
$\chi_{S(3,2,1)}$	16	0	-2	0	0	0	1	0	-2	0	0

Tabla 4.8: Tabla de caracteres de  $S_6$

$H_0 = \{g \in S_6 \mid gV_0 = V_0\} = \{(1), (12), (34), (35), (36), (45), (46), (56), (345), (346), (354), (356), (364), (365), (456), (465), (12)(34), (12)(35), (12)(36), (12)(45), (12)(46), (12)(56), (34)(56), (35)(46), (36)(45), (3456), (3465), (3546), (3564), (3645), (3654), (345)(12), (346)(12), (354)(12), (356)(12), (364)(12), (365)(12), (456)(12), (465)(12), (12)(34)(56), (12)(35)(46), (12)(36)(45), (3456)(12), (3465)(12), (3546)(12), (3564)(12), (3645)(12), (3654)(12)\}$ .

No. de Elementos Clase	1 (1)	7 (2)	8 (3)	9 (2,2)	6 (4)	8 (3,2)	3 (2,2,2)	6 (4,2)
$\chi_{S^{(6)} \downarrow_{H_0}}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{S^{(1,1,1,1,1,1)} \downarrow_{H_0}}$	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
$\chi_{S^{(5,1)} \downarrow_{H_0}}$	5	3	2	1	1	0	-1	-1
$\chi_{S^{(2,1,1,1,1)} \downarrow_{H_0}}$	5	-3	2	1	-1	0	1	-1
$\chi_{S^{(4,1,1)} \downarrow_{H_0}}$	10	2	1	-2	0	-1	-2	0
$\chi_{S^{(3,1,1,1)} \downarrow_{H_0}}$	10	-2	1	-2	0	1	2	0
$\chi_{S^{(4,2)} \downarrow_{H_0}}$	9	3	0	1	-1	0	3	1
$\chi_{S^{(2,2,1,1)} \downarrow_{H_0}}$	9	-3	0	1	1	0	-3	1
$\chi_{S^{(3,3)} \downarrow_{H_0}}$	5	1	-1	1	-1	1	-3	-1
$\chi_{S^{(2,2,2)} \downarrow_{H_0}}$	5	-1	-1	1	1	-1	3	-1
$\chi_{S^{(3,2,1)} \downarrow_{H_0}}$	16	0	-2	0	0	0	0	0
$\chi_{V_0}$	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 4.9: Caracteres de  $S_6$  restringidos a  $H_0$  y carácter de  $V_0$ 

De los productos internos calculados a partir de la la tabla 4.9 obtenemos:

$$C_0(M_6) \cong \mathbb{C} \oplus S^{(5,1)} \oplus S^{(4,2)}. \quad (4.20)$$

Ahora tomemos:

$$V_1 = \langle b_1 \rangle = \langle (a_1, a_2) \rangle = \langle (\overline{12}, \overline{34}) \rangle,$$

$$\begin{aligned} H_1 = \{g \in S_6 \mid gV_1 = V_1\} = \{ & (1), (12), (34), (56), (12)(34), (12)(56), (34)(56), \\ & (13)(24), (14)(23), (12)(34)(56), (13)(24)(56), (14)(23)(56), (2314), \\ & (2413), (2314)(56), (2413)(56)\}. \end{aligned}$$

Con  $V_1$  y  $H_1$  construimos la tabla 4.10 y calculamos los productos internos correspondientes con la reciprocidad de Frobenius de forma similar a los ejemplos anteriores.

De donde obtenemos:

$$C_1(M_6) = S^{(5,1)} \oplus S^{(4,1,1)} \oplus S^{(4,2)} \oplus S^{(3,3)} \oplus S^{(3,2,1)}. \quad (4.21)$$

Por último consideremos:

$$V_2 = \langle c_1 \rangle = \langle (\overline{12}, \overline{34}, \overline{56}) \rangle,$$

Elementos	(1)	(12)	(12)(34)	(13)(24)	(12)(34)(56)	(13)(24)(56)	(2314)	(2314)(56)
	(56)	(34)	(12)(56)	(14)(23)	(14)(23)(56)	(2413)	(2413)(56)	(2413)(56)
$\chi_{S^{(6)} \downarrow H_1}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{S^{(1,1,1,1,1,1)} \downarrow H_1}$	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
$\chi_{S^{(5,1)} \downarrow H_1}$	5	3	1	1	-1	-1	1	-1
$\chi_{S^{(2,1,1,1,1)} \downarrow H_1}$	5	-3	1	1	1	1	-1	-1
$\chi_{S^{(4,1,1)} \downarrow H_1}$	10	2	-2	-2	-2	-2	0	0
$\chi_{S^{(3,1,1,1)} \downarrow H_1}$	10	-2	-2	-2	2	2	0	0
$\chi_{S^{(4,2)} \downarrow H_1}$	9	3	1	1	3	3	-1	1
$\chi_{S^{(2,2,1,1)} \downarrow H_1}$	9	-3	1	1	-3	-3	1	1
$\chi_{S^{(3,3)} \downarrow H_1}$	5	1	1	1	-3	-3	-1	-1
$\chi_{S^{(2,2,2)} \downarrow H_1}$	5	-1	1	1	3	3	1	-1
$\chi_{S^{(3,2,1)} \downarrow H_1}$	16	0	0	0	0	0	0	0
$\chi_{V_1}$	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1

Tabla 4.10: Caracteres de  $S_6$  restringidos a  $H_1$  y carácter de  $V_1$

$H_2 = \{g \in S_6 \mid gV_2 = V_2\} = \{(1), (12), (34), (56), (12)(34), (12)(56), (34)(56), (13)(24), (14)(23), (15)(26), (16)(25), (35)(46), (36)(45), (12)(34)(56), (13)(24)(56), (14)(23)(56), (15)(26)(34), (16)(25)(34), (35)(46)(12), (36)(45)(12), (2314), (2413), (1625), (1526), (3546), (3645), (2314)(56), (2413)(56), (1625)(34), (1526)(34), (3546)(12), (3645)(12), (135)(246), (136)(245), (145)(236), (146)(235), (153)(264), (154)(263), (163)(254), (164)(253), (135246), (136245), (145236), (146235), (153264), (154263), (163254), (164253)\}$ .

