



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
ÁREA ACADÉMICA DE COMPUTACIÓN Y ELECTRÓNICA

MAESTRÍA EN CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y
CONTROL

**REDES NEURONALES WAVELETS PARA TRANSPORTE
DE CARGAS MEDIANTE SISTEMAS MULTI-AGENTES**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN
CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

PRESENTA:

ING. CESAR EDUARDO JUÁREZ VARGAS

DIRECTORES:

DR. JOEL SUÁREZ CANSINO
(Director Interno)

DR. EDUARDO STEED ESPINOZA QUESADA
(Director Externo)



Mineral de la Reforma, Hidalgo, México

Diciembre de 2018



Mineral de la Reforma, Hgo., a 15 de noviembre de 2018

Número de control: ICBI-AACyE/2098/2018
 Asunto: Autorización de impresión de tesis.

M. EN C. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

Por este conducto le comunico que el comité revisor asignado al Ing. Cesar Eduardo Juárez Vargas, alumno de la Maestría en Ciencias en Automatización y Control, autoriza la impresión del proyecto de tesis titulado "**Redes neuronales wavelet para el transporte de carga mediante sistemas multi-agentes**" en virtud de que se han efectuado las revisiones y correcciones pertinentes.

A continuación, se registran las firmas de conformidad de los integrantes del comité revisor.

Dr. Omar López Ortega	Presidente	UAEH
Dr. Hugo Romero Trejo	Secretario	UAEH
Dr. Joel Suarez Cansino	Vocal 1	UAEH
Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez	Vocal 2	UAEH

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO



Atentamente
 "Amor, Orden y Progreso"

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
~~Coordinador de la Maestría en Ciencias en Automatización y Control~~
 Área Académica de Computación y Electrónica

JPOO/APL

Ciudad del Conocimiento
 Carretera Pachuca-Tlaxianguillo km 4.5 Col. 1
 Carboneras Minera de la Reforma Hidalgo
 Mexico C.P. 42184
 Teléfono +52 771 71 20 00 ex 2250 2251
 Fax 2109
 aacye_icbi@uaeh.edu.mx



www.uaeh.edu.mx

Reconocimientos

- A mis padres, hermanos, amigos y seres queridos que me apoyaron en la realización de este documento.
- A mis asesores que sin su guía, ayuda y paciencia no hubiera terminado los objetivos propuestos.
- A mis profesores, que sin el valioso conocimiento adquirido en el salón de clase no hubiera sido posible la realización del tema de tesis.
- A mis Sinodales, que sin sus valiosos consejos y correcciones no hubiera completado un documento de calidad y a la altura del programa académico.
- A la beca proporcionada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología durante el periodo comprendido para la obtención de grado.

Resumen

Un conjunto de vehículos aéreos no tripulados que son pilotados de forma autónoma y que en conjunto realizan tareas que mediante un único vehículo no sería posible realizar, es el tema de estudio en este documento. Debido a la complejidad que implica, aquí se estudia el caso de dos vehículos transportando una carga, únicamente. La estabilidad de dicho sistema puede verse afectada debido a las perturbaciones generadas por las dinámicas no modeladas de la carga enlazadas a los vehículos por medio de cuerdas rígidas en vuelo, no elásticas, y donde surge la necesidad de usar estrategias de control no convencionales, como el PIDMW con ganancias adaptables sintonizadas por medio de una red neuronal artificial de base radial, la cual proporciona una aproximación del modelo entrada-salida de las dinámicas que rigen la altura de todo el sistema. La distribución del peso de dicha carga se controla mediante la posición de los UAV's por lo que el equilibrio del conjunto es logrado mediante un control consensus distribuido asegurando la cooperación entre ellos.

Contenido

Índice de figuras	VIII
1. Introducción	1
1.1. Presentación	1
1.2. Planteamiento del problema	2
1.3. Justificación	3
1.4. Objetivo	3
1.5. Objetivos específicos	3
1.6. Hipótesis	4
1.7. Contribuciones	4
1.7.1. Estancia académica y artículo	5
1.8. Estructura de la tesis	5
2. Marco teórico	7
2.1. Características principales de un UAV	7
2.2. Modelo de 2 vehículos en 2 dimensiones	11
2.2.1. Energía Cinética	16
2.2.2. Energía Potencial	17
2.2.3. Modelo Simplificado	24
2.2.4. Modelo espacio estado	26
2.2.5. Modelo discreto UAV con carga	28
2.3. Modelo no lineal discreto	30
2.3.1. Red neuronal artificial Wavelet	31

CONTENIDO

2.3.2.	Entrenamiento de la red neuronal	33
2.3.3.	Simulación RNA	35
2.4.	Ley de control PID Wavelet	39
2.4.1.	Sintonización automática de las ganancias del controlador	40
2.4.2.	Simulación de ley de control PIDMW de 1 vehículo	41
2.4.3.	Estrategia de control para el transporte de carga	43
2.5.	Sistema Multi-agente	43
2.5.1.	Matriz de conexiones	45
2.5.2.	Matriz Laplaciana	45
2.5.3.	Comunicación, Gráficas y Consensus	45
2.5.4.	Diseño local para el protocolo de sincronizacion	50
2.5.5.	Diseño del control PD	53
3.	Diseño del experimento	55
3.1.	Plataforma Experimental	56
3.1.1.	Introducción	56
3.1.2.	ROS	57
3.1.3.	Visual servoing (Vicon)	59
3.1.4.	Descripción del experimento	59
3.1.4.1.	Descripción del diagrama de pescado	61
4.	Resultados en Simulación y Experimentales	65
4.1.	Simulación del Modelo UAV carga	65
4.2.	Simulación modelo discreto	67
4.2.1.	Resultados Experimentales	69
4.2.2.	Control PD	74
5.	Conclusiones y trabajos futuros	79
5.0.1.	Conclusiones	79
5.0.2.	Trabajos futuros	79
A.	Acrónimos y glosario	81
A.1.	Lista de acrónimos	81

A.2. Glosario	82
B. Diagramas de bloques	85
Bibliografía	89

Índice de figuras

2.1. Vehículo aéreo de la marca PARROT® modelo Bebop 1.	8
2.2. Sentido de giro de los motores.	9
2.3. Modelo 2 vehículos y carga.	12
2.4. Modelo 2 vehículos y carga simplificado.	24
2.5. Perspectiva frontal de la configuración deseada.	25
2.6. Sistema vehículo-carga en equilibrio.	27
2.7. Descripción por bloques de la red neuronal artificial.	33
2.8. Posiciones reales y estimadas.	38
2.9. Esquema de control neuronal.	39
2.10. Desempeño del controlador PIDMW.	42
2.11. Descripción de la estrategia de control.	44
2.12. Grafica de conexión para 2 UAV y líder virtual.	52
3.1. Esquema de conexiones para la plataforma experimental.	57
3.2. Comunicación entre nodos para 2 UAV.	58
3.3. Ejemplo ilustrativo del ambiente Vicon Tracker 2.0.	60
3.4. Diagrama Causa - Efecto del experimento	61
3.5. Vehículos en condición inicial	62
3.6. Vehículos en vuelo trasladando una carga.	63
3.7. Vehículos en vuelo con otra vista.	64
4.1. Simulación del modelo discreto.	66
4.2. Simulación del modelo discreto.	67

ÍNDICE DE FIGURAS

4.3. Resultado experimental para el UAV 1.	70
4.4. Resultado experimental para el UAV 2.	71
4.5. Ganancias adaptables del control PIDMW en el eje Z.	72
4.6. Señales de control Cooperativo y PIDMW.	73
4.7. Índice de desempeño de ambos controles (PIDMW y PD)	74
4.8. Vuelo del UAV 1 (Líder) y errores (PIDMW y PD)	75
4.9. Vuelo del UAV (Seguidor) y errores (PIDMW y PD)	76
4.10. Vuelo de los 2 UAV y la carga (PIDMW y PD)	77
B.1. Diagrama a bloques de un vehículo y red neuronal.	85
B.2. Diagrama a bloques de la red neuronal artificial wavelet.	86
B.3. Diagrama de bloques de la red que usa la entrada $y([k - 1]T)$	87
B.4. Diagrama a bloques de la ley de control PIDMW.	88

Introducción

Presentación

En esta sección, se explora un tema que ha tomado interés debido a los recientes avances tecnológicos en el campo de la aeronáutica civil. Los vehículos aéreos no tripulados (Unmanned Aerial Vehicles o UAV's por sus siglas en ingles), son sistemas complejos capaces de realizar diversas tareas tanto recreativas como bélicas e incluso se incorporan a la cultura popular como herramienta de trabajo en algunos oficios. Estos dispositivos pueden ser vistos como un sistema aeronáutico completo, el cual incluye sensores tales como centrales inerciales, acelerómetro, giroscopio, cámaras, sistemas de posicionamiento global, barómetro, etc. Al ser un sistema complejo es necesario realizar un análisis de estabilización y seguimiento de trayectorias que los fabricantes de este tipo de vehículos guardan celosamente. Lo que deja al usuario final encontrar las aplicaciones tales como: búsqueda y seguimiento, operaciones de espionaje, operaciones de rescate de objetos, vigilancia o transporte de cargas.

La mayoría de las tareas descritas como vigilancia y espionaje son posible realizarlas mediante un único vehículo, pero tareas como búsqueda donde el área es extensa pueden usarse múltiples vehículos y por medio de algoritmos multi-agentes reducir el tiempo y perímetro de búsqueda; el tema que se aborda es el traslado de un objeto con al menos dos vehículos aéreos que llevan la carga o *payload* desde un punto A hasta un punto B rechazando perturbaciones no modeladas producidas por la misma.

Es bien conocido que el problema de levantar un objeto de características relevantes

y transportarlo a otro lugar se facilita aplicando la filosofía de divide y vencerás. Los vehículos aéreos en particular se clasifican en diferentes categorías, desde los que son simples aviones de un solo motor, aeronaves de ala fija, vehículos autónomos y no autónomos, hasta los UAV's octarotores (vehículos aéreos con ocho motores).

En adelante se estudian los vehículos con cuatro motores que, a su vez, se clasifican por el tipo de propelas, peso, capacidad energética y cantidad de sensores telemétricos que usan para su gestión y control. Específicamente, los vehículos donde se propone aplicar las leyes de control son los tipo BIBOP 1 de la marca PARROT [®] (las características mencionadas anteriormente son definidas por los estándares del fabricante). El problema de modelado y estabilización de un UAV ya ha sido trabajado en las referencias [32], [7], [43], [24], [34] y muchos otros trabajos; también podemos encontrar documentación acerca del transporte de carga usando vehículos aéreos como se puede encontrar en [31], [5], [40], [20], [33]. Por otro lado el control neuronal wavelet se ha estudiado en [42], [41].

Los algoritmos que modelan el comportamiento de los sistemas multi-agentes se encuentran publicados en [30], o en [17]; este problema conlleva muchas imposiciones debido que al transportar una carga mediante sistemas multi-agente implica considerar las dinámicas, trayectoria, estabilización y postura de la carga, además las velocidades de traslación y de rotación de los enlaces de los UAV's a la carga. Debido a que las leyes de control existentes para los sistemas multi-agente no consideran enlaces agente-carga en forma directa, se busca estudiar alternativas y estrategias para dicho enfoque.

Planteamiento del problema

Dado un conjunto de dos vehículos aéreos no tripulados, que en formación son utilizados para transportar en equipo un objeto de geometría regular y de peso menor que los vehículos, usando cuerdas flexibles no elásticas, sin masa, como soporte de carga, no se conoce una ley de control inteligente que mantenga las posiciones de la carga y del conjunto de vehículos en el eje Z , además que, mediante una ley de control multi-agente, mantenga la formación en los ejes $(X-Y)$ al trasladar el objeto, de forma que el conocimiento obtenido allane el camino hacia el desarrollo de prototipos para

vuelo en exteriores e investigación para un conjunto de 3 o más vehículos.

Justificación

El conocimiento que se obtenga de lo que se propone será útil en la realización de misiones orientadas a llevar objetos a regiones de difícil alcance, y en operaciones de búsqueda y rescate de objetos; además, será útil para ampliar la teoría que se tiene cuando el trabajo es llevado a cabo por solamente un dron, ampliar el conocimiento que se tiene acerca de la manera en que colaboran vehículos aéreos bajo configuraciones específicas en las que el visual servoing es usado como herramienta para obtener los valores de variables importantes en el control del sistema, y enriquecer el tipo de sistemas inteligentes que se pueden analizar usando métodos no convencionales de control, incluyendo la implementación de los mismos.

Objetivo

Analizar, diseñar e instrumentar una estrategia de control, incluyendo un esquema distribuido para un conjunto de vehículos aéreos no tripulados proponiendo un control no convencional PIDWM (Proportional, Integrative and Derivative Multiresolution Wavelet Controller) con ganancias adaptables sintonizadas por medio de una red neuronal del tipo RBF (Radial Base Function) Wavelet para la estimación de los parámetros no lineales de la planta y empleando un algoritmo multi-agente que considere las dinámicas de la carga, con la idea de trasladar una carga usando cuerdas flexibles y llevarla por una trayectoria especificada, considerando perturbaciones externas como corrientes de aire, cambios en el centro de masa del objeto a levantar, etc.

Objetivos específicos

Los objetivos específicos en este trabajo de investigación son los siguientes:

- Diseñar una red neuronal para cada uno de los vehículos aprovechando la teoría wavelet disponible para poder estimar los parámetros de la planta.

- Usando las estimaciones, encontrar la sintonización del controlador PIDMW y mediante la teoría wavelet disponible aplicar dicho algoritmo para obtener un vuelo estable de cada vehículo.
- Aplicar el algoritmo multi-agente con dinámica de carga usando el sistema operativo ROS (Robotics Operating System) con el propósito de entrenar la red neuronal.
- Realizar el experimento completo usando diferentes tipos de cargas, perturbaciones, arquitectura de la red, etc., para posteriormente analizar el desempeño con base al error de trayectoria de los vehículos y de la carga.

Hipótesis

Usando redes neuronales artificiales del tipo RBF y métodos no convencionales de control con el controlador PIDMW para sistemas no lineales, es posible coordinar un conjunto de vehículos aéreos no tripulados mediante la especificación de un plano de referencia donde se tomen en cuenta las tensiones para levantar una carga por medio de cuerdas flexibles y transportarla en una trayectoria definida.

Contribuciones

Aún cuando existen diversos autores que han estudiado el problema de levantamiento de carga por un enjambre de UAV's, no necesariamente del tipo que se especifica, no se tiene conocimiento acerca de métodos no convencionales, basados en inteligencia artificial, y con los cuales se obtengan criterios para sincronizar a los elementos del enjambre, de tal forma que se eviten colisiones entre ellos y que su dinámica sea estable.

Existen trabajos de investigación como Michael et al. [28] y Lee [20], donde ya trabajan con un modelo dinámico y control para una cantidad n de agentes cada uno con leyes de control y enfoques distintos. Este trabajo se centra en el estudio de dos vehículos dejando el caso de n agentes para trabajos posteriores.

Un enfoque poco tradicional para lidiar con este tipo de circunstancias es el uso

de redes neuronales artificiales orientadas a la solución de problemas de cooperación entre agentes. En particular, no se cuenta con estudios en donde se empleen redes neuronales artificiales wavelet como sustento en la definición de la ley de control del sistema multi-agente.

Estancia académica y artículo

Durante el desarrollo del tema de tesis se realizó una estancia académica en la Universidad Texas A&M Corpus Christi, USA, financiada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), en la que, bajo el asesoramiento del Dr. Luis Rodolfo García Carrillo, se realizaron diversos experimentos en el laboratorio del departamento de ingeniería de dicha universidad. Los resultados obtenidos mediante la implementación se describen en el capítulo IV.

Gracias a que se obtuvieron resultados positivos durante la implementación física de los algoritmos, se redactó un artículo bajo el nombre "Implementation of an artificial neural network wavelet for payload transportation with two UAV agents" el cual, al momento en que se redactan estas palabras, está en proceso de ser sometido a revisión para el *International Conference on Unmanned Aircraft Systems 2019*, (IACUAS'19).

Estructura de la tesis

Este trabajo está dividido en IV capítulos. En el capítulo I se narra la introducción, en el capítulo II se describe el marco teórico bajo el cual está sustentada esta tesis, descripción de la planta, modelo matemático y el control, en el capítulo III se expone el diseño del experimento y los fenómenos observados en experimentación, el capítulo IV muestra los resultados experimentales, gráficas, simulaciones, conclusiones y trabajos futuros.

Marco teórico

Características principales de un UAV

Un cuadirrotor se identifica principalmente por tener 4 motores eléctricos en una estructura de brazo cruzado en configuración o posición cuadrada, donde los motores se encuentran a una distancia equitativa como se aprecia en la figura (2.1). La fuerza de propulsión que cada motor proporciona es la fuente de energía que permite el movimiento del vehículo, la elevación y vuelo estacionario. Controlando la velocidad angular de cada motor es posible manipular el movimiento de traslación y en el espacio; cabe hacer mención que un UAV sólo tiene 4 actuadores y tiene 6 grados de libertad por lo que el sistema es subactuado, controlando la rotación se obtiene movimiento de traslación.

El autor en la referencia [7] afirma que la fuerza producida por cada motor se puede definir como:

$$f_i = kw_i^2, \quad (2.1)$$

donde w es la velocidad angular y k es el coeficiente de desplazamiento de aire debido a la forma de la propela. Los motores giran en un solo sentido por lo que la fuerza de desplazamiento siempre es positiva y el sentido de giro se muestra en la figura (2.2). La fuerza de control es la suma de todas las fuerzas producidas por cada uno de los motores:

$$u = \sum_{i=1}^4 f_i. \quad (2.2)$$



Figura 2.1: Vehículo aéreo de la marca PARROT® modelo Bebop 1.

El movimiento que se produce a lo largo del eje y visto desde el plano de coordenadas generalizadas se le conoce como pitch o cabeceo, y se define por la diferencia $F1$ y $F3$ (Figura 2.2), el movimiento de roll o alabeo se produce con la diferencia $F2$ y $F4$, además el movimiento de yaw o guiñada es la suma de $T_{M1} + T_{M2} + T_{M3} + T_{M4}$ el cual donde T_{Mi} es el momento de reacción del motor i .

En las siguientes referencias [7], [1], [43], se pueden encontrar modelos matemáticos que describen de forma abstracta el comportamiento dinámico de este tipo de vehículos. La posición del vehículo se describe desde el marco fijo del cuerpo del UAV al marco inercial y se representa como:

$$\xi = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3, \quad (2.3)$$

y la posición angular como:

$$\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3, \quad (2.4)$$

la cual se describe usando los ángulos de Euler que por convención se denominan roll-pitch-yaw respectivamente, por lo tanto, las coordenadas generalizadas se describen como:

$$q = [x, y, z, \phi, \theta, \psi] \in \mathbb{R}^6, \quad (2.5)$$

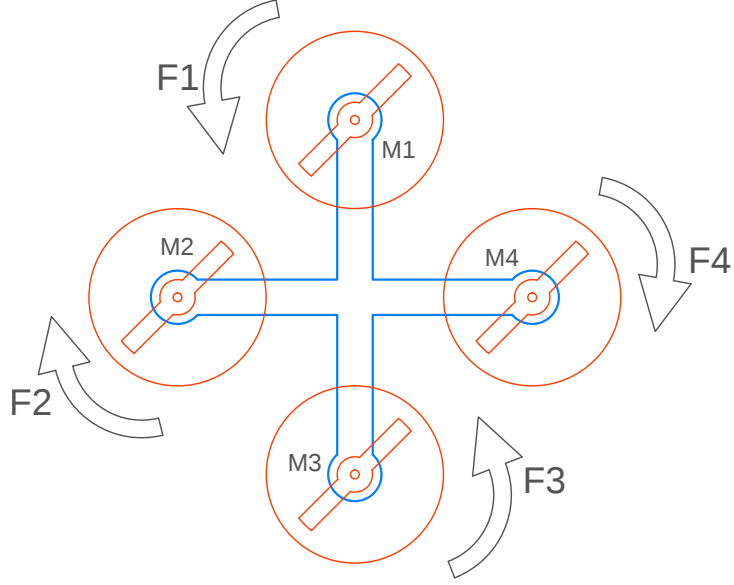


Figura 2.2: Sentido de giro de los motores.

donde su dinámica se puede expresar como:

$$\dot{q} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}] \in \mathbb{R}^6. \quad (2.6)$$

La expresión (2.5) denota la posición del centro de masa del vehículo respecto al eje de referencia y su orientación en ángulos de Euler. La expresión (2.6) denota la velocidad de traslación y de orientación visto desde el marco inercial. Por otro lado, el modelo simplificado utilizado para estudiar las dinámicas de los UAV's se encuentra en [33]. Sea el plano inercial de referencia $\{I\} = \{I_x, I_y, I_z\}$ y sea $\{B\} = \{B_x, B_y, B_z\}$ que representa el plano de cuerpo fijo del vehículo, ambos expresados bajo el formalismo NED (North-East-Down). La Ecuación (2.7) describe las dinámicas del UAV [24], mediante el método de Newton-Euler.

$$\ddot{\xi}_i + \eta \times (m\dot{\xi}_i) = \mathbf{R}^T \mathbf{G} - \mathbf{T}_B, \quad (2.7)$$

donde $\ddot{\xi} \in \mathbb{R}^3$ es la aceleración del centro de masa del vehículo visto desde el sistema de referencia inercial, $\eta \times (m\dot{\xi}_i)$ son las fuerzas centrífugas aplicadas al marco fijo del

2. MARCO TEÓRICO

vehículo las cuales son despreciables, \mathbf{G} representa la gravedad ge_3 , $\mathbf{R} \in SO(3)$ donde $e_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$. Por lo anterior:

$$m\ddot{\xi} = \mathbf{G} - \mathbf{R}\mathbf{T}_B, \quad (2.8)$$

y su dinámica rotacional como:

$$\mathbf{I}\ddot{\eta} + \eta \times (\mathbf{I}\dot{\eta}) + \gamma = \tau, \quad (2.9)$$

donde $\mathbf{I}\ddot{\eta} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ representa la aceleración inercial en el marco libre del vehículo, $\eta \times (\mathbf{I}\dot{\eta})$ las fuerzas centrífugas, γ fuerzas giroscópicas y τ las fuerza de torsión producida por los motores:

$$\ddot{\eta} = \mathbf{I}^{-1}(\tau - \eta \times (\mathbf{I}\dot{\eta}) - \gamma), \quad (2.10)$$

realizando un cambio de variable con el objetivo de simplificar el sistema, se asume que:

$$\tilde{\tau} = \mathbf{I}^{-1}(\tau - \eta \times (\mathbf{I}\dot{\eta}) - \gamma), \quad (2.11)$$

por lo que la aceleración angular se expresa:

$$\ddot{\eta} = \tilde{\tau}. \quad (2.12)$$

Las consideraciones anteriormente expresadas resultan en un modelo simplificado del UAV, que puede ser encontrado en [33], y el cual se define como:

$$m\ddot{x} = -u(\cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\psi) \sin(\theta)), \quad (2.13)$$

$$m\ddot{y} = -u(\sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \cos(\psi) \sin(\theta)), \quad (2.14)$$

$$m\ddot{z} = -u(\cos(\theta) \cos(\phi)) + mg, \quad (2.15)$$

$$\ddot{\psi} = \tilde{\tau}_\psi, \quad (2.16)$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta, \quad (2.17)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi, \quad (2.18)$$

donde \ddot{x} , \ddot{y} y \ddot{z} representan las aceleraciones de traslación, $\ddot{\phi}$, $\ddot{\theta}$ y $\ddot{\psi}$ representan las aceleraciones angulares, donde u representa la entrada de control y τ_i representa la consigna a la fuerza de propulsión angular la cual llamaremos por su nombre en inglés como *thrust*.

El modelo matemático anterior expresa que los drones son vehículos subactuados, de esta manera podemos subdividirlo en subsistemas. El subsistema $(x - \theta)$ controla el movimiento de traslación en el eje x , el subsistema $(y - \phi)$ controla el movimiento de traslación en el eje y , y el subsistema $(z - \psi)$ controla la posición en el eje z . El modelo matemático de un UAV se toma como partida para la descripción del modelo de 2 UAV's con carga, se asume que cada agente tiene la misma dinámica no lineal y la carga genera perturbaciones no modeladas que se adicionan a dichas dinámicas. El comportamiento de este sistema se expresa matemáticamente a continuación.

Modelo de 2 vehículos en 2 dimensiones

El alcance de este documento abarca al estudio de 2 UAV con carga únicamente, y debido a la complejidad del sistema se acota a mostrar el modelo matemático en dos dimensiones asumiendo que los vehículos son del tipo PVTOL (*Planar Vertical Take-off and Landing*) como fue publicado en [6]. Este enfoque se usa para las simulaciones ya que para la plataforma física el experimento se desarrolla en \mathbb{R}^3 .

La masa se considera de forma regular homogénea, la cual tiene coordenadas x_0 y z_0 desde el sistema de referencia global. Dicha masa está sujeta a 2 vehículos mediante cuerdas de longitud l_1 y l_2 , las cuales se consideran sin masa y amarradas a los puntos ρ_1 y ρ_2 en la carga y a los centros de masa de los vehículos, la figura 2.3 da referencia del sistema completo:

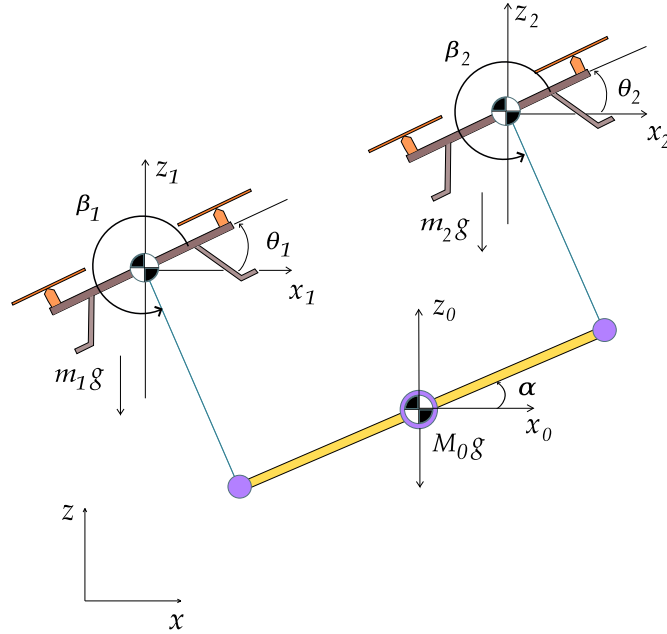


Figura 2.3: Modelo 2 vehículos y carga.

La posición del centro de masa de la carga en el sistema de coordenadas global se denota:

$$[x]_{\beta_{cm}} = \begin{bmatrix} x' \\ 0 \\ z' \end{bmatrix}_{\beta_{cm}}, \quad (2.19)$$

la cual implica que $[x]_{\beta_{cm}} = x'[\beta_1]_{\beta_{cm}} + z'[\beta_3]_{\beta_{cm}}$. Por lo que existen reales a, b, c, d tal que:

$$[\beta_1]_{\beta_{cm}} = a[\alpha_1]_{\beta_{cm}} + b[\alpha_3]_{\beta_{cm}},$$

y

$$[\beta_3]_{\beta_{cm}} = c[\alpha_1]_{\beta_{cm}} + d[\alpha_3]_{\beta_{cm}},$$

donde estos reales se remplazan por $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ y se integran en las dos ecuaciones inmediatas anteriores como:

$$[\beta_1]_{\beta_{cm}} = \cos(\alpha)[\alpha_1]_{\beta_{cm}} - \sin(\alpha)[\alpha_3]_{\beta_{cm}},$$

y

$$[\beta_3]_{\beta_{cm}} = \sin(\alpha)[\alpha_1]_{\beta_{cm}} + \cos(\alpha)[\alpha_3]_{\beta_{cm}},$$

por lo que el vector $[x]_{\beta_{cm}}$ puede ser expresado en términos de la base β_{cm} como sigue:

$$[x]_{\beta_{cm}} = x'(\cos \alpha [\alpha_1]_{\beta_{cm}} + \sin \alpha [\alpha_3]_{\beta_{cm}}) + z'(-\sin \alpha [\alpha_1]_{\beta_{cm}} + \cos \alpha [\alpha_3]_{\beta_{cm}}),$$

reagrupando términos:

$$[x]_{\beta_{cg}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}_{\beta_{cm} \rightarrow \beta_{cg}} \begin{bmatrix} x' \\ 0 \\ z' \end{bmatrix}_{\beta_{cm}}. \quad (2.20)$$

La expresión anterior es la transformación lineal de un sistema de coordenadas local a un sistema de coordenadas global $\beta_{cm} \rightarrow \beta_{cg}$, la matriz R_0 representa la rotación alrededor del eje y y el cero denota la matriz de rotación de la carga, $R_0 \in SO(3)$ por lo que $R_0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $R_0^T R_0 = I$ y $\det[R_0] = 1$.

