Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Centro de Investigación en Matemáticas

Familias independientes: cardinalidad y estructura

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Carlos López Callejas

Bajo la dirección de

Ricardo Cruz Castillo (UAEH)

Fernando Hernández Hernández (UMSNH)

Pachuca, Hidalgo. Septiembre de 2018

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Centro de Investigación en Matemáticas

Familias independientes: cardinalidad y estructura

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Carlos López Callejas

Bajo la dirección de

Ricardo Cruz Castillo (UAEH)

Fernando Hernández Hernández (UMSNH)

Pachuca, Hidalgo. Septiembre de 2018

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Institute of Basic Sciences and Engineering

Área Académica de Matemáticas y Física
Mathematics and Physics Department

Carlos López Callejas
P R E S E N T E

Por este conducto le comunico que el Jurado que le fue asignado a su trabajo de tesis titulado *Familias independientes: cardinalidad y estructura*, después de revisarlo en reunión han decidido autorizar la impresión del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.
A continuación se anotan las firmas de conformidad de los integrantes del Jurado:

Presidente: Dr. Fernando Barrera Mora

Secretario: Dr. Raúl Temoltzi Ávila

Primer Vocal: Dra. Rocío Leonel Gómez

Segundo Vocal: Dr. Fernando Hernández Hernández

Tercer Vocal: Dr. Ricardo Cruz Castillo

Primer Suplente: Dr. Jorge Viveros

Segundo Suplente: Dr. Arturo Criollo Pérez

Atentamente,
Amor, Orden y Progreso
Mineral de la Reforma, Hidalgo, a 24 de agosto de 2018.

Dr. Rafael Villarroel Flores
Secretario del Comité de Titulación
de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Ciudad del Conocimiento
Carretera Pachuca – Tulancingo Km. 4.5
Colonia Carboneras
Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C.P. 42184
Tel. +52 771 7172000 exts. 6164, Fax 2109
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx

www.uaeh.edu.mx

Was aus Liebe getan wird,
geschieht immer jenseits von Gut und Böse.

Friedrich Nietzsche.

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a mis dos asesores, Fernando y Ricardo, con quienes he compartido este trabajo, el más difícil y gratificante que he hecho en mi vida, agradezco su paciencia y su entrega hacía mi desarrollo como matemático, gracias también por mostrarme tantos caminos y por ayudarme a empezar a recorrerlos, ustedes dos han sido una infinita fuente de inspiración y ánimo para mí. Agradezco también a los sinodales por sus valiosas observaciones, algunas de las cuales yo no podría haber notado y que sin duda han ayudado a completar el trabajo; asimismo agradezco a todos aquellos amigos que han leído versiones parciales de mi tesis y que me han ayudado a encontrar las palabras adecuadas para expresar mis ideas: su apoyo ha sido invaluable.

Por otro lado, quiero agradecer a mis compañeros y amigos de la universidad, principalmente a Julio y a Iván, quienes han propiciado que mi transcurrir en la licenciatura haya sido un poco más ligero y mucho más divertido. Por último doy gracias a las tres personas más importantes de mi vida, a mi hermano por ser mi mejor amigo y a mis padres por darme la libertad y la sabiduría para elegir mi vida, por impulsarme y por todo su amor. En todo lo que hago están ustedes.

Índice general

Prefacio

Desde el origen de las matemáticas éstas han tenido por objeto de estudio a los números naturales, pues desde los primeros días del hombre éste se dio cuenta de su necesidad de *contar* las cosas que le rodeaban, y es que algo muy propio al hombre es que tiene la capacidad (y la curiosidad) de darse cuenta del tamaño de las cosas: cuando ve algo por primera vez o percibe un nuevo hecho casi instintivamente piensa en el *tamaño* del objeto o del hecho en cuestión. Podría decirse que *contar* es algo natural en el hombre, además de ser algo que lo motiva y que en la mayoría de los casos, el conocer el tamaño de los objetos le da una idea más clara de la naturaleza de estos.

Entonces no es de sorprender que durante gran parte de la historia uno de los principales objetivos prácticos (y luego intelectuales) del hombre haya sido estudiar el tamaño de los objetos. Gracias a la necesidad de contar (y de medir) es que surgieron los números enteros, luego los racionales y por último los números reales; en este punto se creía que se podía contar todo. Sin embargo, en algún momento los matemáticos se dieron cuenta de algunos hechos curiosos relacionados con los objetos *infinitos*, como por ejemplo que hay más números reales que números naturales, y a su vez que hay más subconjuntos de números reales que números reales, entonces es que surgió la necesidad de crear más objetos que representaran el tamaño de las cosas: así surgió la teoría de cardinales.

En la actualidad, cuando se piensa en un objeto matemático abstracto, los teóricos de conjuntos casi siempre se preguntan sobre el tamaño (o los posibles tamaños) de éste. A esta prueba se somete casi cualquier *estructura* de las matemáticas modernas; y siempre se inicia con la pregunta de: ¿Cuántos elementos tiene dicho objeto? Gracias a un análisis cuidadoso es que nos damos cuenta, por ejemplo, que hay tantos números pares como impares, tantos números racionales como enteros o tantos números trascendentes como números reales. Cuando uno conoce cuántos objetos satisfacen una propiedad, inmediatamente queremos saber más y es por ello que normalmente pensamos en otra propiedad y ahora nos preguntamos cuantos objetos cumplen la propiedad original y la nueva en la que hemos pensado. Algunas propiedades son más interesantes que otras, en este trabajo abordamos una propiedad que consideramos particularmente interesante: la *independencia*.