No. de Elementos Clase	1	3	3	6	6	1	6	8	6	8
	(1)	(2)	(2,2)	(2,2)	(4)	(2,2,2)	(2,2,2)	(3,3)	(4,2)	(6)
$\chi_{S^{(6)} \downarrow H_2}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{S^{(1,1,1,1,1,1)} \downarrow H_2}$	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
$\chi_{S^{(5,1)} \downarrow H_2}$	5	3	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
$\chi_{S^{(2,1,1,1,1)} \downarrow H_2}$	5	-3	1	1	-1	1	1	-1	-1	1
$\chi_{S^{(4,1,1)} \downarrow H_2}$	10	2	-2	-2	0	-2	-2	1	0	1
$\chi_{S^{(3,1,1,1)} \downarrow H_2}$	10	-2	-2	-2	0	2	2	1	0	-1
$\chi_{S^{(4,2)} \downarrow H_2}$	9	3	1	1	-1	3	3	0	1	0
$\chi_{S^{(2,2,1,1)} \downarrow H_2}$	9	-3	1	1	1	-3	-3	0	1	0
$\chi_{S^{(3,3)} \downarrow H_2}$	5	1	1	1	-1	-3	-3	2	-1	0
$\chi_{S^{(2,2,2)} \downarrow H_2}$	5	-1	1	1	1	3	3	2	-1	0
$\chi_{S^{(3,2,1)} \downarrow H_2}$	16	0	0	0	0	0	0	-2	0	0
$\chi_{V_2}$	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1

Tabla 4.11: Caracteres de  $S_6$  restringidos a  $H_2$  y carácter de  $V_2$

De la tabla 4.11 obtenemos:

$$C_2(M_6) \cong S^{(4,1,1)} \oplus S^{(3,3)}. \quad (4.22)$$

En la figura 4.7 se muestra el diagrama conmutativo de los complejos de cadena de  $M_6$ , donde  $f_0$ ,  $f_1$  y  $f_2$  son los isomorfismos obtenidos de las expresiones 4.20, 4.21 y 4.22.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \xrightarrow{\partial_3} & C_2(M_6) & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(M_6) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(M_6) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{C} \\
\downarrow & & f_2 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow & & \downarrow \\
0 & \xrightarrow{\widehat{\partial}_3} & S^{(4,1,1)} \oplus S^{(3,3)} & \xrightarrow{\widehat{\partial}_2} & S^{(5,1)} \oplus S^{(4,1,1)} \oplus S^{(4,2)} \oplus S^{(3,3)} \oplus S^{(3,2,1)} & \xrightarrow{\widehat{\partial}_1} & \mathbb{C} \oplus S^{(5,1)} \oplus S^{(4,2)} & \xrightarrow{\widehat{\varepsilon}} & \mathbb{C}
\end{array}$$

Figura 4.7: Diagrama conmutativo de los complejos de cadenas de  $M_6$ 

Por calcular los módulos de homología reducida  $\widetilde{H}_k(M_6)$ , para  $k = 0, 1, 2$ . Como  $\widehat{\varepsilon}$  es suprayectiva y por el teorema 1.7.6 tenemos:

$$(\mathbb{C} \oplus S^{(5,1)} \oplus S^{(4,2)}) / \ker \widehat{\varepsilon} \cong \text{im } \widehat{\varepsilon} = \mathbb{C},$$

así que

$$\ker \widehat{\varepsilon} \cong S^{(5,1)} \oplus S^{(4,2)},$$

Sabemos que  $\widetilde{H}_0(M_6) = \ker \widehat{\varepsilon} / \text{im } \widehat{\partial}_1 = 0$  pues  $M_6$  es conexo, se sigue que  $\ker \widehat{\varepsilon} \cong \text{im } \widehat{\partial}_1$ , con lo cual:

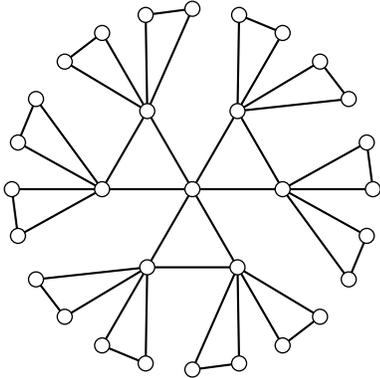
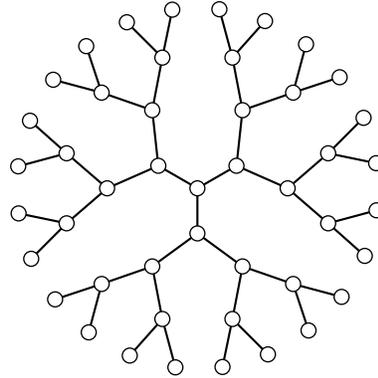
$$\text{im } \widehat{\partial}_1 \cong S^{(5,1)} \oplus S^{(4,2)}. \quad (4.23)$$