Por otro lado, \dot{R}_0 se define como:

$$\dot{R}_0 = \dot{\alpha} \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) & 0 & -\cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \end{bmatrix}_{\beta_{cm} \rightarrow \beta_{cg}}, \quad (2.21)$$

reagrupando términos:

$$\dot{R}_0 = \dot{\alpha} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}_{\beta_{cm} \rightarrow \beta_{cg}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\dot{R}_0 = R_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\beta_{cm} \rightarrow \beta_{cg}}, \quad (2.23)$$

por lo tanto podemos simplificar como:

$$\dot{R}_0 = R_0 \hat{\Omega}_0, \quad (2.24)$$

donde $\hat{\Omega}$ es la velocidad angular de la carga en el eje y y define una matriz antisimétrica que cumple con la propiedad $\hat{\Omega}^T = -\hat{\Omega}$. De manera similar, la velocidad angular para cada vehículo se define mediante:

$$R_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & 0 & -\sin(\theta_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta_i) & 0 & \cos(\theta_i) \end{bmatrix}_{\beta_{qr_i} \rightarrow \beta_{cg}}, \quad (2.25)$$

donde $i \in \mathbb{N}$ y denota cada vehículo, por lo anterior \dot{R}_i se expresa:

$$\dot{R}_i = R_i \hat{\Omega}_i. \quad (2.26)$$

Las coordenadas generalizadas se encuentran realizando las siguientes suposiciones, x_i denota la localización del centro de masa de cada vehículo i respecto al sistema de coordenadas global y q_i representa el vector unitario a lo largo de la línea que une al centro de masa de cada vehículo con cada punto de amarre ρ_i de la carga, el vector q_i cambia de base desde el sistema de coordenadas local al global para cada vehículo, entonces podemos decir que la posición de cada vehículo se define como:

$$[x_i]_{\beta_{cg}} = [x_0]_{\beta_{cg}} + R_0[\rho_i]_{\beta_{cm}} - l_i R_i [q_i]_{\beta_{qr_i}}, \quad (2.27)$$

donde, usando el diagrama anterior podemos definir a $[q_i]_{\beta_{qr_i}}$ como:

$$[q_i]_{\beta_{qr_i}} = \begin{bmatrix} \cos \beta_i \\ 0 \\ \sin \beta_i \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

y su derivada como:

$$[\dot{q}_i]_{\beta_{qr_i}} = \dot{\theta}_i \begin{bmatrix} -\sin \beta_i \\ 0 \\ \cos \beta_i \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

La derivada de la posición de los vehículos es dada por:

$$\begin{aligned} [\dot{x}_i]_{\beta_{cg}} &= [\dot{x}_0]_{\beta_{cg}} + \dot{R}_0[\rho_i]_{\beta_{cm}} + R_0[\dot{\rho}_i]_{\beta_{cm}} - l_i \dot{R}_i[q_i]_{\beta_{qr_i}} - l_i R_i[\dot{q}_i]_{\beta_{qr_i}} \\ &= [\dot{x}_0]_{\beta_{cg}} + R_0 \hat{\Omega}_0[\rho_i]_{\beta_{cm}} - l_i R_i \hat{\Omega}_i[q_i]_{\beta_{qr_i}} - \omega_i l_i R_i \begin{bmatrix} -\sin \beta_i \\ 0 \\ \cos \beta_i \end{bmatrix} \\ &= [\dot{x}_0]_{\beta_{cg}} + R_0 \hat{\Omega}_0[\rho_i]_{\beta_{cm}} - l_i R_i \hat{\Omega}_i[q_i]_{\beta_{qr_i}} \\ &\quad - l_i R_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega_i \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta_i \\ 0 \\ \sin \beta_i \end{bmatrix}_{\beta_{qr_i}} \\ &= [\dot{x}_0]_{\beta_{cg}} + R_0 \hat{\Omega}_0[\rho_i]_{\beta_{cm}} - l_i R_i \hat{\Omega}_i[q_i]_{\beta_{qr_i}} - l_i R_i \hat{\omega}_i[q_i]_{\beta_{qr_i}} \\ &= [\dot{x}_0]_{\beta_{cg}} + R_0 \hat{\Omega}_0[\rho_i]_{\beta_{cm}} - l_i R_i (\hat{\omega}_i + \hat{\Omega}_i)[q_i]_{\beta_{qr_i}}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde $[\dot{\rho}_i]_{\beta_{cm}} = 0$ porque no cambia en dirección, ni en magnitud cuando es visto desde el sistema de coordenadas local atado a la carga. El término Ω_0 es el vector de velocidad angular definido por el centro de masa, mientras que ω_i y Ω_i son vectores vistos desde el sistema de coordenadas atado al centro de masa de cada vehículo, estos vectores representan las velocidades angulares de los enlaces de cuerda ($\dot{\beta}_i$), y del vehículo ($\dot{\theta}_i$); de lo anterior definimos:

$$[\Omega_0]_{\beta_{cm}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}_{\beta_{cm}}, \quad [\Omega_i]_{\beta_{qr_i}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_i \\ 0 \end{bmatrix}_{\beta_{qr_i}}, \quad [\omega_i]_{\beta_{qr_i}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}_i \\ 0 \end{bmatrix}_{\beta_{qr_i}}. \quad (2.31)$$

Energía Cinética

La energía cinética del sistema se calcula realizando algunas consideraciones; se asume que la masa de las cuerdas es despreciable, por lo que su contribución a la energía cinética es cero debido a que su momento de inercia de cada cuerda es cero. El método de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones dinámicas, requiere el cálculo de la energía cinética usando las coordenadas generalizadas anteriormente propuestas, por lo que:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2}m_0\|[\dot{x}_0]_{\beta_{cg}}\|^2 + \frac{1}{2}[\Omega_0]_{\beta_{cm}}^T \mathbb{I}_0[\Omega_0]_{\beta_{cm}} + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2}m_i\|[\dot{x}_i]_{\beta_{cg}}\|^2 \\
 &\quad + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2}[\Omega_i]_{\beta_{cm}}^T \mathbb{I}_i[\Omega_i]_{\beta_{cm}}, \\
 &= \frac{1}{2}m_0\|[\dot{x}_0]_{\beta_{cg}}\|^2 + \frac{1}{2}[\Omega_0]_{\beta_{cm}}^T \mathbb{I}_0[\Omega_0]_{\beta_{cm}} \\
 &\quad + \frac{1}{2}m_i\|[\dot{x}_i]_{\beta_{cg}} + R_0\hat{\Omega}_0[\rho_i]_{\beta_{cm}} - l_i R_i(\hat{\omega}_i + \hat{\Omega}_i)[q_i]_{\beta_{qr_i}}\|^2 \\
 &\quad + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2}[\Omega_i]_{\beta_{cm}}^T \mathbb{I}_i[\Omega_i]_{\beta_{cm}},
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

de la expresión anterior los primeros dos términos corresponden a la energía cinética de la carga debida a la velocidad lineal y angular respectivamente, desarrollando términos:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2}m_0\|[\dot{x}_0]_{\beta_{cg}}\|^2 + \frac{1}{2}[0, \dot{\alpha}, 0]_{\beta_{cm}} \mathbb{I}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}_{\beta_{cm}} + \\
 &\quad \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2}m_i \left\| [\dot{x}_i]_{\beta_{cg}} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}_{\beta_{cm}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\beta_{cm}} \begin{bmatrix} \rho_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\beta_{cm}} \right\|^2 \\
 &\quad - l_i \begin{bmatrix} \cos \theta_i & 0 & -\sin \theta_i \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_i & 0 & \cos \theta_i \end{bmatrix}_{\beta_{qr_i}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) \\ 0 & 0 & 0 \\ (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\beta_{qr_i}} \begin{bmatrix} \cos \beta_i \\ 0 \\ \sin \beta_i \end{bmatrix}_{\beta_{qr_i}} \Big\|^2 \\
 &\quad + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2}[0, \dot{\theta}_i, 0]_{\beta_{cm}} \mathbb{I}_i \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_i \\ 0 \end{bmatrix}_{\beta_{qr_i}}.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Las matrices de momentos de inercia de la carga y de los vehículos en \mathbb{R}^3 se definen como $\mathbb{I}_0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $\mathbb{I}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ respectivamente; para este caso en particular, por la forma en que están contruidos los vectores de velocidades angulares, esas matrices son escalares por lo que se substituye $\mathbb{I}_0 = a$, $\mathbb{I}_1 = a_1$ y $\mathbb{I}_2 = a_2$. Multiplicando y expandiendo los términos, la energía cinética se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}m_0(\dot{x}_0^2 + \dot{z}_0^2) + \frac{1}{2}a\dot{\alpha}^2 + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2}a_i\dot{\beta}_i^2 \\
&+ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2}m_i \left((\dot{x}_0 - \dot{\alpha}\rho_i \sin \alpha + l_i(\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) \sin(\theta_i + \beta_i))^2 + \right. \\
&\quad \left. (\dot{z}_0 + \dot{\alpha}\rho_i \cos \alpha - l_i(\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) \cos(\theta_i + \beta_i))^2 \right). \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Energía Potencial

La energía potencial es dada por la expresión (2.35), la cual sólo contiene el efecto debido a la gravedad aplicado a los vehículos y a la carga; se calcula de la forma siguiente:

$$[x_i]_{\beta_{cg}} [k]_{\beta_{cg}} = [x_0]_{\beta_{cg}} [k]_{\beta_{cg}} + R_0 [\rho_i]_{\beta_{cm}} [k]_{\beta_{cg}} - l_i R_i [q_i]_{\beta_{qr_i}} [k]_{\beta_{cg}}, \tag{2.35}$$

cabe mencionar que $[k]_{\beta_{cg}} = [0, 0, 1]^T$, desarrollando términos:

$$\begin{aligned}
[x_i]_{\beta_{cg}} [k]_{\beta_{cg}} &= z_0 + \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}_{\beta_{cm} \rightarrow \beta_{cg}} \begin{bmatrix} \rho_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\beta_{cm}} [k]_{\beta_{cg}} \\
&\quad - l_i \begin{bmatrix} \cos \theta_i & 0 & -\sin \theta_i \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_i & 0 & \cos \theta_i \end{bmatrix}_{\beta_{cm} \rightarrow \beta_{cg}} \begin{bmatrix} \cos \beta_i \\ 0 \\ \sin \beta_i \end{bmatrix}_{\beta_{qr_i}} [k]_{\beta_{cg}}, \tag{2.36}
\end{aligned}$$

simplificando y obteniendo la componente en e_3 :

$$\begin{aligned}
 & z_0 + \begin{bmatrix} \rho_i \cos \alpha \\ 0 \\ \rho_i \sin \alpha \end{bmatrix}_{\beta_{cg}} [k]_{\beta_{cg}} - l_i \begin{bmatrix} \cos \beta_i \cos \theta_i - \sin \beta_i \sin \theta_i \\ 0 \\ \sin \theta_i \cos \beta_i + \cos \theta_i \sin \beta_i \end{bmatrix}_{\beta_{cm}} [k]_{\beta_{cg}} \\
 &= z_0 + \rho_i \sin \alpha - l_i (\sin \theta_i \cos \beta_i + \cos \theta_i \sin \beta_i) \\
 &= z_0 + \rho_i \sin \alpha - l_i \sin(\theta_i + \beta_i).
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Con el conocimiento de que la energía potencial se calcula como $U = mgh$, donde h representa la altura del objeto, podemos resumir que la energía potencial total del sistema se define como:

$$\begin{aligned}
 U &= m_0 g z_0 + \sum_{i=1}^2 m_i g [x_i]_{\beta_{cg}} \cdot k \\
 &= m_0 g z_0 + \sum_{i=1}^2 m_i g (z_0 + \rho_i \sin \alpha - l_i \sin(\theta_i + \beta_i)) \\
 &= m_T g z_0 + \sum_{i=1}^2 m_i g (\rho_i \sin \alpha - l_i \sin(\theta_i + \beta_i)).
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

El Lagrangiano describe la energía conservativa total del sistema y puede calcularse como $L = K - U$, por lo que, para el caso de 2 vehículos en dos dimensiones el Lagrangiano se expresa:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}_0^2 + \dot{z}_0^2) + \frac{1}{2} a \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left((\dot{x}_0 - \dot{\alpha} \rho_1 \sin \alpha + l_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\beta}_1) \sin(\theta_1 + \beta_1))^2 + (\dot{z}_0 + \dot{\alpha} \rho_1 \cos \alpha - l_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\beta}_1) \cos(\theta_1 + \beta_1))^2 \right) + \frac{1}{2} a_1 \dot{\beta}_1^2 + \\
 &\frac{1}{2} a_2 \dot{\beta}_2^2 + m_0 g z_0 + \frac{1}{2} m_2 \left((\dot{x}_0 - \dot{\alpha} \rho_2 \sin \alpha + l_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\beta}_2) \sin(\theta_2 + \beta_2))^2 + (\dot{z}_0 + \dot{\alpha} \rho_2 \cos \alpha - l_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\beta}_2) \cos(\theta_2 + \beta_2))^2 \right) + m_1 g z_0 + \\
 &m_1 g z_0 - m_1 g \rho_1 \sin \alpha - m_1 l_1 g \sin(\beta_1 + \theta_1) + m_2 g z_0 + m_2 g \rho_2 \sin \alpha - m_2 l_2 g \sin(\beta_2 + \theta_2).
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

El método dicta calcular las derivadas parciales respecto a las variables de posición, a continuación se derivan temporalmente, en adelante se desarrollan estas expresiones:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} &= m_0 \dot{x}_0 + \sum_{i=1}^2 m_i (\dot{x}_0 - \dot{\alpha} \rho_i \sin \alpha + l_i (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) \sin(\theta_i + \beta_i)) \\
 &= \left(m_0 + \sum_{i=1}^2 m_i \right) \dot{x}_0 + \sum_{i=1}^2 m_i \left(l_i (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) \sin(\theta_i + \beta_i) - \dot{\alpha} \rho_i \sin \alpha \right) \quad (2.40) \\
 &= m_T \dot{x}_0 + \sum_{i=1}^2 m_i \left(l_i (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) \sin(\theta_i + \beta_i) - \dot{\alpha} \rho_i \sin \alpha \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} &= m_T \ddot{x}_0 + \sum_{i=1}^2 m_i \left(l_i (\ddot{\theta}_i + \ddot{\beta}_i) \sin(\theta_i + \beta_i) + l_i (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i)^2 \cos(\theta_i + \beta_i) \right. \\
 &\quad \left. - \ddot{\alpha} \rho_i \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \rho_i \cos \alpha \right), \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_0} &= m_0 \dot{z}_0 + \sum_{i=1}^2 m_i \left(\dot{z}_0 + \dot{\alpha} \rho_i \cos \alpha - l_i (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) \cos(\theta_i + \beta_i) \right) \\
 &= \left(m_0 + \sum_{i=1}^2 m_i \right) \dot{z}_0 + \sum_{i=1}^2 m_i \left(\dot{\alpha} \rho_i \cos \alpha - l_i (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) \cos(\theta_i + \beta_i) \right) \quad (2.42) \\
 &= m_T \dot{z}_0 + \sum_{i=1}^2 m_i \left(\dot{\alpha} \rho_i \cos \alpha - l_i (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) \cos(\theta_i + \beta_i) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_0} &= m_T \ddot{z}_0 + \sum_{i=1}^2 m_i \left(-l_i (\ddot{\theta}_i + \ddot{\beta}_i) \cos(\theta_i + \beta_i) + l_i (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i)^2 \sin(\theta_i + \right. \\
 &\quad \left. \beta_i) + \ddot{\alpha} \rho_i \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \rho_i \sin \alpha \right), \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} &= a \dot{\alpha} + \sum_{i=1}^2 m_i \left(-\rho_i \sin \alpha (\dot{x}_0 - \dot{\alpha} \rho_i \sin \alpha + l_i (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) \sin(\theta_i + \beta_i)) \right. \\
 &\quad \left. + \rho_i \cos \alpha (\dot{z}_0 + \dot{\alpha} \rho_i \cos \alpha - l_i (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) \cos(\theta_i + \beta_i)) \right) \\
 &= a \dot{\alpha} + \sum_{i=1}^2 m_i \left(\rho_i (\dot{z}_0 \cos \alpha - \dot{x}_0 \sin \alpha) + \dot{\alpha} \rho_i^2 - \rho_i l_i (\dot{\theta}_i \right. \\
 &\quad \left. + \dot{\beta}_i) \cos(\alpha - (\theta_i + \beta_i)) \right), \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} &= a\ddot{\alpha} + \sum_{i=1}^2 m_i \left(\rho_i (\ddot{z}_0 \cos \alpha - \dot{z}_0 \dot{\alpha} \sin \alpha - \ddot{x}_0 \sin \alpha - \dot{x}_0 \dot{\alpha}_0 \cos \alpha) + \right. \\ &\quad \left. \ddot{\alpha} \rho_i^2 - \rho_i l_i (\ddot{\theta}_i + \ddot{\beta}_i) \cos(\alpha - (\theta_i + \beta_i)) + \rho_i l_i (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) (\dot{\alpha} - (\dot{\theta}_i + \right. \\ &\quad \left. \dot{\beta}_i)) \sin(\alpha - (\theta_i + \beta_i)) \right), \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_k} &= a_k \dot{\beta}_k + m_k \left(l_k \sin(\theta_k + \beta_k) (\dot{x}_0 - \dot{\alpha} \rho_k \sin \alpha + l_k (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \sin(\theta_k + \right. \\ &\quad \left. \beta_k)) - l_k \cos(\theta_k + \beta_k) (\dot{z}_0 + \dot{\alpha} \rho_k \cos \alpha - l_k (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \cos(\theta_k + \beta_k)) \right) \\ &= a_k \dot{\beta}_k + m_k \left(l_k (\dot{x}_0 \sin(\theta_k + \beta_k) - \dot{z}_0 \cos(\theta_k + \beta_k)) - \dot{\alpha} l_k \rho_k \cos(\alpha \right. \\ &\quad \left. - (\theta_k + \beta_k)) + l_k^2 (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \right), \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_k} &= a_k \ddot{\beta}_k + m_k \left(l_k (\ddot{x}_0 \sin(\theta_k + \beta_k) + \dot{x}_0 (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \cos(\theta_k + \beta_k) \right. \\ &\quad \left. - \ddot{z}_0 \cos(\theta_k + \beta_k) + \dot{z}_0 (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \sin(\theta_k + \beta_k)) - \ddot{\alpha} l_k \rho_k \cos(\alpha - \right. \\ &\quad \left. (\theta_k + \beta_k)) + \dot{\alpha} l_k \rho_k (\dot{\alpha} - (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k)) \sin(\alpha - (\theta_k + \beta_k)) \right. \\ &\quad \left. + l_k^2 (\ddot{\theta}_k + \ddot{\beta}_k) \right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_k} &= m_k \left(l_k \sin(\theta_k + \beta_k) (\dot{x}_0 - \dot{\alpha} \rho_k \sin \alpha + l_k (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \sin(\theta_k + \beta_k)) \right. \\ &\quad \left. - l_k \cos(\theta_k + \beta_k) (\dot{z}_0 + \dot{\alpha} \rho_k \cos \alpha - l_k (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \cos(\theta_k + \beta_k)) \right) \\ &= m_k \left(l_k (\dot{x}_0 \sin(\theta_k + \beta_k) - \dot{z}_0 \cos(\theta_k + \beta_k)) - \dot{\alpha} l_k \rho_k \cos(\alpha \right. \\ &\quad \left. - (\theta_k + \beta_k)) + l_k^2 (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \right), \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_k} &= m_k \left(l_k (\ddot{x}_0 \sin(\theta_k + \beta_k) + \dot{x}_0 (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \cos(\theta_k + \beta_k) - \ddot{z}_0 \cos(\theta_k \right. \\ &\quad \left. + \beta_k) + \dot{z}_0 (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \sin(\theta_k + \beta_k)) - \ddot{\alpha} l_k \rho_k \cos(\alpha - (\theta_k + \beta_k)) \right. \\ &\quad \left. + \dot{\alpha} l_k \rho_k (\dot{\alpha} - (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k)) \sin(\alpha - (\theta_k + \beta_k)) + l_k^2 (\ddot{\theta}_k + \ddot{\beta}_k) \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

El método dicta derivar el Lagrangiano respecto a las variables de posición, la cuales se calculan de la siguiente manera:

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} = 0, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_0} = -m_T g, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -\sum_{i=1}^2 m_i g \rho_i \cos \alpha, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_k} = m_k g l_k \cos(\theta_k + \beta_k), \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_k} = m_k g l_k \cos(\theta_k + \beta_k). \quad (2.54)$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen restando las derivadas parciales a las temporales, las cuales se expresan:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} - \frac{\partial L}{\partial x_0} &= m_T \ddot{x}_0 + \sum_{i=1}^2 m_i \left(l_i (\ddot{\theta}_i + \ddot{\beta}_i) \sin(\theta_i + \beta_i) + l_i (\dot{\theta}_i + \right. \\ &\quad \left. \dot{\beta}_i)^2 \cos(\theta_i + \beta_i) - \ddot{\alpha} \rho_i \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \rho_i \cos \alpha \right) - 0, \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_0} - \frac{\partial L}{\partial z_0} &= m_T \ddot{z}_0 + \sum_{i=1}^2 m_i \left(-l_i (\ddot{\theta}_i + \ddot{\beta}_i) \cos(\theta_i + \beta_i) + l_i (\dot{\theta}_i + \right. \\ &\quad \left. \dot{\beta}_i)^2 \sin(\theta_i + \beta_i) + \ddot{\alpha} \rho_i \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \rho_i \sin \alpha \right) + m_T g, \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= a \ddot{\alpha} + \sum_{i=1}^2 m_i \left(\rho_i (\ddot{z}_0 \cos \alpha - \dot{z}_0 \dot{\alpha} \sin \alpha - \ddot{x}_0 \sin \alpha - \right. \\ &\quad \left. \dot{x}_0 \dot{\alpha} \cos \alpha) + \ddot{\alpha} \rho_i^2 - \rho_i l_i (\ddot{\theta}_i + \ddot{\beta}_i) \cos(\alpha - (\theta_i + \beta_i)) + \right. \\ &\quad \left. \rho_i l_i (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) (\dot{\alpha} - (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i)) \sin(\alpha - (\theta_i + \beta_i)) \right) + \\ &\quad \sum_{i=1}^2 m_i g \rho_i \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_k} - \frac{\partial L}{\partial \beta_k} &= a_k \ddot{\beta}_k + m_k \left(l_k (\ddot{x}_0 \sin(\theta_k + \beta_k) + \dot{x}_0 (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \cos(\theta_k + \right. \\
 &\quad \left. \beta_k) - \ddot{z}_0 \cos(\theta_k + \beta_k) + \dot{z}_0 (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \sin(\theta_k + \beta_k)) - \right. \\
 &\quad \left. \ddot{\alpha} l_k \rho_k \cos(\alpha - (\theta_k + \beta_k)) + \dot{\alpha} l_k \rho_k (\dot{\alpha} - (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k)) \sin(\alpha - \right. \\
 &\quad \left. (\theta_k + \beta_k)) + l_k^2 (\ddot{\theta}_k + \ddot{\beta}_k) \right) - m_k g l_k \cos(\theta_k + \beta_k), \tag{2.58}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_k} - \frac{\partial L}{\partial \theta_k} &= m_k \left(l_k (\ddot{x}_0 \sin(\theta_k + \beta_k) + \dot{x}_0 (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \cos(\theta_k + \beta_k) - \right. \\
 &\quad \left. \ddot{z}_0 \cos(\theta_k + \beta_k) + \dot{z}_0 (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \sin(\theta_k + \beta_k)) - \ddot{\alpha} l_k \rho_k \cos(\alpha \right. \\
 &\quad \left. - (\theta_k + \beta_k)) + \dot{\alpha} l_k \rho_k (\dot{\alpha} - (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k)) \sin(\alpha - (\theta_k + \beta_k)) + \right. \\
 &\quad \left. l_k^2 (\ddot{\theta}_k + \ddot{\beta}_k) \right) - m_k g l_k \cos(\theta_k + \beta_k), \tag{2.59}
 \end{aligned}$$

las ecuaciones anteriores representan la suma de fuerzas conservativas totales, al observar cuidadosamente el sistema, podemos ver que los vehículos producen fuerzas no conservativas, el f_i es la magnitud de la fuerza de empuje producido por el i -ésimo vehículo. El vector de empuje está dado por $f_i = f_i(-\sin \theta_i, 0, \cos \theta_i)$ visto desde el sistema de coordenadas universales.

Por otra parte, las ecuaciones de movimiento se igualan a las fuerzas no conservativas de los vehículos para obtener el modelo completo del sistema, substituiremos f_i por u_i para tener una notación general de un sistema no lineal $\dot{x} = f(t, x, u)$, a continuación se muestran estas expresiones:

$$\begin{aligned}
 m_T \ddot{x}_0 + \sum_{i=1}^2 m_i \left(l_i (\ddot{\theta}_i + \ddot{\beta}_i) \sin(\theta_i + \beta_i) + l_i (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i)^2 \cos(\theta_i + \beta_i) \right. \\
 \left. - \ddot{\alpha} \rho_i \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \rho_i \cos \alpha \right) = - \sum_{i=1}^2 u_i \sin \theta_i, \tag{2.60}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_T \ddot{z}_0 + \sum_{i=1}^2 m_i \left(- l_i (\ddot{\theta}_i + \ddot{\beta}_i) \cos(\theta_i + \beta_i) + l_i (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i)^2 \sin(\theta_i + \beta_i) \right. \\
 \left. + \ddot{\alpha} \rho_i \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \rho_i \sin \alpha \right) = - m_T g + \sum_{i=1}^2 u_i \cos \theta_i, \tag{2.61}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a\ddot{\alpha} + \sum_{i=1}^n m_i \left(\rho_i (\ddot{z}_0 \cos \alpha - \dot{z}_0 \dot{\alpha} \sin \alpha - \ddot{x}_0 \sin \alpha - \dot{x}_0 \dot{\alpha} \cos \alpha) + \ddot{\alpha} \rho_i^2 - \right. \\
 \left. \rho_i l_i (\ddot{\theta}_i + \ddot{\beta}_i) \cos(\alpha - (\theta_i + \beta_i)) + \rho_i l_i (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) (\dot{\alpha} - (\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i)) \sin(\alpha - (\theta_i + \beta_i)) \right) + \sum_{i=1}^2 m_i g \rho_i \cos \alpha = - \sum_{i=1}^2 \rho_i u_i \sin(\alpha - \theta_i), \quad (2.62)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a_k + m_k l_k^2) \ddot{\theta}_k + m_k \left(l_k (\ddot{x}_0 \sin(\theta_k + \beta_k) + \dot{x}_0 (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \cos(\theta_k + \beta_k) - \right. \\
 \left. \ddot{z}_0 \cos(\theta_k + \beta_k) + \dot{z}_0 (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \sin(\theta_k + \beta_k)) - \ddot{\alpha} l_k \rho_k \cos(\alpha - (\theta_k + \beta_k)) + \right. \\
 \left. \dot{\alpha} l_k \rho_k (\dot{\alpha} - (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k)) \sin(\alpha - (\theta_k + \beta_k)) + l_k^2 \ddot{\beta}_k \right) - \\
 m_k g l_k \cos(\theta_k + \beta_k) = \tau_k, \quad (2.63)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_k l_k^2 \ddot{\beta}_k + m_k \left(l_k (\ddot{x}_0 \sin(\theta_k + \beta_k) + \dot{x}_0 (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \cos(\theta_k + \beta_k) - \right. \\
 \left. \ddot{z}_0 \cos(\theta_k + \beta_k) + \dot{z}_0 (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k) \sin(\theta_k + \beta_k)) - \ddot{\alpha} l_k \rho_k \cos(\alpha - (\theta_k + \beta_k)) + \right. \\
 \left. \dot{\alpha} l_k \rho_k (\dot{\alpha} - (\dot{\theta}_k + \dot{\beta}_k)) \sin(\alpha - (\theta_k + \beta_k)) + l_k^2 \ddot{\theta}_k \right) - m_k g l_k \cos(\theta_k + \beta_k) \\
 = -l_k u_i \cos(\beta_k - \theta_k). \quad (2.64)
 \end{aligned}$$

En la ilustración 2.3 y en el modelo anterior, para describir la posición del UAV's podemos usar la proyección de la cuerda mediante la dinámica del ángulo β , y su orientación mediante θ . El índice $k \in \mathbb{N}$ indica la cantidad de vehículos y por lo tanto de cuerdas por lo que $k \in \{1, 2\}$. El modelo anterior describe matemáticamente el comportamiento dinámico de dos UAV llevando una carga y aunque únicamente describe cómo se comportan todos los elementos en dos dimensiones se busca tener un modelo simplificado de tal forma que se ajuste al caso particular de un vehículo con carga.

La referencia [28] expresa que la cinemática inversa da los principios para resolver la manipulación mecánica en \mathbb{R}^3 con cables, y define dos métodos:

- **Problema inverso:** Dada la posición y orientación de la carga encontrar las posiciones de los vehículos que mantengan el equilibrio del sistema.
- **Problema directo:** Dadas las posiciones y orientaciones de los vehículos encontrar la posición de la carga que mantenga el equilibrio del sistema.

El modelo presentado se formula en base al problema inverso porque dando solución a las ecuaciones diferenciales conocemos la posición de la carga y el ángulo del enlace,

podemos ver que hay un paralelismo en ambos casos, por ello la posición de los vehículos se obtiene mediante la Ecuación (2.27).

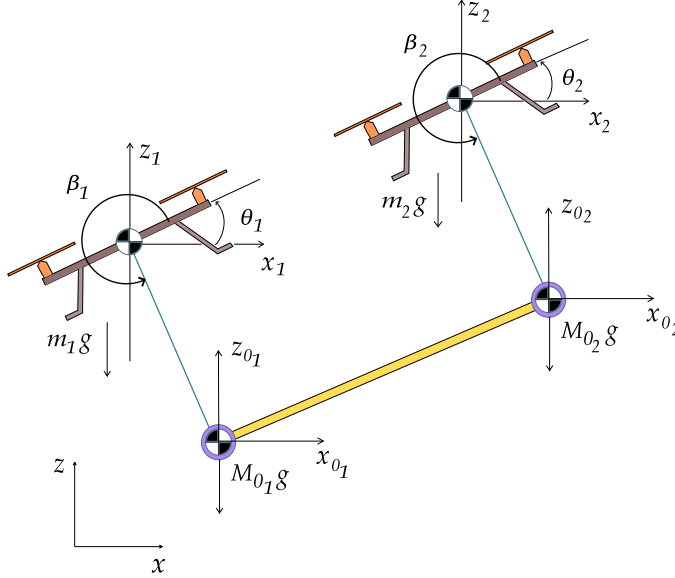


Figura 2.4: Modelo 2 vehículos y carga simplificado.

Modelo Simplificado

El conjunto de ecuaciones anteriores describe la dinámica de dos vehículos transportando un objeto sólo si la masa total de la carga se localiza en el punto medio de la barra. Un caso particular es el descrito por la figura 2.4 donde la masa se distribuye en los extremos del objeto a transportar, el centro de masa sigue en la mitad de la longitud del objeto pero la masa que define al centro de masa se encuentra en los puntos de amarre. Esta consideración reduce el modelo porque no hay dinámica para α ya que la posición angular de la carga estaría regida solo por β . Otra consideración importante en esta clase de sistemas es que la velocidad con la que los vehículos se desplazan y transportan la carga es arbitrariamente pequeña con el fin de despreciar los efectos inerciales, fuerzas de Coriolis, giroscópicos etc. que produce la carga en el sistema de UAV's; por lo anterior, el modelo puede simplificarse a un vehículo con carga:

$$\ddot{x}_0 = \frac{1}{M_T} \left(-ml((\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \sin(\theta + \beta) + (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \cos(\theta + \beta)) - u \sin(\theta) \right), \quad (2.65)$$

$$\ddot{z}_0 = \frac{1}{M_T} \left(ml((\ddot{\theta} + \ddot{\beta}) \cos(\theta + \beta) - (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 \sin(\theta + \beta)) + u \cos(\theta) \right) - g, \quad (2.66)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{1}{m l^2} \left(-lu \cos(\beta - \theta) - m(l(\ddot{x}_0 \sin(\theta + \beta) + \dot{x}_0(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \cos(\theta + \beta) + \dot{z} \cos(\theta + \beta) + \dot{z}_0(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \sin(\theta + \beta)) + l^2 \ddot{\theta}) + m_0 g l \cos(\theta + \beta) \right), \quad (2.67)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{a+m_1 l} \left(\tau - m(l(\ddot{x}_0 \sin(\theta + \beta) + \dot{x}_0(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \cos(\theta + \beta) - \dot{z}_0 \cos(\theta + \beta) + \dot{z}_0(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \sin(\theta + \beta)) - m g l \cos(\theta + \beta)) \right), \quad (2.68)$$

realizando un cambio de variable a la Ecuación (2.68), tal que exprese el *thrust* del vehículo implícitamente en términos de la dinámica angular del UAV, tal que:

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{a+m_1 l} \left(\tau - m(l(\ddot{x}_0 \sin(\theta + \beta) + \dot{x}_0(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \cos(\theta + \beta) - \dot{z}_0 \cos(\theta + \beta) + \dot{z}_0(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \sin(\theta + \beta)) - m g l \cos(\theta + \beta)) \right), \quad (2.69)$$

donde m es la masa de la carga, m_1 es la masa del UAV y $M_T = m + m_1$ es la masa total del sistema UAV-carga, de lo anterior:

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}. \quad (2.70)$$

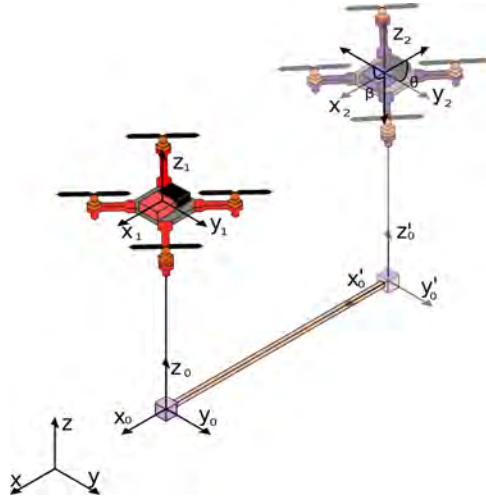


Figura 2.5: Perspectiva frontal de la configuración deseada.