Recordemos que en probabilidad se dice que dos conjuntos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; esta misma idea se puede extender a un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Resulta que las familias independientes son precisamente colecciones de conjuntos que son independientes en este sentido, pues para un espacio de medida adecuadamente definido, sus elementos satisfacen que $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ y además no sólo son *independientes a pares*, sino que en realidad la familia satisface una propiedad de independencia más general. Interpretando convenientemente lo anterior se sigue que, intuitivamente, una familia es independiente si *se intersecta en todas partes*.

Es así que el objetivo principal de este trabajo es estudiar dichas familias. Presentamos a las familias independientes como una estructura de subconjuntos de un conjunto dado, probamos su existencia y propiedades relacionadas con su cardinalidad, entre las que se incluye el estudio de las familias independientes *grandes*, las familias independientes maximales además de la relación entre éstas y la Hipótesis del Continuo; asimismo estudiamos la relación que el concepto de familia independiente tiene con otros objetos bien estudiados de las matemáticas, como los ultrafiltros, las topologías y los ideales.

Acompañada a la noción de independencia va la de ser *casi disjunto* y, a diferencia de la primera, ser casi disjunto es una propiedad un tanto más *simple*, es por esta razón que el trabajo comienza con un breve estudio de las familias casi disjuntas. Además de tener un sentido *per se* (sobre todo un sentido topológico que se puede consultar en [12]), las familias casi disjuntas son importantes porque el entendimiento de estas puede facilitar el de otras estructuras más complejas y *menos intuitivas*, como lo son las familias independientes.

Una primera muestra de que las familias independientes son objetos ricos en estructura es el hecho de que se pueden construir familias independientes *grandes* de muchas formas: en el capítulo dos se exhiben siete pruebas distintas de la existencia de dichas familias sobre el conjunto de los números naturales y dos pruebas distintas para cuando se piensa en familias independientes sobre cualquier cardinal infinito; además se muestra que la existencia de familias independientes grandes tiene consecuencias muy interesantes, entre las que se incluyen, la existencia de *muchos* ultrafiltros y *muchas* topologías.

En el capítulo tres analizamos las propiedades y el tamaño de familias independientes que cumplen cierta propiedad adicional de *selectividad* o de *maximalidad*, y puesto que algunas de estas propiedades resultan ser *muy fuertes*, la existencia de algunas de estas nuevas familias ya no se puede garantizar en ZFC, sin embargo exponemos una prueba de que la Hipótesis del Continuo sí implica su existencia.

En los dos últimos capítulos demostramos que existe una relación entre las familias independientes y otras estructuras que en principio no están obviamente relacionadas, y damos muestra de que esta comparación permite darnos una mejor idea de la *forma* y el tamaño de algunas familias independientes específicas.

Este trabajo está basado ampliamente en los propios de Geschke [7] (capítulos 2 y 3) y de Perron [15] (capítulos 4, 5 y 6). Sin embargo se han completado detalladamente las demostraciones, remarcando algunos aspectos que creemos son necesarios para su entendimiento. En particular, tanto para los Teoremas 2.3 y 2.26 como para el Lema 3.41 proporcionamos pruebas alternativas.

Capítulo 1

Familias casi disjuntas

Una de las justificaciones para preguntarse sobre el tamaño de las familias casi disjuntas es el hecho de que éstas surgen como una *adaptación natural* a la idea usual de una partición, pero a diferencia de las particiones, el tamaño de las familias casi disjuntas no está tan restringido. En esta sección mostramos que no solo las familias casi disjuntas sobre los naturales no están obligadas a ser pequeñas, sino que en realidad hay familias casi disjuntas que tienen la cardinalidad del continuo; además estas familias se pueden construir sin usar ningún axioma adicional a ZFC, en particular se puede prescindir de la Hipótesis del Continuo (aunque también se muestra cómo es que ésta implica automáticamente la existencia de dichas familias).

Por otro lado, no debería ser sorprendente, que como las particiones son objetos que se estudian en muchas ramas de las matemáticas, entonces las familias casi disjuntas también son susceptibles a que se les pueda construir de distintos modos; aquí se muestran cuatro demostraciones constructivas muy distintas de la existencia de familias casi disjuntas grandes.

Definición 1.1. *Una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos infinitos de ω es casi disjunta si para cualesquiera $A, B \in \mathscr{F}$ distintos se satisface que $A \cap B$ es finito.*

Ejemplo 1.2. *Se puede verificar que la función $f : \omega \times \omega \to \omega$ dada por $f(m,n) = 2^m(2n+1) - 1$ es biyectiva. Ahora, definiendo $C_n = \{f(m,n) \mid m \in \omega\}$, se tiene que la colección $\mathscr{F} = \{C_n \mid n \in \omega\}$ es una familia casi disjunta (de hecho disjunta).*

Ejemplo 1.3. *Definiendo $C_n = \{p_n^m \mid m \in \omega\}$, donde p_n es el n-ésimo número primo se tiene que la familia $\mathscr{F} = \{C_n \mid n \in \omega\}$ es una familia disjunta, en particular casi disjunta.*

Más en general, si se tiene una sucesión de números naturales $(a_n)_{n\in\omega}$ y definiendo $D_n = C_n \cup a_n$ entonces la familia $\{D_n \mid n \in \omega\}$ es casi disjunta (no necesariamente disjunta).