Además del teorema 1.7.6 y la expresión 4.23 se tiene:

$$(S^{(5,1)} \oplus S^{(4,1,1)} \oplus S^{(4,2)} \oplus S^{(3,3)} \oplus S^{(3,2,1)}) / \ker \widehat{\partial}_1 \cong \text{im } \widehat{\partial}_1$$

De lo anterior y la proposición 1.7.9 tenemos:

$$\ker \widehat{\partial}_1 = S^{(4,1,1)} \oplus S^{(3,3)} \oplus S^{(3,2,1)}. \quad (4.24)$$

Figura 4.8:  $G_6$ Figura 4.9:  $BK(G_6)$

Por otro lado,  $\widehat{\partial}_3$  es un homomorfismo de módulos, así que:

$$\text{im } \widehat{\partial}_3 = \widehat{\partial}_3(0) = 0.$$

Considerando la figura 4.8. Se observa que contrayendo los triángulos, se encuentra que  $G_6$  es homotópica a  $BK(G_6)$  esto puede demostrarse formalmente ocupando los resultados que aparecen en [10] y [13]. Por el teorema 3.4.3,  $\widetilde{H}_2(M_6) \cong \widetilde{H}_2(\Delta(BK(G_6)))$ . Además  $\widetilde{H}_2(\Delta(BK(G_6))) = 0$ , pues en  $BK(G_6)$  no existen 2-simplejos.

Por lo que:

$$\widetilde{H}_2(M_6) = \ker \widehat{\partial}_2 / \text{im } \widehat{\partial}_3 = 0,$$

por lo que  $\text{im } \widehat{\partial}_3 = \ker \widehat{\partial}_2$ . Del teorema 1.7.6 tenemos:

$$(S^{(4,1,1)} \oplus S^{(3,3)}) / \ker \widehat{\partial}_2 \cong \text{im } \widehat{\partial}_2.$$

De lo anterior y la proposición 1.7.9 tenemos:

$$\text{im } \widehat{\partial}_2 = S^{(4,1,1)} \oplus S^{(3,3)}. \quad (4.25)$$

De las ecuaciones 4.24, 4.25 y la proposición 1.7.9 tenemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_1(M_6) &= \ker \widehat{\partial}_1 / \text{im } \widehat{\partial}_2 \\ &= (S^{(4,1,1)} \oplus S^{(3,3)} \oplus S^{(3,2,1)}) / (S^{(4,1,1)} \oplus S^{(3,3)}) \\ &= S^{(3,2,1)}. \end{aligned}$$

En lo anterior usamos el hecho de que  $G_6 \simeq BK(G_6)$ , de donde se sigue que  $\widetilde{H}_2(M_6) \cong \widetilde{H}_2(\Delta(BK(G_6))) = 0$ . Veamos ahora que podemos calcular  $\text{im } \widehat{\partial}_2$  por métodos elementales.

Verifiquemos primero que  $\dim(\text{im } \partial_2) = 15$ . Del teorema 1.1.7, sabemos que  $\text{im } \partial_2 = \langle \partial_2(c_1), \dots, \partial_2(c_{15}) \rangle$ , veamos que el número de vectores linealmente independientes de la  $\text{im } \partial_2$  es 15, es decir, si

$$\lambda_1 \partial_2(c_1) + \lambda_2 \partial_2(c_2) + \dots + \lambda_{15} \partial_2(c_{15}) = 0$$

entonces,

$$\begin{aligned} &\lambda_1(a_{10}a_{15} - a_1a_{15} + a_1a_{10}) + \lambda_2(a_{11}a_{14} - a_1a_{14} + a_1a_{11}) + \lambda_3(a_{12}a_{13} - a_1a_{13} + a_1a_{12}) \\ &+ \lambda_4(a_7a_{15} - a_2a_{15} + a_2a_7) + \lambda_5(a_8a_{14} - a_2a_{14} + a_2a_8) + \lambda_6(a_9a_{13} - a_2a_{13} + a_2a_9) \\ &+ \lambda_7(a_6a_{15} - a_3a_{15} + a_3a_6) + \lambda_8(a_8a_{12} - a_3a_{12} + a_3a_8) + \lambda_9(a_9a_{11} - a_3a_{11} + a_3a_9) \\ &+ \lambda_{10}(a_6a_{14} - a_4a_{14} + a_4a_6) + \lambda_{11}(a_7a_{12} - a_4a_{12} + a_4a_7) + \lambda_{12}(a_9a_{10} - a_4a_{10} + a_4a_9) \\ &+ \lambda_{13}(a_6a_{13} - a_5a_{13} + a_5a_6) + \lambda_{14}(a_7a_{11} - a_5a_{11} + a_5a_7) + \lambda_{15}(a_8a_{10} - a_5a_{10} + a_5a_8) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Claramente  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{15} = 0$ , intuitivamente esto se puede deducir de la gráfica 4.6. Sea  $b_j$  la frontera de algún 2-simplejo  $c_i$ , las aristas de  $b_j$  no pertenece a ningún otro triángulo distinto de  $c_i$ , por lo tanto  $\partial_2(c_j)$  no es combinación lineal de las fronteras  $\partial_2(c_i)$  con  $i \neq j$ .

Así que  $\dim(\text{im } \partial_2) = 15$ , lo cual implica que  $\dim(\text{im } \widehat{\partial}_2) = 15$  (se sigue de la definición de  $\widehat{\partial}_2$ ).

