



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DEL ESTADO DE HIDALGO



INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y SISTEMAS

---

---

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE ESTRATEGIAS DE CONSENSO  
LÍDER-SEGUIDOR PARA UN SISTEMA MULTI-AGENTES

TESIS  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

**PRESENTA:**  
**JORGE ALBERTO AVILA CADENA**

ASESORES:  
DR. JESÚS PATRICIO ORDAZ OLIVER  
DR. FILIBERTO MUÑOZ PALACIOS

PACHUCA HGO., MÉXICO , ENERO/2019



Mineral de la Reforma, Hgo., a 07 de enero de 2019

Número de control: ICBI-AACyE/010/2019  
 Asunto: Autorización de impresión de tesis.

**M. EN C. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO**  
**DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH**

Por este conducto le comunico que el comité revisor asignado al Ing. Jorge Alberto Ávila Cadena, alumno de la Maestría en Ciencias en Automatización y Control, autoriza la impresión del proyecto de tesis titulado "Diseño e implementación de estrategias de consenso lider-seguidor para un sistema multi-agentes" en virtud de que se han efectuado las revisiones y correcciones pertinentes.

A continuación, se registran las firmas de conformidad de los integrantes del comité revisor.


Dr. Hugo Romero Trejo	Presidente	UAEH
Dr. Omar Arturo Domínguez R	Secretario	UAEH
Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver	Vocal 1	UAEH
Dr. Pablo Antonio López Pérez	Vocal 2	UAEH



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

Atentamente  
 "Amor, Orden y Progreso"



  
 Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver  
 Coordinador de la Maestría en Ciencias en Automatización y Control

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería  
 Área Académica de Computación y Electrónica

JPOO/APL

Ciudad del Conocimiento  
 Carretera Pachuca-Tulancingo km 4-5 Colonia  
 Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,  
 México, C.P. 42184  
 Teléfono: +52 (771) 71 720 00 ext. 2250, 2251  
 Fax 2109  
 aacye\_icbi@uaeh.edu.mx



*Lo bueno de la ciencia es que es cierta independientemente de si crees o no en ella.*  
- Neil deGrasse Tyson.

## **Agradecimientos**

A mis padres Maria Juana Cadena Flores y Edmundo Avila Juárez, por apoyarme cada día de mi vida, enseñarme, cuidarme y nunca dejar de creer en mí.

A mi hermano Fabian Edmundo Avila Cadena por su apoyo, por siempre acompañarme, motivarme y sobre todo por ser buenos hermanos.

A Brenda Esparza Chávez, la persona más especial en mi vida, muchas gracias por estar conmigo en retos como este, por tu apoyo y hacerme feliz, te amo.

A mis compañeros por compartir esta experiencia y ser mis aliados en este reto tan grande.

Agradezco a mis asesores de tesis Dr. Filiberto Muñoz Palacios y Dr. J. Patricio Ordaz Oliver, por su paciencia, por compartir su conocimiento y darme la oportunidad de crecer personal y profesionalmente.

Doy las gracias por todo su apoyo y atención, a mis sinodales Dr. Omar Arturo Domínguez Ramírez, Dr. Hugo Romero Trejo y Dr. Pablo Antonio López Pérez.

Gracias a CONACYT por el apoyo económico a través de la beca de maestría otorgada al CVU 774010.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
1.1. Justificación . . . . .	12
1.2. Objetivos . . . . .	13
1.2.1. Objetivo General . . . . .	13
1.2.2. Objetivos particulares . . . . .	13
1.3. Estado del Arte . . . . .	14
1.4. Planteamiento del problema . . . . .	14
1.5. Hipótesis . . . . .	15
1.6. Organización de la tesis . . . . .	15
<b>2. Modelado y Control del vehículo aéreo</b>	<b>16</b>
2.1. Modelo dinámico (formulación Euler-Lagrange) . . . . .	16
2.2. Control de vehículo aéreo . . . . .	24
2.2.1. Control de la Dinámica Rotacional . . . . .	24
2.2.2. Control de la Dinámica Traslacional . . . . .	25
<b>3. Estrategias de Consenso</b>	<b>28</b>
3.1. Teoría Básica de Gráficos . . . . .	27
3.2. Consenso Nominal . . . . .	29
3.3. Consenso basado en modos deslizantes . . . . .	33
3.3.1. Análisis de estabilidad . . . . .	35
<b>4. Resultados</b>	<b>39</b>
4.1. Resultados en simulación . . . . .	39
4.1.1. Simulación Consenso Nominal . . . . .	41
4.1.2. Simulación Consenso basado en modos deslizantes . . . . .	43
4.2. Plataforma Experimental . . . . .	44
4.2.1. Parrot Bebop Drone . . . . .	44
4.2.2. Cámaras Vicon . . . . .	45
4.2.3. Dispositivo de captura (Cámara Bonita B10) . . . . .	46
4.2.4. Dispositivo de comunicación y alimentación (POE) . . . . .	47
4.2.5. Estación de Control Terrestre . . . . .	47
4.2.6. Software . . . . .	48
4.2.7. ROS (Sistema Operativo de Robots) . . . . .	48
4.2.8. VICON Tracker . . . . .	50
4.2.9. Entorno de Trabajo . . . . .	50
4.3. Resultados Experimentales . . . . .	52
4.3.1. Introducción . . . . .	52
4.3.2. Resultados experimentales obtenidos con el control consenso nominal . . . . .	53
4.3.3. Resultados experimentales obtenidos con el control consenso basado en modos deslizantes. . . . .	56
4.4. Desempeño de las estrategias de control . . . . .	58
4.4.1. Criterio IAE . . . . .	58
4.4.2. Criterio ITAE . . . . .	59
<b>5. Conclusiones</b>	<b>60</b>

## Índice de figuras

1.	Dron Parrot y Camaras Vicon . . . . .	12
2.	Sistema multi-agente . . . . .	13
3.	Esquema de fuerzas del cuadirrotor, obtenido de [11] . . . . .	16
4.	Cuadirrotor en un sistema inercial, obtenido de [11]. . . . .	17
5.	Estructura del control aplicado . . . . .	23
6.	Diferentes formas de Grafos . . . . .	27
7.	Topología Dirigida . . . . .	39
8.	posición en eje X y posición en eje Y con el control consenso nominal . . . . .	41
9.	posición en eje Z con el control consenso nominal . . . . .	41
10.	posición en eje X y posición en eje Y con control consenso basado en modos deslizantes . . . . .	43
11.	posición en eje Z con control consenso basado en modos deslizantes . . . . .	43
12.	Parrot Bebop Drone . . . . .	45
13.	Cámaras Vicon(Bonita B10) y Marcadores retroreflejantes . . . . .	46
14.	Dispositivo de comunicación y alimentación (POE) . . . . .	47
15.	diagrama de conexión estación terrestre . . . . .	48
16.	Distribuciones de ROS . . . . .	49
17.	Diagrama general del entorno de trabajo . . . . .	51
18.	Laboratorio de pruebas experimentales . . . . .	51
19.	Topología de comunicación de las pruebas experimentales . . . . .	52
20.	Trayectoria de referencia . . . . .	53
21.	Trayectoria de UAV's por control consenso nominal. . . . .	54
22.	Señal de control nominal para la dinámica de X. . . . .	55
23.	Señal de control nominal para la dinámica de Y. . . . .	55
24.	Trayectoria de UAV's por control consenso basado en modos deslizantes. . . . .	56
25.	Señal de control consenso por modos deslizantes para la dinámica de X. . . . .	57
26.	Señal de control consenso por modos deslizantes para la dinámica de Y. . . . .	57

## Resumen

En este trabajo de investigación se presenta el desarrollo de dos técnicas de control cooperativo para un sistema multi-agente líder seguidor, basadas en la estrategia de consenso. Se controlan las dinámicas de traslación del vehículo aéreo no tripulado bajo estas estrategias. Las estrategias de control presentadas se analizan en simulación por Matlab para posteriormente desarrollarlas en experimentos en tiempo real para verificar la eficacia que tiene el control tipo consenso para sistemas multi-agente. Se ocupa el software Vicon tracker para realizar la captura del estado de los vehículos aéreos no tripulados, por medio del sistema ROS se realiza el procesamiento de los datos así como el cálculo de las estrategias de control. Se compara el resultado obtenido del control consenso nominal con la respuesta del control consenso basado en modos deslizantes, por medio del criterio IAE e ITAE.

## Abstract

This research paper presents the development of two cooperative control techniques for a multi-agent leader follower system, based on the consensus strategy. The dynamics of translation of the unmanned aerial vehicle are controlled under these strategies. The control strategies presented are analyzed in simulation by Matlab to later develop them in real-time experiments to verify the effectiveness of the consensus type control for multi-agent systems. The Vicon tracker software is used to capture the state of the unmanned aerial vehicles, through the ROS system the data processing is carried out, as well as the calculation of the control strategies. The result obtained from the nominal consensus control is compared with the response of the consensus control based on sliding modes, by means of criterion IAE and ITAE.

---

# Capítulo 1

## 1. Introducción

Este trabajo de tesis consiste en desarrollar e implementar a un sistema multi-agente (MAS) dos estrategias de control para que el sistema realice vuelo coordinado del tipo líder-seguidor. Un sistema multi-agente está conformado por un conjunto de agentes inteligentes que interactúan entre ellos. Los sistemas multi-agente pueden ser utilizados para resolver problemas que pueden ser difíciles o imposibles de dar una solución para un agente individual. El objetivo es que los agentes (vehículos aéreos no tripulados) seguidores puedan seguir a un agente líder sin la necesidad de que todos los vehículos tengan información de la posición del agente líder y sin la necesidad de que todos los agentes seguidores se comuniquen entre ellos. En esta tesis se desarrollaran dos estrategias de control para el vuelo en cooperación llamadas consenso líder-seguidor. Las estrategias de control son de tipo robusto, una de ella es un consenso nominal y la segunda es un consenso basado en modos deslizantes la cual agrega un control de tipo super twisting.

En cada una de las dos estrategias de control después de verificar el análisis de estabilidad, se realizarán varias simulaciones para verificar el funcionamiento de las estrategias de control. También se llevarán a cabo experimentos en interior para mostrar el funcionamiento en tiempo real de los controladores desarrollados. Para estos experimentos se hará uso de un conjunto de dos vehículos aéreos Bebop de la compañía Parrot y de un sistema de captura de movimiento marca Vicon, con la cual podremos obtener la posición de los vehículos en el espacio tridimensional.



Figura 1: Dron Parrot y Camaras Vicon

### 1.1. Justificación

Últimamente la investigación de control cooperativo para vehículos aéreos no tripulados ha tenido gran auge entre la comunidad científica. La razón principal de trabajar con equipos en cooperación es la *sinergia*, ya que se espera que el desempeño del sistema trabajando en cooperación supere a la suma del desempeño de un vehículo de forma individual como en [?].

Algunas de las aplicaciones que se tiene para el uso de sistemas multi-agente se encuentran las siguientes:

- Inteligencia de combate, vigilancia y reconocimiento.
- Identificación y seguimiento de objetivos en un terreno urbano con obstáculos.
- Agricultura de precisión recolectando grandes cantidades de datos en un periodo de tiempo más corto.
- Múltiples vehículos como red de sensores aéreos para aplicaciones de gestión de desastres.
- Cooperación de múltiples vehículos para transporte de carga.





Figura 2: Sistema multi-agente

## 1.2. Objetivos

El objetivo general y los objetivos específicos a alcanzar, son los siguientes:

### 1.2.1. Objetivo General

Diseñar e implementar en tiempo real dos estrategias líder-seguidor, para dotar a un sistema multi-agente con la capacidad de realizar vuelo coordinado, basadas en el algoritmo de consenso.

### 1.2.2. Objetivos particulares

- Diseñar una estrategia de consenso líder-seguidor que tome en cuenta la comunicación existente entre los agentes del sistema multi-agente.
- Diseñar una estrategia de consenso líder-seguidor robusto que tome en cuenta las perturbaciones externas del sistema multi-agente.
- Implementar en tiempo real las dos estrategias diseñadas en un sistema multi-agente de vehículos aéreos no tripulados.

---

### 1.3. Estado del Arte

Los algoritmos de consenso fueron desarrollados para dotar de comunicación a un equipo de agentes para realizar trabajo coordinado. Olfati-Saber y Murray fueron los que introdujeron el marco teórico para la resolución de problemas de consenso para sistemas dinámicos en [?] y [?], en el trabajo realizado en [?] se tuvo la visión de diseñar computadoras amorfas basadas en agentes para el procesamiento colaborativo de información en redes, más tarde se utilizó para algoritmos de evasión de obstáculos y agentes adversarios [?].

En años recientes se aumentó el interés de estudios del comportamiento de bandadas y enjambres [?], control de formación para sistemas multi-robot [?] - [?]. Existen las redes complejas en los sistemas de ingeniería, biológicos y sociales. Así como redes de energía, red biológica de osciladores [?], redes de sensores [?], [?], sistemas de vehículos autónomos no tripulados en red [?], [?], [?].

La motivación de este trabajo se basa en el uso de vehículos autónomos no tripulados principalmente vehículos aéreos para el trabajo colaborativo [?], en diferentes trabajos como en [?] ocupan estrategias de consenso adaptativo para operación de sistemas multi-agente en tiempo real y con presencia de conmutación en su red, existen trabajos donde realizan algoritmos difusos para MAS al igual que estrategias de control robustas debido a las perturbaciones existentes en cualquier sistema real [?], de este tipo de estrategias tomamos en cuenta el uso de modos deslizantes para sistemas multi-agente no lineales de segundo orden [?]. Igualmente se usó modos deslizantes integrales para sistemas multi-agente con perturbaciones mostrado en [?] y [?].