Ejemplo 1.4. *Sabemos que existe una biyección $f : \mathbb{Q} \to \omega$. Para todo $n \geq 1$ sean $B_n = \{m + \frac{1}{n} \mid m \in \omega\}$ y $A_n = f(B_n)$. Es claro que $\mathscr{F} = \{A_n \mid n \in \omega\}$*

es una familia casi disjunta infinita de subconjuntos de ω, pues los B_n son de hecho disjuntos y la función f es en particular inyectiva.

Lema 1.5. *Para cualquier familia $\mathscr{F}$ casi disjunta numerable existe $A \subseteq \omega$, con $A \notin \mathscr{F}$, tal que A es casi disjunto a todos los elementos de $\mathscr{F}$, es decir, la familia $\mathscr{F}$ se puede extender a otra familia casi disjunta que la contiene propiamente.*

Demostración. Sea $\mathscr{F} = \{A_n \mid n \in \omega\}$ una familia casi disjunta. Primero observemos que para cada $n \in \omega$ el conjunto $\omega \setminus \bigcup_{k \in n} A_k$ es infinito.

Si no fuese así, existiría $n \in \omega$ tal que $B_n = \omega \setminus \bigcup_{k \in n} A_k$ es finito.

Ahora veamos que:

$$A_n = (A_n \cap B_n) \cup \left(A_n \cap \left(\bigcup_{k \in n} A_k \right) \right) = (A_n \cap B_n) \cup \left(\bigcup_{k \in n} (A_n \cap A_k) \right).$$

Pero el primer término de la unión es finito (pues B_n lo es) y el segundo es una unión finita de finitos (pues cada $A_n \cap A_k$ es finito), así resulta que A_n es finito, lo cual es una contradicción.

Así $\omega \setminus \bigcup_{k \in n} A_k$ es infinito para todo $n \in \omega$, por lo tanto podemos elegir una sucesión estrictamente creciente $(a_n)_{n \in \omega}$, con $a_n \in \omega$, tal que $a_n \in \omega \setminus \bigcup_{k \in n} A_k$. Además si $k \in n$, entonces $a_n \notin A_k$, de donde se sigue que para todo $k \in \omega$ el conjunto $A = \{a_n \mid n \in \omega\}$ es casi disjunto a A_k, pues

$$A_k \cap A = (A_k \cap \{a_1, a_2, ..., a_k\}) \cup (A_k \cap \{a_{k+1}, a_{k+2}, ...\}),$$

y el primer término de esta unión es finito (ya que $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ lo es) y el segundo es vacío por la observación del párrafo anterior. Así A es el conjunto buscado. $\square$

Lema 1.6. *Cualquier familia $\mathscr{F}$ casi disjunta de subconjuntos de ω está contenida en una familia casi disjunta maximal.*

Demostración. Sea $\mathscr{H} = \{\mathscr{G} \mid (\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}) \wedge (\mathscr{G}$ es casi disjunta$)\}$. Veamos que $\mathscr{H}$ satisface las condiciones del Lema de Zorn. Primero es claro que $\mathscr{H} \neq \emptyset$, pues $\mathscr{F} \in \mathscr{H}$. Ahora sean $(\mathscr{G}_i)_{i \in I}$ una cadena en $\mathscr{H}$ y $\mathscr{J} = \bigcup_{i \in I} \mathscr{G}_i$; es claro que $\mathscr{J}$ es una cota de la cadena, así lo único que resta verificar es que $\mathscr{J} \in \mathscr{H}$. Para ver esto es suficiente elegir dos elementos distintos $A, B \in \mathscr{J}$ y ver que $A \cap B$ es finito. Sabemos que existen $i_0, i_1 \in I$ tales que $A \in \mathscr{G}_{i_0}$ y $B \in \mathscr{G}_{i_1}$; usando que $(\mathscr{G}_i)_{i \in I}$ es una cadena y eligiendo $i_2 = \text{máx}\{i_0, i_1\}$ se tiene que $A, B \in \mathscr{G}_{i_2}$, pero $\mathscr{G}_{i_2}$ es una familia casi disjunta, por lo tanto $A \cap B$ es finito y entonces $\mathscr{J} \in \mathscr{H}$. Ahora, por el Lema de Zorn, $\mathscr{H}$ admite un elemento maximal, lo cual termina la prueba. $\square$

Corolario 1.7. *Cada familia infinita casi disjunta maximal es no numerable. En particular existe una familia casi disjunta no numerable de subconjuntos de ω.*

Demostración. Por el Lema 1.5 sabemos que ninguna familia casi disjunta numerable es maximal, es decir, si existiese una familia maximal, no es numerable. Ahora para demostrar que existe una de dichas familias basta exhibir una numerable y por el Lema 1.6 ésta estará contenida en una maximal, en particular existirá una maximal. Para esto último basta tomar cualquier familia de los tres ejemplos que se dieron al comienzo de la sección. $\square$

Observe que para que una familia sea casi disjunta no es necesario que su unión sea todo el conjunto de los números naturales. Por ejemplo, para la familia del Ejemplo 1.4 se tiene:

$$\omega \setminus \bigcup_{n\geq 1} f(B_n) = \omega \setminus f\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = f(\mathbb{Q}) \setminus f\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = f\left(\mathbb{Q} \setminus \bigcup_{n\geq 1} B_n\right).$$

Además como $1 \in \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{n\geq 1} B_n$, entonces $f(1) \in f\left(\mathbb{Q} \setminus \bigcup_{n\geq 1} B_n\right)$ y así:

$$\omega \setminus \bigcup_{n\geq 1} f(B_n) \neq \emptyset.$$

Lo que sí podemos decir es que siempre que se tenga una familia casi disjunta $\mathscr{F}$ tal que $\omega\setminus\bigcup\mathscr{F}$ es infinito, $\mathscr{F}$ no es maximal, pues la familia $\mathscr{G} = \mathscr{F} \cup \{\omega\setminus\bigcup\mathscr{F}\}$ es también casi disjunta y contiene propiamente a $\mathscr{F}$.

