UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL PARA DESARROLLAR EL SENTIDO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

PRESENTA:

JOSÉ GUADALUPE MENDOZA HERNÁNDEZ

DIRIGIDA POR:

Dr. Fernando Barrera Mora
Dr. Aarón Reyes Rodríguez

Mineral de la Reforma, Hidalgo, abril de 2018.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Institute of Basic Sciences and Engineering
Dirección
Dean

Mineral de la Reforma, Hgo., a 20 de marzo de 2018

Número de control: ICBI-D/0267/2018
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRO. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO,
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR.

Por este conducto, le comunico que el Comité Revisor asignado al alumno José Guadalupe Mendoza Hernández de la Maestría en Ciencias en Matemática y su Didáctica, con número de cuenta 342912, que presenta el manuscrito de tesis titulado "Estrategias de cálculo mental para desarrollar el sentido numérico en estudiantes de secundaria" después de revisar el trabajo antes referido, ha decidido autorizar la impresión del mismo hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación se registran las firmas de conformidad de los integrantes del Comité Revisor.

PRESIDENTE	Dr. Roberto Ávila Pozos	
SECRETARIO	Dr. Ricardo Cruz Castillo	
VOCAL	Dr. Fernando Barrera Mora	
SUPLENTE	Dr. Aarón Reyes Rodríguez	

Sin otro particular, reitero a usted la seguridad de mi atenta consideración.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

Dr. Óscar Rodolfo Suárez Castillo
Director del ICBI

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO ICBI DIRECCIÓN

ORSC/POJM

Ciudad del Conocimiento
Carretera Pachuca - Tulancingo km. 4.5
Colonia Carboneras
Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C.P. 42184
Tel. +52 771 7172000 exts 2231, Fax 2109
direccion_icbi@uaeh.edu.mx

DEDICATORIA

A mi esposa,

Por su cariño y comprensión, por ser parte de los momentos más bonitos de mi vida y por acompañarme en esta experiencia que representa un logro más en nuestras vidas.

A mis hijos

Porque son mi inspiración y mi fortaleza para continuar con mi formación profesional y porque con sus sonrisas y su cariño me ofrecen la mejor recompensa al fruto de mi trabajo.

A mi madre,

Por su invaluable apoyo en el cuidado de mis hijos, por su cariño incondicional y por sus bendiciones que fortalecen mi espíritu en los momentos mas apremiantes.

Al recuerdo de mi padre,

Que, con su ejemplo de vida, me dejó un legado de sacrificio para superar los infortunios, pero, sobre todo, por su esencia de persona alegre y sencilla.

A mis hermanos y hermanas,

Porque gracias a ustedes y a la confianza que han depositado en mí, me he mantenido en pie lucha para ser cada día mejor, no solo como profesionista, sino como ser humano.

A mis sobrinos y sobrinas,

Porque con sus dudas y la fe que han depositado en mí, al compartirles mis experiencias y conocimientos, me compromete a seguir siendo un referente confiable y útil en su vida académica y personal.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, por haberme dado la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado, y con ello, ser parte de este logro personal y profesional.

A la Secretaría de Educación Pública del Estado de Hidalgo, por las facilidades económicas y administrativas para poder realizar mis estudios de maestría, lo cual, me compromete a brindar un mejor servicio educativo en beneficio de los estudiantes y de sus familias.

De manera muy especial agradezco Al Dr. Aarón Reyes Rodríguez y al Dr. Fernando Barrera Mora, asesores de este trabajo de tesis, por su tiempo y sus conocimientos, pero, sobre todo, por sus exigencias que me permitieron comprender el valor de la constancia y de la responsabilidad.

A los estudiantes y padres de familia de la escuela telesecundaria 406, que, sin su apoyo y confianza, no hubiese sido posible la realización de este trabajo de investigación.

Resumen

Las estrategias de cálculo mental en tareas de instrucción son importantes en la educación básica. Esto se debe a que ofrecen a los estudiantes oportunidades para que desarrollen sentido numérico, esto es, la habilidad para asignar significado a los números y sus operaciones, así como fluidez y flexibilidad para realizar cálculos. La investigación orientada a entender el desarrollo del pensamiento numérico ha seguido diferentes perspectivas. Por ejemplo, algunos trabajos se han enfocado en las habilidades de estimación, y otros, solo en ejercitar estrategias de cálculo mental guiadas por el profesor. Sin embargo, se ha identificado que existen pocas propuestas de instrucción basadas en contextos reales o actividades lúdicas que favorezcan el pensamiento numérico. En esta línea de ideas, en el presente trabajo se buscó determinar la forma en que el desarrollo de tareas en contextos hipotéticos, de compra y venta de artículos pueden promover la generación de estrategias de cálculo mental. También se busca identificar la existencia de una transferencia de esas estrategias cuando los estudiantes participan en actividades lúdicas, tales como: el basta numérico, carrera contra la ignorancia y armando parejas.

En este trabajo, se consideró que uno de los objetivos de la educación matemática, es promover en los estudiantes la construcción de un aprendizaje con entendimiento de ideas matemáticas fundamentales. Para esto, ellos deben desarrollar tareas que les permitan desarrollar y fortalecer elementos esenciales del pensamiento matemático, entre los que se encuentran el experimentar, explorar relaciones, formular conjeturas y justificar resultados. Algunos de los procesos documentados resultados de este trabajo, al realizar sumas y restas utilizando los billetes de diferente denominación, son las estrategias de cálculo mental que desarrollaron los estudiantes a partir del contexto “la tienda departamental”. Mientras que otras, aunque no son propiamente estrategias de cálculo mental (como, transformar una resta que requiere reagrupación, en una resta sin reagrupación) permitieron a los estudiantes realizar cálculos de manera ágil. Los estudiantes que pudieron entender una cantidad de diferentes maneras establecieron relaciones numéricas cuando realizaron operaciones y por consecuencia obtuvieron mejores resultados al participar en “el rally matemático”.

Abstract

The strategies of mental calculation, in instructional task is important in basic education because they offer students opportunities to develop numerical sense or the ability to assign meaning to numbers and their operations, this is the ability to assign meaning to numbers and their operations, as well as fluency and flexibility to perform calculations. Research concerning numerical thinking has followed different perspectives. For example, some works have focused on estimation skills and others only on exercising of mental calculation strategies exemplified by the teacher. However, it has been identified that there are few proposals for instruction based on real contexts or playful activities that favor development of numerical thinking. In this line of ideas, we sought to determine, how, the execution of tasks in contexts of purchase and sale of articles can promote the generation of mental calculation strategies and determine if there is a transfer of these strategies when students participate in play activities such as a numerical adaptation of the game of Scattergories[1], race against ignorance, arming couples and towers of operations.

In this work we consider that one of the objectives of mathematics education is to help students to develop a deep understanding of fundamental mathematical ideas. For this, they must develop tasks that allow them to develop and strengthen essential elements of mathematical thinking, including experimenting, exploring relationships, formulating conjectures and justifying results. Some of the results of this work are the mental calculation strategies developed by the students based on the context of “the department store”, when they made additions and subtractions using different denomination tickets; while others, although are not properly mental calculation strategies, allowed students perform calculations in an agile way. Students that understood a number of different ways established various numerical relationships when they performed operations and consequently obtained better results when they participated in the challenges of the task “the mathematical rally”.

---

[1]https://en.wikipedia.org/wiki/Scattergories

Í N D I C E

Contenido **página**

CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

Uno de los objetivos de la educación matemática es que los estudiantes construyan un aprendizaje matemático que les permita aplicarlo en diferentes contextos. Tal aprendizaje debe ser flexible y estructurado en torno de conceptos matemáticos fundamentales. En los Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM, 2000) se argumenta que los estudiantes deben aprender matemáticas con entendimiento. Para esto, deberán participar activamente en la construcción de significados de las ideas matemáticas, a partir de sus experiencias y conocimientos previos. Una de las áreas de mayor relevancia en la enseñanza en educación básica, es la aritmética. En los Common Core Standards (NGACBP & CCSSO, 2010) se indica que los estudiantes competentes, son aquellos que dan sentido a las cantidades y sus relaciones, al abordar situaciones problemáticas. De modo que, su razonamiento cuantitativo involucra hábitos para construir representaciones coherentes de algún problema. Para esto, es necesario considerar las unidades involucradas, atendiendo el significado de las cantidades, y no solo aprender a calcularlas, sino, usar con flexibilidad las diferentes propiedades de los números y sus operaciones.

El sentido numérico en la educación básica constituye una habilidad para dar significado a los diferentes tipos de números y desarrollar estrategias para resolver problemas. Para fortalecer esta idea, es necesario que los estudiantes utilicen diversas técnicas, como: comparar cantidades, estimar y usar procedimientos para realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números enteros y racionales (Berch, 2005).

Uno de los aspectos que favorece el desarrollo del sentido numérico, es el cálculo mental, aunque éste, no había sido objeto de enseñanza en la educación básica, hasta épocas recientes (Gómez, 2005). El cálculo mental es una forma de calcular sin utilizar elementos externos, como anotaciones, calculadoras o materiales manipulables, siendo solo la mente la que se utiliza para calcular y obtener resultados. Se refiere a la capacidad para realizar cálculos de manera reflexiva, tratando de encontrar las relaciones entre cantidades y operaciones, mediante conteos, recolocaciones, compensaciones o descomposiciones. Estas habilidades, ayudan a representar los datos iniciales y de esta forma trabajar con otros datos que facilitan los procesos operativos (Valencia, 2013).

Revisión de la literatura

En los planes y programas de matemáticas de la educación secundaria (SEP, 2011), en el eje temático "Sentido numérico y pensamiento algebraico", se establece la importancia de la enseñanza de la aritmética en la educación básica. Particularmente, se indica que uno de los propósitos del estudio de las matemáticas para la educación secundaria, es que los estudiantes utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números enteros, fraccionarios o decimales, para resolver problemas aditivos y multiplicativos.

Existen diferentes investigaciones sobre los aspectos que inciden en el desarrollo del sentido del número en el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, Tsao y Lin (2011) realizaron una investigación acerca de la comprensión que tienen los maestros de primaria en Taiwan sobre el sentido del número, y de su importancia en la formación de los estudiantes. Los investigadores observaron, en diversas clases, el proceso de instrucción para la enseñanza de la suma, resta, multiplicación y división con números fraccionarios. Los resultados comunes, fueron que los docentes tendían a pedir a sus estudiantes que repitieran y memorizaran reglas aritméticas para sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones. Esto ocasionó, que cuando los estudiantes resolvieron problemas con fracciones, solo aplicaran las fórmulas o los algoritmos estándares, sin considerar el nivel de comprensión del significado de cantidades y operaciones.

Por otra parte, Berch (2005) realizó una investigación para identificar a niños con dificultades para el aprendizaje matemático. Uno de los temas claves, fue centrar la atención en el sentido numérico. Este autor considera que medir la velocidad con la que los estudiantes realizan comparaciones de magnitudes, puede revelar diferencias importantes en el procesamiento numérico de la información. Resalta, que la estrategia de descomposición de un número en decenas y unidades, al realizar comparaciones de cantidades de dos dígitos, se desarrolla de izquierda a derecha y de modo paralelo (decenas con decenas y unidades con unidades), en lugar de hacer la comparación de manera holística. La revisión reflexiva de este tema representa un paso importante en el diseño de actividades para identificar a niños en riesgo de desarrollar problemas de cálculo (discalculia) a temprana edad. Lo que permitiría desarrollar intervenciones docentes más pertinentes.

En cuanto al desarrollo del cálculo mental, Swan y Sparrow (2001) realizaron un trabajo donde mencionan que el desarrollo de estrategias para realizar cálculos mentales es clave para el aprendizaje matemático. Los autores adoptan la perspectiva de que los niños desarrollan una gama de estrategias mentales, al estar expuestos a situaciones donde requieran explicar y argumentar sus métodos de solución. La postura que sugieren es que, en lugar de enseñar lecciones específicas sobre estrategias particulares, se debe propiciar que los estudiantes exploren y discutan una variedad de estrategias. Resaltan la importancia de la discusión, donde los estudiantes pueden proporcionar más información sobre las propiedades de los números y aprender que hay más de una manera de llegar al resultado de un problema.

En un artículo de Gómez (2005), se hace un repaso de las formas que históricamente se han propuesto para la enseñanza del cálculo mental, y presenta ideas para trabajar en el aula. En estas, se busca que el estudiante lleve a cabo un análisis de las situaciones numéricas y la comprensión de los conceptos relacionados con las operaciones y los números. Menciona que una de las causas por las que los profesores no abordan el cálculo mental en los salones de clase, se debe al énfasis de los programas de estudio, en la aplicación de los algoritmos convencionales. Esta situación, no deja sitio a una enseñanza más flexible, que se ocupe en desarrollar las habilidades del pensamiento matemático. Este autor argumenta, que es necesario cambiar la práctica escolar de ejercitar el cálculo mental después del cálculo escrito, porque esto ocasiona que muchos estudiantes tiendan a resolver los problemas de cálculo mental utilizando las técnicas de papel y lápiz.

Valencia (2013), realizó un estudio denominado REOPERA –Reeducación de las Operaciones Aritméticas-, que consistió en una serie de ejercicios de enseñanza explicita de estrategias de cálculo, usando adiciones, sustracciones o multiplicaciones de un solo dígito, a los que llamó: "entrenamiento en combinaciones numéricas". El propósito era determinar, si estas estrategias influían en el desarrollo de habilidades de cálculo mental. El autor concluye que los niños que no logran dominar estas estrategias estarán en desventaja en cuanto al aprendizaje de las operaciones aritméticas y al desarrollo del cálculo mental. Los resultados de esta investigación indican que se lograron avances significativos en las capacidades de cálculo mental de los estudiantes del grupo observado, después de abordar las tareas propuestas.

Otro estudio realizado por Yang y Hsu (2009), describe cómo un profesor de Taiwan examinó y promovió el desarrollo del sentido numérico en sus estudiantes. Para ello, propuso tareas que consistían en estimar el resultado de una suma de fracciones y discutir sus razonamientos para encontrar la respuesta. En este trabajo, el papel del docente fue determinante para motivar a los estudiantes a encontrar diferentes alternativas de solución. Los resultados del trabajo sugieren que el sentido del número puede desarrollarse a través de una enseñanza eficaz y un buen ambiente de aprendizaje, y que se puede desarrollar sin depender de un método basado en la memorización de reglas.

García (2014) escribió un libro para Apoyar la Práctica Educativa (MAPE), producido y difundido por el INEE. El propósito, es mostrar a los docentes de educación básica, que el desarrollo del sentido numérico puede dotar de significado a los conocimientos que los estudiantes construyen en sus clases de aritmética. Lo que proponen es fomentar en los estudiantes, el gusto por trabajar con los números. Para ello, presentan diversas tareas enfocadas en que los estudiantes comprendan el sistema de numeración decimal: tareas de estimación, de cálculo mental, de cálculo escrito y el uso de la calculadora. Sugiere, que el docente deberá realizar las adecuaciones pertinentes al tipo de números y operaciones que desee trabajar.

Cortés, Backhoff y Organista (2004), realizaron un trabajo, cuyo propósito fue conocer el tipo de solución a problemas de estimación, que estudiantes de segundo grado desarrollan usando estrategias de cálculo mental, en el Estado de Baja California. El método consistió, en identificar a los estudiantes con mejores habilidades para realizar estimaciones. Después, a través de una entrevista, caracterizar las estrategias que utilizaron para resolver los problemas. Los resultados del estudio mostraron que los estudiantes presentan pocas habilidades para resolver problemas mentales y que las estrategias de estimación mayormente utilizadas fueron: el redondeo y el "dígito a la izquierda". Concluyen que la estimación no se enseña, ni se practica sistemáticamente en la educación secundaria y, por consiguiente, es comprensible que los estudiantes no den sentido a los números. Tampoco permite que desarrollen fluidez y flexibilidad para realizar operaciones y que no visualicen caminos para resolver problemas mentalmente.

1.2. Planteamiento del problema

Con base en la revisión de la literatura, se identificó que la mayoría de los investigadores, consideran que la comprensión y el manejo de las estrategias de cálculo mental, ayuda a que los estudiantes de educación básica desarrollen su sentido numérico. Proponen diferentes estrategias para trabajar en el aula el cálculo mental, pero no encontramos una propuesta metodológica que considere utilizar tareas de instrucción, basadas en situaciones reales o similares al contexto de los estudiantes. Tampoco identificamos una propuesta basada en actividades lúdicas y de competencia que posibiliten un ambiente flexible, innovador y creativo para que los estudiantes interactúen con las ideas y las relaciones entre números y las operaciones. Las investigaciones, sin embargo, ofrecen un referente teórico para este trabajo de tesis, porque proporcionan los antecedentes que sustentan nuestros argumentos para el diseño de las tareas de instrucción contextualizadas. El diseño e implementación de tareas es uno de los procesos que debiera llevar a cabo el docente para apoyar el aprendizaje de los estudiantes. Las tareas matemáticas a las cuales los estudiantes se comprometen determinan no solo lo que deben aprender, sino como usan y dan sentido a las matemáticas (Stein, Grover y Henningsen, 1996).

El propósito general del presente trabajo es: diseñar e implementar tareas de instrucción contextualizadas, para que los estudiantes construyan y comprendan estrategias de cálculo mental e identifiquen si existe una transferencia de esas estrategias cuando participan en actividades lúdicas de competencia o en la resolución de problemas matemáticos.

La pregunta de investigación es: ¿Cómo tareas de instrucción que involucra contextos cercanos a la realidad y las actividades lúdicas apoyan la construcción y comprensión de estrategias de cálculo mental, en estudiantes que asisten a una escuela Telesecundaria, en una comunidad rural del estado de Hidalgo?