### 1.4. Planteamiento del problema

El problema que se pretende resolver es el siguiente: *¿Cómo dotar a un sistema multi-agente compuesto por vehículos aéreos de la capacidad de realizar vuelo coordinado, para que el sistema multi-agente pueda seguir una trayectoria definida por un líder asumiendo que no todos los vehículos seguidores tienen comunicación con el líder y entre ellos?*

---

## 1.5. Hipótesis

Las estrategias de control cooperativo son capaces de generar un sistema de seguimiento de trayectorias eficiente y considerando estrategias consenso robustas se compensara la existencia de perturbaciones así como dinámicas no modeladas.

## 1.6. Organización de la tesis

El resto de la tesis es organizada como sigue. En el Capítulo 2 se presenta el modelo dinámico de los vehículos aéreos por medio de la formulación de Euler-Lagrange y la estructura con la cual se implementarán las estrategias de control, realizando el análisis del control rotacional y el control traslacional. En el Capítulo 3 se presenta una introducción a la teoría algebraica de grafos, también se describe el algoritmo consenso y los dos diferentes tipos que se implementarán, el Consenso Nominal y Consenso basado en modos deslizantes así como la prueba de estabilidad de las dos estrategias de control. En el Capítulo 4 se presentan los resultados de los algoritmos de control en simulación, así como la plataforma experimental con la que se trabaja en esta tesis, también se presentan los resultados de las pruebas experimentales y para terminar el capítulo se realiza una comparación de las estrategias de control con base en dos criterios de desempeño (IAE e ITAE). Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo de tesis.

---

# Capítulo 2

## 2. Modelado y Control del vehículo aéreo

En este capítulo se realiza el modelo dinámico de un vehículo aéreo no tripulado tipo cuadrirotor considerando la formulación de Euler-Lagrange, la cual describe el comportamiento de un sistema dinámico en términos del trabajo y la energía almacenados en el sistema, en vez de las fuerzas y momentos de los miembros individuales involucrados como lo realiza la formulación de Newton-Euler. Además, se diseña una estructura de control PD (proporcional-derivativo) para regular la posición y velocidad de un vehículo aéreo utilizando el modelo dinámico descrito en este capítulo.

### 2.1. Modelo dinámico (formulación Euler-Lagrange)

Existen muchos factores que involucran el modelo dinámico de un cuadrirotor, como la flexibilidad de las alas, la dinámica interna del motor entre otras variables, las cuales resultan bastante complejas. Por lo tanto, es interesante considerar un modelo simplificado de una aeronave formado por un número mínimo de estados, pero conservando las principales características que deben tenerse en cuenta al diseñar las leyes de control para una aeronave real como se muestra en [?].

En un cuadrirotor, solo se puede variar la velocidad angular de los cuatro rotores para obtener los pares de control de cabeceo y balanceo.

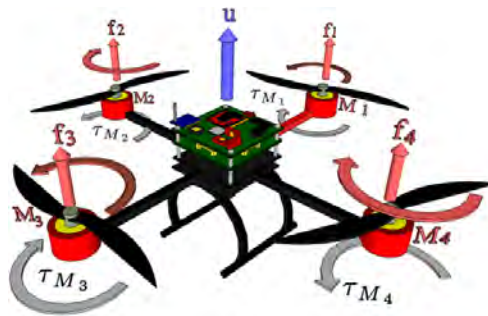


Figura 3: Esquema de fuerzas del cuadrirotor, obtenido de [?]

---

De la Figura ?? se observa que el motor  $M_i$  (con  $i = 1, \dots, 4$ ) produce la fuerza  $f_i$  y ya que los motores del cuadrirrotor solo giran en un solo sentido fijo las fuerzas  $f_i$  siempre serán positivas.

El modelo dinámico del cuadrirrotor se obtiene a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange, considerando al vehículo como un cuerpo rígido que va evolucionando en 3 dimensiones ( $X, Y, Z$ ) y que debido al efecto de sus cuatro motores presenta tres pares y una fuerza principal por lo que el vector de coordenadas generalizadas puede ser expresado como:

$$q = (\xi, \eta) = (x, y, z, \psi, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^6.$$

El vector de posición del centro de masa del cuadrirrotor relativo a un marco inercial fijo  $I$  se denota por  $\xi = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $x$  y  $y$  son coordenadas en el plano horizontal,  $z$  es la posición vertical y el vector  $\eta = (\psi, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3$  denota los ángulos de Euler, donde  $\psi$  es el ángulo de guiñada alrededor del eje  $Z$ ,  $\theta$  es el ángulo de cabeceo alrededor del eje  $Y$  y  $\phi$  es el ángulo de balanceo alrededor del eje  $X$ , como se aprecia en la figura ??.

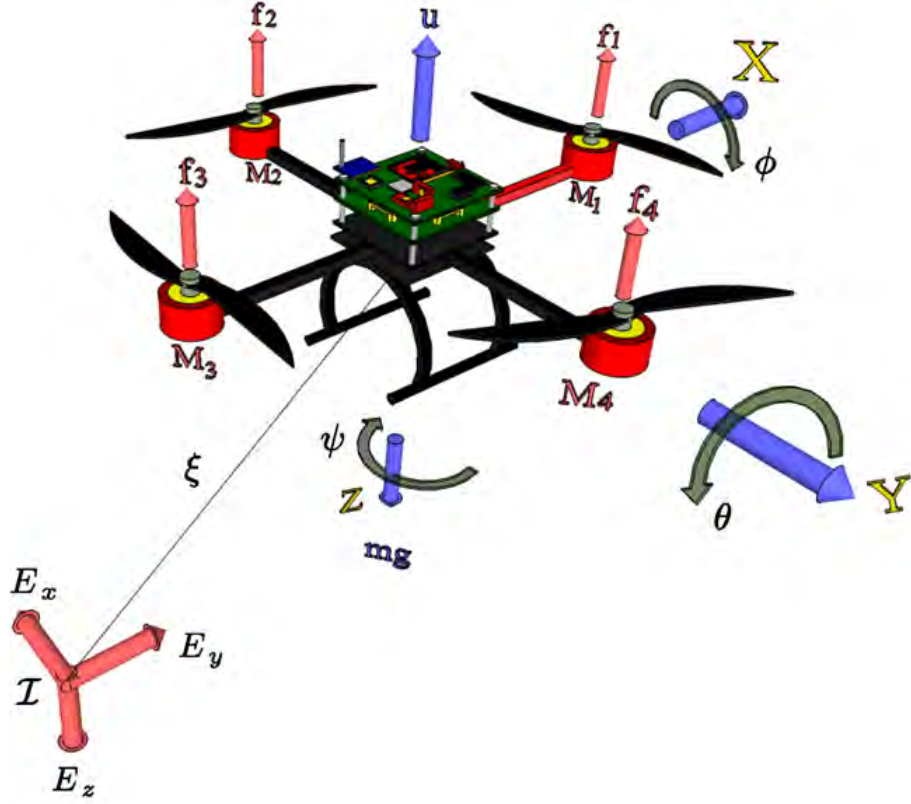


Figura 4: Cuadrirrotor en un sistema inercial, obtenido de [?].

Definiéndose el Lagrangiano como:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T_{trans} + T_{rot} - U,$$

donde la energía cinética de traslación, la energía cinética de rotación y la energía potencial están dadas por:

$$T_{trans} = \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} \quad (2.1)$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbb{I} \boldsymbol{\Omega} \quad (2.2)$$

$$U = mgz \quad (2.3)$$

$m$  denota la masa del vehículo,  $\mathbb{I}$  representa la matriz de inercia,  $\boldsymbol{\Omega}$  es el vector de velocidad angular,  $g$  es la constante de gravedad,  $z$  la altura del cuadrirrotor. El vector de velocidad angular

---

expresado respecto al marco de referencia del cuadrirrotor se puede relacionar con  $\dot{\eta}$  utilizando la relación estándar de cinemática [?], obteniendo el vector de velocidad angular como:

$$\mathbf{\Omega} = W_{\eta}\dot{\eta}, \quad (2.4)$$

donde

$$W_{\eta} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & 0 & 1 \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ \cos(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \end{bmatrix}$$

sustituyendo (??) en (??) se obtiene:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T W_{\eta}^T \mathbb{I} W_{\eta} \dot{\eta} \quad (2.5)$$

definiéndose

$$\mathbb{J} = \mathbb{J}(\eta) = W_{\eta}^T \mathbb{I} W_{\eta},$$

---

donde

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix},$$

$I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  y  $I_{zz}$  representan la inercia del cuadrirrotor sobre el eje  $X, Y$  y  $Z$  respectivamente. Finalmente sustituyendo  $\mathbb{I}$  en (??), la energía cinética de rotación se puede escribir como:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \mathbb{I} \dot{\eta}$$

por lo tanto, la matriz  $\mathbb{I}$  actúa como la matriz de inercia para toda la energía cinética de rotación del cuadrirrotor, expresada directamente en términos de las coordenadas generalizadas  $\eta$ .

Con las definiciones previas de la energía cinética y potencial para el vehículo cuadrirrotor, el modelo dinámico del vehículo se obtiene utilizando la ecuación de Euler-Lagrange con fuerzas externas generalizadas siguiente

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \begin{bmatrix} F_{\xi} \\ \tau \end{bmatrix},$$

donde  $F_{\xi} = R \hat{F} \in \mathbb{R}^3$  es la fuerza de traslación aplicada al cuadrirrotor debido al empuje,  $\tau \in \mathbb{R}^3$  representa los momentos de yaw, pitch y roll y  $R$  denota la matriz de rotación  $R(\psi, \theta, \phi)$  que representa la orientación del vehículo en relación con un marco inercial fijo:

$$R = \begin{bmatrix} c_{\theta} c_{\psi} & c_{\psi} s_{\theta} s_{\phi} - c_{\phi} s_{\psi} & s_{\phi} s_{\psi} + c_{\phi} c_{\psi} s_{\theta} \\ c_{\theta} s_{\psi} & c_{\phi} c_{\psi} + s_{\theta} s_{\phi} s_{\psi} & c_{\phi} s_{\theta} s_{\psi} - c_{\psi} s_{\phi} \\ -s_{\theta} & c_{\theta} s_{\phi} & c_{\theta} c_{\phi} \end{bmatrix}$$

donde  $c_{\theta}$  representa  $\cos(\theta)$  y  $s_{\theta}$  para  $\sin(\theta)$  y  $\hat{F}$  es representado por:

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U \end{bmatrix}$$



---

donde  $U$  es la entrada de control principal y se puede expresar como:

$$U = \sum_{i=1}^4 f_i$$

$f_i$  representa la fuerza producida por cada motor y se denota como  $f_i = k_i \omega_i^2$  donde  $k_i$  es una constante y  $\omega_i$  corresponde a la velocidad angular del  $i$ -ésimo motor. El vector de torques generalizados está dado por:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\psi \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \tau M_i \\ ((f_1 + f_2) - (f_3 + f_4)) l \\ ((f_2 + f_3) - (f_1 + f_4)) l \end{bmatrix},$$

donde  $l$  es la distancia entre el motor y el centro de gravedad, y  $\tau M_i$  es el momento producido por el motor  $M_i$  alrededor del centro de gravedad del cuadrirrotor.

Como el Lagrangiano no contiene términos cruzados en la energía cinemática que combina  $\xi$  con  $\eta$ , la ecuación de Euler-Lagrange se puede dividir en dinámicas para las coordenadas  $\xi$  y  $\eta$ . La ecuación de Euler-Lagrange para el movimiento de traslación esta dada por

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_{tras}}{\partial \dot{\xi}} \right] - \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{tras}}{\partial \xi} \right) = F_\xi$$

con lo cual se obtiene

$$m\ddot{\xi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = F_\xi.$$

---

De manera similar para las coordenadas de  $\eta$  se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_{rot}}{\partial \dot{\eta}} \right] - \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{rot}}{\partial \eta} \right) = \tau, \quad (2.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{rot}}{\partial \dot{\eta}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}} \left( \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \dot{\eta}^T \mathbb{J} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\eta}} + \frac{\partial \dot{\eta}^T}{\partial \dot{\eta}} \mathbb{J} \dot{\eta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial \dot{\eta}^T}{\partial \dot{\eta}} \mathbb{J} \dot{\eta} \right) \\ &= \frac{\partial \dot{\eta}^T}{\partial \dot{\eta}} \mathbb{J} \dot{\eta} \end{aligned} \quad (2.7)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{rot}}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

sustituyendo (??) y (??) en (??) la ecuación de Euler-Lagrange para el movimiento de rotación se puede escribir como:

$$\tau = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \dot{\eta}^T}{\partial \dot{\eta}} \mathbb{J} \dot{\eta} \right] - \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}) \right)$$

simplificando se obtiene

$$\tau = \frac{\partial \dot{\eta}^T}{\partial \dot{\eta}} (\mathbb{J} \ddot{\eta} + \dot{\mathbb{J}} \dot{\eta}) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\eta}^T}{\partial \dot{\eta}} \right) \mathbb{J} \dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta})$$

por lo que se obtiene:

$$\tau = \mathbb{J} \ddot{\eta} + \dot{\mathbb{J}} \dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}) \quad (2.9)$$

La matriz de Coriolis que contiene los términos giroscópicos y centrífugos asociados con  $\eta$  se define de la siguiente forma como en [?],[?]

$$\mathbb{C}(\eta, \dot{\eta}) = \dot{\mathbb{J}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J})$$


---

---

se reescribe (??) como:

$$\tau = \mathbb{J}\ddot{\eta} + \mathbb{C}(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} \quad (2.10)$$

ahora reescribimos (??) como:

$$\mathbb{J}\dot{\eta} = \tau - \mathbb{C}(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}. \quad (2.11)$$

Definiendo la ley de control  $\tau$

$$\tau = \mathbb{C}(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + \mathbb{J}\tilde{\tau}$$

al sustituir la ley de control en (??) se tiene:

$$\ddot{\eta} = \tilde{\tau},$$

donde el nuevo vector para la entrada  $\tilde{\tau}$  está dado por:

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_\psi \\ \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\phi \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Finalmente, el conjunto de ecuaciones que describen el modelo dinámico del vehículo cuadrirrotor están dadas por

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} (\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi)) U, \quad (2.13)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} (\cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi)) U, \quad (2.14)$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} (\cos(\phi)\cos(\theta)) U - g, \quad (2.15)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi, \quad (2.16)$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta, \quad (2.17)$$

$$\ddot{\psi} = \tilde{\tau}_\psi. \quad (2.18)$$

---

Debido a la arquitectura del vehículo que se ocupara en este trabajo es necesario seguir una estructura determinada para implementar cualquier estrategia de control. La estructura es la siguiente:

- Se realiza el control a las dinámicas de altura.
- Se crea un control virtual para las dinámicas de  $X$  y  $Y$ .
- Se calculan los valores  $\phi_d$  y  $\theta_d$  (phi deseada y theta deseada respectivamente).
- Implementación de control para las dinámicas de  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ .

