Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Análisis de Algunos Modelos Monetarios

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Alma Sofía Santillán Hernández

bajo la dirección del

Dr. Daniel Hernández Hernández

Pachuca, Hidalgo. Noviembre de 2007.

Resumen

En esta tesis se explica matemáticamente y desde el punto de vista de la economía los modelos que se encuentran en [7]; lo que se pretende es ampliar la información ahí presentada. Dichos modelos son estudiados usando teoría de control óptimo.

In this thesis, the models proposed in [7] are explained mathematically and from the economic point of view; the main aim is to extend the information presented there. Those models are studied using optimal control theory.

A mis padres y hermana, porque sin su apoyo nada de esto hubiera sido posible.

A mi princesa † y mi peque por darle alegría a mi vida.

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Daniel Hernández Hernández por haberme dirigido en la elaboración de mi tesis; también quiero agradecer al Dr. Orlando Ávila Pozos por todo el apoyo que me brindó a lo largo de mi carrera.

Índice general

Introducción

En teoría un modelo es una representación de la realidad, es decir, sólo representa algunos de los aspectos de un objeto de estudio. Los modelos se crean a partir de la especulación acerca de las causas y los procesos que pudieran haber producido los efectos observados.

En particular, un modelo económico es una representación del mundo de las relaciones entre los individuos que interactúan en una economía y buscan un mayor bienestar. Es importante hacer notar que los modelos económicos no predicen, pues su capacidad es limitada, sin embargo deberían al menos explicar adecuadamente el fenómeno en cuestión.

En este trabajo se van a desarrollar una serie de modelos de creciente complejidad, el objetivo es explicar matemáticamente y desde el punto de vista de la economía los modelos que se encuentran en [7]. Lo que se pretende es entender la forma en la que una economía pequeña opera dentro del mercado mundial y las opciones de política económica que enfrenta. Esto es de gran importancia para encontrar respuestas para algunas interrogantes que afectan la vida económica de una nación y del mundo; ¿Cómo afectan los cambios económicos de un país al resto de las economías mundiales?, ¿qué papel corresponde a los gobiernos en lo que respecta a limitar la inflación, aumentar los impuestos, estimular el crecimiento y evitar un alto porcentaje de desempleo?, ¿qué factores determinan la tasa de crecimiento de una economía?, entre otras.

Los temas anteriores son de importancia no solo para el bienestar económico, sino también para cada individuo al tomar sus decisiones respecto a cuánto ahorrar, tomar prestado; o en su estrategia para hallar o cambiar empleo. Esto contribuye a la formación de mejores ciudadanos, capacitándolos para evaluar las proposiciones de sus dirigentes en materia de impuestos, tasas de interés, gasto público y otras políticas cruciales en la economía nacional y mundial.

Los modelos que se estudiaran tratan algunos de los aspectos más importantes de la economía internacional, de manera que un agente dentro de una pequeña economía pueda elegir sus niveles óptimos de consumo, oferta de trabajo y cantidad de activos que debe tener su portafolio de inversión de manera que maximice sus beneficios. Para resolver estos modelos se hace uso de la teoría de control óptimo, para ser exactos del Principio de Pontryagin.

En general, los modelos se simplifican suponiendo que el mundo es mucho más sencillo de lo que en realidad es, por ejemplo, en lugar de seguir la pista a los numerosos bienes y los mercados existentes, normalmente se recurre al supuesto de que sólo hay un bien que se comercializa en un único mercado. Una vez que se hace esta simplificación, se pueden construir sencillas estructuras para estudiar e interpretar la economía. A veces los modelos no son más que descripciones escritas, pero en la mayoría de los casos se basan en las matemáticas. Una de las ventajas de la utilización de la matemática actualmente reside en que obliga a asegurarse que los modelos no tienen errores lógicos, otra ventaja es que nos permiten ver aquello que no es obvio y así permiten obtener conclusiones a partir de estos.

Los modelos tienen dos tipos de variables: exógenas y endógenas. Las variables exógenas son aportaciones al modelo. Las variables endógenas dependen del modelo y, por lo tanto, se explican dentro del mismo. La selección de este tipo de variables depende del tipo de problema que se desea analizar; en el presente trabajo por ejemplo, el consumo, la oferta de trabajo, la cantidad de bonos y de capital son algunos ejemplos de variables endógenas, mientras que el precio relativo de algunos bienes, el tipo de interés mundial y la inflación, son consideradas variables exógenas.

En este trabajo se van a plantear y explicar una serie de modelos monetarios, los cuales estarán basados en los siguientes supuestos.

- Los agentes económicos son racionales y optimizadores. Por ejemplo los consumidores maximizan una función dinámica de utilidad sujeta a restricciones presupuestarias basadas en la disponibilidad de sus recursos; las empresas maximizan una función de beneficios sujeta a sus posibilidades de producción.

- Para tomar decisiones óptimas, los agentes económicos usan toda la información disponible, además de lo que conocen y entienden del modelo económico que rige la economía.

- Dado que los modelos están basados sobre la maximización de la utilidad, proveen un sistema natural de ideas para analizar implicaciones del bienestar en los impactos políticos o cambios estructurales.

- El principal supuesto es que en la economía existen muchos agentes económicos idénticos, para simplificar, se asume que los comportamientos de estos agentes pueden ser resumidos por un agente representativo, esto es posible pues nada en el modelo depende de que los caracteres o conductas de los individuos sean diferentes.

- Son modelos de equilibrio general, esto es, las reglas de decisión de un agente son las restricciones de otro.

Los modelos basados en los supuestos anteriores se denominan modelos del agente representativo.

Dos conceptos importantes en el desarrollo de un modelo del agente representativo son las nociones de Perfecta Previsión y Equilibrio de Perfecta Previsión. El primero consiste en la suposición de que los errores de predicción son puramente aleatorios. El segundo es definido en una situación en la cual la demanda planeada para producción, trabajo y los diferentes activos en la economía se iguala a la correspondiente oferta, dicho equilibrio se enfoca sobre las cantidades de equilibrio e impone condiciones asegurando que tal equilibrio siempre existe.

En el capítulo 1 se explica lo que es un problema de control óptimo con su respectiva interpretación económica, se enuncia el Principio de Pontryagin que otorga las condiciones necesarias para hallar la solución de dichos problemas y se ilustra esta teoría con algunos ejemplos.

En el capítulo 2 se describen dos modelos monetarios, el primero es un modelo básico de un bien, el cual como se verá, produce una dinámica degenerada, lo que permite realizar un análisis de las acciones económicas óptimas del gobierno de una manera analíticamente sencilla. Con la finalidad de obtener una dinámica no degenerada, se introduce al modelo monetario de un solo bien, costos de ajuste asociados a la acumulación física de capital. Este modelo es suficientemente manejable porque permite entender el ajuste dinámico de la economía a detalle, para destacar el papel crítico que juega la acumulación de capital en este proceso. Y se utiliza este modelo para analizar los cambios que se presentan en la economía cuando el gobierno incrementa su gasto de manera permanente e inesperada.

Los modelos anteriores son muy limitados para tratar algunos de los aspectos básicos de la economía internacional, por lo que en el capítulo 3 se estudian aspectos relacionados con el tipo de cambio real y con la tasa de arancel. Para ello se desarrolla un modelo de dos bienes con acumulación física de capital, en este modelo se incorpora el consumo de un bien que es importado, lo cual de inmediato introduce el tipo de cambio real y permite analizar cambios de la economía frente a la imposición de un arancel.

Las actividades del comercio afectan diversas partes de la economía de manera diferente, esto no se puede analizar con los modelos que solo tiene un sector de producción, por lo que en el capítulo 3 también se desarrolla el modelo de una economía dependiente con dos sectores de producción, uno comercializable y otro no comercializable, lo cual permite estudiar la dinámica del tipo de cambio real. Para finalizar se analiza la respuesta de este modelo provocada por cambios en la demanda; esto se hará mediante un incremento en el gasto del gobierno.

CAPÍTULO 1

Problema de Control Óptimo

El objetivo de este capítulo es explicar el problema de control óptimo con su respectiva interpretación desde el punto de vista de la economía y las condiciones necesarias para resolver este tipo de problemas.

1.1. Planteamiento del problema de control

Un problema de control se origina cuando se describe un sistema al tiempo t por medio un vector $x(t)$ denominado de *variables de estado*. Este vector es controlado por medio de una función vectorial $u(t)$, llamada *control*, y el sistema evoluciona de acuerdo con una ley prescrita, dada usualmente por una ecuación diferencial de primer orden de la forma $\dot{x}(t) = f(t, x, u)$.

Se puede describir la economía de un país en el tiempo t por medio de un vector de variables de estado $x(t)$, que evoluciona de acuerdo a cierta ley, y el problema de control surge cuando se desea alcanzar un objetivo dado a través del control de ciertas variables que se pueden describir con $u(t)$. Por ejemplo, el vector de variables de estado $x(t)$ puede tener como componentes al capital, la inflación, la cantidad de dinero en el país o la cantidad de bonos, entre otros; una ley de acuerdo a la cual evoluciona puede ser: "la acumulación de capital debe ser igual a la inversión". El vector de estados va a ser controlado por el vector de controles $u(t)$, cuyas componentes pueden ser, el consumo, los impuestos, la inversión en algún activo, el trabajo, etcétera. El problema en esta economía consistiría en hallar trayectorias óptimas para $x(t)$ seleccionando adecuadamente las componentes del vector $u(t)$ de tal manera que, se minimice la deuda pública actual, se maximice la utilidad de las familias, etcétera.

Enseguida se describirá formalmente un problema de control óptimo y en la sección

(1.3) se enuncian las condiciones de optimización necesarias para resolver este tipo de problemas.

Sean t, x, u variables en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$; $f(t,x,u)$ una función

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

continua y con derivadas parciales continuas en x. $\phi(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1))$ una función

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

de clase C^1.

U un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{U}$ conjunto de funciones continuas a trozos $u(t)$ definidas en el intervalo $[t_0, t_1]$ con valores en U.

Para un control $u(t)$ definido en el intervalo $[t_0, t_1]$ la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) \quad = \quad f(t, x(t), u(t)) \tag{1.1}$$

dentro del intervalo $[t_0, t_1]$ con condición inicial $x(t_0) = x_0$ será llamada la *trayectoria* correspondiente al control $u(t)$ y la condición inicial x_0. El valor de $x(t)$ al tiempo t es llamado el *estado* del sistema.

La primera componente de la función ϕ evaluada en $(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1))$, donde $x(t)$ es una solución de (1.1),

$$J(x_0, u) \quad = \quad \phi_1(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) \tag{1.2}$$

es el *funcional objetivo* del sistema. Las siguientes k-1 componentes de ϕ se definen por medio de las ecuaciones

$$\phi_i(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad i = 2, ..., k \tag{1.3}$$

y se llaman condiciones finales para las trayectorias del sistema. Un par (x_0, u) de una condición inicial x_0 y un control $u = u(t)$ será llamado *factible* si existe una solución de $x(t)$ para (1.1) en el intervalo $[t_0, t_1]$ con condición $x(t_0) = x_0$ y las condiciones finales (1.3) se cumplen por $x(t)$. Se denotará por $\mathcal{F}$ a la clase de pares factibles (x_0, u).

El problema de control óptimo es encontrar en la clase $\mathcal{F}$, un elemento (x_0, u) tal que el correspondiente funcional objetivo (1.2) sea minimizado. Un par (x_0, u) de $\mathcal{F}$ que alcance este mínimo serán llamados *un control óptimo* y *una condición inicial óptima*.

De aquí en adelante se utilizará la siguiente convención. Las componentes de los vectores serán denotadas por subíndices. Una prima denotará la derivada total y para las derivadas parciales se utilizarán subíndices apropiados. Las derivadas con respecto al tiempo serán denotados por puntos arriba de las variables correspondientes, es decir,

$$f'(x) \equiv \frac{df}{dx}; \quad f_i\left(x_1, ..., x_n\right) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}; \quad f_{ij}\left(x_1, ..., x_n\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}; \quad \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt},$$

si $f(x, y, z)$ es una función vectorial en los vectores x, y, z, $f_y(x, y, z)$ denotará la matriz cuya entrada ij es la derivada parcial de la i-ésima componente de f con respecto a la variable y_j. Y por último se denotará $\vec{\mathbf{e}} = (t_0, t_1, x(t_0), x(t_1))$.

1.2. Problemas equivalentes

Sea $g(t, x, u)$ una función continua

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

de clase C^1 en (x, u). Si en vez del funcional objetivo

$$J(x_0, u) \quad = \quad \phi_1(\vec{\mathbf{e}}) \tag{1.4}$$

el funcional objetivo es

$$J(x_0, u) \quad = \quad \int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t), u(t))dt, \tag{1.5}$$

el problema de optimización es llamado un *problema de Lagrange*. Un problema de Lagrange se puede expresar únicamente en términos del tiempo final, para ver esto, se agrega una componente

$$\dot{x}_{n+1}(t) \quad = \quad g(t, x(t), u(t)), \tag{1.6}$$

con la condición inicial $x_{n+1}(t_0) = 0$ al sistema (1.1). Por lo que el funcional objetivo (1.5) es

$$J(x_0, u) = \phi_1(\vec{\mathbf{e}}) = x_{n+1}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t), u(t))dt.$$

y está determinada como un funcional objetivo de la forma de *Mayer*. Estos nombres son normalmente usados en el cálculo de variaciones.

1.3. Principio de Pontryagin

Para hallar condiciones de optimización de un problema de control, se utiliza el Principio de Pontryagin. Este Principio establece condiciones necesarias para que un control $u^*(t)$ sea óptimo (ver demostración en el Apéndice A).

Teorema 1.1 (Principio de Pontryagin). *Para que x_0^* sea una condición inicial óptima y $u^*(t)$ un control óptimo para el problema de control óptimo (descrito en la seccion (1.1)) es necesario que existan $\lambda(t) : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^1, con $\lambda_1 \leq 0$ y $P(t) : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tales que para todo $t_0 \leq t \leq t_1$:*

$$\dot{P}(t)^{\mathcal{T}} = -P(t)^{\mathcal{T}} f_x(t, x^*(t), u^*(t)); \tag{1.7a}$$

para $t \in (t_0, t_1)$ y $u \in U$

$$P(t)^{\mathcal{T}} \left[f(t, x^*(t), u) - f(t, x^*(t), u^*(t)\right] \leq 0; \tag{1.7b}$$

$$P(t_0)^{\mathcal{T}} = -\lambda^{\mathcal{T}} \phi_{x_0}(\vec{\mathbf{e}}); \tag{1.7c}$$

$$P(t_1)^{\mathcal{T}} = \lambda^{\mathcal{T}} \phi_{x_1}(\vec{\mathbf{e}}); \tag{1.7d}$$

$$P(t_0)^{\mathcal{T}} f\left(t_0, x^*(t_0), u^*(t_0)\right) = \lambda^{\mathcal{T}} \phi_{t_0}(\vec{\mathbf{e}}); \tag{1.7e}$$

$$P(t_1)^{\mathcal{T}} f\left(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1)\right) = -\lambda^{\mathcal{T}} \phi_{t_1}(\vec{\mathbf{e}}). \tag{1.7f}$$

Si además $f(t, x, u)$ tiene derivada parcial continua $f_t(t, x, u)$, entonces

$$P(t)^{\mathcal{T}} f\left(t, x^*(t), u^*(t)\right) = \lambda^{\mathcal{T}} \phi_{t_0}\left(t_0, t_1, x^*(t_0), x^*(t_1)\right) + \int_{t_0}^{t} P(s)^{\mathcal{T}} f_t\left(s, x^*(s), u^*(s)\right) ds, \tag{1.7g}$$

se cumple para todo $t \in [t_0, t_1]$.

La expresión $H(t, x, u) = P(t)^{\mathcal{T}} f(t, x, u)$ es llamada generalmente el Hamiltoniano del sistema.

La condición (1.7b) puede ser expresada como

$$\max_{u \in U} H\left(t, x^*(t), u\right) = H\left(t, x^*(t), u^*(t)\right), \tag{1.8}$$

y es llamada el Principio del Máximo de Pontryagin.

1.3.1. Interpretación Económica del Problema de Control

Se considera el siguiente problema de control: Maximizar

$$J(x_0, u) = \int_{t_0}^{t_1} g(t, x, u) e^{-\beta t} dt,$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x, u), \\ x(t_0) &= x_0 \quad \text{y} \quad x(t_1) \quad \text{dado o libre}, \end{aligned}$$

donde $f(t, x, u)$ y $g(t, x, u)$ son dadas.

Como ya se mencionó anteriormente, $x(t)$ es el vector de variables de estado y $u(t)$ es el vector de variables de control. A la selección óptima del control la llamamos una política óptima. El integrando representa el valor presente, es decir al tiempo $t = t_0$, de una función de ganancias cóncava en u llamada $g(t, x, u)$.

La i-ésima componente de la función $P(t) : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, obtenida de aplicar el Principio de Pontryagin al problema de control, denotada por $P_i(t)$, representa el valor marginal presente de la i-ésima variable de estado, es decir, se puede pensar como la contribución marginal al funcional objetivo $J(x_0, u)$, de una unidad adicional de la i-ésima variable de estado $x_i(t)$ en unidades del tiempo $t = t_0$.

Enseguida se presentarán dos ejemplos de problemas de control óptimo; el primero es un problema que es muy utilizado en el área de ingeniería y el segundo es un problema macroeconómico sencillo pero muy semejante a los que se van a tratar posteriormente.

Ejemplo 1.3.1. *Problema del Regulador Lineal.*

Primero se planteará el problema de regulador lineal en general y al final del ejercicio se presentará el caso particular de un péndulo invertido, el cual será resuelto con lo obtenido en el caso general.

Sean $A_{n\times n}(t)$, $M_{n\times n}(t)$, $D_{n\times n}$, $B_{n\times m}(t)$ y $L_{m\times m}(t)$ matrices de funciones continuas, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ una función vectorial continua a trozos definida en un intervalo fijo $[t_0, t_1]$ y $x(t) \in \mathbb{R}^n$ una función que es solución de la siguiente ecuación diferencial lineal

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{1.9}$$

con condición inicial $x(t_0) = x_0$.

Se asume que $M(t)$, $L(t)$ y D son matrices simétricas y $L(t)$ es positiva definida.

Este problema consiste en elegir $u(t)$ de tal manera que se minimice $J(x_0, u)$ sobre un conjunto de funciones $x(t) \in \mathbb{R}^n$ diferenciables y $u(t) \in \mathbb{R}^m$ continuas a trozos, donde

$$J(x_0, u) = x(t_1)^{\mathcal{T}} D x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \left[x(t)^{\mathcal{T}} M(t) x(t) + u(t)^{\mathcal{T}} L(t) u(t) \right] dt.$$

Para resolver este problema se asume que $t_1 = T$, $t_0 = 0$. El vector de variables de estado es $x(t)$, con la condición inicial $x(t_0) = x_0$.

Enseguida se convierte este problema a uno de Mayer, para ello se hace lo mismo que en (1.6), por lo que se define

$$x_{n+1}(t) = x(t_1)^{\mathcal{T}} D x(t_1) + \int_{t_0}^{t} \left[x(\zeta)^{\mathcal{T}} M(\zeta) x(\zeta) + u(\zeta)^{\mathcal{T}} L(\zeta) u(\zeta) \right] d\zeta,$$

con $x_{n+1}(0) = 0$.

De aquí en adelante se va a utilizar la notación

$$x(t_0) \;=\; x(0) = (x_1(0), x_2(0) \ldots x_{n+1}(0)) = \left(x_1^0, x_2^0 \ldots x_{n+1}^0 \right).$$

Puede observarse que el subíndice indica la posición de la componente en el vector de variables de estado y el superíndice representa que el vector es evaluado en el tiempo cero. El vector de controles es $u(t)$.

Se define la función $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{n+4}$ tomando en cuenta las propiedades descritas en (1.3), por lo que

$$\phi(\vec{\mathbf{e}}) = \begin{bmatrix} x_{n+1}(t_1) \\ t_0 \\ t_1 - T \\ x_1^0 - x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_{n+1}^0 - x_{n+1}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} x_j(t_1) d_{ji} x_i(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \left[x(t)^{\mathcal{T}} M(t) x(t) + u(t)^{\mathcal{T}} L(t) u(t) \right] dt \\ t_0 \\ t_1 - T \\ x_1^0 - x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_{n+1}^0 - x_{n+1}(t_0) \end{bmatrix}.$$

$F(t, x, u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m$ se define de la siguiente manera

$$F(t, x, u) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t)^{\mathcal{T}} M(t) x(t) + u(t)^{\mathcal{T}} L(t) u(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i + \sum_{j=1}^{m} b_{1j}u_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i + \sum_{j=1}^{m} b_{jn}u_j \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} x_j m_{ij} x_i + \sum_{i,j=1}^{m} u_j l_{ij} u_i \end{bmatrix}.$$

Para aplicar el Principio de Pontryagin se debe encontrar la derivada de $F(t, x, u)$ con respecto a x, de lo cual se obtiene que

$$F_x(t,x,u) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ 2\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j m_{1j} & \cdots & 2\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j m_{nj} & 0 \end{bmatrix}.$$

Por el Principio de Pontryagin se debe hallar $P(t) = \left[\tilde{P}(t)^{\mathcal{T}} \quad P_{n+1}(t)\right] \in \mathbb{R}^{n+1}$ definida en el intervalo $[t_0, t_1]$, $\lambda_1 : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda(t) : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+3}$, con $\lambda = (\lambda_1, \lambda(t)) \neq (0, 0)$ para todo $t \in [t_0, t_1]$ tal que cada condición del Teorema 1.1 se cumpla.

Por (1.7a) y considerando $F_x(t, x, u)$ obtenida arriba, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}}(t)^{\mathcal{T}} &= -\tilde{P}(t)^{\mathcal{T}} A(t) - 2P_{n+1}(t)x(t)^{\mathcal{T}} M(t), \\ \dot{P}_{n+1}(t) &= 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Por (1.7c) se debe cumplir que

$$\left[\; \tilde{P}(t_0)^{\mathcal{T}} \quad P_{n+1}(t_0) \;\right] = -\left[\; \lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_{n+4} \;\right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de lo cual se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t_0)^{\mathcal{T}} &= -\left[\lambda_4 \ldots \lambda_{n+3}\right],\\ P_{n+1}(t_0) &= -\lambda_{n+4}.\end{aligned} \tag{1.11}$$

De la condición (1.7d) se obtiene

$$\left[\begin{array}{cc}\tilde{P}(t_1)^{\mathcal{T}} & P_{n+1}(t_1)\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}\lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+4}\end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc} 2\sum\limits_{j=1}^{n} x_j(t_1)d_{j1} & \cdots & 2\sum\limits_{j=1}^{n} x_n(t_1)d_{jn} & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0\end{array}\right],$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t_1)^{\mathcal{T}} &= 2\lambda_1 x(t_1)^{\mathcal{T}} D,\\ P_{n+1}(t_1) &= \lambda_1.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Y por (1.7e) se debe cumplir que

$$\begin{aligned}H(t_0, x^*(t_0), u^*(t_0)) &= \left[\tilde{P}(t_0)^{\mathcal{T}} \quad P_{n+1}(t_0)\right] F(t_0, x^*(t_0), u^*(t_0))\\ &= \lambda^{\mathcal{T}} \phi_{t_0}(\vec{\mathbf{e}})\\ &= \lambda_2.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Por (1.7f) se debe satisfacer que

$$\begin{aligned}H(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1)) &= \left[\tilde{P}(t_1)^{\mathcal{T}} \quad P_{n+1}(t_1)\right] F(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1))\\ &= -\lambda^{\mathcal{T}} \phi_{t_1}(\vec{\mathbf{e}})\\ &= -\lambda_3.\end{aligned} \tag{1.14}$$

Afirmación 1.3.1. λ_1 debe ser distinto de cero para obtener las condiciones de optimización del problema.

Demostración: Suponga que $\lambda_1 = 0$. De (1.12) se ve que $P_{n+1}(t_1) = 0$ (*) y $\tilde{P}(t_1) = 0$ (**). Ahora, por (1.10) se tiene que $\dot{P}_{n+1}(t) = 0$, es decir, $P_{n+1}(t)$ es constante y por (*) se tiene que $P_{n+1}(t) = 0$ y sustituyendo esto en (1.10) se obtiene que $\dot{\tilde{P}}(t) = -P(t)^{\mathcal{T}} A(t)$, la cual al resolver arroja que $\tilde{P}(t) = ke^{-\int_0^t A(\zeta)d\zeta}$, por (**), se tiene que $k = 0$, y esto a su vez implica que $\tilde{P}(t) = 0$, y por (1.11), (1.13) y (1.14) se obtiene que $\lambda = 0$, lo cual no es de utilidad para hallar la optimización del problema, pues no se cumple una de las condiciones establecidas en el Principio de Pontryagin.

Por lo anterior, es conveniente para que el control óptimo $u^*(t)$ no se encuentre multiplicado por alguna constante, elegir el valor de $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, y por (1.12) se tiene que:

$$P_{n+1}(t) = -\frac{1}{2}. \tag{1.15}$$

Con esto el Hamiltoniano del sistema es:

$$\begin{aligned} H(t,x,u) &= \begin{bmatrix} \tilde{P}(t)^{\mathcal{T}} & P_{n+1}(t) \end{bmatrix} F(t,x,u) \\ &= \tilde{P}(t)^{\mathcal{T}} \left[A(t)x + B(t)u\right] - \tfrac{1}{2}[x^{\mathcal{T}} M(t)x + u^{\mathcal{T}} L(t)u] . \end{aligned}$$

Ahora se debe encontrar $u^* \in U$, donde U es un subconjunto cerrado de R^m para ello se maximizará el Hamiltoniano del sistema $H(t, x^*, u)$, lo cual se hace de la manera habitual, primero se deriva $H(t, x^*, u)$ con respecto a u, igualando esto a cero, se obtiene u^* y posteriormente se comprueba si esta función produce un máximo para H.

$H_u(t, x^*, u) = \tilde{P}(t)^{\mathcal{T}} B(t) - u^{\mathcal{T}} L(t) = 0$. Despejando u, se obtiene que

$$u(t) = L(t)^{-1} B(t)^{\mathcal{T}} \tilde{P}(t). \tag{1.16}$$

Para verificar que es máximo, se hace uso del criterio de la segunda derivada.

$H_{uu} = -L(t)$ y como $L(t)$ es positiva definida, $-L(t)$ es negativa definida, por lo que (1.16) maximiza $H(t, x^*, u)$.

Sustituyendo (1.15) en (1.10) y (1.16) en (1.9) se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}}(t)^{\mathcal{T}} &= -\tilde{P}(t)^{\mathcal{T}} A(t) + x(t)^{\mathcal{T}} M(t), \\ \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)L(t)^{-1} B(t)^{\mathcal{T}} \tilde{P}(t). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Con esto se transforma el problema en encontrar las soluciones de $\tilde{P}(t)$ y $x(t)$ para el sistema (1.17), sujeto a las condiciones

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ \tilde{P}(t_1) &= -x(t_1)^{\mathcal{T}} D. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Una vez dadas las soluciones de (1.17) con condiciones de frontera (1.18), el control óptimo está dado por (1.16).

Problema del péndulo invertido

Considere el sistema del péndulo invertido de la Figura 1 en el que un péndulo se monta en un carro controlado con un motor. Se considerará que el péndulo únicamente se mueve en el plano del papel. Se desea conservar el péndulo perpendicular ante la presencia de perturbaciones (tales como una ráfaga de viento que actúa sobre la masa m o una fuerza inesperada aplicada al carro). El péndulo inclinado regresa a la posición vertical cuando se aplica al carro una fuerza de control u apropiada. El objetivo es hallar la fuerza u necesaria para balancear el péndulo en posición vertical mientras se mantiene un movimiento horizontal $x(t)$ del carro y al final regresar el carro a su posición de referencia $x(t) = 0$ tan rápido como sea posible.

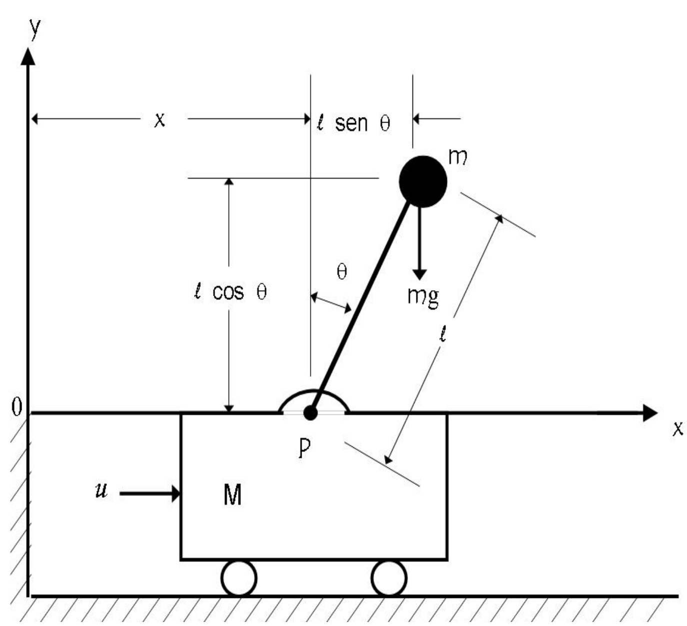

Figura 1.

Primero se analizan cuales son las ecuaciones que describen este sistema. Se define el ángulo de la barra respecto de la línea vertical como θ. Las coordenadas del centro de gravedad (x_G, y_G) están dadas por

$$\begin{aligned} x_G &= x + l\sin\theta \\ y_G &= l\cos\theta \end{aligned}$$

Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección x del movimiento se tiene que

$$M\frac{d^2x}{d^2t} + m\frac{d^2x_G}{d^2t} = u,$$

ó

$$(M+m)\ddot{x} + ml\left(\ddot{\theta}\cos\theta - (\dot{\theta})^2\sin\theta\right) = u \tag{1.19}$$

La ecuación del movimiento de la masa m en la dirección y no se puede describir sin considerar este movimiento en la dirección x. Por lo que se considerará el movimiento rotacional de la masa m alrededor del punto p. Al aplicar la segunda ley de Newton del movimiento rotacional, se obtiene

$$ml\cos\theta\frac{d^2x_G}{d^2t} - ml\sin\theta\frac{d^2y_G}{d^2t} = mgl\sin\theta,$$

ó

$$m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta} = mg\sin\theta \tag{1.20}$$

Como se desea mantener el péndulo invertido en posición vertical se supone que θ es pequeño, por lo que $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$ y $\theta(\dot{\theta})^2 = 0$, con esto (1.19) y (1.20) se simplifican en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} &= u \qquad (1.21) \\ \ddot{x} + l\ddot{\theta} &= g\theta \end{aligned}$$

Se define el vector de variables de estado de la siguiente manera:

$X = \left[\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}\right]^{\mathcal{T}} = [X_1, X_2, X_3, X_4]^{\mathcal{T}}.$

Se va a resolver este problema asumiendo que $m = 0{,}5kg$, $M = 5kg$, $l = 1m$, sustituyendo estos valores y escribiendo en términos de matrices el sistema (1.21) se obtiene

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10{,}78 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0{,}98 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} u = AX + Bu.$$

Se desea hallar la fuerza $u(t)$ que regule el vector de estados a cero, por lo que el funcional objetivo será

$$J(x_0, u) = \int_0^{t_1} \left[X(t)^{\mathcal{T}} M(t) X(t) + u(t)^{\mathcal{T}} L(t) u(t) \right] dt$$

donde $L(t) = 1$ y

$$M(t) = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Estos valores fueron seleccionados en varias ocasiones hasta que la simulación en la computadora mostró una buena respuesta en el tiempo.

Se asumirá que el vector de estado en el tiempo inicial está dado por

$X(0) = [0{,}1rad, 0, 0{,}1m, 0]^{\mathcal{T}}$.

Tomando en cuenta (1.17), el sistema que se debe resolver en este caso es

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= -10{,}78P_2 + 0{,}98P_4 + 100X_1 \\ \dot{P}_2 &= -P_1 + 100X_2 \\ \dot{P}_3 &= 10X_3 \\ \dot{P}_4 &= -P_3 + 10X_4 \\ \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= 10{,}78X_1 + 0{,}04P_2 - 0{,}04P_4 \\ \dot{X}_3 &= X_4 \\ \dot{X}_4 &= -0{,}98X_1 - 0{,}04P_2 + 0{,}04P_4 \end{aligned}$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} X(0)^{\mathcal{T}} &= [0{,}1rad, 0, 0{,}1m, 0]^{\mathcal{T}} \\ P(t_1)^{\mathcal{T}} &= [0, 0, 0, 0]^{\mathcal{T}} \end{aligned}$$

Como el control óptimo está dado por (1.16), se obtiene que la fuerza que se debe aplicar al carro está dada por

$$
\begin{aligned}
u(t) &= e^{-0{,}6t}\,[1{,}53\sin(0{,}443t) - 7{,}183\cos(0{,}443t)] \\
&+ e^{-3{,}306t}\,[23{,}077\cos(0{,}637t) - 3{,}563\sin(0{,}637t)]
\end{aligned}
$$

El ángulo $\theta(t)$ y la posición $x(t)$ con la condición inicial $\theta(0) = 0{,}1rad$, $x(0) = 0{,}1m$ son mostrados en la Figura 2, mientras que la fuerza requerida $u(t)$ en la Figura 3. De estas gráficas podemos ver que debido al ángulo inicial de 0.1rad, una gran fuerza $u(t)$ debe ser aplicada inmediatamente para empujar el carro y evitar que la barra caiga, subsecuentes fuerzas cada vez más pequeñas deben ser aplicadas para mover regresar el carro a su posición horizontal deseada $x = 0$ mientras se balancea la barra.

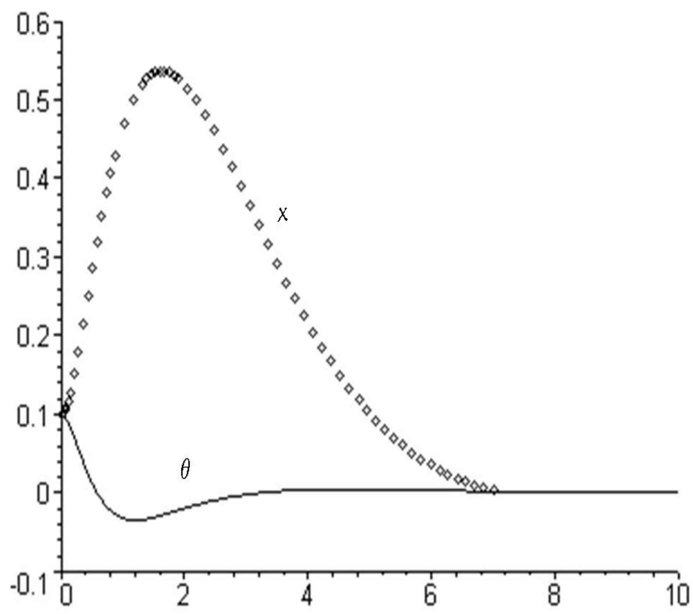

Figura 2.

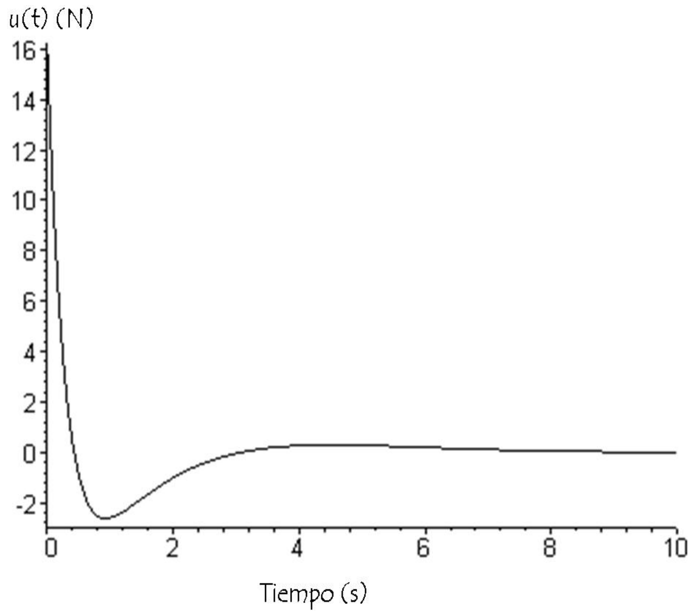

Figura 3.

Ejemplo 1.3.2. *Ejemplo Macroeconómico*

Ejemplos como este son de utilidad, pues contribuyen a la formación de mejores ciudadanos, capacitándolos para evaluar las proposiciones de sus dirigentes en materia de impuestos, tasas de interés, gasto público y otras políticas cruciales en la economía nacional y mundial.

Este es un sencillo ejemplo en donde se estudiará el bienestar económico de un individuo al tomar sus decisiones respecto a cuánto ahorrar, tomar prestado, invertir.