Ahora, por el teorema 1.7.8 tenemos:

$$\begin{aligned} \widehat{\partial}_2(S^{(4,1,1)}) = S^{(4,1,1)} \quad \text{o} \quad \widehat{\partial}_2(S^{(4,1,1)}) = 0 \\ \text{y} \\ \widehat{\partial}_2(S^{(3,3)}) = S^{(3,3)} \quad \text{o} \quad \widehat{\partial}_2(S^{(3,3)}) = 0 \end{aligned}$$

Además  $\dim(S^{(4,1,1)}) = 10$  y  $\dim(S^{(3,3)}) = 5$ , entonces:

$$\text{im } \widehat{\partial}_2 = \widehat{\partial}_2(S^{(4,1,1)} \oplus S^{(3,3)}) = S^{(4,1,1)} \oplus S^{(3,3)}.$$

## 4.6 Módulos de homología reducida de $K(M_6)$

Consideremos el complejo de clanes de la gráfica de emparejamientos  $M_6$ , al que denotamos como  $K(M_6)$ , que está dado por el conjunto de vértices (triángulos de la gráfica de  $M_6$ ):

$$\begin{aligned} a_1 = (\overline{12}, \overline{34}, \overline{56}) \quad a_6 = (\overline{13}, \overline{26}, \overline{45}) \quad a_{11} = (\overline{15}, \overline{24}, \overline{36}) \\ a_2 = (\overline{12}, \overline{35}, \overline{46}) \quad a_7 = (\overline{14}, \overline{23}, \overline{56}) \quad a_{12} = (\overline{15}, \overline{26}, \overline{34}) \\ a_3 = (\overline{12}, \overline{36}, \overline{45}) \quad a_8 = (\overline{14}, \overline{25}, \overline{36}) \quad a_{13} = (\overline{16}, \overline{23}, \overline{45}) \\ a_4 = (\overline{13}, \overline{24}, \overline{56}) \quad a_9 = (\overline{14}, \overline{26}, \overline{35}) \quad a_{14} = (\overline{16}, \overline{24}, \overline{35}) \\ a_5 = (\overline{13}, \overline{25}, \overline{46}) \quad a_{10} = (\overline{15}, \overline{23}, \overline{46}) \quad a_{15} = (\overline{16}, \overline{25}, \overline{34}). \end{aligned}$$

el conjunto 1-simplejos:

$$\begin{aligned} b_1 = (a_1, a_2) \quad b_{13} = (a_3, a_8) \quad b_{25} = (a_4, a_{14}) \quad b_{37} = (a_9, a_{12}) \\ b_2 = (a_1, a_3) \quad b_{14} = (a_3, a_{11}) \quad b_{26} = (a_5, a_8) \quad b_{38} = (a_{10}, a_{11}) \\ b_3 = (a_1, a_4) \quad b_{15} = (a_3, a_{13}) \quad b_{27} = (a_5, a_6) \quad b_{39} = (a_{10}, a_{12}) \\ b_4 = (a_1, a_7) \quad b_{16} = (a_4, a_7) \quad b_{28} = (a_5, a_{15}) \quad b_{40} = (a_{10}, a_{13}) \\ b_5 = (a_1, a_{12}) \quad b_{17} = (a_5, a_{10}) \quad b_{29} = (a_6, a_9) \quad b_{41} = (a_{11}, a_{12}) \\ b_6 = (a_1, a_{15}) \quad b_{18} = (a_6, a_{13}) \quad b_{30} = (a_6, a_{12}) \quad b_{42} = (a_{11}, a_{14}) \\ b_7 = (a_2, a_3) \quad b_{19} = (a_8, a_{11}) \quad b_{31} = (a_7, a_8) \quad b_{43} = (a_{13}, a_{14}) \\ b_8 = (a_2, a_5) \quad b_{20} = (a_9, a_{14}) \quad b_{32} = (a_7, a_9) \quad b_{44} = (a_{13}, a_{15}) \\ b_9 = (a_2, a_9) \quad b_{21} = (a_{12}, a_{15}) \quad b_{33} = (a_7, a_{10}) \quad b_{45} = (a_{14}, a_{15}). \\ b_{10} = (a_2, a_{10}) \quad b_{22} = (a_4, a_5) \quad b_{34} = (a_7, a_{13}) \\ b_{11} = (a_2, a_{14}) \quad b_{23} = (a_4, a_6) \quad b_{35} = (a_8, a_9) \\ b_{12} = (a_3, a_6) \quad b_{24} = (a_4, a_{11}) \quad b_{36} = (a_8, a_{15}) \end{aligned}$$

y los 2-simplejos:

$$\begin{array}{lll}
c_1 = (a_1, a_2, a_3) & c_6 = (a_3, a_6, a_{13}) & c_{11} = (a_{13}, a_{14}, a_{15}) \\
c_2 = (a_1, a_4, a_7) & c_7 = (a_3, a_8, a_{11}) & c_{12} = (a_7, a_{10}, a_{13}) \\
c_3 = (a_1, a_{12}, a_{15}) & c_8 = (a_4, a_5, a_6) & c_{13} = (a_4, a_{11}, a_{14}) \\
c_4 = (a_2, a_5, a_{10}) & c_9 = (a_7, a_8, a_9) & c_{14} = (a_5, a_8, a_{15}) \\
c_5 = (a_2, a_9, a_{14}) & c_{10} = (a_{10}, a_{11}, a_{12}) & c_{15} = (a_6, a_9, a_{12}).
\end{array}$$