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

2.1. Introducción

Todo trabajo de investigación, se basa en un marco conceptual que refiere a los fundamentos y supuestos que lo sustentan. Es decir, fundamenta el por qué se promueve cierto desarrollo de procesos mentales y formas de razonamiento (Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez, 2013). De acuerdo con Lester, un marco conceptual es una estructura de ideas, abstracciones y relaciones entre esas ideas. Su finalidad, es ayudar a entender y justificar los procesos que tienen lugar en un problema de investigación. Estas abstracciones y relaciones sirven de base al investigador, para comprender y analizar las características relevantes de un fenómeno (Lester, 2005). Es decir, constituyen una estructura necesaria para organizar las ideas en torno a ese fenómeno y llegar a donde no se tendría acceso sin esta herramienta conceptual. El diseño de un marco, no implica representar la realidad, más bien, es un intento de crear un modelo que sea útil y generativo, que nos oriente al pensar sobre la situación a estudiar. Los conceptos seleccionados en el marco, no abordan toda la complejidad de la investigación, enfatizan solo en algunos aspectos que se consideran relevantes (Simon 1994). En este trabajo, se estructuró un marco conceptual, porque este tipo de marco favorece un mejor entendimiento de los fenómenos educativos, al permitirnos reflexionar sobre nuestra práctica docente, a partir de herramientas de diversas aproximaciones teóricas compatibles (Stake, 2010).

En el marco conceptual de este trabajo, se adopta una perspectiva socioconstructivista del aprendizaje. Aquí, el conocimiento se entiende como el producto de un proceso de construcción social de significados –considerados-como-compartidos (Taken-as-shared), que generan los estudiantes al interactuar en una comunidad de aprendizaje. Sin embargo, la naturaleza de lo que cada estudiante puede construir sobre un mismo concepto, puede ser muy diverso, aunque cada estudiante tiene la sensación de que sus conocimientos construidos son compartidos con el resto de la comunidad (Simon, 1994). En este contexto, el desarrollo de entendimiento es estimulado por una situación problemática, que perturba la organización actual de los conocimientos de un estudiante. Y a medida que se llevan a cabo procesos de reflexión y comunicación de ideas en torno al problema, todo el grupo se involucra en dar sentido y resolver el desequilibrio, por lo que la reorganización cognitiva es promovida por la comunicación y la cooperación.

Es importante mencionar que una parte relevante de todo marco conceptual, es la concepción que el investigador sostiene acerca de lo que son las matemáticas y lo que significa aprender matemáticas, por esta razón, a continuación, se explicitara la conceptualización en la que se basa este trabajo.

2.2. Las matemáticas como la ciencia de los patrones

Existen diferentes perspectivas de lo que son las matemáticas. Una de ellas la concibe como una ciencia estática, en la que los conocimientos están terminados y no hay nada más por descubrir. Otra perspectiva, conceptualiza a la disciplina como una ciencia en constante cambio, cuyo objetivo, es la búsqueda de patrones en los fenómenos naturales y sociales. Es decir, el trabajo de un matemático consiste en buscar patrones en los números, en las formas, en el espacio, en el azar, etcétera. Las teorías matemáticas explican las relaciones entre patrones para producir estructuras matemáticas (Steen, 1988). Desde esta última perspectiva, las matemáticas son la ciencia de los patrones, estos patrones son la base para entender, explicar y predecir una amplia diversidad de fenómenos del mundo que nos rodea.

De acuerdo con Schoenfeld (1994), la matemática es una actividad inherentemente social. El aprendizaje se estructura a partir de la observación, el estudio y la experimentación, que se llevan a cabo para determinar la naturaleza o los principios de lo que se está estudiando. Por lo tanto, se debe trabajar en la generación de ambientes de aprendizaje para que los estudiantes participen activamente en la ciencia de la creación y usen sistemáticamente las herramientas de la abstracción, la representación simbólica y la manipulación simbólica. Así, aprender matemáticas, consiste en llevar a cabo procesos relevantes del quehacer matemático, entre los que se encuentra el explorar relaciones, experimentar, formular conjeturas y justificarlas, comunicar resultados y formular nuevos problemas y preguntas.

Además, adoptamos una perspectiva de aprendizaje en la cual se supone que los individuos construyen su propio conocimiento, independientemente de la forma de enseñanza. Este proceso de construcción se potencia cuando a los estudiantes se les presenta experiencias que modifican sus estructuras mentales. La idea central, es que los estudiantes construyen activamente sus propios entendimientos, en lugar de copiarlos de otros. El aprendizaje se estimula mediante una situación problemática que perturba o desequilibra en el sujeto sus estructuras cognitivas. Este desequilibrio, conduce a la actividad mental y a una modificación de ideas previamente sostenidas para explicar la nueva experiencia (Simon y Schifter, 1991).

Lo que nos interesa entonces, no es que el estudiante construya su conocimiento, sino, que ese conocimiento que se construye sea estructurado. Esto significa, conectar las ideas matemáticas en diferentes contextos y situaciones. Para los estudiantes, el aula es una comunidad matemática que influye de manera determinante en sus oportunidades para aprender (Simon 1994). La comunidad integrada en el salón de clase va constituyendo significados compartidos. La participación del estudiante en esta comunidad favorece el proceso social de construcción de relaciones entre conceptos, ideas y procedimientos matemáticos, mediante los procesos de reflexión y comunicación de ideas. El reto para los docentes que enseñan matemáticas en la educación básica, es presentar situaciones que estimulen a sus estudiantes a construir y dar significado a poderosas ideas matemáticas. Lo anterior, les permitirá convertirse en pensadores y hacedores de las matemáticas, y no solo repetidores de reglas y procedimientos algorítmicos.

2.3. El aprendizaje con entendimiento

Cuando se le pregunta a un estudiante si le gustan las matemáticas, su respuesta está condicionada a las habilidades que posee para resolver ciertos ejercicios y a su capacidad de memorizar los algoritmos convencionales del cálculo aritmético. Aunque esta idea, no precisa si el estudiante comprende el principio matemático que se esconde detrás de cada procedimiento, o si sabe razonar, por qué esta forma de resolverlo deriva en una respuesta correcta. Esta situación propicia dos ambientes, por un lado, el estudiante que no sabe cuándo utilizar lo que conoce y no encuentra sentido a lo que aprende y, por lo tanto, es difícil mantener un óptimo estado de motivación para el aprendizaje. Por otra parte, los estudiantes que no son buenos para "memorizar", pierden seguridad y confianza en su aprendizaje, lo cual es una pena, porque la habilidad de memorizar elementos básicos de aritmética no determina el potencial matemático de la persona (Negrete, 2013).

La esencia de las matemáticas, no consiste en aplicar reglas o algoritmos de manera automatizada, sino inventar esas reglas, algoritmos y procedimientos que nos ayuden a entender los patrones y regularidades que aparecen en nuestro mundo (Barrera y Reyes, 2013). Entendemos algo, cuando podemos ver cómo ese algo está relacionado o conectado de forma relevante con otras cosas que conocemos. Entre mayor sea el número de conexiones estructuradas que se puedan realizar, será mayor nuestro nivel de entendimiento.

Las cosas que se aprenden con entendimiento pueden utilizarse de manera flexible, adaptarse a nuevas situaciones y utilizarse para aprender nuevas cosas (Hiebert et al., 1997). Es entonces importante reflexionar, cómo los estudiantes aprenden aritmética en la educación básica, pues un conocimiento procedimental, implica dificultades para enfrentarse a situaciones que difieren de cierta manera a las que están habituados los estudiantes. Sin embargo, el conocimiento flexible, implica la habilidad para escoger el método que más se adecue a cada situación problemática, maximizando de esta manera su potencial para realizar conexiones entre conocimientos previos y nuevas ideas.

En la construcción de conexiones entre ideas y conceptos matemáticos, intervienen dos procesos. La reflexión, que permite establecer nuevas conexiones y revisar las ya establecidas, lo cual se traducirá en un incremento en el nivel de entendimiento (Hiebert et al., 1997). La comunicación, que nos permite conocer las ideas de otros y reflexionar sobre ellas, contrastarlas y profundizar en las ideas propias para mejorarlas o adaptarlas a nuestros propósitos, así como construir nuevas ideas. Es decir, que nos damos cuenta que una persona ha entendido una idea matemática, cuando es capaz de comunicarla, justificar un resultado o validar una conjetura. O cuando logra relacionar el nuevo objeto de aprendizaje con sus experiencias y puede modificar en consecuencia, de manera razonada y consciente, esas experiencias.

2.4. El ciclo del aprendizaje

La construcción de un aprendizaje con entendimiento, requiere que los estudiantes desarrollen sucesivos ciclos de acción, observación, formulación de conjeturas y justificación de resultados (Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez, 2016). Cada ciclo se nutre con la información y las relaciones de la anterior. En este proceso, se ponen en práctica los elementos del pensamiento matemático: en la fase de acción, los estudiantes representan la información e identifican los datos, cuantifican los atributos de algunos objetos o agregan elementos auxiliares para ampliar la información del planteamiento. En la fase de observación, se identifican las relaciones entre los datos e incógnitas e identifican algunos patrones. Para la fase de conjeturas, los estudiantes formulan sus observaciones en términos matemáticos. Finalmente, en la fase de justificación, los estudiantes comunican sus resultados expresando sus argumentos visuales, empíricos y formales, así como extender y generalizar la tarea (figura 2.1).

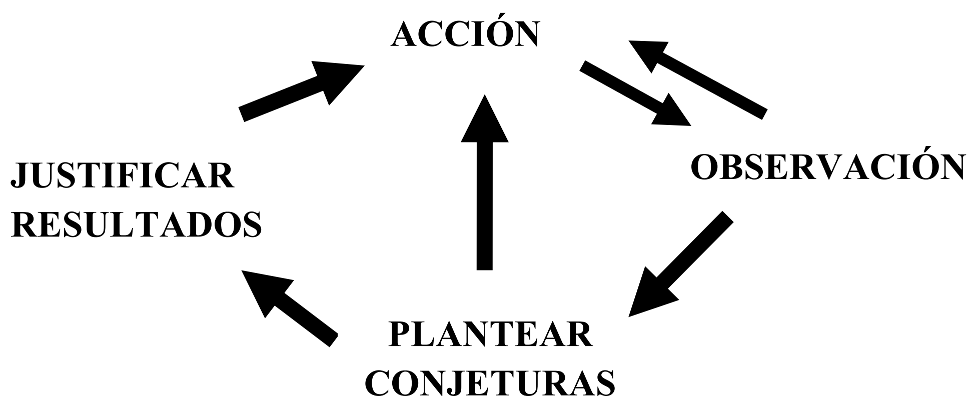


Fig. 2.1. Ciclo básico para desarrollar la comprensión conceptual en la resolución de problemas (Adaptado de Barrera y Reyes, 2016).

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1. Los participantes

Para la realización de este trabajo, se implementaron dos tareas divididas en cuatro fases cada una. Las tareas se realizaron en una comunidad rural del municipio de Apan, Hidalgo. Participaron en el estudio 24 estudiantes, de los tres grados escolares (9 hombres y 15 mujeres), inscritos en la escuela Telesecundaria No. 406, durante el ciclo escolar 2016-2017. Previamente a la implementación de las tareas, se notificó a los padres de familia, que los resultados de estas actividades serían parte de un proyecto de tesis de maestría, razón por la que se les solicitó autorización para poder grabar en video las actividades que realizarían sus hijos. Se les informó, que para proteger la identidad de los estudiantes se les asignaría un seudónimo (APÉNDICE A).

La mayoría de los estudiantes inscritos en esta escuela, cursaron la educación primaria en escuelas multigrado del CONAFE y en escuelas bidocentes de la SEP. Estos estudiantes muestran deficiencias académicas en su comprensión lectora y en el dominio de los algoritmos convencionales para realizar las operaciones básicas con números naturales y racionales. En el desarrollo de las tareas de esta investigación, se incluyó a la mayoría de los estudiantes inscritos, para favorecer con ello, un ambiente diverso en ritmos y estilos de aprendizaje. Particularmente, se propició el trabajo tutoral entre estudiantes con alto y bajo desempeño en la comprensión y dominio de habilidades matemáticas.

3.2. Las tareas y el escenario de la instrucción

Las tareas de instrucción constaron de dos actividades, divididas en cuatro fases cada una. Se esperaba que, al finalizar la primera actividad, los estudiantes hubieran desarrollado y entendido diferentes estrategias de cálculo mental para realizar operaciones básicas de suma, resta y multiplicación, con números naturales y decimales. Y que esta habilidad, les permitiera participar de manera eficiente en actividades lúdicas y en la resolución de problemas matemáticos.

En el enfoque didáctico de la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria, se establece el papel determinante del "medio", entendido como la situación problemática que hace pertinente el uso de las herramientas matemáticas que se pretenden estudiar. Además, considera los procesos que siguen los estudiantes para construir conocimientos y superar las dificultades que surgen en el proceso de aprendizaje (SEP, 2011).

La primera tarea denominada "la tienda departamental", tuvo como propósito representar una situación similar a la vida real y contextual de los estudiantes. En esta, los estudiantes realizaron acciones de compraventa de diversos productos, en la tienda departamental adaptada en el salón de clases, con productos reales como: ropa, zapatos, celulares, balones, entre otros. Con esta actividad, se propició que los estudiantes usaran sus conocimientos y habilidades matemáticas para realizar diferentes cálculos aritméticos. En la tercera y cuarta fase de esta tarea, los estudiantes reflexionaron en el aula sobre, cómo desarrollar, comprender y comunicar estrategias de cálculo mental para la suma, resta y multiplicación, para resolver problemas matemáticos.

En la segunda tarea "el rally matemático", los estudiantes participaron en equipos en una competencia conformada por cuatro juegos: 1) Formando parejas (adaptación del juego tradicional "Busca tu pareja"), 2) Las torres de operaciones, 3) El basta numérico (juego adaptado, tomado del libro de juegos Dialogar y descubrir, CONAFE-SEP) y 4) Carrera contra la ignorancia (Adaptación del juego el "Caracol del saber", del libro de juegos Dialogar y descubrir, CONAFE-SEP) (Rockwell, Candela, Carvajal, et al., 1993). En estos juegos, los estudiantes debían aplicar estrategias de cálculo mental para la suma, resta y multiplicación, al resolver diversos retos y problemas matemáticos.

3.3. Las tareas de instrucción

3.3.1. Primera tarea "La tienda departamental"

El propósito de esta tarea, fue que los estudiantes apreciaran la necesidad de realizar eficientemente cálculos aritméticos, al realizar compras y ventas de diversos productos, de manera similar a la vida real. Para ello, en coordinación estudiantes y maestros de la escuela, se instaló en un salón de clases "*La tienda departamental",* simulada con productos reales que los estudiantes llevaron de sus casas como: ropa, calzado, discos de música o de películas, memorias USB, balones, celulares, entre otros. Previamente, investigaron sus precios comerciales para escribirlos en etiquetas que se colocaron de manera visible. Se utilizó como material didáctico: billetes y monedas de fantasía de diferente denominación, ficha de control del comprador, ficha de control del vendedor, ficha de reporte de caja y ficha para el control de almacén (APÉNDICE B)

Primera Fase. Organización de la tienda y conocimiento de la función de cada participante

Para iniciar, los estudiantes identificaron los productos existentes en la “tienda departamental”, colocaron las etiquetas con los precios de los artículos y pusieron las etiquetas con descuentos para algunos productos que ellos determinaron. Durante este proceso, se pidió a los estudiantes reflexionaran sobre los productos más caros, los más baratos, los que tenían descuentos y los que más les gustaban. Después, se dividió al grupo en dos equipos. El equipo A, fueron los vendedores y el equipo B, fueron los compradores; se designaron a cuatro estudiantes para que fueran los cajeros de la tienda y se nombraron a dos más, como los responsables del almacén. Finalmente, se le entregó a cada comprador la cantidad de 2000 pesos y a cada cajero 2 500 pesos.

Para continuar, se les explicaron las funciones de cada participante. Los compradores, deberían escoger un producto que quisieran comprar, dirigirse a un vendedor y solicitarle el producto, pagar en caja y recoger su mercancía; sin olvidar, hacer el registro de su compra en su hoja de control. Los vendedores, debían atender a los compradores, verificar con los almacenistas la existencia del producto a vender, entregar la mercancía en caja y registrar la venta en su hoja de control. Los cajeros, serían los responsables de realizar el cobro de las mercancías, entregar el cambio respectivo y registrar la venta en su hoja de reporte de caja. Y los almacenistas, serían los responsables de entregar la mercancía a los vendedores y llevar un control sobre la existencia de los productos.

Segunda Fase. Actividades de compraventa

Antes de empezar las actividades de compraventa, se les indicó que los compradores tendrían un tiempo límite para gastarse la mayor cantidad del dinero entregado. Durante las actividades de compra y venta, el docente corroboró que los participantes respetaran sus funciones y que fueran realizando sus registros en sus hojas de control. Centró la atención en el uso que los estudiantes hicieron de los billetes y monedas de fantasía, al realizar los pagos y recibir su cambio, para ello, se apoyó de dos videocámaras para grabar la actividad. Después de 30 minutos, los estudiantes intercambiaron sus roles. Los vendedores pasaron a ser compradores y viceversa; los cajeros intercambiaron funciones con los almacenistas. Se entregaron nuevas hojas de control a cada participante y nuevas cantidades de dinero a los compradores y a los cajeros. Al finalizar el tiempo de la segunda actividad, cada participante entregó al docente sus hojas de control.

Tercera Fase. Desarrollar y comprender estrategias de cálculo mental para la suma y resta

Para esta fase, se formaron cuatro equipos. Se procuró que en cada equipo hubiera estudiantes de los tres grados escolares, en cada equipo se nombró a un capitán que debería coordinar a sus compañeros. Se les comentó, que la intención era desarrollar en equipo, diferentes estrategias de cálculo mental para realizar estas operaciones de manera *eficiente y eficaz.* Para ello, deberían reflexionar sobre las operaciones de suma y resta y encontrar los resultados correctos de estas operaciones de una forma diferente al algoritmo convencional. Se les entregaron las hojas de control de compras (de la primera fase de la tarea), a partir de sus registros se inició con la actividad. Primero, se le solicitó a uno de los estudiantes que mencionará el nombre y el costo de dos productos que hubiese comprado. El docente escribió en el pizarrón la suma (un pantalón de 425 pesos más un balón de 215 pesos). Después, se les invitó que al interior de cada equipo discutieran sobre las operaciones que debían realizar para contestar la pregunta: *¿cuánto dinero le sobró a su compañero, si pagó los productos con billetes de 500 pesos?*

Se les recordó, que el propósito de esta fase era que cada equipo desarrollara y comunicara una estrategia diferente de cálculo mental para la suma y otra para la resta, que permitiera realizar estas operaciones de manera eficiente y de manera reflexiva. El docente guio la actividad con las siguientes preguntas:

¿Al realizar las sumas y restas, siempre se debe empezar a partir de las unidades?, ¿cuáles son los valores posicionales del 5 en el número 575.50. Si se tienen 42 pesos, ¿cuánto faltaría para completar 100 pesos?