Otra observación es que dada una familia casi disjunta tal que $\omega \setminus \bigcup\mathscr{F} \neq \emptyset$, $\mathscr{F}$ induce otra familia $\mathscr{F}'$ casi disjunta que cumple que $\bigcup\mathscr{F}' = \omega$. Para esto elíjase $A \in \mathscr{F}$ y defina $B = A \cup (\omega \setminus \bigcup\mathscr{F})$. Considere $\mathscr{F}' = (\mathscr{F} \setminus \{A\}) \cup \{B\}$, entonces $\bigcup\mathscr{F}' = \omega$.

Por otro lado, desafortunadamente el Corolario 1.7 no prueba que existen familias casi disjuntas de cardinalidad $2^{\aleph_0}$, sólo prueba que existen de cardinalidad $\aleph_1$. Si asumiésemos CH (la Hipótesis del Continuo), tendríamos el resultado buscado, sin embargo, como veremos a continuación, esto se puede probar sin la necesidad de introducir CH.

Teorema 1.8. *Hay una familia casi disjunta de cardinalidad $2^{\aleph_0}$ de subconjuntos de ω.*

Se presentan distintas pruebas de este resultado, todas éstas tienen algo en común: en lugar de trabajar directamente con el conjunto de los números naturales se trabaja con otros conjuntos numerables que tienen una estructura más conveniente. Es decir, si se tiene un conjunto numerable K y se logra construir una familia $\mathscr{F} = \{U_i \mid i \in I\}$ casi disjunta de subconjuntos infinitos de K, entonces $f(\mathscr{F}) = \{f(U_i) \mid i \in I\}$ es una familia casi disjunta de subconjuntos de ω, donde $f : K \to \omega$ es una biyección, la cual existe por la numerabilidad de K.

Para la primera prueba se trabajará con el conjunto $2^{<\omega}$, el cual se define como el conjunto de todas las sucesiones finitas de ceros y unos.

Primero verifiquemos que $2^{<\omega}$ es numerable, para ver esto sea H_n el conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos de longitud n; es claro que H_n tiene 2^n

elementos. Ahora notemos que $2^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} H_n$, por lo tanto $2^{<\omega}$ se puede ver como una unión numerable de conjuntos finitos y por lo tanto es numerable.

Primera demostración. Para cada $x \in 2^\omega$ sea $A_x = \{x \restriction n \mid n \in \omega\}$, donde $x \restriction n$ significa restringir la función x al dominio n[1].

Si $x, y \in 2^\omega$, con $x \neq y$, existe n tal que $x(n) \neq y(n)$, por lo tanto $A_x \cap A_y$ no contiene ninguna sucesión de longitud mayor que n, así $A_x \cap A_y$ tiene a lo más todas las sucesiones de longitud menor que n, por lo tanto es finito, luego la familia $\mathscr{F} = \{A_x \mid x \in 2^\omega\}$ es casi disjunta y además tiene la misma cardinalidad que 2^ω, la cual sabemos que es $2^{\aleph_0}$. $\square$

Para la segunda demostración el conjunto numerable con el que se trabajará es el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$.

Segunda demostración. Para cada $r \in \mathbb{R}$ elijamos una sucesión $(q_n^r)_{n\in\omega}$ de números racionales tal que no es eventualmente constante, converge a r y sea $A_r = \{q_n^r \mid n \in \omega\}$.

Para $s, r \in \mathbb{R}$, con $s \neq r$, elijamos $\epsilon > 0$ tal que:

$$(s - \epsilon, s + \epsilon) \cap (r - \epsilon, r + \epsilon) = \emptyset.$$

Pero, por la convergencia de las sucesiones, existe $M \in \omega$ tal que si $n > M$, $q_n^r \in A_r \cap (r - \epsilon, r + \epsilon)$ y $q_n^s \in A_s \cap (s - \epsilon, s + \epsilon)$, de lo cual se sigue que $A_r \cap A_s$ tiene a lo más $2M$ elementos, es decir, es finito. Así la familia $\mathscr{F} = \{A_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ es casi disjunta y tiene el tamaño del continuo. $\square$

En la tercera prueba el conjunto numerable será $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Tercera demostración. Para cada ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ sea A_α el conjunto de todos los elementos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que tienen una distancia menor o igual que uno a la recta $L_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \tan(\alpha)x\}$.

Si α y β son dos ángulos distintos, el conjunto de puntos H en $\mathbb{R}^2$ que están a una distancia menor o igual que 1 de L_α y L_β es un compacto, además $A_\alpha \cap A_\beta = H \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, y por ser H compacto, $A_\alpha \cap A_\beta$ debe ser finito.

Así la familia $\mathscr{F} = \{A_\alpha \mid \alpha \in [0, 2\pi)\}$ es casi disjunta y tiene el tamaño de $[0, 2\pi)$, el cual es $2^{\aleph_0}$. $\square$

El conjunto numerable sobre el que se va a generar la familia casi disjunta en la siguiente prueba es $\omega \times \omega$.