Se explicará a detalle cada una de las partes de la estructura, tomando en cuenta esta forma de implementar el control se propone una trayectoria de referencia para las dinámicas de  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  y  $\psi$  ya que  $\phi_d$  y  $\theta_d$  son calculadas en línea dentro de la estructura de control.

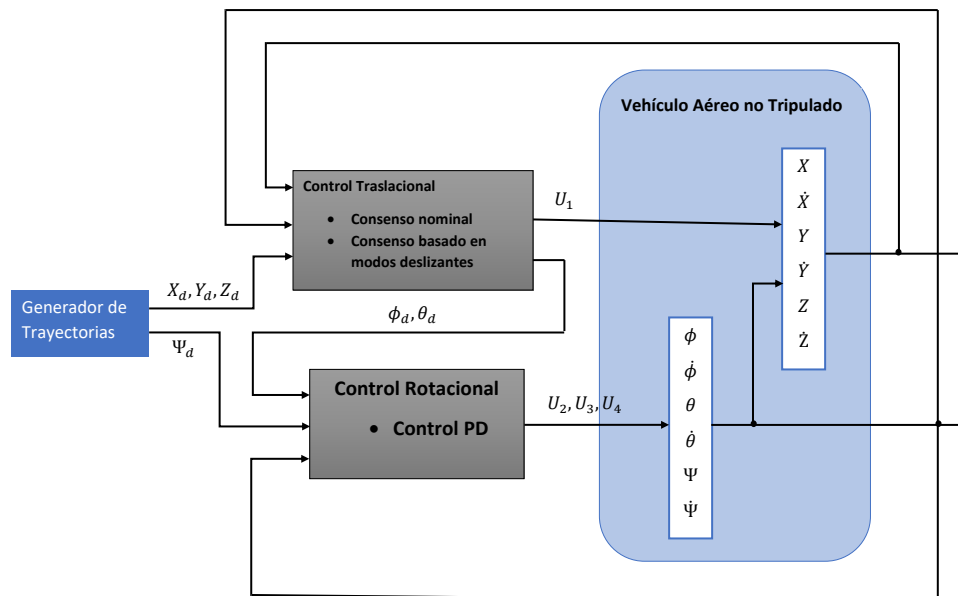


Figura 5: Estructura del control aplicado

---

## 2.2. Control de vehículo aéreo

### 2.2.1. Control de la Dinámica Rotacional

Definiendo los errores para los ángulos de roll, pitch y yaw como:

$$e_\phi = \phi - \phi_d$$

$$\dot{e}_\phi = \dot{\phi} - \dot{\phi}_d$$

$$e_\theta = \theta - \theta_d$$

$$\dot{e}_\theta = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d$$

$$e_\psi = \psi - \psi_d$$

$$\dot{e}_\psi = \dot{\psi} - \dot{\psi}_d,$$

donde  $e_\phi, e_\theta, e_\psi$  son los errores de posición de los ángulos para roll, pitch y yaw y  $\dot{e}_\phi, \dot{e}_\theta, \dot{e}_\psi$  denotan los errores de velocidad de los ángulos para roll, pitch y yaw.

Considere la dinámica para el ángulo de roll dada por:

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi. \quad (2.19)$$

Se propone la siguiente compensación

$$\tilde{\tau}_\phi = -kd_\phi \dot{e}_\phi - kp_\phi e_\phi \quad (2.20)$$

sustituyendo (2.20) en la dinámica (2.19) se obtiene la siguiente dinámica del error

$$\ddot{e}_\phi + kd_\phi \dot{e}_\phi + kp_\phi e_\phi = 0,$$

eligiendo  $kp_\phi$  y  $kd_\phi > 0$ , la dinámica es asintóticamente estable.

La misma metodología es aplicada para las dinámicas de pitch y yaw, obteniéndose:

$$\tilde{\tau}_\theta = -kd_\theta \dot{e}_\theta - kp_\theta e_\theta.$$

$$\tilde{\tau}_\psi = -kd_\psi \dot{e}_\psi - kp_\psi e_\psi.$$

---

### 2.2.2. Control de la Dinámica Traslacional

**Control de Altura.** Para realizar este control se propone una referencia para la altura del UAV y con esta formar una ecuación de error de altura y de su velocidad

$$\begin{aligned}e_z &= z - z_d \\ \dot{e}_z &= \dot{z} - \dot{z}_d,\end{aligned}\tag{2.21}$$

donde  $e_z$ ,  $\dot{e}_z$  son el error de altura y error de su velocidad,  $z$ ,  $\dot{z}$  son la posición de altura y su velocidad real del UAV y  $z_d$ ,  $\dot{z}_d$  son las referencias de altura y velocidad.

Considere la dinámica para la posición en el eje Z (??) se propone la siguiente compensación

$$U = \frac{m}{\cos(\phi)\cos(\theta)} (g - kd_z\dot{e}_z - kp_z e_z).\tag{2.22}$$

Sustituyendo (??) en la dinámica (??) se obtiene la siguiente dinámica del error

$$\ddot{e}_z + kd_z\dot{e}_z + kp_z e_z = 0,$$

eligiendo  $kp_z$  y  $kd_z > 0$ , la dinámica es asintóticamente estable.

**Control horizontal (eje X,Y).** Teniendo el control para  $z$  se genera las ecuaciones de error para  $x$  y  $y$

$$\begin{aligned}e_x &= x - x_d \\ \dot{e}_x &= \dot{x} - \dot{x}_d \\ e_y &= y - y_d \\ \dot{e}_y &= \dot{y} - \dot{y}_d,\end{aligned}$$

donde  $e_x$ ,  $\dot{e}_x$ ,  $e_y$ ,  $\dot{e}_y$  son el error de posición en  $x$ ,  $y$  y el error de sus velocidades,  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $y$ ,  $\dot{y}$  son las posiciones en  $x$  y  $y$  y sus velocidades reales del UAV y  $x_d$ ,  $\dot{x}_d$ ,  $y_d$ ,  $\dot{y}_d$  son las referencias de la posición en  $x$ ,  $y$  y sus velocidades.

---

Para proponer el control virtual para  $x$  y  $y$  se parte del modelo dinámico de dichos estados

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{m} (\cos(\theta)\sin(\phi)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi)) U \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} (\cos(\theta)\sin(\phi)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi)) U\end{aligned}\tag{2.23}$$

se realiza el cambio de variable siguiente:

$$\begin{aligned}\mu_x &= \frac{1}{m} (\cos(\theta)\sin(\phi)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi)) U \\ \mu_y &= \frac{1}{m} (\cos(\theta)\sin(\phi)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi)) U\end{aligned}\tag{2.24}$$

podemos reescribir la ecuación (??) de la forma:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \mu_x \\ \ddot{y} &= \mu_y.\end{aligned}$$

Se propone el control virtual  $\mu_x$  y  $\mu_y$  como:

$$\begin{aligned}\mu_x &= -kd_x\dot{e}_x - kp_x e_x \\ \mu_y &= -kd_y\dot{e}_y - kp_y e_y\end{aligned}\tag{2.25}$$

para obtener los ángulos deseados  $\phi_d$  y  $\theta_d$ , la ecuación (??) se reescribe de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ \sin(\psi) & -\cos(\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} \frac{U}{m}\tag{2.26}$$

con esta estructura se puede despejar el valor de  $\phi$  y  $\theta$  para obtener dos ecuaciones que calculen los ángulos deseados  $\phi_d$  y  $\theta_d$ .

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \cos(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ \sin(\psi) & -\cos(\psi) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix} \frac{m}{U} \\ \phi_d &= \arcsin \left\{ (\sin(\psi)\mu_x - \cos(\psi)\mu_y) \left( \frac{m}{U} \right) \right\} \\ \theta_d &= \arcsin \left\{ \frac{(\cos(\psi)\mu_x + \sin(\psi)\mu_y) \left( \frac{m}{U} \right)}{\cos(\phi_d)} \right\}.\end{aligned}\tag{2.27}$$

---

# Capítulo 3

## 3. Estrategias de Consenso

En este capítulo se describen las estrategias de control diseñadas a la plataforma experimental previamente mostrada en el Capítulo 2. Para realizar este tipo de algoritmo de control es necesario primero conocer la teoría básica de gráficos.

### 3.1. Teoría Básica de Gráficos

**Definición 1.** (Gráfico de Formación): un gráfico de formación  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$  describe la comunicación entre los agentes, consiste en un conjunto de vértices  $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$  correspondiente a cada uno de los agentes del sistema multi-agente y un conjunto de aristas  $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ . Una arista es un par ordenado  $(i, j) \in \mathcal{E}$  si el agente  $j$  tiene comunicación con el agente  $i$  y puede ser directamente suministrado con la información de él. Existen dos tipos de grafos, las dirigidas y las no dirigidas. Cuando en un grafo sus aristas son representadas con flechas quiere decir que es un grafo dirigido, en estos tipos de grafos la cola de la flecha representa el agente que entrega información y la punta de la flecha apunta al agente que recibe información. En un grafo no dirigido sus aristas son representadas con líneas continuas sin punta de flecha y esto es porque en este tipo de grafo las aristas de comunicación son bidireccionales lo que quiere decir que la información se transmite entre los dos agentes unidos por la arista de manera simultanea.

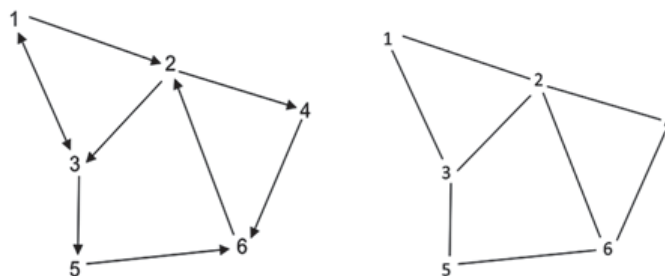


Figura 6: Diferentes formas de Grafos



---

**Definición 2.** (Matriz de Adyacencia) La matriz de adyacencia  $\mathcal{A}_d = [a_{ij}]$  o también llamada matriz de conectividad es definida como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{cualquier otra} \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $a_{ij}$  representa la existencia de una arista que comunica al nodo  $i$  con el nodo  $j$ . En un grafo no dirigido la matriz de adyacencia es simétrica tal que  $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}_d^T$ .

**Definición 3.** (Matriz de grados de entrada): La matriz de grados de entrada (in-degree), se define como la suma de los elementos de la  $i$  –ésima fila de la matriz de adyacencia  $\mathcal{A}_d$ , tal que

$$\mathcal{D} = [d_{ii} \in \mathbb{R}^{N \times N}], \quad (3.2)$$

con  $d_{ii} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ .

**Definición 4.** (Matriz de grados de salida): La matriz de grados de salida (out-degree), se define como la suma de los elementos de la  $i$  –ésima columna de la matriz de adyacencia  $\mathcal{A}_d$ , tal que

$$\mathcal{D}^0 = [d_{ii}^0 \in \mathbb{R}^{N \times N}], \quad (3.3)$$

con  $d_{ii}^0 = \sum_{j=1}^N a_{ji}$ .

**Definición 5.** (Matriz Laplaciana): La matriz Laplaciana  $\mathbf{L}$  asociada al gráfico de formación  $\mathcal{G}$  esta dada por:

$$\mathbf{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{D} - \mathcal{A}_d \quad (3.4)$$

una propiedad de la matriz Laplaciana es que la suma de todas sus filas es igual a cero.

---

### 3.2. Consenso Nominal

En esta sección se presenta el desarrollo de una estrategia de consenso para un sistema lineal, como el descrito en la ecuación (??). Este tipo de estrategia se utiliza debido a que el vehículo cuadrirrotor puede ser linealizado alrededor de un punto de operación. Considere un problema de seguimiento cooperativo con  $N$  idénticos agentes seguidores y un agente líder. Las dinámicas del  $i$ -ésimo agente seguidor esta dada por:

$$\dot{x}_i = \mathbf{A}x_i + \mathbf{B}u_i, \quad (3.5)$$

donde  $x_i \in \mathbb{R}^n$  es el estado,  $u_i \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control, e  $i = \{1, 2, \dots, N\}$ . La dinámica del agente líder es la siguiente:

$$\dot{x}_0 = \mathbf{A}x_0, \quad (3.6)$$

donde  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es el estado del agente líder.

El objetivo del problema de seguimiento cooperativo es diseñar un control para cada agente seguidor, haciendo que todas las trayectorias de los agentes seguidores sigan la trayectoria del agente líder.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ((x_i(t) - h_i) - x_0(t)) = 0, \quad \forall i \in N \quad (3.7)$$

donde  $h_i$  representa la formación de los agentes respecto a su posición. Se define el error de seguimiento para el  $i$ -ésimo agente:

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}((x_j - h_j) - (x_i - h_i)) + g_i(x_0 - (x_i - h_i)). \quad (3.8)$$

La ley de control para cada agente es propuesta de la siguiente manera:

$$u_i = c\mathbf{K}\epsilon_i, \quad (3.9)$$

donde  $c$  es la ganancia de acoplamiento y  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de realimentación.