Después de la discusión al interior de los equipos, por turnos, un integrante de cada equipo pasó al pizarrón a explicar una estrategia de cálculo mental para la suma. El reto consistió, en que el jugador del siguiente equipo debería presentar una estrategia diferente a la anterior. Cada jugador argumentaba su estrategia de cálculo mental, comentaba sus ventajas y explicaba con otros ejemplos; los demás equipos, le expresaban sus dudas o las desventajas de la estrategia presentada.

Al final, los equipos participaron en una competencia que consistió en resolver diferentes ejercicios de suma. En cada ronda, participaba un jugador de cada equipo resolviendo el ejercicio con su estrategia presentada. Por cada operación resuelta correctamente cada jugador ganaba dos puntos para su equipo (además debía explicar cómo utilizó su estrategia para resolver el ejercicio). La competencia terminó cuando todos los jugadores de cada equipo pasaron una vez al pizarrón, ganaba el equipo que obtenía más puntos.

En otro momento, se siguió la rutina anterior para trabajar con las estrategias de la resta. Un integrante del equipo presentaba su estrategia de cálculo mental para la resta, el siguiente equipo presentaba otra estrategia diferente y así sucesivamente. Después, se participaba en una competencia donde resolvían diferentes ejercicios de resta, usando cada equipo una estrategia diferente.

Cuarta fase. Desarrollar y comprender estrategias de cálculo mental para la multiplicación con números naturales y decimales

Para esta actividad participaron los mismos equipos integrados anteriormente. El propósito fue desarrollar y aprender estrategias de cálculo mental para la multiplicación. Se trabajaron con las hojas de control de los cajeros y los almacenistas. Para empezar, el docente les explicó que los dueños de las tiendas departamentales compran sus productos en los almacenes, en pequeños paquetes (decenas, docenas, en paquetes de 25 piezas, paquetes de 50 piezas, etc.). Después, les solicitó que sin realizar operaciones escritas le ayudaran a realizar algunas multiplicaciones. Si el precio de una camisa es de 215 pesos, ¿cuánto se paga por 2 camisas, por 4 camisas, por 10 camisas y por 5 camisas? De manera grupal, los estudiantes explicaron cómo encontrar los resultados de esas operaciones de manera mental (por 2, el doble del precio de la camisa; por 4, dos veces el doble del precio de la camisa; por diez, aumentar un cero al precio de la camisa y por 5, aumentar un cero al precio de la camisa y calcular su mitad). El docente escribió los resultados en una tabla como la siguiente:

producto	**U. de medida**	**Precio unitario**	**Por 2**	**Por 4**	**Por 10**	**Por 5**	**Por 12**	**Por 14**	**Por 15**	**Por 25**	**Por 50**
Camisas	Pieza	215	430	860	2150	1075	….				
Zapatos	Par	350									
Pantalón	Pieza	280									
Memorias USB	Pieza	82.5									
….											

Después, al interior del equipo discutieron sobre algunas estrategias de cálculo mental para la multiplicación y completar las otras columnas de la tabla, el docente dirigió sus reflexiones con las siguientes preguntas:

¿Cómo obtener el resultado de una multiplicación por 14, si sabe el resultado por 10 y 4?, ¿cómo obtener el resultado de la multiplicación por 5, si se sabe el resultado por 10?, ¿cómo obtener el resultado de la multiplicación por 2.5, a partir del resultado de multiplicar por 5? y ¿cómo obtener el resultado por 25?

Para continuar, cada equipo presentó al grupo una estrategia diferente para la multiplicación. Los estudiantes argumentaron sus propuestas y los demás equipos expresaron sus dudas y comentaron las desventajas. Las estrategias que presentaron fueron para realizar multiplicaciones, por 12, por 14, por 15 y por 25. Después, reflexionaron en cómo realizar multiplicaciones para los números decimales 2.5 y 1.5. Para finalizar, se organizaron los equipos para participar en el juego “el basta numérico” y aplicar las estrategias de cálculo mental para la multiplicación. Los jugadores de un equipo compitieron contra los jugadores de otro equipo. Después de cada ronda los equipos se rolaban, cada jugador que obtenía más resultados correctos que su oponente, ganaba dos puntos para su equipo.

3.3.2. Segunda actividad “El Rally matemático”

El propósito de esta actividad, fue que los estudiantes aplicarán las estrategias de cálculo mental para la suma, resta y multiplicación, aprendidas en la primera actividad. Para esto, se organizó un “rally matemático” que consistió en cuatro juegos de matemáticas. Participaron los cuatro equipos de las actividades anteriores y se les explicó lo siguiente: (i) el rally constaría de cuatro retos y en cada uno de ellos, deberían obtener de manera individual la mayor cantidad de puntos para su equipo, (ii) los puntos de cada reto serían acumulables para su equipo, (iii) los retos serían simultáneos para todos los equipos, (iv) cada jugador debería seguir las instrucciones y respetar las reglas de los juegos, (v) para cada equipo habría un profesor que llevaría el control de los puntos obtenidos en cada juego y al final realizaría la suma total, y (vi) el equipo ganador del rally matemático sería el equipo que obtenga la mayoría de puntos de todos los retos.

1. **Primer reto del rally matemático**. *El juego “formando parejas” (Adaptación del juego tradicional “Busca tu pareja”).*

El reto consistió en formar la mayor cantidad de parejas de tarjetas correctamente (una pareja de tarjetas se conformaba por una operación y su resultado). Para ello, los estudiantes debían resolver las operaciones usando estrategias de cálculo mental; en una tarjeta estaba escrita la operación y en otra tarjeta estaba la respuesta (APÉNDICE C).

¿Cuánto es 800, menos 465?	***335***
Ejemplo de las tarjetas con las operaciones	***Ejemplo de las tarjetas con los resultados***

Los equipos se formaban en filas sobre una misma línea de salida. Se colocaron a cierta distancia 4 mesas (una para equipo) y sobre ellas, las tarjetas con los resultados de las operaciones. A la mitad de esta distancia, se colocaron otras 4 mesas (una para cada equipo), en ellas se colocaron las tarjetas que contenían las operaciones. A una misma orden, los estudiantes de enfrente de cada fila corrían a la mesa de en medio, cogían una tarjeta con una operación, después corrían a la segunda mesa y buscaban la tarjeta con la solución, regresaban a la línea de salida y daban la mano al segundo compañero de la fila. El siguiente estudiante, debía hacer el mismo recorrido; así sucesivamente hasta que cada jugador del equipo realizaba el recorrido dos veces. Las reglas principales eran: (a) en cada recorrido solo podían formar una pareja de tarjetas y (b) después de formada la pareja, no podían cambiar las tarjetas. Cada docente revisó las parejas de tarjetas y asignó un punto al equipo por cada pareja formada correctamente.

2. **Segundo reto del rally matemático**. *El juego, "¡las torres de operaciones!"*

El reto consistió en encontrar el número que va en la cima de la torre. Se entregó una copia de la primera torre a cada jugador y se les explicó las reglas para el juego: (a) el valor que se debía colocar en un bloque, se obtenía como el doble de la suma de los valores de los dos bloques inferiores y así sucesivamente hasta llegar a la cima; (b) cuando un estudiante de cualquier equipo llegaba a la cima de la torre, se ponía de pie y decía *"torre 1 lista"*, el segundo estudiante decía *"torre 2 lista"* y así hasta *"torre 5 lista"*. Después de esto, todos los estudiantes debían entregar sus torres al docente responsable de su seguimiento para su revisión. Por cada bloque llenado correctamente ganaban un punto y por cada torre llenada correctamente ganaban 5 puntos extras para su equipo.

Para continuar, se les entregó la segunda torre que se llenó con la siguiente consigna: el valor que se debía colocar en cada bloque se obtenía de multiplicar por cinco, la diferencia entre el valor mayor y el valor menor de los dos bloques inferiores. Se siguieron las mismas indicaciones que el llenado de la primera torre. Al final los docentes responsables revisaron sus resultados y asignaron los puntos totales para cada equipo.

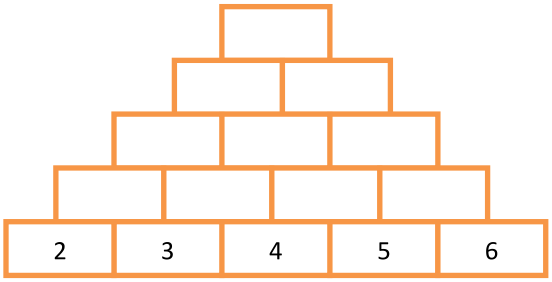


Imagen de la primera torre

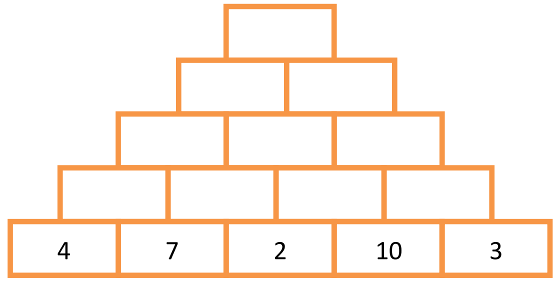


Imagen de la segunda torre

3. **Tercer reto del rally matemático**. *El juego "el basta numérico" (Adaptación del juego Basta numérico, del libro de juegos niveles I, II y III, Dialogar y descubrir, CONAFE-SEP).*

Este reto tuvo como finalidad, que los estudiantes realizaran operaciones de suma, resta y multiplicación, usando estrategias de cálculo mental. Las reglas de este juego fueron las siguientes: (a) los integrantes de un equipo se colocan frente a los jugadores de otro equipo (uno a uno), (b) el docente dicta un número seleccionado previamente, mismo que los estudiantes escriben en la primera columna de su tabla. A una misma orden, todos los estudiantes inician con los cálculos indicados en los encabezados de cada columna de su tabla, (c) cuando uno de los jugadores termina de realizar todas las operaciones, dice *"basta 1"*, el segundo jugador dirá *"basta 2*" y así hasta "*basta 5*", hasta entonces los estudiantes dejan de operar e intercambian sus tablas con sus contrincantes. Después, el docente dice los resultados correctos, cada resultado correcto escrito por el jugador, vale 10 puntos, un resultado incorrecto, vale 5 puntos y dejar en blanco, vale 0 puntos. Cada jugador suma los puntos obtenidos por su contrincante y escribe el total de puntos en la última columna. Un jugador gana dos puntos para su equipo, si obtuvo más puntos que su rival, en caso de empate, ambos ganan un punto.

El procedimiento se repite en las rondas siguientes; en la primera ronda, los estudiantes del equipo A, se enfrentaron al equipo B y el equipo C vs el equipo D; en la segunda ronda, el equipo A vs el equipo C y el equipo B vs el equipo D, y en la tercera ronda, el equipo A vs el equipo D y el equipo B vs el equipo C. Al final de cada ronda, los docentes encargados del seguimiento de cada equipo, registraba la cantidad de puntos obtenidos por los integrantes de sus equipos. A cada participante se le entregó una tabla como la siguiente:

Nombre del jugador: ____

Nombre del equipo: ____

Puntos obtenidos: ______________________

Número/ operación	+126	+ 513	- 9	- 17	x 4	x 10	x 12	x 25	x1.5	x2.5	Total puntos
Puntos:											
Puntos:											
Puntos:											
Puntos:											

4. **Cuarto reto del rally matemático.** *Juego "Carrera contra la ignorancia"* **(***Adaptación del juego "El caracol del saber" del libro de juegos nivel I, II y II, Dialogar y Descubrir, CONAFE-SEP).*

El propósito de esta actividad lúdica, fue valorar el uso de las estrategias de cálculo mental para resolver operaciones aritméticas. En este último juego del "rally matemático", los integrantes de cada equipo debían resolver diversos problemas de matemáticas, usando estrategias de cálculo mental. El reto consistió, en que cada equipo debía ganarle una carrera a "la ignorancia" (avanzar más casillas). Para este juego se utilizó, un camino con 20 casillas, una botella de diferente color para cada equipo y un objeto de color negro que representó a la ignorancia.

El juego se organizó en dos rondas. En la primera, se siguieron las siguientes indicaciones: (a) los integrantes de cada equipo se enumeraron del 1 al 5, (b) se leyó el planteamiento del mismo problema, a todos los jugadores que tenían el número 1, (c) cada jugador escribía el resultado en un cuarto de hoja blanca y levantaba la mano cuando tenía la respuesta, cuando al menos 3 estudiantes habían levantado la mano, el docente solicitaba que todos mostraban su respuesta. Los jugadores que escribían la respuesta correcta avanzaban dos casillas sobre el camino; la ignorancia avanzaba una casilla, si al menos un equipo no escribía la respuesta correcta o si la que escribió era incorrecta. En caso de que ningún jugador escribiera la respuesta correcta, la ignorancia avanzaba dos casillas. Este procedimiento se repitió hasta que participaron todos los jugadores de cada equipo.

Un padre de familia regaló a cada uno de sus 5 hijos 26 pesos y le sobraron 20 pesos. ¿Cuánto dinero tenía el padre de familia?"

Ejemplo de las tarjetas para el juego "carrera contra la ignorancia" (APÉNDICE D)

Para la segunda ronda, las indicaciones fueron las siguientes: (a) el juego empezaba con el jugador 1 del equipo A, luego el jugador 1 del equipo B y así sucesivamente hasta el jugador 5 del equipo D, (b) el docente leía a cada jugador en turno un problema que debía resolver con cálculo mental, (c) el equipo avanzaba dos casillas por cada respuesta correcta o 1 punto si solicitaba ayuda a los integrantes de su equipo (solicitar ayuda, implicaba que el jugador debía explicar el procedimiento utilizado para obtener la respuesta). La ignorancia avanzaba dos casillas si la respuesta era incorrecta. Este procedimiento se repitió hasta que participaron los 5 jugadores de cada equipo.

El juego terminó cuando al menos uno de los equipos llegó a la meta del camino. Cada equipo que terminó delante de la ignorancia ganó el número de puntos, igual al número de casillas avanzadas. Cada docente entregó la tarjeta de seguimiento y control de puntos de cada equipo participante para designar al ganador del rally matemático (APÉNDICE E).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

4.1. Introducción

Las tareas de instrucción que se implementaron en este trabajo de tesis, tuvieron el propósito de que los estudiantes construyeran, comprendieran y comunicaran estrategias de cálculo mental para realizar las operaciones aritméticas básicas. Esta habilidad, les ayudaría a desarrollar su sentido numérico y participar de manera eficiente en diversos juegos matemáticos. La implementación de las tareas, se llevaron a cabo con la mayoría de los estudiantes inscritos en la escuela. Hubo estudiantes que no realizaron las actividades, porque muestran un desinterés en general por el aprendizaje, no solo de las matemáticas, sino de las demás asignaturas. Estos estudiantes son apáticos y no realizan las actividades que se les encomiendan. Algunos de estos estudiantes, solo asisten por los apoyos económicos que les proporciona el gobierno (becas PROSPERA) y han mencionado recurrentemente la posibilidad de abandonar la escuela.

Se realizaron dos tareas, cada una de las cuales constó de cuatro fases. La tarea de "la tienda departamental", se organizó en cuatro momentos: (i) organización de la tienda y conocimiento de la función de cada participante, (ii) actividades de compraventa en la tienda departamental, (iii) desarrollar y comprender estrategias de cálculo mental para la suma y la resta y (iv) desarrollar y comprender estrategias de cálculo mental para la multiplicación. Por otra parte, la tarea del "rally matemático", se integró por cuatro juegos: (1) "formando parejas de tarjetas", (2) "las torres de operaciones", (3) "el basta numérico" y (4) "carrera contra la ignorancia".

En los resultados se identificaron cuatro principales estrategias para la suma (suma por el valor posicional del número, suma por partes, redondear a decenas sumando y redondear a decenas restando) y cuatro estrategias para la resta (resta por descomposición del sustraendo, resta con base en la suma de complementos parciales, resta considerando el contexto de los billetes y cambio de resta con reagrupación a resta sin reagrupación). Algunas de estas estrategias se sustentaron en el contexto de compraventa de artículos en la tienda departamental y el uso de los billetes de diferente denominación, mientras que otras, aunque no son propiamente estrategias de cálculo mental, permitió a los estudiantes realizar operaciones aritméticas de manera ágil. Por ejemplo, convertir una resta que requiere reagrupación, a una resta que no requiere agrupación. En lo que respecta a la multiplicación, las principales estrategias de cálculo mental fueron, la multiplicación por 12, por 14, por 15, por 25, por 2.5 y por 1.5.

4.2. Proceso de implementación de la tarea "La tienda departamental"

Esta tarea se organizó en cuatro fases. En la primera fase de esta actividad, los estudiantes conformaron una tienda departamental en el salón de clases, con productos que trajeron de sus casas como: ropa, zapatos, discos, balones, cinturones entre otros. En la segunda fase, donde realizaron actividades de compra y venta, permitió que los estudiantes realizaran acciones como probarse la ropa o los zapatos y que pudieran manipular físicamente los objetos que les interesaron comprar. Además, se propició el interés de los estudiantes en acciones como realizar pagos, verificar su cambio, revisar la existencia de los productos en almacén y aprovechar las ofertas de productos que tenían descuentos. La implementación de la tienda departamental en el salón de clases ayudó a que los estudiantes se cuestionaran sobre aspectos, como la cantidad de dinero que puede gastar una familia de escasos recursos, en la compra de productos (ropa, zapatos, celulares o películas), en relación con el dinero que los jefes de familia ganan trabajando en el campo.