Cuarta demostración. Definamos una función $A : [0, 1] \to \omega^\omega$ como sigue: para cada $x \in [0, 1]$ y cada $n \in \omega$ sea $A(x)(n)$ la parte entera de nx. Ahora notemos que para $x, y \in [0, 1]$, con $x < y$, existe un $N \in \omega$ tal que si $n > N$, $\frac{1}{n} < y - x$, de aquí se sigue que para todo $n > N$ existe $q \in \omega$ tal que $x < \frac{q}{n} < y$, luego $A(x)(n) \leq xn < (\frac{q}{n})n = q = A(\frac{q}{n})(n) \leq A(y)(n)$. En particular $A(x)(n) < A(y)(n)$.

Por lo tanto $A(x)$ y $A(y)$ son dos funciones que son distintas para todo $n > N$, luego son iguales a lo más en N puntos y por lo tanto $A(x) \cap A(y)$ es

[1]Normalmente se usa la notación $f\,|_A$ para referirnos a la restricción de f al dominio A, pero la notación $f \restriction A$ tiene la ventaja de que puede usarse para cuando la expresión del conjunto al que se quiere restringir es más larga, por ejemplo $f \restriction [\mathbb{Q} \cap (0, 1)]^{<\omega}$ en lugar de $f\,|_{[\mathbb{Q}\cap[0,1]]^{<\omega}}$.

finito. Así la familia $\mathscr{F} = \{A(x) \mid x \in [0,1]\}$ de subconjuntos de $\omega \times \omega$ es casi disjunta. $\square$

Capítulo 2

Familias independientes

Como ya se había dicho, la idea de independencia que se tiene en probabilidad se puede extender a espacios de medida, más precisamente, en un espacio de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$, diremos que dos conjuntos $A, B \in \mathscr{A}$ son independientes si sucede que $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$. Además uno de los primeros ejemplos de medida que se muestra en un curso usual es el de la medida de contar, por ejemplo sobre el conjunto de los números naturales. Entonces que dos conjuntos infinitos sean independientes en esta medida significaría que su intersección también es infinita.

Resulta que esta noción de independencia se puede extender un poco más, pues podemos hacernos preguntas como: Dados dos conjuntos independientes, ¿podrá ser que además el complemento de uno de ellos sea independiente del otro y viceversa? ¿Y qué los complementos también sean independientes entre ellos? O más generalmente, ¿existirán familias infinitas de conjuntos tales que las intersecciones de cualesquiera dos subfamilias finitas y disjuntas de elementos de la familia (o de sus complementos) resulten ser independientes? El estudio de estas preguntas motiva el concepto de las familias independientes.

Definición 2.1. *Una familia $\mathscr{I}$ de subconjuntos de ω es llamada independiente, si siempre que se elijan $X_0, ..., X_n, Y_0, ..., Y_m \in \mathscr{I}$ distintos, el conjunto*

$$X_0 \cap ... \cap X_n \cap (\omega \setminus Y_0) \cap ... \cap (\omega \setminus Y_m)$$

es infinito. A la colección de todas estas intersecciones le llamamos el envolvente de $\mathscr{I}$ y lo denotamos por $ENV(\mathscr{I})$.

Note que de igual forma podemos decir que una familia $\mathscr{I}$ de subconjuntos de ω es independiente si siempre que se tengan $S, T \subseteq \mathscr{I}$ dos subfamilias finitas y disjuntas se cumple que:

$$\left(\bigcap_{X \in S} X\right) \cap \left(\omega \setminus \bigcup_{Y \in T} Y\right) = \left(\bigcap_{X \in S} X\right) \setminus \bigcup_{Y \in T} Y$$

es infinito.

Además notemos que todos los elementos de una familia independiente son subconjuntos infinitos de ω que también tienen complemento infinito.

Ejemplo 2.2. *Sean p_n el n-ésimo número primo y $C_n = \{mp_n \mid m \in \omega\}$. La familia $\mathscr{F} = \{C_n \mid n \in \omega\}$ es independiente.*

En efecto, sean $X_0, ..., X_l, Y_0, ..., Y_k \in \mathscr{F}$ distintos. Sabemos que existen $p_{n_1}, ..., p_{n_l}, q_{n_1}, ..., q_{n_k}$ números primos distintos tales que $X_i = \{mp_{n_i} \mid m \in \omega\}$ y $Y_j = \{mq_{n_j} \mid m \in \omega\}$.

Ahora, eligiendo $m = p_{n_1}...p_{n_l}$, se tiene que:

$$m \in X_0 \cap ... \cap X_n \cap (\omega \setminus Y_0) \cap ... \cap (\omega \setminus Y_m).$$

De hecho cualquier potencia de m también está en $X_0 \cap ... \cap X_n \cap (\omega \setminus Y_0) \cap ... \cap (\omega \setminus Y_m)$, y como $m > 1$, este conjunto es infinito.

2.1. Tamaño de las familias independientes

Se prueba de distintos modos, al igual que con las familias casi disjuntas, que existen familias independientes de cardinalidad $2^{\aleph_0}$. Además como cualquier subfamilia de una independiente es independiente, entonces como consecuencia de la existencia de una familia independiente de tamaño $2^{\aleph_0}$ se tiene que para todo cardinal $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ hay una familia independiente de cardinalidad κ.

Teorema 2.3. *Existe una familia independiente de subconjuntos de ω que tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.*

Al igual que con las familias casi disjuntas se va a construir la familia independiente en conjuntos numerables distintos a ω.