Se analizará el caso de un residente del país X, el cual es pequeño y posee una economía abierta, existe también el país Y que es grande, estable, está en equilibrio y posee un activo b con tasa de rendimiento r. Los residentes de X tienen acceso al activo de Y.

Un individuo representativo del país X desea maximizar su beneficio acumulado durante un intervalo de tiempo fijo $[t_0, t_1]$. Se asume que el bienestar de este individuo depende únicamente del consumo c que realice, por lo que su beneficio se va a representar por medio de la función de utilidad $U(c)$. Sin embargo, la maximización del bienestar depende de los ingresos que tiene el consumidor y la manera en la que los distribuye.

El individuo representativo tiene dos formas de distribuir su riqueza: invertir en el activo extranjero b o en capital nacional k, la cantidad de acciones que invierta en el activo extranjero es igual a la producción que realice, denotada por $f(k)$, los intereses que gane por la cantidad del activo b que posea menos el consumo y la inversión en capital. Además, la acumulación de capital debe ser igual a la inversión en capital I que realice en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$, en otras palabras se tiene que,

$$\begin{aligned} \dot{b} &= f(k) + br - c - I \quad \text{y}, \qquad (1.22) \\ \dot{k} &= I, \qquad (1.23) \end{aligned}$$

El problema del consumidor es maximizar

$$J(x_0, u) = \int_{t_0}^{t_1} U(c) e^{-\beta t} dt,$$

sobre el conjunto de funciones diferenciables $u : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $x : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, con condición inicial $x(t_0) = (b_0, k_0)$ y condición final $x(t_1) = (b_1, k_1)$. Sujeto a las restricciones presupuestarias (1.23) y (1.22).

Donde

$c =$ consumo del individuo representativo del país X,

$U(c) =$ función de utilidad que satisface: $U' > 0$, $U'' < 0$,

$\beta =$ tasa subjetiva de descuento temporal,

$\dot{b} =$ tasa de inversión en el activo extranjero b,

$f(k) =$ función de producción y satisface que $f(0) = 0$, $f' > 0$, $f'' < 0$,

$I =$ tasa de inversión bruta en capital nacional k.

Para resolver este problema se asume que el tiempo inicial es $t_0 = 0$ y el tiempo final es $t_1 = T$, con $T > 0$ fijo.

El vector de variables de estado es $x(t) = (x_1, x_2) = (b, k)$, con la condición inicial $x(0) = (x_1^0, x_2^0) = (b_0, k_0)$ y condición final $x(T) = (x_1^1, x_2^1) = (b_1, k_1)$. El vector de controles es $u(t) = (c, I)$. Las cantidades inicial y final del control se denotan como $u(0) = (c_0, I_0)$ y $u(T) = (c_1, I_1)$.

Se aplica el principio de Pontryagin para hallar las condiciones de optimización del problema, por lo cual se convierte a un problema de Mayer como se hizo en (1.6). Se define $x_3(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} U(c) e^{-\beta\zeta} d\zeta$, con $x_3(0) = 0$.

La función $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^8$, tomando en cuenta que las propiedades dadas en (1.3) se deben cumplir, se define de la siguiente manera

$$\phi(\vec{\mathbf{e}}) = \begin{bmatrix} -x_3^1, & t_0, & t_1 - T, & b_0 - x_1^0, & k_0 - x_2^0, & b_1 - x_1^1, & k_1 - x_1^1, & x_3^0 \end{bmatrix}^{\mathcal{T}}.$$

La función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la siguiente

$$F(t,x,u) = \begin{bmatrix} \dot{b} \\ \dot{k} \\ \dot{x}_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(k) + br - c - I \\ I \\ U(c)e^{-\beta t} \end{bmatrix}.$$

Por el Principio de Pontryagin se debe hallar $P(t) \in \mathbb{R}^3$ definida en el intervalo $[t_0, t_1]$, $\lambda_1 : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda(t) : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^7$, con $\lambda = (\lambda_1, \lambda(t)) \neq (0,0)$ tal que cada condición del Teorema 1.1 se cumpla.

Por (1.7a) se debe cumplir que

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1(t) & \dot{P}_2(t) & \dot{P}_3(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} P_1(t) & P_2(t) & P_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & f'(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{P}_1(t) &= -P_1(t)r; && (1.24a) \\ \dot{P}_2(t) &= -P_1(t)f'(k); && (1.24b) \\ \dot{P}_3(t) &= 0. && (1.24c) \end{aligned}$$

Por la condición (1.7c) se debe satisfacer que

$$\begin{bmatrix} P_1(t_0) & P_2(t_0) & P_3(t_0) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} P_1(t_0) &= \lambda_4; && (1.25a) \\ P_2(t_0) &= \lambda_5; && (1.25b) \\ P_3(t_0) &= -\lambda_8. && (1.25c) \end{aligned}$$

De la condición (1.7d) del Principio de Pontryagin se debe cumplir que

$$\begin{bmatrix} P_1(t_1) & P_2(t_1) & P_3(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

lo cual implica que

$$P_1(t_1) = -\lambda_6; \tag{1.26a}$$
$$P_2(t_1) = -\lambda_7; \tag{1.26b}$$
$$P_3(t_1) = -\lambda_1. \tag{1.26c}$$

Por (1.7e) se debe cumplir que

$$\begin{bmatrix} P_1(t_0) & P_2(t_0) & P_3(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(k_0^*) + b_0^* r - c_0^* - I_0^* \\ I_0^* \\ U(c_0^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De las condiciones (1.25a)-(1.25c) y lo anterior

$$H(t_0, x^*(t_0), u^*(t_0)) = \lambda_4 \left[f(k_0^*) - b_0^* r - c_0^* - I_0^* \right] + \lambda_5 I_0^* - \lambda_8 U(c_0^*) = \lambda_2. \tag{1.27}$$

Y por último, por la condición (1.7f) se tiene que satisfacer que

$$\begin{bmatrix} P_1(t_1) & P_2(t_1) & P_3(t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(k^*) + b^* r - c_1^* - I_1^* \\ I_1^* \\ U(c_1^*) e^{-\beta t_1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De lo anterior y las condiciones (1.26a)-(1.26c) se obtiene que

$$-H(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1)) \;=\; \lambda_6 \left[f(k^*) + b^* r - c_1^* - I_1^*\right] + \lambda_7 I_1^* + \lambda_1 U(c_1^*) e^{-\beta t_1} = \lambda_3. \tag{1.28}$$

Al resolver (1.24a) considerando la condición inicial (1.25a) se obtiene que la solución para $P_1(t)$ es

$$P_1(t) = \lambda_4 e^{-rt}. \tag{1.29}$$

Por lo anterior y la condición (1.26a) se obtiene la relación

$$\lambda_4(t_1) e^{-rt_1} = -\lambda_6. \tag{1.30}$$

Al sustituir la solución para $P_1(t)$ dada en (1.29) en la ecuación diferencial (1.24b) y considerar la condición inicial (1.25b) se obtiene que la solución para $P_2(t)$ está dada por

$$P_2(t) = \lambda_5 e^{-rt}. \tag{1.31}$$

De las condiciones (1.25b) y (1.26b) se obtienen las siguientes relaciones

$$r\lambda_5 \;=\; \lambda_4(t_0) f'(k), \tag{1.32}$$

$$\lambda_5(t_1) e^{-rt_1} \;=\; -\lambda_7. \tag{1.33}$$

De la ecuación diferencial (1.24c), las condiciones (1.25c) y (1.26c) se obtiene que la solución para $P_3(t)$ está dada por

$$P_3(t) = -\lambda_1 = -\lambda_8. \tag{1.34}$$

Afirmación 1.3.2. λ_1 y $\lambda_4(t)$ deben ser distintos de cero para todo $t \in [t_0, t_1]$ para obtener las condiciones de optimización del problema.

Demostración: Suponga que ambos valores son iguales a cero. Si $\lambda_1 = 0$ se obtiene de inmediato por (1.34) que $\lambda_8 = 0$, si $\lambda_4 = 0$, por (1.30) se tiene que $\lambda_6 = 0$ y por (1.32) $\lambda_5 = 0$. Esto a su vez implica, por (1.33), que λ_7 es cero y por último, combinando todo lo anterior con las relaciones (1.27) y (1.28) se tiene que λ_2 y λ_3 son cero, lo cual implica que $\lambda = 0$, lo cual no es de utilidad para hallar las condiciones de optimización del problema, pues no se cumple una de las condiciones establecidas en el Principio de Pontryagin.

Por la afirmación anterior y por simplicidad se asume que $\lambda_1 = -1$. Este valor es conveniente para que las condiciones de optimización no se encuentren multiplicadas por alguna otra constante.

El Hamiltoniano de este sistema está dado por

$$\begin{aligned} H(t,x,u) &= \begin{bmatrix} \lambda_4 e^{-rt}, & \lambda_5 e^{-rt}, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(k)+br-c-I \\ I \\ U(c)e^{-\beta t} \end{bmatrix} \\ &= \lambda_4 e^{-rt}\left[f(k)+br-c-I\right] + \lambda_5 e^{-rt} I + U(c)e^{-\beta t}, \end{aligned}$$

donde, de acuerdo a lo explicado en la subsección 1.3.1, $\lambda_4 e^{-rt}$ representa el valor marginal presente del activo extranjero b y $\lambda_5 e^{-rt}$ el valor marginal presente del capital nacional k.

Un procedimiento análogo al anterior será utilizado de manera repetitiva en los siguientes capítulos.

Lo que resta es buscar las condiciones para que (1.8) se cumpla, es decir, se debe encontrar

$$\max_{u\in U} H(t,x^*,u) \quad = \quad \lambda_4 e^{-rt}\left[f(k^*)+b^*r-c-I\right] + \lambda_5 e^{-rt} I + U(c)e^{-\beta t}.$$

De lo anterior se tiene que las condiciones de optimización para este problema son

$$\begin{aligned} H_c &= -\lambda_4 e^{-rt} + U'(c)e^{-\beta t} = 0, & (1.35) \\ H_I &= -\lambda_4 e^{-rt} + \lambda_5 e^{-rt} = 0. & (1.36) \end{aligned}$$

Ahora se tomarán en cuenta los fundamentos económicos para resolver este problema. Dado que el país Y está en equilibrio, entonces la tasa de rendimiento del activo extranjero r es igual a la tasa subjetiva de descuento de sus individuos, pues de no ser así habría oportunidad de arbitraje. Como las personas del país X son esencialmente iguales a las del país Y, entonces su tasa subjetiva de descuento β también debe ser igual a r.

Por la justificación anterior, las condiciones (1.35) y (1.36) se simplifican a

$$\begin{aligned} U'(c) &= \lambda_4, & (1.37) \\ \lambda_4 &= \lambda_5. & (1.38) \end{aligned}$$

La ecuación (1.37) implica que la utilidad marginal es igual al valor marginal del activo extranjero. La ecuación (1.38) indica que el valor marginal del activo extranjero es igual al valor marginal del capital, es decir, la contribución marginal al funcional objetivo $J(x_0,u)$ de b y k es la misma.

Una vez encontrado el vector $P(t)$ el cual satisface la condición (1.7a) del Principio de Pontryagin, se tiene que

$$\left[\begin{array}{ccc} -\lambda_4 r e^{-rt} + \dot{\lambda}_4 e^{-rt}, & -\lambda_5 r e^{-rt} + \dot{\lambda}_5 e^{-rt}, & 0 \end{array}\right] = -\left[\begin{array}{ccc} \lambda_4 e^{-rt}, & \lambda_5 e^{-rt}, & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} r & f'(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

De lo anterior se obtienen las siguientes relaciones

$$\dot{\lambda}_4 = 0, \tag{1.39}$$

$$\lambda_4 f'(k) = \lambda_5 r - \dot{\lambda}_5. \tag{1.40}$$

Por lo anterior y (1.37), se tiene que $\dot{\lambda}_4 = \dfrac{\partial U'(c)}{\partial t} = U''(c)\dot{c} = 0$. Como $U'' < 0$ se puede concluir que el consumo debe ser constante.

Por (1.38) y (1.40) se tiene que

$$f'(k) = r. \tag{1.41}$$

Derivando (1.41) con respecto al tiempo se tiene que

$$\frac{\partial f'(k)}{\partial t} = f''(k)\dot{k} = 0,$$

como $f'' < 0$, entonces $\dot{k} = I = 0$ esto implica que el valor óptimo para la cantidad de capital $k = k^*$ que debe poseer el individuo es constante.

Tomando en cuenta todo lo anterior, se puede resolver la ecuación diferencial (1.22) para la cantidad de acciones del activo extranjero $b(t)$. Dicha solución está dada por

$$b(t) = \left\{ -\frac{1}{r} \left[f(k) - c \right] e^{-rt} + G \right\} e^{rt},$$

y como debe cumplirse la condición inicial $b(0) = b_0$, se obtiene que el valor de la constante G es

$$G = b_0 + \frac{1}{r} \left[f(k) - c \right].$$

Lo anterior implica que el valor en cartera de activos extranjeros $b(t)$ del individuo representativo del país X dada la condición inicial $b(0) = b_0$ está dada por

$$b(t) = \left[b_0 - \frac{1}{r}\left(f(k) - c\right)\left(e^{-rt} - 1\right)\right] e^{rt}.$$

Ahora, como la condición final $b(T) = b_1$ debe cumplirse, se tiene que

$$b_1 e^{-rT} = b_0 - \frac{1}{r}\left(f(k) - c\right)\left(e^{-rT} - 1\right).$$

Para hallar el equilibrio de este problema, se deben combinar todas las condiciones obtenidas hasta este momento. El equilibrio está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} U'(c) &= \lambda_4; && (1.42)\\ f'(k) &= r; \\ I &= 0; \\ b_1 e^{-rT} &= b_0 - \frac{1}{r}\left(f(k) - c\right)\left(e^{-rT} - 1\right). && (1.43) \end{aligned}$$

Estas ecuaciones implican que no hay dinámica, por lo que la economía se encuentra siempre en estado fijo. Como se verá más adelante, se puede introducir algún elemento al modelo con la finalidad de obtener dinámica no degenerada.

Si en el tiempo inicial t_0, $k_0 \neq k_1$, el individuo representativo inmediatamente compra o vende activos extranjeros, para obtener la cantidad de capital óptima $k^* = k_1$ esto es posible ya que las familias son indiferentes entre k y b, pues recordemos de (1.38) que sus respectivos valores marginales son iguales y con las ecuaciones (1.42) y (1.43) se obtienen los valores óptimos de λ_4 y el consumo c.

CAPÍTULO 2

Modelos Monetarios Básicos

En este capítulo se van a desarrollar dos modelos del agente representativo. El primero es un modelo monetario de un bien producido con un único factor de producción. Como se observará, este modelo tiene una dinámica degenerada, lo que permite estudiar de manera analíticamente sencilla la acción económica óptima que el gobierno debe implementar con la finalidad de obtener un beneficio común. El segundo modelo es una extensión del anterior; en éste se incorpora la acumulación física de capital con sus respectivos costos de ajuste asociados. Este modelo tendrá una dinámica no degenerada y para ilustrar esta dinámica se analizarán los cambios producidos al incrementar el gasto del gobierno de manera permanente. Primero se describirá la estructura de la economía de estos modelos; posteriormente se resuelven éstos haciendo uso del Principio de Pontryagin (explicado en el primer capítulo) y se explican los resultados obtenidos desde un punto de vista económico.

2.1. Modelo básico de un bien

Se empezará por describir un modelo monetario de una pequeña economía abierta con movilidad perfecta de capital; por "pequeña" se entenderá que esta economía constituye una pequeña parte del mercado mundial y por "movilidad perfecta de capital" que los residentes nacionales tienen acceso total a los mercados financieros mundiales. Se asume que dicha economía consiste únicamente de un bien comercializable, que es producido con un solo factor de producción, el trabajo. Es decir, lo único que se necesita para producir dicho bien es trabajo.

Como la economía nacional constituye una pequeña parte del mercado mundial, no puede ejercer gran influencia en el precio extranjero del bien comercializable, por lo que el precio de dicho bien está dado por el mercado mundial, es decir, se considera como una variable exógena.

Dado que la economía es abierta, se puede suponer que el bien comercializable se puede intercambiar fácilmente entre el mercado nacional y el extranjero, y además que la Paridad de Poder Adquisitivo se mantiene; esto es, el precio del bien comercializable es el mismo cuando se expresa en términos de una moneda común. Dicho de otra manera,

$$P = EQ,$$

donde

$P =$ precio del bien comercializable expresado en moneda nacional,

$Q =$ precio del bien comercializable expresado en términos de alguna divisa,

$E =$ tipo de cambio nominal.

Obsérvese

$$\begin{aligned} 1 + \frac{P - P_{-1}}{P_{-1}} &= \left(1 + \frac{E - E_{-1}}{E_{-1}}\right)\left(1 + \frac{Q - Q_{-1}}{Q_{-1}}\right) \\ &= 1 + \frac{Q - Q_{-1}}{Q_{-1}} + \frac{E - E_{-1}}{E_{-1}} + \left(\frac{E - E_{-1}}{E_{-1}}\right)\left(\frac{Q - Q_{-1}}{Q_{-1}}\right) \end{aligned}$$

donde el subíndice -1 indica la cantidad correspondiente del periodo anterior. Como $\dfrac{Q - Q_{-1}}{Q_{-1}}$ y $\dfrac{E - E_{-1}}{E_{-1}}$ son pequeños, se tiene que

$$p = q + \mathrm{e}, \tag{2.1}$$

donde

$p =$ tasa de inflación del bien en términos de moneda nacional,

$q =$ tasa de inflación del bien en términos de divisa (esta será considerada como una variable exógena), y

$\mathrm{e} =$ tasa de depreciación del tipo de cambio de la moneda nacional.

Esta ecuación afirma que al no haber impedimentos para el comercio, la tasa de inflación en la economía nacional debe ser igual a la (exógena) tasa de inflación mundial más la tasa de depreciación de la moneda nacional.

Se asume que los residentes nacionales poseen dos tipos de activos. El primero es dinero nacional, el cual se va a suponer que no está en posesión de extranjeros. El segundo de los activos son los bonos comercializables en el mercado mundial, es decir, bonos extranjeros. Para evitar oportunidades de arbitraje, se asume que los bonos siempre cumplen con la relación de Paridad Descubierta de las Tasas de Interés, es decir, la tasa de rendimiento esperada de dichos bonos es la misma tanto en el mercado local como en el mundial. Enseguida se verá que implica esto.

Considere México como el país local y Estados Unidos como el extranjero. Un bono mexicano tiene una tasa de interés anual igual a i, por lo que un peso invertido hoy en bonos mexicanos se transformará en $(1+i)$ pesos el próximo año. Ahora cuando se invierte un peso en bonos estadounidenses se pueden comprar $1/E$ dólares el día de hoy, E es el tipo de cambio peso por dólar. Si la tasa de interés anual en Estados Unidos es i^*, entonces al invertir $1/E$ dólares en bonos extranjeros se generarán $(1/E)(1+i^*)$ dólares el año siguiente. Ahora se debe convertir esta cantidad a pesos, por lo que se tienen que vender los dólares obtenidos a cambio de pesos pero al tipo de cambio, E_{+1}, que prevalezca el próximo año. Por lo anterior, se tiene que el retorno de un peso invertido en bonos estadounidenses expresado en pesos mexicanos es $(E_{+1}/E)(1+i^*)$. Para que se cumpla con la relación Descubierta de las Tasas de Interés se debe tener que

$$\begin{aligned} 1+i &= \left(\frac{E_{+1}}{E}\right)(1+i^*) \\ &= 1+i^*+\frac{E_{+1}-E}{E}+i^*\left[\frac{E_{+1}-E}{E}\right]. \end{aligned}$$

Como i^* y $\dfrac{E_{+1}-E}{E}$ son generalmente pequeños, se tiene que la expresión anterior se puede reescribir como

$$i = i^*+\epsilon, \tag{2.2}$$

donde

$i =$ tasa de interés nominal nacional,

$i^* =$ tasa de interés nominal extranjera,

$\varepsilon =$ tasa de depreciación esperada del tipo de cambio de la moneda nacional.

Bajo la suposición de perfecta previsión la tasa de depreciación esperada del tipo de cambio, ε, es igual a la tasa actual de depreciación del tipo de cambio de la moneda nacional, e.

Los individuos que intervienen en esta economía serán englobados en tres grupos, consumidores, empresas y gobierno. Sin embargo, dentro de cada uno de estos grupos hay muchos individuos, pero de acuerdo con el modelo del agente representativo, el comportamiento de cada uno de ellos puede ser resumido considerando únicamente un agente representativo por grupo, es decir, solo se van a analizar los casos de un consumidor representativo, una empresa representativa y el gobierno. Se asume que estos agentes tienen perfecta previsión, es decir, se asume que los errores de predicción son puramente aleatorios.

Enseguida se describirá el problema de cada uno de los integrantes de esta economía.

Consumidor Representativo

El consumidor representativo decide qué cantidad del bien comercializable va a consumir, qué cantidad de su riqueza va a invertir en cada uno de los activos disponibles y la cantidad de tiempo que dedicará a trabajar. Este agente debe tomar esas decisiones en cada periodo de tiempo; es decir, debe tomar decisiones intertemporales. El consumidor tiene cierto nivel de bienestar, basado en la decisiones intertemporales que tome. Por ejemplo, puede ser que al consumidor le produzca más bienestar aumentar su consumo y su cantidad de trabajo, que disminuir su consumo y aumentar su trabajo. Sin embargo, una de las razones por la que no consigue lo que desea es porque sus ingresos restringen su nivel de bienestar, dicho de otra forma, sus decisiones están sujetas a una restricción presupuestaria intertemporal.

El consumidor adquiere sus ingresos a través de una gran variedad de fuentes. Este agente ofrece trabajo en la cantidad l a la empresa, la cual paga por ese trabajo un salario real igual a ω. El consumidor puede poseer una empresa, la cual le produce beneficios, denotados por Π. Por los ingresos generados por su trabajo, el gobierno le impone el respectivo impuesto sobre la renta τ. El consumidor posee bonos extranjeros que son denominados en término de alguna divisa y generan un tipo de interés nominal igual a i^*, el tipo de interés real mundial (es decir, el aumento del poder adquisitivo) sobre los bonos es, dado las relaciones (2.1) y (2.2) $r = i^* - q > 0$, el consumidor también posee dinero, cuyo rendimiento real es $-p = -(q + \mathrm{e})$, ya que el valor real del dinero disminuye a la tasa de inflación. Por último, se resta de este ingreso la parte que pasa al gobierno en la forma de impuestos $\top$.

Los ingresos que percibe el consumidor los utiliza para el consumo del bien comercializable, la acumulación de bonos extranjeros o de dinero nacional.

Expresando lo anterior por medio de una ecuación tenemos que la restricción presupuestaria del consumidor expresada en términos reales está dada por

$$c + \dot{m} + \dot{b} = (1 - \tau)(\omega l + \Pi) + (i^* - q)b - (q + \mathrm{e})m - \top. \tag{2.3}$$

Se va a estudiar el problema de esta economía a lo largo del intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$. El consumidor representativo desea maximizar su nivel de bienestar acumulado a través de todo ese intervalo de tiempo, seleccionando adecuadamente su nivel de consumo, de oferta de trabajo, de saldo real de dinero y bonos.

Se asume que el nivel de consumo público y privado que realice, la cantidad de trabajo que le ofrezca a la empresa y la cantidad de dinero que posea, le devuelven una utilidad directa al consumidor representativo. El nivel de bienestar del consumidor está representada por medio de la función de utilidad $U(c, l, g) + V(m)$.

En cada instante, se asume que el consumidor es más feliz cuando:

- Su consumo aumenta. Esto es porque siente más satisfacción cuando aumenta la cantidad y calidad de los bienes y servicios que consume. En otros términos, esto quiere decir que, $U_c > 0$.
- Sus horas de ocio o esparcimiento aumentan. Una razón es porque esas horas de ocio o esparcimiento las puede dedicar a realizar algunas actividades que le hagan más feliz que ir a trabajar, como podrían ser ir la cine, jugar con sus hijos, etc. Es decir, $U_l < 0$.
- Aumenta el gasto del gobierno. Esto es porque dicho gasto quizá esté siendo utilizado en mejorar los servicios públicos como pueden ser alumbrado público, pavimentación de calles, etc. Es decir, $U_g > 0$.

La utilidad marginal del consumidor respecto a la cantidad de dinero que posea dependerá de un nivel de satisfacción del dinero. Es decir de la cantidad máxima de dinero que el consumidor debe tener para que este activo no le produzca costos, como podrían ser el pago de comisiones por la posesión de dinero. Si los costos por mantener dinero exceden los beneficios, entonces su utilidad marginal disminuye, en caso contrario aumenta.

Entonces se asume que para valores dados de c, g y l, la utilidad marginal del dinero satisface

$$signo\,(V'(m)) \quad = \quad signo(m^* - m),$$

donde m^* es el nivel de satisfacción del dinero.

La utilidad marginal del consumo incrementa con el trabajo esto es $U_{cl} > 0$.

Resumiendo, lo que desea el consumidor es seleccionar su nivel de consumo, trabajo, saldo real de dinero y bonos de tal manera que maximice su nivel presente de bienestar acumulado en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$. Es decir, desea maximizar

$$J(x_0, u) = \int_{t_0}^{t_1} [U(c, l, g) + V(m)]\, e^{-\beta t} dt, \tag{2.4}$$

sobre el conjunto de funciones diferenciables $u : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $x : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, con condición inicial $x(t_0) = (b_0, m_0)$ y condición final $x(t_1) = (b_1, m_1)$. Sujeto a la restricción presupuestaria (2.3).

Donde

$c =$ consumo real,

$g =$ gasto real del gobierno,

$m =$ saldo real de dinero,

$b =$ cantidad real de bonos,

$l =$ oferta de trabajo,

$\omega =$ tasa de salario real,

$\Pi =$ beneficio real,

$\beta =$ tasa subjetiva de descuento temporal,

$P =$ nivel nacional de precios,

$Q =$ nivel extranjero de precios,

$E =$ tipo de cambio nominal,

$\tau =$ tasa del impuesto sobre la renta,

$\top =$ Recaudación real de impuestos,

$U(c, l, g) + V(m)$ es la función de utilidad, se asume que es cóncava es sus cuatro argumentos c, l, m y g. Esto se supone de esa manera porque el consumidor es adverso al riesgo.

Para determinar cuáles son los planes óptimos, el consumidor asume que g, e, q, Π, ω, i^*, E, Q y P son variables exógenas.

Para resolver este problema se asume que el tiempo inicial $t_0 = 0$ y el tiempo final $t_1 = T$, con $T > 0$ fijo. El vector de variables de estado es $x(t) = (b, m)$, con la condición inicial $x(0) = (x_1^0, x_2^0) = (b_0, m_0)$ y la condición final $x(T) = (x_1^1, x_2^1) = (b_1, m_1)$.

Para expresar el problema en forma estándar se define un control auxiliar, de manera que $\dot{m} = \mu$, por lo que el vector de controles es $u(t) = (c, l, \mu)$, se denota $u(0) = (c_0, l_0, \mu_0)$ y $u(T) = (c_1, l_1, \mu_1)$.

Se convierte a un problema de Mayer como en (1.6) por lo que se define

$x_3(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} [U(c, l, g) + V(m)]\, e^{-\beta\zeta} d\zeta$, con $x_3(0) = 0$.

La función $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^8$, tomando en cuenta que las propiedades dadas en (1.3) se deben cumplir, se define de la siguiente manera

$$\phi(\vec{\mathbf{e}}) = \begin{bmatrix} -x_3^1, & t_1 - T, & t_0, & b_0 - x_1^0, & m_0 - x_2^0, & x_3^0, & b_1 - x_1^1, & m_1 - x_2^1 \end{bmatrix}^{\mathcal{T}}.$$

La función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la siguiente

$$F(t,x,u) = \begin{bmatrix} \dot{b} \\ \dot{m} \\ \dot{x}_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\tau)(\omega l + \Pi) + (i^* - q)b - (q + \mathrm{e})m - \top - \mu - c \\ \mu \\ [U(c,l,g) + V(m)]\, e^{-\beta t} \end{bmatrix}.$$

Por el Principio de Pontryagin se debe hallar $P(t) \in \mathbb{R}^3$ definida en el intervalo $[t_0, t_1]$, $\lambda_1 : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda(t) : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^7$, con $\lambda = (\lambda_1, \lambda(t)) \neq (0,0)$ tal que cada condición del Teorema 1.1 se cumpla.

Por (1.7a) se debe cumplir que

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1(t) & \dot{P}_2(t) & \dot{P}_3(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} P_1(t) & P_2(t) & P_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^* - q & -(q+\mathrm{e}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & V'(m)e^{-\beta t} & 0 \end{bmatrix},$$

de lo cual se puede decir que

$$\begin{aligned} \dot{P}_1(t) &= -P_1(t)(i^* - q); && (2.5a) \\ \dot{P}_2(t) &= P_1(t)(q + \mathrm{e}) - P_3(t)V'(m)e^{-\beta t}; && (2.5b) \\ \dot{P}_3(t) &= 0. && (2.5c) \end{aligned}$$

Por la condición (1.7c) se debe satisfacer que

$$\begin{bmatrix} P_1(t_0) & P_2(t_0) & P_3(t_0) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} P_1(t_0) &= \lambda_4; && (2.6a) \\ P_2(t_0) &= \lambda_5; && (2.6b) \\ P_3(t_0) &= -\lambda_6. && (2.6c) \end{aligned}$$

De la condición (1.7d) se debe cumplir que

$$\left[\begin{array}{ccc} P_1(t_1) & P_2(t_1) & P_3(t_1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \dots & \lambda_8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Es decir,

$$\begin{aligned} P_1(t_1) &= -\lambda_7; && (2.7a) \\ P_2(t_1) &= -\lambda_8; && (2.7b) \\ P_3(t_1) &= -\lambda_1. && (2.7c) \end{aligned}$$

Por la condición (1.7e) se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc} P_1(t_0) & P_2(t_0) & P_3(t_0) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} (1-\tau)(\omega l_0^* + \Pi) + (i^* - q)b_0^* - (q + \mathrm{e})m_0^* - \top - \mu_0^* - c_0^* \\ \mu_0^* \\ U\left(c_0^*, l_0^*, g\right) + V(m_0^*) \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \dots & \lambda_8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] = \lambda_3.$$

De las condiciones (2.6a)-(2.6c) y lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned} H(t_0, x^*(t_0), u^*(t_0)) &= \lambda_4 \left[(1-\tau)(\omega l_0^* + \Pi) + (i^* - q)b_0^* - (q + \mathrm{e})m_0^* - \top - \mu_0^* - c_0^*\right] + \\ &+ \lambda_5 \mu_0^* - \lambda_6 \left[U\left(c_0,^* l_0^*, g\right) + V(m_0^*)\right] \\ &= \lambda_3. && (2.8) \end{aligned}$$

De la condición (1.7f) se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccc} P_1(t_1) & P_2(t_1) & P_3(t_1) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} (1-\tau)(\omega l_1^* + \Pi) + (i^* - q)b_1^* - (q + \mathrm{e})m_1^* - \top - \mu_1^* - c_1^* \\ \mu_1^* \\ \left[U(c_1^*, l_1^*, g) + V(m_1^*)\right] e^{-\beta t_1} \end{array}\right]$$

$$= -\left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \dots & \lambda_8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] = -\lambda_2.$$

De las condiciones (2.7a)-(2.7c) y lo anterior se obtiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} -H\left(t_1, x^*(t_1)\,, u^*(t_1)\right) &= \lambda_7\left[(1-\tau)(\omega l_1^* + \Pi) + (i^*-q)b_1^* - (q+\mathrm{e})m_1^* - \top - \mu_1^* - c_1^*\right] + \\ &+ \lambda_8\mu_1^* + \lambda_1\left[U(c_1^*, l_1^*, g) + V(m_1^*)\right]e^{-\beta t_1} = \lambda_2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Resolviendo la ecuación diferencial (2.5a) tomando en cuenta la condición inicial (2.6a) se obtiene que la solución para $P_1(t)$ es

$$P_1(t) = \lambda_4 e^{-(i^*-q)t}, \tag{2.10}$$

mientras que por la condición (2.7a) se obtiene la relación

$$\lambda_4(t_1)e^{-(i^*-q)t_1} \;=\; -\lambda_7. \tag{2.11}$$

Por la ecuación diferencial (2.5c) se tiene que $P_3(t)$ debe ser constante. Por las condiciones dadas en (2.6c) y (2.7c) se obtiene que

$$P_3(t) = -\lambda_1 = -\lambda_6. \tag{2.12}$$

Sustituyendo las soluciones para $P_1(t)$ y $P_3(t)$ dadas en (2.10) y (2.12) respectivamente, en la ecuación diferencial (2.5b) se obtiene que la solución para $P_2(t)$ es

$$P_2(t) = -\frac{\lambda_4(q+\mathrm{e})}{i^*-q}e^{-(i^*-q)t} - \frac{\lambda_1}{\beta}V'(m)e^{-\beta t},$$

por las condiciones (2.6b), (2.7b) y (2.11) se tienen las siguientes relaciones

$$\frac{\lambda_4(t_0)(q+\mathrm{e})}{i^*-q} + \frac{\lambda_1}{\beta}V'(m) = -\lambda_5; \tag{2.13}$$

$$\frac{\lambda_7(q+\mathrm{e})}{i^*-q} + \frac{\lambda_1}{\beta}V'(m)e^{-\beta t_1} = -\lambda_8. \tag{2.14}$$

Afirmación 2.1.1. λ_1 y $\lambda_4(t)$ deben ser distintos de cero para todo $t \in [t_0, t_1]$ para obtener las condiciones de optimización del problema.

Demostración: Suponga que ambos valores son iguales a cero. Con esto y con la relación (2.13) se tiene que $\lambda_5 = 0$. Como $\lambda_1 = 0$ se tiene de inmediato por (2.12) que $\lambda_6 = 0$, por otro lado, como $\lambda_4 = 0$, por (2.11) se tiene que $\lambda_7 = 0$, lo cual a su vez implica junto con (2.14) que λ_8 es cero. Por último, combinando todo lo anterior con las relaciones (2.8) y (2.9) se tiene que λ_3 y λ_2 son cero, lo cual implica que $\lambda = 0$, lo cual no es de utilidad para encontrar las condiciones de optimización del problema, pues no se cumple una de las condiciones establecidas en el Principio de Pontryagin.

Por la afirmación anterior se puede suponer, por simplicidad, que $\lambda_1 = -1$, por lo que el vector $P(t)$ está dado por

$$P(t) = \left[\ \lambda_4 e^{-(i^*-q)t}, \quad \frac{V'(m)}{\beta} e^{-\beta t} - \frac{\lambda_4(q+\mathrm{e})}{i^*-q} e^{-(i^*-q)t}, \ \ 1 \ \right]^{\mathcal{T}}.$$

El Hamiltoniano del sistema es

$$\begin{aligned} H(t,x,u) &= \lambda_4 e^{-(i^*-q)t} \left[(1-\tau)(\omega l + \Pi) + (i^*-q)b - (q+\mathrm{e})m - \top - \mu - c\right] + \\ &+ \left[\frac{V'}{\beta} e^{-\beta t} - \frac{\lambda_4(q+\mathrm{e})}{i^*-q} e^{-(i^*-q)t}\right] \mu + \left[U(c,l,g) + V(m)\right] e^{-\beta t}, \end{aligned}$$

donde

$\lambda_4 e^{-(i^*-q)t}$ representa el valor marginal presente de la riqueza, es decir, se puede pensar como la contribución marginal a la función valor de una unidad adicional de la variable $m + b$ en unidades del tiempo $t = t_0$. Esta variable está expresada en términos reales.

Lo que resta es buscar las condiciones para que (1.8) se cumpla, es decir, se debe encontrar

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} H(t,x^*,u) &= \lambda_4 e^{-(i^*-q)t} \left[(1-\tau)(\omega l + \Pi) + (i^*-q)b^* - (q+\mathrm{e})m^* - \top - \mu - c\right] + \\ &+ \left[\frac{V'}{\beta} e^{-\beta t} - \frac{\lambda_4(q+\mathrm{e})}{i^*-q} e^{-(i^*-q)t} + \right] \mu + \left[U(c,l,g) + V(m^*)\right] e^{-\beta t}. \end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene que las condiciones de optimización son

$$\begin{aligned} H_c &= -\lambda_4 e^{-(i^*-q)t} + U_c e^{-\beta t} = 0; \\ H_l &= \lambda_4 (1-\tau)\omega e^{-(i^*-q)t} + U_l e^{-\beta t} = 0; \\ H_\mu &= -\lambda_4 e^{-(i^*-q)t} + \frac{V'}{\beta} e^{-\beta t} - \frac{\lambda_4}{i^*-q}(q+\mathrm{e}) e^{-(i^*-q)t} = 0. \end{aligned}$$

Como se está analizando el caso de una pequeña economía abierta con movilidad perfecta de capital, se debe restringir la tasa subjetiva de descuento temporal por las oportunidades disponibles de inversión y dado que dichas oportunidades están determinadas por la tasa de retorno en el mercado de capital mundial, entonces para evitar oportunidades de arbitraje, debe cumplirse que

$$\beta = (i^* - q)\,.$$

Esto es, la tasa subjetiva de descuento temporal debe de ser igual a la tasa real de interés mundial, por lo que se simplifican las condiciones de optimización a lo siguiente:

$$\begin{aligned} U_c &= \lambda_4; && (2.15a)\\ U_l &= -\lambda_4(1-\tau)\omega; && (2.15b)\\ V' &= \lambda_4(i^* + \mathrm{e}). && (2.15c) \end{aligned}$$

La condición (2.15a) afirma que para que el consumidor esté en equilibrio, la utilidad marginal del consumo debe ser igual al valor marginal de la riqueza. La ecuación (2.15b) indica que la utilidad marginal de una unidad adicional de esparcimiento debe ser igual a la utilidad marginal del consumo multiplicado por el costo de oportunidad de una unidad de ocio, el cual está dado por $-(1-\tau)\omega$.