En la tercera y cuarta fase de la primera tarea, los equipos presentaban y argumentaban las diferentes estrategias de cálculo mental para las operaciones aritméticas. Aquí, la dinámica de competencia entre los equipos favoreció un ambiente de solidaridad, porque los estudiantes con mayor habilidad matemática apoyaron a sus compañeros en la realización de las operaciones y al momento de justificar sus argumentos ante el grupo. También, permitió que al interior de los equipos se reconocieran las habilidades matemáticas de cada participante, independientemente de la actitud y disposición hacia el aprendizaje que muestran en las clases cotidianas. Es decir, que durante la competencia se fomentó la confianza en todos los estudiantes para que realizaran su mejor esfuerzo a favor del éxito del equipo.

Para dar inicio a la discusión y la construcción de las estrategias de cálculo mental para la suma y la resta, se le solicitó a uno de los estudiantes que mencionara el nombre de dos productos que compró en la tienda departamental, apoyándose en los registros de su hoja de control. El docente escribió la suma en el pizarrón (un pantalón de 425 pesos más un balón de 215 pesos), después se les planteó la siguiente interrogante: ¿cuánto dinero le sobró a su compañero si pagó los productos con billetes de 500 pesos? A continuación, se presentan las principales estrategias de cálculo mental para la suma, la resta y la multiplicación, que los equipos construyeron y presentaron ante el grupo.

4.3. Principales resultados de los estudiantes en la primera tarea

4.3.1. Estrategias de cálculo mental para la suma

Suma por el valor posicional del número. La estrategia consiste en realizar la suma separando las cifras de una cantidad con base en su valor posicional, se separan los sumandos en centenas, decenas y unidades, y después se suman de manera correspondiente. Por ejemplo, al sumar 315+285, primero sumaban las centenas 300+200 = 500, después sumaban las decenas 10+80 = 590 y finalmente las unidades 5+5 = 600.

	315
+	285
300+200	500
10+80	590
5+5	**600**

Profesor: vamos a comprar una blusa que cuesta 315 y un pantalón que cuesta 285, ¿cuánto vamos a pagar? A ver…. Explícanos tu estrategia.
Estudiante: bueno, nosotros lo que hicimos fue empezar por las cantidades grandes 300 más 200 son…500. Ahora le seguimos con las cantidades medianas, se puede decir, que son (aquí sabemos que estas son decenas y las decenas son de 10), entonces son 10 y aquí son 8 decenas son 80, serían 90. Y luego con las unidades, pues las unidades son de 1, 5 unidades y 5 unidades serán 10 unidades. Y luego sumamos todo…
Profesor: ¿90 más 10?
Estudiante: 100
Profesor: más 500
Estudiante: 600 [la estudiante escribe el resultado final]

Suma por partes. Esta estrategia es una variante de la estrategia por valor posicional. Se descompone el segundo sumando en centenas, decenas y unidades y posteriormente se realizan las sumas parciales. Por ejemplo, al sumar 318+224, al primer sumando (318), primero le agregaban 200, después sumaban 20 y finalmente sumaban 4, obteniéndose las siguientes sumas parciales: 318+200 = 518, después 518+20 = 538 y finalmente 538+4 = 542.

	318
+	224
318+200	518
+ 20	538
+ 4	**542**

Profesor: tenemos un pantalón que cuesta 318 pesos y una blusa que cuesta 224, ¿cuánto se paga por las dos prendas? ¿Cómo se llama tu estrategia?
Estudiante: se llama… Suma por partes
Profesor: ok, ¿cómo va?
Estudiante: yo voy a sumar 318 más 200
Profesor: ok, 318 más 200, ¿cuánto es?
Estudiante: 518
Profesor: escríbelo, 318 más 200 te da 5180. Estoy de acuerdo, ¿y luego?
Estudiante: este…a esos 518 le voy a sumar 24.
Profesor: bueno puedes sumar 20 primero y luego 4 ¿no?, ¿518 más 20 cuánto sería?
Estudiante: serían… 538
Profesor: ok, escríbelo, ¿cuál te falta sumar ahora?
Estudiante: el 4. Serían…. 542
Profesor: correcto, sí…. Nuevamente, ¿por qué te dio 518?
Estudiante: porque sumé 318 más 200.
Profesor: ok, o sea que aquí hay uno de 200, ¿sí? Y luego, ¿por qué te dio 538?
Estudiante: porque sumé 518 más 20
Profesor: ¿y finalmente te dio 542 porque sumaste 4?, ¿cómo se llamó tu estrategia dijimos?
Estudiante: suma por partes.

Redondear a decenas sumando. Antes de realizar la suma se agregan unidades a los sumandos para completar a la decena más próxima. Por ejemplo, al sumar 318+224, al primer sumando le agregaban 2, para redondear a 320, al segundo sumando le agregaban 6, para redondear a 230. Después realizan la suma de los nuevos sumandos 320+230 = 550 y al final restaban las unidades agregadas 550–8= 542.

	318	+2
+	224	+6
	320	
+	230	
	550	-8
	542	

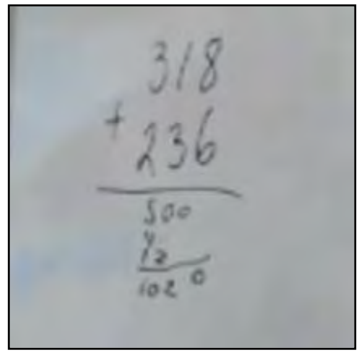
Profesor: muy bien, tenemos un pantalón que cuesta 318 pesos y una blusa que cuesta 224, ¿cuánto se paga por las dos prendas?, dinos ¿cómo le vas a hacer?
Estudiante: primero voy a completar… [y escribe 318 +2 y 224 +6]
Profesor: se completa a decenas, ok, ¿cuánto le falta?
Estudiante: [escribe 318 +2 y 224 +6]
Profesor: ok, entonces si ya lo completaste a decenas, ¿cuánto sería ahora?
Estudiante: 320 más 230 [escribe los nuevos sumandos]
Profesor: muy bien, ahora esa suma se puede hacer más fácil, ¿cuánto seria?
Estudiante: [la estudiante realiza la suma siguiendo el algoritmo tradicional, cero más cero, dos más tres y tres más dos] son 550
Profesor: ¿y ahora?
Estudiante: se le resta ocho [señala el +2 y el +6 que agregó a los sumandos iniciales]
Profesor: ¿a 550 le quitas ocho?
Estudiante: 542
Profesor: muy bien, ¿cómo se llama esa estrategia?
Estudiante: completar a decenas.

Redondear a decenas restando. Es una variante de la estrategia redondear a decenas sumando. Se redondea a la decena próxima restando cierta cantidad a cada sumando. Ejemplo, al sumar 443+512, al primer sumando le restaban 3, para redondear a 440, al segundo sumando le restaban 2, para redondear a 510, se suman los nuevos sumandos 440+510 = 950. Al final sumaban las unidades que restaron (3 y 2) 950+5 = 955

	443	-3
+	512	-2
	440	
+	510	
	950	+ 5
	955	

Profesor: se va a comprar una chamarra de 443 y unas zapatillas de 512, ¿cuánto se debe pagar?, explica tu estrategia de cálculo mental para realizar esa suma.
Estudiante: yo aquí le resté menos 3 y luego aquí menos 2…
Profesor: ¿por qué?
Estudiante: pues porque…
Profesor: ¡así!, ¡así!… ¿Para qué te quedara cuánto?
Estudiante: este...440 y 510
Profesor: aja…
Estudiante: aquí puse 440 de acá y aquí 510 de aquí…
Profesor: sí
Estudiante: lo sumé y me dio 950, después sumé el 3 y el 2 [señala el -3 y el -2] y son 5 y aquí me dio 955.
Profesor: correcto

Es importante mencionar que algunos estudiantes recurrieron constantemente al algoritmo convencional para realizar las operaciones aritméticas. Por ejemplo, en la estrategia de cálculo mental "completar a decenas sumando", redondearon los sumandos a 320 + 230, y realizaron la suma recurriendo al algoritmo de papel y lápiz (primero las unidades, cero más cero; luego las decenas, dos más tres y al final las centenas, tres más dos). Conjeturamos que este comportamiento se debió a que, durante la explicación de la estrategia hicieron anotaciones en el pizarrón.



En tres casos (Memo, Julio y Angy) los estudiantes mostraron algunas dificultades para comprender el valor posicional de los números que integran una cantidad. Por ejemplo, en la imagen de la derecha, se identifica que el estudiante pudo sumar las centenas correctamente, pero al sumar las decenas, solo consideraron el valor absoluto 1+3 (en lugar de 10+30). Además, se identificó que al colocar los "nuevos" sumandos, no respetó el valor posicional de los números, por lo tanto, obtuvo un resultado incorrecto. Lo anterior, es un indicador de que algunos estudiantes no les dan sentido a las operaciones con números naturales.

4.3.2. Estrategias de cálculo mental para la resta

Resta por descomposición del sustraendo. La estrategia consistió en descomponer el sustraendo en centenas, decenas y unidades y posteriormente realizar restas parciales consecutivas. Por ejemplo, para efectuar la resta 900–587, el 587 lo descomponían en: 500+80+7, posteriormente, a 900 le restaban 500, igual a 400, a este resultado parcial le restaban 80, igual a 320 y por último restaban 7. Así obtenían el resultado final, 313.

	900
-	587
-500	400
-80	**320**
-7	**313**

Profesor: cuando Antonia llegó a la tienda departamental tenía 900 pesos y con ellos pagó 587 ¿cuánto dinero le sobró? Toñita…
Estudiante: bueno, primero a las centenas que son 900, le quito 500 y me quedan 400, luego le quito 80, que son las decenas y me quedan 320 y por último le quito las unidades que son 7 y me quedan 313.

Resta con base en la suma de complementos parciales. En esta estrategia, el sustraendo se complementa repetidamente de forma apropiada, hasta obtener el minuendo y la resta se obtiene sumando los complementos parciales. Por ejemplo, al realizar la resta 600–302, al sustraendo (302), primero le suman 8, para completar a 310, luego suman 90, para completar a 400 y finalmente suman 200 para completar el minuendo (600). El resultado de la resta original es igual a la suma de los complementos: 8+90+200 = 298.

	600
-	302
+8	310
+90	400
+200	600
298	

Profesor: muy bien, llegué a la tienda con 600 pesos y tengo que pagar 302 pesos, ¿cuánto me va a sobrar? [Después de que los integrantes de cada equipo resolvieron el ejercicio en el pizarrón] a ver escuchemos a Fabiola.

Estudiante: a 302 yo le sumé 8 y me dio 310, a 310 le sumé 90 y me dio 400, a 400 le sumé 200 y me dio 600, luego sumé esto [señala los complementos +8, +90 y +200] Y me dio 298.

Profesor: sí, correcto

Esta estrategia, es una adaptación de la forma en que algunas personas adultas sin escolaridad se convencen de que reciben el cambio correcto cuando realizan acciones de compra y venta. A la cual, hicieron referencia algunos estudiantes durante la tarea de la tienda departamental:

Comprador: cóbreme por favor 238 [entrega al cajero 250 pesos]

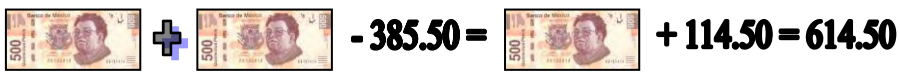
Cajero: este... ¿le cobro 238? [El cajero mira las monedas y duda cuanto dar de cambio].

Comprador: [tomando del dinero del cajero le explica como entregar el cambio], un peso son 239, más otro peso son 240 y esta moneda de 10 son 250 [en total recibe 12 pesos de cambio]

Cajero: [reflexionando un poco, toma las monedas y se las entrega al comprador] está bien, aquí tiene.

Además, en este ejemplo, se observa cómo se dio el trabajo de tutoreo. Los estudiantes con mayor experiencia en el uso del dinero para realizar compras apoyaron a los que presentan dificultad para comprender las operaciones aritméticas. Esta fue la finalidad de organizar el trabajo con la mayoría de los estudiantes de la escuela y conformar equipos con estudiantes de los tres grados escolares, considerando la diversidad en ritmos de aprendizaje y niveles de desempeño académico.

Resta considerando el contexto de los billetes. La estrategia requiere dividir el minuendo en dos cantidades, de tal manera que una de ellas se acerque al sustraendo. Además, se busca que esta división del minuendo se pueda conformar con billetes de denominación conocida. Por ejemplo, al restar 1000-385.50, dividían los 1000 pesos en dos billetes de 500, con uno de ellos pagan los 385.50 y reciben de cambio 114.50. Al final sumaban los 114.50 que recibieron de cambio, más los 500 pesos que separaron al inicio [500+114.50 = 614.50]



Profesor: si tienes 1200 pesos y pagas en la tienda 715 pesos, ¿cuánto dinero te sobra?
Estudiante: para pagar 715 utilizaría un billete de 500, uno de 200 y uno de 100.
Profesor: ok
Estudiante: y serían 800 y me sobrarían de los 1200…sobrarían 400.
Profesor: sí…y pagas 800.
Estudiante: y…primero a los 800 quito los 700 y me sobrarían 100 pesos, y a esos 100 pesos, le quito los 15 y me sobrarían… 85. Entonces, de 800 menos 715 me sobrarían 85 y le sumo los 400 que me sobraron de los 1200 y me darían 485.
Profesor: sí, el resultado de la resta serían 485.

Cambio de resta con reagrupación a resta sin reagrupación. Aunque no se refiere precisamente a una estrategia de cálculo mental, esta técnica fue muy recurrente durante los retos matemáticos. Consiste en disminuir una unidad al minuendo, y de este modo obtener una resta que no requiere de reagrupación. Después realizan la resta de manera convencional y al final sumar la unidad que restaron al inicio. Ejemplo, al restar 1000-278, al 1000 le restaban una unidad y obtenían: 999 – 278, luego realizaban la resta siguiendo el algoritmo convencional (unidades menos unidades, decenas menos decenas y centenas menos centenas) y obtenían 721. Al final sumaban la unidad que restaron al minuendo (1000) 721 + 1 = 722.

	1000	-1
-	278	
	999	
-	278	
	721	+ 1
	722	

Profesor: llego a la tienda con 1200 pesos y tengo que pagar 734 pesos, ¿cuánto me sobra?
[un estudiante de cada equipo resuelve la operación con diferente estrategia]
Estudiante: ya
Profesor: ¿ya quedó?, explica, ¿qué hiciste?
Estudiante: eh, pues a 1200 le resté 1 y me quedó 1199, le resté 734 y me dio 465 y le sumé 1 que le resté aquí arriba y me dio 466.
Profesor: te quedó 466, correcto.

Esta última alternativa para realizar la resta, reafirma la idea de que los estudiantes prefieren recurrir a los algoritmos convencionales. Esta tendencia es más notoria cuando se trata de una competencia, debido a que estos resultados les proporcionan mayor confianza.

La implementación del algoritmo convencional para realizar restas requiere distinguir al menos dos casos: el de las restas que no requieren agrupación y el de aquellas, que si requieren reagrupación. Sin embargo, pudimos identificar que, al usar las estrategias de cálculo mental, presentan la ventaja de requerir un único procedimiento, que se aplica de la misma manera para los dos casos anteriores:

Formas de solución	**Resta sin reagrupación**	**Restas con reagrupación**		**Observaciones**
		Con números enteros	**Con números decimales**	
Algoritmo convencional (papel y lápiz)	745 - 214 531	700 - 214 514	700.00 - 220.50 520.50	En las restas con reagrupación se ha identificado que los estudiantes cometen diversos errores. Por ejemplo, en la resta 700 menos 214, obtienen como resultado 514, o en la tercera resta 700-220.50, dan como resultado 520.50
Estrategia de cálculo mental	745 - 214 545 535 **531**	700 - 214 500 490 **486**	700 - 220.50 500 480 **479.50**	Sin embargo, al usar la estrategia de cálculo mental "por descomposición del sustraendo", se sigue un mismo procedimiento en la realización de las restas parciales de centenas, decenas y unidades, en restas sin agrupación o con reagrupación.

4.3.3. Estrategias de cálculo mental para la multiplicación

Las estrategias de cálculo mental para la multiplicación, se trabajaron en la última fase de la tarea "la tienda departamental". Primero, los estudiantes reflexionaron en grupo, cómo calcular mentalmente los resultados de algunas multiplicaciones básicas, apoyándose en el contexto de la tienda departamental y de una tabla como la siguiente:

Producto	**U. de medida**	**Precio unitario**	**Por 2**	**Por 4**	**Por 10**	**Por 5**	**Por 15**	**Por 14**	**Por 20**	**…..**
Camisas	Pieza	215	430	860	2150	1075				
Zapatos	Par									
…										

Se les indicó que imaginaran que el dueño de la tienda va a un almacén de ropa a comprar mercancía por mayoreo. Si una camisa cuesta 215 pesos, ¿cuánto paga por 2 camisas, por 4 camisas, por 10 camisas y por 5 camisas?, de manera grupal explicaron las siguientes estrategias para realizar los cálculos anteriores:

- Encontrar el precio de dos camisas, es igual a multiplicar por 2 el precio de la camisa; es decir, equivale a encontrar el doble de la cantidad: 215x2 = 215+215 = 430.

- Encontrar el precio de cuatro camisas, es igual a multiplicar por 4 el precio de una camisa; es decir, equivale a encontrar el doble del doble de la cantidad: 215x4 = (215 + 215) x2 = 430+430 = 860.

- Encontrar el precio de 10 camisas, es igual a multiplicar por 10 el precio de una camisa; es decir, equivale a agregar un cero a la derecha de la cantidad o recorrer el punto decimal un lugar a la derecha: 215x10 = 2150

- Encontrar el precio de 5 camisas, es igual a multiplicar por 5 el precio de la camisa; es decir, consiste en multiplicar por 10 y luego calcular la mitad, ejemplo: 215x5 = 2150÷2 = 1075.