2.1.1. Demostración original de Fichtenholz y Kantorovich

El conjunto numerable C sobre el que se trabaja aquí es el conjunto de todos los subconjuntos finitos no vacíos de $\mathbb{Q}$, por lo tanto lo primero que hay que notar es que efectivamente C es numerable. Para $n \geq 1$, sea H_n el conjunto de todos subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que tienen n elementos. Se puede oberservar que $\aleph_0 \leq |H_n|$ y que $|H_n| \leq |\prod_{i\in n} \mathbb{Q}| = \prod_{i \in n} \aleph_0 = \aleph_0$. Así $|H_n| = \aleph_0$. Además $C = \bigcup_{n\geq 1} H_n$, por lo tanto, C se puede ver como una unión numerable de conjuntos numerables y consecuentemente es numerable.

Ahora para cada $r \in \mathbb{R}$ sea $A_r = \{a \in C \mid |(-\infty, r] \cap a| \text{ es par}\}$.

Lema 2.4. *La familia $\mathscr{F} = \{A_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ es una familia independiente.*

Demostración. Sean $r_0, r_1, ..., r_{n-1}, s_0, ..., s_{m-1} \in \mathbb{R}$ distintos y

$$t_0 = \text{mín}\{r_0, r_1, ..., r_{n-1}, s_0, ..., s_{m-1}\}$$

y para cada $i \in \{0, ..., m+n-2\}$:

$$t_{i+1} = \text{mín}(\{r_0, r_1, ..., r_{n-1}, s_0, ..., s_{m-1}\} \setminus \{t_0, ..., t_i\}).$$

Entonces $\{r_0, r_1, ..., r_{n-1}, s_0, ..., s_{m-1}\} = \{t_0, ..., t_{m+n-1}\}$, con $t_i < t_{i+1}$ para todo $i \in \{0, \ldots, m+n-2\}$.

Si $t_0 = r_j$ para algún j, elíjanse dos elementos distintos a_0 y b_0 en $\mathbb{Q} \cap (-\infty, t_0)$ y considere $P_0 = \{a_0, b_0\}$. Ahora si $t_0 = s_i$ para algún i, sea $a_0 \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, t_0)$ y $P_0 = \{a_0\}$.

Para $i \in \{1, ..., m+n-1\}$: si $(t_{i-1} = r_k \wedge t_i = s_l)$ o bien $(t_{i-1} = s_l \wedge t_i = r_k)$ entonces sea $a_i \in \mathbb{Q} \cap (t_{i-1}, t_i)$ y $P_i = \{a_i\}$, en caso contrario sea $P_i = \emptyset$.

Luego $P = \bigcup_{i \in m+n} P_i$ es tal que $P \in A_{r_0} \cap ... \cap A_{r_n} \cap (C \setminus A_{s_0}) \cap ... \cap (C \setminus A_{s_m})$. Pero por la construcción de P es claro que sus elementos se pueden elegir de infinitas maneras distintas, lo cual prueba que el conjunto

$$A_{r_0} \cap ... \cap A_{r_n} \cap (C \setminus A_{s_0}) \cap ... \cap (C \setminus A_{s_m})$$

es infinito. $\square$

Cuando indexamos una familia $\mathscr{F}$ de conjuntos, lo que formalmente se hace es construir una función $F : I \to \mathscr{F}$ suprayectiva (pero no necesariamente inyectiva), y denotamos por F_i a $F(i)$. Por lo tanto $|\mathscr{F}| \leq |I|$.

Note entonces que, para la indexación de una familia independiente $\mathscr{F}$, no es válido el argumento de que, como $\mathscr{F}$ es independiente, si $i, j \in I$, con $i \neq j$, sucede que $X_i \cap (\omega \setminus X_j)$ es infinito, y así en particular $X_i \neq X_j$, porque lo que se debe de elegir, de acuerdo a la Definición 2.1, son dos subfamilias finitas disjuntas, ¡no dos subconjuntos de índices finitos y disjuntos! Por lo tanto la indexación de una familia independiente no es necesariamente inyectiva.

Por lo tanto es necesario notar que, siguiendo la notación del Lema 2.4, si $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, entonces $A_x \neq A_y$. En efecto, basta que elijamos un racional q tal que $q < x$ y otro racional p con $x < p < y$; el conjunto $P = \{q, p\}$ cumple que $P \in A_y$ pero $P \notin A_x$.

Ahora, puesto que la familia $\mathscr{F}$ expuesta en en Lema 2.4 está indexada por los números reales (y la indexación sí es inyectiva), ésta tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$, y por lo tanto esto implica el Teorema 2.3.

2.1.2. Demostración de Hausdorff

Como veremos en la siguiente sección, la demostración que a continuación se presenta tiene la ventaja de que se puede generalizar para cardinales más grandes, sin embargo es más complicada y por lo tanto la dividiremos en dos partes.

Proposición 2.5. *Si se tienen $X_0, X_1, ..., X_n \subseteq \omega$ distintos, existe un $M \in \omega$ tal que si $i, j \in n+1$, con $i \neq j$, entonces $X_i \cap M \neq X_j \cap M$.*

Demostración. Para cada $i, j \in n+1$, con $i \neq j$, sea $n_{i,j}$ el mínimo elemento de $(X_i \setminus X_j) \cup (X_j \setminus X_i)$. Note que como $X_i \neq X_j$, $(X_i \setminus X_j) \cup (X_j \setminus X_i) \neq \emptyset$ y además $n_{i,j} = n_{j,i}$. Eligiendo $m_{i,j} = n_{i,j} + 1$ se tiene que $X_i \cap m_{i,j} \neq X_j \cap m_{i,j}$, ya que $n_{i,j} \in X_i \cap m_{i,j}$ o $n_{i,j} \in X_j \cap m_{i,j}$, pero no ambos a la vez. Note además que cualquier $m \geq m_{i,j}$ también cumple que $X_i \cap m \neq X_j \cap m$ por la misma razón.