Modelo espacio estado

Una forma más simple de poder analizar el sistema de ecuaciones es obteniendo su forma en espacio estado $\dot{x} = f(x, t, u)$, donde todas las variables anteriores son dinámicas porque cambian respecto del tiempo, por lo tanto, el modelo vehículo con carga en su representación espacio estado se describe como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{M_T} \left(-ml((\dot{x}_6(t) + \dot{x}_8(t)) \sin(x_5(t) + x_7(t)) + (x_6(t) + x_8(t))^2 \cos(x_5(t) + x_7(t))) - u \sin(x_7(t)) \right),\end{aligned}\quad (2.71)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_3(t) &= x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{1}{M_T} \left(ml((\dot{x}_6(t) + \dot{x}_8(t)) \cos(x_5(t) + x_7(t)) - (x_6(t) + x_8(t))^2 \sin(x_5(t) + x_7(t))) + u \cos(x_7(t)) \right) - g,\end{aligned}\quad (2.72)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_5(t) &= x_6(t), \\ \dot{x}_6(t) &= \frac{1}{ml^2} \left(-lu \cos(x_5(t) - x_7(t)) - m(l(\dot{x}_2(t) \sin(x_5(t) + x_7(t)) + x_2(t)(x_6(t) + x_8(t)) \cos(x_5(t) + x_7(t)) + \dot{x}_4(t) \cos(x_5(t) + x_7(t)) + x_4(t)(x_6(t) + x_8(t)) \sin(x_5(t) + x_7(t))) + l^2 \dot{x}_8(t)) + mgl \cos(x_5(t) + x_7(t)) \right),\end{aligned}\quad (2.73)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_7(t) &= x_8(t), \\ \dot{x}_8(t) &= \tilde{\tau}(t).\end{aligned}\quad (2.74)$$

En expresiones siguientes se ausenta la notación $(\cdot(t))$ debido que se obvia el hecho que las ecuaciones dinámicas del modelo se rigen respecto del tiempo, el estado completo del modelo simplificado UAV-carga el cual se usa para analizar cada vehículo independiente se expresa por $\dot{x} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5, \dot{x}_6, \dot{x}_7, \dot{x}_8]^T \in \mathbb{R}^8$, como se describe ampliamente en [16] y [8], mediante una expansión en series de Taylor alrededor del punto de equilibrio se puede obtener el modelo linealizado, como se observa en la Figura 2.6 el punto de equilibrio se encuentra en $\tilde{x} = [x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = \frac{\pi}{2}, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0]^T$. Para satisfacer el punto de equilibrio trivial $x^* = 0 \in \mathbb{R}^8$ entonces $u = M_T g$ ya que la componente de fuerza f debe compensar el peso de la

carga y del vehículo para quedar suspendidos en el aire, y la tensión T producida en la cuerda sea igual a cero. El punto de equilibrio no se encuentra en el cero absoluto pero mediante un cambio de variable $x^* - \tilde{x} = 0$ se transporta el punto de equilibrio \tilde{x} al punto de equilibrio trivial $x^* = 0$, donde el sistema inicia y permanece a lo largo del tiempo [21].

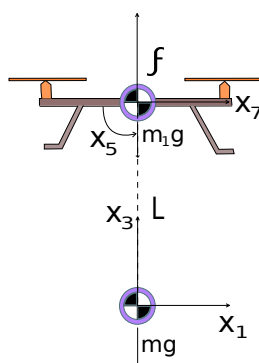


Figura 2.6: Sistema vehículo-carga en equilibrio.

Las dinámicas lineales del modelo en espacio de estado no son del interés analizálas por lo que no se ampliara en ese sentido, por otro lado se propone una ley de control de altura la cual se expresa:

$$u = \frac{1}{\cos x_7} \left(-ml((\dot{x}_6 + \dot{x}_8) \cos(x_5 + x_7) - (x_6 + x_8)^2 \sin(x_5 + x_7)) + m_T(g - u_p) \right), \quad (2.75)$$

donde u_p es el control adaptable basado en una red neuronal con ganancias dinámicas que son actualizadas con base a una tasa de aprendizaje del modelo entrada-salida del sistema.

El sistema es subactuado debido a que tiene más grados de libertad que actuadores, es evidente que la carga carece de estos por lo que la ecuación de movimiento (2.73) modifica su estado con base a la ley de control u propuesta.

Para poder controlar la traslación del vehículo se propone una función $V_x \approx \sin(x_7)$

por lo que la ecuación (2.72) se reescribe de la siguiente forma:

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{M_T} \left(-ml((\dot{x}_6 + \dot{x}_8) \sin(x_5 + x_7) + (x_6 + x_8)^2 \cos(x_7 + x_7)) - uV_x \right), \quad (2.76)$$

donde V_x es un control virtual que estabiliza el movimiento de traslación, debido a que el sistema es subactuado el control de altura puede existir sin el control de traslación pero no de forma contraria, dicha función se define:

$$V_x = \frac{1}{u} \left(-ml((\dot{x}_6 + \dot{x}_8) \sin(x_5 + x_7) + (x_6 + x_8)^2 \cos(x_5 + x_7)) - m_T u_p \right), \quad (2.77)$$

por último el control de orientación del vehículo se expresa como:

$$\tilde{\tau} = -u_p. \quad (2.78)$$

donde u_p es un control con ganancias adaptables basado en la estimación del estado mediante una red neuronal artificial, el cual se detallará más adelante.

Modelo discreto UAV con carga

La red neuronal artificial discreta crea una aproximación entrada - salida, para tal hecho el modelo matemático propuesto debe ser discretizado, usando la aproximación de la derivada de Euler hacia adelante definida en la Ecuación (2.90) podemos definir el modelo UAV-carga discreto, para ahorrar notación usamos:

$$\xi[kT] = \frac{x_6[(k+1)T] + x_8[(k+1)T] - x_6[kT] - x_8[kT]}{T}, \quad (2.79)$$

y definimos el modelo discreto como:

$$x_1[(k+1)T] = x_2[kT]T + x_1[kT], \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned}
 x_2[(k+1)T] = & \frac{T}{M_T} \left(-ml((\xi[kT] \sin(x_5[kT] + x_7[kT]) + (x_6[kT] + \right. \\
 & \left. x_8[kT])^2 \cos(x_5[kT] + x_7[kT]) - u[kT] \sin(x_7[kT])) \right) \\
 & \left. + x_2[kT], \right) \quad (2.81)
 \end{aligned}$$

$$x_3[(k+1)T] = x_4[kT]T + x_3[kT], \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned}
 x_4[(k+1)T] = & \frac{T}{M_T} \left(-ml((\xi[kT] \cos(x_5[kT] + x_7[kT]) - (x_6[kT] \right. \\
 & \left. + x_8[kT])^2 \sin(x_5[kT] + x_7[kT]) + u[kT] \cos(x_7[kT])) \right) \\
 & \left. -gT + x_4[kT], \right) \quad (2.83)
 \end{aligned}$$

$$x_5[(k+1)T] = x_6[kT]T + x_5[kT], \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned}
 x_6[(k+1)T] = & \frac{T}{ml^2} \left(-lu[kT] \cos(x_5[kT] - x_7[kT]) - m(l(x_2[(k+ \right. \\
 & \left. 1)T] \sin(x_5[kT] + x_7[kT]) + x_2[kT](x_6[kT] + \right. \\
 & \left. x_8[kT]) \cos(x_5[kT] + x_7[kT]) + x_4[kT](x_6[kT] + \right. \\
 & \left. x_8[kT]) \sin(x_5[kT] + x_7[kT]) + l^2 x_8[kT])) + \right. \\
 & \left. mgl \cos(x_5[kT] + x_7[kT]) \right) + x_6[kT], \quad (2.85)
 \end{aligned}$$

$$x_7[(k+1)T] = x_8[kT]T + x_7[kT], \quad (2.86)$$

$$x_8[(k+1)T] = \tilde{\tau}[kT] + x_8[kT]. \quad (2.87)$$

La intención de usar un enfoque basado en redes neuronales es el hecho de no conocer o tener el modelo matemático del sistema a controlar, las simulaciones computacionales nos dan información importante para la implementación física y por ello es conveniente modelar y simular antes de implementar. Una vez que se obtiene el modelo del vehículo con carga es posible usarlo para generar señales entrada-salida con el objetivo de simular numéricamente la red neuronal, calcular los errores de seguimiento y aproximación, el entrenamiento de los pesos sinápticos y ganancias iniciales del controlador. A continuación se describe el modelo de la red neuronal y su aproximación de sistemas no lineales.

Modelo no lineal discreto

Un sistema no lineal puede ser representado por las Ecuaciones (2.88) y (2.89), a continuación se describen los principios de la estimación de un modelo no lineal desconocido mediante una red neuronal artificial como fue desarrollado en [5], [21]. El tipo de sistema con el que se pretende trabajar tiene la estructura:

$$\dot{x} = f(x(t)) + g(x(t), u(t)), \quad (2.88)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (2.89)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^p$, $u(t) \in \mathbb{R}^n$ e $y(t) \in \mathbb{R}^s$, $f : \mathbb{R}^p$, y $g : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ son funciones no lineales que pueden ser aproximadas por medio de una red neuronal artificial como fue usada en la referencia [41], para lo que el sistema se discretiza usando la aproximación de la derivada hacia adelante discreta de Euler descrito en [4] como:

$$\dot{x} \approx \frac{x(t+T) - x(t)}{T}, \quad (2.90)$$

dando solución para $x(t+T)$, podemos obtener:

$$x(t+T) = x(t) + f(x(t))T + g(x(t))Tu(t),$$

donde T es el tiempo de muestreo. Evaluando $t = kT$ en (2.89) y (2.89), obtenemos el modelo discreto basado en el método de Euler de primer orden de la forma:

$$x[(k+1)T] = x[kT] + f(x[kT])T + g(x[kT])Tu[kT], \quad (2.91)$$

$$y[(k+1)T] = Cx[(k+1)T], \quad (2.92)$$

substituyendo la ecuación (2.91) en (2.92) la señal de salida en el instante de tiempo $(k+1)T$ es dado por:

$$y[(k+1)T] = C(x[kT] + f(x[kT])T) + C(g(x[kT])T)u[kT], \quad (2.93)$$

la ecuación (2.93) puede tomar la forma:

$$y[(k+1)T] = \Phi[x[kT], T] + \Gamma[x[kT], u[kT], T], \quad (2.94)$$

donde:

$$\Phi[x[kT], T] = C(x[kT] + f(x[kT])T), \quad (2.95)$$

$$\Gamma[x[kT], u[kT], T] = Cg(x[kT], u[kT])T. \quad (2.96)$$

El modelo del sistema se asume desconocido, por lo que la intención es obtener una estimación de la salida de la planta, la Ecuación (2.94) toma la forma:

$$\hat{y}_s[(k+1)T] = \hat{\Phi}[x[kT], T] + \hat{\Gamma}[x[kT], u[kT], T], \quad (2.97)$$

donde el término $\hat{y}_s[(k+1)T]$ es la salida s -ésima de la planta. En este punto es oportuno describir la estructura de la red neuronal tipo RBF Wavelet usada en este trabajo.

Red neuronal artificial Wavelet

La estimación por medio de una WNN (Wavelet Neural Network) de la forma como está desarrollado en [5], usa funciones de activación no lineales $\phi(\tau_{u,j})$ y $\psi(\tau_{u,j})$, a este tipo de funciones se les llama *funciones madre*. Este tipo de mapeos pertenecen a una clase de funciones que sirven como aproximadores universales de otras funciones. Las diferentes wavelet hijas surgen como sub-funciones de la madre con la misma estructura pero con distintos coeficientes. Las funciones que la red buscaría aproximar las denotamos como $\phi_j(\tau_{u,j})$ y $\psi_j(\tau_{u,j})$.

Topológicamente una red neuronal en su primera capa realiza la integración mediante el producto interno entre la entrada a la red y los pesos (multiplicación matricial); en las redes neuronales con funciones de base radial se calcula la distancia del vector de entrada $u(k)$ y salida $y(k)$ a los parámetros de ajuste b_j, a_j, β_j y α :

$$\tau_{u,j} = \frac{||u[kT] - b_j||}{a_j}, \quad (2.98)$$

y

$$\tau_{y,j} = \frac{\|y[(k-1)T] - \beta_j\|}{\alpha_j}. \quad (2.99)$$

donde las expresiones anteriores tienen la propiedad de expandirse o contraerse y además trasladarse respecto a las wavelets madres como se describe en [9]. La función de activación usada, se le conoce como Mexican Hat (Sombrero Mexicano) y se expresa como:

$$\phi_j[kT] = (1 - \tau_{u,j}^2[kT])e^{\left(-\frac{\tau_{u,j}^2[kT]}{2}\right)}, \quad (2.100)$$

con $\tau_{u,j}$ como:

$$\tau_{u,j}[kT] = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i[kT] - b_{i,j}[kT])^2}}{a_j[kT]}, \quad (2.101)$$

y

$$\psi_j[kT] = (1 - \tau_{y,j}^2[kT])e^{\left(-\frac{\tau_{y,j}^2[kT]}{2}\right)}, \quad (2.102)$$

con $\tau_{y,j}$ como:

$$\tau_{y,j}[kT] = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^s (y_i[(k-1)T] - \beta_{i,j}[kT])^2}}{\alpha_j[kT]}. \quad (2.103)$$

La teoría de las RNA RBF (Redes neuronales artificiales con funciones de base radial) establece que los términos $\{a_j, b_{i,j}, \beta_{i,j}, \alpha_j\} \in \mathbb{R}$ juegan un papel importante cuando se trata de aproximar el comportamiento de un sistema; $a_j, \alpha_j \neq 0$ permiten la expansión y contracción, de la misma forma los términos $b_{i,j}, \beta_{i,j} \neq 0$ donde los subíndices denotan las traslaciones al tiempo kT , podemos decir que las aproximaciones mediante este método permiten a las wavelet hijas ϕ_j y ψ_j ajustarse al sistema de forma suave [38]. Los resultados propuestos por [5] y usando la ecuación (2.97) podemos identificar el estado del sistema como:

$$\hat{y}_s[kT] = \sum_{q=1}^m d_{s,q}[kT]\psi_q[kT] + \sum_{j=1}^r w_{s,j}[kT]\phi_j[kT]. \quad (2.104)$$

donde los índices r y m representan la cantidad de funciones de activación wavelet hijas

que usa cada estructura, los pesos de cada neurona en la red neuronal se denotan como $w_{s,j}$ y $d_{s,q}$; el subíndice s indica las \hat{y}_s variables a estimar, por lo anterior las funciones no lineales $\hat{\Phi}_s[x[kT], T]$ y $\hat{\psi}_s[x[kT], T]$ se estiman por:

$$\hat{\Phi}_s(x[kT], \vartheta_{\hat{\Phi}}[kT]) = \sum_{j=1}^m d_{s,q}[kT] \psi_q[kT], \quad (2.105)$$

$$\hat{\Gamma}_s(x[kT], \vartheta_{\hat{\Gamma}}[kT]) = \sum_{j=1}^r \omega_{s,j}[kT] \phi_j[kT]. \quad (2.106)$$

En la figura 2.7 se muestra la organización de la red neuronal en forma gráfica.

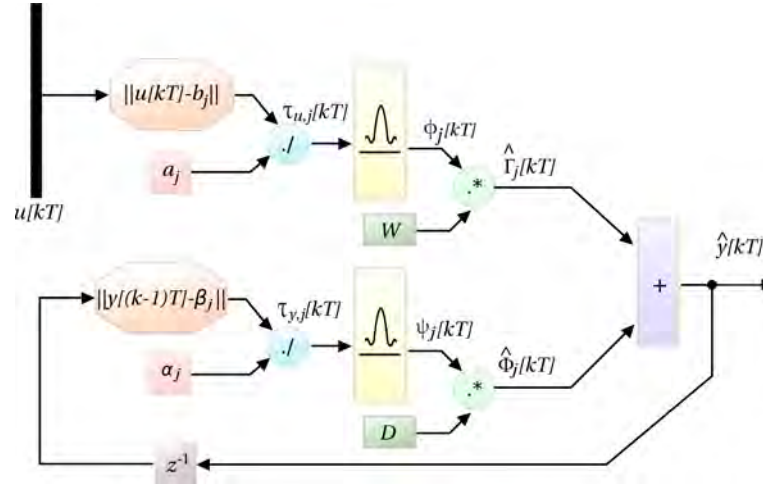


Figura 2.7: Descripción por bloques de la red neuronal artificial.

Entrenamiento de la red neuronal

La red neuronal debe pasar por un proceso denominado aprendizaje el cual se implementa usando el algoritmo LMS (Least Mean Square) el cual busca minimizar el error entre la señal real y la señal estimada. La función de costo $J[kT]$ es una función radialmente no acotada y se define como:

$$J[kT] = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^s \varepsilon_p^2[kT], \quad (2.107)$$

con:

$$\varepsilon_p[kT] = y_p[kT] - \hat{y}_p[kT], \quad (2.108)$$

donde $\varepsilon_p[kT]$ representa el error de estimación entre la salida de la red neuronal y la salida del sistema a estimar. Para la minimización de la función de costo $J[kT]$ se considera el método del paso más pronunciado o del inglés *steepest gradient descent*.

El método minimiza la función de costo al obtener las derivadas parciales de $J[kT]$ respecto de $w_{p,j}[kT]$, $a_j[kT]$, $b_{i,j}[kT]$, $d_{p,q}[kT]$, $\alpha_j[kT]$ y $\beta_{i,j}[kT]$ para poder actualizar la razón de cambio de cada parámetro a lo largo de la dirección negativa del gradiente, de forma específica y como fue desarrollado en [41] los gradientes se expresan como:

$$\nabla_{w_{i,j}} = \frac{\partial J[kT]}{\partial w_{i,j}[kT]} = -\varepsilon_i[kT]\phi_j[kT] \quad (2.109)$$

$$\nabla_{a_j}[kT] = \frac{\partial J[kT]}{\partial a_j[kT]} = \frac{\tau_{u,j}[kT]}{a_j[kT]} \frac{\partial \phi_j[kT]}{\partial \tau_{u,j}[kT]} \sum_{p=1}^s \varepsilon_p[kT]w_{p,j}[kT], \quad (2.110)$$

$$\nabla_{b_{i,j}}[kT] = \frac{\partial J[kT]}{\partial b_{i,j}[kT]} = \frac{(u_i[kT] - b_{i,j}[kT])}{\tau_{u,j}[kT]a_j^2[kT]} \frac{\partial \phi_j[kT]}{\partial \tau_{u,j}[kT]} \sum_{p=1}^s \varepsilon_p[kT]w_{p,j}[kT]. \quad (2.111)$$

Lo gradientes anteriores son usados para actualizar los pesos del modelo entrada salida del elemento $\hat{\Gamma}_s(x[kT], \vartheta_{\hat{\Gamma}}[kT])$ y los gradientes siguientes se usan para el entrenamiento de la red neuronal que aproxima $\hat{\Phi}_s(x[kT], \vartheta_{\hat{\Phi}}[kT])$.

$$\nabla_{d_{i,j}} = \frac{\partial J[kT]}{\partial d_{i,j}[kT]} = -\varepsilon_i[kT]\psi_j[kT], \quad (2.112)$$

$$\nabla_{\alpha_j}[kT] = \frac{\partial J[kT]}{\partial \alpha_j[kT]} = \frac{\tau_{y,j}[kT]}{\alpha_j[kT]} \frac{\partial \psi_j[kT]}{\partial \tau_{y,j}[kT]} \sum_{p=1}^s \varepsilon_p[kT]d_{p,j}[kT], \quad (2.113)$$

$$\nabla_{\beta_{i,j}}[kT] = \frac{\partial J[kT]}{\partial \beta_{i,j}[kT]} = \frac{(y_i[(k-1)T] - \beta_{i,j}[kT])}{\tau_{y,j}[kT]\alpha^2[kT]} \frac{\partial \psi_j[kT]}{\partial \tau_{y,j}[kT]} \sum_{p=1}^s \varepsilon_p[kT]d_{p,j}[kT]. \quad (2.114)$$

Donde la derivada parcial de $\phi_j[kT]$ y $\psi_j[kT]$ con respecto de $\tau_{u,j}[kT]$ y $\tau_{y,j}[kT]$ son respectivamente:

$$\frac{\partial \phi_j[kT]}{\partial \tau_{u,j}[kT]} = -\tau_{u,j}[kT] \left(2 \exp \left(-\frac{\tau_{u,j}^2[kT]}{2} + \phi_j[kT] \right) \right), \quad (2.115)$$

$$\frac{\partial \psi_j[kT]}{\partial \tau_{y,j}[kT]} = -\tau_{y,j}[kT] \left(2 \exp \left(-\frac{\tau_{y,j}^2[kT]}{2} + \psi_j[kT] \right) \right). \quad (2.116)$$

El método de actualización de pesos sinápticos y parámetros de ajuste LMS es dado por la ecuación recursiva dada por:

$$w_{i,j}[(k+1)T] = w_{i,j}[kT] - \eta_w \nabla_{w_{i,j}}[kT], \quad (2.117)$$

$$a_j[(k+1)T] = a_j[kT] - \eta_a \nabla_{a_j}[kT], \quad (2.118)$$

$$b_{i,j}[(k+1)T] = b_{i,j}[kT] - \eta_b \nabla_{b_{i,j}}[kT], \quad (2.119)$$

$$d_{i,j}[(k+1)T] = d_{i,j}[kT] - \eta_d \nabla_{d_{i,j}}[kT], \quad (2.120)$$

$$\alpha_j[(k+1)T] = \alpha_j[kT] - \eta_\alpha \nabla_{\alpha_j}[kT], \quad (2.121)$$

$$\beta_{i,j}[(k+1)T] = \beta_{i,j}[kT] - \eta_\beta \nabla_{\beta_{i,j}}[kT]. \quad (2.122)$$

donde los ∇_* son los respectivos gradientes de cada parámetro de la red neuronal, en dicho algoritmo los pesos son actualizados en cada paso de iteración k de forma que la función de costo dada por la ecuación (2.107) decrece. Esto se logra al ir cuesta abajo en contra del gradiente. El tamaño de paso η_* se toma menor a 1 y es llamado ganancia de adaptación. Si $\varepsilon_p[kT] \rightarrow 0$ conforme k tiende a ∞ , entonces $\hat{y}_p[kT] \rightarrow y_p[kT]$ [35], [2], [19].

Simulación RNA

La red neuronal artificial estima el estado del sistema usando las entradas $u_i[kT]$ y las salidas $y_p[kT]$, en este primer resultado se muestra el comportamiento del UAV controlado con un PD de la forma como lo realiza [33] sin carga y sin retardo. Las condiciones iniciales usadas para la simulación se denotan en las siguientes líneas.

Cabe hacer mención que las gráficas presentadas se montaron sobre MATLAB SI-

2. MARCO TEÓRICO

MULINK [®]. Para la primera simulación se implementó un control Proporcional - Derivativo para la estabilización del vehículo, la intención es observar el desempeño de la estimación de la red neuronal artificial RBF con función de activación tipo *wavelet mexican hat*; cabe mencionar que la RNA tiene 12 entradas las cuales representan el estado completo del sistema UAV, la red cuenta con 4 neuronas y 12 salidas las cuales representan la estimación de la salida del sistema $\hat{y}_i[kT]$.

La condición inicial del parámetro a_n permite la expansión y contracción de ajuste de la función, con una tasa de aprendizaje lr (*learning rate*) de 0.1.

$$\mathbf{a}_n = [1.6343 \quad 0.87309 \quad 0.25397 \quad 2.038]. \quad (2.123)$$

La condición inicial para el parámetro b_n que permite la traslación en el tiempo discreto kT , la tasa de aprendizaje es de 0.1.

$$\mathbf{b}_n = \begin{bmatrix} 1.2659 & 1.9121 & 1.9136 & 0.84106 \\ -0.026931 & 2.1619 & 1.0761 & 2.0525 \\ 0.557 & 0.31523 & 1.6006 & 1.5844 \\ 1.1371 & 1.851 & 0.26924 & 1.8325 \end{bmatrix}. \quad (2.124)$$

La condición inicial de la matriz de pesos en las neuronas que se encargan de estimar el estado usando la entrada u_i , la tasa de aprendizaje es de 0.3.

$$\mathbf{W}_n = \begin{bmatrix} 3.8732 & -0.41207 & -0.86488 & 1.3597 \\ -0.93914 & -0.643 & -0.030051 & 0.50723 \\ 2.2368 & -2.4187 & -0.16488 & 0.85795 \\ 0.034323 & 1.0256 & 0.62771 & 0.0063515 \\ 0.54075 & 0.34829 & 1.0933 & -1.0632 \\ -0.3312 & -0.8074 & 1.1093 & -0.92613 \\ -0.013277 & 1.1171 & -0.86365 & 0.013392 \\ -0.70445 & -1.6351 & 0.077359 & 0.85591 \\ -0.58217 & -0.27485 & -1.2141 & 0.94629 \\ -0.15966 & -0.11166 & -1.1135 & 0.45845 \\ 1.1074 & 0.33855 & -0.0068493 & -1.309 \\ 0.045612 & 0.48324 & 1.5326 & 0.055107 \end{bmatrix}. \quad (2.125)$$

Las siguientes condiciones iniciales usan las entradas $y_n[(k-1)T]$ para estimar el modelo discreto no lineal completo bajo el mismo enfoque, donde α_n , β_n y D_n

realizan la misma función de a_n , b_n y W_n y al igual que éstas su tasa de aprendizaje es $lr = [0.1 \ 0.1 \ 0.3]$ respectivamente.

$$\alpha_{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 1.0996 & 0.54702 & 0.50327 & 1.9197 \end{bmatrix}. \quad (2.126)$$

$$\beta_{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 0.62432 & 0.46748 & 1.5427 & 0.55964 \\ 1.7664 & 1.4968 & 1.397 & 1.852 \\ 0.69911 & 0.94678 & 1.1 & 1.5074 \\ 0.50325 & 0.67054 & 1.7022 & 0.7720 \end{bmatrix}. \quad (2.127)$$

La estructura de la RNA que estima el estado completo usando la entrada $y_n(k-1)T \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$, por lo tanto la red tiene 12 entradas, y al tener 4 neuronas en su capa oculta, $D_n \in \mathbb{R}^{12 \times 4}$ los cuales son los pesos sinápticos de la segunda red.

$$\mathbf{D}_{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 1.829 & -0.038715 & 1.3551 & 0.84504 \\ 1.7687 & 2.1836 & -1.073 & 1.0143 \\ 1.7401 & 0.53088 & 0.96048 & 1.0486 \\ -1.5725 & 0.3274 & 0.12509 & -1.0723 \\ 0.32669 & -2.3672 & 1.4361 & -3.0211 \\ 1.9367 & 0.7938 & -1.9605 & -1.6971 \\ -0.47817 & 0.61648 & -0.19773 & 0.41205 \\ 0.17988 & 1.0665 & -1.2078 & -0.15509 \\ 0.18993 & 2.2905 & 2.9079 & 0.081106 \\ -1.1978 & -0.1936 & 0.82515 & 1.2903 \\ -0.6595 & -1.9441 & 1.3797 & 0.31062 \\ -1.1972 & -0.53695 & -1.0579 & 1.2784 \end{bmatrix}. \quad (2.128)$$

Las condiciones iniciales fueron obtenidas en primera instancia como elementos aleatorios, una vez terminado el tiempo de simulación, los valores finales de todos los parámetros de ajuste se realimentan como condiciones iniciales para una segunda iteración; las tasas de aprendizaje se mantienen. En las siguientes gráficas se usó la referencia descrita en 2.150, y las condiciones iniciales:

$$x(0) = [-2.27, 0, -1.31, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \quad (2.129)$$

el estado completo del vehículo sin carga:

$$q = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}, \psi, \dot{\psi}, \theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}]. \quad (2.130)$$

2. MARCO TEÓRICO

En la figura siguiente podemos ver la posición del vehículo en el espacio $\xi = [x \ y \ z]^T$, contra la salida estimada de la red neuronal, como fue definido anteriormente $\hat{y}_p[kT] = y_p[kT] - \varepsilon_p[kT]$, si el error tiende a cero entonces la salida estimada es igual a la real del sistema, en 2.8 se aprecian ambas señales.

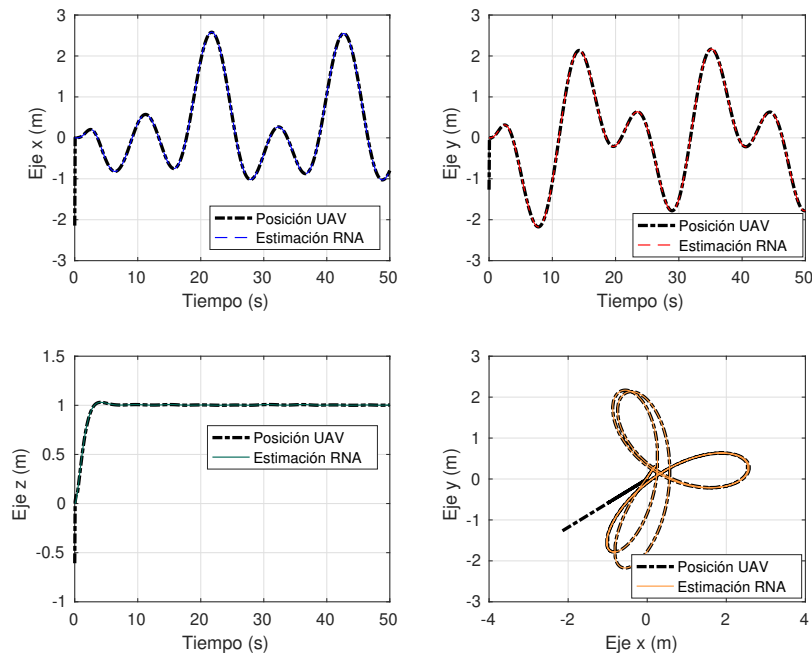


Figura 2.8: Posiciones reales y estimadas.

El esquema de control mostrado en la Figura 2.9 representa por bloques los elementos más importantes para la implementación de la red neuronal y la ley de control; el error de estimación y el de referencia para la correcta sintonización de los pesos y de las ganancias del controlador respectivamente.

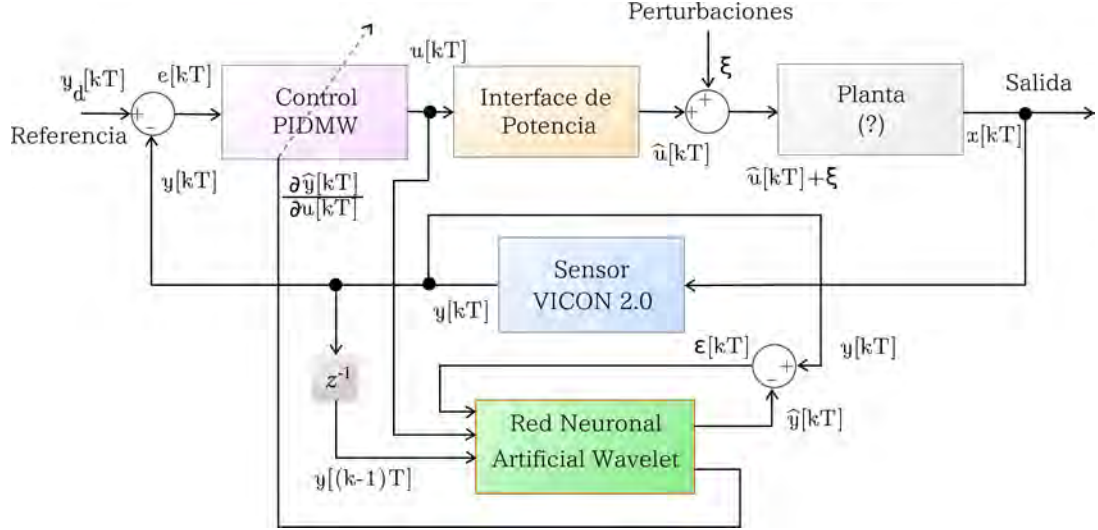


Figura 2.9: Esquema de control neuronal.

Ley de control PID Wavelet

La ley de control PIDMRW (Proportional integral derivate multiresolution wavelet), el cual está basado en el PID clásico con ganancia proporcional, integral y derivativa y la dinámica del error, es la estrategia para el control de altura de los vehículos y la carga. De de publicado en [3] podemos afirmar que el control más utilizado en la industria moderna es el PID debido a la facilidad de implementación y sintonización de las ganancias.