A partir de lo anterior las principales estrategias para la multiplicación que presentaron los estudiantes son las siguientes:

Tipo de multiplicación	**Estrategia**	**Ejemplo**
Multiplicación por 12	Primero se multiplica la cantidad por 10 y luego por dos.	215x12 = 2150 + (215 + 215) = 2150 + 430 = 2580
Multiplicación por 14	Primero se multiplica la cantidad por 10 y luego por 4.	215x14 = 2150 + (430 + 430) = 2150 + 860 = 3010
Multiplicación por 15	Primero se multiplica la cantidad por 10 y luego por 5.	215x15 = 2150 + (2150 ÷2) = 2150 + 1075 = 3225
Multiplicación por 25	Primero se multiplica por 10, se calcula el doble, luego por 5.	215x25= (2150x2) + (2150 ÷2) = 4300 + 1075 = 5375.
	Primero se multiplica por 100, luego se calcula la mitad de lo obtenido y otra vez la mitad.	215x25 = (21500÷2) ÷2 = (10750) ÷2 = 5375
Multiplicar por 2.5	Primero se multiplica por 10, luego se calcula su mitad y otra vez la mitad.	215x2.5 = (2150 ÷2) ÷2= (1075) ÷2 = 537.5
	Primero se calcula el doble de la cantidad, luego se le suma su mitad.	215x2.5= (215 + 215) + (215 ÷2) = 430 + 107.5 = 537.5
Multiplicación por 1.5	A la cantidad se le suma su mitad.	215x1.5 = 215 + (215 ÷2) = 215 + 107.5 = 322.5

Profesor: en la siguiente multiplicación 128x7.5, ¿a ver dime como le hiciste?
Estudiante: primero, multipliqué el 7 por esto [señala el 1 que representa las centenas en 128] que me dio 700, luego por 20, son 140 y luego por 8, son 56, da 896. Luego la mitad de este [señala el 128] son 64 y lo sumé y dan 960.
Profesor: a ver…vamos a comprobar de otra manera, si pagaras 10, ¿cuánto sería?
Estudiante: eh…1280
Profesor: escribe 1280, y si pagaras 5.
Estudiante: eh…
Profesor: la mitad de esto [señala los 1280]
Estudiante: serían 640.
Profesor: ¿y si pagaras la mitad de 5?
Estudiante: eh…serían 320
Profesor: entonces ya nada más sumarias estos dos, que son lo de 5 y lo de 2.5, ¿cuánto te da?
Estudiante: [el estudiante realiza la suma conforme al algoritmo convencional y obtiene como resultado 970, lo cual es incorrecto]
Profesor: no…son 960, porque 4 más 2 son seis.

En esta fase, los estudiantes mostraron cierta resistencia a desaprender lo que ya sabían, para poder adquirir o desarrollar otras habilidades de cálculo. Por eso, en muchas ocasiones, multiplicaban siguiendo los procedimientos usuales de la multiplicación. Perdiendo con ello, la oportunidad de desarrollar su sentido numérico, para comprender las cantidades que conforman las operaciones y los resultados. Por ejemplo, en la multiplicación: 134x12.50; siguiendo el algoritmo convencional de la multiplicación, difícilmente podrían anticipar que el resultado se encuentra entre 1500 y 2000. Ellos mecanizan el procedimiento de multiplicar uno a uno las cifras de las cantidades (sin considerar el punto decimal) y al final recorren el punto decimal tantos lugares a la izquierda, como indiquen los decimales de los factores. Lo que interesa al fin, es la eficacia en la realización de las operaciones. Sin embargo, al usar cálculo mental los estudiantes tienen la oportunidad de darle sentido al valor posicional de las cantidades:

```
          134
      x 12.50
        -----
          000
         670
        268
       134
   ----------
       167500
      1675.00     Se recorre el punto dos
                  lugares a la izquierda
```

Algoritmo convencional de la multiplicación

```
      134
  x 12.50
    -----
     1340     (134 por 10)
      268     (134 por 2)
       67     (134 por 0.5)
  -------
     1675
```

Estrategia de cálculo mental en la multiplicación

4.4. Proceso de implementación de la tarea "Rally matemático"

Durante la realización de esta tarea, la mayoría de los estudiantes mostraron cierta madurez para respetar las reglas de los juegos y seguir las instrucciones. Quedando demostrado que el juego es una alternativa viable para construir o reafirmar conocimientos matemáticos. Aunque para ello, se requiera adecuar los juegos a los objetivos de aprendizaje. La participación en equipos fortaleció en los estudiantes el sentido de pertenencia al grupo escolar, mejoró su compromiso para obtener buenos resultados a favor de su equipo y promovió una conciencia de reconocimiento al esfuerzo de cada jugador.

4.4.1. Primer reto: "formando parejas"

El propósito del juego, es que cada equipo debía formar 10 pares de tarjetas, relacionando operaciones aritméticas con sus resultados. Ningún equipo logró formar todas las parejas, el máximo número de pares correctos fue de 8. La implementación de esta tarea no fue de gran utilidad para identificar el uso de estrategias de cálculo mental, porque muchos estudiantes eligieron las parejas de manera aleatoria.

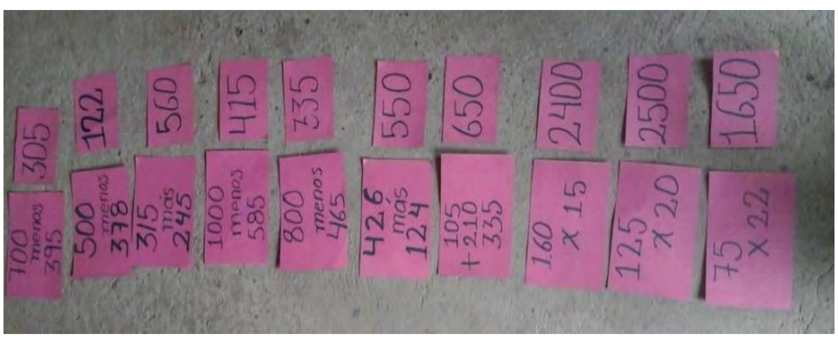


Imagen 4.4.1. Ejemplos de las tarjetas que debieron formar en pares durante el primer reto del rally matemático.

4.4.2. Segundo reto: "Las torres de operaciones"

El mecanismo para llevar a cabo este reto, consistió en que los estudiantes llenaran los bloques de una torre a partir de una consigna dada. En la primera torre, el valor que se debía colocar en un bloque se obtenía como, "el doble de la suma de los valores de los dos bloques inferiores". En la segunda torre, el valor que se debía colocar en cada bloque se obtenía de, "multiplicar por cinco la diferencia entre el valor mayor y el valor menor de los dos bloques inferiores" (Figura 4.4.2). En este reto la mitad de los estudiantes utilizaron las estrategias de cálculo metal de manera eficiente.

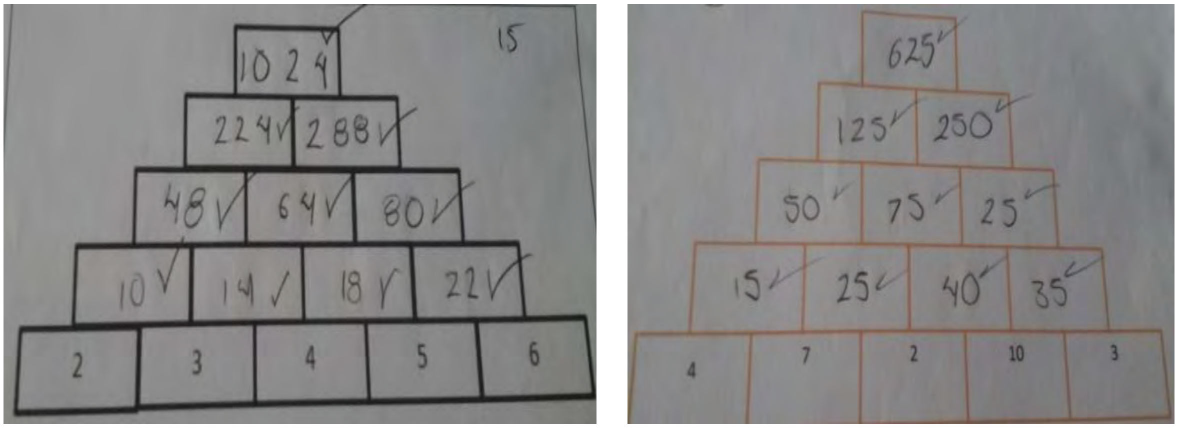


Imagen 4.4.2. En esta imagen se muestran algunos resultados del llenado de las torres.

Las estrategias de cálculo mental para el llenado de la primera torre fueron, *la suma por partes*. Ejemplo, al sumar 48 + 64, primero sumaron 48 más 60, igual a 108, más 4, igual a 112. Luego, para encontrar el doble de la cantidad, aplicaron una estrategia similar a la de la *suma por valor posicional* (112 + 112) sumaban 100 más 100, igual a 200 y luego 12 más 12, igual a 224.

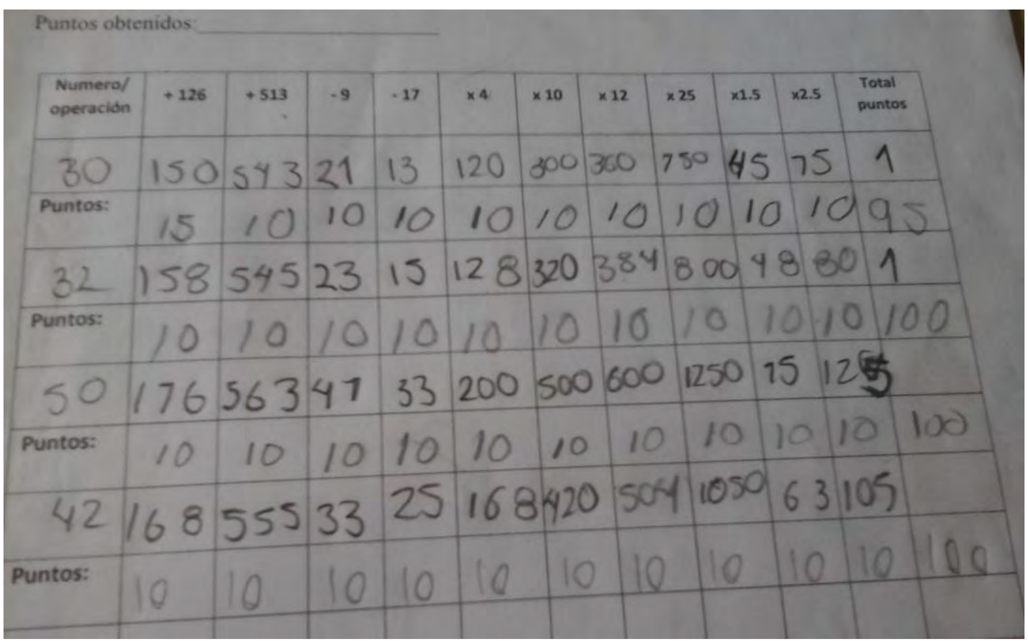
En la segunda torre, la principal estrategia fue la *multiplicación por 5*, que consiste en multiplicar primero por 10 y luego calcular la mitad. Por ejemplo, 25x5, primero multiplicaban 25 por 10, igual a 250 y luego calculaban la mitad (la mitad de 200 más la mitad de 50) 100+25 = 125.

4.4.3. Tercer reto matemático: "El basta numérico"

El reto consistió en que los estudiantes usaran estrategias de cálculo mental para resolver operaciones de suma, resta y multiplicación. En cada ronda se enfrentaban los jugadores de un equipo contra los integrantes de otro equipo (uno a uno). Cada jugador ganaba un punto para su equipo si lograba obtener más puntos que su contrincante, en una partida. Los puntos se obtenían al resolver operaciones aritméticas de manera mental (un resultado correcto, valía 10 puntos, un resultado incorrecto valía, 5 puntos).

La principal estrategia que usaron para las sumas fue *la suma por partes*. Por ejemplo 126 + 32, primero sumaban 30 al 126, igual a 156, luego sumaban 2, igual a 158. En el caso de la resta, la estrategia más utilizada fue *la resta con base en la suma de complementos parciales.* Por ejemplo, al restar 50-17, primero le sumaban 3 al 17 y completaban 20, luego sumaban 30 y completaban 50, entonces la solución era 3 + 30 igual a 33. En el caso de la multiplicación, las estrategias más utilizadas fueron, la multiplicación por 4 (el doble del doble), la multiplicación por 10 (agregar un cero a la derecha de la cantidad) y la multiplicación por 1.5 (la cantidad más su mitad).

Aquellos estudiantes que mostraron mejor rendimiento e interés en las actividades, identificaron la relación de multiplicar un número por 25 y por 2.5. Por ejemplo, 32 x 25 = 800 y 35x2.5 = 80 o 30x25 = 750 y 30x2.5 = 75. Esta observación, les permitió siempre tener ventaja sobre sus oponentes. Las multiplicaciones por 12 y por 25, fueron las que requerían mayor tiempo para realizarlas, porque, en el caso de la multiplicación por 12, debían realizar dos multiplicaciones (primero por 10 y luego por dos) y finalmente realizar la suma de los resultados parciales, y en la multiplicación por 25, debían multiplicar por 10, luego encontrar el doble (por 20), después calcular la mitad (por 5), y sumar ambos resultados.



Puntos obtenidos:

Numero/ operación	+ 126	+ 513	- 9	- 17	x 4	x 10	x 12	x 25	x1.5	x2.5	Total puntos
30	150	543	21	13	120	300	360	750	45	75	1
Puntos:	15	10	10	10	10	10	10	10	10	10	95
32	158	545	23	15	128	320	384	800	48	80	1
Puntos:	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100
50	176	563	41	33	200	500	600	1250	75	125	
Puntos:	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100
42	168	555	33	25	168	420	504	1050	63	105	
Puntos:	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100

Imagen 4.4.3. Aquí se muestra un ejemplo de los resultados del "basta numérico", por parte de un estudiante con resultados eficientes.

Algunos aspectos que destacar en este reto matemático, es que los estudiantes aplicaron una gran diversidad de estrategias de cálculo mental; pero, algunos de ellos (Alex, Fany, Luz y Fer) prefirieron hacer uso de los algoritmos de papel y lápiz, ya que esto les proporcionaba confianza de que el resultado sería correcto. Otros estudiantes, (Mario, Lolis y Beto) prefirieron escribir la primera cantidad que les viniera a la mente, porque esto les permitía obtener puntos adicionales sin esfuerzo, (las indicaciones del juego eran, resultado correcto vale 10 puntos, resultado incorrecto vale 5 puntos y dejar en blanco vale 0 puntos).

4.4.4. Cuarto reto matemático: "Carrera contra la ignorancia"

El juego consistió, en una carrera de los 4 equipos participantes contra la ignorancia (representada, en este caso con un objeto de color negro). La carrera se realizó sobre un camino de 4 carriles, de 20 casillas. Cada equipo estaba representado por una botella de diferente color. De manera individual y por turnos, los integrantes de los equipos debían resolver problemas matemáticos sin ayuda de papel y lápiz. Cada equipo avanzaba dos casillas por cada respuesta correcta, y por cada respuesta incorrecta de alguno de los equipos, la ignorancia avanzaba dos casillas sobre el mismo camino. El propósito era, que todos los equipos (las botellas, en este caso) avanzaran sobre el camino, más lejos que la ignorancia.

Antes de iniciar el juego, los integrantes de los equipos se enumeraron en orden ascendente. Durante la primera parte de la carrera, se planteó el mismo problema a los jugadores que tenían el número 1 de cada equipo, después a los jugadores con el número 2, y así sucesivamente hasta los jugadores con el número 5. Cada jugador, debía escribir la respuesta en un pedazo de hoja blanca, de manera personal y en secreto, cuando el moderador se los indicaba, mostraban su respuesta, para poder evaluarla. Durante esta primera etapa, no se permitía recibir ayuda de los demás integrantes del equipo.

Al término de esta primera etapa solo un equipo estuvo delante de la ignorancia (imagen 4.4.4) lo que indicó que los demás equipos tuvieron problemas para realizar operaciones aritméticas mentalmente.

Imagen 4.4.4. En esta imagen se muestra el avance de los participantes en la carrera contra la ignorancia, después de la primera etapa.

En la segunda etapa, se siguió la dinámica anterior, pero en lugar de escribir la respuesta, debían escribir la letra de la opción que correspondía a la respuesta correcta (A, B, C o D). Durante esta etapa uno de los equipos llegó a la meta, dando por terminada la carrera. Hubo dos equipos que perdieron la carrera contra la ignorancia.

Una dificultad que presentó este reto, fue que los problemas planteados requerían comprender conceptos como las unidades de medida, del tiempo, de peso, de longitud y de capacidad para poder realizar los cálculos de manera mental. Por ejemplo, en el problema: *Un camión debe realizar un viaje de 3 horas y cuarto. ¿Cuántos minutos le faltan para llegar, si lleva un avance de 2.5 horas?* Para este problema los estudiantes debían recordar cuantos minutos hay en una hora y cuántos minutos representa 0.5 horas. Aunque estos saberes se consideran de uso común en su contexto. Durante la evaluación de las respuestas, el moderador aprovechaba para escuchar algunas de las estrategias utilizadas por los participantes para resolver los problemas.

Se observó que en los equipos ganadores había estudiantes con experiencia en el manejo de dinero, como Aby, Davis, Ale y Balta; ellos apoyan a sus familias en actividades de comercio o realizan regularmente las compras de la casa. Además, había estudiantes con un eficiente dominio de los algoritmos convencionales de las operaciones aritméticas, como Toñis, Alexis y Fany.

4.5. Resultados principales

A continuación, se mencionan algunos de los resultados más importantes de este trabajo. La organización de las actividades con la participación de estudiantes de los tres grados escolares, favoreció el trabajo solidario y de tutoreo entre pares. El contexto de juego y competencia promovió que los estudiantes que poseían más experiencia en la realización de cálculos, brindaran apoyo y asesoría a sus compañeros que mostraban algunas dificultades, ya que esto, favorecía el desempeño del equipo (esta situación, se vio reflejada en los equipos que ganaron el rally matemático). En este trabajo, obtuvimos evidencia de que el juego puede ser una estrategia muy útil, para incentivar la autoconfianza de los estudiantes respecto a su habilidad matemática o de sus capacidades para aprender.