Sea $M = \text{máx}\{m_{i,j} \mid i, j \in n+1, i \neq j\}$, entonces para todos $i, j \in n+1, i \neq j$ se tiene que $X_i \cap M \neq X_j \cap M$. □

Sea $C = \{(n, A) \mid (n \in \omega) \wedge (A \subseteq P(n))\}$. Como para cada $n \in \omega$ sólo existen finitos conjuntos A tales que $A \subseteq P(n)$, entonces C es una unión numerable de finitos y por lo tanto es numerable.

Para cada $X \subseteq \omega$ sea $X' = \{(n, A) \in C \mid X \cap n \in A\}$.

Teorema 2.6. $\{X' \mid X \subseteq \omega\}$ *es una familia independiente.*

Demostración. Sean $X_0, ..., X_n, Y_0, ..., Y_m \subseteq \omega$ distintos.

Por la Proposición 2.5 existe $M \in \omega$ tal que para todos

$$X, Y \in \{X_0, ..., X_n, Y_0, ..., Y_m\},$$

con $X \neq Y$, se cumple que $X \cap M \neq Y \cap M$.

Sea $A = \{X_i \cap M \mid i \in n + 1\}$. Claramente $A \subseteq P(M)$, por lo tanto $(M, A) \in C$. Ahora, por la construcción de A, se tiene que $X_i \cap M \in A$ para todo $i \in n+1$, es decir, $(M, A) \in X'_i$ y consecuentemente $(M, A) \in (\bigcap_{i \in n+1} X'_i)$.

Por otro lado, para todo $j \in m + 1$ se tiene $(M, A) \notin Y'_j$, ya que si $(M, A) \in Y'_j$ entonces $Y_j \cap M \in A$ y consecuentemente $Y_j \cap M = X_i \cap M$ para algún $i \in n + 1$, lo cual contradice la elección de M. Por lo tanto $Y_j \cap M \notin A$, y luego $(M, A) \in \bigcap_{j \in m+1}(C \setminus Y'_j)$. De todo esto:

$$(M, A) \in \left(\bigcap_{i \in n+1} X'_i \right) \cap \left(\bigcap_{j \in m+1} (C \setminus Y'_j) \right).$$

Pero esta construcción se puede hacer para cada $m \geq M$, por lo tanto

$$\left(\bigcap_{i \in n+1} X'_i \right) \cap \left(\bigcap_{j \in m+1} (C \setminus Y'_j) \right)$$

es infinito, lo cual termina la prueba. □

Como resultado del Teorema 2.6 se tiene el Teorema 2.3, ya que $\{X' \mid X \subseteq \omega\}$ tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$ pues la indexación es inyectiva.

2.1.3. Dos pruebas topológicas

La siguiente demostración usa algunas propiedades del espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_d)$ donde τ_d es la topología inducida por la métrica euclidiana, es decir, la topología usual. Se usará $B_r(x)$ para denotar la bola abierta de radio r centrada en x.

Proposición 2.7. *Hay una base numerable $\mathscr{B}$ de la topología τ_d que es cerrada bajo uniones finitas.*

Demostración. Veamos que la familia

$$\mathscr{B} = \left\{ B_{\frac{1}{n_1}}(q_1) \cup B_{\frac{1}{n_2}}(q_2) \cup ... \cup B_{\frac{1}{n_m}}(q_m) \mid (m, n_1, ..., n_m \in \omega), (q_1, ..., q_m \in \mathbb{Q}) \right\}$$

cumple lo que se requiere.

Los elementos de $\mathscr{B}$ son abiertos por ser uniones de bolas abiertas. Además puesto que $\mathscr{C} = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(q) \mid n \in \omega, q \in \mathbb{Q} \right\}$ es una base y $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ es una base. También es claro que $\mathscr{B}$ es cerrado bajo uniones finitas. Lo único que falta ver es que $\mathscr{B}$ es numerable, pero $\mathscr{B}$ se puede ver como uniones finitas de elementos de la familia numerable $\mathscr{C}$, por lo tanto, es numerable. $\square$

Ahora para cada $r \in \mathbb{R}$ sea $A_r = \{U \in \mathscr{B} \mid r \in U\}$, donde $\mathscr{B}$ es como en la Proposición 2.7.

Lema 2.8. *La familia $\{A_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ es una familia independiente de subconjuntos del conjunto numerable $\mathscr{B}$.*

Demostración. Sean $S, T \subseteq \mathbb{R}$ finitos y disjuntos. Entonces $\mathbb{R} \setminus T$ es abierto y para todo $x \in S$ existe $U_x \in \mathscr{B}$ tal que $x \in U_x$ y $U_x \cap T = \emptyset$. Como $\mathscr{B}$ es cerrada bajo uniones finitas $U = \bigcup_{x \in S} U_x \in \mathscr{B}$. Pero claramente hay infinitas formas de elegir cada U_x, por lo tanto hay infinitos elementos en

$$\left(\bigcap_{x \in S} A_x \right) \cap \left(\bigcup_{y \in T} (\mathscr{B} \setminus A_y) \right),$$

lo cual termina la prueba. $\square$

Como consecuencia del Lema 2.8 se sigue el Teorema 2.3, ya que la familia $\{A_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ tiene la misma cardinalidad de $\mathbb{R}$ por la inyectividad de la indexación.

La siguiente prueba usa el hecho de que el espacio producto $2^{\mathbb{R}}$ es separable[1], lo cual se sigue directamente del Teorema de Hewitt-Marczewsky-Pondiczery, sin embargo aquí expondremos una prueba sencilla de este hecho.