De la parte (2.5a), una vez que se conoce explícitamente el vector $P(t)$ se obtiene que

$$\dot{\lambda}_4 e^{-(i^*-q)t} - \lambda_4(i^*-q)e^{-(i^*-q)t} \;=\; -\lambda_4(i^*-q)e^{-(i^*-q)t},$$

es decir,

$$\dot{\lambda}_4 \;=\; 0 \quad \text{para todo } t. \qquad (2.16)$$

Esto implica que el valor marginal de la riqueza. Se denotará a $\lambda_4 = \bar{\lambda}$.

Empresa Representativa

Para el caso de la empresa representativa, el problema al que se enfrenta es la maximización de sus beneficios, representados por Π. Los beneficios son iguales a la producción realizada menos los costos que se generan por llevar a cabo la misma, como el único factor utilizado para la producción es el trabajo, los costos que se generan únicamente son el pago a los trabajadores, tal costo es igual a ωl.

La producción va a ser expresada a través de una función que se denotará por $F(l)$, se va a asumir que la producción es siempre positiva, que cuando aumenta la cantidad de trabajo, la producción aumenta y que la productividad marginal del trabajo disminuye en la medida que aumenta dicho factor de producción, es decir, $F' > 0$ y $F'' < 0$.

Dicho en otras palabras, la empresa desea maximizar

$$\Pi = F(l) - \omega l.$$

De lo anterior se puede ver que la condición de optimización de este problema es

$$F'(l) = \omega. \tag{2.17}$$

Esta condición implica que para maximizar los beneficios, la empresa contrata trabajo hasta el punto en que la productividad marginal del trabajo es igual al salario real.

Gobierno

El gobierno únicamente debe ajustarse a un presupuesto, pues no puede gastar todo lo que quiere. Es decir, de igual manera que el consumidor, se enfrenta a una restricción presupuestaria. Dicha restricción dice que el déficit real del gobierno debe ser financiado adquiriendo deuda, es decir, emitiendo bonos o imprimiendo más dinero. Este déficit real es igual a los egresos que tiene el gobierno, los cuales son, en primer lugar el gasto que realiza, los intereses que tiene que pagar por deudas que ha adquirido, es decir, el pago de la tasa de interés real por la emisión de bonos, el impuesto inflacionario $(-p)$ sobre el nivel de saldos reales de dinero (este impuesto se paga automáticamente a medida que el consumidor sufre la pérdida de valor real del dinero que posee, causado por el aumento del nivel de precios), menos los ingresos originados por el impuesto sobre la renta y la recaudación de impuestos que obtiene del consumidor.

Por lo anterior se tiene que la restricción presupuestaria del gobierno en términos reales está dada por

$$\dot{m} + \dot{a} = g + (i^* - q)a - (q + \mathrm{e})m - \tau(\omega l + \Pi) - \top, \tag{2.18}$$

donde

$a = \dfrac{A}{P}$ = bonos comercializables emitidos por el gobierno nacional,

A = cantidad nominal de bonos.

La economía en su conjunto, al igual que el consumidor, la empresa y el gobierno, tiene una restricción presupuestaria intertemporal. Dicha restricción es representada por la cuenta corriente que es una variable que mide la tasa a la que los residentes nacionales están tomando préstamos o prestando al resto del mundo. Para hallar la restricción presupuestaria de la economía, basta restar (2.18) de (2.3) y recordar que $\Pi = F(l) + \omega l$. Obteniéndose así

$$\begin{aligned} \dot{n} &= (\omega l + \Pi) - c - g + (i^* - q)n \\ &= F(l) - c - g + (i^* - q)n, \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde $n \equiv b - a$ es la cantidad neta de bonos comercializables, es decir, los activos de los residentes nacionales frente a los extranjeros menos las obligaciones con el extranjero. La restricción anterior establece que la tasa de cambio de la cantidad neta de bonos comercializables es igual al saldo de la cuenta corriente, lo cual a su vez es igual al saldo de la balanza comercial más el interés generado por la cantidad neta de bonos. Como sólo hay un bien comercializable en la economía, el saldo de la balanza comercial es simplemente el exceso de producción sobre el consumo nacional de dicho bien en los sectores público y privado.

Para finalizar la descripción de la economía, la política que el gobierno implementará debe ser especificada, por lo que se asume que el gobierno permite que la oferta nominal de dinero nacional crezca con una tasa fija φ. La tasa real de crecimiento monetario es por lo tanto

$$\dot{m} = (\varphi - q - \mathrm{e})m, \tag{2.20}$$

con lo anterior y por (2.18) se tiene que la tasa de cambio de los bonos emitidos por el gobierno es

$$\dot{a} = g + (i^* - q)a - \tau(\omega l + \Pi) - \varphi m - \top.$$

Equilibrio macroeconómico

Enseguida se encontrará el equilibrio macroeconómico en este modelo. Dicho equilibrio macroeconómico se alcanza cuando todos los agentes de la economía optimizan, los mercados son claros y todas las expectativas se cumplen. Combinando las condiciones de optimización del consumidor obtenidas en (2.15a)-(2.15c), la condición de optimización de la empresa dada en (2.17), recordando que $\Pi = F(l) - \omega l$, las ecuaciones de acumulación (2.3) y (2.18), la política de gobierno (2.20) y la relación de la cuenta corriente (2.19), se puede describir el equilibrio macroeconómico por medio del siguiente conjunto de relaciones

$$\begin{aligned} U_c &= \bar{\lambda}; && \text{(2.21a)} \\ U_l &= -F'(l)\bar{\lambda}(1 - \tau); && \text{(2.21b)} \\ V' &= \bar{\lambda}(i^* + \mathrm{e}); && \text{(2.21c)} \\ \dot{m} &= (\varphi - q - \mathrm{e})m; && \text{(2.21d)} \\ \dot{b} &= (1 - \tau)F(l) - c + (i^* - q)b - \varphi m - \top; && \text{(2.21e)} \\ \dot{n} &= F(l) - c - g + (i^* - q)n. && \text{(2.21f)} \end{aligned}$$

Enseguida se verá que la dinámica de este equilibrio macroeconómico se degenera.

Como $\bar{\lambda}$ es constante, las condiciones (2.21a) y (2.21b) implican que c y l también son constantes en todo momento. Para ver esto último se derivan las ecuaciones antes mencionadas, de lo que se obtiene

$$\begin{aligned} U_{cc}\dot{c} + U_{cl}\dot{l} &= 0; \\ U_{cl}\dot{c} + \dot{l}\left[U_{ll} + F''\bar{\lambda}(1-\tau)\right] &= 0. \end{aligned}$$

Como $U_{cc}\left[U_{ll} + F''\bar{\lambda}(1-\tau)\right] - U_{cl}^2 > 0$, existe una única solución para este sistema, por lo que $\dot{c} = 0$ y $\dot{l} = 0$ lo que implica que c y l son constantes.

Ahora resolviendo (2.21d) tomando en cuenta la condición inicial $m(t_0) = m_0$ se obtiene que

$$m(t) = m_0 e^{(\varphi - q - \mathrm{e})t}.$$

Para asegurar que esta última ecuación siempre devuelve un cantidad finito en estado estacionario, se asume que

$$\varphi = q + \mathrm{e}. \tag{2.22}$$

Esto implica que m es constante. Con c y l siendo también constantes, se puede resolver la ecuación de acumulación (2.21e) para $b(t)$. De esto se obtiene que

$$b(t) = \left(-\frac{[(1-\tau)F(l) - c - \varphi m - \top]}{i^* - q} e^{-(i^*-q)t} + K\right) e^{(i^*-q)t},$$

como la condición inicial $b(0) = b_0$ debe cumplirse, se obtiene que el valor para la constante K es

$$K = b_0 + \frac{(1-\tau)F(l) - c - \varphi m - \top}{i^* - q}.$$

Lo anterior implica que, dado la cantidad real inicial de bonos mantenidos por los residentes nacionales b_0, la solución para la cantidad de bonos reales $b(t)$ del consumidor representativo es

$$b(t) = \left[b_0 + \frac{(1-\tau)F(l) - c - \varphi m - \top}{i^* - q}\left(1 - e^{-(i^*-q)t}\right)\right] e^{(i^*-q)t}.$$

Recordando que la condición final $b(T) = b_1$ debe satisfacerse, se tiene que

$$b_1 e^{-(i^*-q)T} = b_0 + \frac{(1-\tau)F(l) - c - \varphi m - \top}{i^* - q}\left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right). \tag{2.23}$$

Esta ecuación representa la restricción presupuestaria del consumidor en equilibrio estacionario.

De la misma manera, resolviendo la ecuación diferencial (2.21f) para $n(t)$, se obtiene que la solución para la cantidad neta de bonos dada la condición inicial $n(0) = n_0 \equiv b_0 - a_0$ es

$$n(t) = \left[n_0 + \frac{F(l) - c - g}{i^* - q} \left(1 - e^{-(i^*-q)t}\right) \right] e^{(i^*-q)t}.$$

Ahora, como la condición final $n(T) = n_1 \equiv b_1 - a_1$ debe cumplirse se tiene que

$$n_1 e^{-(i^*-q)T} = n_0 + \frac{F(l) - c - g}{i^* - q} \left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right).$$

Equivalentemente,

$$(b_1 - a_1)\, e^{-(i^*-q)T} = b_0 - a_0 + \frac{F(l) - c - g}{i^* - q} \left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right). \tag{2.24}$$

Esta ecuación representa la restricción presupuestaria intertemporal de la economía en equilibrio estacionario.

Con lo anterior, el equilibrio de perfecta previsión se reduce a las siguientes ecuaciones

$$U_c = \bar{\lambda}; \tag{2.25a}$$
$$U_l = -F'(l)\bar{\lambda}(1 - \tau); \tag{2.25b}$$
$$V' = \bar{\lambda}\left(i^* + \varphi - q\right); \tag{2.25c}$$

$$\left(b_0 - b_1 e^{-(i^*-q)T}\right)(i^* - q) + \left[(1 - \tau)F(l) - c - \varphi m - \top\right]\left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right) = 0; \tag{2.25d}$$
$$\left[b_0 - a_0 - (b_1 - a_1)\, e^{-(i^*-q)T}\right](i^* - q) + \left[F(l) - c - g\right]\left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right) = 0. \tag{2.25e}$$

Como se puede ver estas ecuaciones implican que no hay dinámica, es decir, la economía siempre se encuentra en estado fijo.

Con los valores b_0, b_1, a_0 y a_1 siendo predeterminados, estas cinco ecuaciones determinan las soluciones estacionarias para c, l, m, $\bar{\lambda}$ y uno de los instrumentos políticos φ, $\top$, τ o g. En otras palabras, tres de los parámetros políticos pueden ser seleccionados arbitrariamente y el otro instrumento restante es utilizado con la finalidad de que el equilibrio sea sostenible.

Para hallar la restricción presupuestaria intertemporal del gobierno en equilibrio estacionario, basta con restar (2.24) de (2.23), de lo cual se obtiene

$$a_1 e^{-(i^*-q)T} \;=\; a_0 + \frac{g - \tau F(l) - \varphi m - \top}{i^* - q}\left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right).$$

Enseguida se va a determinar y caracterizar la acción óptima del gobierno, pues debido a la pérdida de dinámica, esto es fácil de manejar analíticamente. Este análisis se va a centrar en el caso donde la tasa de crecimiento monetario φ es siempre seleccionada para optimizar la utilidad y se considera que para sostener el equilibrio, el gobierno lleva a cabo una apropiada recaudación de impuestos.

2.1.1. Acciones óptimas del gobierno: Una caracterización general

Se asume que el gobierno nacional es benevolente y busca determinar las acciones óptimas que maximicen la función de utilidad del consumidor (2.4) sujeta a las restricciones planteadas en (2.25a)-(2.25e). Como todo es estacionario, esta optimización puede ser realizada maximizando la función de utilidad instantánea, sujeto a las restricciones antes mencionadas.

Este problema puede ser expresado en términos de la maximización del siguiente Lagrangiano

$$\begin{aligned}
L \;\equiv\; & U(c,l,g) + V(m) + \alpha_1\left[\bar{\lambda} - U_c(c,l,g)\right] - \alpha_2\left[F'(l)\bar{\lambda}\,(1-\tau) + U_l(c,l,g)\right] + \\
+\; & \alpha_3\left[\bar{\lambda}(i^* + \varphi - q) - V'(m)\right] + \\
+\; & \alpha_4\left[\left(b_0 - b_1 e^{-(i^*-q)T}\right)(i^* - q) + \left[(1-\tau)\,F(l) - c - \varphi m - \top\right]\left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right)\right] \\
+\; & \alpha_5\left[\left(b_0 - a_0 - (b_1 - a_1)\,e^{-(i^*-q)T}\right)(i^* - q) + \left[F(l) - c - g\right]\left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right)\right].
\end{aligned}$$

Enseguida se van a encontrar las condiciones de optimización de este problema y dividirlas en dos partes: las primeras van a ser las condiciones de optimización para las variables relacionadas con el sector privado, es decir, para c, l, $\bar{\lambda}$ y m, las siguientes van a ser para las variables relacionadas con el sector público, es decir, para g, τ, φ y $\top$.

Las condiciones de optimización son

Variables del sector privado

$$\frac{\partial L}{\partial c} \equiv U_c - \alpha_1 U_{cc} - \alpha_2 U_{lc} - \alpha_4 \left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right) - \alpha_5 \left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right) = 0; \tag{2.26a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial l} &\equiv U_l - \alpha_1 U_{cl} - \alpha_2 \left[U_{ll} + F''\bar{\lambda}\left(1-\tau\right)\right] + \\ &+ \alpha_4 \left(1-\tau\right) F' \left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right) + \alpha_5 F' \left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right) = 0; \end{aligned} \tag{2.26b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}} \equiv \alpha_1 - \alpha_2 F' \left(1-\tau\right) + \alpha_3 \left(i^* - \varphi - q\right) = 0; \tag{2.26c}$$

$$\frac{\partial L}{\partial m} \equiv V' - \alpha_3 V'' - \alpha_4 \varphi \left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right) = 0. \tag{2.26d}$$

Variables del sector público

$$\frac{\partial L}{\partial g} \equiv U_g - \alpha_1 U_{cg} - \alpha_2 U_{lg} - \alpha_5 \left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right) = 0; \tag{2.27a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} \equiv \alpha_2 F' \bar{\lambda} - \alpha_4 \left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right) = 0; \tag{2.27b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \top} \equiv -\alpha_4 \left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right) = 0; \tag{2.27c}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} \equiv \alpha_3 \bar{\lambda} - \alpha_4 m \left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right) = 0. \tag{2.27d}$$

Además que las restricciones del problema (2.25a)-(2.25e) deben cumplirse.

2.1.2. Crecimiento Óptimo Monetario

Ahora se utilizarán las características generales (2.26a)-(2.26d) y (2.27a)-(2.27d) para determinar la tasa óptima de crecimiento monetario.

Arreglo mediante la Recaudación de Impuestos

Como ya se había mencionado, el gobierno elige mantener el equilibrio llevando a cabo una apropiada recaudación de impuestos. Para este caso las condiciones de optimización relevantes del sector público son (2.27c) y (2.27d), las cuales al ser combinadas resultan en:

$$\begin{aligned} \alpha_4 \left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right) &= 0, \\ \alpha_3 \bar{\lambda} &= 0. \end{aligned}$$

La segunda ecuación implica 2 posibilidades: la primera es que $\alpha_3 = 0$, y la segunda es que $\bar{\lambda} = 0$. Esto último no puede ser, pues ya se demostró, en la Afirmación 2.1.1, que este valor es distinto de cero, por lo que sólo la primera posibilidad es válida.

Dado que $\alpha_3 = 0$, el equilibrio se reduce a

$$\begin{aligned} U_c F' + U_l - \alpha_1 \left[U_{cc} F' + U_{cl}\right] &- \alpha_2 \left[U_{lc} F' + U_{ll} + F'' U_c (1-\tau)\right] = 0; && (2.28a) \\ \alpha_1 &- \alpha_2 F' (1-\tau) = 0; && (2.28b) \\ V' &= 0; && (2.28c) \\ U_l &+ F' U_c (1-\tau) = 0; && (2.28d) \\ V' &- U_c \left(i^* + \varphi - q\right) = 0; && (2.28e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(b_0 - b_1 e^{-(i^*-q)T}\right)\left(i^* - q\right) + \left[(1-\tau)F(l) - c - \varphi m - \top\right]\left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right) &= 0; && (2.28f) \\ \left[b_0 - a_0 - (b_1 - a_1) e^{-(i^*-q)T}\right]\left(i^* - q\right) + \left[F(l) - c - g\right]\left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right) &= 0. && (2.28g) \end{aligned}$$

La ecuación (2.28a) se obtiene despejando $\alpha_5 \left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right)$ de (2.26a), sustituyendo este resultado en (2.26b), recordando que $U_c = \bar{\lambda}$ y sustituyendo $\alpha_4 \left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right) = 0$. Las ecuaciones (2.28b) y (2.28c) se obtienen sustituyendo $\alpha_4 \left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right) = 0$ y $\alpha_3 = 0$ en (2.26c) y (2.26d). Las ecuaciones (2.28d)-(2.28g) son las respectivas restricciones del problema (2.25b)-(2.25e) recordando que (2.25a) se cumple.

Las ecuaciones (2.28a)-(2.28d) y (2.28g) determinan los valores óptimos para c, l, m, α_1 y α_2. Dados estos valores, (2.28e) determina la tasa óptima de crecimiento monetario y (2.28f) determina la recaudación de impuestos $\top$ necesaria para sostener el equilibrio.

Enseguida se van a obtener las soluciones para α_1 y α_2, esto se hará de la siguiente manera: de (2.28d) se despeja U_l y se sustituye en (2.28a), con esa nueva ecuación y con (2.28b) se forma un sistema de ecuaciones. Una vez resuelto el sistema se obtiene que las soluciones buscadas están dadas por

$$\alpha_1 = \frac{\tau\,(F')^2\,U_c\,(1-\tau)}{\Delta}, \tag{2.29}$$

$$\alpha_2 = \frac{\tau F' U_c}{\Delta}, \tag{2.30}$$

donde $\Delta = F'(1-\tau)\,[U_{cc}F' + U_{cl}] + U_{lc}F' + U_{ll} + F''\,(1-\tau)\,U_c < 0$.

De las ecuaciones (2.28c) y (2.28e) se tiene que

$$U_c\,(i^* + \varphi - q) = 0.$$

Dado que $U_c > 0$, de la expresión anterior se puede hallar que el valor óptimo $\hat{\varphi}$ para la tasa de crecimiento del dinero, está dado por

$$\hat{\varphi} = -\,(i^* - q)\,. \tag{2.31}$$

Usando la relación de estado estacionario dada en (2.22)y (2.31) se tiene que el valor óptimo ê es

$$\hat{e} = -i^*.$$

2.1.3. Paquete Fiscal-Monetario Óptimo

Hasta ahora se ha asumido que el gasto del gobierno permanece fijo. Enseguida se considera la situación en la que el gobierno elige su nivel óptimo de gasto g, junto con la tasa de crecimiento φ.

En este caso, las condiciones de optimización consisten simplemente en añadir la condición (2.27a) al conjunto de ecuaciones (2.28a)- (2.28g).

Despejando $\alpha_5\left(1 - e^{-(i^*-q)T}\right)$ de (2.26a) tomando en cuenta que $\alpha_4 = 0$ y sustituyendo en la ecuación (2.27a) se obtiene

$$U_g - U_c - \alpha_1\,(U_{cg} - U_{cc}) - \alpha_2\,(U_{lg} - U_{lc}) = 0. \tag{2.32}$$

Ahora sustituyendo los valores de α_1 y α_2 dados en (2.29) y (2.30) respectivamente, en (2.32), se obtiene que la condición de optimización para el gasto del gobierno está dada por

$$U_g \;=\; U_c\left[1+\frac{(F')^2\tau(1-\tau)}{\Delta}\left(U_{cg}-U_{cc}\right)+\frac{F'\tau}{\Delta}\left(U_{lg}-U_{lc}\right)\right].$$

En esencia, esta condición iguala la utilidad marginal del gasto del gobierno a una utilidad marginal ajustada del consumo privado.

Usando el hecho de que $U_l = -F'(1-\tau)U_c$, la ecuación anterior puede ser escrita en la forma equivalente

$$U_g \;=\; U_c\left(1+\frac{F'\tau U_c}{\Delta}\left[\frac{d}{dg}\left(\frac{U_l}{U_c}\right)-\frac{d}{dc}\left(\frac{U_l}{U_c}\right)\right]\right).$$

La tasa óptima de crecimiento monetario está dada por (2.31) y como se puede ver es invariante del nivel seleccionado de g.

Ahora se supone que el gobierno elige la tasa óptima, τ, junto con la tasa de crecimiento monetario, φ, y su nivel de gasto g. Para este caso, la condición (2.27b) debe ser agregada a las condiciones (2.28a)-(2.28g) y (2.27a). Dado que $\alpha_4 = 0$, (2.27b) implica que $\alpha_2 = 0$, de lo cual (2.28b) implica que $\alpha_1 = 0$. De (2.29) y (2.30) se obtiene que $\tau = 0$. Por lo tanto, las condiciones de optimización se reducen a

$$\tau = 0; \tag{2.33a}$$

$$\varphi = -\left(i^*-q\right); \tag{2.33b}$$

$$U_cF' + U_l = 0; \tag{2.33c}$$

$$V' = 0; \tag{2.33d}$$

$$U_g = U_c; \tag{2.33e}$$

$$\left(b_0-b_1e^{-(i^*-q)T}\right)\left(i^*-q\right)+\left[F(l)-c-\varphi m-\top\right]\left(1-e^{-(i^*-q)T}\right) = 0; \tag{2.33f}$$

$$\left[b_0-a_0-\left(b_1-a_1\right)e^{-(i^*-q)T}\right]\left(i^*-q\right)+\left[F(l)-c-g\right]\left(1-e^{-(i^*-q)T}\right) = 0. \tag{2.33g}$$

Estas ecuaciones describen un paquete político macroeconómico integrado óptimo en el cual el impuesto sobre la renta es cero, lo cual implica que la condición óptima para el gasto del gobierno se reduce simplemente a igualar la utilidad marginal del gasto público a la utilidad marginal del consumo privado, y la tasa de crecimiento monetario está simplemente dada por (2.33b).

Los correspondientes niveles óptimos de $\hat{c}$, $\hat{l}$, $\hat{m}$ y $\hat{g}$ son conjuntamente determinados por (2.33c)-(2.33e) y (2.33g). Finalmente el nivel requerido de impuestos $\top$ para sostener el equilibrio es determinado por (2.33f).

Desde el punto de vista de derivar un equilibrio dinámico, este modelo no es útil, pues la mayor parte del equilibrio se encuentra siempre en estado estacionario. Para poder obtener una dinámica no degenerada, se introducirá un elemento al modelo para que genere la dinámica deseada.

Varias formas para generar dinámica pueden ser incorporadas al modelo, como pueden ser, incluir la introducción de una tasa subjetiva de descuento temporal variable o costos de transacción en el mercado de bonos extranjeros. Sin embargo, únicamente se tratará el caso de la fuente más importante para generar dinámica: la introducción de costos de ajuste convexos asociados a la acumulación física de capital, lo cual se hará en la siguiente sección.

2.2. Modelo Monetario de un Bien con Acumulación Física de Capital

Se empezará recordando el modelo de un bien, en el cual el agente representativo produce y consume un único bien comercializable. El recurso clave para generar dinámica es mediante costos de ajuste asociados a la acumulación física de capital. Con esto se observará, que el equilibrio producido tiene una dinámica no degenerada. El modelo es lo suficientemente manejable que permite caracterizar el ajuste de la dinámica en la economía a detalle y destacar el papel fundamental que juega la acumulación de capital en este proceso.

En este modelo se supone que el consumidor y la empresa se consolidan en un solo agente representativo.

Enseguida se describe la estructura de la economía dentro de este modelo.

Agente Representativo

El agente representativo decide la cantidad del bien que va a consumir, la cantidad de horas que dedicará al trabajo, la cantidad de riqueza que debe invertir en capital y la cantidad que debe invertir en bonos. En este caso la función de utilidad que mide su nivel de bienestar depende de su consumo, trabajo y del gasto del gobierno. Esta función es de la forma $U(c,l) + W(g)$. De la misma manera que en el modelo anterior, se asume que el nivel de bienestar del agente aumenta cuando, aumenta su consumo, sus horas de ocio o esparcimiento y el gasto del gobierno, es decir, $U_c > 0$, $U_l < 0$ y $W_g > 0$. También se asume que la función de utilidad es cóncava y que la utilidad marginal del consumo aumenta con el ocio, en otras palabras $U_{cl} < 0$.

En este modelo, el agente representativo para producir el bien comercializable, utiliza dos factores de producción: capital k y trabajo l. Dentro del capital se incluye la fábrica, el equipo y las existencias en bienes que posea el agente, sin embargo, todo esto se engloba en una variable única k.

Se asume que hay una sola función de producción estándar $z = F(k,l)$. Dicha función tiene las siguientes características importantes:

1. Un incremento en la cantidad de cualquier insumo provoca que la producción aumente. La productividad marginal del trabajo, esto es, el aumento de la producción resultante de un incremento del trabajo en una unidad, es positiva. Lo mismo vale para la productividad marginal del capital, dicho de otra forma, $F_l > 0$ y $F_k > 0$.

2. La productividad marginal de cada factor disminuye en la medida en que se utiliza más de este factor y se mantiene una cantidad fija del otro insumo. Es más fácil entender esto con un ejemplo, así que considere el caso de una

panadería: Si hay 5 personas, cada uno posee un horno, la contratación de un trabajador extra puede hacer crecer enormemente la producción de pan. Sin embargo, si el dueño continúa agregando más trabajadores sin incrementar el número de hornos, descubrirá que el incremento total de la producción generado por un nuevo trabajador se hace cada vez más pequeño. Dicho esto en términos de la función de producción significa que $F_{ll} < 0$ y $F_{kk} < 0$.

Una función que tenga las dos propiedades antes mencionadas se llama Función Neoclásica de Producción.

Además la función de producción $z = F(k, l)$ también cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} F_{kl} &> 0; \\ F_{kk}F_{ll} - F_{kl}^2 &= 0; \qquad (2.34) \\ F_{kk}F_l - F_{kl}F_k &= F_{kk}\left(\frac{z}{l}\right); \qquad (2.35) \\ F_{kl}F_l - F_{ll}F_k &= F_{kl}\left(\frac{z}{l}\right). \qquad (2.36) \end{aligned}$$

Ahora el agente representativo tiene dos formas de distribuir su riqueza a lo largo del tiempo; puede prestar dinero en los mercados extranjeros, es decir, adquirir bonos que otorgan una tasa de interés real r^*, o bien, puede acumular capital para alquilar a una determinada tasa de renta y con ello incrementar su producción futura.

La inversión es el flujo de producción en un periodo dado que se usa para incrementar la cantidad de capital de la economía o para reponer el capital existente conforme se desgasta o envejece. La teoría de la inversión es intertemporal, porque la motivación para invertir ahora es incrementar las posibilidades de producción en el futuro, de donde se tiene que

$$\dot{k} = I. \qquad (2.37)$$

Por simplicidad se va a suponer que el capital no se deprecia.

La característica principal de este modelo es que está basado en los costos de ajuste; esto es, la suposición de que la inversión genera costos de instalación. En general, una empresa puede requerir un considerable periodo de tiempo para calcular e instalar el nivel "deseado" de capital. Para cualquier propuesta de inversión, tiene que haber estudios de factibilidad, negociaciones financieras, etc. Una vez que se toma una decisión de inversión, toma tiempo construir una nueva fábrica, instalar nuevas máquinas, etc. Por otro lado, los costos globales de la inversión tienden a subir si la compañía presiona por terminar su proyecto de inversión en un periodo muy corto de tiempo. Por tal motivo, no sólo son las restricciones técnicas, sino también la maximización de los beneficios lo que lleva a las empresas a cambiar gradualmente los niveles de capital.

Por lo anterior se supone que el incremento dado en la cantidad de capital, involucra costos que son especificados por la función

$$C(I) = I + \psi(I), \qquad \psi \geq 0, \quad \psi' > 0, \quad \psi'' > 0, \tag{2.38}$$

donde el incremento de I unidades de capital requiere el uso de $\psi(I)$ unidades de producción.

Lo anterior indica que la desinversión, es decir cuando $I < 0$, involucra costos positivos representados por ψ. De lo anterior se puede ver que $C' \geq 0$, $C'' > 0$, se asumirá que $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$, lo cual implica que $C(0) = 0$ y $C'(0) = 1$, así que el costo total de cero inversión es cero y el costo marginal de cero inversión es la unidad.

La restricción presupuestaria intertemporal del agente es similar a la del modelo anterior; el ahorro está dado por la cantidad de producción que el agente representativo lleve a cabo, los rendimientos reales generados por la adquisición de bonos extranjeros, menos el consumo que realice, los impuestos que deba pagar al gobierno y los costos de ajuste ocasionados por la acumulación de capital. Este ahorro es utilizado para adquirir bonos extranjeros.

Por lo anterior se tiene que la restricción presupuestaria del agente representativo está dada por

$$\dot{b} \;=\; F(k,l) - C(I) - c + r^{*}b - \top, \tag{2.39}$$

donde

r^{*} = tasa de interés real mundial.

Resumiendo, el agente representativo desea seleccionar su nivel de consumo c, su oferta de trabajo l, su tasa de inversión I, y sus tasas de acumulación de activos, $\dot{k}$ y $\dot{b}$ de tal manera que maximice su nivel presente de bienestar acumulado en el periodo de tiempo $[t_0, t_1]$, esto es, desea maximizar

$$J(x_0, u) = \int_{t_0}^{t_1} \left[U(c,l) + W(g)\right] e^{-\beta t} dt,$$

sobre el conjunto de funciones diferenciables $u : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $x : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, con condición inicial $x(t_0) = (b_0, k_0)$ y condición final $x(t_1) = (b_1, k_1)$. Sujeto a las restricciones presupuestarias (2.37) y (2.39).

Para resolver este problema se asume que el tiempo inicial $t_0 = 0$ y el tiempo final $t_1 = T$, con $T > 0$ fijo.

El vector de variables de estado es $x(t) = (b, k)$, con la condición inicial $x(0) = (x_1^0, x_2^0) = (b_0, k_0)$ y la condición final $x(T) = (x_1^1, x_2^1) = (b_1, k_1)$. El vector de controles es $u(t) = (c, I, l)$. Se denota $u(0) = (c_0, I_0, l_0)$ y $u(T) = (c_1, I_1, l_1)$.

Se convierte a un problema de Mayer, siguiendo lo dado en (1.6) por lo que se define

$$x_3(t) = \int_{t_0}^{t} [U(c,l) + W(g)]\, e^{-\beta\zeta} d\zeta, \text{ con } x_3(0) = 0.$$

La función $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^8$, al tomar en cuenta que las propiedades dadas en (1.3) se deben cumplir, queda de la siguiente manera

$$\phi(\vec{\mathbf{e}}) = \begin{bmatrix} -x_3^1, & t_1 - T, & t_0, & b_0 - x_1^0, & k_0 - x_2^0, & x_3^0, & b_1 - x_1^1, & k_1 - x_2^1 \end{bmatrix}^{\mathcal{T}}.$$

La función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se define como

$$F(t, x, u) = \begin{bmatrix} \dot{b} \\ \dot{k} \\ \dot{x}_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(k,l) - C(I) - c + r^* b - \top \\ I \\ [U(c,l) + W(g)]\, e^{-\beta t} \end{bmatrix}.$$

Por el Principio de Pontryagin se deben encontrar $P(t) : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\lambda_1 : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda(t) : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^7$, con $\lambda = (\lambda_1, \lambda(t)) \neq (0, 0)$ tal que cada condición del Teorema 1.1 se cumpla.

De la condición (1.7a) se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1(t) & \dot{P}_2(t) & \dot{P}_3(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} P_1(t) & P_2(t) & P_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^* & F_k(k,l) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de lo cual se puede decir que

$$\begin{aligned} \dot{P}_1(t) &= -P_1(t) r^*; && (2.40\text{a}) \\ \dot{P}_2(t) &= -P_1(t) F_k(k,l); && (2.40\text{b}) \\ \dot{P}_3(t) &= 0. && (2.40\text{c}) \end{aligned}$$

Por la parte del principio de Pontryagin (1.7c) se debe cumplir que

$$\left[\begin{array}{ccc} P_1(t_0) & P_2(t_0) & P_3(t_0) \end{array}\right] = -\left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \dots & \lambda_8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

De lo anterior se tiene que

$$P_1(t_0) = \lambda_4; \tag{2.41a}$$
$$P_2(t_0) = \lambda_5; \tag{2.41b}$$
$$P_3(t_0) = -\lambda_6. \tag{2.41c}$$

De la condición (1.7d) se tiene que cumplir que

$$\left[\begin{array}{ccc} P_1(t_1) & P_2(t_1) & P_3(t_1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \dots & \lambda_8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto implica que

$$P_1(t_1) = -\lambda_7; \tag{2.42a}$$
$$P_2(t_1) = -\lambda_8; \tag{2.42b}$$
$$P_3(t_1) = -\lambda_1. \tag{2.42c}$$

Por la condición (1.7e) se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccc} P_1(t_0) & P_2(t_0) & P_3(t_0) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} F\left(k_0^*, l_0^*\right) - C\left(I_0^*\right) - c_0^* + r^* b_0^* - \top \\ I_0^* \\ \left[U(c_0^*, l_0^*) + W(g)\right] \\ \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \dots & \lambda_8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] = \lambda_3.$$

Lo anterior y las condiciones (2.41a)-(2.41c) implican que

$$\begin{aligned} H\left(t_0, x^*(t_0), u^*(t_0)\right) &= \lambda_4 \left[F\left(k_0^*, l_0^*\right) - C\left(I_0^*\right) - c_0^* + r^* b_0^* - \top\right] + \lambda_5 I_0^* - \\ &- \lambda_6 \left[U\left(c_0^*, l_0^*\right) + W(g)\right] = \lambda_3. \end{aligned} \tag{2.43}$$

De la condición (1.7f) se obtiene

$$\begin{bmatrix} P_1(t_1) & P_2(t_1) & P_3(t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(k_1^*, l_1^*) - C(I_1^*) - c_1^* + r^* b_1^* - \top \\ I_1^* \\ \left[U(c_1^*, l_1^*) + W(g)\right] e^{-\beta t_1} \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -\lambda_2.$$

De las condiciones (2.42a)-(2.42c) y lo anterior se obtiene la relación

$$\begin{aligned} -H(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1)) &= \lambda_7 \left[F(k_1^*, l_1^*) - C(I_1^*) - c_1^* + r^* b_1^* - \top\right] + \lambda_8 I_1^* \\ &+ \lambda_1 \left[U(c_1^*, l_1^*) + W(g)\right] e^{-\beta t_1} = \lambda_2. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Resolviendo la ecuación diferencial (2.40a) tomando en cuenta la condición inicial dada en (2.41a) se obtiene que

$$P_1(t) = \lambda_4 e^{-r^* t}, \tag{2.45}$$

y por la condición (2.42a) se obtiene la relación

$$\lambda_4(t_1) e^{-r^* t_1} = -\lambda_7. \tag{2.46}$$

Sustituyendo la solución para $P_1(t)$ dada en (2.45) en la ecuación diferencial (2.40b) se obtiene que la solución para $P_2(t)$ es

$$P_2(t) = \lambda_5 e^{-r^* t}, \tag{2.47}$$

y por las condiciones (2.41b) y (2.42b) se obtienen las relaciones

$$\lambda_4(t_0) F_k = \lambda_5 r^*; \tag{2.48}$$

$$\lambda_5(t_1) e^{-r^* t_1} = -\lambda_8. \tag{2.49}$$

De la ecuación diferencial (2.40c) se tiene que $P_3(t)$ es constante, y como las condiciones (2.41c) y (2.42c) deben cumplirse, entonces se tiene que

$$P_3(t) = -\lambda_1 = -\lambda_6. \tag{2.50}$$

Afirmación 2.2.1. λ_1 y $\lambda_4(t)$ deben ser distintos de cero para todo $t \in [t_0, t_1]$ para obtener las condiciones de optimización del problema.