El uso del dinero de fantasía durante la implementación de la tarea "la tienda departamental", se constituyó como un referente, que apoyó la generación de estrategias de cálculo mental. Estas estrategias, se apoyaron en conocimientos extraescolares que poseen los estudiantes y que generalmente no aparecen en los salones de clase. En donde fue más notorio este hecho fue al desarrollar estrategias de cálculo mental para la resta (resta con base en la suma de complementos parciales y resta considerando el contexto de los billetes). Lo anterior, es importante, porque permitió que los estudiantes establecieran conexiones entre la matemática escolar y sus experiencias fuera del aula.

La estrategia que mejor comprendieron y utilizaron los estudiantes durante los retos del rally matemático, fue *la suma por partes* y para el caso de la resta, fue la estrategia por *descomposición del sustraendo*. En ambas estrategias, comprender el valor posicional de los números en una cantidad, fue lo que les ayudó para preferir estas estrategias de cálculo. Los estudiantes desarrollaron y propusieron procedimientos basados en el uso del dinero para realizar las restas de manera ágil. Por ejemplo, al descomponer el minuendo en cantidades más pequeñas, pero que se pudieran representar con billetes de denominación conocida. Mención aparte merecen las estrategias de cálculo mental para la multiplicación con números decimales (por 2.5 y 1.5), que ayudaron a los estudiantes a establecer relaciones con las multiplicaciones por 3, por 5, por 7.5 o por 10.

Se observó una reticencia de los estudiantes a dejar de lado el uso de los algoritmos convencionales. Lo anterior, se conjetura que era porque estos resultados les proporcionaban seguridad al tratar de ganar los retos matemáticos. La enseñanza de las operaciones aritméticas centrada exclusivamente en los algoritmos de papel y lápiz permite que los estudiantes tengan eficacia para realizar cálculos, pero no ayuda a que los estudiantes encuentren sentido a las cantidades y a las operaciones.

La realización de cálculos mentales, permitió a los estudiantes, no solo desarrollar diversos aspectos del sentido numérico, sino, darse cuenta que un problema puede resolverse de diferentes maneras. Además, que es importante comunicar sus ideas a otros y justificar sus métodos de solución, todo lo cual, es fundamental en el desarrollo de formas matemáticas de pensar (Barrera y Reyes 2013).

4.6. Permanencia de las estrategias

En este apartado, se exponen los resultados de un proceso de observación que se llevó a cabo después de la implementación de las tareas. La finalidad fue, identificar si los estudiantes aún recordaban y eran capaces de implementar las estrategias de cálculo mental que habían construido durante las tareas de instrucción de este trabajo de investigación. Se organizaron tres sesiones de observación, tres meses después de la aplicación de las tareas. Estas sesiones se llevaron a cabo después del horario normal de clases. Participaron dos estudiantes de los equipos que se integraron durante el rally matemático. Se organizó una competencia que consistía en resolver problemas de matemáticas parecidos a los del reto la carrera contra la ignorancia. Cada jugador ganaba dos puntos para su equipo, si resolvía correctamente el ejercicio y si explicaba la estrategia de cálculo mental que utilizó para resolverlo. A continuación, se escriben algunas traducciones de los videos de esta actividad, donde se aprecia que efectivamente, los estudiantes comprendieron algunas estrategias de cálculo mental que hemos resaltado en este capítulo:

Profesor: un kilo de azúcar cuesta 12 pesos, ¿cuánto pagaríamos por doce kilos y medio?
[Los estudiantes que compiten realizan sus operaciones y al final explican su procedimiento] a ver Toñita….
Estudiante: bueno, yo primero lo que hice fue multiplicar 12 por 10.
Profesor: ¿12 por 10?
Estudiante: da 120
Profesor: sí
Estudiante: luego multipliqué 12 por 2 y me da 24 y hasta el último, el punto cinco sabemos que es la mitad, entonces la mitad de 12 es 6
Profesor: ¿o sea medio kilo?
Estudiante: sí... Y sumé todo y me dio 150
Profesor: sí, ¿seguro?, ¿cómo sumaste?, ¿4 más 6 y llevas una?
Estudiante: no…120 más 24 me da 144, más 6…150.

Profesor: imagina que vas al mercado y llevas 200 pesos, compras 5 kilos de manzanas y 4 kilos de plátano. La manzana cuesta 17 pesos y el plátano va a costar 16.50, ¿cuánto dinero te sobra?
Estudiante: aquí… Le aumentamos un cero [señala el 17].
Profesor: ¿por qué dijimos?
Estudiante: porque es lo de 10 kilos y hay que sacar lo de 5, entonces aquí, la mitad de 170 son 185. [escribe esa cantidad en el pizarrón]
Profesor: [afirma que es correcto]
Estudiante: luego aquí [el plátano] vale 16.50, entonces lo de 2 son 33, más 33 son 66 [lo escribe nuevamente]
Profesor: sí
Estudiante: luego aquí sumo lo que me costó los 5 kilos de manzana y los 4 kilos de plátano.
Profesor: sí
Estudiante: 80 más 60 son…110, 120, 130… ¡no! [corrigiendo] ¡140!
Profesor: sí
Estudiante: más 5 [divide el 6 en 5 + 1] son 150, más 1…151
Profesor: correcto
Estudiante: 151 [escribe en el pizarrón] luego aquí yo tenía 200 pesos para comprar esto, entonces aquí me quedan… 49.
Profesor: ok, sobran 49

Profesor: una madre de familia va al mercado y lleva 200 pesos, compra 4 kilos de plátano a 13.50 pesos y compra 5 kilos de manzana, a 19 pesos, ¿cuánto dinero le va a sobrar?
Estudiante: bueno…dividimos la cantidad [señala el 13.50] y solamente nos quedan 10, entonces 4 por 10 son 40, y 4 por 3 son 12 y 40 más 12 son 52, más la mitad de 4 que es el punto cinco, me quedan 54. Después también dividimos a esta cantidad [señala el 19], le quitamos el 9 y me quedan 10, entonces 5 por 10 son 50 y 9 por 5 son 45, entonces 45 más 50 son 95. Entonces ya nomás sumamos estos dos precios, que nos dan…90 más 50 da 140 y 5 más 4 son 9, entonces me quedan 149. Entonces si pago con uno de 200 y tengo 149. [Escribe +1 delante de 149] más 1 son 150, tenemos 150 para 200 me faltan 50, entonces son 51.

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

5.1. Introducción

En el diseño del ambiente de aprendizaje para el desarrollo de las tareas, fue importante considerar los intereses de los estudiantes. Este considerando, permitió presentarles una situación que les ayudará a reflexionar sobre hechos y fenómenos sociales de su entorno. El currículo estándar no toma ventaja de los conocimientos informales que los estudiantes han desarrollado (Mulligan y Mitchelmore, 1997). Sin embargo, este trabajo de tesis proporciona evidencia de que estos conocimientos informales pueden ser de utilidad para desarrollar entendimiento matemático, respecto a la generación de estrategias novedosas de cálculo mental o de nuevos procedimientos para realizar cálculos más fácilmente con las herramientas de papel y lápiz.

5.2. Respuesta a la pregunta de investigación

El contexto de la tarea "la tienda departamental", permitió que los estudiantes reflexionaran sobre los diversos cálculos aritméticos que se realizan en la vida cotidiana. Este reconocimiento, les ayudó a entender que los algoritmos convencionales, no son la única manera de realizar cálculos. Además, que vincularan las matemáticas escolares y las que utilizan en la vida cotidiana, (Diez, 2004; Carraher, 1993; citados en Benítez, 2011).

El desarrollar estrategias de cálculo mental para la suma, apoyaron para que los estudiantes pudieran manipular cantidades con números decimales de manera comprensible. Esta comprensión les permitió aclarar algunas confusiones que se presentan al desarrollar los algoritmos convencionales. Por ejemplo, al sumar 123 + 145.50, la parte decimal, la consideraron como un "elemento" más que debían agregar a otro sumando. Por ello, primero sumaban 123+145 = 268 y al final sumaban la parte decimal, 268+0.50 = 268.50. En cambio, cuando suman por el procedimiento convencional requieren recordar cómo colocar los sumandos cuando estos tienen una parte decimal, y es en esta parte, donde se presentan diversos problemas de procedimiento.

El juego es una actividad que permite modificar la concepción que tienen los estudiantes sobre las matemáticas. Ellos la perciben como una materia rígida e inflexible en la aplicación de reglas y procedimientos. Sin embargo, una tarea lúdica en la que participen los estudiantes aprovecha su tendencia natural a formar grupos y a divertirse. Con ello, se logra un aprendizaje con entendimiento, mediante la reflexión y discusión de las ideas en una comunidad de práctica (Morales 2013). Los juegos de este trabajo, lograron aprovechar la motivación de los estudiantes para resolver críticamente las situaciones problemáticas que se les plantearon.

Respecto a la pregunta, si existe una transferencia de las estrategias de cálculo mental cuando los estudiantes participan en situaciones lúdicas o de competencia. Las evidencias recabadas en las videograbaciones y en las hojas de seguimiento (APÉNDICE F), muestran que solo algunos estudiantes usaron estas estrategias en las actividades de competencia, lo que les ayudó a obtener resultados favorables en los juegos del rally matemático. Otros estudiantes, prefirieron realizar los cálculos usando los procedimientos convencionales de manera eficiente, como una alternativa para asegurar sus resultados. Y otros más, solo participaron de manera intuitiva escribiendo resultados poco coherentes. Lo que se concluye, que fue menor el número de participantes que pudieron transferir las estrategias de cálculo mental a las actividades de competencia. Las actividades del rally donde se pudo apreciar de manera más sobresaliente el uso de las estrategias de cálculo mental fueron, en "las torres de operaciones" y "el basta numérico".

En lo que se refiere a, si las actividades contextuales y lúdicas apoyaron el entendimiento del sentido numérico. Se puede concluir, que efectivamente, la tarea de la tienda departamental y el uso de los billetes de fantasía, ayudaron a que los estudiantes pudieran manipular y comprender las cantidades de diferentes maneras. Por ejemplo, al representar los precios de los productos de diversas formas, al comprender la parte decimal de una cantidad, como un medio o una cuarta parte y al explicar las estrategias de cálculo mental ante sus compañeros. Lo anterior, son indicadores que los estudiantes mejoraron paulatinamente su sentido del número y las operaciones. La actividad de "la carrera contra la ignorancia", que fue parte del rally matemático, fue donde se pudo apreciar el desarrollo del sentido numérico, cuando los estudiantes explicaron sus razonamientos para resolver los planteamientos matemáticos, aunque para ello, fue necesario dedicar sesiones extraordinarias para su apreciación.

5.3. Alcances y limitaciones

Identificamos que la discusión de las estrategias que realizaron los estudiantes, permitió al docente caracterizar las formas de pensamiento y razonamiento que surgieron durante las actividades. El análisis de las ideas expresadas por los estudiantes requiere que el profesor posea habilidades para ayudar a los estudiantes a expresar verbalmente sus pensamientos de forma clara, de manera que el resto de sus compañeros entiendan sus ideas. Capacidad que también se ha identificado como relevante en otras investigaciones (Swam 2001).

La realización de actividades que involucran cálculo mental en el aula, es una práctica que puede traer beneficios para los estudiantes, porque, les ayuda en la comprensión y sentido del número. Además, son de utilidad para el profesor, porque le permiten profundizar en las concepciones que tienen sus estudiantes sobre los procedimientos de cálculo (Gómez 1998). A través del cálculo mental, se desarrollan capacidades tales como, versatilidad e independencia para realizar procedimientos, capacidad para decidir y elegir, y brinda confianza en el cálculo aritmético. En este trabajo se obtuvo evidencia que los estudiantes mejoraron su desempeño y actitud para realizar cálculos aritméticos con diferentes procedimientos, lo cual apoya la idea de este autor.

Durante la construcción de las estrategias de cálculo mental para las operaciones de suma y resta, los estudiantes, continuamente regresaban al uso de los algoritmos convencionales. Esto se debe, a que gran parte de su formación académica el aprendizaje de las operaciones básicas se ha centrado en el manejo eficiente de los algoritmos, lo cual los ha conducido a un automatismo (Roa 2007, citado en Framit 2014)

El desarrollo del sentido numérico, es complejo de evaluar, porque implica atender a las explicaciones verbales de los estudiantes. Es un proceso más cualitativo que cuantitativo y no se puede medir fácilmente con pruebas escritas, sino que requiere un trabajo de observación importante por parte del profesor.

5.4. Propuestas a futuro

Los resultados de este trabajo, abren la posibilidad de plantearse a futuro algunas propuestas o alternativas. La primera sugerencia, es que las actividades para desarrollar el sentido numérico, se deberían trabajar únicamente con estudiantes que muestren buena actitud y disposición al aprendizaje. Lo anterior, no quiere decir que se deba discriminar a estudiantes con problemas de rendimiento académico. En este trabajo, se obtuvo evidencia de que hay estudiantes con un bajo aprovechamiento escolar en las clases de matemáticas, pero que poseen un gran sentido del número y sus operaciones, sobre todo cuando tienen experiencia en situaciones de manejo de dinero. Lo que se sugiere entonces, es trabajar con aquellos estudiantes que estén dispuestos a buscar alternativas para manipular las cantidades, a comunicar estrategias o procedimientos para realizar operaciones aritméticas y a compartir sus conocimientos en el manejo de los números y sus operaciones.

Consideramos, que la tarea de la tienda departamental se pueda fortalecer al incluir productos reales y en buen estado, para realizar la venta de los productos al público en general y obtener recursos económicos para el grupo escolar. Esta actividad contextual, no es recomendable suspenderla o evitarla, porque constituye una experiencia importante para que los estudiantes comprendan las cantidades. A partir de este acercamiento con las cantidades y sus operaciones, se espera que puedan entender de mejor manera las estrategias de cálculo mental.

Cuando los estudiantes participen en actividades por equipos, se debe propiciar que en cada uno de ellos, existan estudiantes lideres o tutores. Estos estudiantes ayudaran a los demás, a esclarecer sus dudas, a comunicar sus argumentos, los motivaran a expresar sus ideas y a defender sus razonamientos.

En lo que se refiere al diseño de las actividades del rally matemático. Recomendamos rediseñar la actividad “armando parejas”, porque su diseño actual no permitió identificar el uso de las estrategias de cálculo mental. Se sugiere en este caso, entregar a los jugadores tarjetas con diferentes operaciones, pero que tengan resultados iguales. Por ejemplo (135+140 y 500–225), entonces, el reto deberá ser, que cada estudiante encuentre una pareja (otro estudiante) que tenga un resultado igual al suyo. Al final, cada pareja explicará la forma en que encontraron los resultados de sus tarjetas. De esta manera, se podrá apreciar el uso de las estrategias de cálculo mental para realizar operaciones.

En la implementación del juego "El Basta Numérico" se identificó que dos alumnos (Mario y Heri) escribieron de manera aleatoria resultados incorrectos para ganar puntos adicionales sin el mínimo esfuerzo cognitivo, por lo anterior, para futuras aplicaciones de este juego, se propone el siguiente puntaje: escribir un resultado correcto se ganan 3 puntos, escribir un resultado incorrecto se pierden 3 puntos y dejar en blanco se gana 0 puntos. (Ver Apéndice G, donde se fundamenta la asignación de este puntaje).

Algunos docentes, han cometido el error de ejemplificar el uso de alguna estrategia de cálculo, y a partir de eso, proponer diversos ejercicios para que los estudiantes la dominen. Algunas de estas estrategias, solo se consideran como actividades recreativas en las clases cotidianas. Lo recomendable, es que a los estudiantes se les propongan retos que impliquen representar las cantidades de diferentes maneras y que puedan buscar relaciones entre los números, y así, puedan visualizar otras alternativas de solución a las operaciones y a los planteamientos.

Cuando los estudiantes verbalizan sus razonamientos, el docente identifica una serie de dificultades que presentan en cuanto a la comprensión de conceptos y de los principios de numeración. Por ejemplo, (i) el valor posicional de un número en una cantidad, (ii) la comprensión de los números decimales o (iii) el conocimiento de las unidades de medida para medir magnitudes. Se reconoce que una forma para mejorar esta situación, depende en gran medida, de las oportunidades que tengan los estudiantes fuera del contexto escolar, al enfrentarse a situaciones en el uso del dinero o realizando cálculos propios de su entorno social.

5.5. Reflexiones finales

El trabajo de tesis, ayudó a reconocer la importancia del diseño de tareas contextualizadas y lúdicas, estas actividades favorecen en los estudiantes, el entendimiento de las ideas matemáticas. Además, permitió reconocer la relevancia de los contextos extraescolares para relacionar las ideas previas, con los conocimientos matemáticos contenidos en el currículo escolar. También, concluimos que los estudiantes son capaces de generar sus propias estrategias de cálculo, al compartir comentarios con sus compañeros, al reflexionar sobre esas ideas y proponer ajustes o modificaciones a sus propias estrategias y la de los otros. Es decir, no es necesario que el profesor proponga todas las estrategias para que los estudiantes solamente desarrollen fluidez en la aplicación de estas, sino, motivar su creatividad para que puedan construir y justificar sus propias ideas matemáticas.

Los contextos de colaboración y competencia, generan situaciones de reconocimiento social, a las capacidades intelectuales de estudiantes que en los cursos regulares son identificados como estudiantes de bajo rendimiento académico. Este aspecto de valoración resultó un aliciente para que estos estudiantes se involucraran con interés en el desarrollo de las tareas, lo que refuerza la idea de que, todo individuo es capaz de aprender independientemente de la forma de enseñanza.

En las actividades lúdicas, además de aplicar las estrategias de cálculo mental, los estudiantes desarrollaron otras habilidades, como: la solidaridad para obtener éxito en sus actividades a favor de su equipo, el sentido de pertenencia a un grupo de estudiantes con capacidades y estilos de aprendizaje diversos y a respetar reglas y ejecutar indicaciones. El juego como tal, les ayudó a encontrar diferentes maneras de interactuar con las operaciones y los números.