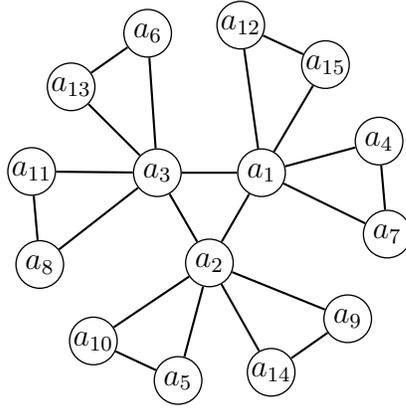


Figura 4.10: Gráfica de clanes  $K(G_6)$

A continuación obtendremos la descomposición de los  $S_6$ -módulos de cadenas  $C_k(K(M_6))$ , para  $k = 0, 1, 2$ , en módulos de Specht por medio del teorema 1.10.5 de la reciprocidad de Frobenius.

Consideremos:

$$V_0 = \langle a_1 \rangle = \langle (\overline{12}, \overline{34}, \overline{56}) \rangle,$$

$$\begin{aligned}
H_0 = \{g \in S_6 \mid gV_0 = V_0\} = \{ & (1), (12), (34), (56), (12)(34), (12)(56), (13)(24), (14)(23), \\
& (15)(26), (16)(25), (34)(56), (35)(46), (36)(45), (1423), (1324), (1625), (1526), \\
& (3645), (3546), (12)(34)(56), (13)(24)(56), (14)(23)(56), (15)(26)(34), (16)(25)(34), \\
& (35)(46)(12), (36)(45)(12), (153)(264), (135)(246), (145)(236), (154)(263), \\
& (136)(245), (163)(254), (146)(235), (164)(253), (1423)(56), (1324)(56), (1625)(34), \\
& (1526)(34), (3645)(12), (3546)(12), (135246), (136245), (145236), (146235), \\
& (153264), (154263), (163254), (164253)\}.
\end{aligned}$$

Con los productos internos calculados a partir de la tabla 4.12 obtenemos:

$$C_0(K(M_6)) \cong \mathbb{C} \oplus S^{(4,2)} \oplus S^{(2,2,2)}. \quad (4.26)$$

No. de Elementos Clase	1 (1)	3 (2)	9 (2,2)	6 (4)	7 (2,2,2)	8 (3,3)	6 (4,2)	8 (6)
$\chi_{S^{(6)}\downarrow_{H_0}}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{S^{(1,1,1,1,1,1)}\downarrow_{H_0}}$	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1
$\chi_{S^{(5,1)}\downarrow_{H_0}}$	5	3	1	1	-1	-1	-1	-1
$\chi_{S^{(2,1,1,1,1)}\downarrow_{H_0}}$	5	-3	1	-1	1	-1	-1	1
$\chi_{S^{(4,1,1)}\downarrow_{H_0}}$	10	2	-2	0	-2	1	0	1
$\chi_{S^{(3,1,1,1)}\downarrow_{H_0}}$	10	-2	-2	0	2	1	0	-1
$\chi_{S^{(4,2)}\downarrow_{H_0}}$	9	3	1	-1	3	0	1	0
$\chi_{S^{(2,2,1,1)}\downarrow_{H_0}}$	9	-3	1	1	-3	0	1	0
$\chi_{S^{(3,3)}\downarrow_{H_0}}$	5	1	1	-1	-3	2	-1	0
$\chi_{S^{(2,2,2)}\downarrow_{H_0}}$	5	-1	1	1	3	2	-1	0
$\chi_{S^{(3,2,1)}\downarrow_{H_0}}$	16	0	0	0	0	-2	0	0
$\chi_{V_0}$	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 4.12: Caracteres de  $S_6$  restringidos a  $H_0$  y carácter de  $V_0$ 

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$V_1 = \langle b_1 \rangle = \langle (a_1, a_2) \rangle = \langle (\overline{12}, \overline{34}, \overline{56}), (\overline{12}, \overline{35}, \overline{46}) \rangle,$$

$$\begin{aligned} H_1 &= \{g \in S_6 \mid gV_1 = V_1\} \\ &= \{(1), (12), (36), (45), (12)(36), (12)(45), (34)(56), (35)(46), (36)(45), (12)(34)(56), \\ &\quad (12)(35)(46), (12)(36)(45), (12)(3564), (12)(3465), (3564), (3465)\}. \end{aligned}$$

Los conjuntos  $V_1$  y  $H_1$  nos ayudan a construir la tabla 4.13.

Después de calcular los productos internos por medio de la tabla anterior resulta:

$$C_1(K(M_6)) \cong S^{(2,1,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1,1)} \oplus S^{(4,2)} \oplus S^{(2,2,2)} \oplus S^{(3,2,1)}. \quad (4.27)$$

Ahora tomemos los siguientes conjuntos:

$$V_2 = \langle c_1 \rangle = \langle (a_1, a_2, a_3) \rangle = \langle (\overline{12}, \overline{34}, \overline{56}), (\overline{12}, \overline{35}, \overline{46}), (\overline{12}, \overline{36}, \overline{45}) \rangle,$$

$$\begin{aligned} H_2 &= \{g \in S_6 \mid gV_2 = V_2\} = \{(1), (12), (34), (35), (36), (45), (46), (56), (345), (346), \\ &\quad (354), (356), (364), (365), (456), (465), (12)(34), (12)(35), (12)(36), (12)(45), \\ &\quad (12)(46), (12)(56), (34)(56), (35)(46), (36)(45), (3456), (3465), (3546), (3564), \\ &\quad (3645), (3654), (345)(12), (346)(12), (354)(12), (356)(12), (364)(12), (365)(12), \\ &\quad (456)(12), (465)(12), (12)(34)(56), (12)(35)(46), (12)(36)(45), (3456)(12), \\ &\quad (3465)(12), (3546)(12), (3564)(12), (3645)(12), (3654)(12)\}. \end{aligned}$$