---

La dinámica en lazo cerrado del  $i$ -ésimo agente seguidor está dada por:

$$\dot{x}_i = \mathbf{A}x_i + c\mathbf{BK} \left( \sum_{j=1}^N a_{ij}((x_j - h_j) - (x_i - h_i)) + g_i(x_0 - (x_i - h_i)) \right) \quad (3.10)$$

Las dinámicas globales del sistema en lazo cerrado están dadas por:

$$\dot{x} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - c(\mathbf{L} - \mathbf{G}) \otimes \mathbf{BK})x + (c(\mathbf{L} + \mathbf{G}) \otimes \mathbf{BK})\underline{x}_0, \quad (3.11)$$

donde el estado global  $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{nN}$  es la concatenación de los vectores de estado locales y  $\underline{x}_0 = \text{col}(x_0, x_0, \dots, x_0) \in \mathbb{R}^{nN}$  es el vector columna de los estados del agente líder,  $\otimes$  representa el producto de Kronecker,  $\mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$  es una matriz identidad y  $\mathbf{G} = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_N)$  es la matriz diagonal de ganancias  $g_i$ , la cual describe la conexión entre el  $i$ -ésimo agente seguidor y el agente líder.

De la ecuación (??) la matriz del sistema y la matriz de entrada de control son definidas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - c(\mathbf{L} - \mathbf{G}) \otimes \mathbf{BK} \\ \mathbf{B}_c &= c(\mathbf{L} + \mathbf{G}) \otimes \mathbf{BK}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Se propone el error de desacuerdo respecto al agente líder y los agentes seguidores como:  $\delta_i = (x_i - h_i) - x_0$  y el vector de desacuerdo global es:

$$\delta = \text{col}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N) = (x - h) - \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^{nN} \quad (3.13)$$

Como se puede ver el problema de seguimiento cooperativo se resuelve si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 0$ . Las dinámicas del error de desacuerdo son:

$$\dot{\delta} = \dot{x} - \dot{\underline{x}}_0 = \mathbf{A}_c \delta. \quad (3.14)$$

Para desarrollar el análisis de estabilidad de la dinámica de error (??), se introducen los siguientes Lemmas.

**Lema 1.** La matriz  $\mathbf{L} + \mathbf{G}$  es no singular y definida positiva [?].

**Lema 2.** Sean  $\lambda_i, i \in 1, \dots, N$  los valores propios de  $\mathbf{L} + \mathbf{G}$ , que pueden o no ser distintos.

---

Entonces, el sistema (??) es asintóticamente estable si y solo si todas las matrices

$$\mathbf{A} - c(\lambda_i \mathbf{B}\mathbf{K}), \quad i \in 1, 2, \dots, N \quad (3.15)$$

son asintóticamente estables.

*Prueba.* El estado del sistema (??) es asintóticamente estable si y solo si  $\mathbf{A}_c$  es Hurwitz. Existe una matriz no singular  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , tal que

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{G})\mathbf{S},$$

donde  $\mathbf{J}$  es una matriz diagonal a bloques llamada matriz de Jordan. La transformación de similaridad de la matriz  $\mathbf{A}_c$  da una matriz diagonal a bloques como:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_c &= (\mathbf{S} \otimes \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{A}_c (\mathbf{S} \otimes \mathbf{I}_N) \\ \bar{\mathbf{A}}_c &= (\mathbf{S}^{-1} \otimes \mathbf{I}_N) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}) (\mathbf{S} \otimes \mathbf{I}_N) - (\mathbf{S}^{-1} \otimes \mathbf{I}_N) (c(\mathbf{L} + \mathbf{G}) \otimes \mathbf{B}\mathbf{K}) (\mathbf{S} \otimes \mathbf{I}_N) \\ \bar{\mathbf{A}}_c &= (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}) - c\mathbf{J} \otimes \mathbf{B}\mathbf{K} \end{aligned}$$

La matriz  $\bar{\mathbf{A}}_c$  es compuesta por:

$$\bar{\mathbf{A}}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - c\lambda_1 \mathbf{B}\mathbf{K} & & & 0 \\ & \mathbf{A} - c\lambda_2 \mathbf{B}\mathbf{K} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{A} - c\lambda_N \mathbf{B}\mathbf{K} \end{bmatrix}$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  son las entradas diagonales de  $\mathbf{J}$ . La matriz  $\mathbf{A}_c$  es Hurwitz si y solo si todas las entradas diagonales  $\mathbf{A} - c(\lambda_i \mathbf{B}\mathbf{K})$ ,  $i \in 1, \dots, N$  son Hurwitz.

Nos falta encontrar la matriz  $\mathbf{K}$  que garantice que cada uno de los subsistemas  $\mathbf{A} - c(\lambda_i \mathbf{B}\mathbf{K})$  sean estables, y para ello se utilizará el enfoque de diseño local de Riccati y una apropiada elección de la ganancia de acoplamiento  $c$ .

Se propone la ganancia  $\mathbf{K}$  del control nominal como:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (3.16)$$

donde  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y definida positiva,  $P$  es la única solución definida positiva de la ecuación

---

algebraica de Riccati (ARE).

$$0 = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}, \quad (3.17)$$

donde  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva.

Entonces las dinámicas del error de desacuerdo ?? es asintoticamente estable si la ganancia de acoplamiento cumple con:

$$c \geq \frac{1}{2 \min_{i \in N} \text{Re}(\lambda_i)} \quad (3.18)$$

Donde  $\lambda_i$  ( $i \in N$ ) es el  $i$ -ésimo valor propio asociado a la matriz  $\mathbf{L} + \mathbf{G}$ . Entonces se resuelve el problema del seguimiento cooperativo [?].

*Prueba.* Definiendo los valores propios  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  como  $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$ , entonces, del lema 1 tenemos que  $\alpha_1 > 0 \forall i \in N$ . Considere la siguiente función candidata a Lyapunov para el error de desacuerdo

$$V_1 = \delta_1^T \mathbf{P} \delta_1, \quad (3.19)$$

donde  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . La derivada temporal de (??) es:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 2\delta_1^T \mathbf{P} (\mathbf{A} - c\lambda_1 \mathbf{B} \mathbf{K}) \delta_1 \\ \dot{V}_1 &= \delta_1^T \mathbf{P} (\mathbf{A} - c\lambda_1 \mathbf{B} \mathbf{K}) \delta_1 + \delta_1^T (\mathbf{A} - c\lambda_1 \mathbf{B} \mathbf{K})^* \mathbf{P} \delta_1 \end{aligned}$$

donde  $(\mathbf{A} - c\lambda_1 \mathbf{B} \mathbf{K})^*$  es la matriz transpuesta conjugada de  $(\mathbf{A} - c\lambda_1 \mathbf{B} \mathbf{K})$ . Si la ganancia  $\mathbf{K}$  es elegida como (??), entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \delta_1^T ((\mathbf{A} - c\lambda_1 \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P})^* \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - c\lambda_1 \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P})) \delta_1 \\ \dot{V}_1 &= \delta_1^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}) \delta_1 \\ \dot{V}_1 &= \delta_1^T (-\mathbf{Q} - (2c \text{Re}(\lambda_1) - 1) \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}) \delta_1 \end{aligned}$$

donde  $\text{Re}(\lambda_1)$  representa la parte real de  $\lambda_1$ . Sustituyendo la ganancia de control obtenemos

$$\dot{V}_1 = -\delta_1^T (-\mathbf{Q} + (2c \text{Re}(\lambda_1) - 1) \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \delta_1 \quad (3.20)$$

debido a que se eligió que las matrices  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  son definidas positivas, se puede concluir de la ecuación (??) que, si se sostiene que

---


$$c_1 \geq \frac{1}{2\text{Re}(\lambda_1)}$$

entonces  $\dot{V}_1 < 0$ , lo cual indica que el error  $\delta_1$  converge asintóticamente cuando  $t \rightarrow \infty$ .

De la misma forma para el  $i$ -ésimo error de desacuerdo, se obtiene una condición similar para cada valor de la ganancia de acoplamiento, de la forma

$$c_i \geq \frac{1}{2\text{Re}(\lambda_i)}.$$

Finalmente, para elegir una sola constante para garantizar estabilidad en el sistema en general, la ganancia  $c$  viene dada por:

$$c \geq \frac{1}{2\min_{i \in N} \text{Re}(\lambda_i)}$$

### 3.3. Consenso basado en modos deslizantes

En la sección anterior se desarrollo una estrategia de consenso basada en una aproximación lineal del modelo dinámico del vehículo cuadrirrotor. Sin embargo, este tipo de vehículos es no lineal, además de ser subactuado. Para tomar en cuenta las dinámicas no lineales, así como perturbaciones externas que puedan afectar el desempeño del sistema multi-agente, en esta sección se presenta el diseño de una estrategia de consenso líder-seguidor basada en modos deslizantes. Debido a que la dinámica del vehículo cuadrirrotor puede ser analizada utilizando subsistemas de segundo orden, la estrategia del consenso utilizando modos deslizantes se presenta de forma general para un sistema de segundo orden.

Considere que el agente líder tiene la dinámica

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= v_0 \\ \dot{v}_0 &= u_0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  y  $v_0 \in \mathbb{R}^m$  representa la posición y velocidad del agente líder respectivamente, y  $u_0$  representa la entrada de control del agente líder. La dinámica del  $i$ -ésimo agente seguidor está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_i \\ \dot{v}_i &= u_i + \zeta_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{3.22}$$

---

donde  $N$  es el número de agentes seguidores,  $x_i \in \mathbb{R}^m$  y  $v_i \in \mathbb{R}^m$  representa la posición y velocidad del  $i$ -ésimo agente seguidor,  $m$  es el orden del sistema,  $u_i$  y  $\zeta_i$  denotan la entrada de control y las perturbaciones externas que afectan al  $i$ -ésimo agente, respectivamente.

Para el desarrollo de la estrategia de consenso utilizando modos deslizantes se definen dos ecuaciones de error, para cada agente seguidor, como

$$\begin{aligned} e_{i1} &= \sum_{j=1}^N a_{ij}((x_i - h_i) - (x_j - h_j)) + b_i((x_i - h_i) - x_0) \\ e_{i2} &= \sum_{j=1}^N a_{ij}(v_i - v_j) + b_i(v_i - v_0), \end{aligned} \quad (3.23)$$

a partir de las cuales se obtiene la siguiente dinámica de error

$$\begin{aligned} \dot{e}_{i1} &= \sum_{j=1}^N a_{ij}(v_i - v_j) + b_i(v_i - v_0) \\ \dot{e}_{i2} &= \left( \sum_{j=1}^N a_{ij} + b_i \right) \left( \frac{1}{I_z} u_i + \zeta_i \right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{I_z} u_j + \zeta_j \right) - b_i u_0 \\ \dot{e}_{i2} &= r_i(gu_i) - \sum_{j=1}^N a_{ij}(gu_j) \\ &\quad - b_i u_0 + r_i \zeta_i - \sum_{j=1}^N a_{ij}(\zeta_j) \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde  $r_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} + b_i$  y  $g = \frac{1}{I_z}$ .

Para cada agente seguidor se define la siguiente superficie de deslizamiento

$$s_i = e_{i2} + c_i e_{i1}, \quad c_i > 0. \quad (3.25)$$

**Teorema.** Considere el sistema multi-agente líder seguidor cuya dinámica está dada por (??) y (??). Si la entrada de control  $u_i$  para cada agente está dada por

$$\begin{aligned} u_i &= (r_i g)^{-1} (u_i^{NOM} + u_i^{SW} - d_i) \\ u_i^{NOM} &= b_i u_0 + \sum_{j=1}^N a_{ij}(gu_j) - c_i e_{i2} \\ u_i^{SW} &= -\lambda_i |s_i|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(s_i) - \alpha_i \int \text{sgn}(s_i) d\tau \\ d_i &= r_i \zeta_i - \sum_{j=1}^N a_{ij}(\zeta_j) \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde  $\lambda_i > 0$  y  $\alpha_i > 0$ , entonces los errores de consenso dado por (??) convergerán a cero

---

---

de forma asintótica, con lo cual se garantiza que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i = x_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} v_i = v_0$  para cada agente seguidor.

### 3.3.1. Análisis de estabilidad

Para la estrategia de control (??) y el error de consenso (??), la derivada de la superficie de deslizamiento (??) para el  $i$ -ésimo agente seguidor puede ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\dot{s}_i &= c_i e_{i2} + \dot{e}_{i2} \\
\dot{s}_i &= c_i e_{i2} + \sum_{j=1}^N a_{ij} \left( \frac{1}{T_z} u_i + \zeta_i - \frac{1}{T_z} u_j - \zeta_j \right) \\
&\quad + b_i \left( \frac{1}{T_z} u_i + \zeta_i - u_0 \right) \\
\dot{s}_i &= c_i e_{i2} + \left( \sum_{j=1}^N a_{ij} + b_i \right) (g u_i + \zeta_i) \\
&\quad - \sum_{j=1}^N a_{ij} (g u_j - \zeta_j) - b_i u_0 \\
\dot{s}_i &= c_i e_{i2} + r_i (g u_i) - \sum_{j=1}^N a_{ij} (g u_j) \\
&\quad - b_i u_0 + r_i \zeta_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} (\zeta_j) \\
\dot{s}_i &= -\lambda_i |s_i|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(s_i) - \alpha_i \int \text{sgn}(s_i) d\tau.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

La dinámica de la superficie de deslizamiento (??) puede ser simplificada como,

$$\begin{aligned}
\dot{s}_i &= -\lambda_i |s_i|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(s_i) + \rho_i \\
\dot{\rho}_i &= -\alpha_i \text{sgn}(s_i).
\end{aligned} \tag{3.28}$$



---

Para probar que siempre existe  $\lambda_i$  y  $\alpha_i$  tal que (??) sea estable en tiempo finito, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov.

$$V_o = \sum_{i=1}^N V_{oi} = \sum_{i=1}^N \gamma_i^T P_i \gamma_i, \quad \gamma_i = \begin{bmatrix} |s_i|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(s_i) & \rho_i \end{bmatrix}^T, \quad (3.29)$$

donde  $P_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz definida positiva.