La ley de control PID clásica para sistemas continuos se expresa como:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}. \quad (2.131)$$

donde K_p , K_i , K_d son ganancias que definen el comportamiento de la respuesta transitoria del sistema en lazo cerrado, las cuales son elegidas mediante leyes de sintonización ampliamente descritas como pueden encontrarse en [15]. La ley de control PID discreta para sistemas discretos expresada como $u_p[kT]$ que lleva el estado del sistema $y[kT]$ a la referencia $y_{ref_p}[kT]$ se puede observar como:

$$u_p[kT] = M_{p_p}[kT] + M_{i_p}[kT] + M_{d_p}[kT], \quad (2.132)$$

donde:

$$M_{p_p}[kT] = K_{P_p}[kT]e_p[kT], \quad (2.133)$$

$$M_{i_p}[kT] = K_{I_p}[kT] \left(\frac{(e_p[kT] + 4e_p[(k-1)T] + e_p[(k-2)T])T}{6} + M_{i_p}[(k-1)T] \right), \quad (2.134)$$

$$M_{d_p}[kT] = K_{D_p}[kT] \left(\frac{e_p[kT] - e_p[(k-2)T]}{2T} \right). \quad (2.135)$$

La representación discreta de (2.132) y los términos que lo conforman se obtienen de los métodos numéricos conocidos; la integral del error se obtiene por la regla de Simpson y la derivada del error se obtiene usando el método numérico de diferencia central de segundo orden. La sintonización de las ganancias del controlador PIDMRW es la principal diferencia entre el control clásico y el control neuronal, dicha sintonización se describe a continuación.

Sintonización automática de las ganancias del controlador

La sintonización de las ganancias se realiza mediante la minimización de la función de costo (2.136) por el método del paso más pronunciado. El error de trayectoria se define como:

$$E[kT] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^2[kT] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_{ref_i}[kT] - y_i[kT])^2, \quad (2.136)$$

donde los gradientes para cada ganancia se expresan como:

$$\nabla_{K_{*i}} = \frac{\partial E[kT]}{\partial K_{*i}[kT]} = \frac{\partial E[kT]}{\partial y_i[kT]} \frac{\partial y_i[kT]}{\partial u_i[kT]} \frac{\partial u_i[kT]}{\partial K_{*i}[kT]}. \quad (2.137)$$

Los parámetros de la planta y el modelo matemático son desconocidos por lo que la actualización de los parámetros es indirecta; el estimado de la planta $\hat{y}_p[kT]$ se obtiene usando las entradas $u_p[kT]$ y la salida $y_p[kT]$, de [18] podemos decir:

$$\frac{\partial y_i[kT]}{\partial u_i[kT]} \approx \frac{\partial \hat{y}_i[kT]}{\partial u_i[kT]}, \quad (2.138)$$

el gradiente por lo tanto queda como:

$$\nabla_{K_{*i}} = -e_i[kT] \frac{\partial u_i[kT]}{\partial K_{*i}} \sum_{j=1}^r w_{i,j}[kT] \frac{(u_i[kT] - b_{i,j})}{\tau_{u,j}^2[kT] a_j[kT]} \frac{\partial \phi_j[kT]}{\partial \tau_{u,j}[kT]}, \quad (2.139)$$

en la expresión anterior solo quedan denotados las derivadas parciales de u_i respecto a K_{*i} ; cada ganancia $*i$ donde $*$ pertenece al correspondiente $\{ K_P, K_D, K_I \}$, y los cuales se calculan como sigue:

$$\frac{\partial u_i[kT]}{\partial K_{P_i}} = e_i[kT], \quad (2.140)$$

$$\frac{\partial u_i[kT]}{\partial K_{I_i}} = \frac{(e_i[kT] + 4e_i[(k-1)T] + e_i[(k-2)T])T}{6} + M_{i_i}[(k-1)T], \quad (2.141)$$

$$\frac{\partial u_i[kT]}{\partial K_{D_i}} = \frac{e_i[kT] - e_i[(k-2)T]}{2T}. \quad (2.142)$$

La regla de aprendizaje clásica del libro [10], define que las ganancias del controlador $K_{P_p}[kT]$, $K_{I_p}[kT]$ y $K_{D_p}[kT]$ son actualizadas mediante:

$$K_{i*}[(k+1)T] = K_{*i}[kT] - \eta_{K_{*i}} \nabla_{K_{*i}}[kT]. \quad (2.143)$$

Simulación de ley de control PIDMW de 1 vehículo

La red neuronal necesita pesos iniciales y tasa de aprendizaje, la ley de control necesita dichos parámetros para calcular la ganancias adaptables, a continuación se muestran los pesos iniciales para K_p , K_i y K_d usados en simulación.

$$lr_{kp} = [0.0005 \quad 0.001 \quad 0.003 \quad 0.0005], \quad (2.144)$$

$$lr_{kd} = [0.0005 \quad 0.002 \quad 0.002 \quad 0.002], \quad (2.145)$$

$$lr_{ki} = [0.0001 \quad 0.0001 \quad 0.00005 \quad 0.0001], \quad (2.146)$$

y donde las condiciones iniciales para las ganancias también se encuentran por realimentación, el algoritmo trabaja hasta encontrar los pesos más convenientes, después esos pesos se ingresan como condiciones iniciales durante múltiples eventos de simulación.

Los pesos iniciales:

$$Kp_0 = [0.35 \quad 0.35 \quad 0.6 \quad 0.5], \quad (2.147)$$

2. MARCO TEÓRICO

$$Kd_0 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad (2.148)$$

$$Ki_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad (2.149)$$

con los cuales se obtuvieron las gráficas siguientes, en 2.10 podemos ver los 3 ejes en el espacio con su respectiva referencia, en la cuarta se puede apreciar el plano (X, Y) con la referencia y trayectoria del vehículo.

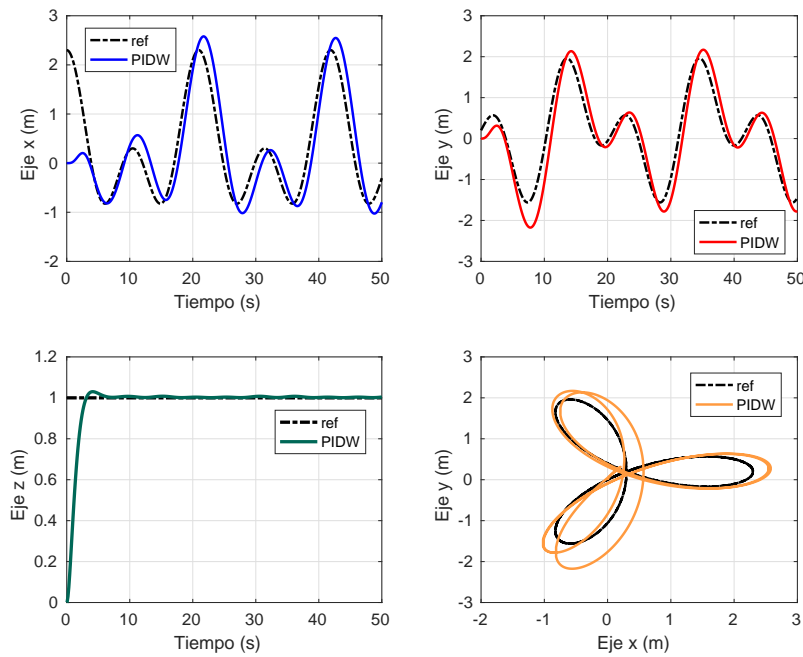


Figura 2.10: Desempeño del controlador PIDMW.

La figura 2.10 muestra las referencias en color negro, la referencia para el eje Z se encuentra constante a un metro despegado del suelo, y las trayectorias para el plano $(X - Y)$ se definen como:

$$y_d = \begin{cases} \text{Eje X} & 20p \cos(\phi) + h \\ \text{Eje Y} & 20p \sin(\phi) + k \\ \text{Eje Z} & 1 \text{ metro} \end{cases}, \quad (2.150)$$

donde $\phi = 0.15t$, $p = 0.1 \cos(n\phi)$, $k = 0.2$, $h = 0.3$ y $n = 3$, la trayectoria genera un pétalo de 3 hojas.

Estrategia de control para el transporte de carga

La red neuronal a usar y el control son estructuras definidas anteriormente, también se presentó la ley de control para múltiples vehículos, sin embargo cada una de las estrategias de control propuestas se encuentran separadas una de la otra, el siguiente paso es definir la estrategia para transportar una carga del punto A al punto B en una trayectoria definida, que involucre el control PIDMW y el control consensus líder - seguidor, por lo que la estrategia de control presentada es dividir el problema en subsistemas, la ley de control PIDMW tiene la capacidad de adaptarse a los cambios en la carga y actualizar las ganancias con base al modelo entrada-salida, por lo tanto el control de altura de cada vehículo será controlado por el control neuronal, y el control de traslación sera controlado por el consensus líder-seguidor, la figura 2.11 resume lo anteriormente dicho.

Sistema Multi-agente

En este capítulo se da una breve introducción a la teoría de los sistemas multi-agente. Una gráfica de comunicación modela el comportamiento de múltiples entidades las cuales llamaremos agentes [22], esta gráfica de conexión se define por el par $G = (V, E)$ con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ como N nodos, y E el conjunto de conexiones entre nodos las cuales se definen por una flecha, la base se denota por v_i y la punta por v_j , el conjunto de vecinos en el grupo del agente v_i se define por $N_i = \{v_j : (v_j, v_i) \in E\}$.

La vecindad que conforma el conjunto N_i representa la cantidad de nodos que entregan información al i -ésimo agente, asociado a cada conexión del conjunto E se le asigna un peso denotado como $a_{ij} > 0$ seleccionado para modelar la fuerza de interacción entre nodos. Una gráfica no direccional se dice cuando la comunicación entre agentes es bidireccional tal que $a_{ij} = a_{ji}$. Se dice que el nodo v_i esta conectado al nodo v_j si existe un camino directo entre v_i a v_j . La distancia de v_i a v_j es la longitud del camino mas corto entre v_i a v_j . La gráfica de agentes G se dice fuertemente conectada

2. MARCO TEÓRICO

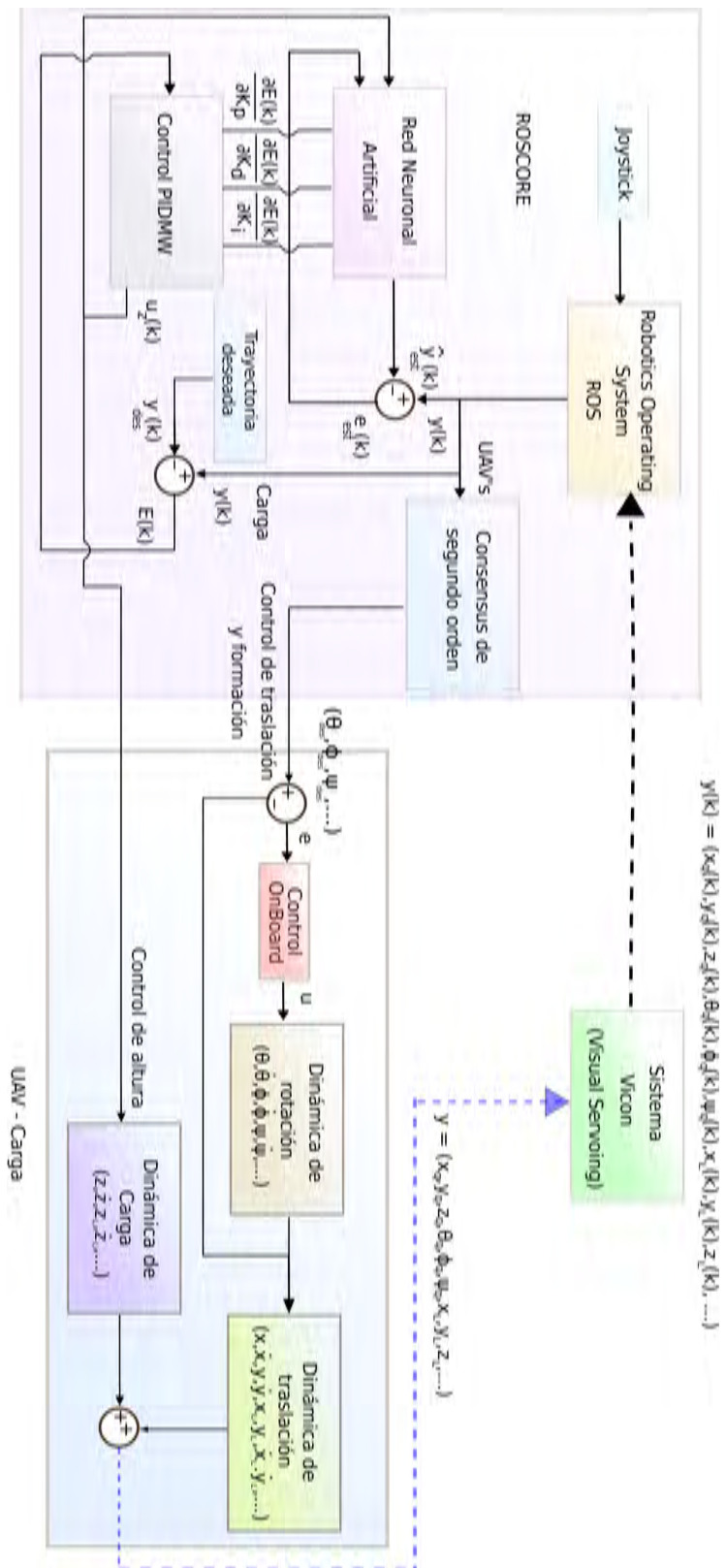


Figura 2.11: Descripción de la estrategia de control.

si v_i, v_j tiene conexión con cada nodo v_i, v_j .

Matriz de conexiones

La teoría algebraica de gráficas es un área donde se pueden estudiar las propiedades una gráfica G mediante ciertas matrices asociadas a ella [11]. La matriz adyacente $A = [a_{ij}]$ o matriz de conexiones con pesos $a_{ij} > 0$ si $(v_j, v_i) \in E$ y $a_{ij} = 0$ de otra forma, además $a_{ii} = 0$. La matriz adyacente A de una gráfica indirecta es simétrica, $A = A^T$. Se define el nodo v_i con un peso como la suma de las filas de A .

Matriz Laplaciana

La matriz de grado de conexión se define como $D = \text{diag}\{d_i\}$ y la matriz Laplaciana de pesos $L = D - A$. Una de las propiedades de esta matriz es que la suma de sus columnas son iguales a cero. la matriz de grado d_i se define como:

$$d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}. \quad (2.151)$$

Comunicación, Gráficas y Consensus

Una red de comunicación puede ser considerada como un conjunto de nodos o agentes que colaboran para realizar una tarea que no podrían lograr por sí mismos. Una gráfica donde la dinámica global de los nodos es (G, x) , donde G siendo la gráfica y N la cantidad de nodos y $x = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_N^T]^T$ como vector de estado global, donde cada nodo tiene una dinámica individual definida por:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.152)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $u \in \mathbb{R}^m$ siendo la entrada de control. Dada una gráfica G , el nodo v_j puede obtener información del agente v_i con el propósito de control por realimentación.

Cada agente se elije, tal que tenga dinámica lineal ampliamente estudiada en [8] porque los vehículos usados en la plataforma física tienen una computadora interna la

cual lleva un sistema de control provisto por el fabricante para controlar las dinámicas rotacionales, de esta forma dichos fenómenos propios del UAV son atendidos por este control *on-board*, dejando que las dinámicas traslacionales puedan ser modeladas mediante un sistema lineal, [29].

El control propuesto por [22] esta dado por $u_i = k_i(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})$, para alguna función $k_i(\cdot)$ se dice distribuido si $m_i < N, \forall i$ tal que, la entrada de control de cada nodo depende propiamente de algún conjunto de todos los nodos. Se dice que con base a la topología de G la ley de control $u_i = k_i(x_i, \{x_j, |j \in N_i\})$ de tal forma que cada nodo puede obtener información de sí mismo y de sus vecinos en N_i , este sistema se le considera sistema de control multi-agente.

El objetivo fundamental de los sistemas con gráficas es el estudio del comportamiento de agentes en un grupo bajo la influencia de la información que se le permite a cada nodo. El problema de sincronización o de seguimiento cooperativo es seleccionar las señales de control u usando solo medidas de los vecinos del nodo i tal que todos los nodos se sincronicen al estado del nodo de control, esto es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_0(t) - x_i(t)\| = 0, \quad (2.153)$$

El objetivo es que los estados de cada agente seguidor se sincronicen con el líder, éste puede ser visto como un exosistema que genera una trayectoria deseada con la consigna de que sólo un número limitado de agentes tiene acceso a la información del nodo líder.

El estado completo de cada agente se asume disponible para un control por realimentación para sí mismo y para la formación de los vecinos. El caso donde el consenso se logra cuando no hay un nodo líder se le conoce como regulador. Cada agente N tiene la misma dinámica de la forma:

$$x_i = Ax_i + Bu_i \quad y_i = Cx_i, \quad i \in N, \quad (2.154)$$

donde $x_i \in \mathbb{R}^n$, es el estado, $u_i \in \mathbb{R}^n$ es la entrada, $y_i \in \mathbb{R}^p$ es la salida medida, los nodos seguidores $N = 1, 2, \dots, N$. Se asume que el par (A, B) es controlable y (A, C) es observable.

Dichos nodos se pueden comunicar bajo un esquema definido por la gráfica de

conexión $G = \{V, E\}$ con N nodos, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y el conjunto de bordes o arcos $E \subset V \times V$. Sea la matriz adyacente $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ donde se asume que no hay conexiones en si mismo, esto es $a_{ii} = 0$. La dinámica del nodo de control, con el subíndice 0 está dada por:

$$\dot{x}_0 = Ax_0, \quad y_0 = Cx_0. \quad (2.155)$$

Los nodos se asumen observables, el diseño de una ley de control cooperativo distribuido se realiza tal que se de solución a la ecuación algebraica del tipo de Riccati (EAR), en este caso $C = I_n$. Para diseñar un control totalmente distribuido la ley de control de cada agente debe respetar la topología y sólo puede usar información local de ese agente, por lo tanto se define el error global de cada agente respecto a su vecindad y a los agentes que tienen información del líder como:

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i) + g_i(x_0 - x_i). \quad (2.156)$$

Se considera el protocolo de control para cada nodo, $i \in N$ dado por:

$$u_i = cK\varepsilon_i. \quad (2.157)$$

con $c > 0$ la ganancia de conexión y una ganancia de re alimentación $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, estos controles son distribuidos en el sentido que cada nodo es implementado usando sólo el error de seguimiento grupal ε_i . La tarea es seleccionar una c y K convenientes tal que todos los agentes se sincronizan con el nodo líder. Con la dinámica (2.152) de cada agente y la ley de control propuesta (2.157) en lazo cerrado para el agente i se define como:

$$\dot{x}_i = Ax_i + cBK \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i) + g_i(x_0 - x_i) \right). \quad (2.158)$$

El análisis del estado global en lazo cerrado se describe usando el producto Kronecker con el símbolo \otimes [23]. Sea el producto Kronecker de matrices $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $F \in \mathbb{R}^{p \times q}$ se define como:

$$D \otimes F = \begin{bmatrix} d_{11}F & \dots & d_{1n}F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}F & \dots & d_{mn}F \end{bmatrix}, \quad (2.159)$$

bajo el cual se satisfacen las siguientes propiedades:

$$(F \otimes D)(H \otimes J) = (FH) \otimes (DJ),$$

$$(F \otimes D)^T = F^T \otimes D^T,$$

$$F \otimes D + F \otimes H = F \otimes (D + H).$$

Las propiedades anteriores pueden ser usadas para obtener el análisis del estado global en lazo cerrado de todos los agentes como:

$$\dot{x} = (I_N \otimes A - c(L + G) \otimes BK)x + (c(L + G) \otimes BK)x_0. \quad (2.160)$$

donde el estado global $x = \text{col}\{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in \mathbb{R}^{nN}$ es la concatenación de columnas de los vectores locales x_1, x_2, \dots, x_N y $x_0 = \text{col}(x_0, x_0, \dots, x_i) \in \mathbb{R}^{nN}$, la matriz identidad $I_N \in \mathbb{R}^{n \times N}$ y $G = \text{diag}\{g_1, g_2, \dots, g_N\}$ la matriz diagonal con los agentes que tienen conexión con el líder, la matriz Laplaciana $L = [l_{ij}] = D - A$ con $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ la matriz en grado de conexión entre vecinos. La matriz Laplaciana también se define como:

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & = j \neq i \\ \sum_{j=1}^N a_{ij} & = j = i \end{cases} \quad (2.161)$$

La ecuación (2.160) expresa el estado global del sistema y del cual podemos definir las matrices:

$$A_c = I_N \otimes A - c(L + G) \otimes BK, \quad (2.162)$$

$$B_c = c(L + G) \otimes BK, \quad (2.163)$$

tal que obtenemos:

$$\dot{x} = A_c x + B_c x_0, \quad (2.164)$$

donde la matriz A_c refleja el lazo cerrado del agente local $(A - BK)$ modificada en la estructura $(L + G)$ que aparece en el lado izquierdo del producto Kronecker, mientras el estado local aparece en el lado derecho. Denotar el error de desacuerdo entre los seguidores y el líder para cada nodo como $\delta_i = x_i - x_0$, se define el vector:

$$\delta = \text{col}\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N\} = x - \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^{nN}. \quad (2.165)$$

El problema de reducir el error de seguimiento cooperativo se resuelve si:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 0, \quad (2.166)$$

con la dinámica del error:

$$\dot{\delta} = \dot{x} - \dot{x}_0 = A_c \delta. \quad (2.167)$$

La matriz $(L + G)$ es no singular e implica que todos sus valores propios $\lambda_i (i \in N)$ están localizados en el semi lado derecho del plano complejo, [36]. Un lema útil es el siguiente [22] :

Lema: Sea $\lambda_i (i \in N)$ los valores propios de $(L + G)$, los cuales pueden o no ser distintos. El sistema $\dot{\delta} = A_c \delta$ es asintóticamente estable si y solo si, todas las matrices $(A - c\lambda_i BK)$, $i \in 1, 2, \dots, N$, son asintóticamente estables, [13].

Prueba: El estado cero del sistema $\dot{\delta} = A_c \delta$ es asintóticamente estable si y solo si, A_c es Hurwitz, en otras palabras todos los valores propios de A_c se sitúan en el plano izquierdo del plano complejo. Por lo que existe una matriz no singular $S \in \mathbb{R}^{n \times N}$ tal que:

$$S^{-1}(L + G)S = J = \begin{bmatrix} J_{n1}(\bar{\lambda}_i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n2}(\bar{\lambda}_i) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{nK}(\bar{\lambda}_i) \end{bmatrix}, \quad (2.168)$$

donde $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$ y $J_{n_1}, J_{n_2}, \dots, J_{n_k}$ son bloques de Jordan, de tamaño n_1, n_2, \dots, n_k .

Los valores propios $\bar{\lambda}_i$ de $(L + G)$ no son necesariamente distintos, similarmente de la transformación de A_c se obtiene una matriz triangular a bloques.

$$\begin{aligned} \bar{A}_c &= (S \otimes I_n)(I_n \otimes A - c(L + G) \otimes BK)(S \otimes I_n) \\ &= (S \otimes I_n)^{-1}(I_n \otimes A)(S \otimes I_n) - c(S \otimes I_n)^{-1}(L + G)(S \otimes I_n) \otimes BK \quad (2.169) \\ &= I_n \otimes A - cJ \otimes BK, \end{aligned}$$

cabe mencionar las entradas de J como $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\} = [\bar{\lambda}, \dots, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k, \dots, \bar{\lambda}_k]$. Debido a que los valores propios de la matriz triangular son la unión del conjunto de valores propios a bloques en la diagonal, \bar{A}_c es Hurwitz si y sólo si las entradas de la matriz diagonal $A - c\lambda_i BK$ ($i = 1, 2, \dots, N$) son Hurwitz. Bajo esta condición A_c es Hurwitz. \square

Diseño local para el protocolo de sincronización

La prueba anterior establece que el error de desacuerdo $\dot{\delta}$ es asintóticamente estable, lo que implica que los seguidores seguirán al líder de la misma forma, mientras se cumplan los requerimientos anteriormente descritos. Ahora se presenta el caso donde se eligen c y K convenientes tal que se cumpla el teorema anterior, para lo cual se usa el teorema publicado en [44] :

Considere el protocolo de control distribuido local $u_i = cKe_i$, suponer que el par (A, B) es controlable con matrices $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ definidas positivas; sea la ganancia de control por realimentación de estado K como:

$$K = R^{-1}B^T P, \quad (2.170)$$

donde P es la única solución definida positiva, de la ecuación algebraica del tipo de Riccati:

$$0 = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P. \quad (2.171)$$

El error dinámico global de desacuerdo es asintóticamente estable, por lo que la ganancia de acoplamiento c satisface:

$$c \geq \frac{1}{2 \min_{i \in N} \operatorname{Re}(\lambda_i)}, \quad (2.172)$$

con λ_i ($i \in N$) los valores propios de $(L + G)$ de esta forma se pueden encontrar K y c convenientes tal que se cumpla (2.166). La ganancia K del control por realimentación de variable de estado se diseña dando solución a (2.171) y por lo tanto la topología de la gráfica de conexiones entra en la elección de la ganancia de acoplamiento c en (2.172). Notar que el control por realimentación de variable de estado K es la ganancia óptima que minimiza el índice de desempeño [23]:

$$J_i = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i) dt, \quad (2.173)$$

sujeto a las dinámicas locales (2.152) del agente i , por lo tanto del teorema anterior nos muestra que el diseño de control por realimentación de estado es óptimo localmente para cada agente y garantiza la sincronización de todos los agentes en cualquier gráfica de conexión que tiene una topología de árbol con un líder como nodo raíz.

En la referencia [29] se pueden encontrar las dinámicas de traslación para este tipo de vehículos específicamente como:

$$\dot{x}_{xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.21 & -2.42 \end{bmatrix} x_{xi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9922 \end{bmatrix} u_{xi}, \quad (2.174)$$

$$\dot{x}_{yi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.21 & -2.64 \end{bmatrix} x_{yi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9801 \end{bmatrix} u_{yi}, \quad (2.175)$$

$$\dot{x}_{zi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -21.15 & -6.63 \end{bmatrix} x_{zi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 16401.49 \end{bmatrix} u_{zi}, \quad (2.176)$$

2. MARCO TEÓRICO

se eligen Q y R arbitrariamente como:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * 0.0001, \quad (2.177)$$

y $R = 1000$. Usando Q , R y las dinámicas lineales podemos dar solución a (2.171) para P y obtener el control (2.157) obtenemos las ganancias para el control distribuido de tal forma que se obtuvieron las ganancias $K_x = [0.3162 \quad 0.5436 \quad 0.2748] * 0.001$ para el sub sistema $(x - \theta)$ y $K_y = [0.3162 \quad 0.5494 \quad 0.2642] * 0.001$ para el subsistema $(y - \phi)$; estas ganancias se obtuvieron mediante la herramienta LQR de Matlab 2016 Mathworks $\text{\textcircled{R}}$, corriendo en un sistema operativo Linux 16.04 LTS, 64-bits.

La Ecuación (2.172) define la forma de calcular c la cual define el nivel de conexión entre los agentes, el valor de esta constante determina la rigidez de la comunicación que los agentes comparten con sus vecinos y la cual afecta la respuesta dinámica del enjambre, el intervalo es abierto por lo que la ecuación da un rango el cual se tomará en $c = 0.5$ calculado en base a la matriz Laplaciana:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.178)$$

La matriz $L + G$ debe ser no singular como se definió anteriormente, lo que implica que sus filas y o columnas son linealmente independientes, y lo es debido a que su determinante es -1 ; la configuración para el caso donde hay dos vehículos con carga se muestra en la figura 2.12,



Figura 2.12: Grafica de conexión para 2 UAV y líder virtual.

la referencia se considera un líder virtual que le proporciona información al vehículo líder de la formación, y un segundo agente que obtiene la información del líder.

Diseño del control PD

Las estrategias de control anteriormente descritas ofrecen una solución para el transporte de carga mediante dos agentes, para poder tener un contraste con otra estrategia de control se diseña un control por realimentación de estado, el cual para sistemas electromecánicos se considera como una estructura de control PD. En conocimiento de las dinámicas lineales de los vehículos las cuales fueron definidas en las Ecuaciones (2.174) a (2.176), se elije la ley de control como $u = -Kx$, para lo que primeramente se verifica la matriz de controlabilidad como $\mathbf{M} = [B|AB|A^2B]$, y del cual se usará como referencia para el diseño del controlador, las matrices de controlabilidad se definen como:

$$\mathbf{M}_{x_i} = 1.0 \times 10^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.9922 \\ 0 & 0.9922 & -2.4011 \\ 0.9922 & -2.4011 & 4.6102 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{M}_{x_i}| = -9.7678 \times 10^{11}, \quad (2.179)$$

$$\mathbf{M}_{y_i} = 1.0 \times 10^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.9801 \\ 0 & 0.9801 & -2.5875 \\ 0.9801 & -2.5875 & 5.6450 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{M}| = -9.4148 \times 10^{11}, \quad (2.180)$$

$$\mathbf{M}_{z_i} = 1.0 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1640 \\ 0 & 0.1640 & -1.0874 \\ 0.1640 & -1.0874 & 3.7407 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{M}| = -4.4121 \times 10^{12}, \quad (2.181)$$

por lo que el determinante de cada matriz es diferente de cero, y por lo tanto, las tres matrices tienen rango $\mathbf{M} = 3$. Cada subsistema de estado es completamente controlable, y es posible la colocación arbitraria de los polos lo cuales se elijen tales que cumplan

2. MARCO TEÓRICO

el criterio de estabilidad de Routh [15]. Ya que la parte real de las raíces en (2.182) se localizan en el plano izquierdo del semiplano complejo se garantiza la estabilidad de los subsistemas en lazo cerrado.

$$s = -0.7 + 1.8i, \quad s = -0.7 + 1.8i, \quad s = -1. \quad (2.182)$$

Dichos polos se eligen arbitrariamente porque se sabe con experiencia que con dicho conjunto de polos en lazo cerrado se obtiene una respuesta transitoria aceptable, es decir, el UAV tiene una respuesta transitoria sin carga y sin perturbaciones externas, por lo que podría considerarse como una mala sintonización debido a que no se consideran los posibles efectos que produzca la carga en la dinámica de los vehículos, al contrario, las dinámicas lineales propuestas son para un UAV en condiciones normales de operación. La determinación de la ganancia K se realiza mediante la muy difundida fórmula de Ackermann y por lo que se obtienen:

ganancias para el subsistema $(x - \theta)$,

$$K_x = 1.0 \times 10^{-3} [0.3759 \quad 0.3951 \quad -0.0020], \quad (2.183)$$

ganancias para el subsistema $(x - \theta)$,

$$K_y = 1.0 \times 10^{-3} [0.3806 \quad 0.4000 \quad -0.0245], \quad (2.184)$$

ganancias para el subsistema $(x - \theta)$,

$$K_z = 1.0 \times 10^{-3} [0.2274 \quad -0.9767 \quad -0.2579]. \quad (2.185)$$

El sistema VICON no provee el estado completo, para el desarrollo de la implementación física se usó un observador de alto orden de Levant para obtener las derivadas y el cual se describe ampliamente en [37], y por lo que no se relatara más al respecto.

Diseño del experimento

En este capítulo, se presenta la estrategia a utilizar para la implementación, experimentación y validación del experimento. Para poder realizar estas tareas es necesaria la repetición del experimento, y aunque las condiciones de experimentación no cambien, siempre se encuentran resultados variables. En el laboratorio de vuelo donde se realizan las pruebas se tienen condiciones, que cambian muy poco entre experimentos, por lo que el error de experimentación no cambiara notablemente.

El objetivo de diseñar el experimento es encontrar mejoras al desempeño cambiando parámetros, o en su defecto reducirlo. Existen parámetros constantes y variables, los parámetros constantes no se pueden cambiar debido a que son inherentes de la plataforma (masa del vehículo, capacidad energética, tiempo de vuelo, etc.) pero existen parámetros variables que son posibles para poder cambiarse con fines experimentales, la tabla 3.1 ilustra los parámetros.

La tabla ofrece información de la que podemos hacer algunas deducciones y suposiciones; los vehículos deben ser capaces de levantar la carga, por lo que ésta no debe ser mayor al peso del vehículo. Esta hipótesis crea una restricción de seguridad para levantar un tercio del peso máximo del UAV, por lo tanto, suponemos que 3 vehículos pueden levantar el peso de un solo vehículo.