Demostración: Suponga que ambos valores son iguales a cero. Con $\lambda_1 = 0$ se tiene de inmediato por (2.50) que $\lambda_6 = 0$. Por otro lado, con $\lambda_4 = 0$ y por las relaciones (2.46) y (2.48) se tiene que $\lambda_7 = 0$ y $\lambda_5 = 0$, esto y la relación dada en (2.49) implican que λ_8 es cero. Por último, combinando todo lo anterior, junto con las relaciones (2.43) y (2.44) se tiene que λ_3 y λ_2 son cero, lo cual implica que $\lambda = 0$, lo cual no es de utilidad para encontrar la optimización del problema, pues no se cumple una de las condiciones establecidas en el Principio de Pontryagin.

Por simplicidad y por la afirmación anterior, se puede asumir que $\lambda_1 = -1$, por lo que el vector $P(t)$ está dado por

$$P(t) = \begin{bmatrix} \lambda_4 e^{-r^*t}, & \lambda_5 e^{-r^*t}, & 1 \end{bmatrix}^{\mathcal{T}}.$$

El Hamiltoniano del sistema es

$$\begin{aligned} H(t,x,u) &= \lambda_4 e^{-r^*t}\left[F(k,l) - C(I) - c + r^*b - \top\right] + \\ &+ \lambda_5 e^{-r^*t} I + e^{-\beta t}\left[U(c,l) + W(g)\right], \end{aligned}$$

donde

λ_4 representa el valor marginal de la riqueza que se tiene en la forma de bonos comercializables extranjeros, y

λ_5 representa el valor marginal de la cantidad de capital físico del agente.

Tanto el valor marginal de los bonos extranjeros como de la cantidad de capital están expresados en términos reales.

Lo que resta es buscar las condiciones para que (1.8) se cumpla, es decir, se debe encontrar

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} H(t,x^*,u) &= \lambda_4 e^{-r^*t}\left[F(k^*,l) - C(I) - c + r^*b^* - \top\right] + \\ &+ \lambda_5 e^{-r^*t} I + e^{-\beta t}\left[U(c,l) + W(g)\right]. \end{aligned}$$

Por lo anterior se tiene que las condiciones de optimización del problema son

$$
\begin{aligned}
H_c &= -\lambda_4 e^{-r^*t} + e^{-\beta t} U_c = 0; \\
H_l &= \lambda_4 e^{-r^*t} F_l(k,l) + e^{-\beta t} U_l = 0; \\
H_I &= -\lambda_4 e^{-r^*t} C'(I) + \lambda_5 e^{-r^*t} = 0.
\end{aligned}
$$

Por la misma justificación que se hizo en el modelo anterior, la tasa subjetiva de descuento temporal debe ser igual a la tasa de interés real mundial, es decir, $\beta = r^*$. Con esto las condiciones de optimización del problema se reducen a

$$
\begin{aligned}
U_c &= \lambda_4; && (2.51a) \\
U_l &= -\lambda_4 F_l\left(k,l\right); && (2.51b) \\
C'(I) &= \frac{\lambda_5}{\lambda_4} := q. && (2.51c)
\end{aligned}
$$

Las primeras dos ecuaciones son análogas a (2.15a) y (2.15b). La condición (2.51c) indica que el costo marginal de inversión debe ser igual al valor marginal de la cantidad de capital expresado en términos del valor marginal de riqueza mantenida en bonos extranjeros, q será interpretado simplemente como el precio del capital en el mercado.

La matriz Hessiana del Hamiltoniano del sistema está dada por

$$
h = \begin{bmatrix} U_{cc} & U_{cl} & 0 \\ U_{cl} & \lambda_4 F_{ll} + U_{ll} & 0 \\ 0 & 0 & C'' \end{bmatrix}.
$$

Como las condiciones de optimización (2.51a)-(2.51c) maximizan la función $H(t,x,u)$, entonces se debe cumplir que

$$
U_{cc}(\lambda_4 F_{ll} + U_{ll}) - U_{cl}^2 \;\; > \;\; 0.
$$

De la ecuación diferencial (2.40a), una vez que se conoce explícitamente el vector $P(t)$ se obtiene que

$$
\dot{\lambda}_4 = 0.
$$

Esto implica que $\lambda_4 = \bar{\lambda}$ es constante para todo tiempo.

Por la ecuación diferencial (2.40b), una vez que se conoce P_2 se obtiene que

$$
\dot{\lambda}_5 e^{-r^*t} - \lambda_5 r^* e^{-r^*t} \;\; = \;\; -\lambda_4 e^{-r^*t} F_k(k,l),
$$

o equivalentemente,

$$r^* - \frac{\dot{\lambda}_5}{\lambda_5} \;=\; \frac{\lambda_4}{\lambda_5} F_k(k,l).$$

Como $\lambda_4 = \bar{\lambda}$ es constante y $\dfrac{\lambda_5}{\lambda_4} := q$, la relación anterior se puede escribir como

$$\frac{F_k}{q} + \frac{\dot{q}}{q} = r^*. \tag{2.52}$$

Esta ecuación iguala la tasa de retorno sobre el capital nacional a la tasa de retorno sobre los bonos comercializables. La tasa de retorno sobre el capital nacional tiene dos componentes, una son las ganancias generadas por invertir en capital, esto es, el aumento que tiene la producción al incrementar el capital en una unidad dividido por el precio del capital, la segunda componente es la tasa de capital ganada, es decir, la tasa de cambio porcentual instantánea en el valor del precio del capital.

Gobierno

El gobierno nuevamente se tiene que ajustar a su presupuesto, por lo que su déficit real, que es igual al gasto que realice, más la tasa de interés real que debe pagar sobre su deuda menos los impuestos que recaude, debe ser financiado emitiendo bonos.

Dicho de otra manera, el gobierno opera en base a la restricción presupuestaria, expresada en términos reales como

$$\dot{a} = g + r^* a - \top. \tag{2.53}$$

Similarmente como se hizo en el modelo anterior, para hallar la cantidad neta de bonos en el país, basta restar (2.53) de (2.39)

$$\dot{n} = F(k,l) - c - C(I) + r^* n - g. \tag{2.54}$$

Esta ecuación tiene la misma interpretación que (2.19). La ecuación (2.54) está sujeta a las condiciones inicial y final, $n(0) = n_0$ y $n(T) = n_1$.

Equilibrio macroeconómico

El equilibrio macroeconómico puede ser descrito como sigue: Primero las condiciones de optimización (2.51a) y (2.51b) pueden ser resueltas para el consumo y el trabajo como sigue,

$$c \;=\; c\left(\bar{\lambda}, k\right) \qquad c_{\bar{\lambda}} < 0, \qquad c_k < 0, \tag{2.55}$$

$$l \;=\; l\left(\bar{\lambda}, k\right) \qquad l_{\bar{\lambda}} > 0, \qquad l_k > 0. \tag{2.56}$$

Para ver esto, se deben tomar las diferenciales de las condiciones (2.51a) y (2.51b). De esto se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
U_{cc}c_{\bar{\lambda}} + U_{cl}l_{\bar{\lambda}} &= 1, \\
U_{lc}c_{\bar{\lambda}} + U_{ll}l_{\bar{\lambda}} &= -F_l - \bar{\lambda}F_{ll}l_{\bar{\lambda}}.
\end{aligned} \tag{2.57a}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{cc}c_k + U_{cl}l_k &= 0, \\
U_{lc}c_k + U_{ll}l_k &= -\bar{\lambda}F_{ll}l_k - \bar{\lambda}F_{lk}.
\end{aligned} \tag{2.57b}
$$

Al resolver los sistemas (2.57a) y (2.57b), el primero para $c_{\bar{\lambda}}$ y para $l_{\bar{\lambda}}$ y el segundo para c_k y para l_k se obtienen que las soluciones están dadas por

$$
c_{\bar{\lambda}} = \frac{U_{ll} + \bar{\lambda}F_{ll} + U_{cl}F_l}{\Psi} < 0, \qquad l_{\bar{\lambda}} = -\frac{U_{lc} + F_lU_{cc}}{\Psi} > 0, \tag{2.58}
$$

$$
c_k = \frac{\bar{\lambda}U_{cl}F_{lk}}{\Psi} < 0, \qquad l_k = -\frac{\bar{\lambda}F_{lk}U_{cc}}{\Psi} > 0, \tag{2.59}
$$

donde $\Psi = (\bar{\lambda}F_{ll} + U_{ll})U_{cc} - U_{cl}^2 > 0$.

Los resultados anteriores quieren decir que tanto el incremento en el valor marginal de la riqueza como de la cantidad de capital provocan que tanto el consumo como el ocio disminuyan.

De manera intuitiva esto se puede explicar de la siguiente manera: Al aumentar la cantidad de capital, la producción también se incrementa. A causa de esto, los empresarios aumentan el nivel de salario, lo que incentiva al agente representativo a aumentar la cantidad de horas que dedica a trabajar y a disminuir su consumo.

Ahora, al resolver la ecuación (2.51c) se obtiene que

$$
C(I) = Iq.
$$

Lo anterior y la definición de la función de costos (2.38) implican que

$$
\psi(I) = (q-1)I;
$$

como $\psi \geq 0$, se tiene que $I > 0$ cuando $q > 1$ e $I < 0$ cuando $q < 1$.

Intuitivamente, cuando $q > 1$, el mercado está emitiendo una señal de que el agente debe vender parte de los bonos extranjeros con los que cuenta con la finalidad de financiar un nuevo proyecto de inversión de una manera muy rentable. Es decir, al agente le conviene más realizar un nuevo gasto de inversión que adquirir bonos extranjeros, pues en el largo plazo, la acumulación positiva del capital le generará mayores dividendos que los que puede obtener por la compra de bonos.

Por lo tanto se puede escribir

$$I = I(q), \quad I' > 0. \tag{2.60}$$

Se puede observar que el equilibrio de corto plazo no es afectado directamente sobre el gasto del gobierno, sino que lo impacta indirectamente mediante $\bar{\lambda}$ y q.

La dinámica de la economía va a ser determinada secuencialmente. La evolución del sistema es determinada sustituyendo el equilibrio a corto plazo en las ecuaciones dinámicas y asegurando que las condiciones finales se cumplan. Las ecuaciones dinámicas (2.37) y (2.52) van a ser reducidas a un par de ecuaciones diferenciales autónomas en la cantidad de capital k y el precio del capital q y estas van a constituir el núcleo de la dinámica que determinará la trayectoria real de la economía.

Una vez que se determine el núcleo de la dinámica, la ecuación (2.54) va a devolver la dinámica de la cuenta corriente de la economía nacional. Esta ecuación va a ser reducida a una ecuación diferencial autónoma en n, después de sustituir las soluciones para k y q. Lo mismo aplicará para la restricción presupuestaria del gobierno (2.53).

Equilibrio Dinámico

Considere las ecuaciones (2.37) y (2.52) reescritas como

$$\begin{aligned} \dot{k} &= I(q); && (2.61a) \\ \dot{q} &= r^* q - F_k\left(k, l\left(\bar{\lambda}, k\right)\right). && (2.61b) \end{aligned}$$

El sistema anterior no es un sistema lineal, por lo que se debe linealizar alrededor del punto de equilibrio estacionario $\left(\tilde{k}, \tilde{q}\right)$. Esto ayudará para analizar su comportamiento. Nótese que el valor estacionario de precio del capital es la unidad, es decir, $\tilde{q} = 1$, pues proviene de hacer $\dot{k} = I = 0$

$$\begin{aligned} \dot{k} &= I'\left(q - \tilde{q}\right), \\ \dot{q} &= -\left(F_{kk} - F_{kl} l_k\right)\left(k - \tilde{k}\right) + r^*\left(q - \tilde{q}\right). \end{aligned} \tag{2.62}$$

Para simplificar se puede ver qué es I'. Como $C'(I(q)) - q = 0$, al derivar esta ecuación con respecto a q se obtiene que $C'' I' - 1 = 0$, con lo cual se obtiene que $I' = \dfrac{1}{C''}$.

Representando lo anterior en forma matricial se obtiene que

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C''} \\ -\left[F_{kk} + F_{kl} l_k\right] & r^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k - \tilde{k} \\ q - \tilde{q} \end{bmatrix}.$$

El determinante de la matriz de coeficientes anterior es $D \equiv \dfrac{F_{kk} + F_{kl} l_k}{C''}$. Sustituyendo el valor de l_k dado en (2.59), se obtiene $D = \dfrac{1}{C''} \left[\dfrac{F_{kk}\left(U_{ll} U_{cc} - U_{cl}^2\right) + U_{cc} \bar{\lambda}\left(F_{ll} F_{kk} - F_{lk}^2\right)}{\Psi} \right]$ como la función $F(k, l)$ satisface la condición (2.34), se tiene que el determinante se reduce a $D = \dfrac{F_{kk}}{C''} \left[\dfrac{U_{cc} U_{ll} - U_{cl}^2}{\Psi} \right]$ y además es negativo, lo cual quiere decir que el equilibrio de largo plazo es un punto silla y los valores característicos de la matriz de coeficientes son reales y de signos opuestos. Se denotan dichos valores por $\mu_1 < 0 < \mu_2$.

El polinomio característico de la matriz de coeficientes es$P(\mu) = -\mu(r^* - \mu) + \dfrac{F_{kk} + F_{kl} l_k}{C''}$.

Los valores característicos son las soluciones a la ecuación $P(\mu) = 0$. Para ello

$$\mu_i C'' = \frac{F_{kk} + F_{kl} l_k}{r^* - \mu_i} \quad \text{para} \quad i = 1, 2.$$

Enseguida se debe hallar el vector característico asociado al valor μ_1; para esto se tienen que encontrar los valores para $\left(k - \tilde{k}\right)$ y $(q - \tilde{q})$ que resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -\mu_1 \left(k - \tilde{k}\right) + \frac{1}{C''}(q - \tilde{q}) &= 0, \\ \left(F_{kk} + F_{kl} l_k\right)\left(k - \tilde{k}\right) + (r - \mu_1)(q - \tilde{q}) &= 0. \end{aligned}$$

Como estas ecuaciones son linealmente dependientes, para hallar el vector característico basta con asignar, en una ecuación, un valor no trivial a una variable en una ecuación para hallar el valor de la otra. Con esto el vector característico que se va a considerar está dado por

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_1 C'' \end{bmatrix}.$$

Con esto se obtiene que la solución para el sistema (2.61a)-(2.61b) está dada por

$$\begin{aligned} k-\tilde{k} &= Ae^{\mu_1 t}; \\ q-\tilde{q} &= \mu_1 C'' A e^{\mu_1 t} = \mu_1 C'' \left(k-\tilde{k}\right). \end{aligned}$$

Ahora, como la condición inicial $k(0) = k_0$ debe cumplirse, se obtiene que el valor de la constante A es $A = k_0 - \tilde{k}$, de donde se obtiene que la trayectoria dinámica estable que siguen k y q es

$$k = \tilde{k} + \left(k_0 - \tilde{k}\right) e^{\mu_1 t}; \tag{2.63a}$$

$$q = \tilde{q} + \mu_1 C'' \left(k - \tilde{k}\right). \tag{2.63b}$$

De estas soluciones se puede ver que la convexidad de la función de costos de ajuste es una importante componente de la dinámica. En ausencia de C'', q se ajustaría instantáneamente a su valor de equilibrio estacionario, por lo que de (2.52) se puede ver que el capital se ajusta inmediatamente a su nivel estacionario $F_k = r^*$. Este ajuste es posible porque la pequeña economía encara un mercado de capital y al no existir costos de ajuste, puede comprar tanto capital como desee en el mercado mundial, ya que no se restringe por sus propias capacidades productivas, como lo sería si se tratara del caso de una economía cerrada.

Para completar la discusión de la dinámica se deben resolver las restricciones presupuestarias (2.53) y (2.54).

Resolviendo la ecuación diferencial (2.53), con la condición inicial $a(0) = a_0$, se obtiene que la solución para $a(t)$ está dada por

$$a(t) = \left(a_0 + \int_0^t \left[g(\zeta) - T(\zeta)\right] e^{-r^*\zeta} d\zeta\right) e^{r^* t}.$$

Como está dada la condición final de la cantidad de bonos comercializables emitidos por el gobierno $a(T) = a_1$, se tiene que se debe cumplir

$$a_1 e^{-r^* T} = a_0 + \int_0^T \left[g(\zeta) - T(\zeta)\right] e^{-r^*\zeta} d\zeta. \tag{2.64}$$

Esta ecuación dice que la cantidad inicial de deuda por pagar más el déficit acumulado en el intervalo $[0, T]$ debe ser financiado adquiriendo deuda con valor presente dado por $a_1 e^{-r^* T}$. Se asume que para que el gobierno sea intertemporalmente solvente, puede seleccionar la trayectoria de la recaudación de impuestos $T(t)$ de manera que (2.64) se cumpla.

Resolviendo la restricción presupuestaria intertemporal de la nación dada en (2.54), con la condición inicial $n(0) = n_0$ se obtiene que la solución para la cantidad neta de bono del país está dada por

$$n(t) = \left(n_0 + \int_0^t \left[F(k,l) - c - g - C(I) \right] e^{-r^*\zeta} d\zeta \right) e^{r^*t}.$$

Puesto que la condición final $n(T) = n_1$ debe cumplirse, se tiene que

$$n_1 e^{-r^*T} = n_0 + \int_0^T \left[F(k,l) - c - g - C(I) \right] e^{-r^*\zeta} d\zeta. \tag{2.65}$$

Esta condición es parecida a (2.64), aunque difiere en un aspecto fundamental: una vez que está dada la trayectoria en el tiempo del gasto del gobierno, no hay nada que el gobierno pueda hacer para asegurar que (2.65) se satisface, pues la producción y el consumo son determinados por las fuerzas del mercado. De hecho esta restricción impone una restricción adicional sobre la evolución de la economía y determina el ajuste estable de la cuenta corriente, esto se verá enseguida.

Para ver lo anterior, se sustituye c y l de (2.55) y (2.56) en la restricción (2.54), de lo que se obtiene

$$\dot{n} = F\left(k, l\left(\bar{\lambda}, k\right)\right) - c\left(\bar{\lambda}, k\right) - C\left(I(q)\right) + r^* n - g.$$

Al linealizar esta ecuación alrededor del punto estacionario $\left(\tilde{k}, \tilde{q}, \tilde{n}\right)$ se obtiene

$$\dot{n} \;\; = \;\; \left(F_k + F_l l_k - c_k\right)\left(k - \tilde{k}\right) - C' I' \left(q - \tilde{q}\right) + r^* \left(n - \tilde{n}\right).$$

Recordando que en estado estacionario $I = 0$, entonces se tiene que $C'(0) = 1$. Al sustituir $\left(k - \tilde{k}\right)$ y $(q - \tilde{q})$ de las soluciones obtenidas en (2.63a) y (2.63b) respectivamente, se tiene que la ecuación anterior se convierte en

$$\dot{n} \;\; = \;\; \left(F_k + F_l l_k - c_k\right)\left(k_0 - \tilde{k}\right) e^{\mu_1 t} - I' \mu_1 C'' \left(k_0 - \tilde{k}\right) e^{\mu_1 t} + r^* \left(n - \tilde{n}\right).$$

Recordando que $I' = \dfrac{1}{C''}$ se puede escribir la ecuación anterior como

$$\dot{n} \;\; = \;\; \Lambda \left(k_0 - \tilde{k}\right) e^{\mu_1 t} + r^* \left(n - \tilde{n}\right), \tag{2.66}$$

donde $\Lambda \equiv F_k + F_l l_k - c_k - \mu_1 > 0$.

Como la economía empieza con una cantidad neta inicial bonos $n(0) = n_0$ la solución para la ecuación diferencial (2.66) es

$$n(t) = \left[n_0 + \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\left(k_0 - \tilde{k}\right)\left(e^{(\mu_1 - r^*)t} - 1\right) + \tilde{n}\left(e^{-r^*t} - 1\right)\right] e^{r^*t}.$$

Dado que la condición final $n(T) = n_1$, debe cumplirse, se tiene que

$$n_1 e^{-r^*T} = n_0 + \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\left(k_0 - \tilde{k}\right)\left(e^{(\mu_1 - r^*)T} - 1\right) + \tilde{n}\left(e^{-r^*T} - 1\right).$$

Escrito de manera equivalente,

$$n_0 - \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\left(k_0 - \tilde{k}\right) - \tilde{n} = -\left[\frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\left(k_0 - \tilde{k}\right) e^{(\mu_1 - r^*)T} + (\tilde{n} - n_1)\, e^{-r^*T}\right] \equiv \Upsilon. \tag{2.67}$$

Con esto se tiene que la solución para la cantidad neta de bonos de la economía $n(t)$ se convierte en

$$n(t) = \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\left(k_0 - \tilde{k}\right) e^{\mu_1 t} + \tilde{n} + \Upsilon e^{r^*t}. \tag{2.68}$$

La ecuación (2.67) es una aproximación lineal de la condición (2.65), y la ecuación (2.68) describe una relación entre la acumulación de capital y la acumulación de bonos comercializables en la economía, para ver esto al diferenciar la ecuación (2.68) con respecto a t se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{n} &= \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\mu_1\left(k_0 - \tilde{k}\right) e^{\mu_1 t} - r^*\Upsilon e^{-r^*t} \\ &\approx \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\mu_1\left(k_0 - \tilde{k}\right) e^{\mu_1 t}. \end{aligned}$$

Al diferenciar (2.63a) se puede observar que la acumulación de la cantidad neta de bonos se relaciona con la acumulación de capital de la siguiente manera:

$$\dot{n}(t) \approx \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\dot{k}(t). \tag{2.69}$$

Nótese que en las vecindades del estado estacionario, se cumple $\dfrac{\Lambda}{r^* - \mu_1} > 1$. Para ver esto, se debe recordar que $c_k < 0$, $l_k > 0$ y que en dichas cercanías $F_k = r^*$. Dicho de otra manera,

$$\frac{\Lambda}{r^* - \mu_1} = \frac{F_k + F_l l_k - c_k - \mu_1}{r^* - \mu_1} = \frac{r^* + F_l l_k - c_k - \mu_1}{r^* - \mu_1} = 1 + \frac{F_l l_k - c_k}{r^* - \mu_1} > 1.$$

La observación anterior y (2.69) implican que el incremento de una unidad en la acumulación de capital provoca una disminución aproximadamente menor que una unidad en la acumulación de bonos netos de la economía local.

Estado Estacionario

El estado estacionario representa el equilibrio de la economía en el largo plazo, este se obtiene cuando

$$\dot{k} = \dot{q} = \dot{n} = 0,$$

y está dado por el siguiente conjunto de relaciones

$$
\begin{aligned}
U_c\left(\tilde{c}, \tilde{l}\right) &= \bar{\lambda}; && (2.70a)\\
U_l\left(\tilde{c}, \tilde{l}\right) &= -F_l\left(\tilde{k}, \tilde{l}\right)\bar{\lambda}; && (2.70b)\\
\tilde{q} &= 1; && (2.70c)\\
F_k\left(\tilde{k}, \tilde{l}\right) &= r^*; && (2.70d)\\
F\left(\tilde{k}, \tilde{l}\right) &- \tilde{c} - g + r^*\tilde{n} = 0; && (2.70e)\\
n_0 - n_1 e^{-r^*T} &= \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\left(k_0 - \tilde{k}\right)\left(1 - e^{(\mu_1 - r^*)T}\right) + \tilde{n}\left(1 - e^{-r^*T}\right). && (2.70f)
\end{aligned}
$$

La condición (2.70c), más allá de la situación en la que no hay acumulación de capital, indica que en estado estacionario, la rentabilidad entre adquirir bonos extranjeros y realizar un nuevo gasto de inversión es la misma. La ecuación (2.70d) muestra que el producto marginal del capital físico en estado estacionario es igual a la tasa de interés real extranjera. La condición (2.70e) implica que en equilibrio estacionario, el saldo de la cuenta corriente debe ser cero. En otras palabras, el interés ganado por la cantidad neta de bonos debe financiar el saldo de la balanza comercial.

Estas ecuaciones determinan conjuntamente las soluciones de equilibrio en estado estacionario para $\tilde{c}$, $\tilde{k}$, $\tilde{l}$, $\tilde{q}$, $\tilde{n}$ y $\tilde{\lambda}$. Finalmente, este estado estacionario es sostenible sólo mientras el gobierno mantenga una deuda aceptable y una política tributaria consistente con la restricción presupuestaria (2.64).

2.2.1. Efectos de largo plazo de una expansión fiscal

Para ilustrar este modelo se analizarán los efectos que se presentan en la economía provocados por un cambio en el gasto del gobierno sobre el bien comercializable. Se analiza únicamente un tipo de cambio politico; una expansión permanente inesperada.

El ajuste transitorio del estado estacionario de largo plazo es determinado en parte por las expectativas, es decir, por lo que se espera en el corto plazo. Primero se consideran los efectos de equilibrio en el largo plazo causados por un incremento en el gasto del gobierno. Para observar dichos efectos, se toman diferenciales de las condiciones de estado estacionario (2.70a)-(2.70f) respecto a g. De esto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
U_{cc}\frac{\partial \tilde{c}}{\partial g} + U_{cl}\frac{\partial \tilde{l}}{\partial g} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial g} &= 0 \\
U_{cl}\frac{\partial \tilde{c}}{\partial g} + \left(U_{ll} + F_{ll}\bar{\lambda}\right)\frac{\partial \tilde{l}}{\partial g} + F_l\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial g} + F_{lk}\bar{\lambda}\frac{\partial \tilde{k}}{\partial g} &= 0 \\
F_{lk}\frac{\partial \tilde{l}}{\partial g} + F_{kk}\frac{\partial \tilde{k}}{\partial g} &= 0 \\
-\frac{\partial \tilde{c}}{\partial g} + F_l\frac{\partial \tilde{l}}{\partial g} + F_k\frac{\partial \tilde{k}}{\partial g} + r^*\frac{\partial \tilde{n}}{\partial g} &= 1 \\
\frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\left(e^{(\mu_1 - r^*)T} - 1\right)\frac{\partial \tilde{k}}{\partial g} + \left(1 - e^{-r^*T}\right)\frac{\partial \tilde{n}}{\partial g} &= 0.
\end{aligned}$$

Al resolver el sistema anterior para $\frac{\partial \tilde{c}}{\partial g}$, $\frac{\partial \tilde{l}}{\partial g}$, $\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial g}$, $\frac{\partial \tilde{k}}{\partial g}$ y $\frac{\partial \tilde{n}}{\partial g}$, se obtiene que los efectos de un incremento en g son resumidos en las siguientes expresiones

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial g} = \frac{1}{\Delta}\left(e^{-r^*T} - 1\right)F_{kk}\left[U_{ll} + U_{cl}F_l\right] < 0; \tag{2.71a}$$

$$\frac{\partial \tilde{l}}{\partial g} = -\frac{1}{\Delta}\left(e^{-r^*T} - 1\right)F_{kk}\left[U_{cl} + U_{cc}F_l\right] > 0; \tag{2.71b}$$

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial g} = \frac{1}{\Delta}\left(e^{-r^*T} - 1\right)F_{kk}\left[U_{ll}U_{cc} - U_{cl}^2\right] > 0; \tag{2.71c}$$

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial g} = \frac{1}{\Delta}\left(e^{-r^*T}-1\right) F_{kl}\left[U_{cl}+U_{cc}F_l\right] > 0; \text{ y} \tag{2.71d}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{n}}{\partial g} &= \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\right)\left(e^{(\mu_1-r^*)T}-1\right) F_{kl}\left[U_{cl}+U_{cc}F_l\right] \\ &\approx \left(\frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\right)\frac{d\tilde{k}}{d\tilde{g}} < 0,\end{aligned} \tag{2.71e}$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(1-e^{-r^*T}\right) F_{kk}\left[\frac{z}{l}(F_lU_{cc}+U_{cl}) + (U_{ll}+U_{cl}F_l)\right] \\ &+ \left(\frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\right) r^* F_{kl}\left(e^{(\mu_1-r^*)T}-1\right)\left[F_lU_{cc}+U_{cl}\right] > 0.\end{aligned}$$

Los resultados anteriores se pueden interpretar de la siguiente manera:

Un incremento en el gasto del gobierno, con el paso del tiempo debe ir acompañado por un incremento de los impuestos, lo que causa que la riqueza privada y el consumo disminuyan, con lo cual aumenta el valor marginal de la riqueza e induce a los trabajadores a ofertar más trabajo, (para ver esto recuerde (2.55) y (2.56)). El incremento en g no afecta las productividades marginales de trabajo y capital, pues este efecto no es directamente productivo. Sin embargo, durante la transición al nuevo estado estacionario, el incremento de la oferta de trabajo aumenta la productividad marginal del capital arriba de su valor de equilibrio, es decir, $F_k > r^*$, esto alienta la acumulación de capital hasta que el producto marginal del capital sea restaurado a su nivel original fijo de equilibrio. Al mismo tiempo, de (2.69) se observa que el incremento en el capital causa una disminución en la cantidad estacionaria de bonos mantenidos en la economía nacional.

Dinámica Transitoria

Como ya se había mencionado, la dinámica de k y q está descrita por un punto silla en el espacio $k - q$. El diagrama de fase asociado a esta dinámica, es ilustrado en la Figura 4 y esta construido de la siguiente manera:

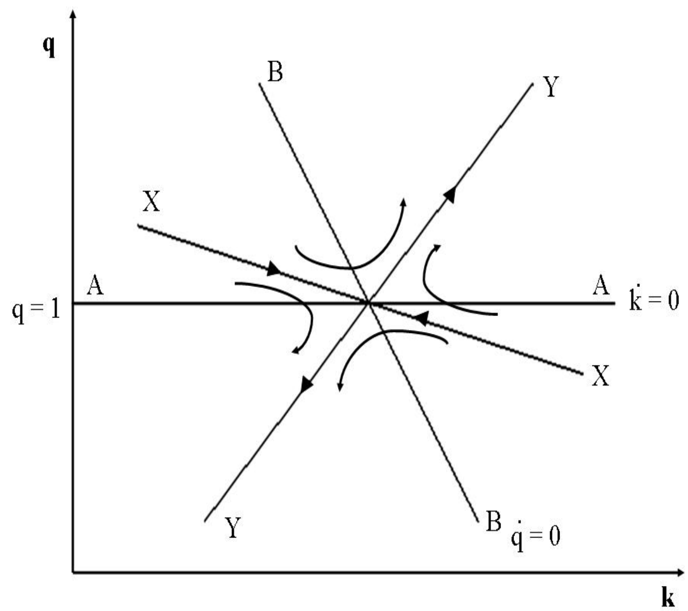

Figura 4.

Primero, la línea horizontal AA corresponde al valor de q, donde no hay inversión en capital, es decir, donde $\dot{k} = 0$. Ahora, la línea BB corresponde a la isoclina $\dot{q} = 0$ y por (2.62) se puede ver que ésta tiene la pendiente negativa dada por

$$\left(\frac{dq}{dk}\right)_{\dot{q}=0} = \frac{F_{kk} + F_{lk}l_k}{r^*} < 0. \tag{2.72}$$

La línea XX descrita por

$$q - 1 = \mu_1 C'' \left(k - \tilde{k}\right) = \left(\frac{F_{kk} + F_{lk}l_k}{r^* - \mu_1}\right)\left(k - \tilde{k}\right),$$

corresponde a la dirección estable del punto silla que pasa por el punto estacionario $\left(\tilde{k}, \tilde{q}\right)$. Obsérvese que la pendiente de esta línea es negativa, pero es menos inclinada que (2.72), pues

$$\frac{F_{kk} + F_{lk}l_k}{r^*} < \frac{F_{kk} + F_{lk}l_k}{r^* - \mu_1} < 0.$$

Del mismo modo, la línea YY descrita por

$$q - 1 = \mu_2 C'' \left(k - \tilde{k}\right) = \left(\frac{F_{kk} + F_{lk}l_k}{r^* - \mu_2}\right)\left(k - \tilde{k}\right),$$

corresponde a la dirección inestable del punto silla que pasa por el punto estacionario $\left(\tilde{k}, \tilde{q}\right)$ y tiene pendiente positiva.

De acuerdo a todo lo anterior se puede ver que todo lo que está por arriba de la línea AA está asociado con un incremento del capital y todo lo que está por debajo se asocia con una disminución de la cantidad de capital. De igual forma, todo lo que está a la derecha de BB está asociado con un incremento en el precio del capital y a la izquierda de BB el precio del capital disminuye.

Incremento Permanente en el Gasto del Gobierno

Mientras ningún cambio futuro sea anticipado, la economía deberá permanecer sobre el lugar geométrico estable XX. Con k_0 predeterminado y de (2.63b), el salto inicial en $q(0)$, seguido de un incremento inesperado en g está dado por

$$\frac{dq(0)}{dg} = -\mu_1 C'' \frac{d\tilde{k}}{dg} > 0. \tag{2.73}$$

Como $\dfrac{d\tilde{k}}{dg} > 0$, es decir, un incremento anticipado en g en el largo plazo aumenta la cantidad de capital, entonces en el corto plazo el precio del capital $q(0)$ aumentará.

La dinámica que se sigue con este incremento inesperado en g es ilustrado en la Figura 5. En la parte A de esta figura se describe el ajuste en q y k, y la parte B describe la evolución de la cantidad de bonos comercializables. Suponga que la economía empieza en un equilibrio estacionario en el punto P sobre la línea estable XX y de repente hay un incremento permanente en el gasto del gobierno g. Por lo obtenido en (2.73), se puede ver que en el corto plazo, q aumenta del punto P al punto A sobre la nueva línea estable $X'X'$. De (2.60) se puede ver que el aumento en q provoca que la inversión aumente, por lo que el capital empieza a acumularse y en el largo plazo, la economía se coloca en el nuevo punto de equilibrio Q, con una mayor cantidad de capital de equilibrio k_1' y con el mismo valor estacionario en el precio de capital $\tilde{q} = 1$.

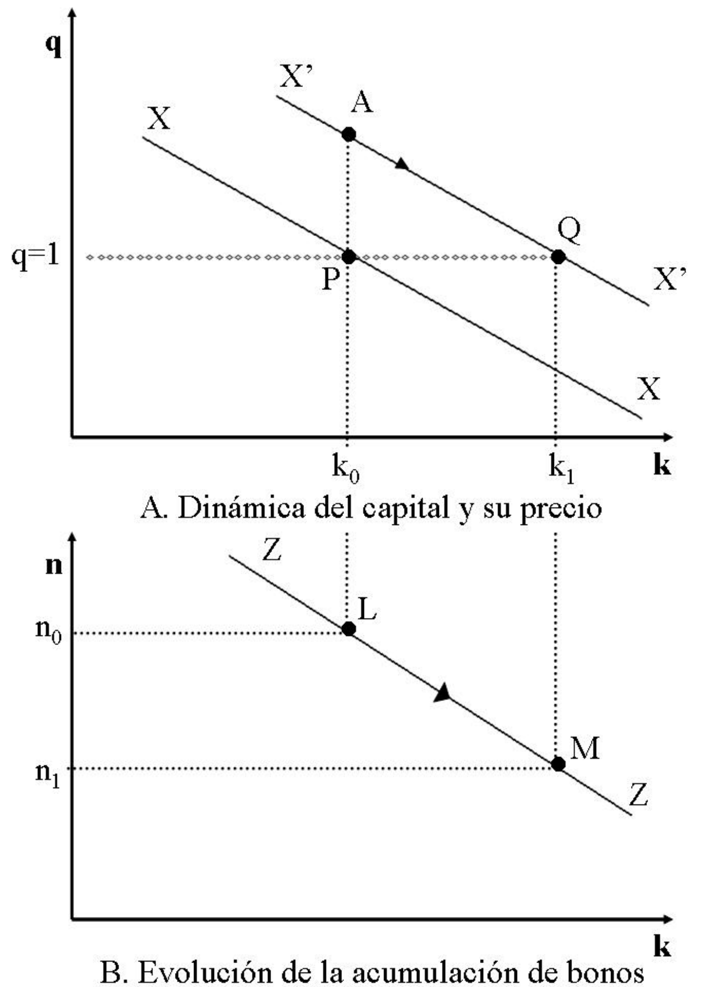

Figura 5.

La parte B de la Figura 5 ilustra la relación entre n y k. Para analizar la relación entre la cantidad neta de bonos en la economía con la cantidad de capital, al combinar (2.63a) y (2.68), se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} n(t) - \tilde{n} &= \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\left(k(t) - \tilde{k}\right) + \Upsilon e^{r^* t} \\ &\approx \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\left(k(t) - \tilde{k}\right). \end{aligned} \tag{2.74}$$

Nótese que la pendiente de esta línea es

$$\frac{dn}{dk} = \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*} < 0. \tag{2.75}$$

En un principio, para la relación entre n y k, la economía está en el punto L sobre la línea ZZ, que tiene pendiente negativa. Al incrementar el gasto del gobierno, la relación entre la cantidad neta de bonos con la cantidad de capital se mantiene sin cambios, pues (2.71e) se cumple, esto es la línea ZZ permanece fija. El movimiento entre los puntos A y Q de la Figura 5.A corresponde al movimiento entre los puntos L y M en la Figura 5.B, de lo cual se puede ver que el incremento en el gasto del gobierno provoca una disminución de la cantidad neta de bonos.