La primera derivada de  $V_o$  puede ser obtenida como

$$\dot{V}_o = \sum_{i=1}^N \dot{V}_{oi} = \sum_{i=1}^N (\dot{\gamma}_i^T P_i \gamma_i + \gamma_i^T P_i \dot{\gamma}_i). \quad (3.30)$$

Se necesita conocer la derivada de  $\gamma_i$  y esta es expresada como:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_i &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} |s_i|^{-\frac{1}{2}} \dot{s}_i \\ \dot{\rho}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} |s_i|^{-\frac{1}{2}} \left[ -\lambda_i |s_i|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(s_i) + \rho_i \right] \\ -\alpha_i \text{sgn}(s_i) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} |s_i|^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -\lambda_i |s_i|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(s_i) + \rho_i \\ -2\alpha_i |s_i|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(s_i) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} |s_i|^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 \\ -2\alpha_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |s_i|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(s_i) \\ \rho_i \end{bmatrix} \\ &= |s_i|^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \lambda_i & \frac{1}{2} \\ -\alpha_i & 0 \end{bmatrix} \gamma_i \end{aligned} \quad (3.31)$$

la ecuación (??) puede ser reescrita como,

$$\dot{\gamma}_i = |s_i|^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}_i \gamma_i, \quad (3.32)$$

donde  $\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \lambda_i & \frac{1}{2} \\ -\alpha_i & 0 \end{bmatrix}$ .

Después se sustituye (??) en (??) y se obtiene

$$\dot{V}_o = |s_i|^{-\frac{1}{2}} \gamma_i^T \mathbf{A}_i^T P_i \gamma_i + \gamma_i^T P_i |s_i|^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}_i \gamma_i \quad (3.33)$$

$$\dot{V}_o = |s_i|^{-\frac{1}{2}} \gamma_i^T (\mathbf{A}_i^T P_i + P_i \mathbf{A}_i) \gamma_i. \quad (3.34)$$


---

---

Se define  $P_i$  como  $P_i = \begin{bmatrix} p11_i & p12_i \\ p12_i & p22_i \end{bmatrix}$  entonces los valores de  $\mathbf{A}_i^T P_i + P_i \mathbf{A}_i$  pueden ser obtenidos de la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} -\lambda_i p11_i - 2\alpha_i p12_i & -\frac{\lambda_i}{2} p12_i - \alpha_i p22_i + \frac{p11_i}{2} \\ -\frac{\lambda_i}{2} p12_i - \alpha_i p22_i + \frac{p11_i}{2} & p12_i \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Para probar la estabilidad es necesario que  $V_o$  sea una función de Lyapunov, ya que tenemos que  $V_o$  es definida positiva, ahora necesitamos que  $\dot{V}_o$  sea definida negativa, esto se cumple si

$$\begin{aligned} \lambda_i p11_i - 2\alpha_i p12_i &> 0 \\ -p12_i(\lambda_i p11_i + 2\alpha_i p12_i) - \left(\frac{\lambda_i}{2} p12_i + \alpha_i p22_i - \frac{p11_i}{2}\right)^2 &> 0 \\ \alpha_i &> 0 \\ p12_i &< 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

que se puede simplificar como

$$\begin{aligned} p12_i(\lambda_i p11_i + 2\alpha_i p12_i) + \left(\frac{\lambda_i}{2} p12_i + \alpha_i p22_i - \frac{p11_i}{2}\right)^2 &< 0 \\ 2p22_i^2 \alpha_i + p12_i \lambda_i p11_i + \alpha_i^2 p22_i^2 + \frac{1}{4}(p11_i - p12_i \lambda_i)^2 - (p11_i - \lambda_i p12_i) \alpha_i p22_i &< 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\alpha_i^2 p22_i^2 + 2\alpha_i \left(p12_i^2 + \frac{1}{2} p22_i p12_i \lambda_i - \frac{1}{2} p11_i p22_i\right) + p12_i \lambda_i p11_i + \left(\frac{1}{2}(\lambda_i p12_i - p11_i)\right)^2 < 0. \quad (3.37)$$

Las raíces de la ecuación (??) se pueden obtener como  $(\omega_{1i} \pm \omega_{2i})$ ,

$$\frac{-2(p12_i^2 + \frac{1}{2} p22_i p12_i \lambda_i - \frac{1}{2} p11_i p22_i) \pm \sqrt{4(p12_i^2 + \frac{1}{2} p22_i p12_i \lambda_i - \frac{1}{2} p11_i p22_i)^2 - 4p22_i^2(p12_i p11_i \lambda_i + (\frac{1}{2}(p12_i \lambda_i - p11_i))^2)}}{2p22_i^2}.$$

Ahora  $\alpha_i > 0$ . Definimos  $\bar{\mathcal{X}}_i = \frac{-p12_i}{p11_i}$  and  $\bar{\mathcal{Y}}_i = \frac{-p12_i}{p22_i}$ . Entonces tenemos

$$\omega_{1i} = \frac{-2(p12_i^2 + \frac{1}{2} p22_i p12_i \lambda_i - \frac{1}{2} p11_i p22_i)}{2p22_i^2} = \bar{\mathcal{Y}}_i^2 - \frac{1}{2} \bar{\mathcal{Y}}_i \lambda_i - \frac{1}{2} \bar{\mathcal{X}}_i. \quad (3.38)$$

y

---


$$\begin{aligned}
\omega_{2i} &= \frac{\sqrt{4(p12_i^2 + \frac{1}{2}p22_i p12_i \lambda_i - \frac{1}{2}p11_i p22_i)^2 - 4p22_i^2(p12_i p11_i \lambda_i + (\frac{1}{2}(p12_i \lambda_i - p11_i))^2)}}{2p22_i^2} \\
&= \frac{\sqrt{-p12_i(\lambda_i p22_i + p12_i)(p11_i p22_i - p12_i^2)}}{p22_i^2} = \sqrt{\bar{\mathcal{Y}}_i(\lambda_i - \bar{\mathcal{Y}}_i) \left( \frac{\bar{\mathcal{Y}}_i}{\bar{\mathcal{X}}_i} - \bar{\mathcal{Y}}_i^2 \right)}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Para que las raíces finalmente se puedan simplificar como:

$$\omega_{1i} \pm \omega_{2i} = \frac{1}{2} \bar{\mathcal{Y}}_i \left( \sqrt{\lambda_i - \bar{\mathcal{Y}}_i} \pm \sqrt{\frac{1}{\bar{\mathcal{X}}_i} - \bar{\mathcal{Y}}_i} \right)^2, \tag{3.40}$$

por lo tanto, el rango de  $\alpha_i$  puede escribirse como

$$\frac{1}{2} \bar{\mathcal{Y}}_i \left( \sqrt{\lambda_i - \bar{\mathcal{Y}}_i} - \sqrt{\frac{1}{\bar{\mathcal{X}}_i} - \bar{\mathcal{Y}}_i} \right)^2 < \alpha_i < \frac{1}{2} \bar{\mathcal{Y}}_i \left( \sqrt{\lambda_i - \bar{\mathcal{Y}}_i} + \sqrt{\frac{1}{\bar{\mathcal{X}}_i} - \bar{\mathcal{Y}}_i} \right)^2 \tag{3.41}$$

si definimos  $\Delta_i > 0$  tal que:

$$\bar{\mathcal{Y}}_i = \lambda_i - \Delta_i$$

y

$$\Delta_i = \frac{1}{\bar{\mathcal{X}}_i} - \bar{\mathcal{Y}}_i$$

entonces

$$\lambda_i = \frac{1}{\bar{\mathcal{X}}_i}. \tag{3.42}$$

Con las condiciones anteriores (??) y  $\alpha > 0$  siempre podemos encontrar una  $P_i$  definida positiva tal que  $\mathbf{A}_i^T P_i + P_i \mathbf{A}_i$  sea definida negativa, es decir  $\mathbf{A}_i^T P_i + P_i \mathbf{A}_i = -Q_i$ , donde  $Q_i$  es siempre definida positiva. Entonces se puede concluir que  $V_o$  es en efecto una función de Lyapunov.

---

# Capítulo 4

## 4. Resultados

En este capítulo se mostraran las simulaciones realizadas en Matlab de las estrategias de control diseñadas en capítulos anteriores bajo una topología de comunicación que cuenta con 4 agentes seguidores y un agente líder. Se presenta la plataforma experimental en la que se realizan las pruebas en tiempo real, describiendo cada una de las partes que la conforman. Se presentan los resultados experimentales de las estrategias de control a un sistema multi-agente con dos agentes seguidores y un agente líder. Finalmente se realiza la comparación de los controles presentados bajo 2 criterios de desempeño.

### 4.1. Resultados en simulación

En esta sección se muestra la simulación de 2 estrategias de control consenso a un conjunto de UAV para realizar seguimiento tipo líder-seguidor los cuales cumplen la topología dirigida de formación siguiente:

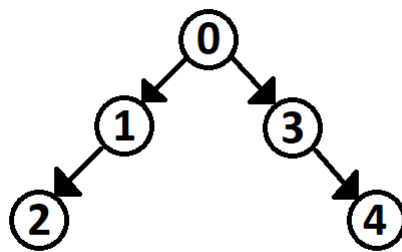


Figura 7: Topología Dirigida

---

Tomando en cuenta la topología anterior se construyen las matrices de la teoría de gráficos como lo indica en [?].

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para las estrategias de control que se presentan en este capítulo es necesario tener sistemas de segundo orden por lo cual nuestro sistema quedará representado de la siguiente manera.

La dinámica de los agentes seguidores es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_i \\ \dot{v}_i &= U_i + \zeta_i \end{aligned} \tag{4.1}$$

con  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  es el número de agentes seguidores,  $x_i \in \mathbb{R}^m$  representa la posición del sistema,  $v_i \in \mathbb{R}^m$  es la velocidad del  $i$ -ésimo agente seguidor,  $m$  es el orden del sistema  $\zeta_i$  denota la perturbación y  $U_i$  la entrada de control.

Para el agente líder se tiene la dinámica.

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= v_0 \\ \dot{v}_0 &= U_0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  y  $v_0 \in \mathbb{R}^m$  representa la posición y velocidad del agente líder.

Teniendo esta información se puede implementar las siguientes estrategias de control.

---

#### 4.1.1. Simulación Consenso Nominal

Para el control consenso nominal se ocuparon las siguientes constantes  $kd_{\phi_1} = 30$ ,  $kp_{\phi_1} = 100$ ,  $kd_{\theta_1} = 20$ ,  $kp_{\theta_1} = 100$ ,  $kd_{\psi} = 25$ ,  $kp_{\psi} = 10$ ,  $kpos = 1$ ,  $kvel = 1$ ,  $kpos1 = 1.4$ ,  $kvel1 = 1.4$ ,  $kpos2 = 1.5$ ,  $kvel2 = 1.5$ .

Las matrices **A** y **B** correspondiente a las dinámicas en  $X$  y  $Y$  utilizadas en la simulación son

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -21.1544 & -6.6396 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 16401.4442 \end{bmatrix}$$

La respuesta es la siguiente

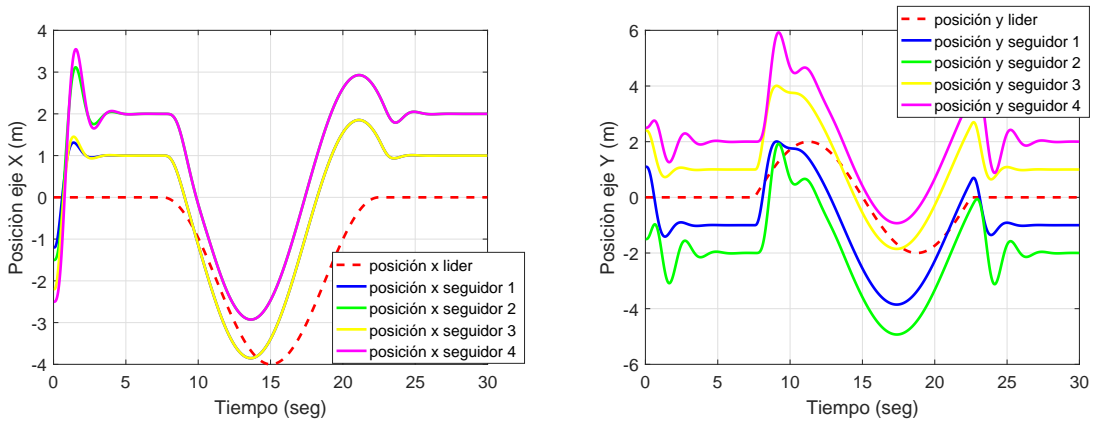


Figura 8: posición en eje X y posición en eje Y con el control consenso nominal

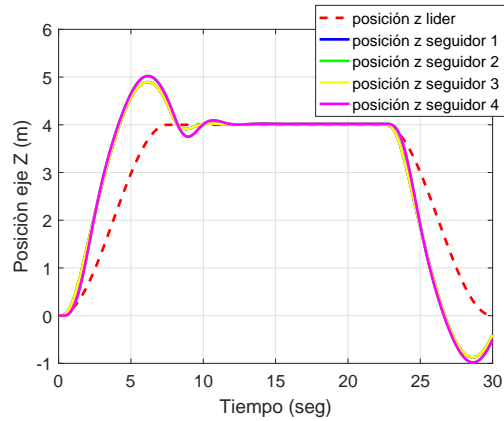


Figura 9: posición en eje Z con el control consenso nominal

---

En la figura ?? se observa la posición de los agentes seguidores en el plano  $X$  y  $Y$  siguiendo al agente líder con una trayectoria circular. En la figura ?? muestra el comportamiento de altura de los agentes seguidores.

---

#### 4.1.2. Simulación Consenso basado en modos deslizantes

En la ultima estrategia de control las constantes utilizadas son  $\alpha_1 = .1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\mu_z = 4$ ,  $c_{0z} = 10$ ,  $\mu_y = .001$ ,  $c_{0y} = .1$ ,  $kd_{\phi_1} = 20$ ,  $kp_{\phi_1} = 50$ ,  $kd_{\theta_1} = 2$ ,  $kp_{\theta_1} = 5$ ,  $kd_{\psi} = 25$ ,  $kp_{\psi} = 10$

Por ultimo se muestra las gráficas de posición para los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  para el control consensus super twisting.