La longitud de cuerda que enlaza los vehículos a la carga también puede ser modificada, la restricción que existe es la distancia entre el centro de masa donde está anclado y el punto de amarre, si la cuerda es muy pequeña los vehículos pueden colisionar, si es muy grande debido a que es vuelo en interiores, el sistema se puede elevar hasta el

3. DISEÑO DEL EXPERIMENTO

punto donde no sea visible para el sistema de cámaras.

La carga a levantar puede ser cambiada, empezando por una carga regular y después cambiarla por una forma irregular; si la carga es de forma regular el centro de masa se mantendrá en su sitio, pero si es de forma irregular cambiará. Cambiar el centro de masa produce momentos de torsión inesperados que fungen como perturbaciones al control, lo que probará la robustez del sistema en condiciones extremas.

Los puntos de amarre también pueden ser cambiados en diferentes configuraciones, la forma regular e irregular de la carga modifica la configuración y cada vehículo posee un punto de amarre el cual ejerce fuerza torsión sobre la carga, al cambiar los puntos de amarre también cambia la dinámica de carga al ser levantada y transportada.

Plataforma Experimental

Los resultados experimentales fueron desarrollados en una estancia académica en la Universidad A&M de Corpus Christi, Texas, en el departamento de Ingeniería bajo la tutela del doctor Luis Rodolfo García Carrillo.

Introducción

La plataforma experimental tiene un peso importante en el trabajo de investigación, debido a que por medio de éste se pueden validar los argumentos teóricos propuestos; la mayoría de los trabajos de investigación referentes a vehículos aéreos no tripulados se realizan en laboratorios de vuelo en interiores, donde se puede analizar por medio de diferentes medios visuales el comportamiento de los vehículos para validar en trabajos futuros el vuelo en exteriores usando los sensores telemétricos mencionados anteriormente.

Los laboratorios de vuelo cuentan con sistemas de visual servoing, sistemas de comunicación inalámbrica, marcadores etc. El sistema de visual servoing consiste en un sistema de cámaras que, mediante el software de propósito específico captan el movimiento en el espacio de un marcador o marcadores que proporcionan las posiciones angulares y de traslación de dicho marcador.

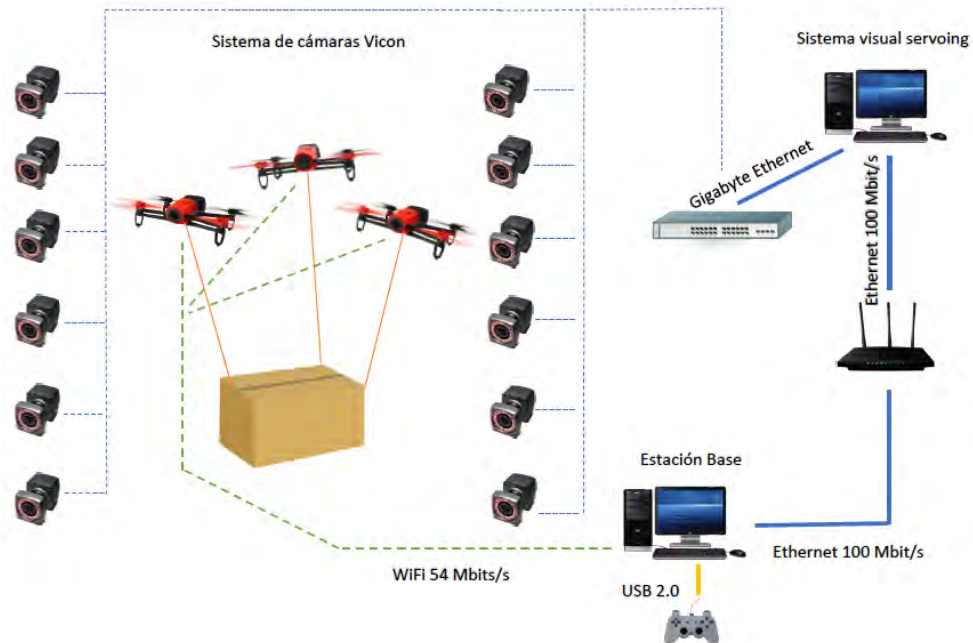


Figura 3.1: Esquema de conexiones para la plataforma experimental.

En la figura 3.1 podemos ver un esquema de conexiones de un laboratorio de vuelo en interiores donde se realizaron los experimentos.

ROS

La plataforma experimental utilizada en este trabajo fue desarrollado sobre el sistema ROS (Robotic Operating System), el cual sirve para escribir software con propósitos generales de robótica. Consiste en un conjunto de herramientas y librerías que simplifican la tarea de crear comportamientos robustos y complejos con la flexibilidad de ser aplicadas en múltiples plataformas de robots. Este software permite el intercambio de información, cómputo distribuido, reutilización de código, entre otras.

La plataforma ROS permite la comunicación por módulos, en caso de fallar alguno, el sistema robótico puede seguir funcionando y reanudar la tarea una vez solucionado el problema lo que hace que el sistema completo tenga robustez a fallas técnicas; otra característica que proporciona ROS es la comunicación entre nodos y la capacidad de

3. DISEÑO DEL EXPERIMENTO

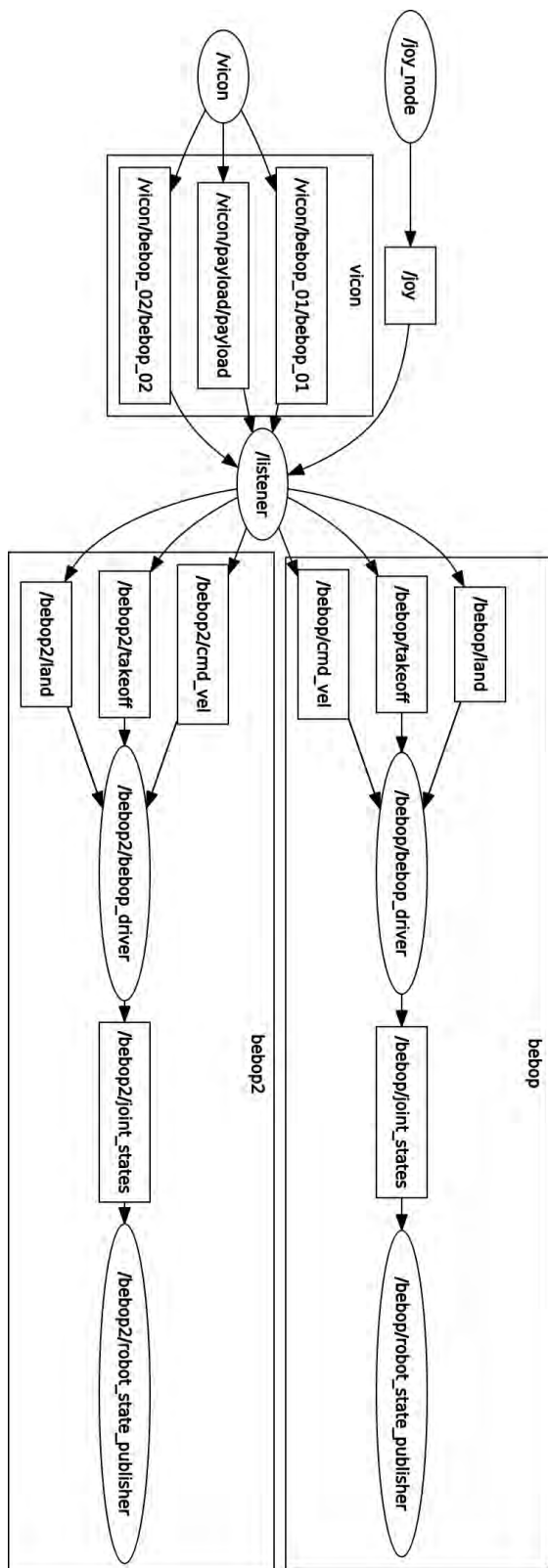


Figura 3.2: Comunicación entre nodos para 2 UAV.

escribir en lenguaje C++, C o Python usando las librerías de servidor - cliente, por lo tanto, permite flexibilidad de implementación.

En la figura 3.2 se aprecian los nodos usados para la implementación de transportar una carga con dos vehículos, en el lado izquierdo inicia por los nodos *joy node* y *vicon* los cuales corresponden al control manual para el despegue, control y aterrizaje. En las ramas del nodo *vicon* se aprecian los nodos *bebop 01*, *bebop 02* y *payload* los cuales corresponden a los dos vehículos y carga respectivamente los cuales publican su información mediante el sistema de cámaras, en el nodo *listener* se almacena las leyes de control que posteriormente se publicarán en los nodos de cada vehículo con los mensajes correspondientes. Las leyes de control se publican en el nodo *cmd vel* para que el control interno lo interprete y actúe sobre los actuadores del vehículo.

Visual servoing (Vicon)

El sistema visual servoing o también conocido como *visual-based robot control* (control de robot basado en sensor visual) es una técnica que usa la información de realimentación extraída por medio de un conjunto de cámaras para controlar el movimiento de un robot.

El sistema de captura de cámaras que se utiliza pertenece a la marca Vicon, el cual es el sistema óptico más avanzado de captura de movimiento en el mercado; los principales componentes de este sistema son las cámaras, el software de análisis de datos, el módulo de hardware de control y el equipo de cómputo que almacena toda la información capturada.

En la figura 3.3 podemos ver la captura de movimiento de un vehículo aéreo con la carga en el espacio.

Descripción del experimento

Durante la experimentación, existen factores indirectos que pueden afectar el comportamiento deseado. Para este experimento en particular se busca que el error de trayectoria tienda a cero cuando el tiempo tiende a infinito, es decir, el error se reduce a cero lo más rápido posible.

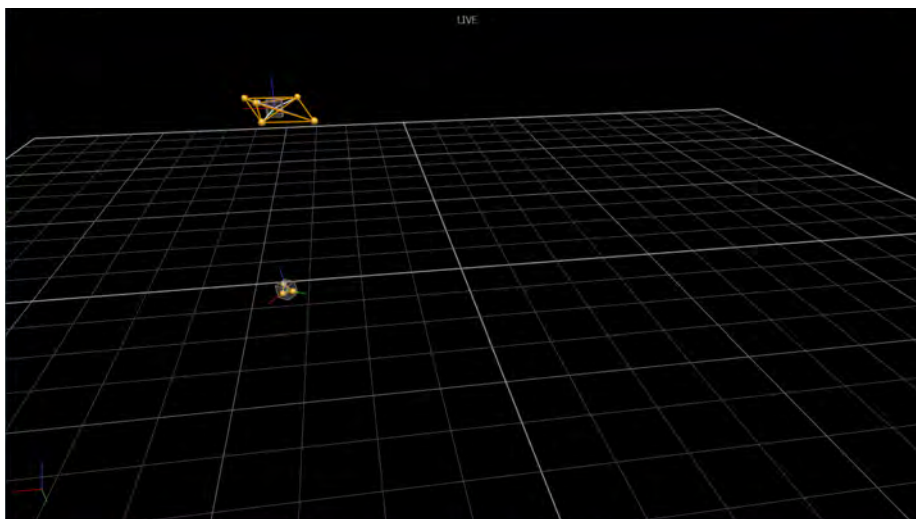


Figura 3.3: Ejemplo ilustrativo del ambiente Vicon Tracker 2.0.

La capacidad energética disminuye a lo largo de los experimentos y puede ocasionar que la ley de control no tenga suficiente fuerza de propulsión para seguir la trayectoria con un desempeño aceptable; se debe verificar que las baterías de los vehículos tengan carga óptima.

Parámetros constantes	Parámetros variables
m_i , Masa del UAV	m_0 , Masa de la carga
Capacidad Energética	Forma regular/irregular de la carga
Longitud de propelas	l_i , Longitud de la cuerda
g , Gravedad	p_i , Puntos de amarre

Tabla 3.1: Diseño del Experimento

La estimación del estado se produce gracias a la RNA, las de neuronas que usa la red en su capa oculta pueden afectar el desempeño y el error de estimación. Cambiando la cantidad de neuronas se pueden obtener resultados diferentes, si son muy pocas es posible que la red no pueda encontrar los pesos y parámetros de ajuste, y el caso contrario puede tener costos computacionales en el sistema.

La ley de control se calcula en la estación base, la comunicación con los vehículos se realiza por WiFi, la distancia es un factor, la distancia en línea de vista directa es de 10

metros, por lo que, si los vehículos realizan vuelo fuera del alcance de la comunicación, la ley de control puede fallar y colapsar el sistema.

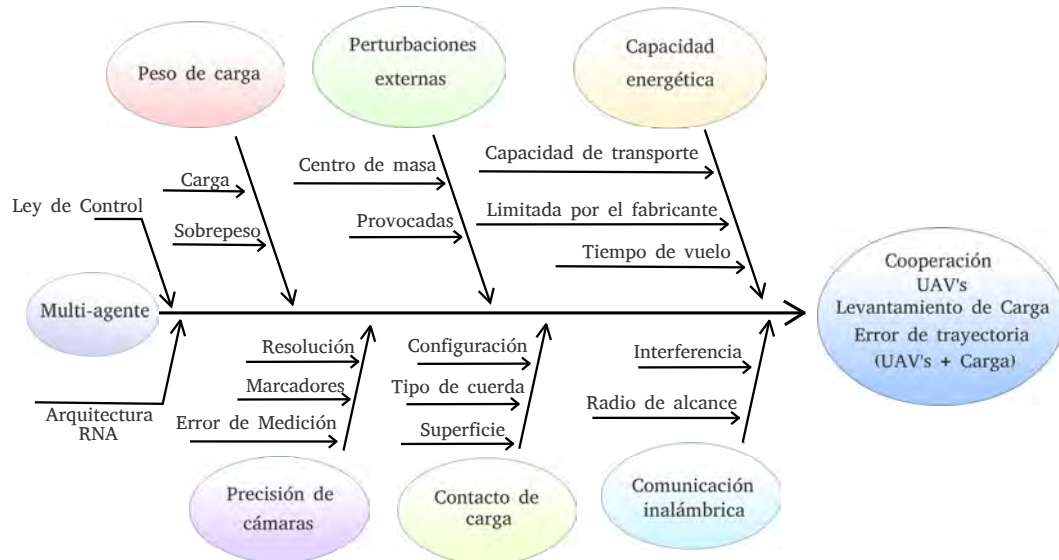


Figura 3.4: Diagrama Causa - Efecto del experimento

Descripción del diagrama de pescado

El diagrama de pescado 3.4 ofrece una serie de posibles causas y efectos que podrían manifestarse en la experimentación física, algunos de ellos son medibles y esperados debido a la complejidad del sistema, en cambio otros no pueden cambiarse por la construcción misma de los elementos a experimentar:

1. **Capacidad Energética:** El levantamiento de carga depende mucho de la capacidad energética del vehículo, siendo que el vehículo usa una batería de 1200 mAh, después de algunas pruebas del experimento, el rendimiento del vehículo bajaba notablemente, lo que significó usar baterías cargadas a su máxima capacidad en cada experimento.
2. **Perturbaciones Externas:** Mientras se realizan los experimentos es posible balancear la carga con el propósito de que el sistema de vehículos con carga pierda estabilidad, la ley de control adaptable estabiliza estas perturbaciones.

3. DISEÑO DEL EXPERIMENTO

3. **Peso de la carga:** De forma conservadora se propuso que el vehículo solo puede cargar la quinta parte de su peso, sin embargo después de experimentar con diferentes pesos, un vehículo puede cargar la mitad de su peso.
4. **Arquitectura de RNA:** Fue posible comprobar que a los pocos segundos la red neuronal encontraba los pesos ideales para en base a la entrada estimar la posición del vehículo mediante el error de estimación, por lo que en las pruebas no fue necesario modificar la estructura de la red.
5. **Error de medición:** En base al estudio de [27] el error de medición del sistema de cámaras Vicon es menor de 2 mm, por lo tanto, en un sistema de 2 vehículos con carga el error de medición es despreciable.
6. **Contacto con la carga:** Se optó por enlazar la carga al vehículo desde un principio por medio de una cuerda no elástica, la cuerda mantiene su distancia en el punto donde el control inicia y termina.
7. **Comunicación inalámbrica:** El principal problema durante la experimentación es la comunicación Wifi con los vehículos, debido a esto se usaron diferentes enrutadores, hasta obtener conexiones estables.

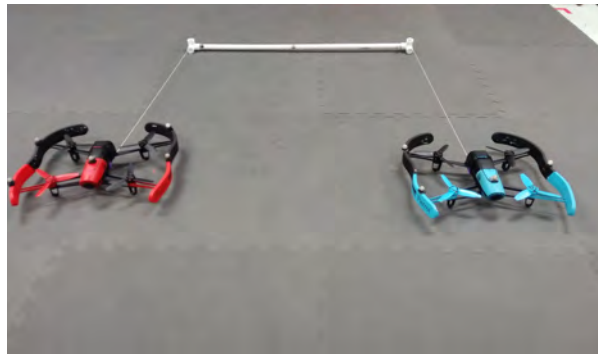


Figura 3.5: Vehículos en condición inicial

De los parámetros anteriores se desprenden los siguientes para experimentación:

Parámetros constantes	Parámetros variables
m_i , Masa del UAV (423 gr.)	m_0 , Masa de la carga (183 gr.)
Capacidad Energética (1200 mAh.)	Forma regular (Tubo PVC 0.86 m)
Longitud de propelas (4.6 cm)	l_i , Longitud de la cuerda (1 m.)
g , Gravedad	p_i , Puntos de amarre (2)

Tabla 3.2: Diseño del experimento real

Para poder sintonizar de manera experimental la red neuronal, se usaron diferentes cargas, en principio 50g, 60g y 100 gramos, en base a que el vehículo solo puede cargar una quinta parte de su peso, en cada prueba de aprendizaje el desempeño del controlador mejoraba como era de esperar, hasta cargar los 100 gramos lo cual es superior al peso originalmente propuesto.

Disminuir la longitud de la carga sólo incrementaría la inercia del vehículo a la carga, por lo tanto no se experimentaron cambios en la distancia de la cuerda, se mantuvo a 1 m.

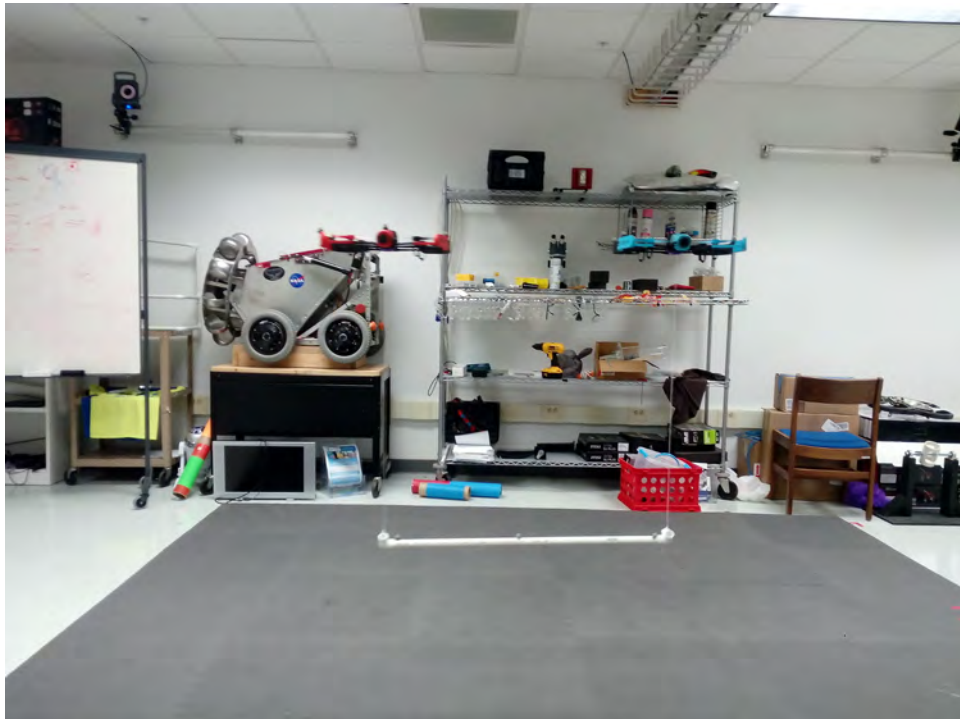


Figura 3.6: Vehículos en vuelo trasladando una carga.

3. DISEÑO DEL EXPERIMENTO



Figura 3.7: Vehículos en vuelo con otra vista.

Resultados en Simulación y Experimentales

En capítulos anteriores se plasmaron los aspectos más importantes de la teoría referente a un único UAV y una descripción del comportamiento de éstos cuando actúan en conjunto para realizar la tarea de transportar una carga. En el capítulo 2 se hizo referencia a un modelo matemático que contempla los dos vehículos y la carga, dicho modelo se usó en primera instancia para estudiar su comportamiento y los efectos que produce la carga a los vehículos, en segunda instancia para tener un modelo que la red pudiera aproximar y, mediante las herramientas matemáticas computacionales, simular el control PIDMW.

A continuación se muestran en tres secciones las simulaciones realizadas y los datos obtenidos mediante experimentación en campo y en forma simulada, en la primera simulación se usa el conjunto de Ecuaciones (2.71) al (2.74).

Simulación del Modelo UAV carga

La figura 4.1 muestra la simulación del modelo simplificado anterior con la ley de control propuesta. En color azul se aprecian las posiciones tanto lineales como angulares, mientras que en color rojo las correspondientes velocidades. Las figuras en la fila superior muestran las proyecciones de la posición de la carga sobre el eje x así como sobre el eje Z , a todo tiempo $t \in [t_0, t_f]$. Las figuras en la fila inferior exponen la posiciones y velocidades angulares del enlace visto desde el vehículo (β) y la del UAV (θ). En la simu-

4. RESULTADOS EN SIMULACIÓN Y EXPERIMENTALES

lación se observa la referencia en el eje Z la cual se busca que la carga se eleve un metro sobre el suelo mientras las otras variables dinámicas se mantienen en cero; el ángulo de la cuerda se mueve debido al movimiento del UAV sobre la carga. Las condiciones iniciales para la simulación son diferentes de cero: $x_0 = [0.1 \ 0 \ 0.2 \ 0 \ 0.3 \ 0 \ 0.4 \ 0]$, el método numérico usado fue el ODE45 (Ordinary Differential Equation solver) sin rigidez, con un paso fijo de integración $T = 0.001$, y para la obtención de las derivadas se usó el bloque nativo en las herramientas de MATLAB;

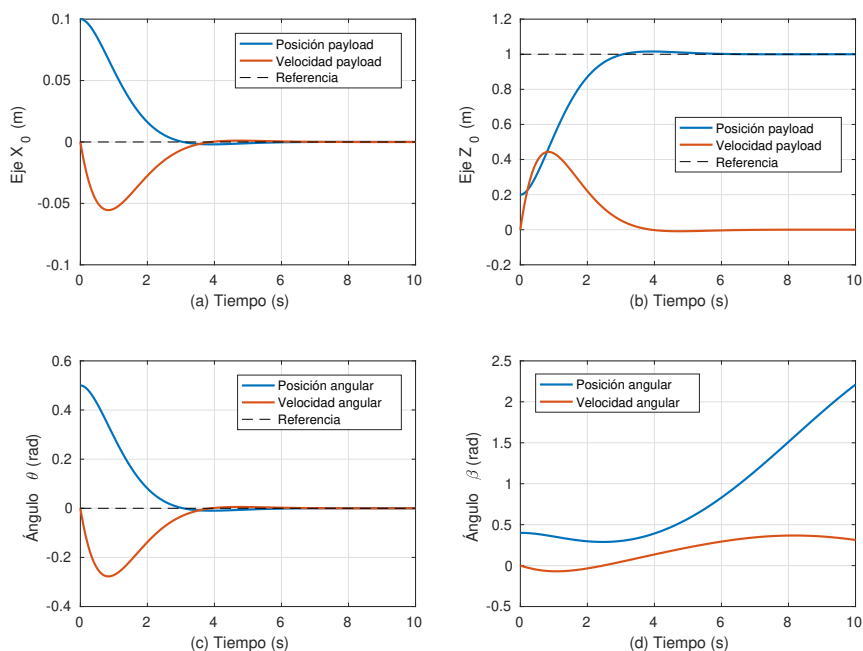


Figura 4.1: Simulación del modelo discreto.

En la figura 4.1 se aprecian las cuatro principales variables dinámicas que describen al sistema UAV-carga, en la gráfica superior izquierda se observa la posición y velocidad de la carga en el eje X , se puede apreciar que se estabiliza en cero, esto se logra en simulación debido principalmente a las simplificaciones y suposiciones realizadas. Dicha gráfica revela que la carga no produce oscilaciones o balanceos lo cual es algo que no se puede lograr en la práctica. La gráfica superior derecha refiere la altitud de la carga en el eje z , la referencia es 1 metro y se alcanza a los 5 segundos simulación.

La gráfica inferior izquierda muestra la orientación (θ) del vehículo, la cual al mantenerse en cero el *thrust* total se manifiesta como una componente de fuerza únicamente en el eje z , la última gráfica despliega el comportamiento del ángulo de la cuerda en radianes, se observa que la posición angular realiza un medio giro debido al efecto del levantamiento de la carga por parte del UAV. Esta simulación fue implementada sobre MATLAB SIMULINK [®] 2016 en un sistema LINUX 16.04 LTS.

Simulación modelo discreto

A continuación se muestran las simulaciones del modelo discreto presentado en el sistema de ecuaciones (2.80) a (2.87). Las condiciones iniciales dadas para la simulación son exactamente las mismas para el modelo discreto.

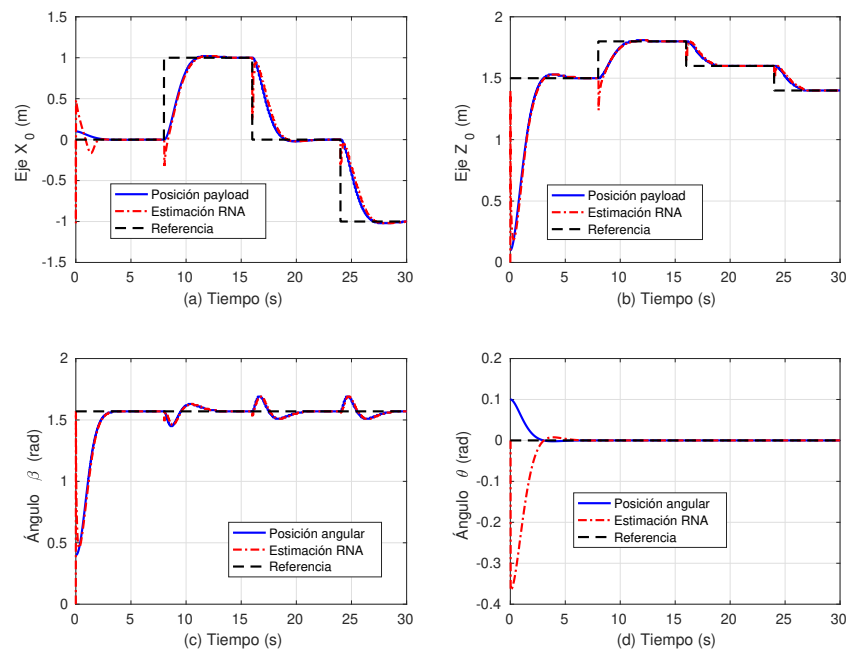


Figura 4.2: Simulación del modelo discreto.

Dichos datos se obtuvieron programando el modelo discreto, la red neuronal y la ley de control en el editor Visual Studio Code con lenguaje de programación C++ y el

4. RESULTADOS EN SIMULACIÓN Y EXPERIMENTALES

compilador GCC (GNU Compiler Collection) nativo de LINUX y el método numérico usado para dar solución a las ecuaciones diferenciales fue el conocido método de Euler.

Como se puede observar en las figuras 4.2 y 4.1, los resultados son muy similares, el tiempo de muestreo $T = 0.01$ segundos, la referencia a seguir para la posición x_0 se define como:

$$x_{0_{ref}} = \begin{cases} 0 \text{ metros} & \text{si } 0 < t < 8 \text{ segundos} \\ 1 \text{ metros} & \text{si } 8 < t < 16 \text{ segundos} \\ 0 \text{ metros} & \text{si } 16 < t < 24 \text{ segundos} \\ -1 \text{ metros} & \text{si } 24 < t < 30 \text{ segundos} \end{cases}, \quad (4.1)$$

la cual es un desplazamiento positivo a negativo, la referencia para el eje z_0 se define como:

$$z_{0_{ref}} = \begin{cases} 1.5 \text{ metros} & \text{si } 0 < t < 8 \text{ segundos} \\ 1.8 \text{ metros} & \text{si } 8 < t < 16 \text{ segundos} \\ 1.6 \text{ metros} & \text{si } 16 < t < 24 \text{ segundos} \\ 1.4 \text{ metros} & \text{si } 24 < t < 30 \text{ segundos} \end{cases}, \quad (4.2)$$

La referencia z_0 es una serie de escalones de altura variable. Es notable mencionar que el desplazamiento de x_0 es de dos metros de distancia, la cual es realista considerando la aplicación física en interiores con cierta tolerancia de seguridad. La red neuronal del tipo RBF con función de activación wavelet se construye con los pesos iniciales siguientes:

$$A_o = [-5.1993 \quad 2.1384 \quad 4.0040 \quad -0.4095], \quad (4.3)$$

$$W_o = \begin{bmatrix} -0.4629 & 0.5413 & -2.0829 & 0.9338 \\ 0.2235 & -0.5829 & 0.5770 & -0.4194 \\ -0.8352 & 0.2328 & 2.8463 & 1.2504 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$B_o = \begin{bmatrix} -2.9740 & -0.2675 & -2.7314 & 1.1334 \\ 0.7935 & 0.4323 & 1.0524 & 2.4757 \\ 0.6732 & -0.8407 & -1.3070 & -2.0074 \\ 0.9034 & 1.7240 & -0.6698 & 2.5213 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

dicha red usa las entradas $u_p[kT]$ y la salida del sistema $y[kT]$, los pesos iniciales para la red neuronal que usa la entrada $\hat{y}[(k-1)T]$ y la salida $y[kT]$ son:

$$\alpha_o = [-5.21186 \quad 6.55364 \quad 7.12251 \quad -0.4095], \quad (4.6)$$

$$D_o = \begin{bmatrix} 0.2222 & -1.24443 & -0.342858 & 0.9338 \\ 0.1199 & 0.4199 & 2.59444 & -0.4194 \\ 0.0310 & 0.161719 & 3.63119 & 1.2504 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\beta_o = \begin{bmatrix} -3.34818 & -0.8646 & -0.14753 & 1.133 \\ -0.514362 & -0.5989 & -0.10281 & 2.475 \\ 0.79117 & 4.5050 & -0.42795 & -2.007 \\ 0.9034 & 1.724 & -0.6698 & 2.521 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

con tasas de aprendizaje $lr = [0.0001, 0.0001, 0.0001]$ para las ganancias del controlador PIDMW, y $\eta_{w,d} = 0.00001$ como tasa de aprendizaje para los pesos de la red neuronal. De la forma como fue descrito en el marco teórico por las dimensiones de W_0 y D_0 la red posee 4 neuronas en su capa oculta. La elección de la red, el número de entradas y salidas, la función de activación, el número de neuronas, etc. se basa en el trabajo anterior Barron Gomez et al. [5], donde se muestra la efectividad de este tipo de control.

Resultados Experimentales

Los datos obtenidos mediante la implementación física se muestran a continuación, el análisis matemático realizado para dos UAV con carga y la simplificación del modelo se desarrolló en \mathbb{R}^2 y es un caso particular del caso general \mathbb{R}^3 , las simulaciones se basan en el caso particular debido a que el caso general no es trivial.

La experimentación física implicó el conocimiento de la plataforma BEBOP 1, el sistema VICON, el sistema operativo ROS. Los pesos de la RNA para la implementación física y para la simulación son los mismos, la entrada de la red se conforma por $u_p[kT] = [U_x[kT], U_y[kT], U_z[kT], U_\psi[kT]]^T$ las cuales son las consignas de control que se transmiten vía inalámbrica al UAV, cabe resaltar que dichas consignas las interpreta el vehículo como ángulos de Euler deseados.