Ahora se analizan las respuestas iniciales de las otras variables.

De (2.55) y (2.56) se tiene que las respuestas iniciales sobre el consumo y el trabajo están dadas por

$$\frac{dc(0)}{dg} = \frac{\partial c}{\partial \bar{\lambda}}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial g} < 0, \text{ y} \tag{2.76}$$

$$\frac{dl(0)}{dg} = \frac{\partial l}{\partial \bar{\lambda}}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial g} > 0. \tag{2.77}$$

Obsérvese que estas respuestas operan mediante el valor marginal de la riqueza. El incremento en el valor marginal de la riqueza provocado por el aumento en el gasto del gobierno lleva inmediatamente a cambiar el consumo por trabajo.

Diferenciando (2.55) y (2.56) en estado estacionario y comparando con lo anterior se obtiene que

$$\frac{d\tilde{c}}{dg} = \frac{\partial c}{\partial \bar{\lambda}}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial g} + \frac{\partial c}{\partial k}\frac{\partial \tilde{k}}{\partial g} < \frac{dc(0)}{dg} < 0, \text{ y} \tag{2.78}$$

$$\frac{d\tilde{l}}{dg} = \frac{\partial l}{\partial \bar{\lambda}}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial g} + \frac{\partial l}{\partial k}\frac{\partial \tilde{k}}{\partial g} > \frac{dl(0)}{dg} > 0. \tag{2.79}$$

Con esto se puede ver que un incremento permanente en g tiene el mismo efecto cualitativo sobre el consumo y el trabajo en el corto plazo como en el estado estacionario. Sin embargo, los ajustes iniciales hacia el nuevo equilibrio son sólo parciales, pues el incremento en el capital que ocurre en la trayectoria transitoria refuerza la sustitución del consumo por el trabajo.

CAPÍTULO 3

Modelo de Dos Bienes y de una Economía Dependiente

Los modelos desarrollados hasta el momento son muy limitados para tratar algunos de los aspectos básicos de la economía internacional, por lo que en este capítulo se estudiarán aspectos relacionados con el tipo de cambio real y con la tasa de arancel. Para ello se desarrollarán dos modelos que son una extensión de los presentados en el capítulo anterior. En el primer modelo se incluye el consumo de dos tipos de bienes con acumulación física de capital, uno de los bienes es producido nacionalmente y el otro es importado. En el segundo modelo se estudiará el caso de una economía con dos sectores de producción, uno comercializable y otro no comercializable.

3.1. Modelo de dos bienes con acumulación física de capital

El modelo de un bien con acumulación física de capital, presentado en el capítulo anterior, es útil para entender la dinámica de la economía, pero es muy limitado en relación a las cuestiones políticas que permite analizar. Algunas de las más importantes involucran el tipo de cambio real, los efectos que produce sobre la evolución de la economía y el papel que juega en el ajuste de la dinámica. Para tratar este problema, es necesario extender el modelo de un bien para incluir el consumo de un segundo bien que se considera como importado. Esto inmediatamente introduce un precio relativo (tipo de cambio real) lo cual permite tratar uno de los aspectos básicos en economía internacional, la introducción de un impuesto en la forma de arancel.

Como ya se mencionó, en este modelo se incluye el consumo de dos bienes, uno de los cuales es producido nacionalmente y otro es importado. Se asumirá que el país es especializado en la producción del bien nacional, por lo que exporta el excedente de éste a cambio del bien que es producido en el extranjero.

Se construye el modelo sobre la suposición de que la economía es caracterizada como una economía "semipequeña" abierta, esto significa que es pequeña en el mercado mundial de activos y en el mercado del bien importado, por lo que toma el precio de bien importado P_y como dado. Sin embargo, es suficientemente grande en la producción del bien nacional para afectar en su precio relativo P_x.

Agente Representativo

En este caso se expresará la restricción presupuestaria del agente en términos de unidades de producción extranjera, por lo que se necesita definir el precio relativo del bien extranjero en términos del bien nacional (es decir, el tipo de cambio real). Dicho precio relativo está dado por

$$\sigma = \frac{EP_y}{P_x}, \tag{3.1}$$

donde E es el tipo de cambio nominal.

La restricción presupuestaria intertemporal del agente es similar a las presentadas anteriormente; la principal diferencia es la introducción del consumo del bien importado y el arancel que es recaudado sobre él.

$$\dot{b} = \frac{1}{\sigma}\left[F(k,l) - C(I) - x - \tau\sigma y + \sigma r^* b - \top\right], \tag{3.2}$$

donde

$x =$ consumo del bien nacional,

$y =$ consumo del bien importado,

$g_x =$ gasto del gobierno sobre el bien nacional,

$g_y =$ gasto del gobierno sobre el bien importado,

$\sigma =$ precio relativo del bien extranjero en términos del bien nacional (tipo de cambio real),

$\tau = 1$ más la tasa del arancel.

Para ver que esa restricción está efectivamente expresada en términos del bien extranjero, el precio del bien extranjero P_y está dado en términos de $\left(\frac{\text{moneda extranjera}}{\text{bien extranjero}}\right)$. De manera similar, P_x está expresado en términos de $\left(\frac{\text{moneda nacional}}{\text{bien nacional}}\right)$, y E

está expresado en $\left(\dfrac{\text{moneda nacional}}{\text{moneda extranjero}}\right)$. De aquí y de (3.1), se puede ver que σ está dado en términos de $\left(\dfrac{\text{bien nacional}}{\text{bien extranjero}}\right)$, por lo que efectivamente, la restricción presupuestaria del agente está expresada en términos del bien extranjero.

La acumulación de capital genera costos de ajuste de la misma manera que en (2.38) explicado en el modelo anterior; esta tasa de acumulación y la inversión se relacionan a través de

$$\dot{k} = I. \tag{3.3}$$

Por simplicidad se asume que el capital no se deprecia.

En este modelo, la utilidad del agente depende del nivel de consumo privado y público de ambos bienes y de la oferta de trabajo.

El problema del agente es tomar las decisiones de sus niveles de consumo, x y y, oferta de trabajo l, su tasa de inversión I y sus tasas de acumulación de activos, $\dot{k}$ y $\dot{b}$ de manera que su nivel presente de bienestar acumulado en el periodo de tiempo $[t_0, t_1]$ sea máximo, esto es, desea maximizar

$$J(x_0, u) = \int_{t_0}^{t_1} \left[U(x, y) + V(l) + W(g_x, g_y)\right] e^{-\beta t} dt,$$

sobre el conjunto de funciones diferenciables $u : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ y $x : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, con condición inicial $x(t_0) = (b_0, k_0)$ y condición final $x(t_1) = (b_1, k_1)$. Sujeto a las restricciones presupuestarias (3.2) y (3.3).

Por las mismas causas explicadas anteriormente, el nivel de bienestar del agente se incrementa cuando aumenta el consumo privado y público de ambos bienes y su ocio. Se asume que la función de utilidad es cóncava y que los dos bienes son complementarios; es decir, el aumento en el consumo de un bien implica que el consumo del otro también se incrementa, esto significa que $U_{xy} > 0$.

Para resolver este problema se asume que el tiempo inicial $t_0 = 0$ y el tiempo final $t_1 = T$, con $T > 0$ fijo.

El vector de variables estado es $x(t) = (b, k)$, con la condición inicial $x(0) = (x_1^0, x_2^0) = (b_0, k_0)$ y la condición final $x(T) = (x_1^1, x_2^1) = (b_1, k_1)$. El vector de controles es $u(t) = (x, y, l, I)$ y se denota $u(0) = (x_0, y_0, l_0, I_0)$ y $u(T) = (x_1, y_1, l_1, I_1)$.

Se convierte a un problema de Mayer como en (1.6), por lo que se define

$$x_3(t) = \int_{t_0}^{t} \left[U(x, y) + V(l) + W(g_x, g_y)\right] e^{-\beta \zeta} d\zeta, \text{ con } x_3(0) = 0.$$

La función $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^8$, tomando en cuenta que las propiedades dadas en (1.3) se deben cumplir, se define de la siguiente manera

$$\phi(\vec{\mathbf{e}}) = \left[\begin{array}{cccccccc} -x_3^1, & t_1 - T, & t_0, & b_0 - x_1^0, & k_0 - x_2^0, & x_3^0, & b_1 - x_1^1, & k_1 - x_2^1 \end{array}\right]^{\mathcal{T}}.$$

La función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la siguiente

$$F(t,x,u) = \begin{bmatrix} \dot{b} \\ \dot{k} \\ \dot{x}_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sigma}\left[F(k,l) - C(I) - x - \tau\sigma y + \sigma r^* b - \top\right] \\ I \\ \left[U(x,y) + V(l) + W(g_x,g_y)\right] e^{-\beta t} \end{bmatrix}.$$

Por el Principio de Pontryagin se debe hallar $P(t) : [t_0,t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\lambda_1 : [t_0,t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda(t) : [t_0,t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^7$, con $\lambda = (\lambda_1, \lambda(t)) \neq (0,0)$ tal que cada condición del Teorema 1.1 se cumpla.

De la condición (1.7a) se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc} \dot{P}_1(t) & \dot{P}_2(t) & \dot{P}_3(t) \end{array}\right] = -\left[\begin{array}{ccc} P_1(t) & P_2(t) & P_3(t) \end{array}\right] \begin{bmatrix} r^* & \dfrac{1}{\sigma}F_k(k,l) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de lo cual se puede decir que

$$\dot{P}_1(t) = -P_1(t)r^*; \tag{3.4a}$$
$$\dot{P}_2(t) = -\frac{P_1(t)}{\sigma}F_k(k,l); \tag{3.4b}$$
$$\dot{P}_3(t) = 0. \tag{3.4c}$$

Por la parte (1.7c) del Principio de Pontryagin se tiene que cumplir que

$$\left[\begin{array}{ccc} P_1(t_0) & P_2(t_0) & P_3(t_0) \end{array}\right] = -\left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \ldots & \lambda_8 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esto implica que

$$
\begin{aligned}
P_1(t_0) &= \lambda_4; && (3.5a)\\
P_2(t_0) &= \lambda_5; && (3.5b)\\
P_3(t_0) &= -\lambda_6. && (3.5c)
\end{aligned}
$$

De la condición (1.7d) se tiene que

$$
\begin{bmatrix} P_1(t_1) & P_2(t_1) & P_3(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},
$$

de lo cual se puede decir que

$$
\begin{aligned}
P_1(t_1) &= -\lambda_7; && (3.6a)\\
P_2(t_1) &= -\lambda_8; && (3.6b)\\
P_3(t_1) &= -\lambda_1. && (3.6c)
\end{aligned}
$$

Por (1.7e) se debe cumplir que

$$
\begin{bmatrix} P_1(t_0) & P_2(t_0) & P_3(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma}\left[F(k_0^*, l_0^*) - C(I_0^*) - x_0^* - \tau\sigma y_0^* + \sigma r^* b_0^* - \top\right] \\ I_0^* \\ \left[U(x_0^*, y_0^*) + V(l_0^*) + W(g_x, g_y)\right] \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_3.
$$

Lo anterior y las condiciones (3.5a)-(3.5c) implican que

$$
\begin{aligned}
H(t_0, x^*(t_0), u^*(t_0)) &= \frac{\lambda_4}{\sigma}\left[F(k_0^*, l_0^*) - C(I_0^*) - x_0^* - \tau\sigma y_0^* + \sigma r^* b_0^* - \top\right] + \lambda_5 I_0^* - \\
&- \lambda_6\left[U(x_0^*, y_0^*) + V(l_0^*) + W(g_x, g_y)\right] = \lambda_3. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

De la condición (1.7f) se obtiene

$$\begin{bmatrix} P_1(t_1) & P_2(t_1) & P_3(t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma}\left[F(k_1^*, l_1^*) - C(I_1^*) - x_1^* - \tau\sigma y_1^* + \sigma r^* b_1^* - \top\right] \\ I_1^* \\ \left[U(x_1^*, y_1^*) + V(l_1^*) + W(g_x, g_y)\right] e^{-\beta t_1} \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -\lambda_2.$$

De las condiciones (3.6a)-(3.6c) y lo anterior se obtiene la relación

$$\begin{aligned} -H(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1)) &= \frac{\lambda_7}{\sigma}\left[F(k_1^*, l_1^*) - C(I_1^*) - x_1^* - \tau\sigma y_1^* + \sigma r^* b_1^* - \top\right] + \\ &+ \lambda_8 I_1^* + \lambda_1 \left[U(x_1^*, y_1^*) + V(l_1^*) + W(g_x, g_y)\right] e^{-\beta t_1} \\ &= \lambda_2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Resolviendo la ecuación diferencial (3.4a) tomando en cuenta la condición inicial (3.5a) se obtiene que la solución para $P_1(t)$ está dada por

$$P_1(t) = \lambda_4 e^{-r^* t}, \tag{3.9}$$

y como la condición final (3.6a) se debe cumplir se obtiene la siguiente relación

$$\lambda_4(t_1) e^{-r^* t_1} = -\lambda_7. \tag{3.10}$$

Sustituyendo (3.9) en la ecuación diferencial (3.4b) se obtiene que la solución para $P_2(t)$ es

$$P_2(t) = \lambda_5 e^{-r^* t}. \tag{3.11}$$

De las condiciones (3.5b) y (3.6b) se tienen la relaciones siguientes

$$\lambda_4(t_0) F_k = \lambda_5 \sigma r^*, \tag{3.12}$$

$$\lambda_5(t_1) e^{-r^* t_1} = -\lambda_8. \tag{3.13}$$

De (3.4c) se puede ver que $P_3(t)$ debe ser constante, y por las condiciones (3.5c) y (3.6c) se obtiene que

$$P_3(t) = -\lambda_1 = -\lambda_6. \tag{3.14}$$

Afirmación 3.1.1. λ_1 y $\lambda_4(t)$ deben ser distintos de cero para todo $t \in [t_0, t_1]$ para obtener las condiciones de optimización del problema.

Demostración: Suponga que ambos valores son iguales a cero. Si $\lambda_1 = 0$ se tiene de inmediato por (3.14) que $\lambda_6 = 0$. Ahora si $\lambda_4 = 0$ por las relaciones (3.10) y (3.12) se tiene que $\lambda_7 = 0$ y $\lambda_5 = 0$, esto último y la relación dada en (3.13) implican que λ_8 es cero. Por último, combinando todo lo anterior con las relaciones (3.8) y (3.7) se tiene que λ_2 y λ_3 son cero, lo cual implica que $\lambda = 0$, lo cual no es de utilidad para encontrar la optimización del problema, pues no se cumple una de las condiciones establecidas en el Principio de Pontryagin.

Por simplicidad, podemos asumir que $\lambda_1 = -1$, con lo cual el vector $P(t)$ está dado por

$$P(t) = \left[\begin{array}{ccc} \lambda_4 e^{-r^* t}, & \lambda_5 e^{-r^* t}, & 1 \end{array} \right]^{\mathcal{T}}.$$

Con lo anterior, el Hamiltoniano del sistema es

$$\begin{aligned} H(t,x,u) &= \lambda_4 e^{-r^* t} \frac{1}{\sigma} \left[F(k,l) - C(I) - x - \tau\sigma y + \sigma r^* b - \top \right] + \\ &+ \lambda_5 e^{-r^* t} I + e^{-\beta t} \left[U(x,y) + V(l) + W(g_x + g_y) \right], \end{aligned}$$

donde

λ_4 representa el valor marginal de la riqueza mantenida por el agente en la forma de bonos comercializables, y

λ_5 representa el valor marginal de la cantidad de capital físico del agente.

Estos dos valores están expresados en términos reales por medio del bien extranjero.

Lo que resta es buscar las condiciones para que (1.8) se cumpla, es decir, se debe encontrar

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} H(t,x^*,u) &= \lambda_4 e^{-r^* t} \frac{1}{\sigma} \left[F(k^*,l) - C(I) - x - \tau\sigma y + \sigma r^* b^* - \top \right] + \\ &+ \lambda_5 e^{-r^* t} I + e^{-\beta t} \left[U(x,y) + V(l) + W(g_x + g_y) \right]. \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que las condiciones de optimización del problema son

$$\begin{aligned} H_x &= -\lambda_4 e^{-r^* t} \frac{1}{\sigma} + e^{-\beta t} U_x = 0; \\ H_y &= -\lambda_4 \tau e^{-r^* t} + e^{-\beta t} U_y = 0; \\ H_l &= \lambda_4 e^{-r^* t} \frac{F_l(k,l)}{\sigma} + e^{-\beta t} V'(l) = 0; \\ H_I &= -\lambda_4 e^{-r^* t} \frac{C'(I)}{\sigma} + \lambda_5 e^{-r^* t} = 0. \end{aligned}$$

Como ya se ha hecho en modelos anteriores, se restringe el valor de la tasa subjetiva de descuento temporal, por lo que se asume que $\beta = r^*$, con lo cual las condiciones de optimización del problema se convierten en

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{\lambda_4}{\sigma}; && (3.15a)\\ U_y &= \lambda_4 \tau; && (3.15b)\\ V'(l) &= -\frac{\lambda_4}{\sigma} F_l\left(k,l\right); && (3.15c)\\ C'(I) &= \frac{\lambda_5}{\lambda_4}\sigma := q. && (3.15d) \end{aligned}$$

La matriz Hessiana del Hamiltoniano del sistema está dada por

$$h = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{xy} & 0 & 0 \\ U_{xy} & U_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda_4 F_{ll}}{\sigma} + V'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-\lambda_4 C''}{\sigma} \end{bmatrix}.$$

Como las condiciones de optimización producen un máximo, entonces se tienen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 > 0; \\ \frac{1}{\sigma^2}\left(\lambda_4 F_{ll} + \sigma V''\right)\left(-\lambda_4 C''\right) > 0. \end{aligned}$$

Como $C'' > 0$, entonces $(\lambda_4 F_{ll} + \sigma V'') < 0$.

De la ecuación diferencial (3.4a) se obtiene que

$$\dot{\lambda}_4 = 0.$$

Esto implica que $\lambda_4 = \bar{\lambda}$ es constante.

Por (3.4b) una vez que se conoce la solución para P_2 se obtiene que

$$\dot{\lambda}_5 e^{-r^*t} - \lambda_5 r^* e^{-r^*t} \quad = \quad -\frac{\lambda_4}{\sigma} F_k\left(k,l\right) e^{-r^*t}.$$

Equivalentemente,

$$\frac{\dot{\lambda}_5\sigma}{\lambda_4} - \frac{\lambda_5\sigma}{\lambda_4}r^* \;=\; -F_k\left(k,l\right).$$

Al sumar en ambos lados de la última ecuación el término $\dfrac{\lambda_5\dot{\sigma}}{\lambda_4}$ se obtiene

$$\frac{\dot{\lambda}_5\sigma}{\lambda_4} + \frac{\lambda_5\dot{\sigma}}{\lambda_4} - \frac{\lambda_5\sigma}{\lambda_4}r^* \;=\; -F_k + \frac{\lambda_5\dot{\sigma}}{\lambda_4}.$$

Como λ_4 es constante y $\dfrac{\lambda_5}{\lambda_4}\sigma := q$, de manera equivalente la ecuación anterior puede ser escrita como

$$\dot{q} \;=\; q\left(r^* + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right) - F_k. \tag{3.16}$$

$\dfrac{\dot{\sigma}}{\sigma}$ es la tasa de cambio instantáneo del tipo de cambio real, por lo que dada la suposición de que la Paridad de las tasas de Interés se debe cumplir, entonces la tasa de interés real nacional $r(t)$, se relaciona con la tasa de interés mundial a través de

$$r(t) \;=\; r^* + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}. \tag{3.17}$$

Por lo tanto, la ecuación (3.16) iguala la tasa de retorno sobre el capital a la tasa de interés nacional.

Gobierno

Con la presencia de un bien importado y el arancel gravado sobre el bien importado, la restricción presupuestaria del gobierno en términos del bien extranjero está descrita por la ecuación

$$\dot{a} = \frac{1}{\sigma}\left[g_x + \sigma g_y + \sigma r^* a + (1-\tau)\sigma y - \top\right], \tag{3.18}$$

donde $(\tau - 1)y$ es el arancel recaudado por el gobierno sobre el consumo del bien importado.

Para hallar la restricción presupuestaria nacional, basta restar (3.18) de (3.2), con lo cual se obtiene

$$\dot{n} = \frac{1}{\sigma}\left[F(k,l) - C(I) - (x + g_x) + \sigma r^* n - \sigma(g_y + y)\right]. \tag{3.19}$$

Además de todo lo anterior, una condición adicional de equilibrio debe cumplirse: el mercado nacional de producción debe ser claro, es decir, la función de producción nacional deber ser bien conocida, por lo que se asume que dicha función está descrita por

$$F(k,l) = x + Z(\sigma) + C(I) + g_x, \tag{3.20}$$

donde $Z(\sigma)$ es la cantidad del bien nacional que se exporta, dado que al aumentar la cantidad de exportaciones, el tipo de cambio real nacional se deprecia, es decir, σ aumenta, entonces $Z'(\sigma) > 0$.

Con lo anterior, (3.19) se convierte en

$$\dot{n} = \frac{1}{\sigma}[Z(\sigma) - \sigma(y + g_y) + \sigma r^* n]. \tag{3.21}$$

La ecuación anterior indica que el saldo de la cuenta corriente es igual a las exportaciones menos las importaciones más los intereses generados por la cantidad neta de bonos.

Equilibrio Macreconómico

El equilibrio macroeconómico de corto plazo puede ser descrito como sigue.

Las ecuaciones estáticas (3.15a)-(3.15d) y (3.20) pueden ser resueltas para x, y, l, I y σ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
x &= x\left(\bar{\lambda}, k, q, \tau, g_x\right) \ x_{\bar{\lambda}} < 0,\ x_k > 0,\ x_q < 0,\ x_\tau < 0,\ x_{g_x} < 0,\\
y &= y\left(\bar{\lambda}, k, q, \tau, g_x\right) \ y_{\bar{\lambda}} < 0,\ y_k > 0,\ y_q < 0,\ y_\tau < 0,\ y_{g_x} < 0,\\
l &= l\left(\bar{\lambda}, k, q, \tau, g_x\right) \ l_{\bar{\lambda}} \gtreqless 0,\ l_k \gtreqless 0,\ l_q > 0,\ l_\tau < 0,\ l_{g_x} > 0,\\
\sigma &= \sigma\left(\bar{\lambda}, k, q, \tau, g_x\right) \ \sigma_{\bar{\lambda}} > 0,\ \sigma_k > 0,\ \sigma_q < 0,\ \sigma_\tau > 0,\ \sigma_{g_x} < 0,\\
I &= I\left(q\right) \ I' > 0.
\end{aligned}$$

Para obtener las expresiones explícitas de las derivadas parciales, basta con tomar las diferenciales de las ecuaciones (3.15a)- (3.15d) y la ecuación (3.20) y resolver los sistemas de ecuaciones obtenidos. Dichos sistemas son

$$\begin{aligned}
\sigma^2 U_{xx} x_{\bar{\lambda}} + \sigma^2 U_{xy} y_{\bar{\lambda}} + \bar{\lambda}\sigma_{\bar{\lambda}} &= \sigma \\
U_{yx} x_{\bar{\lambda}} + U_{yy} y_{\bar{\lambda}} &= \tau \\
\bar{\lambda}\sigma_{\bar{\lambda}} F_l - l_{\bar{\lambda}}\left[\sigma\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma^2 V''\right] &= \sigma F_l \\
x_{\bar{\lambda}} + Z'\sigma_{\bar{\lambda}} - F_l l_{\bar{\lambda}} &= 0;
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 U_{xx} x_k + \sigma^2 U_{xy} y_k + \bar{\lambda}\sigma_k &= 0 \\
U_{yx} x_k + U_{yy} y_k &= 0 \\
\bar{\lambda}\sigma_k F_l - l_k \left[\sigma\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma^2 V''\right] &= \sigma\bar{\lambda}F_{lk} \\
x_k + Z'\sigma_k - F_l l_k &= F_k;
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 U_{xx} x_q + \sigma^2 U_{xy} y_q + \bar{\lambda}\sigma_q &= 0 \\
U_{yx} x_q + U_{yy} y_q &= 0 \\
\bar{\lambda}\sigma_q F_l - l_q \left[\sigma\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma^2 V''\right] &= 0 \\
x_q + Z'\sigma_q - F_l l_q - C'I' &= 0 \\
C'' &= I;
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 U_{xx} x_\tau + \sigma^2 U_{xy} y_\tau + \bar{\lambda}\sigma_\tau &= 0 \\
U_{yx} x_\tau + U_{yy} y_\tau &= \lambda \\
\bar{\lambda}\sigma_\tau F_l - l_\tau \left[\sigma\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma^2 V''\right] &= 0 \\
x_\tau + Z'\sigma_\tau - F_l l_\tau &= 0;
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 U_{xx} x_{g_x} + \sigma^2 U_{xy} y_{g_x} + \bar{\lambda}\sigma_{g_x} &= 0 \\
U_{yx} x_{g_x} + U_{yy} y_{g_x} &= 0 \\
\bar{\lambda}\sigma_{g_x} F_l - l_{g_x} \left[\sigma\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma^2 V''\right] &= 0 \\
x_{g_x} + Z'\sigma_{g_x} - F_l l_{g_x} &= 1.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Resolviendo el sistema (3.22) para $x_{\bar{\lambda}}$, $y_{\bar{\lambda}}$, $\sigma_{\bar{\lambda}}$ y $l_{\bar{\lambda}}$, el sistema (3.23) para x_k, y_k, σ_k y l_k, el sistema (3.24) para para x_q, y_q, σ_q, l_q e I' el sistema (3.25) para x_τ, y_τ, σ_τ y l_τ y el sistema (3.26) para x_{g_x}, y_{g_x}, σ_{g_x} y l_{g_x}, se obtienen que las soluciones explícitas están dadas por

$$
\begin{aligned}
x_{\bar{\lambda}} &= -\frac{\sigma}{\Omega}\left[Z'\left(\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma V''\right)\left(\tau\sigma U_{xy} - U_{yy}\right) - U_{xy}\tau\bar{\lambda}F_l^2\right] < 0 \\
y_{\bar{\lambda}} &= \frac{1}{\Omega}\left[\left(\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma V''\right)\left(U_{xx}\tau\sigma^2 Z' - U_{xy}Z'\sigma - \tau\bar{\lambda}\right) - U_{xx}\tau\sigma\bar{\lambda}F_l^2\right] < 0 \\
\sigma_{\bar{\lambda}} &= \frac{\sigma}{\Omega}\left[\left(\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma V''\right)\left(U_{xy}\tau\sigma - U_{yy}\right) - \sigma F_l^2\left(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2\right)\right] > 0 \\
l_{\bar{\lambda}} &= \frac{\sigma F_l}{\Omega}\left[\bar{\lambda}\tau U_{xy} - Z'\sigma\left(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2\right)\right] \gtrless 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_k &= \frac{\bar{\lambda}U_{yy}}{\Omega}\left[\bar{\lambda}F_{kl}\frac{F}{l} - \sigma V'' F_k\right] > 0 \\
y_k &= -\frac{\bar{\lambda}U_{xy}}{\Omega}\left[\bar{\lambda}F_{kl}\frac{F}{l} - \sigma V'' F_k\right] > 0 \\
\sigma_k &= -\frac{\sigma^2}{\Omega}\left[\left(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2\right)\left(\bar{\lambda}F_{kl}F_l - F_k\left(\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma V''\right)\right)\right] > 0 \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

$$
l_k = \frac{\bar{\lambda}}{\Omega}\left[\left(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2\right)\left(\sigma F_k F_l - F_{kl}Z'\sigma^2\right) + \bar{\lambda}F_{kl}U_{yy}\right] \gtreqless 0; \qquad (3.28)
$$

$$
\begin{aligned}
x_q &= \frac{\bar{\lambda}}{C''\Omega}\left(\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma V''\right)U_{yy}C' < 0 \\
y_q &= -\frac{\bar{\lambda}}{C''\Omega}\left(\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma V''\right)U_{xy}C' < 0 \\
\sigma_q &= -\frac{\sigma^2}{C''\Omega}C'\left(\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma V''\right)\left(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2\right) < 0 \qquad (3.29) \\
l_q &= -\frac{\bar{\lambda}}{C''\Omega}\sigma F_l C'\left(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2\right) > 0 \qquad (3.30) \\
I' &= \frac{1}{C''} > 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_\tau &= -\frac{\bar{\lambda}\sigma}{\Omega}U_{xy}\left[Z'\sigma\left(\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma V''\right) - \bar{\lambda}F_l^2\right] < 0 \\
y_\tau &= \frac{\bar{\lambda}}{\Omega}\left[\left(\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma V''\right)\left(\sigma^2 U_{xx}Z' - \bar{\lambda}\right) - \bar{\lambda}\sigma F_l^2 U_{xx}\right] < 0 \\
\sigma_\tau &= \frac{\bar{\lambda}}{\Omega}\sigma^2 U_{xy}\left(\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma V''\right) > 0 \\
l_\tau &= \frac{\bar{\lambda}}{\Omega}\sigma^2 F_l U_{xy} < 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{g_x} &= \frac{\bar{\lambda}}{\Omega}U_{yy}\left(\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma V''\right) < 0 \\
y_{g_x} &= -\frac{\bar{\lambda}}{\Omega}U_{xy}\left(\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma V''\right) < 0 \\
\sigma_{g_x} &= -\frac{\sigma^2}{\Omega}\left(\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma V''\right)\left(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2\right) < 0 \\
l_{g_x} &= -\frac{\bar{\lambda}}{\Omega}\sigma F_l\left(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2\right) > 0,
\end{aligned}
$$

donde

$$\Omega = \sigma \left(U_{xx} U_{yy} - U_{xy}^2 \right) \left[Z' \sigma \left(\bar{\lambda} F_{ll} + \sigma V'' \right) - \bar{\lambda} F_l^2 \right] - \bar{\lambda} U_{yy} \left(\bar{\lambda} F_{ll} + \sigma V'' \right) < 0.$$

Estos resultados obtenidos se pueden explicar de la siguiente manera:

1. Un incremento en el valor marginal de la riqueza incentiva a los consumidores a ahorrar, por lo que disminuye el consumo de ambos bienes. Esta reducción en el consumo disminuye el precio relativo del bien nacional; de (3.1) se puede ver que σ aumenta, lo cual estimula las exportaciones. El efecto global sobre la demanda de la producción nacional depende del efecto que domine, por ejemplo, si la reducción en el consumo del bien nacional es menor que el aumento en las exportaciones, entonces la producción nacional y por ende el empleo aumentan, si ocurre lo contrario, entonces disminuyen.

2. Un incremento en la cantidad de capital provoca un aumento en la producción, por lo que la oferta del bien nacional aumenta, y el precio de dicho bien disminuye, lo que implica que σ y el consumo del bien nacional aumenta, como ambos bienes son complementarios, esto también aumenta el consumo del bien extranjero.

3. Un incremento en q estimula la inversión, esto aumenta la demanda del bien nacional, por lo que su precio aumenta, con lo cual σ disminuye. A su vez, esto incrementa la utilidad marginal del consumo nacional, por lo que x disminuye, lo que implica que y también disminuya.

4. Un incremento en la tasa de arancel provoca que el precio del bien importado aumente, lo que a su vez implica que el valor de σ se incremente. Esto induce a los agentes a reducir el consumo del bien importado, dado que $U_{xy} > 0$, también disminuye el consumo del bien nacional. Esta reducción en el consumo provoca que la producción de ese bien disminuya, lo que lleva a reducir el trabajo.

5. Un incremento en el gasto del gobierno sobre el bien nacional aumenta la demanda de dicho bien, por lo que su precio relativo se incrementa y σ disminuye, con esto las exportaciones se reducen. El trabajo y la producción nacional son por lo tanto estimuladas. Sin embargo, el incremento en la producción junto con la reducción en las exportaciones es menor que el incremento en g_x, por lo que para que la condición de equilibrio del mercado (3.20) se siga cumpliendo, es necesario que el consumo del bien nacional disminuya, y como ambos bienes son complementarios, entonces también el consumo del bien importado debe disminuir.

La evolución del sistema se determina sustituyendo el equilibrio de corto plazo en las ecuaciones dinámicas y asegurando que las respectivas condiciones finales se cumplan. Como se hizo en el modelo anterior, la dinámica va a ser determinada secuencialmente. Las ecuaciones dinámicas que especifican $\dot{k}$ y $\dot{q}$ dadas en (3.3) y (3.16) van a ser reducidas a un par de ecuaciones diferenciales autónomas en k y q, y éstas van a constituir el núcleo de la dinámica que determine la trayectoria real de la economía. Sin embargo hay una pequeña complicación por el hecho que $\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}$ aparece en la última ecuación. Una aproximación lineal para este efecto sobre la dinámica puede ser tomada en cuenta diferenciando $\sigma = \sigma\left(\bar{\lambda}, k, q, \tau, g_x\right)$ con respecto al tiempo.

Una vez que se determine el núcleo de la dinámica, la expresión (3.21) va a devolver la dinámica de la cuenta corriente. Esta ecuación va a ser reducida a una ecuación diferencial autónoma en n, después de sustituir las soluciones para k y q. Lo mismo aplicará para la restricción presupuestaria del gobierno (3.18).

Equilibrio Dinámico

Considere las ecuaciones (3.3) y (3.16) reescritas como

$$\dot{k} = I(q), \tag{3.31a}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \left(r^* + \frac{\dot{\sigma}\left(\bar{\lambda}, k, q, \tau, g_x\right)}{\sigma\left(\bar{\lambda}, k, q, \tau, g_x\right)}\right) q - F_k\left(k, l\left(\bar{\lambda}, k, q, \tau, g_x\right)\right) \\
&= \left(r^* + \frac{\sigma_q \dot{q} + \sigma_k \dot{k}}{\sigma\left(\bar{\lambda}, k, q, \tau, g_x\right)}\right) q - F_k\left(k, l\left(\bar{\lambda}, k, q, \tau, g_x\right)\right) \\
&= \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_q q}\left[\left(r^* + \frac{\sigma_k I}{\sigma}\right) q - F_k\left(k, l\left(\bar{\lambda}, k, q, \tau, g_x\right)\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.31b}$$

Al linealizar este sistema alrededor del punto estacionario $\left(\tilde{k}, \tilde{q}\right)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{k} &= I'\left(q - \tilde{q}\right) = \frac{1}{C''}\left(q - \tilde{q}\right), \text{ y} \\
\dot{q} &= \frac{\sigma}{\sigma - q\sigma_q}\left[r^* + \frac{\sigma_k I}{\sigma} + \frac{\sigma_k}{\sigma C''} - \frac{\sigma_k I \sigma_q}{\sigma^2} - F_{kl} l_q\right]\left(q - \tilde{q}\right) - \frac{\sigma}{\sigma - q\sigma_q}\left[F_{kk} + F_{kl} l_k\right]\left(k - \tilde{k}\right).
\end{aligned}$$

Como se está evaluando en el punto de equilibrio estacionario, aquí $\dot{k} = 0$ y en este punto se tiene que $I = 0$, por lo que la última ecuación se simplifica a lo siguiente

$$\dot{q} = \frac{\sigma}{\sigma - q\sigma_q}\left[r^* + \frac{\sigma_k}{\sigma C''} - F_{kl} l_q\right]\left(q - \tilde{q}\right) - \frac{\sigma}{\sigma - q\sigma_q}\left[F_{kk} + F_{kl} l_k\right]\left(k - \tilde{k}\right).$$

Al sustituir los valores de σ_k, σ_q y l_q obtenidos en (3.27), (3.29) y (3.30) respectivamente, se simplifica el factor que multiplica a $(q - \tilde{q})$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma}{\sigma - q\sigma_q} &= \frac{C''\Omega}{C''\Omega + \sigma C'\left(\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma V''\right)U}; \qquad (3.32)\\
r^* + \frac{\sigma_k}{\sigma C''} - F_{kl}l_q &= \frac{1}{C''\Omega}\left[C''\Omega r^* - \sigma U\left(\bar{\lambda}F_{kl}F_l - \bar{\lambda}F_kF_{ll} - F_k\sigma V''\right) + F_{kl}F_lC'\bar{\lambda}\sigma U\right],
\end{aligned}
$$

y como $C'(0)$=1,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{C''\Omega}\left[C''\Omega r^* + \sigma U\bar{\lambda}F_kF_{ll} + \sigma UF_k\sigma V''\right]\\
&= \frac{1}{C''\Omega}\left[C''\Omega r^* + \sigma UF_k\left(\bar{\lambda}F_{ll} + \sigma V''\right)\right], \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

donde $U \equiv U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 > 0$. Recuerde que el valor estacionario para el precio del capital es $\tilde{q} = 1$, por lo que de (3.15d) se tiene que $\lambda_4 = \lambda_5\sigma$. Por esto último y la relación (3.12), se tiene que $F_k = r^*$ por lo que de (3.32) y (3.33) se puede ver que

$$
\frac{\sigma}{\sigma - q\sigma_q}\left[r^* + \frac{\sigma_k}{\sigma C''} - F_{kl}l_q\right] \;=\; r^*.
$$

Representando lo anterior en forma matricial se obtiene que

$$
\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C''} \\ -\rho\left[F_{kk} + F_{kl}l_k\right] & r^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k - \tilde{k} \\ q - \tilde{q} \end{bmatrix}
$$

con $\rho = \dfrac{\sigma}{\sigma - q\sigma_q} > 0$.