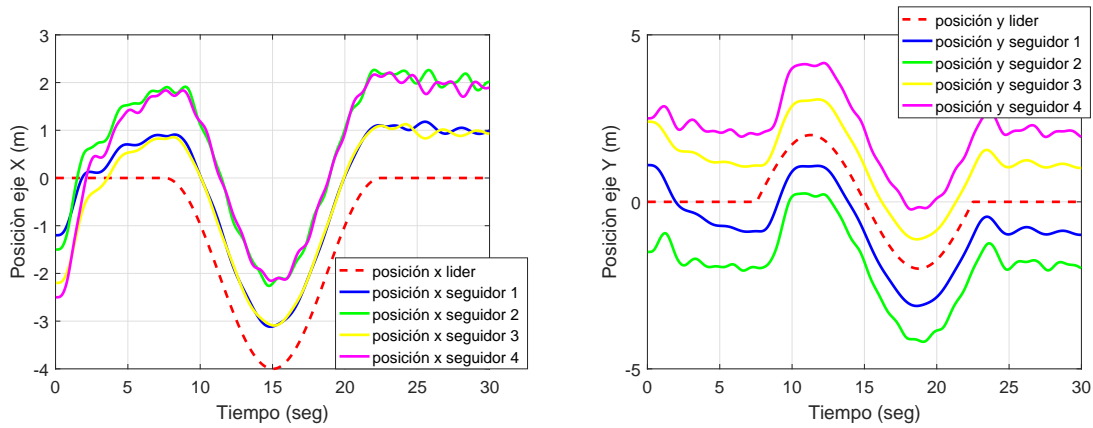


Figura 10: posición en eje X y posición en eje Y con control consenso basado en modos deslizantes

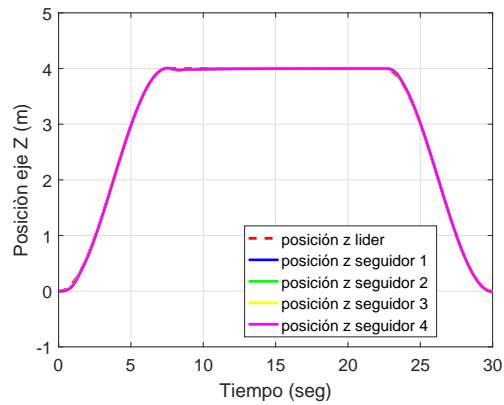


Figura 11: posición en eje Z con control consenso basado en modos deslizantes

En las figuras ?? y ?? se muestra la respuesta del control consenso basado en modos deslizantes, es evidente que es mejor el comportamiento con esta estrategia de control que con la nominal, porque no presenta demasiado sobre impulso y el seguimiento de la trayectoria es mejor.



---

## 4.2. Plataforma Experimental

Para la implementación de las estrategias de control presentadas en el capítulo anterior es necesario de contar y configurar una plataforma experimental que consta de:

- Parrot Bebop Drone: Sistema aéreo no tripulado.
- Cámaras Vicon: Sistema de captura de movimiento.
- Computadora: Estación de control terrestre.

A continuación se dará una descripción de los elementos de la plataforma experimental ya que cada uno de ellos es de vital importancia en el desarrollo de este trabajo.

### 4.2.1. Parrot Bebop Drone

Cuando hablamos de drones uno de los principales fabricantes comerciales es Parrot. Los franceses llevan ya unos cuantos años lanzando cuadrirrotores aéreos entre ellos el Bebop Drone que tiene una buena estabilidad de vuelo, se puede utilizar descargando una aplicación móvil ya sea en Android o iOS. Bebop Drone posee conectividad Wi-Fi® 802.11a/b/g/n/ac con antenas banda MIMO con 2 juegos de dipolos conectados a las bandas 2,4 y 5 GHz su potencia de emisión es de hasta 21 dBm con un alcance de la señal de 250 metros. Cuenta con una cámara tipo “fisheye” con estabilizador de vídeo digital de 3 ejes. Este modelo de dron tiene la estructura clásica con 4 motores del tipo outrunner sin escobillas. Su velocidad de rotación es de 7,500 rpm en punto fijo y estos motores pueden acelerar hasta 10,500 rpm.

---

La batería que utiliza este tipo de vehículo es LiPo (Lithium-Polymer) de 1200mAh 13.3Wh 11.1V, al igual cuenta con diferentes sensores como un magnetómetro, giroscopio y acelerómetro de 3 ejes, cámara de estabilización vertical la cual cada 16 milisegundos, toma una imagen del suelo y se compara con la anterior para identificar la velocidad del Bebop Drone, sensor ultrasonidos para analizar la altura de vuelo hasta 8 metros, y un barómetro.



Figura 12: Parrot Bebop Drone

#### 4.2.2. Cámaras Vicon

Para realizar las estrategias de control estudiadas en este trabajo es necesario conocer parte del estado del UAV y aunque el Parrot Bebop Drone posee sensores los cuales nos pueden entregar posición y velocidad del UAV, ya que las pruebas se realizaran en interior es más factible utilizar un sistema de cámaras de captura de movimiento para conocer la posición de los objetos de estudio.

El sistema de captura de movimientos VICON consta principalmente de los siguientes elementos:

- Dispositivos de captura (Cámara Bonita B10).
- Dispositivo de comunicación y alimentación (POE).

---

#### 4.2.3. Dispositivo de captura (Cámara Bonita B10)

En el laboratorio donde se realizaron las pruebas experimentales se instalaron un conjunto de 8 cámaras modelo Bonita B10 de VICON. Estas cámaras capturan a 250 cuadros por segundo con una resolución de un megapíxel, lo que significa que puede capturar de forma fácil y precisa los movimientos de objetos que se mueven rápidamente. Con su alta resolución, óptica de calidad y sofisticados algoritmos, la cámara B10, captura con precisión hasta 0.5 mm de traslación y 0.5 grados de rotación en un volumen de 4 m x 4 m usando marcadores de 9 mm. Este modelo de cámaras VICON usan un solo cable para proporcionar todo lo que necesita: potencia, datos y sincronización.

El tipo de captura de movimiento utilizada es el Óptico-Pasivo. Esta técnica utiliza marcadores retrorreflectantes que son rastreados por cámaras infrarrojas. Es el método más flexible y común utilizado en la industria.



Figura 13: Cámaras Vicon(Bonita B10) y Marcadores retrorreflejantes

---

#### 4.2.4. Dispositivo de comunicación y alimentación (POE)

Se necesita un único punto de comunicación entre las cámaras y el computador, este proceso se realiza con un conmutador POE. La alimentación PoE (Power over Ethernet) es una tecnología que incorpora alimentación eléctrica a una infraestructura LAN estándar a través del propio cableado Ethernet. Permite que la alimentación eléctrica se suministre a un dispositivo de red (switch, punto de acceso, router, teléfono o cámara IP, etc) usando el mismo cable que se utiliza para la conexión de red. De esta forma se elimina la necesidad de utilizar tomas de corriente en las ubicaciones del dispositivo alimentado.

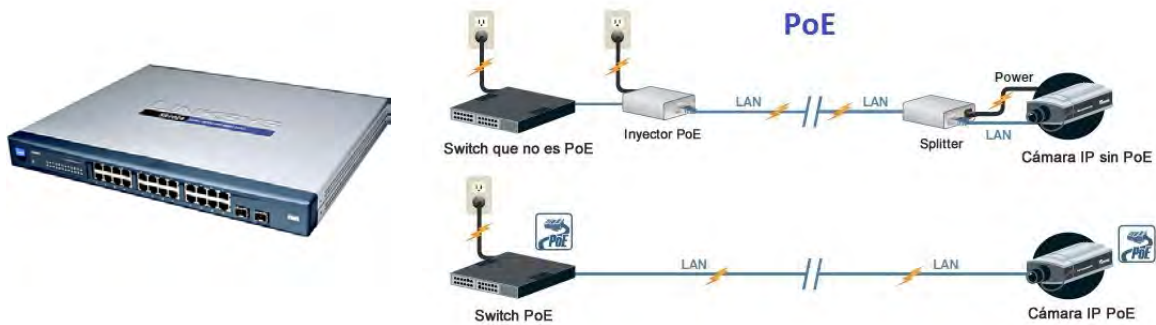


Figura 14: Dispositivo de comunicación y alimentación (POE)

#### 4.2.5. Estación de Control Terrestre

Esta estación es una computadora la cual es la encargada de tener la interacción con el operador, en esta se lleva a cabo el control de todo el sistema utilizado conectando cada uno de los dispositivos y realizando en esta estación todos los algoritmos de control a implementar.

En la estación de control terrestre es donde se instala el sistema operativo de robots (ROS) con el nodo principal y de este obtener información del sistema de cámaras VICON, un joystick el cual se encarga de la interacción hombre-máquina, y la conexión a un router donde estarán conectados vía wi-fi todos los agentes UAV con diferentes ip, requeridos para el control.

---

La estación terrestre es una laptop marca Lenovo modelo ideapad Y700 la cual tiene instalado el sistema operativo ubuntu 16.04.1 que es una distribución de Linux basada en la arquitectura de Debian. Las principales especificaciones del computador son: procesador intel core i7 a 2.60 GHz, 16 Gb de memoria RAM y 1 Tb de disco duro.

En la figura ?? se muestra el diagrama de comunicación que cumple la estación de control terrestre, bajo este diagrama se cumple la comunicación entre todos los dispositivos y se puede llevar a cabo los experimentos.

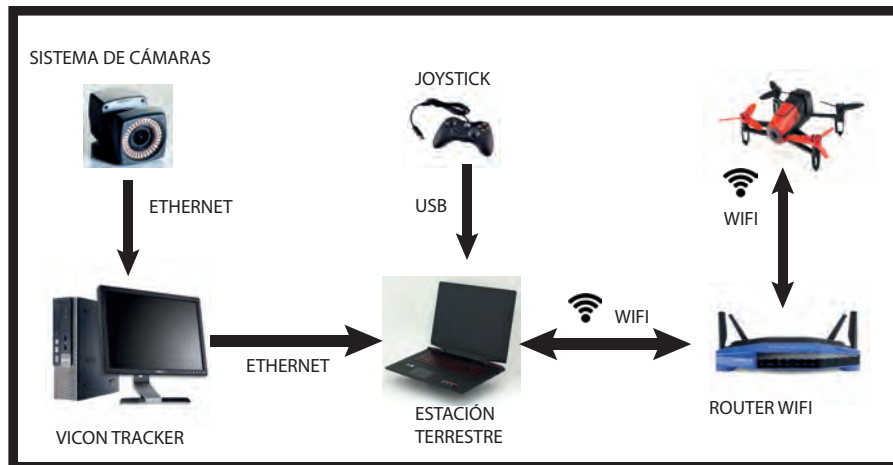


Figura 15: diagrama de conexión estación terrestre

#### 4.2.6. Software

#### 4.2.7. ROS (Sistema Operativo de Robots)

ROS es una plataforma para escribir software de robots. Es una serie de herramientas y bibliotecas que tienen como objetivo simplificar la tarea de crear comportamientos de robots complejos y robustos en una amplia variedad de plataformas robóticas.

ROS tiene muchas ventajas, una de ellas es ser una plataforma de desarrollo Open-Source que trabaja bajo el entorno de Unix, principalmente Ubuntu. De igual forma, provee librerías para trabajar con diferentes programas y dispositivos. ROS fue desarrollado en 2007 por el Laboratorio de Inteligencia Artificial de Stanford.

---

ROS está basado en una arquitectura gráfica, con una topología donde todos los procesos se llevan a cabo por medio de nodos que pueden enviar o recibir información de sensores, controles, estados, planificaciones o actuadores. Existen diferentes distribuciones de ROS entre las últimas están ROS indigo igloo, ROS jade Turtle, ROS kinetic Kame, ROS Lunar Loggerhead y ROS Melodic Morenia, siendo la distribución kinetic la recomendada por ser LTS (long-term support) que significa que tiene mantenimiento a largo plazo, en la página oficial de ROS indica que tendrá soporte hasta abril del 2021 lo cual hace la distribución idónea para nuestro propósito y es la que se ocupa.



Figura 16: Distribuciones de ROS

---

#### 4.2.8. VICON Tracker

Tracker es una poderosa aplicación de software de seguimiento de objetos que proporciona una precisión sin igual y datos de baja latencia para aplicaciones de visualización 3D y software para el desarrollo y monitoreo de sistemas de control robótico. El rastreador puede manejar cientos de objetos en tiempo real hasta velocidades de 2,000 cuadros por segundo. La interfaz intuitiva y fácil de usar te permitirá rastrear en poco tiempo.

Tracker se utiliza para una amplia gama de aplicaciones tales como:

- Seguimiento y control de robots
- Seguimiento de UAV y control de vuelo
- Optimización del método de diseño
- Ingeniería virtual

El programa Vicon Tracker es un complemento del sistema de captura de movimientos, este programa interpreta la información recibida de las cámaras por medio del POE, toda esta información se procesa de tal forma que el resultado sea la posición y orientación del objeto de interés.

#### 4.2.9. Entorno de Trabajo

Existe un proceso en el cual viaja la información entre todos los dispositivos y nodos conectados en el entorno de trabajo, este proceso es descrito como:

- Las cámaras del sistema de captura de movimientos capturan la posición de los marcadores retroreflejantes instalados en los agentes de estudio.
- El programa Tracker Vicon recibe a través de una conexión ethernet por medio del dispositivo POE e interpreta la información de las cámaras VICON para calcular la posición en los ejes X, Y y Z en milímetros y la orientación de los ángulos,  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$  en cuaterniones de los vehículos aéreos.
- Estos datos se envían a la estación terrestre por medio del protocolo de comunicación WI-FI.