4. RESULTADOS EN SIMULACIÓN Y EXPERIMENTALES

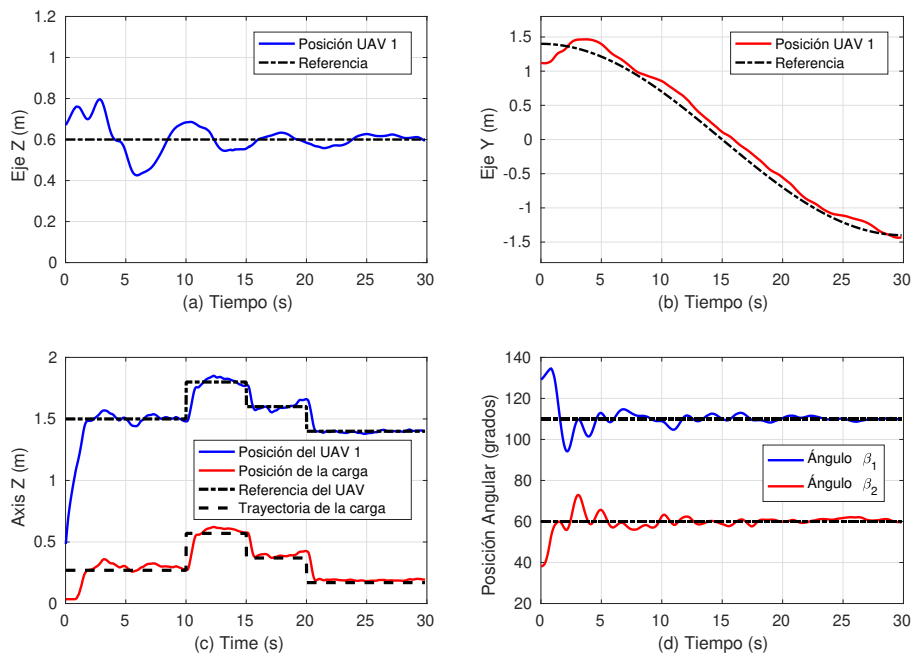


Figura 4.3: Resultado experimental para el UAV 1.

En la figura 4.3 podemos observar el comportamiento del UAV 1 el cual para la ley de control distribuido se considera como Agente Líder dentro del enjambre, dicho vehículo obtiene información del Nodo líder o agente virtual, el cual para un esquema de control es la referencia de trayectoria. La figura superior izquierda de la grafica 4.3 muestra la trayectoria en el eje X , la línea punteada indica la referencia la cual es constante en $x_{ref}(t) = 0.6$ metros, en la superior derecha se aprecia la trayectoria deseada en el eje Y con la línea punteada negra, y en rojo el comportamiento del UAV, dicho seguimiento definido por $y_{ref}(t) = 1400 * \cos(\frac{\pi t}{T})$, donde t es el vector de tiempo, y T es el tiempo final de implementación en segundos. Por otra parte en la figura inferior izquierda podemos ver el comportamiento del UAV 1 y de la carga, cabe mencionar que la carga no es la que lleva la trayectoria del sistema, si la velocidad con la que se mueve el vehículo es pequeña, entonces la velocidad del payload también es pequeña debido al enlace que los conecta, la cual es una cuerda no elástica que cuando la carga se encuentra suspendida la cuerda se asume rígida. La línea punteada cerca de la carga

no es una referencia, es decir, no hay un error entre la trayectoria y la posición de la carga, debido a suposiciones anteriores la carga sigue la posición del vehículo con la longitud de cuerda como diferencia. La última gráfica muestra los ángulos que se forman entre los marcos no inerciales de los vehículos y las cuerdas, estos ángulos expresados en grados se obtienen geoméricamente conociendo la posición de la carga y los UAV.

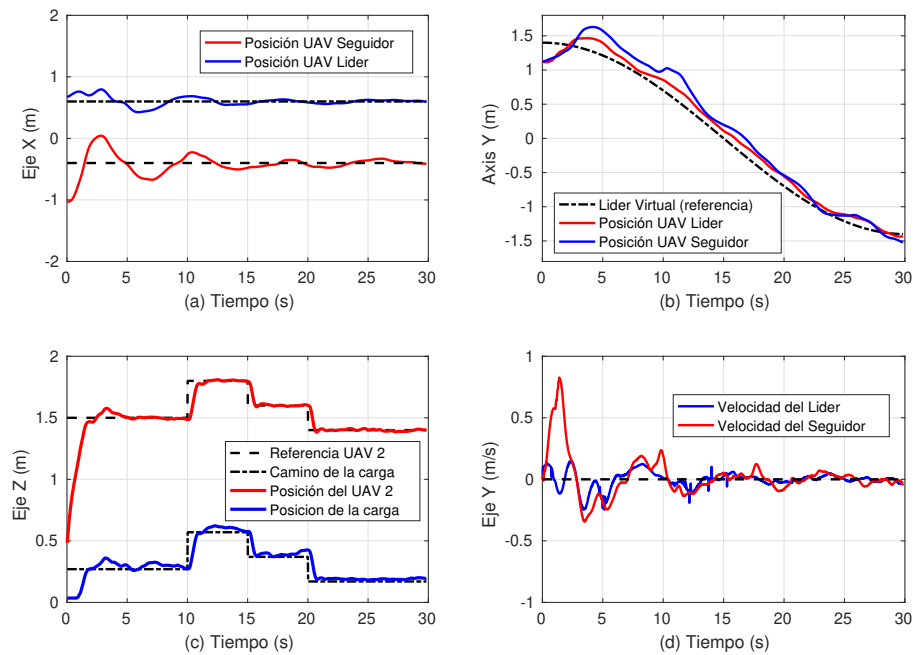


Figura 4.4: Resultado experimental para el UAV 2.

Ahora, en la figura 4.4 se denota similarmente para el segundo vehículo, los comportamientos son similares, con la diferencia que en la primer imagen se comparan las posiciones del agente líder y agente seguidor, a su derecha las dos trayectorias y la referencia, las correspondientes alturas en la inferior izquierda y por último las velocidades de ambos vehículos. En los primeros 10 segundos se producen cambios en la velocidad por culpa del esfuerzo para levantar la carga, es interesante mencionar que los vehículos inician el vuelo en el suelo, y mediante *thrust*, compensan por una parte el peso total del sistema, y por el otro la estabilización del mismo.

4. RESULTADOS EN SIMULACIÓN Y EXPERIMENTALES

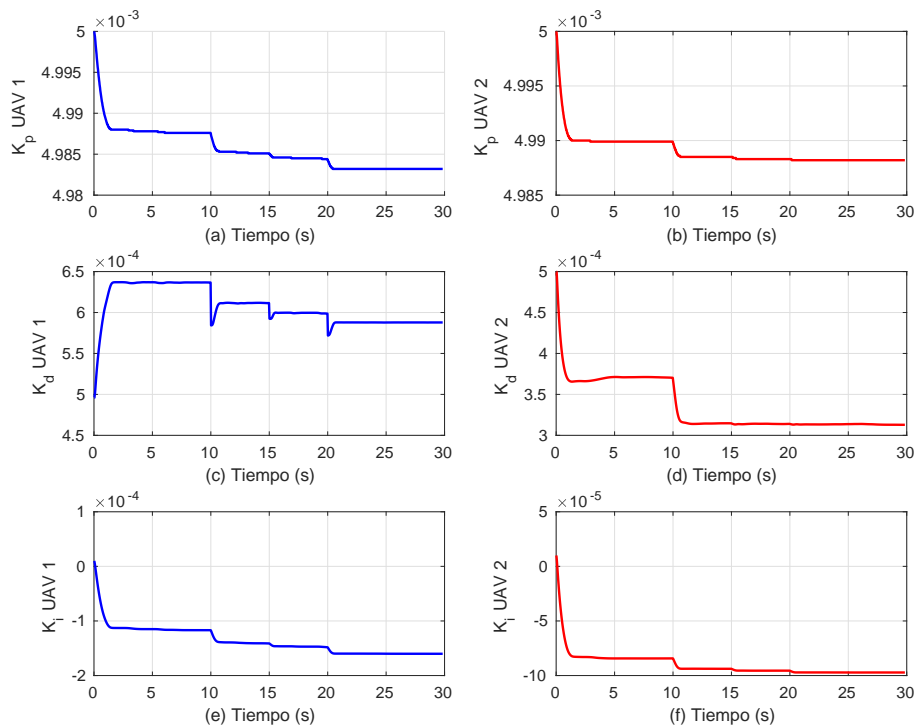


Figura 4.5: Ganancias adaptables del control PIDMW en el eje Z.

En figura 4.5 se observan las ganancias del controlador PIDMW (K_{pw} , K_{dw} , K_{iw}) para ambos vehículos. Las ganancias adaptables se aprecian diminutas porque la señal de control $u_p[kT]$ se da en ángulos radianes deseados y el sistema visual servoing entrega la posición en milímetros, el cálculo computacional del al ser muy grande hace que el algoritmo genere ganancias muy pequeñas, al integrarlo en la Ecuación (2.131) se obtiene el control de altura, a continuación se muestran dichas señales:

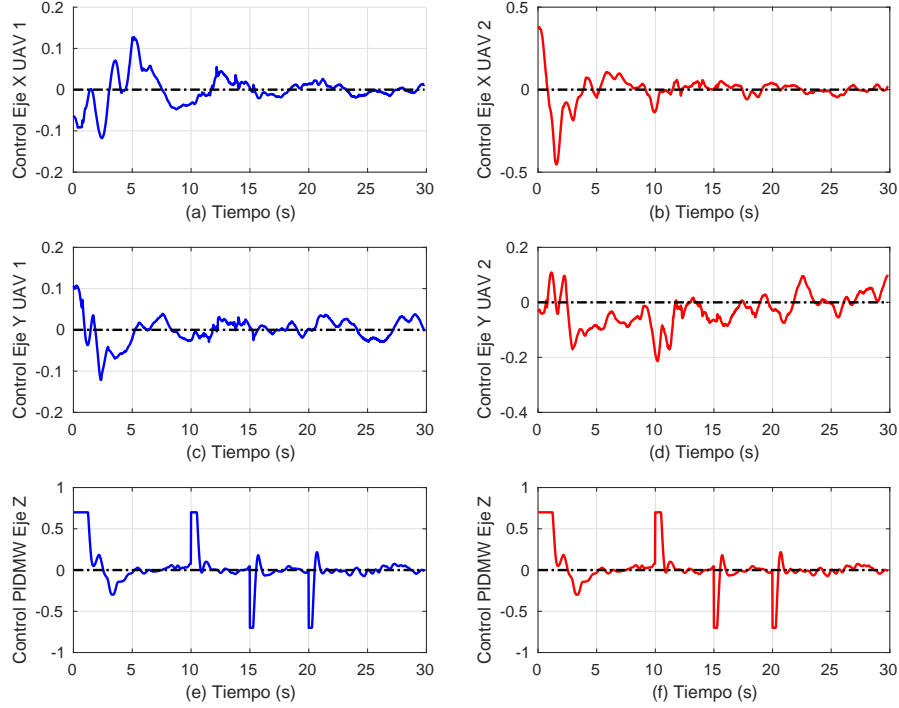


Figura 4.6: Señales de control Cooperativo y PIDMW.

Los gráficos (a) – (d) de la Figura 4.6 denotan el control cooperativo para los subsistemas $(X - \theta)$ y $(Y - \phi)$, las restantes son las señales de control para el subsistema Z , dicha señal tiene un saturador tal que:

$$U_z[kT] = \begin{cases} -0.7 & \text{si } U_z[kT] < -0.7 \\ 0.7 & \text{si } U_z[kT] > 0.7 \end{cases}, \quad (4.9)$$

donde por indicación del fabricante el rango total es $(-1, 1)$, donde -1 es cero *thrust* y 1 es máximo *thrust* que físicamente pueden producir los actuadores. Transmitir inalámbricamente el valor cero le indicará al UAV que mantenga la altura a la que se encuentra.

El el control *on-board* maneja los actuadores para generar propulsión y movimiento. La salida $y[kT] = [y_1[kT], z_1[kT], z_0[kT]]$ las cuales conforma los ejes y y z que describen

el transporte de la carga de un punto a otro en el primero y la altura de la carga y del UAV en el segundo. La entrada de la segunda parte de la red usa como entrada $\hat{y}[(k-1)T] = [U_z[(k-1)T], \hat{y}_1[(k-1)T], \hat{z}_1[(k-1)T], \hat{z}_0[(k-1)T]]$ y la salida $y[kT]$.

Control PD

A continuación se muestran las gráficas del control PD y del PIDMW-CSVFB juntas en los tres subsistemas, también se muestran los errores respecto a las referencias en color negro, para cada UAV.

Índice de desempeño de el error de trayectoria

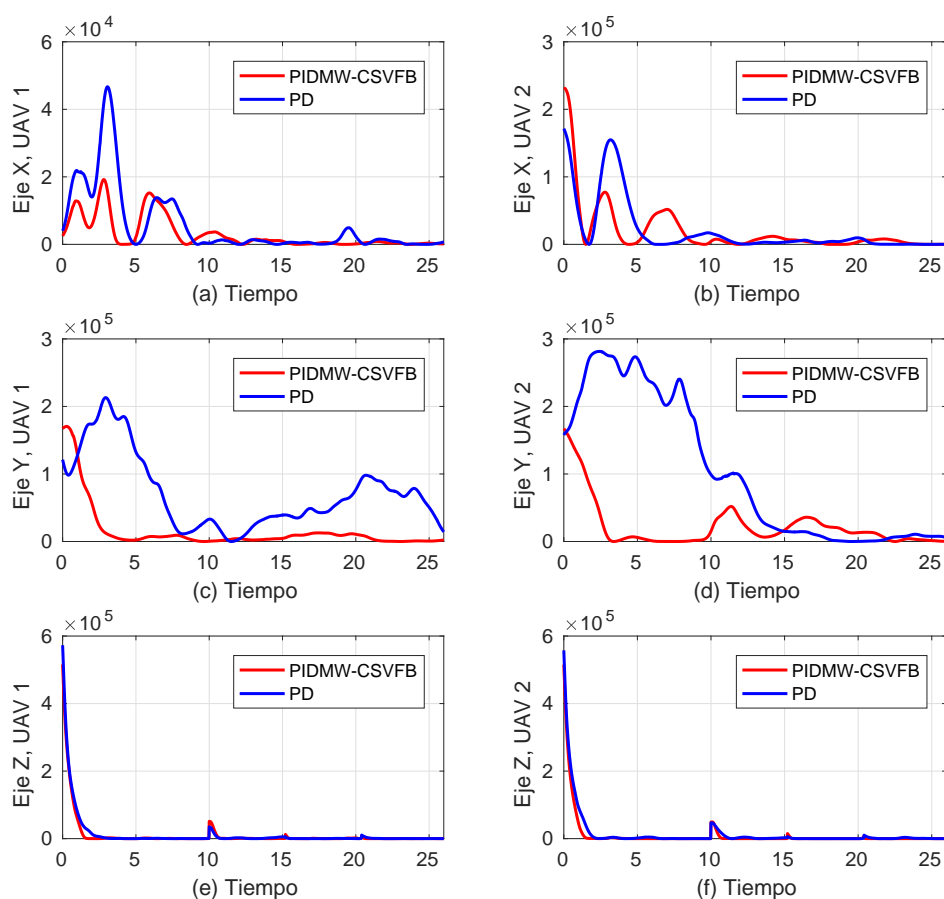


Figura 4.7: Índice de desempeño de ambos controles (PIDMW y PD)

El índice de desempeño de la figura 4.7 fue calculado mediante la función de costo del error cuadrático medio, definido en la Ecuación (2.136) para ambos controles.

Desempeño de ambas estrategias de control y errores del Agente Líder

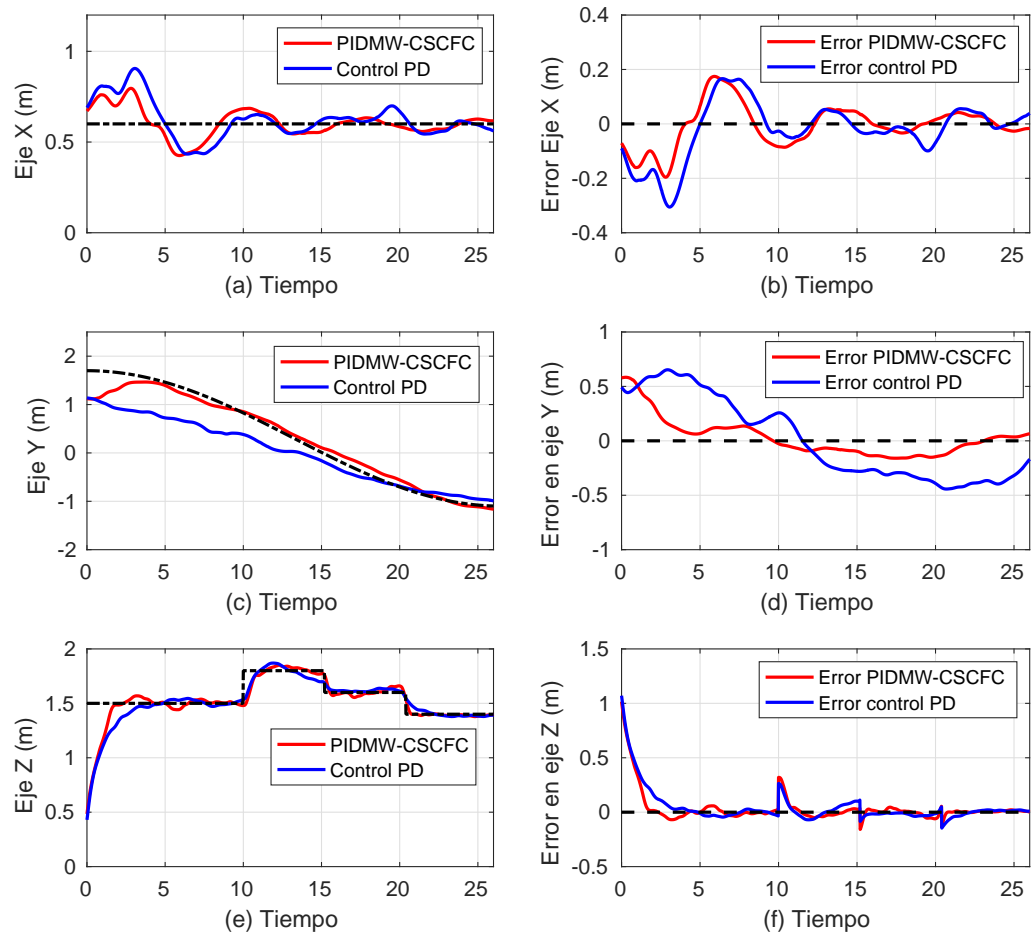


Figura 4.8: Vuelo del UAV 1 (Líder) y errores (PIDMW y PD)

Desempeño de ambas estrategias de control y errores del Agente Seguidor

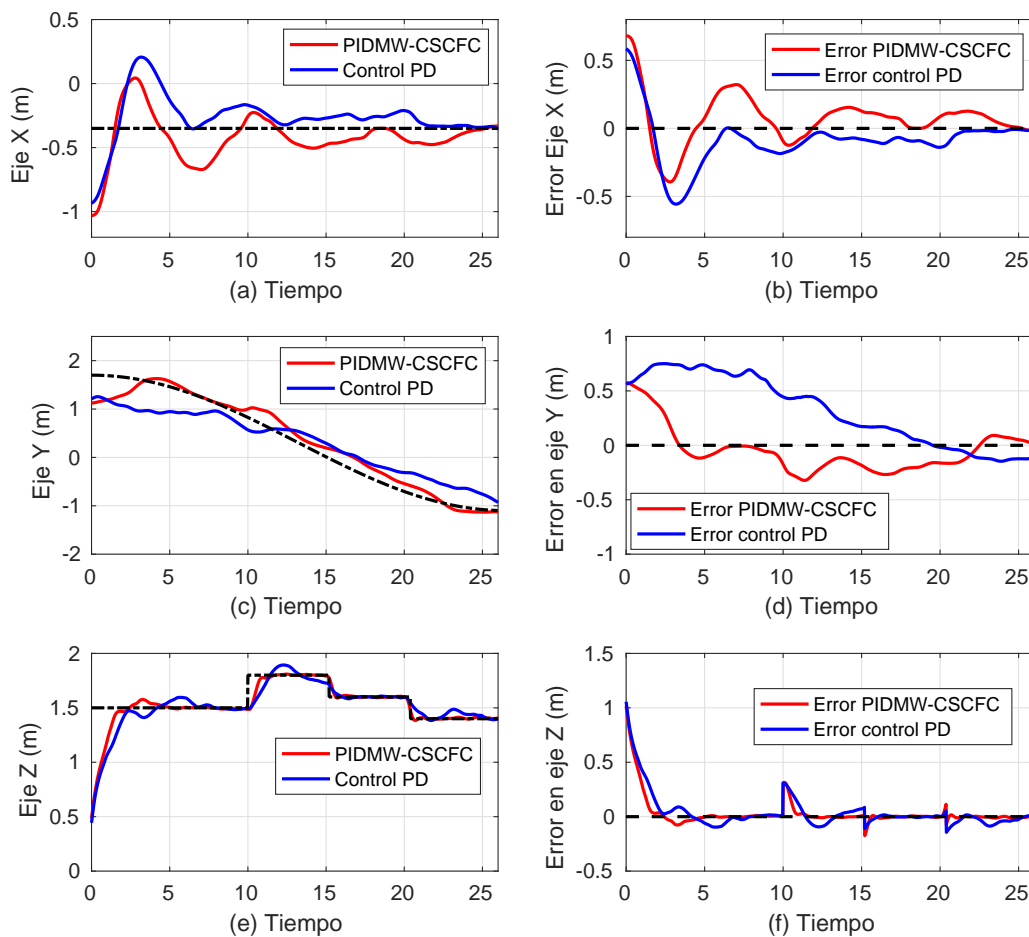


Figura 4.9: Vuelo del UAV (Seguidor) y errores (PIDMW y PD)

Por último se muestra en la figura 4.10 el experimento completo en \mathbb{R}^3 , para obtener un contraste se grafica un control PD de la trayectoria del payload y los vehículos junto al control PIDMW y el control cooperativo. Las líneas negras punteadas sirven de ayuda visual y dan la pauta por la que idealmente deberían transitar los UAV al transportar la carga. La implementación del control PIDMW-CSVBF por otro lado, es factible realizarla ya que el control se basa bajo el modo *free model* donde no se usa el modelo matemático obtenido analíticamente, en lugar se usa el modelo de la red neuronal entrenada.

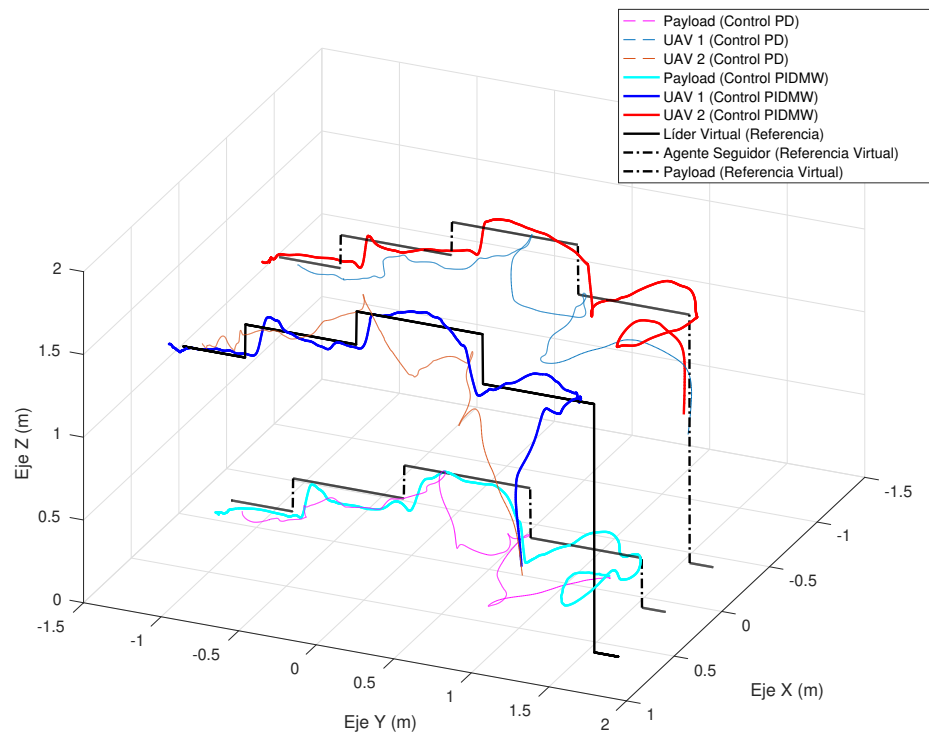


Figura 4.10: Vuelo de los 2 UAV y la carga (PIDMW y PD)

El control PD fue implementado bajo los criterios descritos en el capítulo 2, la leyenda da descripción de cada elemento en la gráfica, un detalle importante es el comportamiento del UAV 2 con el control PIDMW el cual parece desfasado de la línea punteada, esto es debido a que la referencia de dicho vehículo es el agente líder, aunque el

4. RESULTADOS EN SIMULACIÓN Y EXPERIMENTALES

tiempo de muestreo es de $T = 0.02$ segundos hay un retraso desde que el visual servoing toma los datos, se adquieren en el cliente por medio de ROS, se calculan las consignas de control y se envían inalámbricamente al agente líder para desplazarse, y es ese momento cuando el agente seguidor toma esa información y realiza el mismo ciclo para poder realizar el seguimiento. **Por último el vídeo del experimento puede apreciarse en la plataforma YouTube bajo el link <https://youtu.be/8OsyOVI8ZoE>.**

Conclusiones y trabajos futuros

Conclusiones

El tema de tesis que aquí se desarrolla implicó muchas tareas, desde el entendimiento del funcionamiento de un vehículo aéreo no tripulado, la representación abstracta del comportamiento dinámico del UAV y la integración de dicho elemento a un grupo de objetos que interactúan entre sí y su modelo matemático; plantear las estrategias de control a usar, simular computacionalmente dichos modelos y después realizar la implementación física de todo el sistema. Los resultados se dicen satisfactorios ya que se muestra experimentalmente que es factible transportar una carga de un punto a otro usando vehículos que no están diseñados para dicha tarea y con muchas limitaciones físicas, los resultados de simulación coinciden con los datos experimentales y ofrecen una alternativa de cómo llevar a cabo el transporte de una carga.

Trabajos futuros

La realización y desarrollo este escrito revelo desafíos de los cuales surgen ideas que podrían estudiarse tomando este documento como precedente, a continuación se enlistan algunas ideas:

- Implementación UAV: Como se describió en el marco teórico la plataforma Bebop 1 ya tiene integrado un control *on – board*, un posible trabajo futuro podría ser el diseño, maquinado, construcción y programación del control PIDMW en un vehículo desarrollado desde cero, donde la inteligencia artificial y el control

5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

neuronal sea el principal elemento que estabilice todos los subsistemas, agregando el cálculo de la matriz de inercia real del vehículo, coeficientes de propulsión basado en la potencia de los motores y el tipo de propela etc.

- Adaptación multi-agente: Otra propuesta en el campo de los sistemas multi-agente es el desarrollo de una red neuronal wavelet que basada en la información entre agentes cree un modelo entrada-salida tal que la red calcule el coeficiente adaptable de conectividad entre agentes.
- Transporte de carga por maniobras agresivas: Un estudio más profundo puede ser la propuesta de transportar una carga pero donde el transporte se realice diseñando trayectorias tal que sea posible evitar obstáculos no programados, e inclusive diseñar trayectorias acrobáticas para transportar la carga.
- Error de carga: En un contexto donde la carga es el principal actor, un trabajo futuro podría ser el desarrollo de una ley de control distribuido que incluya el error de trayectoria, el error de seguimiento entre agentes y el error de carga, el cual no existe y donde se trate el caso para un solo vehículo con el objetivo de estudiar como el error de trayectoria de la carga afecta al vehículo.

Acrónimos y glosario

Lista de acrónimos

Acrónimo	Significado
GCC	<i>GNU Compiler Collection</i>
GNU	Sistema operativo libre de tipo Unix
LMS	<i>Least Mean Square</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
MATLAB ®	Laboratorio de Matrices
MIMO	<i>Multi-input and multi-output system</i>
NED	Formalismo <i>North-East-Down</i>
PIDMW	<i>Proportional Integral Derivative Multiresolution Controller</i>
RNA	Red Neuronal Artificial
RBF	<i>Radial Basis Function</i>
ROS	<i>Robotics Operating System</i>
UAV	<i>Unmanned Aerial Vehicle</i>
WNN	<i>Wavelet Neural Network</i>

Glosario

- **Actuador.** Dispositivo que provee el poder de movimiento al sistema. Dorf and Bishop [12]
- **Automatización.** El control de un proceso mediante una forma automática. Dorf and Bishop [12]
- **Control realimentado.** Operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia, y lo realiza tomando en cuenta esta diferencia. Katsuhiko [15]
- **Energía.** Entidad fundamental de la naturaleza que se transfiere entre partes de un sistema o el producto de un cambio físico y usualmente considerado como capacidad para realizar un trabajo. Merriam-Webster Online [26]
- **Estado.** Conjunto de variables más pequeño (llamadas variables de estado), de forma que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier $t \geq t_0$. Katsuhiko [15]
- **Espacio de estado.** Espacio n -dimensional cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1 , eje x_2 , ..., eje x_n , donde x_1, x_2, \dots, x_n son las variables de estado, se denomina espacio de estado. Katsuhiko [15]
- **Función.** Sean dos conjuntos no vacíos A y B . Una función es una regla de correspondencia que asigna un de elemento A a uno y solo uno de B . Frank Blume [14]
- **Función de activación.** Modelo de comportamiento no lineal semejante al que asemeja el tipo de respuesta de una célula, donde la salida no rebasa un umbral determinado. Sarangapani [35]
- **Funciones wavelet.** Conjunto de expresiones que sirven para aproximar otras funciones. Usadas como funciones de activación en una red neuronal artificial de base radial se usan como aproximadores universales. Mallat [25]

- **Inercia.** Medida de resistencia que un sistema ofrece cuando se intenta poner en movimiento. Sreenath and Kumar [39]
- **Planta.** Parte de un equipo o conjunto de elementos de una máquina que funcionan juntos, y cuyo objetivo es efectuar una operación particular. Katsuhiko [15]
- **Perturbaciones.** Una perturbación es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema. Katsuhiko [15]
- **Perturbación.** Parte del esquema de control que actúa sobre el proceso como impulsos que ocurren irregularmente, y que al ser tan recurrentes el sistema se sitúa entre ellos. Aström and Wittenmark [4]
- **Red neuronal artificial.** Una estructura computacional con un número de procesadores interconectados de forma sugestiva tal que asemeje al cerebro humano y el cual es capaz de aprender procesos mediante prueba y error. Merriam-Webster Online [26]
- **Señal de control.** También llamada variable manipulada, es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada. Katsuhiko [15]
- **Sistema.** Combinación de componentes que actúan juntos y realizan un objetivo determinado. Katsuhiko [15]
- **Sistema no lineal.** Clase de sistema que no cumple los principios de superposición y homogeneidad. Por lo que la respuesta a dos entradas no puede calcularse tratando cada entrada a la vez y sumando los resultados. Katsuhiko [15]
- **Variable controlada.** Cantidad o condición que se mide y controla. Katsuhiko [15]
- **Variable de estado.** Conjunto mínimo de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Katsuhiko [15]

Diagramas de bloques

Las gráficas de las figuras 2.8 y 2.10 fueron obtenidas mediante diagramas de bloques contruidos con MATLAB SIMULINK®. El bloque (a) de Fig. B.1 guarda el sistema de Ecuaciones (2.13) al (2.18), por otro lado en los bloques (c) y (d) se observan los subcontroles PD que calculan los $\theta(t)_d$ y $\phi(t)_d$ deseados simulando el control interno del UAV, además se aprecian las referencias de traslación en el eje X y Y.