El determinante de la matriz de coeficientes es $D \equiv \dfrac{\rho}{C''}\left(F_{kk} + F_{kl}l_k\right)$. Sustituyendo el valor de l_k obtenido en (3.28), se obtiene

$$
D = \frac{\rho\sigma}{\Omega C''}\left[\varpi\left(F_{ll}F_{kk} - F_{kl}^2\right) - F_lU\bar{\lambda}\left(F_{kk}F_l - F_{kl}F_k\right) + F_{kk}V''\left(\sigma^2UZ' - \bar{\lambda}U_{yy}\right)\right],
$$

con $\varpi = \left(\sigma UZ\bar{\lambda} - \dfrac{\bar{\lambda}^2}{\sigma}U_{yy}\right)$. Dado que la función de producción F cumple las propiedades (2.34) y (2.35), se tiene que el determinante es

$$
D = \frac{\rho\sigma}{\Omega C''}F_{kk}\left[\sigma^2UZ'V'' - \bar{\lambda}U_{yy}V'' - F_lU\bar{\lambda}\frac{F}{l}\right] < 0,
$$

lo cual quiere decir que el equilibrio es un punto silla y los valores característicos de la matriz de coeficientes son reales y de signo opuestos. Se denotaran dichos valores por $\mu_1 < 0$ y $\mu_2 > 0$.

El polinomio característico de la matriz de coeficientes es$P(\mu) = -\mu(r^* - \mu) + \rho \dfrac{F_{kk} + F_{kl} l_k}{C''}$. Los valores característicos son la solución a la ecuación $P(\mu) = 0$, con esto se obtiene que

$$\mu_i C'' \;=\; \rho \frac{F_{kk} + F_{kl} l_k}{r^* - \mu_i} \quad \text{para} \quad i = 1, 2.$$

Enseguida se encontrará el vector característico asociado al valor μ_1. Para ello se deben encontrar los valores para $\left(k - \tilde{k}\right)$ y $(q - \tilde{q})$ que resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -\mu_1 \left(k - \tilde{k}\right) + \frac{1}{C''} (q - \tilde{q}) &= 0, \\ -\rho \left(F_{kk} + F_{kl} l_k\right) \left(k - \tilde{k}\right) + (r - \mu_1) (q - \tilde{q}) &= 0. \end{aligned}$$

Como estas ecuaciones son linealmente dependientes, para hallar el vector característico basta con asignar un valor no trivial, en una de las ecuaciones, a una variable para hallar el valor de la otra. Con esto, el vector característico que se va a considerar está dado por

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_1 C'' \end{bmatrix}.$$

Por lo anterior se tiene que la trayectoria dinámica estable que siguen k y q, dada la condición inicial $k(0) = k_0$ es

$$k \;=\; \tilde{k} + \left(k_0 - \tilde{k}\right) e^{\mu_1 t}, \tag{3.34a}$$

$$q \;=\; \tilde{q} + \mu_1 C'' \left(k - \tilde{k}\right). \tag{3.34b}$$

Para completar la discusión de la dinámica, se deben resolver las restricciones presupuestarias (3.18) y (3.21).

Resolviendo la ecuación diferencial (3.18), con la condición inicial $a(0) = a_0$, se obtiene que la solución para $a(t)$ es

$$a(t) = \left[\int_0^t \left(\frac{g_x}{\sigma} + g_y + (1 - \tau)\, y - \frac{\top}{\sigma}\right) e^{-r^* \zeta} d\zeta + a_0\right] e^{r^* t}.$$

Como la condición final $a(T) = a_1$ debe cumplirse se tiene que

$$a_1 e^{-r^* T} \;=\; a_0 + \int_0^T \left(\frac{g_x}{\sigma} + g_y + (1 - \tau)\, y - \frac{\top}{\sigma}\right) e^{-r^* \zeta} d\zeta. \tag{3.35}$$

De manera similar resolviendo la ecuación diferencial (3.21) para $n(t)$ con la condición inicial $n(0) = n_0$ se obtiene que la solución para la cantidad neta de bonos del país está dada por

$$n(t) = \left(n_0 + \int_0^t \left[\frac{Z(\sigma)}{\sigma} - (y + g_y) \right] e^{-r^* \zeta} d\zeta \right) e^{r^* t}.$$

Puesto que la condición final $n(T) = n_1$ debe satisfacerse, se tiene que

$$n_1 e^{-r^* T} = n_0 + \int_0^T \left(\frac{Z(\sigma)}{\sigma} - (y + g_y) \right) e^{-r^* \zeta} d\zeta. \tag{3.36}$$

Esta última condición va a imponer una restricción adicional sobre la evolución de la economía. Para ver esto, se considera la ecuación (3.21) en la manera siguiente

$$\dot{n} \;=\; \frac{Z\left[\sigma\left(\bar{\lambda}, k, q, \tau, g_x\right)\right]}{\sigma\left(\bar{\lambda}, k, q, \tau, g_x\right)} - \left[y\left(\bar{\lambda}, k, q, \tau, g_x\right) + g_y\right] + r^* n.$$

Linealizando alrededor del punto de equilibrio estacionario $\left(\tilde{k}, \tilde{q}, \tilde{n}\right)$ y sustituyendo las soluciones estables para k y q dadas en (3.34a) y (3.34b), se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{n} \;&=\; \left[\frac{\sigma Z' \sigma_k - Z\sigma_k}{\sigma^2} - y_k\right]\left(k - \tilde{k}\right) + \left[\frac{\sigma Z' \sigma_q - Z\sigma_q}{\sigma^2} - y_q\right]\left(q - \tilde{q}\right) + r^*\left(n - \tilde{n}\right) \\
&=\; \left[\frac{Z'\sigma_k}{\sigma} - \frac{Z\sigma_k}{\sigma^2} - y_k\right]\left(k_0 - \tilde{k}\right) e^{\mu_1 t} + \mu_1 C'' \left[\frac{Z'\sigma_q}{\sigma} - \frac{Z\sigma_q}{\sigma^2} - y_q\right]\left(k_0 - \tilde{k}\right) e^{\mu_1 t} + \\
&+\; r^*\left(n - \tilde{n}\right) = \Lambda\left(k_0 - \tilde{k}\right) e^{\mu_1 t} + r^*\left(n - \tilde{n}\right),
\end{aligned} \tag{3.37}$$

donde

$$\Lambda \;=\; \frac{1}{\sigma}\left[\left(Z' - \frac{Z}{\sigma}\right)\left(\sigma_k + \mu_1 C'' \sigma_q\right) - \sigma\left(y_k + \mu_1 C'' y_q\right)\right].$$

Se va a suponer que $\Lambda > 0$.

Al resolver la ecuación diferencial (3.37) para $n(t)$, dada la condición inicial $n(0) = n_0$, se obtiene que la solución para la cantidad neta de bonos está dada por

$$n(t) \;=\; \left[n_0 + \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\left(k_0 - \tilde{k}\right)\left(e^{(\mu_1 - r^*)t} - 1\right) + \tilde{n}\left(e^{-r^* t} - 1\right)\right] e^{r^* t}.$$

Dado que la condición final $n(T) = n_1$ debe cumplirse, se tiene que

$$n_1 e^{-r^*T} = n_0 + \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\left(k_0 - \tilde{k}\right)\left(e^{(\mu_1 - r^*)T} - 1\right) + \tilde{n}\left(e^{-r^*T} - 1\right).$$

Escrito de manera equivalente

$$n_0 - \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\left(k_0 - \tilde{k}\right) - \tilde{n} = -\left[\frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\left(k_0 - \tilde{k}\right) e^{(\mu_1 - r^*)T} + (\tilde{n} - n_1)\, e^{-r^*T}\right] \equiv \Upsilon. \tag{3.38}$$

Con esto, la solución para $n(t)$ se convierte en

$$n(t) = \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\left(k_0 - \tilde{k}\right) e^{\mu_1 t} + \tilde{n} + \Upsilon e^{r^* t}.$$

Estado Estacionario

El estado estacionario de la economía ahora consiste del siguiente conjunto de relaciones

$$U_x(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\bar{\lambda}}{\tilde{\sigma}}; \tag{3.39a}$$

$$U_y(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tau\bar{\lambda}; \tag{3.39b}$$

$$V'\left(\tilde{l}\right) = -F_l\left(\tilde{k}, \tilde{l}\right)\frac{\bar{\lambda}}{\tilde{\sigma}}; \tag{3.39c}$$

$$\tilde{q} = 1; \tag{3.39d}$$

$$F_k\left(\tilde{k}, \tilde{l}\right) = r^*; \tag{3.39e}$$

$$F\left(\tilde{k}, \tilde{l}\right) = \tilde{x} + Z(\tilde{\sigma}) + g_x; \tag{3.39f}$$

$$Z(\tilde{\sigma}) + \tilde{\sigma} r^* \tilde{n} = \tilde{\sigma}(\tilde{y} + g_y); \tag{3.39g}$$

$$n_0 - n_1 e^{-r^*T} = \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\left(k_0 - \tilde{k}\right)\left(1 - e^{(\mu_1 - r^*)T}\right) + \tilde{n}\left(1 - e^{-r^*T}\right). \tag{3.39h}$$

Estas ecuaciones determinan conjuntamente las soluciones de equilibrio en estado estacionario para $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{k}$, $\tilde{l}$, $\tilde{q}$, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{n}$ y $\bar{\lambda}$, junto con una acción gubernamental que asegure que la restricción presupuestaria del gobierno dada en (3.35) se cumpla. Este conjunto de ecuaciones presenta cierta analogía con las correspondientes condiciones en la economía de un bien (2.70a)-(2.70f).

Enseguida se indicará cómo el modelo de dos bienes puede ser utilizado para estudiar los efectos que produce el incremento o la imposición de un arancel.

3.1.1. Arancel

Con el equilibrio estacionario obtenido en (3.39a)-(3.39h) se pueden analizar los efectos producidos por un incremento en la tasa de arancel. Para esto, se deben tomar las diferenciales a las condiciones antes mencionadas y al resolver el sistema de ecuaciones se obtendrán las expresiones explícitas de este efecto.

El sistema de ecuaciones obtenido es

$$\begin{aligned}
\sigma^2 U_{xx}\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\tau} + \sigma^2 U_{xy}\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau} - \sigma\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\tau} + \bar{\lambda}\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tau} &= 0 \\
U_{xy}\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\tau} + U_{yy}\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau} - \tau\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\tau} &= \bar{\lambda} \\
\sigma F_l\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\tau} - \lambda F_l\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tau} + \left[\sigma^2 V'' + \sigma\bar{\lambda}F_{ll}\right]\frac{\partial\tilde{l}}{\partial\tau} + \sigma\bar{\lambda}F_{lk}\frac{\partial\tilde{k}}{\partial\tau} &= 0 \\
F_{lk}\frac{\partial\tilde{l}}{\partial\tau} + F_{kk}\frac{\partial\tilde{k}}{\partial\tau} &= 0 \\
\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\tau} + Z'\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} - F_l\frac{\partial\tilde{l}}{\partial\tau} - F_k\frac{\partial\tilde{k}}{\partial\tau} &= 0 \\
-\sigma\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau} + \left[Z' - (y+g_y) + r^* n\right]\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tau} + \sigma r^*\frac{\partial\tilde{n}}{\partial\tau} &= 0 \\
\left(1 - e^{-r^*T}\right)\frac{\partial\tilde{n}}{\partial\tau} + \frac{\Lambda}{\mu_1 - r^*}\left(e^{-(\mu_1 - r^*)T} - 1\right)\frac{\partial\tilde{k}}{\partial\tau} &= 0.
\end{aligned}$$

La solución explícita de este sistema de ecuaciones está dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\tau} &= \frac{\sigma\bar{\lambda}}{D}\left[U_{xy}F_l\left(\psi Z' F_{lk} + F_{kk}\frac{F\xi}{l}\left(1 - e^{-r^*T}\right)\right) + Z' F_{kk}\sigma V''\left(1 - e^{-r^*T}\right)\right] \gtreqless 0; \\
\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau} &= -\frac{\bar{\lambda}}{D}\left[U_{xx}F_l\sigma\left(\psi Z' F_{lk} + F_{kk}\frac{F\xi}{l}\left(1 - e^{-r^*T}\right)\right) + V'' F_{kk}\sigma\xi\left(1 - e^{-r^*T}\right)\right] \gtreqless 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\tau} &= \frac{\bar{\lambda}}{D}\left[V''F_{kk}\sigma\left(1-e^{-rT}\right)\left(U_{xx}\sigma^2Z'-\sigma U_{xy}\xi-\bar{\lambda}\right)\right] \\
&- \frac{\bar{\lambda}^2}{D}F_l\left[F_{kk}\frac{F}{l}\sigma U_{xx}\left(1-e^{-rT}\right)+\psi U_{xy}F_{lk}\right]<0; \\
\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\tau} &= -\frac{\sigma\bar{\lambda}}{D}\left[F_{kk}\sigma\left(1-e^{-r^*T}\right)\left(U_{xx}\frac{FF_l}{l}+V''\right)+\psi F_lF_{lk}U_{xy}\right]<0; \\
\frac{\partial\tilde{l}}{\partial\tau} &= -\frac{\sigma\bar{\lambda}F_{kk}F_l}{D}\left[\sigma Z'U_{xx}-U_{xy}\xi\right]<0, \\
\frac{\partial\tilde{k}}{\partial\tau} &= \frac{\sigma\bar{\lambda}F_{lk}F_l}{D}\left[\sigma Z'U_{xx}-U_{xy}\xi\right]<0; \\
\frac{\partial\tilde{n}}{\partial\tau} &= -\frac{\Lambda}{\mu_1-r^*}\left(\frac{e^{(\mu_1-r^*)T}-1}{1-e^{-r^*T}}\right)\left(\frac{\partial\tilde{k}}{\partial\tau}\right)>0,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\xi &\equiv Z'-\frac{Z}{\sigma}>0; \quad \psi\equiv\frac{\sigma r^*\Lambda}{\mu_1-r^*}\left(e^{(\mu_1-r^*)T}-1\right)>0; \quad \upsilon\equiv U_{xx}U_{yy}-U_{xy}^2>0; \\
D &\equiv \left(1-e^{-rT}\right)\sigma F_{kk}V''\left[\xi(\sigma\tau U_{xy}-U_{yy})-U_{xx}\tau\sigma^2Z'+\bar{\lambda}\tau+U_{xy}\sigma Z'\right]+ \\
&- \sigma F_l\upsilon\left[\frac{F\xi}{l}F_{kk}\left(1-e^{-rT}\right)+Z'\psi F_{lk}\right]+F_l\tau\left[\psi U_{xy}F_{lk}+\frac{F}{l}F_{kk}\sigma\bar{\lambda}U_{xx}\left(1-e^{-rT}\right)\right]>0.
\end{aligned}$$

Los resultados obtenidos pueden ser explicados de la siguiente manera:

La cantidad de capital y el trabajo disminuyen en respuesta a un incremento en el arancel, por lo que la producción nacional también disminuye. Esto provoca que el precio relativo del bien nacional aumente, por lo que σ disminuye. La disminución en la cantidad de capital lleva en el largo plazo a incrementar la cantidad de bonos comercializables mantenidos en la economía. La imposición de un arancel sobre el bien importado inicialmente lleva a sustituir este bien por otros que favorezcan más a los consumidores: el bien nacional y el ocio. Como $U_{xy}>0$, lo anterior provoca una disminución de la utilidad marginal del consumo del bien nacional y por lo tanto del valor marginal de la riqueza $\bar{\lambda}$. El consumo nacional presenta dos tipos de efectos: de sustitución y de riqueza, por lo que el efecto global depende de las influencias que tenga cada uno de ellos. El efecto sustitución es claro, pues es simplemente reemplazar y por x. El efecto riqueza es ambiguo, pues mientras que la reducción en la producción nacional, causada por el incremento en la tasa de arancel, reduce el ingreso nacional, la reducción en el precio relativo σ aumenta el ingreso en términos reales. El efecto neto depende de cuál de estos efectos domine.

La respuesta dinámica de la economía a la imposición o al incremento de un arancel es ilustrado en la Figura 6 y se construye de manera idéntica a la Figura 1.

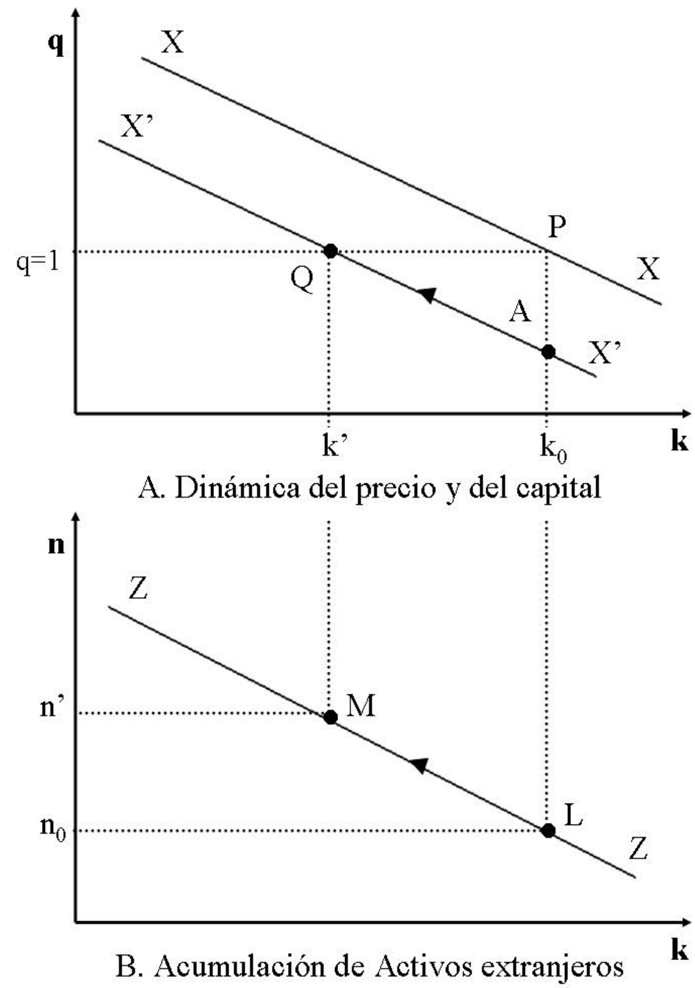

Figura 6.

Para este caso, la línea XX describe la dirección estable del punto silla que pasa por el punto estacionario $\left(\tilde{k}, \tilde{q}\right)$ y está dada por

$$q - 1 \quad = \quad \mu_1 C'' \left(k - \tilde{k}\right) = \rho \left(\frac{F_{kk} + F_{lk} l_k}{r^* - \mu_1}\right) \left(k - \tilde{k}\right).$$

Mientras ningún cambio futuro sea anticipado, la economía deberá permanecer sobre el lugar geométrico estable XX. Con k_0 siendo predeterminado, el salto inicial en $q(0)$ seguido de un incremento permanente en la tasa de arancel es, dada (3.34b)

$$\frac{dq(0)}{d\tau} = -\mu_1 C'' \frac{d\tilde{k}}{d\tau} < 0. \tag{3.40}$$

Como en el largo plazo, la cantidad de capital disminuye en respuesta a un incremento en la tasa de arancel, esto provoca una disminución en el corto plazo del precio del capital, lo cual la vez lleva a disminuir la tasa de inversión.

La dinámica que se sigue con este incremento inesperado en τ es ilustrado en la Figura 6. En la parte A de esta figura se describe el ajuste en q y k, y la parte B describe la evolución de la cantidad de bonos comercializables. Suponga que la economía empieza en un equilibrio estacionario en el punto P sobre la línea estable XX y que se incrementa la tasa de arancel τ. Por lo obtenido en (3.40), se puede ver que en el corto plazo, q disminuye del punto P al punto A sobre la nueva línea estable $X'X'$ y provoca que el capital empiece a disminuir y en el largo plazo, la economía se coloca en el nuevo punto de equilibrio Q, con una menor cantidad de capital de equilibrio k' y con el mismo valor estacionario en el precio de capital $\tilde{q} = 1$.

En un principio, para la relación entre n y k, la economía está en el punto L sobre la línea ZZ, que tiene pendiente negativa. Al incrementar la tasa de arancel, la relación entre la cantidad neta de bonos con la cantidad de capital se mantiene sin cambios, esto es la línea ZZ permanece fija. El movimiento entre los puntos A y Q de la Figura 6.A corresponde al movimiento entre los puntos L y M en la Figura 6.B, de lo cual se puede ver que el incremento en la tasa de arancel provoca aumento de la cantidad neta de bonos.

Las respuestas iniciales para las otras variables son

$$\frac{dl(0)}{d\tau} = \frac{\partial l}{\partial \tau} + \frac{\partial l}{\partial \bar{\lambda}}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \tau} + \frac{\partial l}{\partial q}\frac{\partial q(0)}{\partial \tau} < 0; \tag{3.41}$$

$$\frac{d\sigma(0)}{d\tau} = \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\lambda}}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial q}\frac{\partial q(0)}{\partial \tau}; \tag{3.42}$$

$$\frac{dx(0)}{d\tau} = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial \bar{\lambda}}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial q(0)}{\partial \tau}; \tag{3.43}$$

$$\frac{dy(0)}{d\tau} = \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial y}{\partial \bar{\lambda}}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \tau} + \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial q(0)}{\partial \tau}. \tag{3.44}$$

Obsérvese que estas variables consisten de dos canales de influencia. Primero están los efectos directos que consisten de las derivadas parciales tales como $\frac{\partial l}{\partial \tau}$. En segundo lugar los efectos indirectos que operan mediante saltos inducidos en $\bar{\lambda}$ y q. Estos efectos pueden o no trabajar en la misma dirección.

En el caso del trabajo, por ejemplo, el efecto directo de un aumento en la tasa de arancel es contraccionario, es decir, negativo. Esto se acentúa por el hecho que esto genera una reducción en el precio del capital. Al mismo tiempo, la caída en el valor marginal de la riqueza tiene otros impactos sobre el empleo, que por lo que ya discutimos anteriormente, la dirección este efecto no es del todo clara. Sin embargo, podemos ver que el efecto contraccionario domina, así que, la imposición de un arancel reduce el trabajo en el corto plazo. Para ver esto, considere el impacto sobre la condición (3.16). Por (3.40), se ve que el efecto de un arancel inmediatamente provoca que q disminuya. Después de su caída, q inmediatamente empieza a aumentar, en otras palabras $\dfrac{d\dot{q}(0)}{d\tau} > 0$. De la expresión (3.34b) se puede ver que $\dfrac{d\dot{k}(0)}{d\tau} < 0$, es decir, el capital empieza a disminuir. Como $\dot{\sigma} = \sigma_k \dot{k} + \sigma_q \dot{q}$, por lo anterior y recordando que $\sigma_k > 0$ y $\sigma_q < 0$, se puede ver que $\dfrac{d\dot{\sigma}(0)}{d\tau} < 0$. Dadas estas respuestas $\left(r + \dfrac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right) q < F_k$, por lo que para que se mantenga la igualdad, el producto marginal del capital debe disminuir instantáneamente. Como la cantidad inicial de capital está predeterminado, la única manera de lograr la igualdad es que el empleo caiga inmediatamente.

Los modelos con un solo sector de producción son limitados para analizar el impacto completo de cambios estructurales y políticos en un ambiente internacional. Los modelos antes mencionados no capturan una de las principales características de una economía internacional, el hecho de que las actividades del comercio internacional afectan diversas partes de la economía de manera diferente. Por ejemplo, si en el país hay un descubrimiento de recursos naturales tales como yacimientos de petróleo, habrá grandes cambios en la distribución de la riqueza del país; otro ejemplo es que la imposición de un arancel sobre las importaciones de un país cambiará los términos de intercambio del país y esto tendrá consecuencias en todas partes de la economía. Sin embargo, dichos cambios no podrían ser analizados con el modelo de una economía que sólo posee un sector de producción, por lo que para analizar este tipo de situaciones se va a extender el modelo básico de un bien para incluir un segundo factor de producción.

3.2. Modelo de una Economía Dependiente con 2 sectores

Se empezará por desarrollar el modelo de una economía dependiente con dos sectores de producción de una pequeña economía abierta. Por economía dependiente se entenderá una economía que toma el precio del bien comercializable del mercado mundial, pero que también produce un bien no comercializable para uso local.

Un bien es no comercializable cuando sólo puede consumirse dentro de la economía que lo produce; no pueden importarse ni exportarse, es decir, no están sujetos al comercio internacional. Algunos ejemplos de este tipo de bienes son el transporte interno, servicios de arrendamiento de viviendas, alimentos perecederos, como la leche, papas a la francesa, etcétera.

La producción de los dos bienes requiere de dos factores de producción, capital y trabajo. Este modelo está interesado en la asignación estática de estos recursos, éstas decisiones están involucradas dentro de un proceso dinámico de acumulación de capital.

Después se utilizará este modelo para analizar los cambios que presenta la economía al sufrir un impacto en la demanda, específicamente esto se hará mediante el gasto del gobierno.

Agente Representativo

En este modelo se considera que el agente representativo posee una oferta de trabajo fija (normalizada a uno), la cual vende a un sueldo competitivo y acumula capital para alquilar a una determinada tasa competitiva de renta. El agente representativo produce un bien comercializable **T**, usando una cantidad de capital K_T y trabajo L_T, por medio de una Función Neoclásica de Producción $F(K_T, L_T)$ con rendimientos constantes a escala.

Una función de producción muestra rendimientos constantes a escala si un aumento de todos los factores de producción en el mismo porcentaje provoca un incremento de la producción del mismo porcentaje, por ejemplo, con una función de producción con esta característica, obtenemos un 10 % más de producción cuando incrementamos en un 10 % tanto el capital como el trabajo. En términos matemáticos, una función de producción tiene rendimientos constantes a escala si

$$F(\alpha K_T, \alpha L_T) = \alpha F(K_T, L_T),$$

para cualquier número positivo α.

El agente también produce un bien no comercializable **N**, usando una cantidad de capital K_N y de trabajo L_N por medio de una segunda función de producción $H(K_N, L_N)$ que posee las mismas propiedades que la función de producción $F(K_T, L_T)$.

Se asume que el bien comercializable es usado únicamente para consumo y el no comercializable puede ser usado tanto para el consumo como para la inversión. Si se asumiera que el bien comercializable es usado también para la inversión, entonces la cantidad de capital puede aumentar en cualquier instante simplemente cambiando bonos extranjeros por capital.

En este caso, el agente tiene dos opciones hacia las cuales puede dirigir su consumo y producción, el bien comercializable y el no comercializable. Como se ha hecho en modelo anteriores, se asume que el agente acumula bonos extranjeros que pagan una tasa de interés r, es sujeto de recaudación de impuestos y puede realizar inversión I. Con lo anterior, la restricción presupuestaria intertemporal de agente representativo expresada en términos del bien comercializable está dada por

$$\dot{b} \;=\; F(K_T, L_T) + pH(K_N, L_N) - C_T - pC_N - pI - \top + rb, \tag{3.45}$$

donde

C_T = consumo del bien comercializable,

C_N = consumo del bien no comercializable,

$\top$ = recaudación de impuestos,

p = precio relativo del bien no comercializable en términos del bien comercializable (tipo de cambio real).

Por simplicidad se supone que el agente acumula capital que no se deprecia, por lo que la restricción sobre la acumulación de capital es

$$\dot{K} \;=\; I. \tag{3.46}$$

La manera en la que el agente asigna su trabajo y la cantidad de capital entre los dos sectores está restringida por

$$\begin{aligned} K_T + K_N &= K, \qquad (3.47)\\ L_T + L_N &= 1. \end{aligned}$$

En este modelo, la utilidad del agente depende únicamente de sus niveles de consumo de ambos bienes.

El problema del agente es tomar las decisiones de sus niveles de consumo, C_T y C_N, la asignación de su trabajo, L_T y L_N, su tasa de inversión I, su tasa de acumulación de bonos comercializables $\dot{b}$ y la asignación de su capital K_T y K_N, de manera que su nivel presente de bienestar acumulado en el periodo de tiempo $[t_0, t_1]$ sea máximo, esto es, desea maximizar

$$J(x_0, u) = \int_{t_0}^{t_1} U\left(C_T, C_N\right) e^{-\beta t} dt,$$

sobre el conjunto de funciones diferenciables $u : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ y $x : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con condición inicial $x(t_0) = (b_0, K_{N_0}, K_{T_0})$ y condición final $x(t_1) = (b_1, K_{N_1}, K_{T_1})$. Sujeto a las restricciones presupuestarias (3.45) y (3.46).

La función de utilidad instantánea se asume que es cóncava y los dos bienes se asume que son normales, es decir, la demanda de estos bienes aumenta cuando aumenta la riqueza del agente (y disminuye cuando aumenta el valor marginal de la riqueza).

Para resolver este problema se asume que el tiempo inicial $t_0 = 0$ y el tiempo final $t_1 = T$, con $T > 0$ fijo.

El vector de variables de estado es $x(t) = (b, K_N, K_T)$, con la condición inicial $x(0) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (b_0, K_{N_0}, K_{T_0})$ y la condición final y $x(T) = (x_1^1, x_2^1, x_3^1) = (b_1, K_{N_1}, K_{T_1})$.

Para expresar el problema en forma estándar se va a definir un control auxiliar, de manera que $\dot{K_T} = \mu$, por lo que el vector de controles es $u(t) = (C_T, C_N, L_T, I, \mu)$ y se denota $u(0) = (C_{T_0}, C_{N_0}, L_{T_0}, I_0, \mu_0)$ y $u(T) = (C_{T_1}, C_{N_1}, L_{T_1}, I_1, \mu_1)$.

Se convierte a un problema de Mayer como en (1.6) por lo que se define

$x_4(t) = \int_{t_0}^{t} U(C_T, C_N) e^{-\beta\zeta} d\zeta$, con $x_4(0) = 0$.

La función $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^{10}$, tomando en cuenta que las propiedades dadas en (1.3) se deben cumplir, se define de la siguiente manera

$$\phi(\vec{\mathbf{e}}) = \begin{bmatrix} -x_4^1, & t_1 - T, & t_0, & b_0 - x_1^0, & K_{N_0} - x_2^0, & K_{T_0} - x_3^0, & \begin{matrix} x_4^0, \\ K_{N_1} - x_2^1, \end{matrix} & \begin{matrix} b_1 - x_1^1, \\ K_{T_1} - x_3^1 \end{matrix} \end{bmatrix}^{\mathcal{T}}.$$

La función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ es la siguiente

$$F(t, x, u) = \begin{bmatrix} \dot{b} \\ \dot{K_N} \\ \dot{K_T} \\ \dot{x}_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(K_T, L_T) + pH(K_N, 1 - L_T) - C_T - pC_N - pI - \top + rb \\ I - \mu \\ \mu \\ U(C_T, C_N) e^{-\beta t} \end{bmatrix}.$$

Por el Principio de Pontryagin se debe hallar $P(t) \in \mathbb{R}^4$ definida en el intervalo $[t_0, t_1]$, $\lambda_1 : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda(t) : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^9$, con $\lambda = (\lambda_1, \lambda(t)) \neq (0, 0)$ tal que cada condición del Teorema 1.1 se cumpla.

Por la condición (1.7a) se debe cumplir

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1(t) & \dot{P}_2(t) & \dot{P}_3(t) & \dot{P}_4(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_1(t) & P_2(t) & P_3(t) & P_4(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & pH_{K_N} & F_{K_T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esto es,

$$\begin{aligned} \dot{P}_1(t) &= -P_1(t)r; && (3.48a) \\ \dot{P}_2(t) &= -P_1(t)pH_{K_N}; && (3.48b) \\ \dot{P}_3(t) &= -P_1(t)F_{K_T}; && (3.48c) \\ \dot{P}_4(t) &= 0. && (3.48d) \end{aligned}$$

Por la parte (1.7c) se tiene que cumplir que

$$\begin{bmatrix} P_1(t_0) & P_2(t_0) & P_3(t_0) & P_4(t_0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} P_1(t_0) &= \lambda_4; && (3.49a) \\ P_2(t_0) &= \lambda_5; && (3.49b) \\ P_3(t_0) &= \lambda_6; && (3.49c) \\ P_4(t_0) &= -\lambda_7. && (3.49d) \end{aligned}$$

De la condición (1.7d) se debe cumplir

$$\begin{bmatrix} P_1(t_1) & P_2(t_1) & P_3(t_1) & P_4(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} P_1(t_1) &= -\lambda_8; && (3.50a)\\ P_2(t_1) &= -\lambda_9; && (3.50b)\\ P_3(t_1) &= -\lambda_{10}; && (3.50c)\\ P_4(t_1) &= -\lambda_1. && (3.50d) \end{aligned}$$

De la parte (1.7e) se obtiene

$$\begin{bmatrix} P_1(t_0) & P_2(t_0) & P_3(t_0) & P_4(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(K^*_{T_0}, L^*_{T_0}) + pH(K^*_{N_0}, 1 - L^*_{T_0}) - C^*_{T_0} - \\ -pC^*_{N_0} - pI^*_0 - \top + rb^*_0 \\ \\ I^*_0 - \mu^*_0 \\ \mu^*_0 \\ U(C^*_{T_0}, C^*_{N_0}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_3.$$

Por las condiciones (3.49a)-(3.49d) y lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} H(t_0, x^*(t_0), u^*(t_0)) &= \lambda_4 \left[F(K^*_{T_0}, L^*_{T_0}) + pH(K^*_{N_0}, L^*_{N_0}) - C^*_{T_0} - pC^*_{N_0} - pI^*_0 - \top + rb^*_0\right] \\ &+ \lambda_5 \left[I^*_0 - \mu^*_0\right] + \lambda_6 \mu^*_0 - \lambda_7 U(C^*_{T_0}, C^*_{N_0}) = \lambda_3. \qquad (3.51) \end{aligned}$$

De la condición (1.7f) se obtiene

$$\begin{bmatrix} P_1(t_1) & P_2(t_1) & P_3(t_1) & P_4(t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(K^*_{T_1}, L^*_{T_1}) + pH(K^*_{N_1}, 1 - L^*_{T_1}) - C^*_{T_1} - \\ -pC^*_{N_1} - pI^*_1 - \top + rb^*_1 \\ \\ I^*_1 - \mu^*_1 \\ \mu^*_1 \\ U(C^*_{T_1}, C^*_{N_1}) e^{-\beta t_1} \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -\lambda_2.$$

De las condiciones (3.50a)-(3.50d) y lo anterior se obtiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} -H(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1)) &= \lambda_8 \left[F(K^*_{T_1}, L^*_{T_1}) + pH(K^*_{N_1}, L^*_{N_1}) - C^*_{T_1} - pC^*_{N_1} - pI^*_1 - \top + rb^*_1\right] \\ &+ \lambda_9 \left[I^*_1 - \mu^*_1\right] + \lambda_{10}\mu^*_1 + \lambda_1 U(C^*_{T_1}, C^*_{N_1})e^{-\beta t_1} = \lambda_2. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Resolviendo la ecuación diferencial dada en (3.48a) considerando la condición inicial (3.49a) se obtiene que la solución para $P_1(t)$ es

$$P_1(t) = \lambda_4 e^{-rt}, \tag{3.53}$$

por la condición (3.50a) se tiene que

$$\lambda_4(t_1)e^{-rt_1} = -\lambda_8. \tag{3.54}$$

Sustituyendo la solución para $P_1(t)$ dada en (3.53) en la ecuación diferencial (3.48b) se obtiene que la solución para $P_2(t)$ es

$$P_2(t) = \lambda_5 e^{-rt},$$

y por las condiciones (3.49b) y (3.50b) obtenemos las siguientes relaciones

$$\lambda_4(t_0)pH_{K_N} = \lambda_5 r; \tag{3.55}$$

$$\lambda_5(t_1)e^{-rt_1} = -\lambda_9. \tag{3.56}$$

Sustituyendo la solución de $P_1(t)$ dada en (3.53) en (3.48c) se obtiene que la solución para P_3 está dada por

$$P_3(t) = \lambda_6 e^{-rt},$$

mientras que por las condiciones (3.49c) y (3.50c) se tienen que cumplir las siguientes relaciones

$$\lambda_4(t_0)F_{K_T} = \lambda_6 r; \tag{3.57}$$

$$\lambda_6(t_1)e^{-rt_1} = -\lambda_{10}. \tag{3.58}$$

De la ecuación diferencial (3.48d) se tiene que $P_4(t)$ debe ser constante y por las condiciones dadas en (3.49d) y (3.50d) se obtiene que

$$P_4(t) = -\lambda_1 = -\lambda_7. \tag{3.59}$$

Afirmación 3.2.1. λ_1 y $\lambda_4(t)$ deben ser distintos de cero para obtener las condiciones de optimización del problema.