No. de Elementos Clase	1 (1)	1 (2)	2 (2)	3 (2,2)	2 (2,2)	2 (4)	2 (4,2)	3 (2,2,2)
$\chi_{S^{(6)}\downarrow_{H_1}}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{S^{(1,1,1,1,1,1)}\downarrow_{H_1}}$	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1
$\chi_{S^{(5,1)}\downarrow_{H_1}}$	5	3	3	1	1	1	-1	-1
$\chi_{S^{(2,1,1,1,1)}\downarrow_{H_1}}$	5	-3	-3	1	1	-1	-1	1
$\chi_{S^{(4,1,1)}\downarrow_{H_1}}$	10	2	2	-2	-2	0	0	-2
$\chi_{S^{(3,1,1,1)}\downarrow_{H_1}}$	10	-2	-2	-2	-2	0	0	2
$\chi_{S^{(4,2)}\downarrow_{H_1}}$	9	3	3	1	1	-1	1	3
$\chi_{S^{(2,2,1,1)}\downarrow_{H_1}}$	9	-3	-3	1	1	1	1	-3
$\chi_{S^{(3,3)}\downarrow_{H_1}}$	5	1	1	1	1	-1	-1	-3
$\chi_{S^{(2,2,2)}\downarrow_{H_1}}$	5	-1	-1	1	1	1	-1	3
$\chi_{S^{(3,2,1)}\downarrow_{H_1}}$	16	0	0	0	0	0	0	0
$\chi_{V_1}$	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1

Tabla 4.13: Caracteres de  $S_6$  restringidos a  $H_1$  y carácter de  $V_1$

No. de Elementos Clase	1 (1)	1 (2)	6 (2)	8 (3)	3 (2,2)	6 (2,2)	6 (4)	8 (3,2)	3 (2,2,2)	6 (4,2)
$\chi_{S^{(6)}\downarrow_{H_2}}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{S^{(1,1,1,1,1,1)}\downarrow_{H_2}}$	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1
$\chi_{S^{(5,1)}\downarrow_{H_2}}$	5	3	3	2	1	1	1	0	-1	-1
$\chi_{S^{(2,1,1,1,1)}\downarrow_{H_2}}$	5	-3	-3	2	1	1	-1	0	1	-1
$\chi_{S^{(4,1,1)}\downarrow_{H_2}}$	10	2	2	1	-2	-2	0	-1	-2	0
$\chi_{S^{(3,1,1,1)}\downarrow_{H_2}}$	10	-2	-2	1	-2	-2	0	1	2	0
$\chi_{S^{(4,2)}\downarrow_{H_2}}$	9	3	3	0	1	1	-1	0	3	1
$\chi_{S^{(2,2,1,1)}\downarrow_{H_2}}$	9	-3	-3	0	1	1	1	0	-3	1
$\chi_{S^{(3,3)}\downarrow_{H_2}}$	5	1	1	-1	1	1	-1	1	-3	-1
$\chi_{S^{(2,2,2)}\downarrow_{H_2}}$	5	-1	-1	-1	1	1	1	-1	3	-1
$\chi_{S^{(3,2,1)}\downarrow_{H_2}}$	16	0	0	-2	0	0	0	0	0	0
$\chi_{V_2}$	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1

Tabla 4.14: Caracteres de  $S_6$  restringidos a  $H_2$  y carácter de  $V_2$

De donde obtenemos:

$$C_2(K(M_6)) \cong S^{(2,1,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1,1)}. \quad (4.28)$$

En la figura 4.11 se muestra el diagrama conmutativo de los complejos de cadena de  $K(M_6)$ , donde  $f_0$ ,  $f_1$  y  $f_2$  son los isomorfismos obtenidos de las expresiones 4.26, 4.27 y 4.28.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \xrightarrow{\partial_3} & C_2(K(M_6)) & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(K(M_6)) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(K(M_6)) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\hat{\partial}_3} & \hat{C}_2(K(M_6)) & \xrightarrow{\hat{\partial}_2} & \hat{C}_1(K(M_6)) & \xrightarrow{\hat{\partial}_1} & \hat{C}_0(K(M_6)) & \xrightarrow{\hat{\varepsilon}} & \mathbb{C} \end{array}$$

Figura 4.11: Diagrama conmutativo de los complejos de cadenas de  $K(M_6)$

donde

$$\begin{aligned} \hat{C}_0(K(M_6)) &= \mathbb{C} \oplus S^{(4,2)} \oplus S^{(2,2,2)}. \\ \hat{C}_1(K(M_6)) &= S^{(2,1,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1,1)} \oplus S^{(4,2)} \oplus S^{(2,2,2)} \oplus S^{(3,2,1)}. \\ \hat{C}_2(K(M_6)) &= S^{(2,1,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1,1)}. \end{aligned}$$