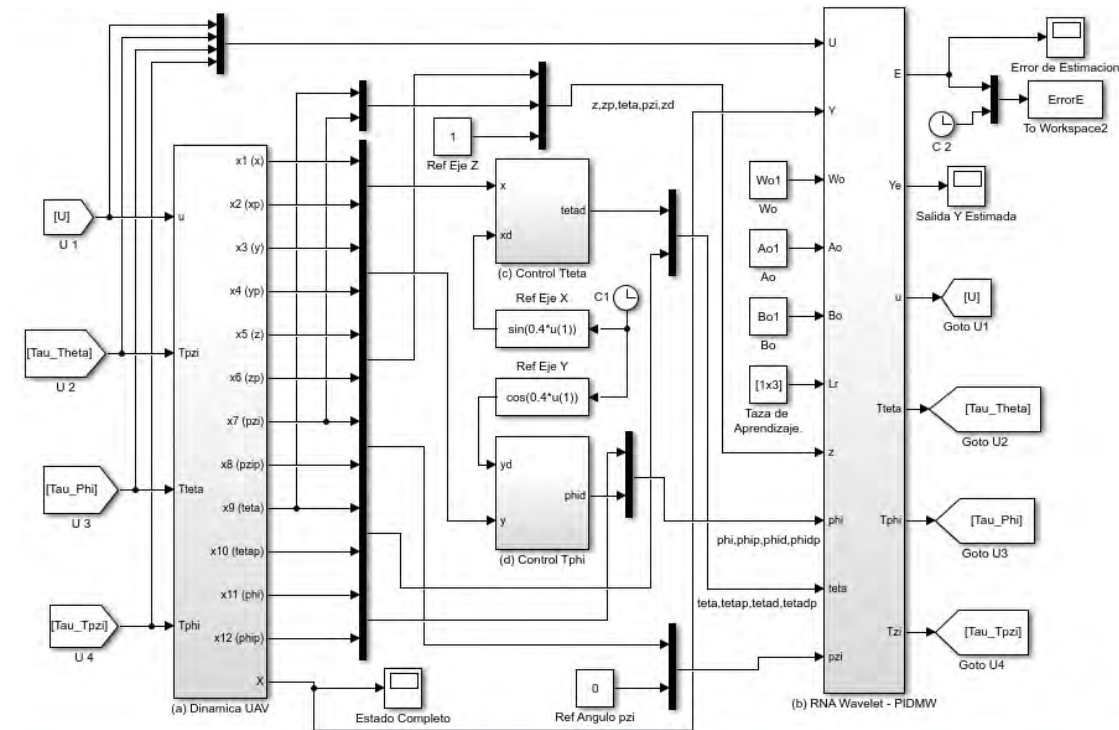


Figura B.1: Diagrama a bloques de un vehículo y red neuronal.

B. DIAGRAMAS DE BLOQUES

En la Fig. B.2 se muestra internamente el bloque (b) de la Fig. B.1. De la forma como fue descrita la red neuronal, el bloque (a) calcula la integración, la función de activación y los gradientes para que los bloques (b), (c) y (d) calculen los nuevos pesos $W_n(k)$, $A_n(k)$, $B_n(k)$. La salida de esta red entrega $\hat{\Gamma}_j[kT]$.

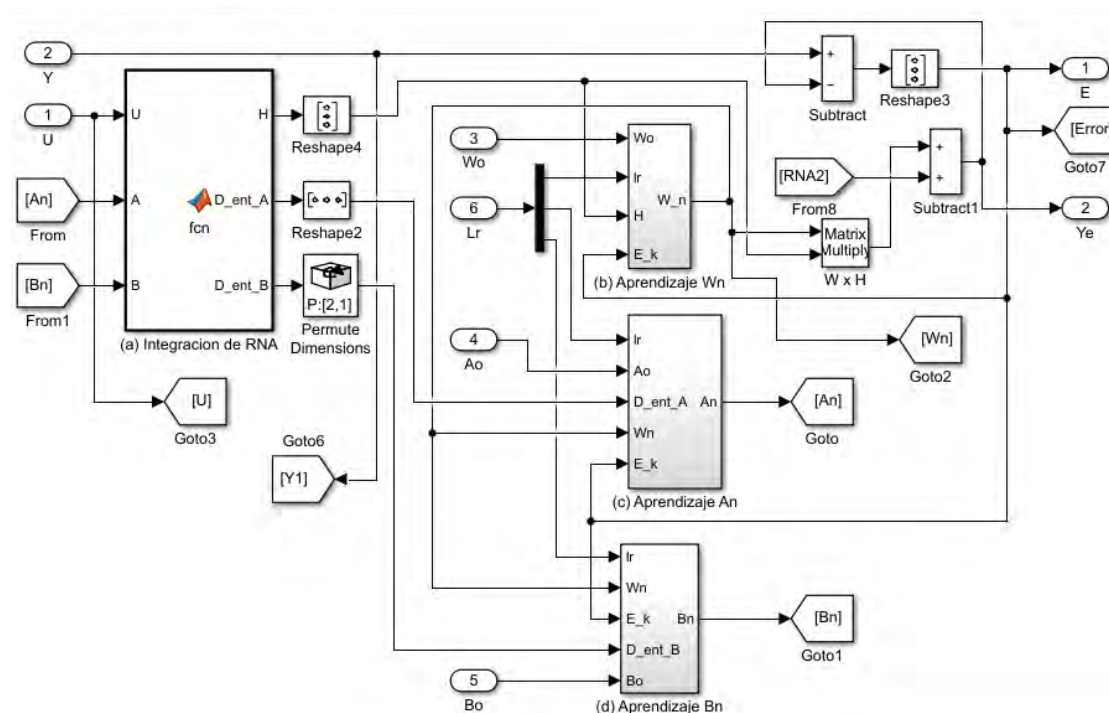


Figura B.2: Diagrama a bloques de la red neuronal artificial wavelet.

Los bloques que se encuentran a la derecha del bloque (a) de la figura B.2 aseguran las dimensiones correctas de los gradientes y la función de activación.

Por otro lado, la red que aproxima el término $\hat{\Phi}_j[kT]$ y los parámetros de ajuste $D_n(k)$, $\alpha_n(k)$ y $\beta_n(k)$ se muestra en B.3, se observa que la estructura es similar a la anterior, la diferencia radica en las entradas de cada red neuronal.

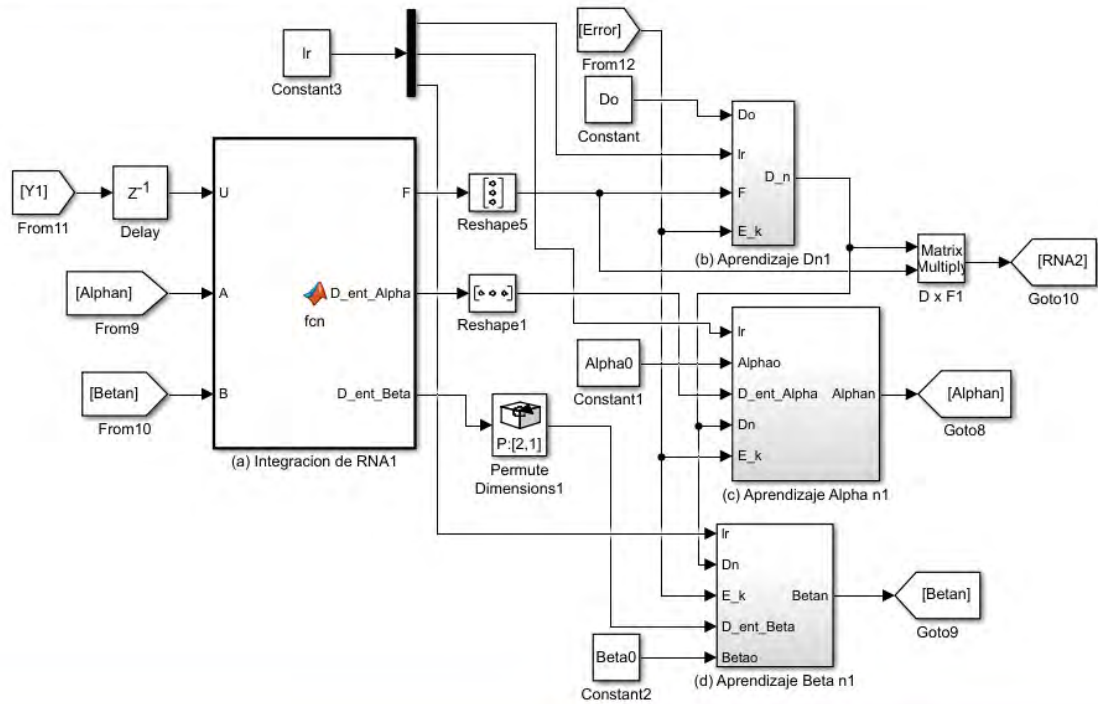


Figura B.3: Diagrama de bloques de la red que usa la entrada $y([k - 1]T)$.

B. DIAGRAMAS DE BLOQUES

En el diagrama B.4 podemos ver el control, con una estructura similar a la red neuronal, pero en lugar de calcular parámetros de ajuste, se obtienen las ganancias adaptables del controlador PIDMW, para lo cual son necesarias las entradas y salidas del sistema y con base en el error cuadrático medio, las ganancias se ajustan reduciendo el error a cada paso de cómputo.

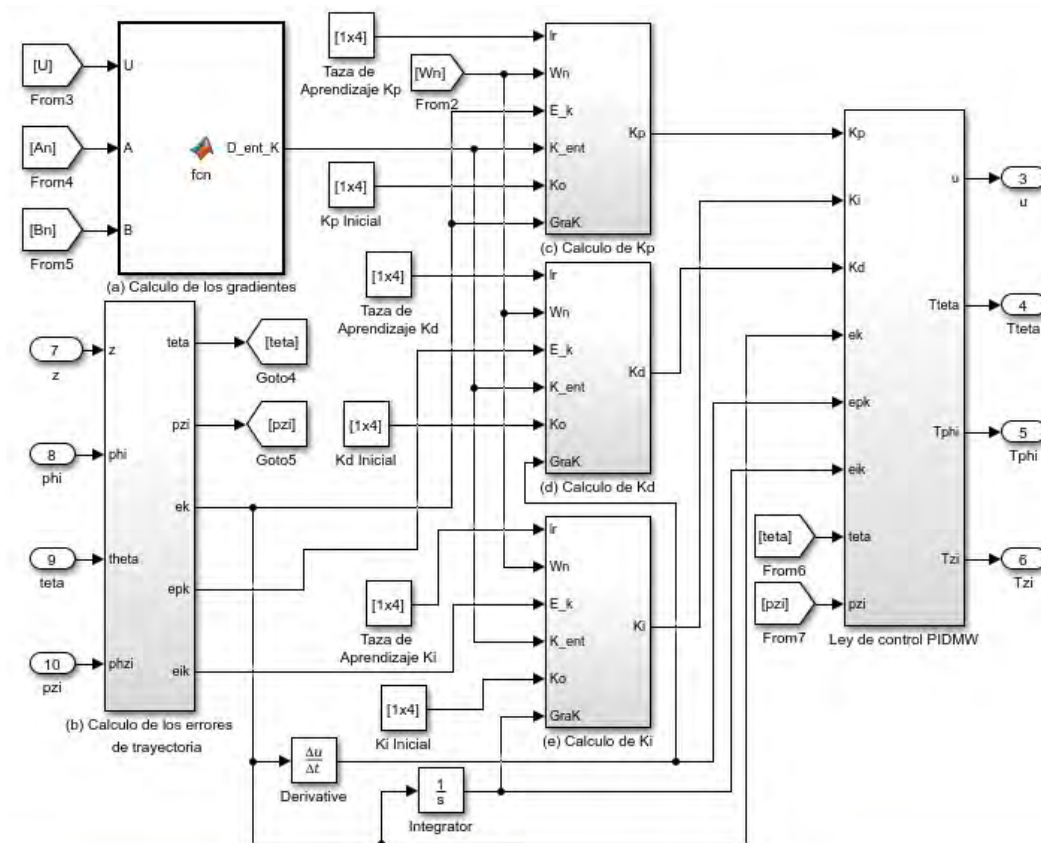


Figura B.4: Diagrama a bloques de la ley de control PIDMW.

Bibliografía

- [1] A., N. and M., K. (2014). Modeling and control of a single axis tilting quadcopter. *American Control Conference*, pages 6–4. [8](#)
- [2] Absil, P.-A., Mahony, R., and Andrews, B. (2005). Convergence of the iterates of descent methods for analytic cost functions. *SIAM J. Optim.*, 6(2):531–547. [35](#)
- [3] Aström, K. J. and Hägglund, T. (1995). *PID controllers: theory, design, and tuning*, volume 2. Isa Research Triangle Park, NC. [39](#)
- [4] Aström, K. J. and Wittenmark, B. (1997). *Computer-controlled Systems (3rd Ed.)*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA. [30](#), [83](#)
- [5] Barron Gomez, R. A., Ramos Velasco, L. E., and Espinoza-Quesada, L. R. G. (2017). Wavelet neural network pid controller for a uas transporting a cable-suspended load. *The International Federation of Automatic Control*. [2](#), [30](#), [31](#), [32](#), [69](#)
- [6] Castillo, P., L. R. and Dzul, A. (2005). Stabilization of a mini rotorcraft with four rotors. *IEEE Control Systems Magazine*, 05:45–55. [11](#)
- [7] Castillo, P., García, P., Lozano, R., and Albertos, P. (2007). Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores. 4. [2](#), [7](#), [8](#)
- [8] Chen, C. T. (1984). *Linear System Theory and Design*. Saunders College Publishing, Philadelphia, PA, USA. [26](#), [45](#)
- [9] Daubechies, I. (1988). Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41(7):909–996. [32](#)

- [10] Demuth, H. B., Beale, M. H., De Jess, O., and Hagan, M. T. (2014). *Neural network design*. Martin Hagan. 41
- [11] Diestel, R. (2014). *Graph Theory*. Springer Berlin Heidelberg. 45
- [12] Dorf, R. C. and Bishop, R. H. (2000). *Modern Control Systems*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 9th edition. 82
- [13] Fax, J. A. and Murray, R. M. (2004). Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9):1465–1476. 49
- [14] Frank Blume, C. P. (2005). *Applied calculus for scientist and engineers, a journey in dialogues*. Jones and Bartlett Publishers, Inc., Boston, USA, 1st edition. 82
- [15] Katsuhiko, O. (c2010.). *Ingeniería de control moderna*. Pearson, Madrid, España, 5^a edition. 39, 54, 82, 83
- [16] Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems; 3rd ed.* Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ. The book can be consulted by contacting: PH-AID: Wallet, Lionel. 26
- [17] L. Lewis, F., Zhang, H., Hengster-Movric, K., and Das, A. (2014). *Cooperative Control of Multi-Agent Systems*. Springer-Verlag London. 2
- [18] Lee, C.-H. and Teng, C.-C. (2003). Calculation of pid controller parameters by using a fuzzy neural network. *ISA Transactions*, 42(3):391 – 400. 40
- [19] Lee, J. D., Simchowicz, M., Jordan, M. I., and Recht, B. (2016). Gradient descent only converges to minimizers. In Feldman, V., Rakhlin, A., and Shamir, O., editors, *29th Annual Conference on Learning Theory*, volume 49 of *Proceedings of Machine Learning Research*, pages 1246–1257, Columbia University, New York, New York, USA. PMLR. 35
- [20] Lee, T. (2014). Geometric control of multiple quadrotor uavs transporting a cable-suspended rigid body. In *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6155–6160. 2, 4

- [21] Levin, A. U. and Kumpati, N. S. (1993). Control of nonlinear dynamical systems using neural networks: Controllability and stabilization. *IEEE Transactions on neural networks*, vol 4:pages 192 – 206. [27](#), [30](#)
- [22] Lewis, F. L., Zhang, H., Hengster-Movric, K., and Das, A. (2014). *Cooperative Control of Multi-Agent Systems: Optimal and Adaptive Design Approaches*. Springer Publishing Company, Incorporated. [43](#), [46](#), [49](#)
- [23] Li, Z., Duan, Z., Chen, G., and Huang, L. (2010). Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: A unified viewpoint. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 57(1):213–224. [47](#), [51](#)
- [24] Luukkonen, T. (2011). Modelling and control of quadcopter. *Independent research project in applied mathematics, Espoo*. [2](#), [9](#)
- [25] Mallat, S. G. (1989). A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 11(7):674–693. [82](#)
- [26] Merriam-Webster Online (2018). Merriam-Webster Online Dictionary. [82](#), [83](#)
- [27] Merriaux, P., Dupuis, Y., Boutteau, R., Vasseur, P., and Savatier, X. (2017). A study of vicon system positioning performance. *Sensors*, 17(7). [62](#)
- [28] Michael, N., Fink, J., and Kumar, V. (2011). Cooperative manipulation and transportation with aerial robots. *Autonomous Robots*, 30(1):73–86. [4](#), [23](#)
- [29] Muñoz Palacios, F., Espinoza Quesada, E. S., La, H., Salazar, S., Commuri, S., and Garcia Carrillo, L. R. (2016). Adaptive consensus algorithms for real time operation of multi agent systems affected by switching network events. [46](#), [51](#)
- [30] Olfati Saber, R. (2006). Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory. *IEEE Transactions on automatic control*, 51(3):401–420. [2](#)
- [31] Palunko, I., Cruz, P., and Fierro, R. (2012). Agile load transportation: Safe and efficient load manipulation with aerial robots. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 19(3):69–79. [2](#)

- [32] Pestana, J., Sanchez-Lopez, J., Mellado-Bataller, I., Fu, C., and Campoy, P. (2012). Ar drone identification and navigation control at cvg-upm. *XXXIII Jornadas de Automática (September 2012)*. [2](#)
- [33] Ramírez, A., Espinoza, E. S., Carrillo, L. R. G., Mondié, S., and Lozano, R. (2013). Stability analysis of a vision-based uav controller for autonomous road following missions. In *2013 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 1135–1143. [2](#), [9](#), [10](#), [35](#)
- [34] Sabatino, F. (2015). Quadrotor control: modeling, nonlinear control design, and simulation. *Master's Degree Project, KTH Royal Institute of Technology*. [2](#)
- [35] Sarangapani, J. (2006). *Neural Network Control of Nonlinear Discrete-Time Systems (Public Administration and Public Policy)*. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA. [35](#), [82](#)
- [36] Shivakumar, P. and Ho Chew, K. (1974). A sufficient condition for nonvanishing of determinants. *Proceedings of The American Mathematical Society - PROC AMER MATH SOC*, 43. [49](#)
- [37] Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., and Levant, A. (2015). *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhäuser Basel, 1st edition. [54](#)
- [38] Shu, H. and Pi, Y. (2000). Pid neural networks for time-delay systems. *Computers and Chemical Engineering*, 24:859–862. [32](#)
- [39] Sreenath, K. and Kumar, V. (2013). Dynamics, control and planning for cooperative manipulation of payloads suspended by cables from multiple quadrotor robots. [83](#)
- [40] Sreenath, K., Lee, T., and Kumar, V. (2013). Geometric control and differential flatness of a quadrotor uav with a cable-suspended load. In *Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on*, pages 2269–2274. IEEE. [2](#)
- [41] Velasco, L. E. R., Fernández, J. C. R., Gómez, O. I., Lamont, J. G., Rivera, M. E., and Vera, M. M. (2013). Identificación y control wavenet de un motor de ca. *Revista*

- Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 10(3):269 – 278. [2](#), [30](#), [34](#)
- [42] Velasco Ramos, L. E., Dominguez-Ramirez, O. A., and Parra-Vega, V. (2016). Wavenet fuzzy pid controller for nonlinear mimo systems: Experimental validation on a high-end haptic robotic interface. *Appl. Soft Comput.*, 40:199–205. [2](#)
- [43] Wang, P., Man, Z., Cao, Z., Zheng, J., and Zhao, Y. (2016). Dynamics modelling and linear control of quadcopter. In *2016 International Conference on Advanced Mechatronic Systems (ICAMechS)*, pages 498–503. [2](#), [8](#)
- [44] Zhang, H., Lewis, F. L., and Das, A. (2011). Optimal design for synchronization of cooperative systems: State feedback, observer and output feedback. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 56(8):1948–1952. [50](#)

Implementation of an artificial neural network wavelet for payload transportation with two UAV agents

C. E. Juárez Vargas¹, J. Suárez Cansino ², E. S. Espinoza Quesada³ and L.R. García Carrillo ⁴

Abstract—This paper deals with the problem of payload transportation using two Unmanned Aerial Vehicles. The main task is to ensure the stable flight of the agents by transporting a payload in cooperation and combining neural network control with a neural network estimation, using wavelet activation functions along with cooperative multiagent control strategies.

I. INTRODUCTION

There are several studies about how to transport a payload using Unmanned Aerial Vehicles (UAV's) and the physical effects that they produce on the load. To taking care of the possible changes in the vehicle dynamics, there do exist several strategies to ensure stability while transporting the payload.

The strategies include differential flatness [7], geometric control [8][9] and quasi-static model of cable suspended load transportation [5], in addition to cooperative grasping to transport a payload, as well [4]. This paper makes the analysis and experiments for two Unmanned Aerial Vehicles lifting the payload and includes multi-agent system theory along with an artificial neural network.

An artificial neural controller has some advantages over full mathematical model development because of finding the equations describing this kind of systems is not an easy task. The neural controller creates an input-output heuristic model considering the available information only. The authors in references [1][3] study the mathematical model for UAV and load.

The topic about control is, in general, the *leitmotiv* of the authors of this paper, and the study that they usually do in this sense includes simple and specific cases as, for example, the estimation of the behavior and control of a DC motor, an AC motor, and haptic interfaces, in addition to the payload transportation with a single UAV [11]. This paper shows the results related to the continuation of the payload transportation with a single UAV, but considering now more than one vehicle.

Thus, the control of multiple vehicles transporting a load becomes the natural step to follow. However, the extreme difficulty of this problem obligates to consider complementary mathematical tools to that of the physical model only.

¹E. Juárez, Automation and control student in University Autonomous State of Hidalgo, México. cesar_ejv@hotmail.com

²J. Suárez Cancino, Full time researcher in Department of Basic Science's and Engineering in University Autonomous State of Hidalgo. México suarez@uaeh.edu.mx

³E. S. Espinoza Quesada, Full time researcher in Mixed International Unit, Cinvestav, México. eespi-noza@conacyt.mx

⁴L.R. García Carrillo, Full time researcher in department of Engineering in A&M Corpus Christi, Texas, USA. garcia@AandM.edu.us

For example, the introduction of artificial neural networks of some kind helps in the control implementations, but this kind of tool is not enough to control the cooperation among the vehicles so that a solution of the problem requires the combinations of others different control strategies.

A. Main contribution

Therefore, the control of multiple agents with the same dynamics, along with a multi-agent control strategy that includes a non-linear control that an artificial neural network supports are the main contributions of this paper.

The proposed mathematical model, which is a simple version to understand how the payload disturbances affect the UAV dynamics, is another contribution to remark. Hence, the model that the paper works is appropriate to get the input-output impulses for offline training of the artificial neural network (ANN); in other words, for offline findings of the ANN weights, the next parts of the paper comment on these topics with more detail.



Fig. 1. Two UAV transporting a load

The rest of the paper organizes as follows: Section 2 presents the mathematical model of two vehicles transporting a load, Section 3 shows the structure of an artificial neural network controller for payload transportation, Section 4 deals with the multi-agent formation control and, finally, Section 5 discusses the results of simulated and on field experiments.

II. MATHEMATICAL MODEL

There are two methods to analyze the system described by Figure 2 and to obtain the mathematical model; namely, the Direct Problem and the Indirect Problem. The first one

establishes that, if the payload's coordinates are known, then the difficulty consists in finding the right positions and velocities of the quadrotors to maintain the equilibrium between the load and the vehicles. On the other hand, the Indirect Problem establishes that if one knows the positions and velocities of the vehicles beforehand, then one needs to find the right payload's position and velocity.

This work focuses the attention on the Direct Problem so that it assumes that one knows the position and velocity of the payload, in order of deducing the vehicles' positions and velocities. The analysis considers the concepts of World Coordinates System (wc) and Local Coordinates System (cg and qr) and makes a map between Cartesian coordinates and Polar coordinates.

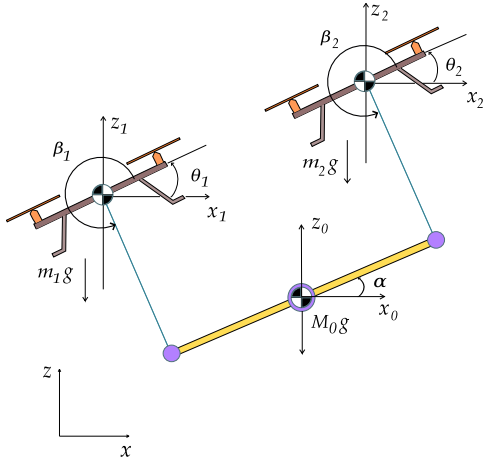


Fig. 2. Graphic description of two UAV's transporting a load.

In what follows, the symbol \mathbf{x}_i denotes the vector position of the i -th vehicle and the symbol $[\mathbf{x}_i]_{\beta}$ the corresponding matrix coordinates in the basis β of the related frame of reference.

If the symbol \mathbf{x}_0 represents the payload's position, the symbol ρ_i represents the position of the i -th attached point, and the symbol \mathbf{q}_i represents the position of the i -th quadrotor or vehicle, then $[\rho_i]_{\beta_{cm}}$ and $[\mathbf{q}_i]_{\beta_{qr}}$ denote their respective matrix coordinates.

If $R_{\beta_{cm}\beta_{wc}}$ and $R_{\beta_{qr_i}\beta_{wc}}$, respectively, denote the rotation matrix from the Local Coordinates System defined by the center of mass and from the Local Coordinates System given by the i -th quadrotor, then the following equation

$$[\mathbf{x}_i]_{\beta_{wc}} = [\mathbf{x}_0]_{\beta_{wc}} + R_{\beta_{cm}\beta_{wc}} [\rho_i]_{\beta_{cm}} - l_i R_{\beta_{qr_i}\beta_{wc}} [\mathbf{q}_i]_{\beta_{qr_i}} \quad (1)$$

The Equation gives the position of the i -th vehicle as seen from the world coordinates system. Appendix A describes the complete mathematical model.

The variables

$$\mathbf{q} = [x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0, \alpha, \dot{\alpha}, \beta_1, \dot{\beta}_1, \beta_2, \dot{\beta}_2, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2] \quad (2)$$

define the full state of the system, and Figure 2 indicates where these variables must appear.

The vector positions $\mathbf{x}_0 = (x_0, 0, z_0)$ and $\mathbf{x}_i = [x_i, 0, z_i]$ define the location of the center of mass of the payload and the location of the center of mass of the i -th vehicle, respectively. Furthermore, the symbols M_0 and m_1, m_2 , respectively, represent the masses of the load and the UAV's, such as Figure Figure 2 shows. Thus, $M_T = M_0 + m_1 + m_2$ defines the total mass of the system.

On the other hand, the symbol l_i represents the length of the i -th cable, and the symbol θ_i represents the attitude of i -th vehicle. The position of the vehicle i -th is not in an explicit form, but it depends on the load's position, and of the corresponding attached point, such as Equation (1) indicates.

The matrices

$$R_i = \begin{bmatrix} c(\theta_i) & 0 & -s(\theta_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ s(\theta_i) & 0 & c(\theta_i) \end{bmatrix}, \quad [q_i]_{\beta_{qr_i}} = \begin{bmatrix} c(\beta_i) \\ 0 \\ s(\beta_i) \end{bmatrix} \quad (3)$$

respectively define the rotation matrix $R_0 = R_{\beta_{cm}\beta_{wc}}$ as an element of $SO(3)$ and the unitary cable direction vector, with basis on the fixed body frame of the quadcopter.

The following analysis assumes that the attached cable, from the UAV to the payload, is rigid and massless and that g denotes the gravity. For purposes of simulation and artificial neural network training, Equation (4) is in the form of the Euler-Lagrange motion equations. The equation gives the final structure of the mathematical model.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (4)$$

The Equation (4) is a generalization of the model that Appendix A deeply discusses based on the work of the authors of reference [10], where $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ is the inertia matrix, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ the Coriolis matrix and $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ contains the gravity and other forces effects.

In particular, the analysis in this paper assumes a finite symmetrical rod with length l and discrete masses distributed on its edges. In other words, the extremes of the rod have a mass m each, such that the center of mass locates at its center.

The experimental setting is equivalent to that of two vehicles that, separately, transport a single load each, but with a constraint involving a link between the two masses at the extremes of the rod. The rod plays the role of this link, of course. The mathematical model for every vehicle becomes the following,

$$\begin{aligned}
& ml_i \begin{bmatrix} \frac{M_T}{ml_i} & 0 & s(\xi_i) & s(\xi_i) \\ 0 & \frac{M_T}{ml_i} & -c(\xi_i) & -c(\xi_i) \\ s(\xi_i) & c(\xi_i) & l_i & l_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{z}_0 \\ \ddot{\theta}_i \\ \ddot{\beta}_i \end{bmatrix} + \\
& ml_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_i c(\xi_i) & \dot{\beta}_i c(\xi_i) \\ 0 & 0 & -\dot{\theta}_i s(\xi_i) & -\dot{\beta}_i s(\xi_i) \\ \dot{\xi}_i c(\xi_i) & \dot{\xi}_i s(\xi_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{z}_0 \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{\beta}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \beta_i \dot{\theta}_i V_x = \frac{1}{u_i} \left(-ml((\dot{\xi}s(\xi) + \xi^2 c(\xi)) - m_T u_m) \right), u \neq 0 \quad (7) \\
& + g \begin{bmatrix} 0 \\ M_T \\ -m_0 l_i c(\xi_i) \\ 0 \end{bmatrix} = u_i \begin{bmatrix} -s(\theta_i) \\ c(\theta_i) \\ -l_i c(\beta_i - \theta_i) \\ \frac{\tilde{\tau}_i}{u_i} \end{bmatrix} \quad (5)
\end{aligned}$$

Equation (5) uses the usual notation in the area of robotics, with $s(\cdot)$ as $\sin(\cdot)$ and $c(\cdot)$ as $\cos(\cdot)$. Others shortcuts say that $\xi = (\theta + \beta)$, $\tilde{\tau}$ is the force that the vehicle produces, and u is the control signal.

III. CONTROL STRATEGY

The combination of two different control strategies solves the problem of the control strategy. First of all, the physics phenomena related to the system dynamic produce nonlinear disturbances. For taking off the masses of the vehicle and the payload, the handle of the thrust requires an intelligent control algorithm dealing with these disturbances.

Secondly, the formation control strategy combines with the first one. Every Unmanned Aerial Vehicle has to be in the right distance between each other with the main idea of avoiding crashes and keeping the state of equilibrium.

The following paragraph discusses the control strategy for the model in Equation (5). In this case, after some algebraic manipulation of the Equation (5) in the stationary state, $\ddot{x} = 0$ gives the equilibrium point if and only if $\beta = \frac{\pi}{2}$ and $u_i = M_T g$, where \tilde{x} represents the vector of variables of state.

The following statement establishes a controllability definition [20]. Assume that for an arbitrary neighborhood V around the origin there does exist another neighborhood W such that for any two states $x_0, x_1 \in W$, there does exist an input sequence of finite length that transfers the system from x_1 to x_2 without leaving V , then the system is locally controllable around the equilibrium state $\tilde{x} = 0$.

This definition means that the closeness of the system UAV–payload (the payload suspended by the link attached to the UAV) to the equilibrium point ensures the local controllability of the system. For the specific case, the translation velocity of the UAV transporting the payload must be very close to zero to follow the local controllability definition above; this assumption leaves out aggressive trajectories or unbounded disturbances for the experimental implementation. The suggested control strategies are the following.