Demostración: Suponga que ambos valores son iguales a cero. Con $\lambda_1 = 0$ se tiene de inmediato por (3.59) que $\lambda_7 = 0$, por otro lado, con $\lambda_4 = 0$ y por la relaciones (3.54), (3.55) y (3.57) se tiene que $\lambda_8 = 0$, $\lambda_5 = 0$ y $\lambda_6 = 0$, ésto y las relaciones (3.56) y (3.58) implican que λ_9 y λ_{10} son cero. Por último, combinando todo lo anterior con las relaciones (3.51) y (3.52) tenemos que λ_3 y λ_2 son cero, lo cual implica que $\lambda = 0$, lo cual no es de utilidad para encontrar la optimización del problema, pues no se cumple una de las condiciones establecidas en el Principio de Pontryagin.

Por la afirmación anterior, se puede suponer, por simplicidad que $\lambda_1 = -1$, por lo que el vector $P(t)$ está dado por

$$P(t) = \left[\ \lambda_4 e^{-rt}, \quad \lambda_5 e^{-rt}, \quad \lambda_6 e^{-rt}, \quad 1\ \right]^{\mathcal{T}}.$$

El Hamiltoniano del sistema es

$$\begin{aligned} H(t,x,u) &= \lambda_4 e^{-rt}\left[F(K_T,L_T) + pH(K_N, 1-L_T) - C_T - pC_N - pI - \top + rb\right] + \\ &+ \lambda_5 e^{-rt}\left[I-\mu\right] + \lambda_6 e^{-rt}\mu + e^{-\beta t}U(C_T,C_N), \end{aligned}$$

donde

λ_4 representa el valor marginal de la riqueza que se tiene en la forma de bonos comercializables extranjeros.

λ_5 representa el valor marginal de la cantidad de capital utilizado para la producción del bien no comercializable.

λ_6 representa el valor marginal de la cantidad de capital utilizado para la producción del bien comercializable.

Estos valores están expresados en términos reales por medio del bien comercializable.

Lo que resta es buscar las condiciones para que (1.8) se cumpla, es decir, se debe encontrar

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} H(t,x^*,u) &= \lambda_4 e^{-rt}\left[F(K_T^*,L_T) + pH(K_N^*, 1-L_T) - C_T - pC_N - pI - \top + rb^*\right] + \\ &+ \lambda_5 e^{-rt}\left[I-\mu\right] + \lambda_6 e^{-rt}\mu + e^{-\beta t}U(C_T,C_N). \end{aligned}$$

Por lo anterior se tiene que las condiciones de optimización del problema son

$$\begin{aligned} H_{C_T} &= -\lambda_4 e^{-rt} + e^{-\beta t} U_{C_T} = 0; \\ H_{C_N} &= -\lambda_4 p e^{-rt} + e^{-\beta t} U_{C_N} = 0; \\ H_{L_T} &= \lambda_4 e^{-rt} F_{L_T} - \lambda_4 e^{-rt} p H_{L_N} = 0; \\ H_I &= -\lambda_4 e^{-rt} p + \lambda_5 e^{-rt} = 0; \\ H_\mu &= -\lambda_5 e^{-rt} + \lambda_6 e^{-rt} = 0. \end{aligned}$$

Como ya se ha hecho en secciones anteriores, $\beta = r$, por lo que las condiciones de optimización se transforman en

$$U_{C_T} = \lambda_4; \tag{3.60a}$$

$$U_{C_N} = \lambda_4 p; \tag{3.60b}$$

$$F_{L_T} = p H_{L_N}; \tag{3.60c}$$

$$p = \frac{\lambda_5}{\lambda_4}; \tag{3.60d}$$

$$\lambda_5 = \lambda_6. \tag{3.60e}$$

Las ecuaciones (3.60a) y (3.60b) son las usuales condiciones de optimización que igualan la utilidad marginal del consumo con el valor marginal de la riqueza, apropiadamente medido en términos del bien comercializable. La condición (3.60c) determina la manera de asignar del trabajo entre ambos sectores, ésta iguala el producto marginal del trabajo en el sector comercializable y no comercializable. La condición (3.60d) afirma que el tipo de cambio real es igual al valor marginal de la cantidad de capital dividido por el valor marginal de la riqueza. La ecuación (3.60e) iguala el valor marginal de ambos tipos de capital.

La matriz Hessiana del Hamiltoniano del sistema $H(t, x, u)$, está dada por

$$h = \begin{bmatrix} U_{C_T C_T} & U_{C_N C_T} & 0 & 0 & 0 \\ U_{C_N C_T} & U_{C_N C_N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 \left(F_{L_T L_T} - p H_{L_T L_T} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como las condiciones de optimización producen un máximo, por la matriz Hessiana se tiene que las siguientes condiciones se cumplen

$$U_{C_T C_T} U_{C_N C_N} - U^2_{C_T C_N} > 0,$$
$$\lambda_4 \left(F_{L_T L_T} - p H_{L_T L_T} \right) < 0.$$

De la ecuación diferencial dada en (3.48a) se obtiene que

$$\dot{\lambda}_4 = 0.$$

Esto implica que $\lambda_4 = \bar{\lambda}$ es constante.

De la ecuación diferencial (3.48b), una vez que se conoce $P_2(t)$ se obtiene que

$$\dot{\lambda}_5 - \lambda_5 r \quad = \quad -\lambda_4 p H_{K_N}.$$

Como $\lambda_4 = \bar{\lambda}$ es constante y por la condición de optimización (3.60d), la ecuación anterior se transforma en

$$\dot{p} - pr \quad = \quad -pH_{K_N}. \tag{3.61}$$

Equivalentemente,

$$\frac{\dot{p}}{p} + H_{K_N} \quad = \quad r. \tag{3.62}$$

Esta ecuación iguala la tasa de retorno sobre los bonos comercializables a la tasa de retorno instantánea sobre el capital no comercializable, la cual consiste del producto marginal físico más la tasa de capital ganada.

Por (3.48c) una vez que se conoce a la solución para $P_3(t)$ se obtiene que

$$\dot{\lambda}_6 - \lambda_6 r \quad = \quad -\lambda_4 F_{K_T}.$$

Recordando las condiciones de optimización (3.60e) y (3.60d), la ecuación anterior se transforma en

$$\dot{p} - pr \quad = \quad -F_{K_T}. \tag{3.63}$$

Observando (3.61) y (3.63) tenemos que

$$F_{K_T} \quad = \quad pH_{K_N}.$$

La ecuación anterior es la condición de optimización del problema en la que se determina la manera de asignar el capital. Esta ecuación iguala el producto marginal del capital en ambos sectores de producción. Nótese que esta condición y la dada en (3.60c) están basadas sobre la suposición de que ambos factores de producción pueden ser utilizados tanto en el sector comercializable como en el no comercializable.

Gobierno

El gobierno en este modelo juega un papel muy simple. El gasto que realiza de los bienes comercializable y no comercializable, es financiado únicamente por los impuestos que recauda, esto es

$$G_T + pG_N = \top, \tag{3.64}$$

donde

G_T = gasto gubernamental sobre el bien comercializable y

G_N = gasto gubernamental sobre el bien no comercializable.

Por simplicidad, se asume que el gasto del gobierno no devuelve ninguna utilidad.

Equilibrio Macroeconómico

Por cuestiones analíticas es más conveniente trabajar en términos de la razón capital-trabajo, pues permite usar el hecho de que las funciones de producción presentan retornos constantes a escala. Para ello, se define la razón capital-trabajo en los sectores del bien comercializable y no comercializable respectivamente como

$$k_T \equiv \frac{K_T}{L_T}, \quad k_N \equiv \frac{K_N}{L_N}. \tag{3.65}$$

Con las definiciones anteriores, las funciones de producción pueden ser expresadas en su forma intensiva como

$$\begin{aligned} F(K_T, L_T) &= F(k_T L_T, L_T) = f(k_T)L_T, \\ H(K_N, L_N) &= H(k_N L_N, L_N) = h(k_N)L_N. \end{aligned}$$

Enseguida se observará cómo varían las condiciones de optimización con este cambio en las funciones de producción. Nótese que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left[F\left(K_T,L_T\right)\right]}{\partial L_T} &= F_{K_T}k_T + F_{L_T} = f'k_T + F_{L_T} = f,\\
\frac{\partial\left[H\left(K_N,L_N\right)\right]}{\partial L_N} &= H_{K_N}k_N + H_{L_N} = h'k_N + H_{L_N} = h.
\end{aligned}$$

Por lo anterior y la condición $F_{L_T} = pH_{L_N}$, se puede ver que la condición de optimización (3.60c) se transforma en

$$f(k_T) - k_T f'(k_T) = p\left[h(k_N) - k_N h'(k_N)\right].$$

Por las definiciones (3.65) y la restricción $K_T + K_N = K$, se obtiene que (3.47) se convierte en

$$L_T k_T + L_N k_N = K.$$

Esta ecuación describe la relación de asignación del capital entre los sectores en términos per capita.

Con todo lo anterior, el equilibrio macroeconómico puede ser resumido a través del siguiente conjunto de relaciones

$$\begin{aligned}
U_{C_T} &= \bar{\lambda}; && (3.66a)\\
U_{C_N} &= \bar{\lambda}p; && (3.66b)\\
f'(k_T) &= ph'(k_N); && (3.66c)\\
f(k_T) &- f'(k_T)k_T = p\left[h(k_N) - k_N h'(k_N)\right]; && (3.66d)\\
L_T k_T &+ L_N k_N = K; && (3.66e)\\
\dot{p} &= p\left[r - h'(k_N)\right]. && (3.66f)
\end{aligned}$$

Se hará la suposición que la tasa de inversión está dada por

$$I \equiv L_N h(k_N) - C_N - G_N. \qquad (3.67)$$

Con esto y la restricción presupuestaria del gobierno dada en (3.64), las restricciones presupuestarias (3.46) y (3.45) se convierten en

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= L_N h\left(k_N\right) - C_N - G_N; && (3.68a)\\
\dot{b} &= L_T f\left(k_T\right) - C_T - G_T + rb. && (3.68b)
\end{aligned}$$

Dado que el bien no comercializable es puede ser usado tanto para el consumo como para la inversión, entonces la condición (3.67) indica que cualquier exceso en la producción del bien no comercializable sobre el consumo privado y del gobierno de este bien, es acumulado como capital (no comercializable). La ecuación (3.68b) describe la cuenta corriente de la economía, e indica que la tasa de acumulación de bonos comercializables extranjeros debe ser igual al exceso de oferta del bien comercializable sobre el consumo nacional de este bien más el interés ganado por la posesión de bonos extranjeros.

Las ecuaciones (3.66a)-(3.66e) definen el siguiente equilibrio de corto plazo.

Primero, las ecuaciones (3.66a) y (3.66b) pueden ser resueltas para el nivel de consumo de ambos bienes como sigue

$$C_T = C_T\left(\bar{\lambda}, p\right), \qquad \frac{\partial C_T}{\partial \bar{\lambda}} < 0, \quad \frac{\partial C_T}{\partial p} \gtreqless 0, \tag{3.69a}$$

$$C_N = C_N\left(\bar{\lambda}, p\right), \qquad \frac{\partial C_N}{\partial \bar{\lambda}} < 0, \quad \frac{\partial C_N}{\partial p} < 0. \tag{3.69b}$$

Para ver esto, primero se toman diferenciales a las condiciones de optimización (3.66a) y (3.66b), de lo que se obtiene los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} U_{C_T C_T}\frac{\partial C_T}{\partial \bar{\lambda}} + U_{C_N C_T}\frac{\partial C_N}{\partial \bar{\lambda}} &= 1 \\ U_{C_N C_T}\frac{\partial C_T}{\partial \bar{\lambda}} + U_{C_N C_N}\frac{\partial C_N}{\partial \bar{\lambda}} &= p; \end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned} U_{C_T C_T}\frac{\partial C_T}{\partial p} + U_{C_N C_T}\frac{\partial C_N}{\partial p} &= 0, \\ U_{C_N C_T}\frac{\partial C_T}{\partial p} + U_{C_N C_N}\frac{\partial C_N}{\partial p} &= \bar{\lambda}. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Al resolver el sistema (3.70) para $\frac{\partial C_T}{\partial \bar{\lambda}}$ y $\frac{\partial C_N}{\partial \bar{\lambda}}$ y el sistema (3.71) para $\frac{\partial C_T}{\partial p}$ y $\frac{\partial C_N}{\partial p}$ se obtiene que las soluciones están dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_T}{\partial \bar{\lambda}} &= \frac{1}{\Phi}(U_{C_N C_N} - U_{C_N C_T} p) < 0,\\ \frac{\partial C_N}{\partial \bar{\lambda}} &= \frac{1}{\Phi}(p U_{C_T C_T} - U_{C_N C_T}) < 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_T}{\partial p} &= -\frac{1}{\Phi} U_{C_N C_T} \bar{\lambda} \gtreqless 0,\\ \frac{\partial C_N}{\partial p} &= \frac{1}{\Phi} U_{C_T C_T} \bar{\lambda} < 0,\end{aligned}$$

donde $\Phi = U_{C_N C_N} U_{C_T C_T} - U^2_{C_N C_T} > 0$.

Obsérvese que las derivadas parciales con respecto a $\bar{\lambda}$ reflejan la suposición de que ambos bienes son normales.

Ahora si se supone que k_T, k_N, L_T y L_N dependen de p y, además que las dos últimas variables también dependen de K, es decir,

$$\begin{aligned} k_T &= k_T(p), \quad k_N = k_N(p), \\ L_T &= L_T(K,p), \quad L_N = L_N(K,p), \end{aligned} \tag{3.72}$$

entonces se puede observar su comportamiento. Para esto, al tomar diferenciales al bloque de condiciones (3.66c)-(3.66e) y a la ecuación $L_T + L_N = 1$, se obtienen los sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} p h'' k_N' - f'' k_T' &= -h' \\ p k_N h'' k_N' - f'' k_T k_T' &= h - k_N h' \\ L_N k_N' + L_T k_T' &+ k_T \frac{\partial L_T}{\partial p} + k_N \frac{\partial L_N}{\partial p} = 0 \\ \frac{\partial L_T}{\partial p} + \frac{\partial L_N}{\partial p} &= 0; \end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_T}{\partial K} k_T + \frac{\partial L_N}{\partial K} k_N &= 1 \\ \frac{\partial L_T}{\partial K} + \frac{\partial L_N}{\partial K} &= 0. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Al resolver el sistema (3.73) para k'_N, k'_T, $\dfrac{\partial L_T}{\partial p}$ y $\dfrac{\partial L_N}{\partial p}$ y el sistema (3.74) para $\dfrac{\partial L_T}{\partial K}$ y $\dfrac{\partial L_N}{\partial K}$ y recordando las condiciones (3.66c) y (3.66d), se obtiene que las soluciones están dadas por

$$\begin{aligned} k'_T &= -\frac{h}{f''(k_T - k_N)}; && (3.75)\\ k'_N &= \frac{f}{p^2 h''(k_N - k_T)}; && (3.76)\\ \frac{\partial L_T}{\partial p} &= \frac{1}{(k_T - k_N)^2}\left[\frac{L_T h}{f''} + \frac{L_N f}{p^2 h''}\right] < 0; && (3.77)\\ \frac{\partial L_N}{\partial p} &= -\frac{1}{(k_T - k_N)^2}\left[\frac{L_T h}{f''} + \frac{L_N f}{p^2 h''}\right] > 0; && (3.78)\\ \frac{\partial L_T}{\partial K} &= \frac{1}{k_T - k_N}; && (3.79)\\ \frac{\partial L_N}{\partial K} &= \frac{1}{k_N - k_T}. && (3.80) \end{aligned}$$

Note que los signos de algunas de las soluciones dependen del sector en el que el capital sea más intenso.

Ahora, sustituyendo (3.72) en las funciones de producción, se puede resolver para la producción del bien comercializable y no comercializable de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Y_T &= Y_T(K,p) = F\left[K_T(p), L_T(K,p)\right] = f\left[k_T(p)\right] L_T(K,p),\\ Y_N &= Y_N(K,p) = H\left[K_N(p), L_N(K,p)\right] = h\left[k_N(p)\right] L_N(K,p). \end{aligned}$$

Al tomar diferenciales a las funciones de producción del bien comercializable y no comercializable, sustituyendo las soluciones obtenidas anteriormente y simplificando estas expresiones recordando las condiciones de optimización (3.66c)-(3.66d), se obtiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Y_T}{\partial K} &= f\frac{\partial L_T}{\partial K} = \frac{f}{k_T - k_N};\\
\frac{\partial Y_N}{\partial K} &= h\frac{\partial L_N}{\partial K} = \frac{h}{k_N - k_T};\\
\frac{\partial Y_T}{\partial p} &= f'k'_T L_T + f\frac{\partial L_T}{\partial p} = \frac{1}{(k_T - k_N)^2}\left[\frac{L_N f^2}{p^2 h''} + \frac{L_T h^2 p}{f''}\right] < 0;\\
\frac{\partial Y_N}{\partial p} &= h'k'_N L_N + h\frac{\partial L_N}{\partial p} = -\frac{1}{(k_T - k_N)^2}\left[\frac{L_N f^2}{p^3 h''} + \frac{L_T h^2}{f''}\right] > 0.
\end{aligned}
$$

De las últimas dos soluciones podemos ver que un aumento en el precio relativo del bien no comercializable, p, atraerá recursos del sector comercializable hacia el no comercializable, causando que la producción de este sector aumente a expensas de la producción del bien comercializable.

Con las expresiones anteriores y las ecuaciones (3.66c) y (3.66d), se pueden establecer las siguientes relaciones, las cuales van a ser utilidad para derivar la relación de acumulación de activos extranjeros.

$$
\frac{\partial Y_T}{\partial K} + p\frac{\partial Y_N}{\partial K} = \frac{f - ph}{k_T - k_N} = \frac{k_T f' - p k_N h'}{k_T - k_N} = f', \tag{3.81}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Y_T}{\partial p} + p\frac{\partial Y_N}{\partial p} &= \frac{1}{(k_T - k_N)^2}\left[\frac{L_N f^2}{p^2 h''} + \frac{L_T h^2 p}{f''}\right] - \\
&- \frac{p}{(k_T - k_N)^2}\left[\frac{L_N f^2}{p^3 h''} + \frac{L_T h^2}{f''}\right] = 0.
\end{aligned} \tag{3.82}
$$

La evolución del sistema es determinada sustituyendo el equilibrio corto plazo en las ecuaciones dinámicas. Al sustituir las soluciones para C_T, C_N, k_T, k_N y L_T en (3.66f) y (3.68a), estas dos ecuaciones van a describir la evolución de la dinámica del tipo de cambio real p y del capital K. Posteriormente, al sustituir las soluciones estables para p y K en (3.68b) se obtendrá la evolución de la demanda de la economía con el resto del mundo, es decir, la dinámica de la cuenta corriente de la economía.

Equilibrio Dinámico

Considere las ecuaciones (3.66f) y (3.68a) reescritas como

$$\begin{aligned} \dot{p} &= p\left[r - h'(k_N(p))\right], \\ \dot{K} &= L_N(K,p)h\left[k_N(p)\right] - C_N(\bar{\lambda},p) - G_N. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Ahora se va a linealizar el sistema anterior alrededor del punto de equilibrio estacionario $\left(\tilde{p},\tilde{K}\right)$, para analizar su comportamiento. Para simplificar el resultado de la linealización, se sustituirán las soluciones para k'_N, $\dfrac{\partial L_N}{\partial K}$ y $\dfrac{\partial Y_N}{\partial p}$ obtenidas con anterioridad. Además tomando en cuenta las condiciones (3.66c) y (3.66d) y, recordando que alrededor del punto de equilibrio estacionario se cumple que $h' = r$.

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \left[r - h' - ph''k'_N\right](p-\tilde{p}) = \left[r + \frac{h}{k_T - k_N}\right](p-\tilde{p}) = \left[\frac{f}{p\left(k_T - k_N\right)}\right](p-\tilde{p}), \\ \dot{K} &= h\frac{\partial L_N}{\partial K}\left(K - \tilde{K}\right) + \left[h\frac{\partial L_N}{\partial p} + h'L_Nk'_N - \frac{\partial C_N}{\partial p}\right](p-\tilde{p}) \\ &= \frac{h}{k_N - k_T}\left(K - \tilde{K}\right) + \left[\frac{\partial Y_N}{\partial p} - \frac{\partial C_N}{\partial p}\right](p-\tilde{p}). \end{aligned} \tag{3.84}$$

Escribiendo lo anterior en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p-\tilde{p} \\ K-\tilde{K} \end{bmatrix},$$

donde

$$a_{11} = \frac{f}{p\left(k_T - k_N\right)}; \qquad a_{22} = \frac{h}{k_N - k_T} = \frac{\partial Y_N}{\partial K}; \qquad a_{21} = \frac{\partial Y_N}{\partial p} - \frac{\partial C_N}{\partial p} > 0.$$

El determinante de la matriz de coeficientes es negativo, independientemente de las intensidades de capital k_T y k_N, pues $D \equiv -\dfrac{fh}{p\left(k_T - k_N\right)^2} < 0$, lo cual quiere decir que el equilibrio es un punto silla y los valores característicos de la matriz de coeficientes son reales y de signos opuestos, se denotarán dichos valores por $\mu_1 < 0 < \mu_2$.

El polinomio característico es $P(\mu) = (a_{11} - \mu)(a_{22} - \mu)$. Ahora se va a encontrar el vector característico asociado a μ_1, cuyos elementos son una solución no trivial de la ecuación

$$a_{21}(p-\tilde{p}) + (a_{22} - \mu_1)\left(K - \tilde{K}\right) = 0.$$

Se tomará

$$
\begin{aligned}
K - \tilde{K} &= 1, \\
p - \tilde{p} &= -\left(\frac{a_{22} - \mu_1}{a_{21}}\right).
\end{aligned}
$$

Como la condición inicial $K(0) = K_0$ está dada, la solución estable del sistema (3.83) es de la forma

$$
K(t) = \tilde{K} + \left(K_0 - \tilde{K}\right) e^{\mu_1 t}, \tag{3.85}
$$

$$
p(t) - \tilde{p} = -\left(\frac{a_{22} - \mu_1}{a_{21}}\right)\left(K - \tilde{K}\right). \tag{3.86}
$$

El comportamiento dinámico de la economía depende crucialmente de las intensidades del capital, por lo que los casos $k_T > k_N$ y $k_N > k_T$, necesitan ser analizados por separado.

Caso (I) $k_T > k_N$, esto quiere decir que la intensidad de capital en el sector del bien comercializable excede a la del sector del bien no comercializable. Esto implica que $\mu_1 = a_{22} < 0$, $\mu_2 = a_{11} > 0$, por lo que las soluciones estables para la cantidad de capital K y el precio relativo p dadas en (3.85)y (3.86) se convierten en

$$
\begin{aligned}
K(t) &= \tilde{K} + \left(K_0 - \tilde{K}\right) e^{a_{22} t}, \qquad (3.87) \\
p(t) &= \tilde{p}.
\end{aligned}
$$

En este caso, el precio relativo del bien no comercializable permanece en su valor de equilibrio estacionario durante la evolución dinámica de la economía. Se va a construir un diagrama de fase asociado para este caso, dicho diagrama es ilustrado en la Figura 7.A. La línea horizontal LL corresponde a la isoclina $\dot{p} = 0$, mientras que la isoclina $\dot{K} = 0$ es ilustrada por la línea MM, la cual por (3.84) tiene pendiente positiva dada por

$$
\left(\frac{dp}{dK}\right)_{\dot{K}=0} = -\frac{a_{22}}{a_{21}} > 0.
$$

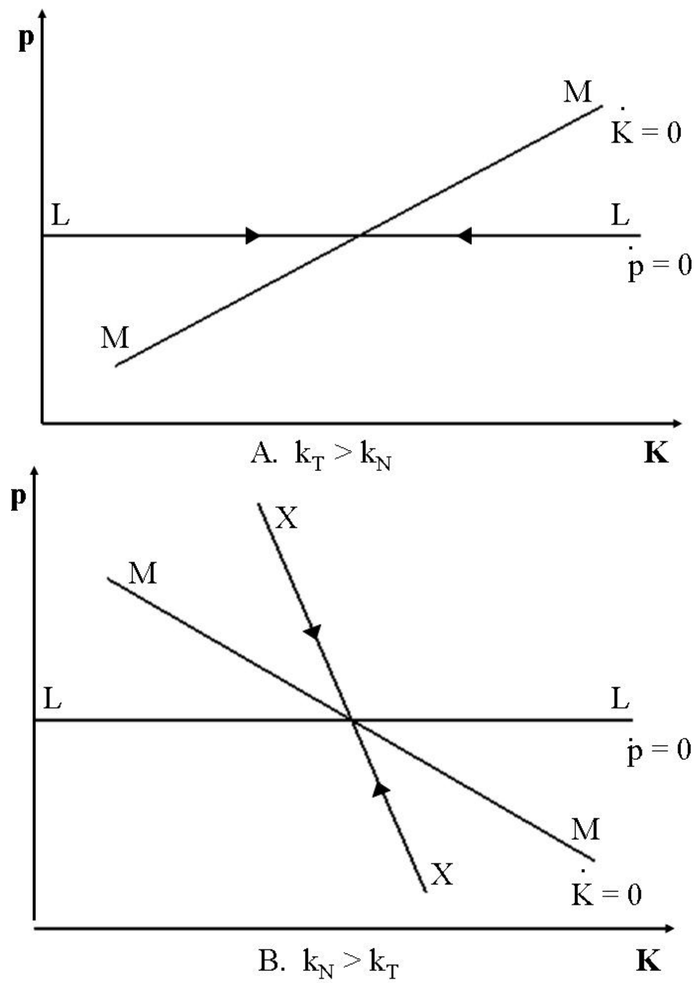

Figura 7.

Caso (II) $k_N > k_T$. En este caso el sector no comercializable es de capital más intenso; esto implica que $\mu_1 = a_{11} < 0$, $\mu_2 = a_{22} > 0$, por lo que las soluciones estables para la cantidad de capital K y el precio relativo p, están dadas por

$$\begin{aligned} K(t) &= \tilde{K} + \left(K_0 - \tilde{K}\right) e^{a_{11}t}, \\ p(t) - \tilde{p} &= -\left(\frac{a_{22} - a_{11}}{a_{21}}\right)\left(K - \tilde{K}\right). \end{aligned} \tag{3.88}$$

Para esta situación, el diagrama de fase es ilustrado en la Figura 7.B. La dirección estable del punto silla corresponde a la línea XX, la cual tiene pendiente negativa dada por

$$\frac{dp}{dK} = -\left(\frac{a_{22} - a_{11}}{a_{21}}\right) < 0.$$

La isoclina $\dot{p} = 0$ nuevamente corresponde a la línea horizontal LL, mientras que la isoclina $\dot{K} = 0$ es ilustrada por la línea MM, pero ahora tiene pendiente negativa, y dado que $-\dfrac{a_{22}}{a_{21}} > -\left(\dfrac{a_{22} - a_{11}}{a_{21}}\right)$, la línea MM está menos inclinada que la línea XX.

Acumulación de Activo Extranjero, Inversión y Ahorro

Para determinar la acumulación de bonos extranjeros, vamos a considerar (3.68b) expresada en términos de p y K y se aplicará un procedimiento que ya ha sido utilizado en modelos anteriores.

$$\dot{b} = Y_T(K, p) - C_T\left(\bar{\lambda}, p\right) - G_T + rb.$$

Linealizando esta ecuación alrededor del punto de equilibrio estacionario $\left(\tilde{k}, \tilde{b}\right)$ se obtiene

$$\dot{b} = \left[\frac{\partial Y_T}{\partial K} + \left(\frac{\partial Y_T}{\partial p} - \frac{\partial C_T}{\partial p}\right)\left(\frac{dp}{dK}\right)_{XX}\right]\left(K - \tilde{K}\right) + r\left(b - \tilde{b}\right).$$

Por (3.86), la pendiente a lo largo de la trayectoria estable está dada por

$$\left(\frac{dp}{dK}\right)_{XX} = -\frac{a_{22} - \mu_1}{a_{21}} = -\frac{\frac{\partial Y_N}{\partial K} - \mu_1}{\frac{\partial Y_N}{\partial p} - \frac{\partial C_N}{\partial p}} \leq 0.$$

Ya se ha visto que esta pendiente puede ser negativa o cero, dependiendo de las intensidades de capital de los sectores de producción. Sumando y restando el término $p\dfrac{\partial C_N}{\partial p}\left(\dfrac{dp}{dK}\right)_{XX}$, la ecuación linealizada de la acumulación de bonos puede ser escrita como

$$\dot{b} = \left[\frac{\partial Y_T}{\partial K} + \left(\frac{\partial Y_T}{\partial p} + p\frac{\partial C_N}{\partial p}\right)\left(\frac{dp}{dK}\right)_{XX} - \left(\frac{\partial C}{\partial p}\right)\left(\frac{dp}{dK}\right)_{XX}\right]\left(K - \tilde{K}\right) + r\left(b - \tilde{b}\right), \tag{3.89}$$

donde $\dfrac{\partial C}{\partial p} \equiv \dfrac{\partial C_T}{\partial p} + p\dfrac{\partial C_N}{\partial p} < 0$. Ahora, se simplificará un poco una parte de la expresión anterior. Recordando (1) la definición de $\left(\dfrac{dp}{dK}\right)_{XX}$, (2) las relaciones obtenidas en (3.81) y (3.82) y (3) que en la vecindad del punto de equilibrio, $f'(k_T) = \tilde{p}r$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Y_T}{\partial K} &+ \left(\frac{\partial Y_T}{\partial p}+\tilde{p}\frac{\partial C_N}{\partial p}\right)\left(\frac{dp}{dK}\right)_{XX} = \\
&= \Theta\left[\frac{\partial Y_T}{\partial K}\left(\frac{\partial Y_N}{\partial p}-\frac{\partial C_N}{\partial p}\right)+\left(\frac{\partial Y_T}{\partial p}+\tilde{p}\frac{\partial C_N}{\partial p}\right)\left(-\frac{\partial Y_N}{\partial K}+\mu_1\right)\right] \\
&= \Theta\left[\frac{\partial Y_T}{\partial K}\frac{\partial Y_N}{\partial p}-\frac{\partial Y_T}{\partial p}\frac{\partial Y_N}{\partial K}-\frac{\partial C_N}{\partial p}\left(\frac{\partial Y_T}{\partial K}+\tilde{p}\frac{\partial Y_N}{\partial K}\right)+\mu_1\left(\tilde{p}\frac{\partial C_N}{\partial p}+\frac{\partial Y_T}{\partial p}\right)\right] \\
&= \Theta\left[\frac{\partial Y_N}{\partial p}\left(\frac{\partial Y_T}{\partial K}+\tilde{p}\frac{\partial Y_N}{\partial K}\right)-f'\frac{\partial C_N}{\partial p}-\mu_1\tilde{p}\left(\frac{\partial Y_N}{\partial p}-\frac{\partial C_N}{\partial p}\right)\right] \\
&= \Theta\left[\left(f'-\mu_1\tilde{p}\right)\left(\frac{\partial Y_N}{\partial p}-\frac{\partial C_N}{\partial p}\right)\right] = \tilde{p}\left(r-\mu_1\right),
\end{aligned}
$$

donde $\Theta = \left(\frac{\partial Y_N}{\partial p}-\frac{\partial C_N}{\partial p}\right)^{-1}$.

Por lo anterior y sustituyendo la solución estable para la cantidad de capital dada en (3.85), se tiene que (3.89) se simplifica a la siguiente expresión

$$
\dot{b} = \left[\tilde{p}\left(r-\mu_1\right)-\left(\frac{\partial C}{\partial p}\right)\left(\frac{dp}{dK}\right)_{XX}\right]\left(K_0-\tilde{K}\right)e^{\mu_1 t}+r\left(b-\tilde{b}\right).
$$

Resolviendo esta última ecuación diferencial se obtiene que la solución para la cantidad de bonos comercializables $b(t)$, dada la condición inicial $b(0)=b_0$, está dada por

$$
b(t) = \left[b_0+\tilde{b}\left(e^{-rt}-1\right)-\left[\tilde{p}+\left(\frac{1}{\mu_1-r}\right)\frac{\partial C}{\partial p}\left(\frac{dp}{dK}\right)_{XX}\right]\left(K_0-\tilde{K}\right)\left(e^{(\mu_1-r)t}-1\right)\right]e^{rt}. \tag{3.90}
$$

Como la condición final $b(T)=b_1$ debe cumplirse, se tiene lo siguiente

$$
b_1 e^{-rT} = b_0+\tilde{b}\left(e^{-rT}-1\right)-\left[\tilde{p}+\left(\frac{1}{\mu_1-r}\right)\frac{\partial C}{\partial p}\left(\frac{dp}{dK}\right)_{XX}\right]\left(K_0-\tilde{K}\right)\left(e^{(\mu_1-r)T}-1\right). \tag{3.91}
$$

Esta ecuación describe la condición de solvencia intertemporal de la economía. Con esta última ecuación y con la solución de los bonos dada en (3.90), se puede ver que

$$b(t) \;\approx\; \tilde{b} - \left[\tilde{p} + \left(\frac{1}{\mu_1 - r}\right)\frac{\partial C}{\partial p}\left(\frac{dp}{dK}\right)_{XX}\right]\left(K(t) - \tilde{K}\right). \qquad (3.92)$$

Obsérvese que esta condición tiene la misma forma que en modelo de acumulación física de capital, ver (2.74), en este caso se tiene que

$$\frac{\Lambda}{\mu_1 - r} = -\left[\tilde{p} + \left(\frac{1}{\mu_1 - r}\right)\frac{\partial C}{\partial p}\left(\frac{dp}{dK}\right)_{XX}\right].$$

Con esto se puede ver que el efecto instantáneo de un incremento en la cantidad de capital sobre la cuenta corriente puede operar a través de dos canales, ya sea directa o indirectamente por medio del tipo de cambio real p.

Si $k_T > k_N$, como ya vio en este caso p permanece constante en todo momento, por lo que sólo el efecto directo opera en esta situación. Por (3.92) tenemos que

$$\dot{b}(t) \;\approx\; -\tilde{p}\dot{K}(t).$$

Esto implica que una desacumulación de la cantidad de capital es acompañado por una acumulación de la cantidad de bonos extranjeros. Recordando que $\dot{b}$ describe la evolución de la cuenta corriente y que ésta es igual al ahorro nacional menos la inversión nacional. Como $\tilde{p}$ permanece fija todo el tiempo, esto implica una tasa de ahorro igual a cero. No hay correlación entre la tasa de inversión y el ahorro.

Si $k_N > k_N$, además del efecto antes mencionado, el cual aún genera la misma relación negativa entre $\dot{K}$ y $\dot{b}$, también opera el efecto indirecto, el cual refleja el valor capitalizado del ahorro, como

$$-\left(\frac{1}{\mu_1 - r}\right)\frac{\partial C}{\partial p}\left(\frac{dp}{dK}\right)_{XX} > 0,$$

se puede ver que en este caso no hay una relación clara entre $\dot{K}$ y $\dot{b}$, pues como el efecto directo y el indirecto operan en direcciones distintas, la relación dependerá del efecto que domine.

Estado Estacionario

El equilibrio estacionario de la economía, alcanzado donde $\dot{K} = \dot{p} = \dot{b} = 0$, está descrito por el siguiente conjunto de relaciones

$$f'\left(\tilde{k}_T\right) = \tilde{p}h'\left(\tilde{k}_N\right) = r\tilde{p}; \tag{3.93a}$$

$$f\left(\tilde{k}_T\right) - f'\left(\tilde{k}_T\right)\tilde{k}_T = \tilde{p}\left[h\left(\tilde{k}_N\right) - \tilde{k}_N h'\left(\tilde{k}_N\right)\right]; \tag{3.93b}$$

$$\left(1 - \tilde{L}_T\right) h\left(\tilde{k}_N\right) - \tilde{C}_N - G_N = 0; \tag{3.93c}$$

$$\tilde{L}_T f\left(\tilde{k}_T\right) - \tilde{C}_T - G_T + r\tilde{b} = 0, \tag{3.93d}$$

donde las tildes denotan los valores de equilibrio estacionario.

La ecuación (3.93a) afirma que los valores a largo plazo del producto marginal de capital en ambos sectores deben ser iguales a la tasa de interés mundial exógena. La condición (3.93c) dice que la producción del bien no comercializable debe ser igual a la demanda nacional de dicho bien. La condición (3.93d) indica que en el largo plazo el saldo de la cuenta corriente debe ser cero.