Calculemos los módulos de homología reducida  $\tilde{H}_k(K(M_6))$ , para  $k = 0, 1, 2$ . Como  $\hat{\varepsilon}$  es suprayectiva y por el teorema 1.7.6 tenemos:

$$(\mathbb{C} \oplus S^{(4,2)} \oplus S^{(2,2,2)}) / \ker \hat{\varepsilon} \cong \text{im } \hat{\varepsilon} = \mathbb{C}$$

así que

$$\ker \hat{\varepsilon} \cong S^{(4,2)} \oplus S^{(2,2,2)}.$$

Sabemos que  $\tilde{H}_0(K(M_6)) = \ker \hat{\varepsilon} / \text{im } \hat{\partial}_1 = 0$  pues  $K(M_6)$  es conexo, se sigue que  $\ker \hat{\varepsilon} \cong \text{im } \hat{\partial}_1$ , con lo cual:

$$\text{im } \hat{\partial}_1 \cong S^{(4,2)} \oplus S^{(2,2,2)}. \quad (4.29)$$

Además del teorema 1.7.6 y la expresión 4.29 se tiene:

$$(S^{(2,1,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1,1)} \oplus S^{(4,2)} \oplus S^{(2,2,2)} \oplus S^{(3,2,1)}) / \ker \hat{\partial}_1 \cong \text{im } \hat{\partial}_1.$$

De lo anterior y la proposición 1.7.9 tenemos:

$$\ker \hat{\partial}_1 = S^{(2,1,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1,1)} \oplus S^{(3,2,1)}. \quad (4.30)$$

Por otro lado,  $\widehat{\partial}_3$  es un homomorfismo de módulos, así que:

$$\text{im } \widehat{\partial}_3 = \widehat{\partial}_3(0) = 0$$

De [11] sabemos  $M_6 \simeq K(M_6)$ , por el teorema 3.4.3 se sigue  $\widetilde{H}_2(M_6) \cong \widetilde{H}_2(K(M_6))$  y  $\widetilde{H}_2(M_6) = 0$ , así que:

$$\widetilde{H}_2(K(M_6)) = \ker \widehat{\partial}_2 / \text{im } \widehat{\partial}_3 = 0.$$

por lo que  $\ker \widehat{\partial}_2 = 0$ . Del teorema 1.7.6 tenemos:

$$(S^{(2,1,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1,1)}) / \ker \widehat{\partial}_2 \cong \text{im } \widehat{\partial}_2.$$

De lo anterior y la proposición 1.7.9 tenemos:

$$\text{im } \widehat{\partial}_2 = S^{(2,1,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1,1)}. \quad (4.31)$$

De las ecuaciones 4.30 y 4.31 tenemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_1(K(M_6)) &= \ker \widehat{\partial}_1 / \text{im } \widehat{\partial}_2 \\ &= (S^{(2,1,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1,1)} \oplus S^{(3,2,1)}) / (S^{(2,1,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1,1)}) \\ &= S^{(3,2,1)}. \end{aligned}$$

De igual modo que en  $M_5$ , usamos el hecho de que  $M_6 \simeq K(M_6)$  para concluir que  $\widetilde{H}_2(K(M_6)) = \widetilde{H}_2(M_6) = 0$ , sin embargo observemos que es posible calcular  $\text{im } \widehat{\partial}_2$  por medio de cálculos elementales.

Verifiquemos primero que  $\dim(\text{im } \partial_2) = 15$ . Del teorema 1.1.7, sabemos que  $\text{im } \partial_2 = \langle \partial_2(c_1), \dots, \partial_2(c_{15}) \rangle$ , veamos que el número de vectores linealmente independientes de la  $\text{im } \partial_2$  es 15, es decir, si

$$\lambda_1 \partial_2(c_1) + \lambda_2 \partial_2(c_2) + \dots + \lambda_{15} \partial_2(c_{15}) = 0,$$

así que:

$$\begin{aligned} &\lambda_1(a_2a_3 - a_1a_3 + a_1a_2) + \lambda_2(a_4a_7 - a_1a_7 + a_1a_4) + \lambda_3(a_{12}a_{15} - a_1a_{15} + a_1a_{12}) \\ &+ \lambda_4(a_5a_{10} - a_2a_{10} + a_2a_5) + \lambda_5(a_9a_{14} - a_2a_{14} + a_2a_9) + \lambda_6(a_6a_{13} - a_3a_{13} + a_3a_6) \\ &+ \lambda_7(a_8a_{11} - a_3a_{11} + a_3a_8) + \lambda_8(a_5a_6 - a_4a_6 + a_4a_5) + \lambda_9(a_8a_9 - a_7a_9 + a_7a_8) \\ &+ \lambda_{10}(a_{11}a_{12} - a_{10}a_{12} + a_{10}a_{11}) + \lambda_{11}(a_{14}a_{15} - a_{13}a_{15} + a_{13}a_{14}) \\ &+ \lambda_{12}(a_{10}a_{13} - a_7a_{13} + a_7a_{10}) + \lambda_{13}(a_{11}a_{14} - a_4a_{14} + a_4a_{11}) \\ &+ \lambda_{14}(a_8a_{15} - a_5a_{15} + a_5a_8) + \lambda_{15}(a_9a_{12} - a_6a_{12} + a_6a_9) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Claramente  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{15} = 0$ , intuitivamente esto se puede deducir de la gráfica 4.4. Sea  $b_j$  la frontera de algún 2-simplejo  $c_i$ , las aristas de  $b_j$

no pertenece a ningún otro triángulo distinto de  $c_i$ , por lo tanto  $\partial_2(c_j)$  no es combinación lineal de las fronteras  $\partial_2(c_i)$  con  $i \neq j$ .