1) *Altitude Control*: Equation (6) proposes the altitude controller, this type of control is known as a ‘feedback linearization’.

$$u_i = \frac{1}{c(\theta)} \left(-ml(\dot{\xi}c(\xi) - \xi^2 s(\xi)) + M_T(g - u_p) \right), |\theta| < \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

If Equation (6) replaces the variable u in the Equation (5), then the altitude dynamics result like $\ddot{x}_0 = u_p$, where u_p is the PIDMW controller to be defined later on.

2) *Translation Control*: Equation (7) models the feedback linearization controller for payload and vehicle translation.

$$\beta_i \dot{\theta}_i V_x = \frac{1}{u_i} \left(-ml((\dot{\xi}s(\xi) + \xi^2 c(\xi)) - m_T u_m) \right), u \neq 0 \quad (7)$$

where V_x is a virtual control already proposed on reference [21]; because of the underactuated properties of the system, the horizontal translation dynamics on space depends on the UAV attitude dynamics, so that the method to follow says that V_x must approximate to $s(\theta)$. The result leaves $\ddot{x}_0 = u_m$ after substituting the Equation (7) in Equation (5); with u_m as the cooperative multi-agent control to be defined later on.

3) *Attitude Control*: For the vehicles orientation dynamics, the proposed control is defined by the equation (8) which is a continuous PID controller with adaptive gains defined as

$$\tilde{\tau} = -(K_{p_w}(\theta_d - \theta) + K_{d_w}\dot{\theta} + K_{i_w} \int_0^\tau (\theta_d - \theta) d\tau). \quad (8)$$

where $K_{p_w}, K_{d_w}, K_{i_w}$ are proper gains to make the characteristic polynomial $\delta_w = s^3 + K_{d_w}s^2 + K_{p_w}s + K_{i_w}$ stable, tuned by the artificial network controller which is defined next.

A. Wavelet Neural Network

The Wavenet Neural Network (WNN) is a type of Radial Basis Function (RBF) artificial neural network [11], this kind of network creates a discrete input–output model, with the input integration as

$$\tau_{u,j} = \frac{\|u(k) - b_j\|}{a_j}, \quad (9)$$

$$\tau_{y,j} = \frac{\|y(k) - \beta_j\|}{\alpha_j}. \quad (10)$$

with $u(k)$ as the input to the system, and $y(k)$ as the current output, the parameters $\{a_j, b_j, \alpha_j, \beta_j\}$ represent the expansion/contraction and translation of the mother wavelet function activation $\phi(\tau), \psi(\tau)$. This network uses a Mexican Hat type activation function, in other words

$$\phi_j[kT] = (1 - \tau_{u,j}^2[kT]) \exp\left(-\frac{\tau_{u,j}^2[kT]}{2}\right), \quad (11)$$

$$\psi_j[kT] = (1 - \tau_{y,j}^2[kT]) \exp\left(-\frac{\tau_{y,j}^2[kT]}{2}\right), \quad (12)$$

Within this context, the functions $\phi_j[kT]$ and $\psi_j[kT]$ define the daughter wavelets, and the general form of the discrete model of a nonlinear system is

$$y[(k+1)T] = \Phi[x[kT], T] + \Gamma[x[kT], u[kT], T], \quad (13)$$

with $x[kT]$ as the vector of state, T the sampling time, $u[kT]$ the control input. The inner product of the wavelet functions activation $\phi_j[kT]$, $\psi_j[kT]$ with their corresponding weights $d_{s,q}[kT]$, $w_{s,j}[kT]$ approximate the s -th output of $y[(k+1)T]$ as follows,

$$\hat{\Phi}_s(x[kT], \vartheta_{\hat{\Phi}}[kT]) = \sum_{j=1}^m d_{s,j}[kT] \psi_j[kT] \quad (14)$$

$$\hat{\Gamma}_s(x[kT], \vartheta_{\hat{\Gamma}}[kT]) = \sum_{j=1}^r \omega_{s,j}[kT] \phi_j[kT] \quad (15)$$

with $\vartheta_{\hat{\Phi}}[kT]$, $\vartheta_{\hat{\Gamma}}[kT]$ as variable coefficients, the artificial neural network uses the estimation error $\epsilon_s[kT] = y_s[kT] - \hat{y}_s[kT]$ to find the proper weights. If $\epsilon_s[kT] \rightarrow 0$, then $\hat{y}_s[kT] = y_s[kT]$, so that Equation (16) defines the neural network estimation

$$\hat{y}_s[kT] = \sum_{q=1}^m d_{s,q}[kT] \psi_q[kT] + \sum_{j=1}^r w_{s,j}[kT] \phi_j[kT] \quad (16)$$

and the Equations (17) and (18) define the weights updating

$$w_{i,j}[(k+1)T] = w_{i,j}[kT] - \eta_w \nabla w_{i,j}[kT] \quad (17)$$

$$d_{i,j}[(k+1)T] = d_{i,j}[kT] - \eta_d \nabla d_{i,j}[kT] \quad (18)$$

where η_w , η_d are the learning rates. On the other hand, this paper does not explicitly show the gradients with respect to the variables $\{a_j, b_j, \beta_j, \alpha_j, w_{i,j}, d_{i,j}\}$ because of they are well established in reference [11].

Fig. (3) graphically shows how these mathematical terms work together, in order to define the Wavelet Neural Network.

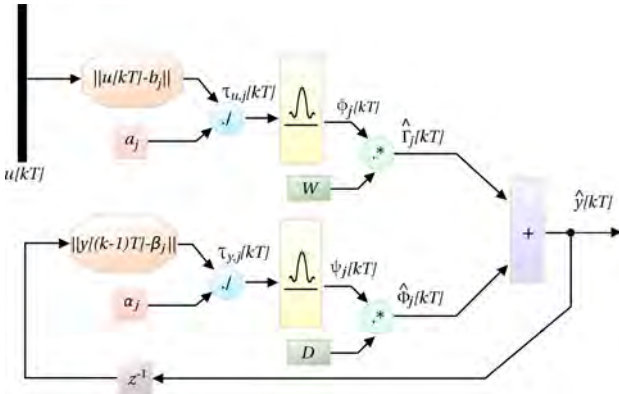


Fig. 3. Wavelet Neural Network

B. PIDMW Controller

The Proportional Integral Derivative Multiresolution Wavelet controller (PIDMW) is a well-known structure that the authors [11], [12] and [13] already described in detail.

This type of control differs from the classic PID controller on the gain tuning procedure.

The PIDMW is an intelligent adaptive control based on the input-output neural network estimation and gets the proper parameters from the artificial neural network, to update the respective gains, and the Equation (19) defines the control.

$$u_p[kT] = M_{p_p}[kT] + M_{i_p}[kT] + M_{d_p}[kT] \quad (19)$$

This is a control of discrete type and the Equation (20), Equation (21) and Equation (22) define the three coefficients.

$$M_{p_p}[kT] = K_{P_p}[kT] e_p[kT] \quad (20)$$

$$M_{i_p}[kT] = K_{I_p}[kT] \left(\frac{(e_p[kT] + 4e_p[(k-1)T])}{6} + \frac{e_p[(k-2)T]T}{6} + M_{i_p}[(k-1)T] \right) \quad (21)$$

$$M_{d_p}[kT] = K_{D_p}[kT] \left(\frac{e_p[kT] - e_p[(k-2)T]}{2T} \right) \quad (22)$$

where $K_{P_p}[kT]$, $K_{I_p}[kT]$ and $K_{D_p}[kT]$ are the PID wavelet gains, $e_p[kT]$ is the reference error, and $e_p[(k-1)T]$, $e_p[(k-2)T]$ their respective samples at time $(k-1)T$ and $(k-2)T$.

C. Cooperative SVFB Control

The controller in III-B controls the altitude of the vehicle and perturbs the payload altitude. On the other hand, Cooperative State Variable Feedback (CSVFB) controls the subsystems $(x - \theta)$ and $(y - \phi)$ that define the horizontal translation on x and y axis. A second linear matrix parameterizes these subsystems [14].

The i -th vehicle is like an agent with dynamics $\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i$, $y_i = Cx_i$, being $x_i \in \mathbb{R}^n$ the agent's state, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, u_i as the control's input and y_i as the system's output. The authors in reference [14] completely define the matrices A , B and C .

This work assumes that every agent in the group has the same dynamic; exception made of the virtual leader with dynamic $\dot{x}_0 = Ax_0$, $y_0 = Cx_0$, and this leader behaves as the reference. The Equation (23) defines the total distance error between the i -th follower vehicle and the virtual leader x_0 , and follower $x_j, \forall j$.

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i) + g_i(x_0 - x_i) \quad (23)$$

with a_{ij} and g_i as the edge weights and the pinning gains, respectively, where both are used to define the matrices \mathcal{A} and G , correspondingly. The Equation (24) defines a distributed control, which is a state variable feedback controller.

$$u_i = cK\varepsilon_i \quad (24)$$

The Equation (24) considers a gain $c \in \mathbb{R}$ and establishes the link's strength between agents, and K represents the stabilizing gain. By substituting the Equation (23) and the

Equation (24) into the linear agent's dynamic, then Equation (25) defines the local closed-loop dynamic for the i -th agent.

$$\dot{x}_i = Ax_i + cBK \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i) + g_i(x_0 - x_i) \right) \quad (25)$$

By considering the complete set of agents, the Equation (26) defines the global closed-loop dynamics of all the agents and the leader [17].

$$\dot{x} = (I_N \otimes A - c(L+G) \otimes BK)x + (c(L+G) \otimes BK)x_0 \quad (26)$$

where \otimes represents the Kronecker product, the application of the equation assumes that the pair (A, B) is controllable, and that the factor $(L + G)$ is non-singular, such as the authors [15], [16], [17] demonstrate. Authors in reference [18] suggest the tuning of the factor c , such as Equation (27) shows.

$$c \geq \frac{1}{2 \min_{i \in N} \text{Re}(\lambda_i)}, \quad (27)$$

with λ_i as the i -th eigenvalue of the Laplacian matrix L , according to optimal control theory, and the Equation (28) defines the gain K [19],

$$K = R^{-1}B^T P \quad (28)$$

where $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is a positive definite matrix that defines the unique solution of the Riccati algebraic equation that Equation (29) shows.

$$0 = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P \quad (29)$$

where $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ are two positive definite matrices, whose definition depends on the physical system at hand. Section IV shows the obtained results.

IV. SIMULATION, IMPLEMENTATION AND RESULTS

The physical implementation was developed during an academic one month stay at the Engineering Laboratory in the Texas A&M Corpus Christi University, and the following discussion describes the initial weights $w_{i,j}$, $d_{i,j}$ of the RBF artificial neural network, the development of the implementation and the way of measuring the vehicles and payload positions.

A prebuild vehicle BEBOP 1 from PARROT[®] is useful to develop the physical implementation. A VICON system captures the motion and measures the vehicles and the payload positions. A PVC 1/2 pipe, with 26.2 inches large (0.66 meters) and 156 grams in weight, plays the role of the payload.

On the other hand, the weight of the UAV has a value of 420 grs., according to manufacturer specifications. The values $K_{p_0}[kT] = [0.0005, 0.0005, 0.005, 0.03]$, $K_{d_0}[kT] = [0.0005, 0.0005, 0.005, 0.03]$ and $K_{i_0}[kT] = [0.00001, 0.000001, 0.00001, 0.000001]$ define the PIDMW controller initial gains, and the artificial neural network weights have the following values,

$$A_o = [-5.1993 \quad 2.1384 \quad 4.0040 \quad -0.4095] \quad (30)$$

$$W_o = \begin{bmatrix} -0.4629 & 0.5413 & -2.0829 & 0.9338 \\ 0.2235 & -0.5829 & 0.5770 & -0.4194 \\ -0.8352 & 0.2328 & 2.8463 & 1.2504 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$B_o = \begin{bmatrix} -2.9740 & -0.2675 & -2.7314 & 1.1334 \\ 0.7935 & 0.4323 & 1.0524 & 2.4757 \\ 0.6732 & -0.8407 & -1.3070 & -2.0074 \\ 0.9034 & 1.7240 & -0.6698 & 2.5213 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\alpha_o = [-5.21186 \quad 6.55364 \quad 7.12251 \quad -0.4095] \quad (33)$$

$$D_o = \begin{bmatrix} 0.2222 & -1.24443 & -0.342858 & 0.9338 \\ 0.1199 & 0.4199 & 2.59444 & -0.4194 \\ 0.0310 & 0.161719 & 3.63119 & 1.2504 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\beta_o = \begin{bmatrix} -3.34818 & -0.8646 & -0.14753 & 1.133 \\ -0.514362 & -0.5989 & -0.10281 & 2.475 \\ 0.79117 & 4.5050 & -0.42795 & -2.007 \end{bmatrix} \quad (35)$$

The learning rates have the values $lr = [0.0001, 0.0001, 0.0001]$ for the PIDMW actualization gains and $\eta_{w,d} = 0.00001$ for the artificial neural network weights. For the cooperative state feedback control law, the matrices that the definitions (36) and (37) give are related to the edge weight matrix \mathcal{A} , the pinning gains matrix G , the in-degree matrix D and the Laplacian matrix $L = D - \mathcal{A}$ [15].

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

The Communication Graph is quite useful to define this matrix selection, such as Figure 4 shows,

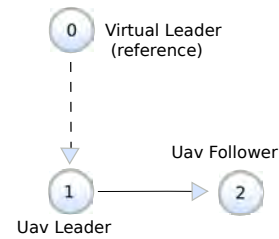


Fig. 4. Communication Graph representing the UAV formation.

That all the agents have the same dynamics is one of the main assumptions. So that, a free-model artificial neural network controller controls the altitude dynamics; furthermore, the definition of the pair (A, B) requires the introduction of the configuration control and, afterward, the same pair (A, B) permits to calculate the feedback control with a linear second order dynamics, such as the authors in reference [14] propose.

$$\dot{x}_{xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.21 & -2.42 \end{bmatrix} x_{xi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9922 \end{bmatrix} u_{xi}, \quad (38)$$

$$\dot{x}_{yi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.21 & -2.64 \end{bmatrix} x_{yi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9801 \end{bmatrix} u_{yi}, \quad (39)$$

In order to obtain matrix P , definite positive matrix Q and R selected as:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * 0.0001, \quad R = 1000 \quad (40)$$

Solving (29) the (SVFB) controller gain (28) is $K_x = [0.3162, 0.5436, 0.2748] * 0.001$.

Red and blue lines, respectively, mark the position reference and the real UAV position in Figure 5 and Figure 6. The vehicles transport the payload from one given point to another different one, so that the experiment requires the previous definition of a trajectory.

The experiment considers a simple trajectory by saying that the vehicles and the payload motions keep a fixed X coordinate with value $x_d = 60$ centimeters, such as the Figure 5a shows. Figure 7 defines the location of the axis in the coordinate system, where the plane XY is parallel to the floor of the laboratory.

On the other hand, Figure 5b shows the reference for the Y -axis, and the function $y_d = 1.4 \cos \frac{t\pi}{T}$ defines the trajectory, with the variable t representing the discrete sampling time and T the full-time window.

Such as the Figure 5c shows, a variable step function defines the desired trajectory z_d on the Z -axis. Finally, Figure 5d shows the link angle that the corresponding rope makes in the local coordinates system of the respective vehicle (counterclockwise and starting from the local x axis parallel to the plane XY).

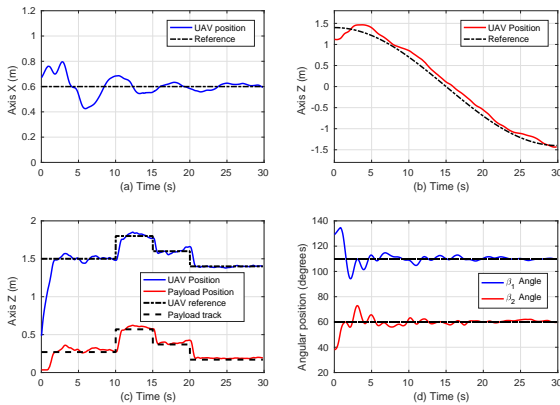


Fig. 5. Leader position on the X, Y, Z axis

Figure 6a describes the position of both the Leader and the Follower agents in the group all along the X -axis, such as

the previous lines above say. The Leader knows the reference (Virtual leader) and the follower only knows the leader's position with the variable δ defining the distance between agents, and which represents the safe distance to avoid crash accidents between the vehicles.

The difference δ is 1 meter, such as the Figure 6a illustrates. Figure 6b shows to the leader's and follower's positions on the Y axis. On the other hand, Figure 6c shows the UAV and payload positions referred to the follower agent and its reference. The payload is controlled indirectly by the motion of the UAV.

An important point to notice is that the initial positions of the vehicles are on the ground and that the take-off of these devices, along with the payload, produce undesired displacements on the $(x - \theta)$ and $(y - \phi)$ subsystems. However, the proposed control strategies are designed to operate the system properly. So that, they carry on the system to the desired position by applying the adequate translations and rotations, when the vehicles and the payload are in the air.

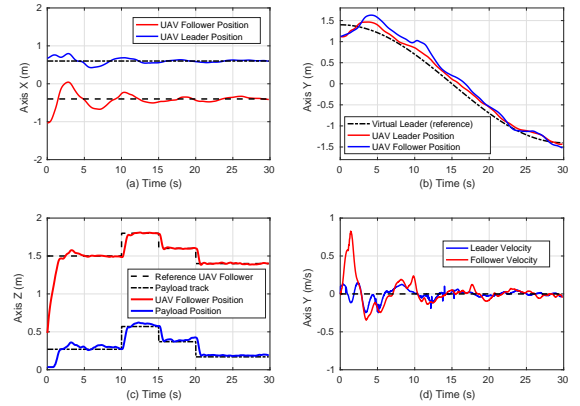


Fig. 6. Follower position on the X, Y, Z axis

Figure 7 illustrates the positions on the \mathbb{R}^3 of each vehicle and the payload when the whole system uses the PIDMW-CSVFB Controller or the PD controller. The Figure compares the performance of the two controllers applied to the same system.

Because the PD controller does not have a cooperative structure, the performance of this kind of controller is lower than that of the first one, which has a cooperative structure indeed.

The reasons of the PD lower performance include the fact that this kind of controller does not warranty the cooperative synchronization between agents, at least not in the classic control structure. Figure 7 shows why the combination of different structures, such as multiresolution wavelets controllers and cooperative state feedback controllers, are necessary to control a very complex system; in particular the system that the two vehicles and the payload define.

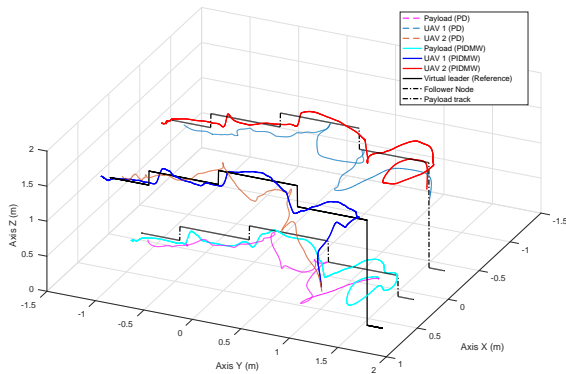


Fig. 7. Position in \mathbb{R}^3 of follower UAV and payload

Because of the physical properties of the vehicles, and the choosing of the reference that they follow, the performance index based on the mean square error goes to zero as the time increases; even though the payload mass produces small deviations, such as Figure 8 shows.

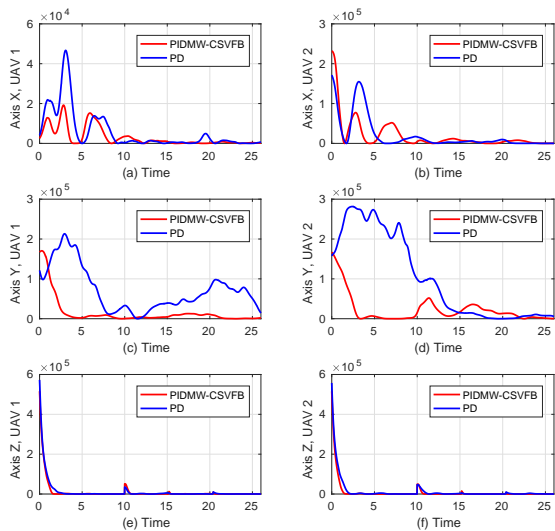


Fig. 8. Error based on the least mean square index performance between PIDMW-CSVFB and the PD controller for agent follower and agent leader

V. CONCLUSIONS

The results show that the Flocking Centering algorithm for multi-agent systems is a good strategy to get an acceptable behavior of the system, even though one of the agents has limited working capabilities in comparison with the leader agent. This fact confirms that the selection of the proper control strategy is a good point for starting; mainly, because of the kind of cooperation that this type of system involves.

The dynamical behavior of the leader and the follower are too complex for being able to capture directly in a mathematical model. However, the artificial neural network model that

this project applies shows that the network absorbed in some way some of these difficulties. The type of artificial neural network represents the nonlinearities of the system. In this case, wavelets functions relate to these nonlinearities, and they acceptably work in the functioning of the controller. The architecture of the artificial neural network is more simple than those reported by other authors [12].

Even though the analysis considers a simplified experimental setting, the results are valuable such as the previous two paragraphs show. The model is a representation of two vehicles transporting a single object. However, the simplification of the real scenario assumes that the mass distribution of the payload locates mainly at the edges of a large rod. So that, the problem reduces to two synchronized vehicles transporting their corresponding object.

The combined control has a better performance than the classic one, such as the Figures 7, 8 show. Both strategies do the job; however, if one is looking for how they do the job, then the proposed control is the best decision to make.

ACKNOWLEDGEMENT

This paper was partially supported by the National Council of Science and Technology Grant 441321.

REFERENCES

- [1] F. A. Goodarzi, Autonomous aerial payload delivery with quadrotor using varying length cable, 2016 International Conference on Advanced Mechatronic Systems (ICAMEchS), Melbourne, VIC, 2016, pp. 394-399. doi: 10.1109/ICAMEchS.2016.7813481.
- [2] Z. Li, Z. Duan, G. Chen and L. Huang, Consensus of Multi-agent Systems and Synchronization of Complex Networks: A Unified Viewpoint, in IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 57, no. 1, pp. 213-224, Jan. 2010. doi: 10.1109/TCSI.2009.2023937.
- [3] A. Rajaeizadeh, A. Naghash, and A. Mohamadifard, Cooperative aerial payload transportation using two quadrotors, International micro air vehicle conference and flight competition 2017, Toulouse, France, 2017, pp. 73-80.
- [4] Mellinger, D. Shomin, M. Michael, N. Kumar, V. (2010). Cooperative Grasping and Transport Using Multiple Quadrotors.. In A. Martinoli, F. Mondada, N. Correll, G. Mermoud, M. Egerstedt, M. A. Hsieh, L. E. Parker, K. St. (eds.), DARS (p/pp. 545-558), : Springer. ISBN: 978-3-642-32722-3.
- [5] Nathan Michael, Jonathan Fink, and Vijay Kumar. 2011. Cooperative manipulation and transportation with aerial robots. *Auton. Robots* 30, 1 (January 2011), 73-86, DOI=10.1007/s10514-010-9205-0.
- [6] C. Masone, H. H. Blthoff and P. Stegagno, Cooperative transportation of a payload using quadrotors: A reconfigurable cable-driven parallel robot, 2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), Daejeon, 2016, pp. 1623-1630, doi: 10.1109/IROS.2016.7759262.
- [7] Sreenath, Koushil. Kumar, Vijay. (2013). Dynamics, Control and Planning for Cooperative Manipulation of Payloads Suspended by Cables from Multiple Quadrotor Robots. 10.15607/RSS.2013.IX.011.
- [8] K. Sreenath, T. Lee and V. Kumar, Geometric control and differential flatness of a quadrotor UAV with a cable-suspended load, 52nd IEEE Conference on Decision and Control, Firenze, 2013, pp. 2269-2274, doi: 10.1109/CDC.2013.6760219.
- [9] T. Lee, Geometric control of multiple quadrotor UAVs transporting a cable-suspended rigid body, 53rd IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, CA, 2014, pp. 6155-6160, doi: 10.1109/CDC.2014.7040353.
- [10] Spong, Mark W., Robot Dynamics and Control, John Wiley & Sons, Inc. New York, NY, USA. 1989.

- [11] Barrón-Gómez R. A., Ramos-Velasco L.E., Espinoza Quesada E.S., García Carrillo L.R., Wavelet neural network PID controller for a UAS transporting a cable-suspended load, 20th The International Federation of Automatic Control, pp. 2371-2376, Toulouse, France, July 9-14, 2017.
- [12] M.A. Vega Navarrete, L.E. Ramos Velasco, P.A. Arizpe Carreón V.M. Delgado Romero, P. Argumedo and V. Parra Vega, Control PID Wavenet Discreto para Sistemas No Lineales Subactuados con Ganancias Autosintonizables por Retroalimentación de Salida, Congreso Nacional de Control Automático, pp. 173-178, Monterrey, Nuevo León, México, Octubre, 2017.
- [13] Velasco, L. E. R., Fernández, J. C. R., Gómez, O. I., Lamont, J. G., Rivera, M. E., and Vera, M. M. (2013). Identificación y control wavenet de un motor de ca. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial IRIAI.
- [14] Muñoz Palacios, F., Espinoza Quesada, E. S., La, H., Salazar, S., Commuri, S., and García Carrillo, L. R. (2016). Adaptive consensus algorithms for real time operation of multi agent systems affected by switching network events.
- [15] Fax, J. A. and Murray, R. M. (2004). Information flow and cooperative control of vehicle formations. IEEE Transactions on Automatic Control, 1465?1476.
- [16] Shivakumar, P. and Ho Chew, K. (1974). A sufficient condition for nonvanishing of determinants.
- [17] Lewis, F. L., Zhang, H., Hengster-Movric, K., and Das, A. (2014). Cooperative Control of Multi-Agent Systems: Optimal and Adaptive Design Approaches. Springer Publishing Company, Incorporated.
- [18] Li, Z., Duan, Z., Chen, G., and Huang, L. (2010). Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: A unified viewpoint. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers.
- [19] Zhang, H., Lewis, F. L., and Das, A. (2011). Optimal design for synchronization of cooperative systems: State feedback, observer and output feedback. IEEE Trans. Automat. Contr., 56(8):1948-1952.
- [20] U. Levin, Asriel, Narendra, Kumpati. (1993). Control of Nonlinear Dynamical Systems Using Neural Networks: Controllability and Stabilization. IEEE transactions on neural networks / a publication of the IEEE Neural Networks Council. 4. 192-206. 10.1109/72.207608.
- [21] Samantha Ziga Pea, Nadia, Muoz Palacios, Filiberto, Mrquez Vera, Marco, Espinoza Quesada, Eduardo Steed, Garcia Carrillo, Luis Rodolfo. (2018). Load transportation using single and multiple quadrotor aerial vehicles with swing load attenuation. 10.1109/ICUAS.2018.8453485.

APPENDIX

A. Mathematical model

The equality $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{T}(q, \dot{q}) - \mathcal{V}(q)$ defines the Lagrangian dynamics equations, where $\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\|v\|^2$ is the kinetic energy, with m representing the mass and v the velocity, $\mathcal{V} = mgh$ is the potential energy with g being the gravity and h the height. On the other hand, Equation (41) defines the kinetic energy for two Unmanned Aerial Vehicles transporting a payload.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \frac{1}{2}m_0(\dot{x}_0^2 + \dot{z}_0^2) + \frac{1}{2}a_0\dot{\alpha}^2 + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2}a_i\dot{\beta}_i^2 \\ & + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2}m_i \left((\dot{x}_0 - \dot{\alpha}\rho_i \sin \alpha + l_i(\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) \sin(\theta_i + \beta_i))^2 + \right. \\ & \left. (\dot{z}_0 + \dot{\alpha}\rho_i \cos \alpha - l_i(\dot{\theta}_i + \dot{\beta}_i) \cos(\theta_i + \beta_i))^2 \right) \quad (41) \end{aligned}$$

where $\dot{\alpha} \in \mathbb{R}$ is the velocity of rotation of the payload, as seen from the inertial frame, $\dot{\theta}_i \in \mathbb{R}$ is the velocity of the attitude of each Unmanned Aerial Vehicle, and $\dot{\beta}_i \in \mathbb{R}$ is the angular velocity measured from the vehicle attitude

toward the cable attached to the load. On the other hand, the parameters a_0 and a_i are the inertial coefficients of the payload and vehicles, respectively, where $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ is the position of the load. Finally, Equation (42) defines the potential energy.

$$U = m_T g z_0 + \sum_{i=1}^2 m_i g (\rho_i \sin \alpha - l_i \sin(\theta_i + \beta_i)) \quad (42)$$

According the Euler-Lagrange equations defined by

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Upsilon_i \quad (43)$$

where Υ_i is the external force, the load in the x -axis is defined by

$$\begin{aligned} m_T \ddot{x}_0 + \sum_{i=1}^2 m_i (l_i \ddot{\xi}_i s(\xi_i) + l_i \dot{\xi}_i^2 c(\xi_i) - \ddot{\alpha} \rho_i s(\alpha) \\ - \dot{\alpha}^2 \rho_i c(\alpha)) = - \sum_{i=1}^2 u_i s(\theta_i) \quad (44) \end{aligned}$$

this equation uses the simplified notation $\xi = (\theta + \beta)$, and the z -axis dynamics of the load is defined by

$$\begin{aligned} m_T \ddot{z}_0 + \sum_{i=1}^2 m_i (-l_i \ddot{\xi}_i c(\xi) + l_i \dot{\xi}_i^2 s(\xi) + \ddot{\alpha} \rho_i c(\alpha) \\ - \dot{\alpha}^2 \rho_i s(\alpha)) = -m_T g + \sum_{i=1}^2 u_i c(\theta_i) \quad (45) \end{aligned}$$

where the α dynamics that describes the point of attached between the UAV and the load is defined by

$$\begin{aligned} a\ddot{\alpha} + \sum_{i=1}^n m_i (\rho_i (\ddot{z}_0 c\alpha - \dot{z}_0 \dot{\alpha} s\alpha - \ddot{x}_0 s\alpha - \dot{x}_0 \dot{\alpha} c\alpha) + \\ \ddot{\alpha} \rho_i^2 - \rho_i l_i (\ddot{\xi} c(\alpha - \xi) + \rho_i l_i \dot{\xi} (\dot{\alpha} - \dot{\xi}) s(\alpha - \xi)) \\ + \sum_{i=1}^2 m_i g \rho_i c\alpha = - \sum_{i=1}^2 \rho_i u_i s(\alpha - \theta_i) \quad (46) \end{aligned}$$

now, the θ_k dynamics describes the UAV's attitude, $k \in 1, 2$, and the number of vehicles transporting the load is defined by Equation (47).

$$\begin{aligned} (a_k + m_k l_k^2) \ddot{\theta}_k + m_k (l_k (\ddot{x}_0 s(\xi_k) + \dot{x}_0 \dot{\xi}_k c(\xi_k) - \ddot{z}_0 c(\xi_k) \\ + \dot{z}_0 \dot{\xi}_k s(\xi_k)) - \ddot{\alpha} l_k \rho_k c(\alpha - \xi_k) + \dot{\alpha} l_k \rho_k (\dot{\alpha} - \dot{\xi}_k) s(\alpha - \xi) \\ + l_k^2 \ddot{\beta}_k) - m_k g l_k c(\xi) = \tau_k, \quad (47) \end{aligned}$$

The β dynamics shows the behavior of the angle between the Unmanned Aerial Vehicles and the cable attached to the load; in other words,

$$\begin{aligned} m_k l_k^2 \ddot{\beta}_k + m_k (l_k (\ddot{x}_0 s(\xi_k) + \dot{x}_0 \dot{\xi}_k c(\xi_k) - \ddot{z}_0 c(\xi_k) \\ + \dot{z}_0 \dot{\xi}_k s(\xi_k)) - \ddot{\alpha} l_k \rho_k c(\alpha - \xi_k) + \dot{\alpha} l_k \rho_k (\dot{\alpha} - \dot{\xi}_k) s(\alpha - \xi) \\ + l_k^2 \ddot{\theta}_k) - m_k g l_k c(\xi) = -l_k u_i c(\beta_k - \theta_k) \quad (48) \end{aligned}$$