El equilibrio de estado estacionario puede ser determinado de la siguiente manera: (1) las ecuaciones (3.93a)-(3.93b) determinan las intensidades estacionarias del capital en ambos sectores, $\tilde{k}_T$, $\tilde{k}_N$ y el precio relativo del bien no comercializable $\tilde{p}$, (2) las ecuaciones (3.69a)-(3.69b) determinan los niveles de consumo de largo plazo, C_T y C_N, como funciones de $\bar{\lambda}$ y $\tilde{p}$, (3) sustituyendo estas expresiones, junto con la condición de solvencia intertemporal (3.91) en la condición para la colocación del capital (3.66e), y las condiciones de equilibrio (3.93c) y (3.93d), se obtiene que

$$\tilde{L}_T\tilde{k}_T + \left(1 - \tilde{L}_T\right)\tilde{k}_N = \tilde{K}; \tag{3.94a}$$

$$\left(1 - \tilde{L}_T\right) h\left(\tilde{k}_N\right) - \tilde{C}_N\left(\bar{\lambda}, \tilde{p}\right) - G_N = 0; \tag{3.94b}$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_T f\left(\tilde{k}_T\right) &- \tilde{C}_T\left(\bar{\lambda}, \tilde{p}\right) - G_T + \\ &+ \frac{r}{e^{-rT} - 1}\left[b_1 e^{-rT} - b_0 + \frac{\Lambda}{r - \mu_1}\left(K_0 - \tilde{K}\right)\left(e^{(\mu_1 - r)T} - 1\right)\right] = 0, \end{aligned} \tag{3.94c}$$

estas últimas ecuaciones determinan los valores de $\tilde{L}_T$, $\tilde{K}$ y $\bar{\lambda}$.

3.2.1. Análisis de Cambios Estructurales

Enseguida se analizará la respuesta del modelo provocados por cambios en la demanda.

Cambio en la demanda

El cambio en la demanda que se considerará es a través de un incremento en el gasto del gobierno, dirigido en ambos sectores. Primero obsérvese que ninguna forma de expansión fiscal tiene algún impacto directo sobre $\tilde{p}$, $\tilde{k}_T$ y $\tilde{k}_N$, pues estos parámetros son determinados por las condiciones de producción únicamente y sólo dependen de cambios en la oferta. Para ver esto, se deben observar las ecuaciones estacionarias, dadas en(3.93a) y (3.93b), que son las que determinan estos valores estacionarios.

Gasto del Gobierno sobre Bienes comercializables

Para entender claramente las respuestas de este modelo a un incremento en G_T, se analizarán dos casos por separado, el primero es cuando $k_T > k_N$ y el segundo es cuando $k_N > k_T$.

Caso (I). $k_T > k_N$. Un incremento en G_T aumenta la demanda del bien comercializable, lo cual implica que la producción de este bien debe ser incrementada. Como las intensidades sectoriales del capital están fijas, la producción adicional debe ser obtenida atrayendo trabajo del sector no comercializable, por lo cual la producción de este sector disminuye. Dado el aumento en L_T y por lo obtenido en (3.79) se ve que el capital debe aumentar. La respuesta para la cantidad de bonos en el largo plazo depende de la relación entre $\dot{K}$ y $\dot{b}$ que ya se analizó. En este caso se observó que dado que el capital aumenta, entonces la cantidad de bonos extranjeros debe disminuir. Recordando que la restricción del gobierno está dada por (3.64), entonces los impuestos deben aumentar, lo que provoca que la riqueza privada disminuya y el valor marginal de la riqueza aumente, lo que implica una reducción en el consumo de ambos bienes. Esto se puede ver de lo obtenido en (3.69a) y (3.69b).

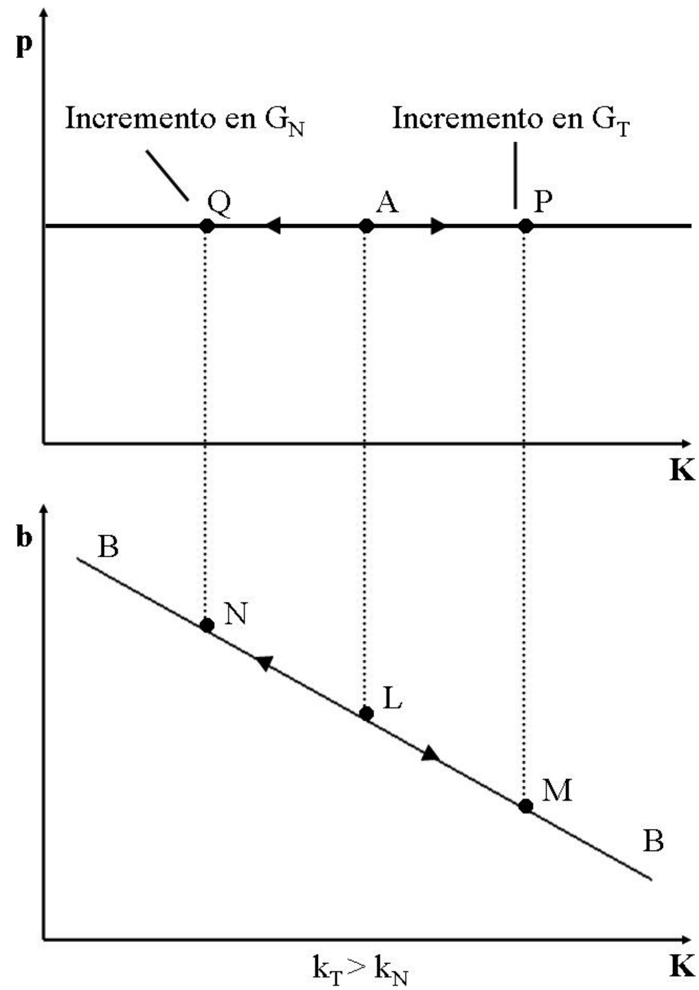

Figura 8.

La trayectoria dinámica para este caso es ilustrada en la Figura 8. El incremento en G_T lleva a una acumulación gradual de capital, acompañado por una gradual desacumulación de bonos extranjeros. El precio relativo permanece constante en su nivel estacionario. El ajuste para K y q corresponde a la línea AP del diagrama superior de la Figura, con la correspondiente desacumulación de bonos siendo representada por la línea LM en el diagrama inferior. El ajuste en el trabajo ocurre gradualmente conforme los recursos son atraídos hacia el sector comercializable.

El ajuste en respuesta a un incremento en G_N es sólo lo contrario, como es ilustrado en la Figura 8.

Caso (II). $k_N > k_T$. El incremento en G_T, por las mismas razones que fueron explicadas en el caso anterior, genera un aumento en el valor marginal de la riqueza, disminuyen el consumo de ambos bienes y aumenta el trabajo L_T. Este incremento, por (3.79), provoca que el capital disminuya. La respuesta para la cantidad de bonos extranjeros ya fue explicada anteriormente.

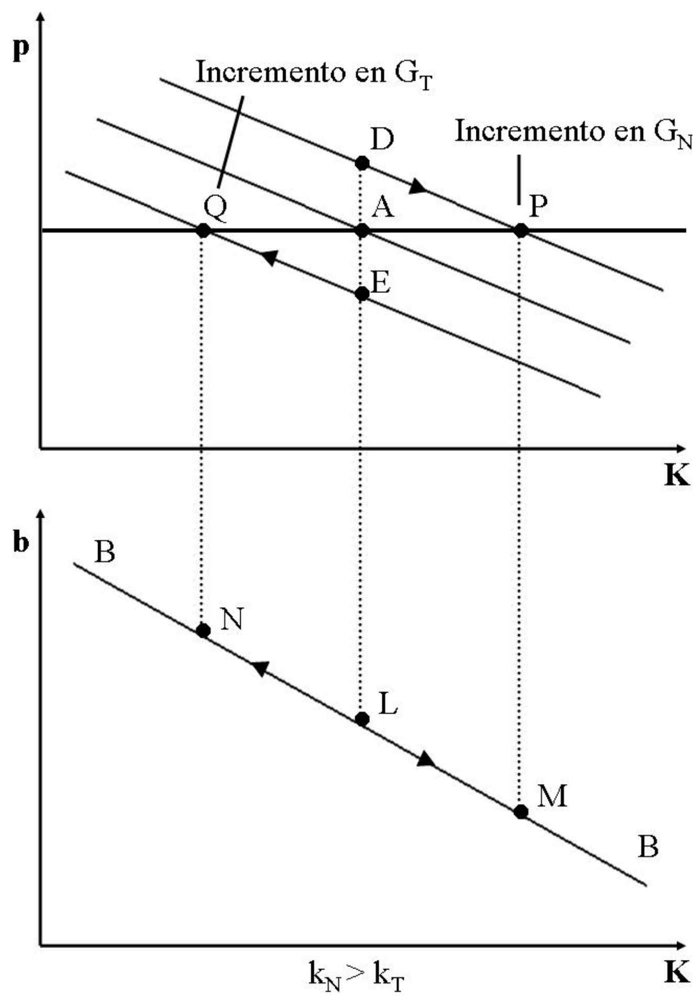

Figura 9.

Un argumento análogo sirve para explicar las respuestas para el caso de un incremento en el gasto del gobierno sobre el bien no comercializable.

La trayectoria dinámica para este caso es ilustrada en la Figura 9. El incremento en el gasto del gobierno sobre el bien comercializable provoca un aumento en el precio de este bien, por lo que el precio relativo del bien no comercializable disminuye. Es decir, habrá una depreciación real inicial en el tipo de cambio real, esto es, $p(0)$ disminuirá. Esto causa que se muevan recursos (como el trabajo) del sector no comercializable hacia el sector comercializable. La producción del sector no comercializable caerá y la inversión empieza a disminuir. A lo largo de la trayectoria de ajuste la cantidad de capital disminuye estacionariamente, mientras el precio relativo es gradualmente restaurado a su nivel original. El ajuste en K y p, ilustrado en el diagrama superior de la Figura 9, por el salto inicial AE seguido por el ajuste continuo EQ. La trayectoria correspondiente de los bonos es ilustrada en el diagrama inferior por la línea LN. Esta línea es dibujada con pendiente negativa, aunque, se debe recordar que también es posible que tenga pendiente positiva (siempre que la tasa de ahorro sea lo suficientemente grande).

Nuevamente, la respuesta dinámica a un incremento en G_N es la imagen contraria.

Los efectos de largo plazo de estas políticas son resumidas en la siguiente tabla:

	Bien comercializable	Bien No comercializable
$\tilde{k}_T$	0	0
$\tilde{k}_N$	0	0
$\tilde{p}$	0	0
$\tilde{L}_T$	$+$	$-$
$\tilde{K}$	$signo\,(k_T - k_N)$	$signo\,(k_N - k_T)$
$\tilde{b}$	$signo\left[(k_T - k_N)\,\frac{\Lambda}{\mu_1 - r}\right]$	$signo\left[(k_N - k_T)\,\frac{\Lambda}{\mu_1 - r}\right]$
$\bar{\lambda}$	$+$	$+$
$\tilde{C}_T$	$-$	$-$
$\tilde{C}_N$	$-$	$-$

Conclusiones

En el presente trabajo únicamente se desarrollaron y explicaron más extensamente modelos monetarios ya existentes. Enseguida se resumirán los resultados que se obtuvieron en cada uno de los modelos

- El modelo básico de un bien permitió entender la manera de desarrollar un modelo macroeconómico en el que las condiciones óptimas de la economía son derivadas de la optimización de los agentes representativos. Al resolver el modelo monetario de un bien se obtuvo que los niveles óptimos de consumo, dinero y el trabajo siempre eran constantes. Bajo los supuestos de este modelo, la economía siempre se encuentra en estado estacionario, lo que permitió hallar analíticamente la acción económica óptima que el gobierno debe implementar, en dicha decisión el impuesto sobre la renta debe ser cero, la condición óptima para el gasto del gobierno se reduce simplemente a igualar la utilidad marginal del gasto público a la utilidad marginal del consumo privado y la tasa óptima de crecimiento monetario debe ser igual a la tasa de interés mundial.

- El modelo de un bien con acumulación física de capital fue lo suficientemente manejable para caracterizar la dinámica de la economía a detalle y destacar el papel crítico de la acumulación de capital en este proceso. En particular, se encontró una relación de la cuenta corriente con la acumulación de capital.

- En el modelo de dos bienes con acumulación física de capital nuevamente la cuenta corriente se relaciona con la acumulación de capital. Con este modelo se analizaron las consecuencias que presenta la economía al incrementar o al imponer una tasa de arancel. Lo que se obtuvo fue lo siguiente: el efecto sobre el consumo nacional de ambos bienes es ambiguo, pues depende del efecto que domine: el de riqueza o el de sustitución. La cantidad de bonos comercializables mantenida por la economía aumenta, y el capital y el trabajo disminuyen en respuesta a un arancel. En general, los efectos de un arancel son contraccionarios.

Como se observó, al incorporar más elementos a los modelos, se vuelven cada vez más complejos.

Para estudiar algunos aspectos que no tratan los modelos anteriores se debe extender el último modelo presentado en este trabajo para incluir capital comercializable y no comercializable simultáneamente. Para ello, la estructura de producción usaría tres factores (capital comercializable, no comercializable y trabajo) con dos sectores (comercializable y no comercializable).

Otra cosa importante es tener en cuenta que el comercio internacional es por naturaleza riesgoso, por lo que no se puede ignorar este aspecto. Los modelos presentados en este trabajo no tratan este caso, por lo que son muy limitados. Lo que faltaría es considerar una economía con crecimiento endógeno e incorporar una parte aleatoria que se interpretará como el riesgo. Para estudiar este tipo de problemas es necesario plantear el problema estocástico de control óptimo.

APÉNDICE A

Demostración del Principio de Pontryagin

Antes de empezar la discusión de las condiciones de optimización para un problema de control óptimo, se enunciarán algunos resultados de ecuaciones diferenciales, los cuales serán ocupados durante la discusión.

Teorema A.1. *Sea $A(t)$ una matriz $n \times n$, $G(t)$ un vector n-dimensional de funciones continuas a trozos definidas sobre un intervalo $[t_0, t_1]$, y y_0 un vector de dimensión n. Entonces si $\tau \in [t_0, t_1]$ existe un único vector continuamente diferenciable que es solución de la ecuación diferencial*

$$\dot{y} = A(t)y + G(t) \tag{A.1}$$

en el intervalo $[t_0, t_1]$ que satisface la condición

$$y(\tau) = y_0. \tag{A.2}$$

Sea $P(t)$ un vector n-dimensional, $A(t)$ como la descrita en el Teorema (A.1). El sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{P} = -A(t)^{\mathcal{T}} P \tag{A.3}$$

es llamado el sistema de ecuaciones diferenciales adjuntas a las ecuaciones (A.1). Por el Teorema (A.1) éste tiene una única solución para una condición inicial dada. Si $y(t)$ es solución de (A.1) y $P(t)$ es solución de (A.3),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(t)^{\mathcal{T}} y(t) &= \dot{P}(t)^{\mathcal{T}} y(t) + P(t)^{\mathcal{T}} \dot{y}(t) \\ &= -P(t)^{\mathcal{T}} A(t) y(t) + P(t)^{\mathcal{T}} A(t) y(t) + P(t)^{\mathcal{T}} G(t) \end{aligned} \tag{A.4}$$

Al integrar (A.4) para cualesquiera dos tiempos τ_1 y τ_2 se obtiene la siguiente fórmula

$$P(\tau_2)^{\mathcal{T}}y(\tau_2) - P(\tau_1)^{\mathcal{T}}y(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} P(t)^{\mathcal{T}}G(t)dt \tag{A.5}$$

Teorema A.2. *Sea ρ un vector variable en $\mathbb{R}^n$, M una matriz $n \times n$, y $x^\rho(t)$ la solución de $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$ en el intervalo $[t_0, t_1]$ correspondiente al control $u(t)$ con condición inicial*

$$x^\rho(t_0) = x_0 + M\rho + o(\rho). \tag{A.6}$$

Entonces

$$x^\rho(t) = x(t) + \delta x(t)\rho + o(t, \rho) \tag{A.7}$$

donde

$$\delta\dot{x}(t) = f_x(t, x(t), u(t))\delta x(t) \tag{A.8}$$

en $[t_0, t_1]$ con condición inicial

$$\delta x(t_0) = M. \tag{A.9}$$

A.1. Discusión preeliminar de la demostración del Principio de Pontryagin

Sea $\mathcal{G}$ el conjunto de parejas (x_0, u) tal que $u \in \mathcal{U}$ y existe una solución para $\dot{x} = f(t, x(t), x(t))$ en el intervalo $[t_0, t_1]$ que corresponde al control u con la condición inicial $x(t_0) = x_0$. Las trayectorias correspondientes a los pares de $\mathcal{G}$ no necesariamente satisfacen las condiciones finales $\phi_i(\vec{\mathbf{e}}) = 0$ para $i = 2, ..., k$. Considere la función

$$\mathcal{J} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

definida por

$$\mathcal{J}(x_0, u) = \phi(\vec{\mathbf{e}}).$$

Las componentes de $\mathcal{J}$ serán denotadas por $\mathcal{J} = (J_1, ..., J_k)$. En términos de la función $\mathcal{J}$ el problema de control óptimo se convierte en el problema de programación nolineal abstracto de encontrar el elemento de $\mathcal{G}$ tal que la primera componente $J_1(x_0, u)$ de $\mathcal{J}$ sea minimizada sujeto a que se cumplan las condiciones $J_i(x_0, u) = 0$; $i = 2, ..., k$.

La demostración del Principio de Pontryagin será dividida en tres partes. Primero las condiciones de optimalidad serán deducidas de un problema de programación nolineal abstracto. Después será demostrado que las hipótesis de este problema se cumplen para el problema de control óptimo. La última parte interpreta las condiciones obtenidas en el problema nolineal abstracto para obtener el Principio de Pontryagin.

A.2. Regla del Multiplicador para un problema de programación no lineal abstracto

Sea $\mathcal{G}$ un conjunto y $\mathcal{J}(s)$ una función

$$\mathcal{J} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

Considere el problema de encontrar un elemento s^* en el conjunto $\mathcal{G}$ tal que minimice $J_1(s)$ sobre el conjunto $\mathcal{G} \cap \{s : J_i = 0, i = 2, ..., k\}$.

Para desarrollar las condiciones de optimalidad para este problema se necesita una noción de diferencial que pueda ser obtenida considerando derivadas de $\mathcal{J}$ a lo largo de curvas mapeadas en el conjunto $\mathcal{G}$, es decir, se necesita una derivada direccional continua en una cono de direcciones de dimensión k.

Sea e^i, $i = 1, ..., k$ los vectores canónicos de $\mathbb{R}^k$. Sea C el conjunto convexo generado por $\left\{0, e^1, ..., e^k\right\}$. ηC denotará el conjunto convexo generado por $\left\{0, \eta e^1, ..., \eta e^k\right\}$. Considere la función $\zeta(\rho)$ definida sobre ηC para algún $\eta > 0$ al conjunto $\mathcal{G}$, es decir

$$\zeta : \eta C \longrightarrow \mathcal{G}$$

Diremos que una matriz $M_{k\times k}$ es la diferencial cónica de $\mathcal{J}(s)$ a lo largo de ζ si $\zeta(0) = s$ y para $\rho \in \eta C$

$$\mathcal{J}(\zeta(\rho)) = \mathcal{J}(s) + M\rho + o(\rho).$$

Sea D un cono convexo con vértice en cero contenido en $\mathbb{R}^k$. El conjunto D será llamado un cono de variaciones de $\mathcal{J}(s)$ si para cada conjunto linealmente independiente $\left\{d^1, ..., d^k\right\}$ de vectores en D existe algún $\eta > 0$ y una función $\zeta : \eta C \longrightarrow \mathcal{G}$ tal que la composición $\mathcal{J}(\zeta(\rho))$ es continua en ηC y la matriz M cuyas columnas son $d^1, ..., d^k$ es la diferencial cónica de $\mathcal{J}(s)$ a lo largo de ζ.

Teorema A.3. *Si s^* es una solución para el problema de programación nolineal abstracto y D es un* cono de variaciones *de $\mathcal{J}$ en s^*, entonces existe un vector λ no cero en $\mathbb{R}^k$ tal que $\lambda_1 \leq 0$ and $\lambda^T d \leq 0$ para todo $d \in D$.*

Demostración. Sea

$$L = \left\{y \in \mathbb{R}^k : y_1 < 0, y_i = 0, i = 2, ..., k\right\}. \tag{A.10}$$

Se demostrará que existe un hiperplano $\lambda^{\mathcal{T}} y = 0$, tal que $\lambda^{\mathcal{T}} y \geq 0$ si $y \in L$; $\lambda^{\mathcal{T}} y \leq 0$, si $y \in D$, es decir, tal hiperplano separa L y D.

Esto se demostrará por contradicción, es decir, suponiendo que L y D no están separados, como se verá esto contradice la hipótesis de que s^* una solución óptima. Si L y D no están separados, entonces el vector $(-1, 0, .., 0) \in L$ debe estar en el interior de D. Pues de no ser así, el Teorema de Separación para conjuntos convexos implicaría que existe un hiperplano que separa a L y D. Entonces existe una bola centrada en $(-1, 0, .., 0)$ contenida en D. Sea y_1 la primera componente de un vector $(y_1, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$. Considere el hiperplano $y_1 = -1$. En este hiperplano se forma un trasladado y conveniente conjunto de vectores con coordenadas positivas y de norma uno de dimensión $\mathbb{R}^k$, que está contenido en la intersección de la bola y el hiperplano, y además $(-1, 0, .., 0)$ está en el interior de este conjunto con la topología relativa del hiperplano. Se toman k vectores $d_1, ..., d_k$ desde el origen de $\mathbb{R}^k$ a los vértices del conjunto. Estos k vectores son linealmente independientes, están contenidos en D y todos tienen como primera componente -1.

Sea M la matriz cuyas coordenadas son $\{d_1, ..., d_k\}$. Δ denotará el conjunto convexo generado por $\{0, d_1, ..., d_k\}$. Como D es un cono de variaciones de $\mathcal{J}(s^*)$, existe un $\gamma > 0$ y una función $\zeta : \gamma C \longrightarrow \mathcal{G}$ tal que

$$\mathcal{J}(\zeta(\rho)) = \mathcal{J}(s^*) + M\rho + o(\rho) \tag{A.11}$$

La definición de M y Δ implican que la función $M : \gamma C \longrightarrow \gamma\Delta$. Como los vectores d^i son linealmente independientes, entonces M^{-1} existe. Sea ψ la función $\psi : \gamma\Delta \longrightarrow \mathbb{R}^k$ definida por

$$\psi(y) = \mathcal{J}(\zeta(M^{-1}y)) - \mathcal{J}(s^*).$$

Como M^{-1} mapea $\gamma\Delta$ en γC, la ecuación (A.11) implica que para $y \in \gamma\Delta$

$$|\psi(y) - y| \leq |o(M^{-1}y)|. \tag{A.12}$$

Sea $a = (-\frac{1}{2}, 0, ..., 0)$. Por construcción de Δ para algún ϵ, una bola $B(a, \epsilon)$ de radio ϵ con centro en a está en el interior de Δ. Se elige ϵ de tal manera que esto sea verdad. Como

$$\lim_{|M^{-1}y| \to 0} \frac{|o(M^{-1}y)|}{|M^{-1}y|} \quad = \quad 0$$

y para $\eta > 0$, $M^{-1}y$ mapea $\eta\Delta$ en ηC tal que $0 < \eta < \gamma$, por lo que si $y \in \eta\Delta$

$$|o(M^{-1}y)| < \epsilon\eta, \tag{A.13}$$

se escoge tal η.

Sea π la proyección de $\mathbb{R}^k$ sobre $\mathbb{R}^{k-1}$ definida por

$$\pi(y_1, ..., y_k) = (y_2, ..., y_k).$$

Se tiene que $\pi(a) = 0$. Como $B(a, \epsilon)$ está contenida en Δ, entonces $B(0, \eta\epsilon) \in \mathbb{R}^{k-1}$ está contenida en $\pi(\eta\Delta)$. Se define

$$\chi : \pi(\eta\Delta) \longrightarrow \mathbb{R}^{k-1}$$

tal que $\chi(y_2, ..., y_k) = (y_2, ..., y_k) - \pi(\psi(y_2, ..., y_k))$. Ahora, si $(y_2, ..., y_k) \in \pi(\eta\Delta)$, (A.12) y (A.13) implican que

$$\begin{aligned} |\chi(y_2, ..., y_k)| &= |\pi(\psi(y_2, ..., y_k)) - \pi(-\eta, y_2, ..., y_k)| \\ &\leq |\psi(-\eta, y_2, ..., y_k) - (-\eta, y_2, ..., y_k)| < \eta\epsilon. \end{aligned}$$

Como $\pi(\eta\Delta)$ contiene a $B(0, \eta\epsilon)$ en $\mathbb{R}^k$ se tiene que

$$\chi(\pi(\eta\Delta)) \subset \pi(\eta\Delta).$$

Como χ es continua, por el Teorema del punto fijo, se tiene que χ debe tener un punto fijo en $\pi(\eta\Delta)$. Entonces existe un punto $(\bar{y}_2, ..., \bar{y}_k)$ tal que

$$\chi(\bar{y}_2, ..., \bar{y}_k) - (\bar{y}_2, ..., \bar{y}_k) = -\pi(\psi(\bar{y}_2, ..., \bar{y}_k)) = 0.$$

Como $|\psi(-\eta, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_k) - (-\eta, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_k)| < \eta\epsilon < \eta$ y $\pi(\psi(-\eta, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_k))$, se debe tener que

$$\psi(-\eta, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_k) = (y_1, 0, ..., 0) \quad \text{con} \quad y_1 < 0.$$

Por esto y la definición de ψ implican que

$$J_1(\zeta(M^{-1}(-\eta, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_k))) - J_1(s^*) = y_1 < 0$$

donde

$$J_i(\zeta(M^{-1}(-\eta, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_k))) - J_i(s^*) = 0 \quad i = 2, ..., k$$

lo que contradice la optimalidad de s^*. ■

Teorema A.4. *El cono convexo generado por los vectores* (A.14), (A.17), (A.19) *y* (A.20) *descritos abajo es un cono generado por el mapeo* $\mathcal{J}(x_0, u) = \phi(\vec{\mathbf{e}})$ *en* (x_0, u)

$$\phi_{x_0}(\vec{\mathbf{e}})y + \phi_{x_1}(\vec{\mathbf{e}})\delta x(t_1) \tag{A.14}$$

donde y *es un elemento de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\delta x(t)$ *es la solución de*

$$\delta\dot{x}(t) = f_x(t, x(t), u(t))\delta x(t) \tag{A.15}$$

con

$$\delta x(t_0) = y \tag{A.16}$$
$$\phi_{x_1}(\vec{\mathbf{e}})\delta x(t_1) \tag{A.17}$$

donde $\delta x(t)$ *es una solución de* (A.15) *con condición de frontera dada para algún* $\tau \in (t_0, t_1]$ *y* $u \in U$ *por*

$$\delta \dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u) - f(\tau, x(\tau), u(\tau)). \tag{A.18}$$
$$\left[\phi_{t_0}(\vec{\mathbf{e}}) + \phi_{x_0}(\vec{\mathbf{e}}) f(t_0, x(t_0), u(t_0))\right]. \tag{A.19}$$
$$\left[\phi_{t_1}(\vec{\mathbf{e}}) + \phi_{x_1}(\vec{\mathbf{e}}) f(t_1, x(t_1), u(t_1))\right]. \tag{A.20}$$

A.3. Verificación del Principio de Pontryagin

Con ayuda de las secciones anteriores se pueden deducir las afirmaciones del Teorema (1.1). Por brevedad se escribirá $u^* = u$ y $x^* = x$. El Teorema (A.3) implica la existencia del vector no cero λ tal que $\lambda_1 \leq 0$ y

$$\lambda^{\mathcal{T}} d \leq 0 \tag{A.21}$$

para los vectores d en el cono convexo D generado por los vectores (A.14), (A.17), (A.19) y (A.20).

Aplicando la fórmula (A.5) para los tiempos τ y t_1 con $G(t) = 0$, $P(t)$ la solución de (1.7a) con la condición final (1.7d) y $y(t) = \delta x(t)$ solución de (A.15) con condición al tiempo τ dada por (A.18), se obtiene

$$P(\tau)^{\mathcal{T}} \left[f(\tau, x(\tau), u) - f(\tau, x(\tau), u(\tau))\right] - \lambda^{\mathcal{T}} \phi_{x_1}(\vec{\mathbf{e}})\delta x(t_1) \;\; = \;\; 0, \tag{A.22}$$

tomando en cuenta (A.21) con el vector (A.17) del Teorema (A.4) se tiene que

$$\lambda^{\mathcal{T}} \phi_{x_1}(\vec{\mathbf{e}})\delta x(t_1) \leq 0,$$

lo cual implica (1.7b) del Teorema (1.1).

Ahora aplicando la fórmula (A.5) para los tiempos t_0 y t_1 con $G(t) = 0$, $P(t)$ la solución de (1.7a) con la condición final (1.7d) y $y(t) = \delta x(t)$ solución de (A.15) con condición al tiempo t_1 dada por (A.16), se obtiene

$$P(t_0)^{\mathcal{T}} y - \lambda^{\mathcal{T}} \phi_{x_1}(\vec{\mathbf{e}})\delta x(t_1) \;\; = \;\; 0, \tag{A.23}$$

de (A.21) con el vector (A.14) del Teorema (A.4) se tiene que

$$\lambda^{\mathcal{T}} \left[\phi_{x_0}(\vec{\mathbf{e}}) y + \phi_{x_1}(\vec{\mathbf{e}})\delta x(t_1)\right] \leq 0. \tag{A.24}$$

Sumando (A.23) y (A.24) se obtiene

$$\left[P(t_0)^{\mathcal{T}} + \lambda^{\mathcal{T}}\phi_{x_0}(\vec{\mathbf{e}})\right] y \leq 0. \tag{A.25}$$

Como lo anterior debe cumplirse para todo $y \in \mathbb{R}^n$, se tiene la condición (1.7c) del Teorema (1.1)

$$P(t_0)^{\mathcal{T}} = -\lambda^{\mathcal{T}}\phi_{x_0}(\vec{\mathbf{e}}). \tag{A.26}$$

Por los vectores (A.20) del Teorema (A.4) se debe tener

$$\lambda^{\mathcal{T}}\left[\phi_{t_1}(\vec{\mathbf{e}}) + \phi_{x_1}(\vec{\mathbf{e}})f(t_1, x(t_1), u(t_1))\right] \leq 0, \tag{A.27}$$

tomando en cuenta (1.7d) se tiene la condición (1.7f) del Teorema (1.1)

$$P(t_1)^{\mathcal{T}} f(t_1, x(t_1), u(t_1)) = -\lambda^{\mathcal{T}}\phi_{t_1}(\vec{\mathbf{e}}).$$

Usando un argumento similar ahora con (A.19) del Teorema (A.4) y (A.26) se obtiene la condición (1.7e) del Teorema (1.1)

$$P(t_0)^{\mathcal{T}} f(t_0, x(t_0), u(t_0)) = \lambda^{\mathcal{T}}\phi_{t_0}(\vec{\mathbf{e}}).$$

La condición (1.7g) es implicada por las condiciones (1.7a), (1.7b) y (1.7e).

Sea $h(t,u) = P(t)^{\mathcal{T}} f(t, x(t), u)$ entonces,

$$\begin{aligned} h_t(t,u) &= \dot{P}(t)^{\mathcal{T}} f(t,x(t),u(t)) + P(t)^{\mathcal{T}} f_t(t,x(t),u(t)) + P(t)^{\mathcal{T}} f_x(t,x(t),u(t))\dot{x}(t) \\ &= -P(t)^{\mathcal{T}} f_x(t,x(t),u(t)) f(t,x(t),u(t)) + P(t)^{\mathcal{T}} f_t(t,x(t),u(t)) \\ &+ P(t)^{\mathcal{T}} f_x(t,x(t),u(t)) f(t,x(t),u(t)) = P(t)^{\mathcal{T}} f_t(t,x(t),u(t)). \end{aligned}$$

Al integrar lo anterior de t_0 a t se tiene

$$h(t,u) - h(t_0, u(t_0)) = \int_{t_0}^{t} P(s)^{\mathcal{T}} f_s(s, x(s), u(s)) ds,$$

sustituyendo (1.7e) en lo anterior, se obtiene lo esperado, es decir,

$$P(t)^{\mathcal{T}} f(t, x(t), u) = \lambda^{\mathcal{T}}\phi_{t_0}(\vec{\mathbf{e}}) + \int_{t_0}^{t} P(s)^{\mathcal{T}} f_s(s, x(s), u(s)) ds.$$

Glosario

- **Acumulación de capital:** Aumento en la cantidad de capital.
- **Arancel:** Impuesto que se grava sobre los productos importados.
- **Arbitraje:** Compra y venta simultánea con la finalidad de obtener una utilidad a partir de las diferencias de precios.
- **Balanza Comercial:** Diferencia entre el valor de las exportaciones de mercancías y el valor de las importaciones de mercancías durante un intervalo de tiempo.
- **Bien comercializable:** Bienes que compiten con los bienes extranjeros en los mercados nacionales o mundiales.
- **Bono:** Activo financiero que promete pagos conocidos durante un periodo.
- **Consumo:** Bienes y servicios comprados por los consumidores.
- **Cuenta corriente:** En la balanza de pagos, resumen de los pagos efectuados por un país al resto del mundo y recibidos por el resto del mundo.
- **Déficit:** Exceso del gasto sobre los ingresos.
- **Dinámica:** Variaciones de una o más variables económicas a lo largo del tiempo.
- **Dinero:** Activos financieros que pueden utilizarse directamente para comprar bienes.
- **Divisas:** Monedas extranjeras, fácilmente intercambiables.

- **Economía abierta:** Economía en la que se realiza el comercio de bienes y de capital con otras naciones.
- **Economía cerrada:** Economía en la que no se realiza el comercio de bienes y de capital con otras naciones.
- **Equilibrio general:** Situación en la que se iguala la oferta con la demanda en todos los mercados al mismo tiempo.
- **Estacionario:** Situación en la que el proceso o el modelo, que generan una serie de datos no está cambiando a lo largo del tiempo.
- **Error de predicción:** Diferencia entre el valor efectivo de una variable y una predicción de esa variable.
- **Expectativas racionales:** Formación de las expectativas basadas en predicciones racionales y no en meras extrapolaciones del pasado.
- **Exportaciones:** Compra de bienes y servicios nacionales por parte de extranjeros.
- **Función de producción:** Relación entre la cantidad de producción y las cantidades de factores utilizados para obtenerla.
- **Gasto del gobierno:** Bienes y servicios que compra el Estado.
- **Importaciones:** Compra de bienes y servicios extranjeros por parte de los consumidores, las empresas y el gobierno del país.
- **Inflación:** Aumento continuo del nivel general de precios.
- **Inversión:** Compra de bienes de capital (máquinas y plantas) por parte de las empresas.
- **Mercados financieros:** Mercados en los que se compran y venden activos financieros.
- **Modelo:** Estructura utilizada para estudiar e interpretar un fenómeno.
- **Relación de paridad descubierta de los tipos de interés:** Relación de arbitraje según la cual los bonos nacionales y los extranjeros deben tener la misma tasa esperada de rendimiento expresada en moneda nacional.
- **Rendimientos constantes a escala:** Proposición según la cual un aumento proporcional de todos los factores provoca una aumento proporcional de la producción.

- **Riqueza:** Valores acumulados del pasado.
- **Tasa de descuento subjetiva:** Valor actual de algún activo en algún momento en el futuro.
- **Tasa nominal de interés:** Tasa de interés observada en el mercado.
- **Tasa real de interés:** La tasa de interés nominal menos la inflación esperada.
- **Utilidad marginal:** Incremento en utilidad o satisfacción proveniente de un pequeño aumento incremental en la tasa de consumo.
- **Variable endógena:** Variable que depende de otras en un modelo y, por lo tanto se explica dentro de ese modelo.
- **Variable exógena:** Variable que no se explica dentro de un modelo, sino que se considera dada.

Bibliografía

[1] W. H. Fleming, R. W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, 1986.

[2] Z. Kozkowskiz, *Finanzas Internacionales*, Mc Graw Hill, 2000.

[3] P. R. Krugman, M. Obstfeld, *Economía Internacional: Teoría y Política*, Pearson Educación, 2001.

[4] H. Lomelí, B. Rumbos, *Métodos Dinámicos en Economía*, Thomson, 2003.

[5] N. G. Mankiw, *Macroeconomía*, Tercera Edición, Antoni Bosch, 1997.

[6] J. Sachs, F. D. Larrain, *Macroeconomía en la Economía Global*, Primera Edición, Prentice Hall, 1994.

[7] S. J. Turnovsky, *International Macroeconomic Dynamics*, Segunda Edición, Editorial MIT.