Así que  $\dim(\text{im } \partial_2) = 15$ , lo cual implica que  $\dim(\text{im } \widehat{\partial}_2) = 15$  (se sigue de la definición de  $\widehat{\partial}_2$ ).

Ahora, por el teorema 1.7.8 tenemos:

$$\begin{aligned} \widehat{\partial}_2(S^{(2,1,1,1,1)}) = S^{(2,1,1,1,1)} \quad \text{o} \quad \widehat{\partial}_2(S^{(2,1,1,1,1)}) = 0 \\ \text{y} \\ \widehat{\partial}_2(S^{(3,1,1,1)}) = S^{(3,1,1,1)} \quad \text{o} \quad \widehat{\partial}_2(S^{(3,1,1,1)}) = 0. \end{aligned}$$

Además  $\dim(S^{(2,1,1,1,1)}) = 5$  y  $\dim(S^{(3,1,1,1)}) = 10$ , entonces:

$$\text{im } \widehat{\partial}_2 = \widehat{\partial}_2(S^{(2,1,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1,1)}) = S^{(2,1,1,1,1)} \oplus S^{(3,1,1,1)}.$$

# Conclusiones

En este trabajo, describimos la descomposición del  $S_n$ -módulo  $\tilde{H}_k(M_n)$  en submódulos irreducibles, donde  $\tilde{H}_k(M_n)$  es el módulo de homología reducida de los complejos de emparejamientos, para  $n = 4, 5, 6$ .

Por otro lado, también calculamos la descomposición en módulos irreducibles de  $\tilde{H}_k(K(M_n))$ , es decir, de los módulos de homología reducida de los complejos simpliciales determinados por la gráfica de clanes  $K(G_n)$ , para  $n = 5, 6$ .

Encontramos que  $\tilde{H}_k(M_n) \cong_{S_n} \tilde{H}_k(K(M_n))$  para  $n = 5, 6$  y  $k \geq 0$ . Enseguida se muestran los módulos de homología reducida que son distintos de cero.

$$\tilde{H}_1(M_5) \cong \tilde{H}_1(K(M_5)) \cong_{S_5} S^{(3,1,1)} = S^{\boxplus}.$$

$$\tilde{H}_1(M_6) \cong \tilde{H}_1(K(M_6)) \cong_{S_6} S^{(3,2,1)} = S^{\boxplus}.$$

En el artículo [11] se demuestra que  $G_n \simeq K(G_n)$  para  $n \leq 8$ . Esto implica, por el teorema 3.4.3, que se tiene el siguiente isomorfismo como espacios vectoriales:

$$\tilde{H}_k(M_n) \cong \tilde{H}_k(K(M_n)).$$

Surge la pregunta interesante si también existe el isomorfismo entre  $\tilde{H}_k(M_n)$  y  $\tilde{H}_k(K(M_n))$  como  $S_n$ -módulos, para  $n = 7, 8$ . De los cálculos que se muestran en la tesis, se observa que para tales casos las complicaciones aumentarían significativamente, por lo que no es práctico efectuarlos directamente. Un posible camino es utilizar software especializado para tales cálculos.

Si los  $S_n$ -módulos  $\tilde{H}_k(M_n)$  y  $\tilde{H}_k(K(M_n))$  no son  $S_n$ -isomorfos, para algún  $n \geq 7$ , otro problema interesante es encontrar una fórmula análoga a la de Bouc que muestre la descomposición de los módulos de homología de  $K(M_n)$  en submódulos irreducibles.



# Bibliografía

- [1] F. Barrera Mora. *Introducción a la teoría de grupos*. UAEH, 2004.
- [2] S. Bouc. Homologie de certains ensembles ordonnés. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 299(2):49–52, 1984.
- [3] J. B. Fraleigh. *A first course in abstract algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1967.
- [4] S. H. Friedberg, A. J. Insel, and L. E. Spence. *Álgebra lineal*. Publs. Cultural, 1982.
- [5] W. Fulton and J. Harris. *Representation Theory: A First Course*. Graduate Texts in Mathematics / Readings in Mathematics. Springer New York, 1991.
- [6] I. N. Herstein. *Álgebra moderna: grupos, anillos, campos, teoría de Galois*. Biblioteca de matemática superior. Trillas, 1990.
- [7] I. Martin Isaacs. *Character theory of finite groups*. Dover Publications, Inc., New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original [Academic Press, New York; MR0460423 (57 #417)].
- [8] N. Jacobson. *Basic Algebra I: Second Edition*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2012.
- [9] G. James and M. W. Liebeck. *Representations and Characters of Groups*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, 2001.
- [10] F. Larrión, M. A. Pizaña, and R. Villarroel-Flores. Posets, clique graphs and their homotopy type. *European J. Combin.*, 29(1):334–342, 2008.
- [11] F. Larrión, M. A. Pizaña, and R. Villarroel-Flores. The clique operator on matching and chessboard graphs. *Discrete Mathematics*, 309(1):85–93, 2009.

- [12] J. R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Advanced book classics. Perseus Books, 1984.
- [13] E. Prisner. Convergence of iterated clique graphs. *Discrete Math.*, 103(2):199–207, 1992.
- [14] D. Robles. Representaciones de grupos en homologías de complejos simpliciales. Tesis de licenciatura en Matemáticas. Facultad de Ciencias. UNAM, 2006.
- [15] B. E. Sagan. *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2001.
- [16] F. Zaldívar. *Introducción a la teoría de grupos*. Aportaciones matemáticas: Textos nivel medio. Sociedad Matemática Mexicana, 2006.