- En la estación terrestre con el sistema ROS y las librerías necesarias (bebop autonomy, joystick, etc) instaladas se crea un programa principal que junta toda la información entregada por las librerías.
- Se programan los diferentes algoritmos de consenso desarrollados en el capítulo anterior
- Para finalizar por medio de conexión WI-FI se mandan las diferentes señales de control que se calculan en la estación terrestre a cada uno de los UAV.

Una representación gráfica de este proceso es mostrada en la figura ???. El laboratorio donde se realizaron las pruebas experimentales es mostrado en la figura ???

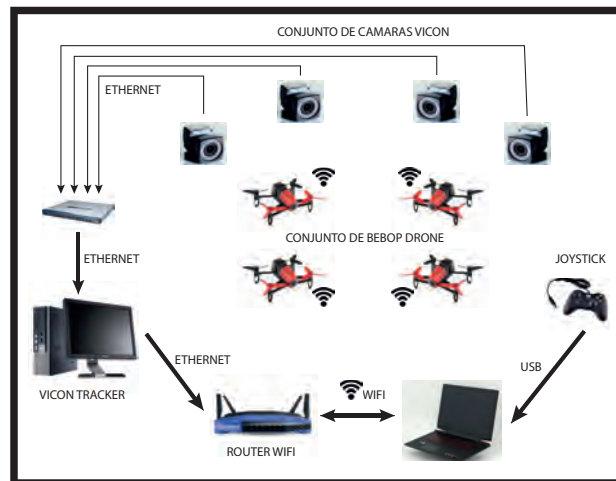


Figura 17: Diagrama general del entorno de trabajo



Figura 18: Laboratorio de pruebas experimentales



---

## 4.3. Resultados Experimentales

### 4.3.1. Introducción

En este capítulo se muestran los resultados experimentales obtenidos para controlar la trayectoria de un sistema multi-agente descrito en el Capítulo 5. Se presenta la respuesta de la planta cuando es controlada por un control consenso nominal aplicado a las dinámicas de traslación. A su mismo se muestran los resultados obtenidos aplicando un control consenso basado en modos deslizantes a la misma planta descrita anteriormente.

Para las pruebas experimentales mostradas en este capítulo se ocupa una topología de formación diferente a las pruebas en simulación, esto debido a que se cuenta con dos vehículos aéreos no tripulados por lo que la topología utilizada es la siguiente.

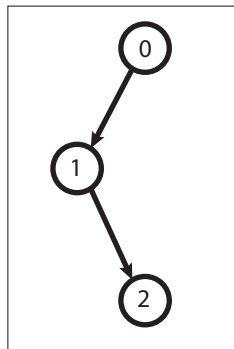


Figura 19: Topología de comunicación de las pruebas experimentales

En las dos pruebas experimentales se ocupó la topología mostrada a los dos vehículos aéreos utilizando a su vez el sistema de cámaras Vicon.

---

### 4.3.2. Resultados experimentales obtenidos con el control consenso nominal

Para realizar esta prueba se diseño un control consenso nominal basado en la sección 2 del capítulo 3 tomando en cuenta la topología mostrada en la figura ?? con dos vehículos aéreos representando cada uno un agente seguidor y un agente líder virtual el cual dotara la trayectoria de referencia para los agentes seguidores.

La trayectoria de referencia diseñada es una cuadrado en el plano  $x, y$  a la altura de un metro, formada por ecuaciones paramétricas con el fin de reducir los efectos de aceleración y sacudimiento en la trayectoria de los agentes.

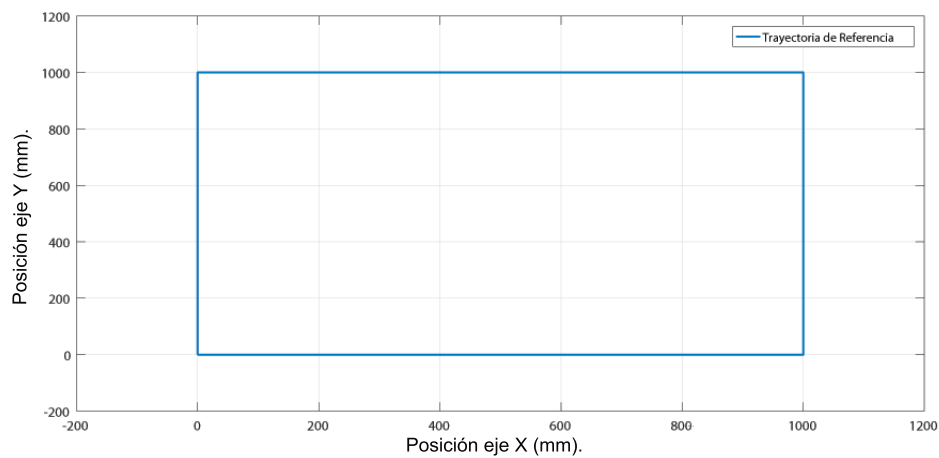


Figura 20: Trayectoria de referencia

En las pruebas mostradas a continuación es necesario darle una formación a los agentes seguidores para evitar posibles colisiones entre ellos ya que trataran de seguir la misma trayectoria. La formación se realiza dando un offset en la señal de error de cada agente seguidor.

---

Las ganancias del control consenso nominal utilizadas en esta prueba experimental son las mostradas en la tabla ??

$K1_{x1}$	0.0005
$K2_{x1}$	0.00069
$K1_{x2}$	0.0005
$K2_{x2}$	0.000498
$K1_{y1}$	0.0005
$K2_{y1}$	0.00069
$K1_{y2}$	0.0005
$K2_{y2}$	0.000389

Tabla 1: Constantes de control consenso nominal.

Al realizar la prueba experimental se obtuvieron los datos de posición de los vehículos aéreos gracias al sistema de cámaras Vicon y capturando los datos por el sistema ROS, para después graficarlos en Matlab. Los resultados fueron los siguientes.

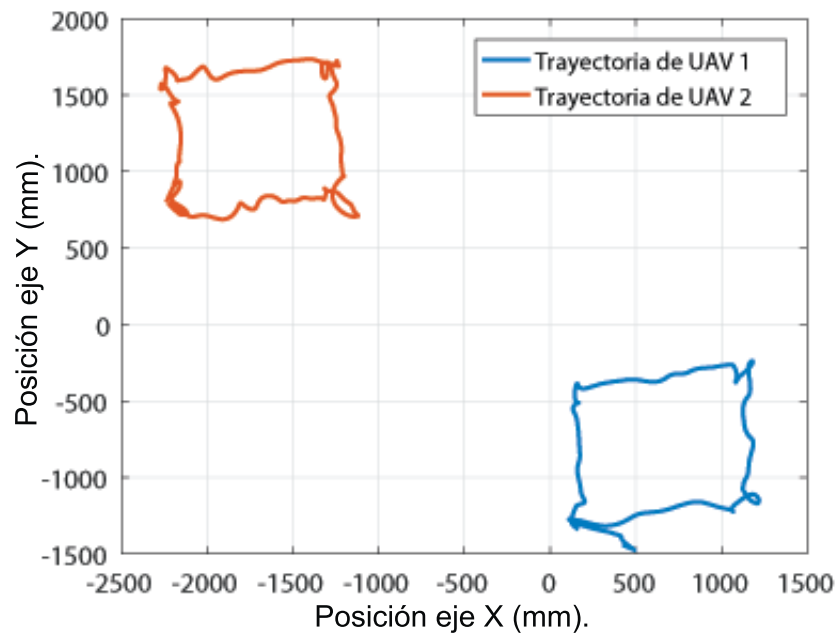


Figura 21: Trayectoria de UAV's por control consenso nominal.

---

En la figura ?? se puede observar que los dispositivos aéreos siguen la trayectoria establecida en la formación dada pero se ve que en varios puntos se aleja de la referencia lo cual puede ocasionar un problema por posibles colisiones entre los agentes y este problema aumenta cuando el sistema multi-agente cuente con más agentes seguidores.

La señal de control del agente seguidor es mostrada en las figuras ?? y ?? donde se ve que la señal de control tiene una amplitud pequeña lo cual es bueno para no dañar los motores de los drones.

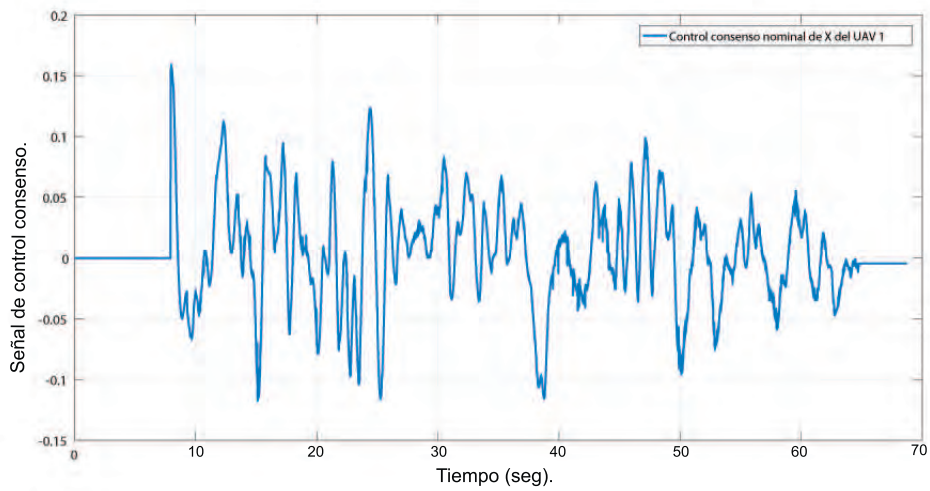


Figura 22: Señal de control nominal para la dinámica de X.

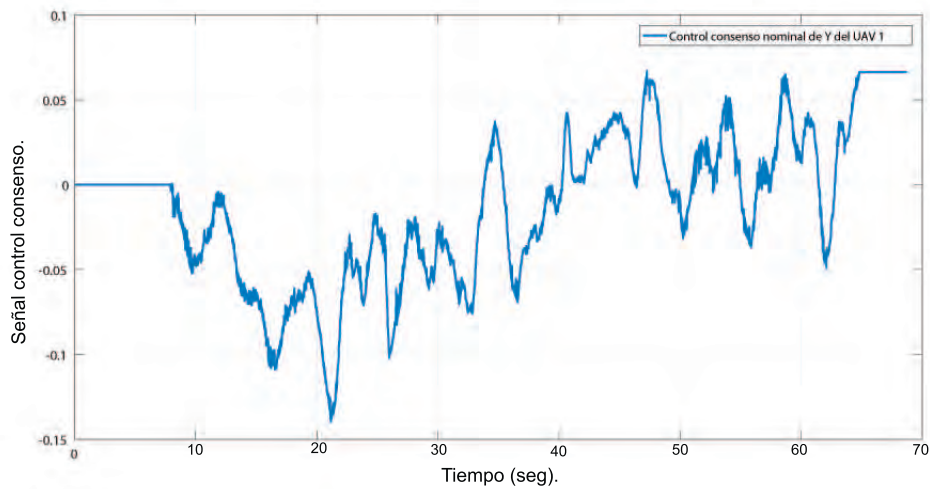


Figura 23: Señal de control nominal para la dinámica de Y.

---

### 4.3.3. Resultados experimentales obtenidos con el control consenso basado en modos deslizantes.

Para la siguiente estrategia de control se escogieron las ganancias de control de acuerdo a lo estudiado en la sección 3.3. Las ganancias de control son las siguientes:

$c_{x1}$	0.23
$\alpha_{x1}$	60
$\lambda_{x1}$	10
$c_{y1}$	0.23
$\alpha_{y1}$	60
$\lambda_{y1}$	10
$c_{x2}$	0.23
$\alpha_{x2}$	60
$\lambda_{x2}$	10
$c_{y2}$	0.23
$\alpha_{y2}$	60
$\lambda_{y2}$	10

Tabla 2: Constantes de control consenso basado en modos deslizantes.

Al igual que en la prueba de consenso nominal la posición de los vehículos fue capturada por las 8 cámaras Vicon. La trayectoria generada por el agente líder virtual fue un cuadrado de un metro de largo por lado a una altura de un metro, como en la estrategia de control anterior.

Los resultados se muestran en las gráficas siguientes:

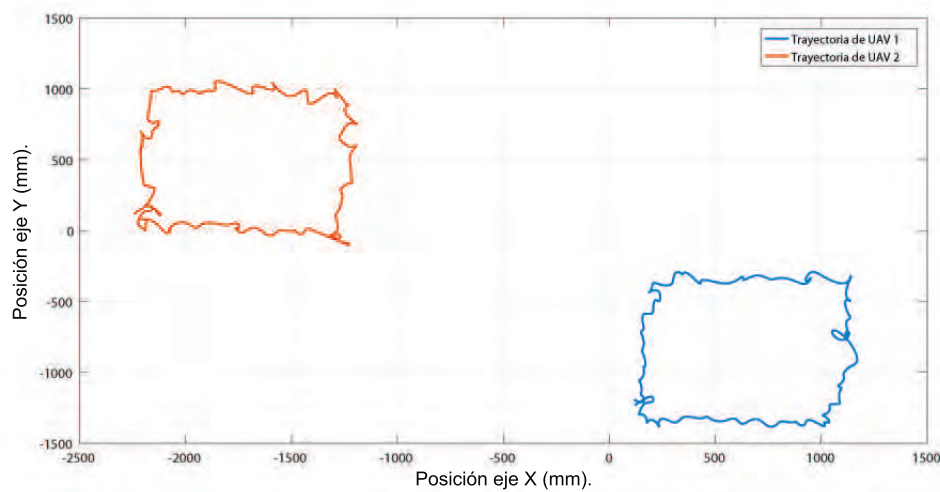


Figura 24: Trayectoria de UAV's por control consenso basado en modos deslizantes.

---

En la figura ?? se puede notar que los agentes seguidores cumplen la función de seguir al agente líder respetando la formación establecida, también se observa que existe variación en la trayectoria pero esta es mínima, reduciendo así las posibles colisiones.