El cálculo mental, es una habilidad, que no solo permitió desarrollar flexibilidad en los cálculos aritméticos. También, favoreció a que los estudiantes mejoraran su capacidad para argumentar sus procedimientos de solución a los diversos planteamientos. Esta habilidad de poder verbalizar sus razonamientos permite a los docentes identificar sus fortalezas y debilidades en el desarrollo de su sentido numérico.

REFERENCIAS

Barrera- Mora, F. y Reyes -Rodríguez, A. (2013). *Elementos didácticos y resolución de problemas: formación docente en matemáticas.* Pachuca: UAEH.

Barrera-Mora, F. y Reyes-Rodríguez, A. (2016). Designing Technology-Based Tasks for Enhancing Mathematical Understanding Through Problem Solving. *In L. Uden et al. (eds.) International Workshop on Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 183-192). Cham: Springer International Publishing.

Benítez, A. (2011). La importancia de los eventos contextualizados en el desarrollo de competencias matemáticas. *En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 51-59). México, D.F: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense implications for children with mathematical disabilities. *Journal of learning disabilities*, *38*(4), 333-339.

Common Core State Standards Initiative. (2010). Common core state standards for mathematics. *http://www. corestandards. org/assets/CCSSI_Math% 20Standards. pdf*.

Cortes, J, Backoff, E y Organista, J. (2004). Estrategias de cálculo mental utilizadas por estudiantes del nivel secundaria de Baja California. *Educación Matemática*, 16, 149-168.

Dougherty, J. E. (1993). *Teorías en pugna en las relaciones internacionales*. Buenos Aires: Grupo Editorial Latinoamericano.

Framit-Sánchez R.M. (2014). *Algoritmos en operaciones básicas: alternativas, materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Trabajo Fin de grado de Educación Primaria, Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada, Granada, España.

García, S. (2014). *Materiales para apoyar la práctica educativa. Sentido numérico*. México: INEE.

Gómez, B. (2005). La enseñanza del cálculo mental. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (4), 17-29.

Gómez, B. (1998) *Numeración y cálculo*. España: Síntesis.

Guerrero, T,H. (2015). *Evaluación de conocimientos sobre Esperanza Matemática y juegos equitativos en alumnos de Bachillerato*. Trabajo Fin de Máster, Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, Granada, España.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM*, *37*(6), 457-467.

Morales, J. J. F. (2013). Actividades contextualizadas: una opción metodológica para fomentar la verbalización estudiantil. *Revista Científica FAREM-Estelí*, *2*(7), 1-15.

Mulligan, J., y Mitchelmore, M. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 309-330

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*, *Vol. 1*. Restón, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Negrete-Rodrigo, P. (2013). *La "flexibilidad" en la educación matemática*. Trabajo de fin de Máster en Formación de Profesorado de Secundaria, Universidad de Cantabria, Santander, Cantabria, España.

Rockwell, E., Candela, A., Carvajal, A., et al. (1993). *Dialogar y descubrir: libro de juegos: niveles I, II y III*. México, D.F.: Consejo Nacional de Fomento Educativo.

Schoenfeld, A. "Reflections on doing and teaching mathematics" en Schoenfeld, Alan, editor, *Mathematical thinking and problem solving*. New Jersey, Lawrence Erlbaum, 1994, pp. 53-70.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Planes y programas de Estudio de Educación Secundaria* disponible en http://basica.sep.gob.mx/dgdc/sitio/pdf/PlanEdu2011.pdf.

Simon, M. A., y Scheffer, D. (1991). Towards a constructivist perspective: An intervention study of mathematics teacher development. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(4), 309-331.

Simon, M. A. (1994). Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. *Educational studies in mathematics*, *26*(1), 71-94.

Stake, R.E. (2010). Qualitative research: *Studying how things work*. New York: The Guilford Press.

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, *240*(29), 616.

Stein M. K., Grover B. W. y Henningsen M. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Task Used in Reform Classrooms. *American Educational Research Association*, 33(2), 455-488.

Swan, P. y Sparrow, L. (2001). Strategies for going mental. *The Australian Association of Mathematics Teachers Inc.*, 236.

Tsao, Y. L. y Lin, Y. C. (2011). The study of number sense and teaching practice. *Journal of Case Studies in Education*, 2, 1-14.

Valencia, E. (2013). Desarrollo del cálculo mental a partir de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *84*, 5-23.

Yang, D. C., y Hsu, C. J. (2009). Teaching number sense for 6th graders in Taiwan. *IEJME –Mathematics Education*, *2*, 92-109.

APÉNDICE A. OFICIO DE AUTORIZACIÓN PARA QUE LOS ESTUDIANTES PARTICIPARAN EN EL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN.

El Tezoyo, Apan, Hidalgo a 9 de enero de 2017.

ESTIMADOS PADRES DE FAMILIA

Como es de su conocimiento el Profesor José Guadalupe Mendoza Hernández, adscrito a esta escuela: Telesecundaria 406, con C.C.T. 13DTV0347R; a cargo del segundo grado, está cursando la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica y como parte de la realización de su tesis, requiere hacer un proyecto de investigación en el que debe grabar en video algunas actividades que realizará con sus hijos.

Por este motivo me dirijo a ustedes con el propósito de solicitar su autorización y, para tal efecto les pido por favor llenar y devolver el día miércoles el talón que aparece al calce de la presente circular.

Es importante que sepa que estos videos se utilizaran exclusivamente para fines de investigación y serán revisados solo por el profesor y los directores de tesis de la UAEH, respetando íntegramente la identidad de los estudiantes, asignándoles un seudónimo.

Sin más por el momento, quedo de ustedes.

Profa. María de los Ángeles Aguilar Amador

____
Directora

Autorizo a mi hijo (a) ____ del _____ grado, para que participe en el proyecto de investigación del Profesor José Guadalupe Mendoza Hernández.

Nombre del Padre: _________________________________Firma: _______________

APÉNDICE B. HOJAS DE CONTROL PARA LA ACTIVIDAD DE LA TIENDA DEPARTAMENTAL.

Nombre del comprador: ____

Hoja de control de compras		
Monto disponible: ________ Artículo: ________________ % de descto.: ___________ Precio: ___________ Saldo:_______________	Monto disponible: ________ Artículo: ________________ % de descto.: ___________ Precio: ___________ Saldo:_______________	Monto disponible: ________ Artículo: ________________ % de descto.: ___________ Precio: ___________ Saldo:_______________
Monto disponible: ________ Artículo: ________________ % de descto.: ___________ Precio: ___________ Saldo:_______________	Monto disponible: ________ Artículo: ________________ % de descto.: ___________ Precio: ___________ Saldo:_______________	Monto disponible: ________ Artículo: ________________ % de descto.: ___________ Precio: ___________ Saldo:_______________
Monto disponible: ________ Artículo: ________________ % de descto.: ___________ Precio: ___________ Saldo:_______________	Monto disponible: ________ Artículo: ________________ % de descto.: ___________ Precio: ___________ Saldo:_______________	Monto disponible: ________ Artículo: ________________ % de descto.: ___________ Precio: ___________ Saldo:_______________

Nombre del vendedor: ____

Hoja de registro de control de ventas					
No de venta	**Artículo vendido**	**Precio original**	**Venta de oferta**		**Total a pagar**
			% de descto.	**Monto de descto.**	
TOTALES					

Nombre del cajero: ____

Hoja de reporte de caja					
No. de venta	**Artículo vendido**	**Cantidad**	**Precio unitario**	**Monto de la venta**	**Saldo**
Totales					

Inventario para control de almacén

No Art.	Nombre del artículo	Clasificación	U. medida	Existencia	precio	artículos vendidos	cantidad final existente
1	botella de agua de 600	comida	pza.	1	10		
2	enciclopedias milenios	cultura	pza.	3	900		
3	balón de voleibol	deporte	pza.	1	180		
4	balón de fútbol	deporte	pza.	2	220		
5	balón de basquetbol	deporte	pza.	3	230		
6	Películas	pelis	pza.	5	15.5		
7	Encendedor	regalos	pza.	1	15.5		
8	Lapicera	regalos	pza.	1	42.5		
9	Alcancía	regalos	pza.	1	42.5		
10	Cartera	regalos	pza.	1	115		
11	bolsa de mano	regalos	pza.	1	135		
12	Reloj	regalos	pza.	1	150		
13	cinturón para dama	ropa	pza.	1	100		
14	short de mezclilla para niño	ropa	pza.	1	100		
15	camiseta verde	ropa	pza.	6	115		
16	blusa verde para mujer	ropa	pza.	7	125		
17	falda color gris	ropa	pza.	1	130		
18	playera color vino	ropa	pza.	6	135		
19	pantalón para niño	ropa	pza.	1	150		
20	suéter para niño	ropa	pza.	1	180		
21	pants color mostaza	ropa	juego	1	190		
22	suéter de cuello alto	ropa	pza.	1	190		
23	uniforme para niño	ropa	juego	1	195		
24	capa para niña	ropa	pza.	1	195		

25	sudadera para niña	ropa	pza.	2	215		
26	camisa para adulto	ropa	pza.	2	220		
27	pantalón para adulto	ropa	pza.	1	230		
28	chaleco militar para niño	ropa	pza.	3	240		
29	pantalón de vestir	ropa	pza.	1	260		
30	chamarra verde	ropa	pza.	1	265		
31	vestido de colores	ropa	pza.	5	280		
32	chip de celular	tecnología	pza.	2	100		
33	celular Lanix	tecnología	pza.	1	500		
34	celular FZ	tecnología	pza.	1	500		
35	celular Motorola	tecnología	pza.	1	500		
36	celular simtop	tecnología	pza.	1	700		
37	celular ZTE	tecnología	pza.	1	700		
38	celular boots mobile	tecnología	pza.	1	700		
39	celular FZ	tecnología	pza.	1	900		
40	celular Motorola	tecnología	pza.	1	1400		
41	celular ZTE	tecnología	pza.	1	1400		
42	tableta CELMI	tecnología	pza.	1	1500		
43	tableta CRA	tecnología	pza.	1	1600		
44	celular Inco	tecnología	pza.	1	1800		
45	zapatos para niña	zapatos	par	1	240		
46	tenis para niño	zapatos	par	1	290		
47	botas café para dama	zapatos	par	1	345		
48	zapatillas para dama	zapatos	par	2	345		

APÉNDICE C. TARJETAS PARA EL JUEGO "FORMANDO PAREJAS" DEL RALLY MATEMÁTICO.

315 Más 245	560
800 Menos 465	335
500 Menos 378	122
426 Más 124	550
700 Menos 395	305
125 X 20	2500
160 X 15	2400
105 + 210 335	650
1000 Menos 585	415
75 X 22	1650

APÉNDICE D. TARJETAS CON PROBLEMAS PARA EL JUEGO "CARRERA CONTRA LA IGNORANCIA" DEL RALLY MATEMÁTICO.

Un kilo de plátanos cuesta 8.50 pesos. ¿Cuánto se pagan por 4 kilos? **Respuesta:** 34 pesos **Valor dos puntos**: 2 puntos	Un trabajador tiene que hacer una zanja de 7 metros de largo, el primer día hizo 3.5 metros y el segundo día lleva 2 metros con 40 centímetros. ¿Cuántos centímetros le faltan para terminar la zanja? **Respuesta:** 110 centímetros **Valor dos puntos**: 2 puntos
Un camión debe realizar un viaje de 3 horas y cuarto de hora. ¿Cuántos minutos le faltan si lleva un avance de 2.5 horas? **Respuesta:** 45 minutos **Valor dos puntos**: 2 puntos	Un bote tiene 2.5 litros de pintura. ¿Cuántas botellas de ¼ de litro se pueden llenar con toda esa pintura? **Respuesta:** 10 botellas **Valor dos puntos**: 2 puntos
Un señor tiene que pagar en la tienda 125.50 pesos, si paga con un billete de 200 pesos. ¿Cuánto dinero le sobra? **Respuesta:** 74.50 pesos **Valor dos puntos**: 2 puntos	Un señor vende kilos de fresa a 24 pesos, ¿Cuánto gano si en un día vendió 10.5 kilos? **Respuesta:** 152 pesos **Valor dos puntos**: 2 puntos
Una canción dura 3.5 minutos en promedio, cuantos minutos habrán transcurrido después de 12 canciones **Opciones:** A) 35 minutos, B) 42 minutos C) 45 minutos **Valor dos puntos**: 2 puntos	20 bultos de cemento son igual a una tonelada. ¿Cuántos bultos de cemento hay en una camioneta llena de 3 toneladas y media? **Opciones:** A) 70 bultos, B) 60 bultos C) 50 bultos **Valor dos puntos**: 2 puntos

Las estaturas de tres niños son: Perla 1.2 metros, Said 1.35 metros y Karla 1.18 metros. ¿Quién tiene menor estatura? **Opciones:** A) Perla, B) Said C) Karla **Valor dos puntos**: 2 puntos	Una niña tiene que tomar 25 ml. de un jarabe, dos veces al día, si compra una botella de 250 mililitros. ¿Para cuantos días le alcanza el jarabe? **Opciones:** A) 5 días, B) 4 días C) 6 días **Valor dos puntos**: 2 puntos
Una madre de familia compra un vestido de 315 pesos y una chamarra de 265 pesos. ¿Cuánto dinero debe pagar por las dos prendas? **Opciones:** A) 480 pesos, B) 580 pesos C) 570 pesos **Valor dos puntos**: 2 puntos	Un estudiante gasta 15 pesos de pasaje ida y vuelta a su escuela diariamente. ¿Cuánto gastara en 14 días? **Opciones:** A) 165 pesos, B) 180 pesos C) 210 pesos **Valor dos puntos**: 2 puntos
Un pantalón cuesta 450 pesos, y tiene un descuento del 10%. ¿Cuánto cuesta realmente el pantalón? **Respuesta:** 405 pesos **Valor dos puntos**: 2 puntos	Un señor tiene que pagar en la tienda de ropa 468 pesos, si paga con tres billetes de 200. ¿Cuánto dinero le sobra? **Respuesta:** 132 pesos **Valor dos puntos**: 2 puntos
Un litro de pintura cuesta 65 pesos, ¿cuánto se pagará por 2.5 litros? **Respuesta:** 162.5 pesos **Valor dos puntos**: 2 puntos	Un niño lleva 13 decímetros de listón. ¿Cuántos centímetros le faltan para alcanzar los 2.5 metros? **Respuesta:** 120 centímetros. **Valor dos puntos**: 2 puntos

APÉNDICE E. TARJETA DE SEGUIMIENTO Y CONTROL DE PUNTOS DEL RALLY MATEMÁTICO.

Tarjeta de Seguimiento y control de puntos del rally matemático

Nombre del equipo: ___________________________________

Actividad	Resultado	Puntaje
Primer Reto matemático: Formando parejas	Pares correctos: ______	Puntos obtenidos:_______
Segundo Reto Matemático: Las torres de operaciones	1ª. Torre: _______ 2ª Torre: ________ Lugar:__________________	Puntos obtenidos:_______
Tercer Reto matemático: El Basta numérico	Puntos por ronda: 1ª:_______, 2ª:______, 3ª: _______ y 4ª: ______ Lugar:__________________	Puntos obtenidos:_______
Cuarto Reto matemático: Carrera contra la ignorancia	Lugar:__________________	Puntos obtenidos:_______
	Total:	

Primer lugar: 20 puntos

Segundo lugar: 15 puntos

Tercer lugar: 10 puntos

Cuarto lugar: 5 puntos

Docente encargado del seguimiento y control: __________________________________

APÉNDICE F. EVIDENCIAS DE LOS ESTUDIANTES DEL USO DE LAS ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL EN EL RALLY MATEMÁTICO.

a) Evidencia de una estudiante que participó en “el rally matemático” que utilizó de manera eficiente las estrategias de cálculo mental y que obtuvo resultados satisfactorios.

El Basta numérico.

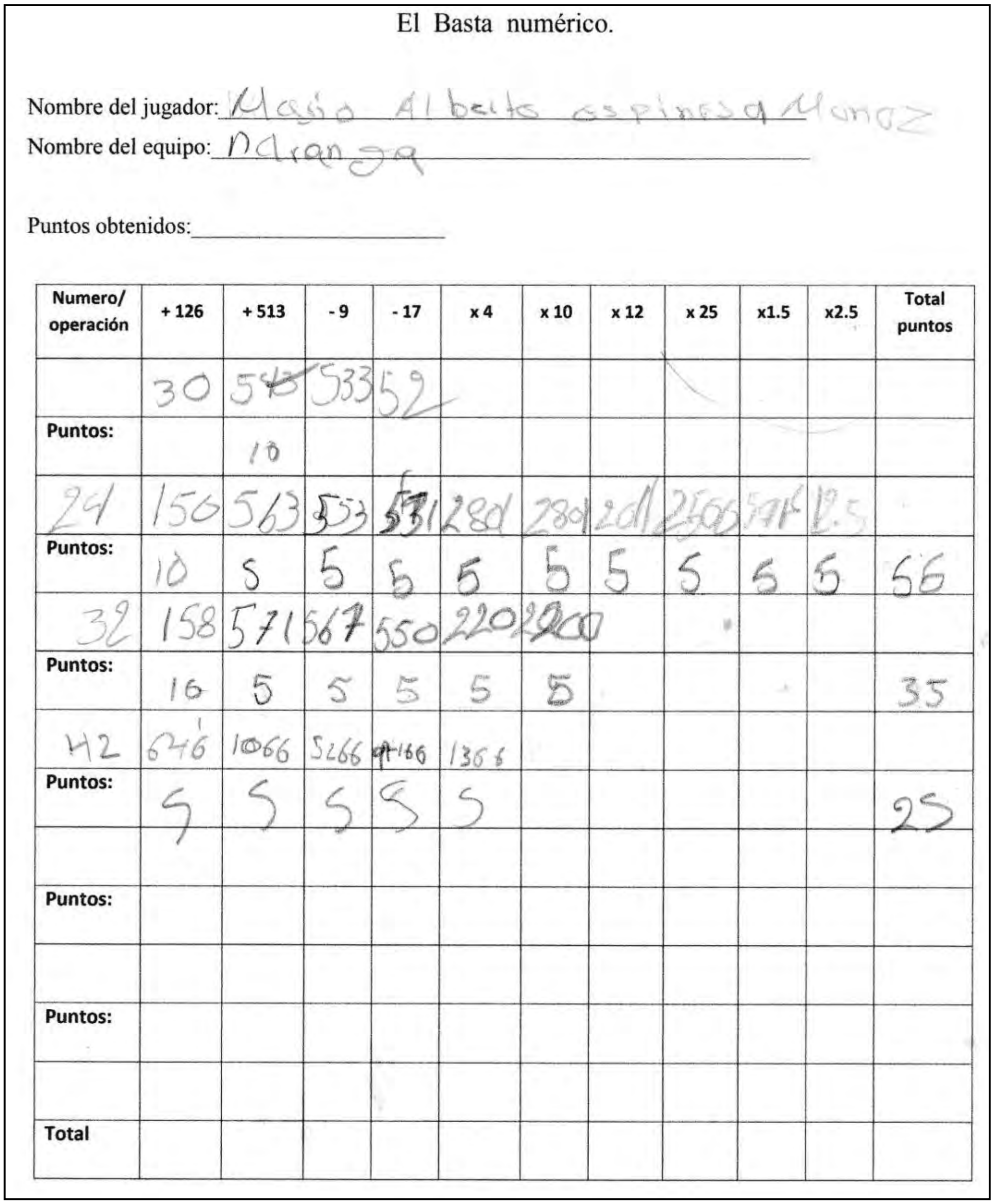
Nombre del jugador: Abril Victoria Gotierrez S.