Las gráficas siguientes muestran las señales de control obtenidas para el agente seguidor 1, la cual presenta una mayor frecuencia de oscilación que la señal de control para el control consenso nominal esto se da por la presencia del modos deslizante, pero al ser del tipo super twisting la frecuencia de oscilación no es tan grande en comparación con un controlador de modos deslizantes de primer orden.

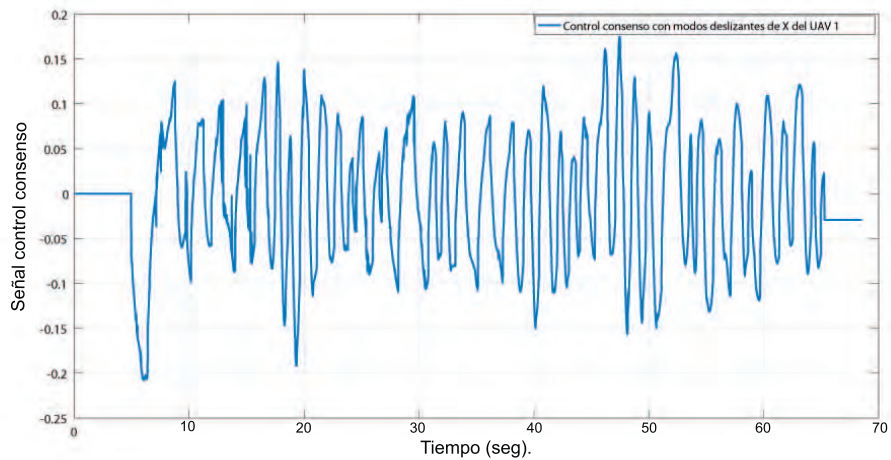


Figura 25: Señal de control consenso por modos deslizantes para la dinámica de X.

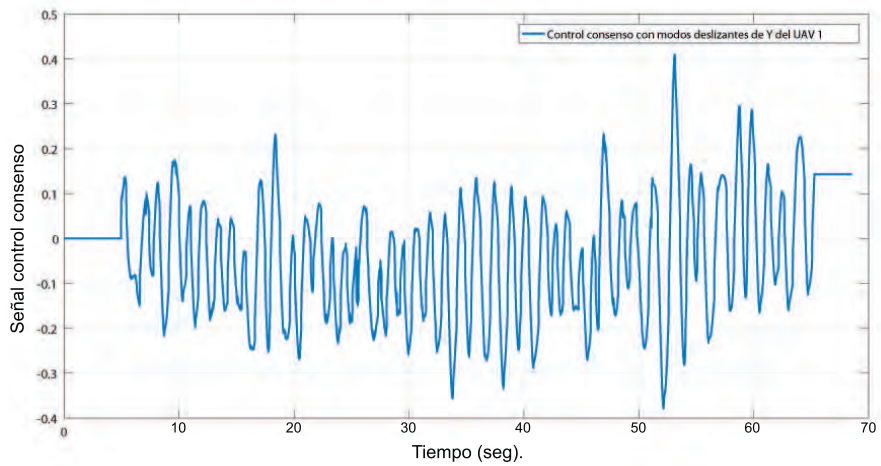


Figura 26: Señal de control consenso por modos deslizantes para la dinámica de Y.

---

## 4.4. Desempeño de las estrategias de control

Para poder comparar el desempeño de ambas estrategias de control cooperativo tipo consenso: consenso nominal y consenso basado en modos deslizantes, se obtuvieron dos índices de desempeño en función del error de seguimiento: IAE(integral del error absoluto) y del criterio ITAE(integral del tiempo por el error absoluto). Se decidió ocupar estos criterios ya que son considerados una buena opción para verificar el desempeño de controladores.

### 4.4.1. Criterio IAE

El criterio de desempeño IAE está definido como:

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

donde  $e(t)$  es la diferencia entre la posición del agente líder y el i-ésimo agente líder.

En la Tabla ?? se presentan los resultados para el índice de desempeño IAE, se pueden observar los resultados para el índice de desempeño de cada uno de los agentes seguidores en las dinámicas X e Y.

IAE	Consenso nominal	Consenso basado en modos deslizantes
agente 1 (x)	$0.4273 \times 10^{04}$	$0.3475 \times 10^{04}$
agente 1 (y)	$1.1625 \times 10^{04}$	$0.3903 \times 10^{04}$
agente 2 (x)	$0.4353 \times 10^{04}$	$0.3609 \times 10^{04}$
agente 2 (y)	$7.8571 \times 10^{04}$	$0.4509 \times 10^{04}$

Tabla 3: Indices de desempeño IAE.

---

#### 4.4.2. Criterio ITAE

El criterio de desempeño ITAE esta definido como:

$$ITAE = \int_0^{\infty} t|e(t)|dt$$

donde  $t$  es el tiempo y  $e(t)$  es la diferencia entre la posición del agente líder y el  $i$ -ésimo agente líder.

En la Tabla ?? se presentan los resultados para el índice de desempeño ITAE, se pueden observar los resultados para el índice de desempeño de cada uno de los agentes seguidores en las dinámicas X e Y.

ITAE	Consenso nominal	Consenso basado en modos deslizantes
agente 1 (x)	$0.0970 \times 10^{06}$	$0.0975 \times 10^{06}$
agente 1 (y)	$0.3617 \times 10^{06}$	$0.1095 \times 10^{06}$
agente 2 (x)	$0.1211 \times 10^{06}$	$0.1087 \times 10^{06}$
agente 2 (y)	$2.3702 \times 10^{06}$	$0.1363 \times 10^{06}$

Tabla 4: Indices de desempeño ITAE.

En las Tablas ?? y ?? se observa que los indices de desempeño para el control consenso nominal son mayores que para el control consenso basado en modos deslizantes, lo que significa que el control basado en modos deslizantes reduce el error de seguimiento en comparación con el consenso nominal, debido a que el consenso basado en modos deslizantes es una estrategia de control robusta y toma en cuenta el modelo no lineal del sistema, en comparación del consenso nominal el cual es una estrategia de control lineal.



---

## Capítulo 5

### 5. Conclusiones

En este trabajo de tesis se implementaron estrategias de control tipo consenso líder-seguidor para un sistema multi-agente de vehículos aéreos no tripulados. El sistema multi-agente consta de vehículos aéreos de marca Bebop 1, Parrot. Para la recolección de datos de la posición de los vehículos se utilizó un sistema de captura de movimiento tipo Bonita B10 de la marca Vicon, la cual se conecta con los Bebop y con ROS para realizar la implementación de las estrategias de control. Las dinámicas que presentan los vehículos aéreos fueron divididas en dos partes para su estudio, estas fueron la dinámica rotacional y la dinámica traslacional, la razón de trabajar de esta forma es para poder implementar las estrategias junto con el sistema de control interno que cuentan los vehículos. Se presentaron resultados de simulaciones así como resultados experimentales en tiempo real para seguir una trayectoria en el plano  $X$  y  $Y$ .

Una de las estrategias de control tipo consenso líder-seguidor que se implementó fue un consenso nominal con el cual se pudo observar que los vehículos seguidores permanecieron comunicados y completaron la trayectoria realizada por el agente líder de una forma aceptable aunque se presentó un error constante en la posición de los agentes seguidores, el seguimiento de la trayectoria se realizó. La segunda estrategia de control realizada fue un control consenso basado en modos deslizantes, el cual funcionó de igual manera que el control anterior dotando al sistema multi-agente la capacidad de seguir correctamente la trayectoria generada por el agente líder, en esta prueba se puede observar que el error presente en la posición de los agentes seguidores con respecto a la del agente líder se redujo, dando así mejores resultados que en el consenso nominal.

Gracias a las pruebas en simulación y a los experimentos en tiempo real podemos concluir que es posible dotar a un sistema multi-agente la capacidad de seguir un vuelo coordinado sin la necesidad de que todos los agentes seguidores tengan comunicación directa con el agente líder y entre ellos, y que depende de la estrategia de control aplicada tendrá un comportamiento característico.

---

## Referencias

- [1] D. Angeles Rojas. Programación dinámica adaptable para el control subóptimo de un cuadrirrotor. 2016
- [2] P. Castillo, P. Garcia, R. Lozano, and P. Albertos, "Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores", *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 4, no. 1, pp.41-57, 2007.
- [3] P. Castillo, R. Lozano and A. E. Dzul, *Modelling and Control of Mini-Flying Machines*. Springer, 2005.
- [4] O. Santos, H. Romero, S. Salazar, O. García-Pérez and R. Lozano, "Optimized discrete control law for quadrotor stabilization: Experimental results", *Journal of Intelligent and Robotic System*, 2016.
- [5] Frank L. Lewis, Hongwei Zhang, Kristian Hengster-Movric and Abhijit Das, "Cooperative Control of Multi-Agent System", *Optimal and Adaptive Design Approaches*, pp.76-84 Springer, 2014.
- [6] Giovanni Ortega, Filiberto Muñoz, E. S. Espinoza Quesada, Luis R. Garcia and Patricio Ordaz, "Implementation of leader-follower linear consensus algorithm for coordination of multiple aircrafts" *Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems (RED-UAS)*, 2015.
- [7] Zhouhua Peng, Dan Wang, Hongwei Zhang, Gang Sun and Hao Wang, "Distributed model reference adaptive control for cooperative tracking of uncertain dynamical multi-agent systems", *IET Control Theory and Applications*, 2013.
- [8] R. Barrón Gómez. "Sistema Aéreo no tripulado para el transporte de carga usando Visual Servoing y Redes Wavenet ". 2016
- [9] Chang-E Ren, C.L. Philip Chen "Sliding mode leader-following consensus controllers for second-order non-linear multi-agent systems". 2014.
- [10] Shuanghe Yu, Xiaojun Long "Finite-time consensus for second-order multi-agent systems with disturbances by integral sliding mode". 2015.

- 
- [11] Luis García, A. E. Dzul, R. Lozano and C. Pégard, "Quad Rotorcraft Control, Vision-Based Hovering and Navigation", Springer-Verlag London 2013.
- [12] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2000.
- [13] R. O. Saber and R. M. Murray, Consensus protocols for networks of dynamic agents, in *Proc. 2003 Am. Control Conf.*, 2003, pp. 951-956.
- [14] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520-1533, Sep. 2004.
- [15] H. Abelson, D. Allen, D. Coore, C. Hanson, G. Homsy, J. Knight, T. F. R. Nagpal, E. Rauch, G. J. Sussman, and R. Weiss, *Amorphous computing*, *Commun. ACM*, vol. 43, no. 5, pp. 74-82, 2000.
- [16] R. Olfati-Saber, *Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory*, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 51, no. 3, pp. 401-420, Mar. 2006.
- [17] A. V. Savkin, Coordinated collective motion of groups of autonomous mobile robots: Analysis of Vicsek's model, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 49, no. 6, pp. 981-982, Jun. 2004.
- [18] M. Egerstedt and X. Hu, Formation control with virtual leaders and reduced communications, *IEEE Trans. Robot. Autom.*, vol. 17, no. 6, pp. 947-951, 2001.
- [19] T. Eren, W. Whiteley, A. S. Morse, P. N. Belhumeur, and B. D. O. Anderson, Sensor and network topologies of formations with direction, bearing and angle information between agents, in *Proc. 42nd IEEE Conf. Decision and Control*, Dec. 2003, pp. 3064-3069.
- [20] D. V. Dimarogonas and K. J. Kyriakopoulos, Formation control and collision avoidance for multi-agent systems and a connection between formation infeasibility and flocking behavior, in *44th IEEE Conf. Decision and Control, 2005 and 2005 Eur. Control Conf. (CDC-ECC '05)*, Dec. 2005, pp. 84-89.

- 
- [21] A. Jadbabaie, N. Motesharref, and M. Barahona, *On the stability of the Kuramoto model of coupled nonlinear oscillators*, in *Proc. 2004 Am. Control Conf.*, vol. 5, pp. 4296-4301, Jun. 2004.
- [22] M. Mehyar, D. Spanos, J. Pong, S. H. Low, and R. M. Murray, *Distributed averaging on asynchronous communication networks*, in *Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control, 2005 and 2005 Eur. Control Conf. (CDC-ECC 2005)*, Dec. 2005, pp. 7446-7451.
- [23] R. A. Freeman, P. Yang, and K. M. Lynch, *Distributed estimation and control of swarm formation statistics*, in *Proc. 2006 Am. Control Conf.*, pp. 749-755, Minneapolis, MN, Jun. 2006.
- [24] Muñoz, F., Espinoza Quesada, E. S., La, H. M., Salazar, S., Commuri, S., and Garcia Carrillo, L. R. (2017) *Adaptive consensus algorithms for real-time operation of multi-agent systems affected by switching network events*. *Int. J. Robust. Nonlinear Control*, 27: 1566-1588. doi: 10.1002/rnc.3687.
- [25] S. Khoo, Lihua Xie, Z. Man and S. Zhao, *Observer-based robust finite-time cooperative consensus control for multi-agent networks*, "2009 4th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, Xi'an, 2009, pp. 1883-1888.
- [26] Chang-E Ren y C.L. Philip Chen, *Sliding mode leader-following consensus controllers for second-order non-linear multi-agent systems*, Volume 9, Issue 10, 25 June 2015, p. 1544 - 1552.
- [27] S. Yu and X. Long, *"Finite-Time Consensus Tracking of Perturbed High-Order Agents With Relative Information by Integral Sliding Mode"*, in *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 63, no. 6, pp. 563-567, June 2016.
- [28] F. L. Lewis, H. Zhang, K. Hengster-Movric, and A. Das. *Cooperative Control of Multi-Agent Systems, Communications and Control Engineering*, Springer-Verlag London, 2014.
- [29] J. A. Huerta, *Control Neuronal para un Robot Manipulador con Compensación de Dinámicas no Modeladas*, diciembre 1999.
- [30] F. L. Lewis, C. T. Abdallah, D. M. Dawson, *Control of Robot Manipulators*, Macmillan Publishing Company, 1993.
-