Nombre del equipo: rosa.

Puntos obtenidos: ____________________

Numero/ operación	+ 126	+ 513	- 9	- 17	x 4	x 10	x 12	x 25	x1.5	x2.5	Total puntos
30	150	543	21	13	120	300	360	750	45	75	1
Puntos:	15	10	10	10	10	10	10	10	10	10	95
32	158	545	23	15	128	320	384	800	48	80	1
Puntos:	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100
50	176	563	41	33	200	500	600	1250	75	125	
Puntos:	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100
42	168	555	33	25	168	420	504	1050	63	105	
Puntos:	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100
Puntos:											
Puntos:											
Total											

b) Evidencia de un estudiante que participó en “el rally matemático” que solamente escribió resultados de manera intuitiva, sin realizar cálculos o usar estrategias de cálculo mental.


El Basta numérico.

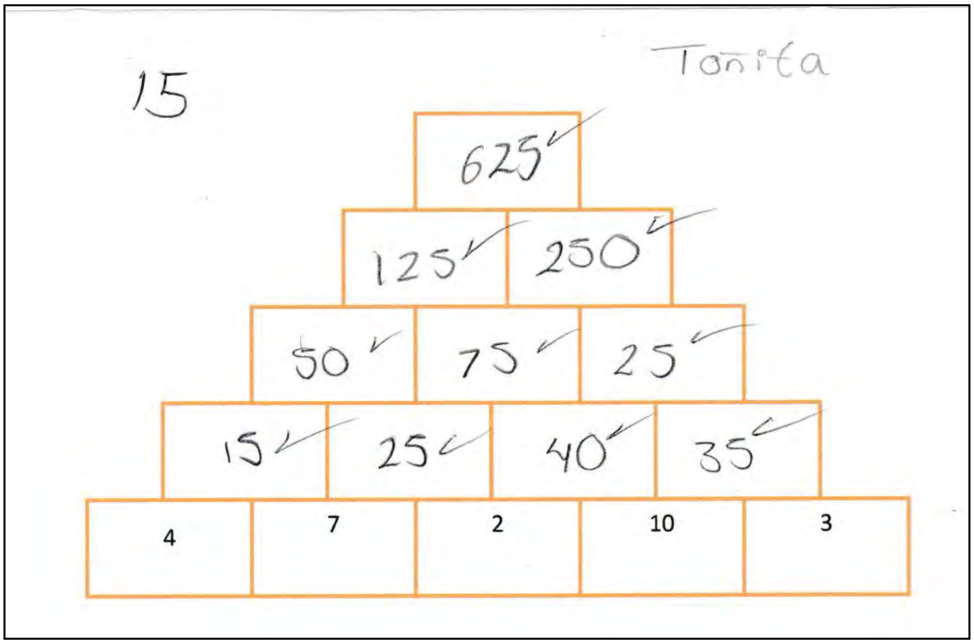
Nombre del jugador: Mario Alberto espinosa Munoz

Nombre del equipo: naranja

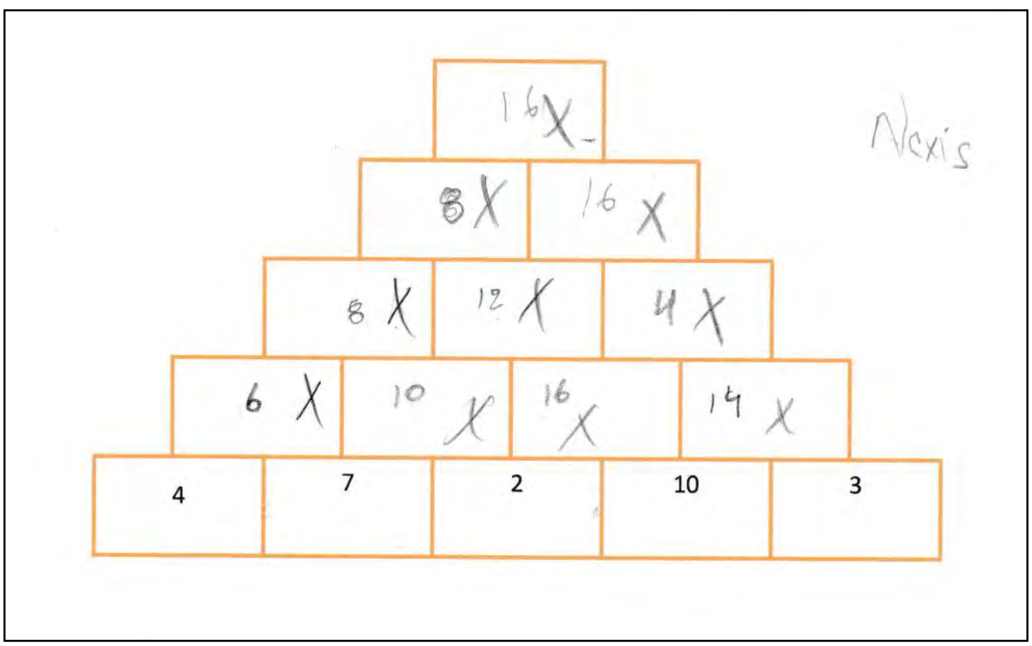
Puntos obtenidos:______________________

Numero/ operación	+ 126	+ 513	- 9	- 17	x 4	x 10	x 12	x 25	x1.5	x2.5	Total puntos
	30	543	533	52							
Puntos:		10									
24	156	563	553	531	280	280	201	2500	594	12.5	
Puntos:	10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	56
32	158	571	567	550	220	2200					
Puntos:	16	5	5	5	5	5					35
42	646	1066	5266	4166	1366						
Puntos:	5	5	5	5	5						25
Puntos:											
Puntos:											
Total											

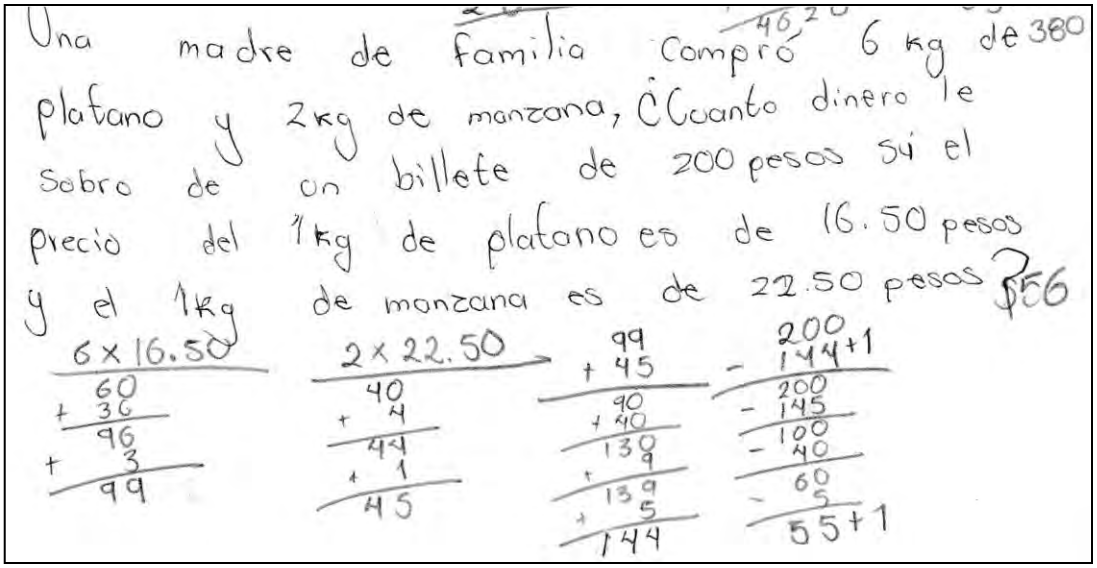
c) Evidencia de una estudiante que participó en el reto “las torres de operaciones”, donde utilizó de manera eficiente las estrategias de cálculo mental para obtener resultados satisfactorios.



d) Evidencia de un estudiante que participó en el reto “las torres de operaciones”, donde no se utilizaron estrategias de cálculo mental y solo se escribieron resultados de manera intuitiva.



e) Evidencia de un estudiante que resolvió un planteamiento de matemáticas utilizando estrategias de cálculo mental para la multiplicación con números decimales y suma por el valor posicional del número.


Una madre de familia Compró 6 kg de platano y 2 kg de manzana, ¿Cuanto dinero le Sobro de un billete de 200 pesos si el precio del 1 kg de platano es de 16.50 pesos y el 1 kg de manzana es de 22.50 pesos? $56

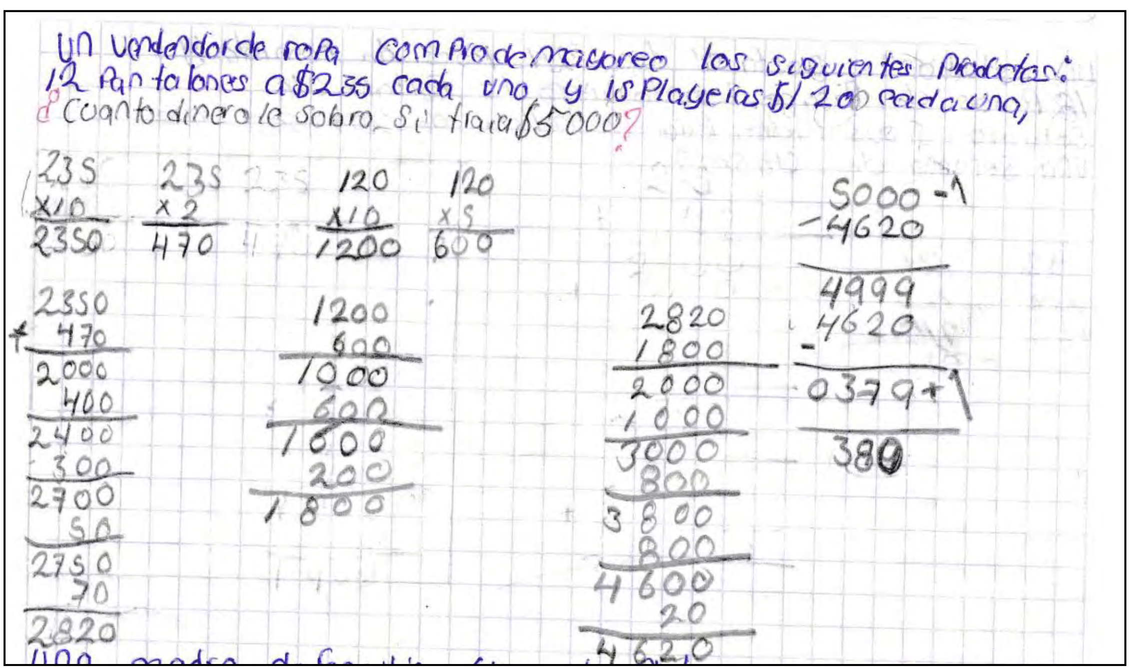
6 × 16.50
60
+ 36
96
+ 3
99

2 × 22.50
40
+ 4
44
+ 1
45

99
+ 45
90
+ 40
130
+ 9
139
+ 5
144

200
− 144 +1
200
− 145
100
− 40
60
− 5
55 +1

f) Evidencia de un estudiante que resolvió un planteamiento de matemáticas utilizando estrategias de cálculo mental para la multiplicación, suma por el valor posicional del número y cambio de resta que requiere reagrupación a resta que no requiere reagrupación.


Un vendendor de ropa compro de mayoreo los siguientes productos: 12 Pantalones a $235 cada uno y 15 Playeras $120 cada una, ¿Cuanto dinero le sobro si traia $5000?

235 × 10 = 2350
235 × 2 = 470
120 × 10 = 1200
120 × 5 = 600

2350
+ 470
2000
400
2400
300
2700
50
2750
70
2820

1200
600
1000
600
1600
200
1800

2820
1800
2000
1000
3000
800
3800
800
4600
20
4620

5000 −1
− 4620
4999
− 4620
0379 +1
380

APÉNDICE G. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS.

La teoría de los juegos se basa en una forma abstracta de razonamiento, que surge de una combinación de la matemática y la lógica. Casi todos los teóricos de los juegos coincidirían en que la teoría con la cual se manejan aborda lo que es el comportamiento "racionalmente correcto" en situaciones de conflicto, en las cuales los participantes están intentando "ganar", más que la forma en que los individuos se comportan concretamente en situaciones de conflicto; es decir, se espera que cuando un estudiante participe en un juego de competencia, razone matemáticamente para intentar obtener los mejores resultados.

Todo juego se caracteriza por los siguientes elementos: jugadores que supuestamente están tratando de ganar u optimizar los resultados; las transacciones que pueden significar diversas cosas para diferentes jugadores según sus sistemas de valores; un conjunto de reglas de campo adecuadas al juego; condiciones de información que determinan la cantidad y calidad del conocimiento que cada jugador tiene del entorno y de las elecciones hechas por el otro jugador y el entorno total en el cual se juega, percibido totalmente o no por los jugadores.

Juegos de suma cero

La distinción preliminar más comúnmente trazada en la teoría de los juegos es entre un juego de suma cero y un juego de suma no cero, con variaciones en cada uno. En un juego de suma cero entre un jugador A y un jugador B, lo que A gana lo pierde B. El ajedrez, las damas, el póker de dos· o el "blackjack" son todos juegos de suma cero. Cada partido termina con uno de los jugadores que tiene el marcador con más uno y el otro menos uno, y el valor de "uno" para el partido depende de las "apuestas" y el tamaño del "pozo".

En la mayoría de la bibliografía sobre el tema, los juegos se representan esquemáticamente de una forma "normalizada" en la cual no se dan detalles del juego, pero donde las decisiones de cada jugador y las recompensas que las acompañan se describen en un esquema. Más aún, los valores de la recompensa a menudo se asignan de una forma puramente arbitraria.

ESQUEMA I		
Puntos para el jugador 1	Gana la partida	+1
	Pierde la partida	-1
Puntos para el jugador 2	Gana la partida	+1
	Pierde la partida	-1

Con el esquema anterior podemos decir, que en el caso del juego "el basta numérico" que se propone en este trabajo de investigación, en cada partida donde se enfrentan los jugadores de un equipo contra los jugadores de otro equipo; los puntos que gana un equipo es igual a los puntos que pierde el otro equipo.

Juegos de suma no cero

Los juegos de suma no cero son aquellos en los cuales la suma de las ganancias de los jugadores no debe ser cero. La suma de ganancias y pérdidas no necesita ser cero, hay espacio en este tipo de juego para elementos tanto de conflicto como de cooperación: en algunos juegos, ambas o algunas de las partes pueden ganar, y al final del juego ambas o varias partes pueden estar adelante con cantidades diferentes. En el juego de suma no cero hay a menudo varias recompensas diferentes, algunas de las cuales pueden ser muy buenas o muy malas.

ESQUEMA II		
Puntos para el jugador 1	Resultado correcto	+3
	No contesta	0
	Resultado incorrecto	-3
Puntos para el jugador 2	Resultado correcto	+3
	No contesta	0
	Resultado incorrecto	-3

El esquema anterior ilustra de mejor manera la asignación de recompensas que obtiene cada jugador al participar en el juego del "basta numérico", donde los puntos que obtiene cada jugador no representan precisamente las pérdidas del otro jugador; es decir que, si un jugador obtiene 9 resultados correctos y un resultado incorrecto, en los ejercicios de cálculo mental que se le plantean, habrá ganado 27 puntos y perdido 3 puntos, obteniendo un total de 24 puntos. Y si el jugador contra el que compite obtiene 5 resultados correctos y 3 resultados incorrectos, habrá ganado 15 puntos y perdido 9 puntos, obteniendo un total de 6 puntos.

En este juego donde inicialmente se había asignado la siguiente puntuación: 10 puntos por cada resultado correcto, 5 puntos por cada resultado incorrecto y 0 puntos por no contestar, algunos alumnos aprovecharon estas bondades de la puntuación para escribir de manera aleatoria resultados incorrectos y ganar puntos adicionales (5 puntos por cada resultado) sin el mínimo esfuerzo cognitivo.

La esperanza matemática de un alumno que juega el azar es cero, como esperanza matemática entendemos a la suma del producto de la probabilidad de cada suceso por el valor de dicho suceso (Guerrero, 2015), se calcula como:

$$E(x) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_i \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

En el caso del alumno que escribe resultados aleatorios en el juego del “basta numérico”, su esperanza matemática se calcula de la siguiente manera:

Resultado correcto: +3 ***Resultado incorrecto -3***

X = (+3, -3)

E(X) = 3*1/3+ (-3)*1/3

E(X) = 3/3 – 3/3 = 0