Es importante recordar que dada una familia $\{X_i \mid i \in I\}$ de espacios topológicos, el producto topológico

$$\prod_{i \in I} X_i$$

es el conjunto $\left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i \right\}$ con la topología que tiene como subbase a los conjuntos de la forma $\pi_i^{-1}(U_i)$, en donde π_i es la proyección i-ésima y U_i es un abierto propio de X_i.

[1] Un espacio topológico X se dice separable si contiene un subconjunto denso numerable.

Teorema 2.9. *El espacio topológico $2^{\mathbb{R}}$, con la topología producto, es separable.*

Demostración. Recordemos que la colección de subconjuntos finitos de un conjunto numerable[2] también es numerable, por lo tanto

$$[\mathbb{Q}]^{<\omega} = \{A \subseteq \mathbb{Q} \mid |A| \in \omega\}$$

es numerable. Ahora, para cada colección (que podemos suponer ordenada) $S = \{q_1, \ldots, q_{2n-1}\} \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$, sea la función $f_S : \mathbb{R} \to 2$ definida por:

$$f_S(x) = 1 \leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in n} (q_i, q_{2i+1}).$$

Observe que $D = \{f_S \mid S \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}\}$ es numerable, pues su conjunto de índices lo es. Veamos que es denso; para ello basta elegir un abierto básico U de $2^{\mathbb{R}}$ y ver que $U \cap D \neq \emptyset$. Como U es un abierto básico, necesariamente existen $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ y $(j_1, ..., j_m) \in 2^m$ tales[3] que $f \in U$ si y sólo si $f(r_i) = j_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Ahora, para cada r_i, sean q_i, p_i racionales tales que $q_i < r_i < p_i$ y además $p_i < q_{i+1}$, y sea el conjunto S_0 definido como sigue:

$$S_0 = \{q_i \mid j_i = 1\} \cup \{p_i \mid j_i = 1\}.$$

De aquí es claro que f_{S_0} es tal que $f_{S_0} \in U$, lo cual prueba que $U \cap D \neq \emptyset$. $\square$

Ahora para cada $r \in \mathbb{R}$ definamos $A_r = \{f : \mathbb{R} \to 2 \mid f(r) = 0\}$. Puesto que cada A_r es tal que él y su complemento son abiertos básicos, son conjuntos clopen[4] no vacíos, por lo tanto si $S, T \subseteq \mathbb{R}$ son finitos y disjuntos, $\bigcap_{s \in S} A_s$ y $\bigcap_{t \in T} (2^{\mathbb{R}} \setminus A_t)$ son conjuntos clopen no vacíos cuya intersección es no vacía, por lo tanto el conjunto

$$\left(\bigcap_{s \in S} A_s \right) \cap \left(\bigcap_{t \in T} (2^{\mathbb{R}} \setminus A_t) \right)$$

es un clopen no vacío, luego su intersección con D es infinita. Esto prueba que la familia $\mathscr{F} = \{A_r \cap D \mid r \in \mathbb{R}\}$ es una familia independiente sobre el conjunto numerable D.

2.1.4. Demostración por polinomios

Esta demostración usa algunas propiedades básicas de los polinomios en $\mathbb{R}$ que tienen coeficientes racionales, por lo tanto empezaremos con un lema que va a ser esencial para la construcción de una familia independiente.

Lema 2.10. *Sean dos conjuntos $S, T \subseteq \mathbb{R}$ finitos y disjuntos. Entonces existe un polinomio p con coeficientes racionales tal que $p(s) > 0 > p(t)$ para todos $s \in S, t \in T$.*

---

[2] Dado un conjunto X, denotaremos por $[X]^{<\omega}$ a la familia de todos los subconjuntos finitos de X y por $[X]^{\omega}$ a la de los subconjuntos numerables.

[3] Aquí 2^m denota al conjunto de sucesiones de ceros y unos de longitud m.

[4] Un conjunto es clopen en un espacio topológico si es abierto y cerrado.

Demostración. Definamos $K = S \cup T$ y digamos que $K = \{k_0, ..., k_n\}$ con $k_i < k_{i+1}$ para todo $i \in n$ y sea q_i un racional en el intervalo (k_i, k_{i+1}). Recursivamente vamos a construir un polinomio que cumpla lo que se requiere:
Sea $p_0(x) = 1$ y para todo $i \in \{0, 1, ..., n-2\}$ sea p_{i+1} como sigue: Si se cumple que

$$((k_i \in S) \wedge (k_{i+1} \in T)) \vee ((k_i \in T) \wedge (k_{i+1} \in S)),$$

considere $p_{i+1}(x) = p_i(x)(x - q_i)$, en caso contrario $p_{i+1}(x) = p_i(x)$.

Por la construcción se tiene que $p_n(x)$ tiene coeficientes racionales, pues es producto de polinomios con coeficientes racionales. Además para cada $s \in S$ y cada $t \in T$ tales que son consecutivos en K, es decir, que no existe otro $k \in K$ con $s < k < t$ (o $s > k > t$), el polinomio tiene una única raíz en el intervalo $[s, t]$, y como la raíz es simple, el polinomio cambia una única vez de signo en $[s, t]$, así $p_n(s) < 0 < p_n(t)$ o $p_n(s) > 0 > p_n(t)$.

Por otro lado, si se tienen $s_i, s_j \in S$ (o $t_l, t_k \in T$) que son consecutivos en K, el polinomio p_n no tiene raíces en $[s_i, s_j]$ (o en $[t_l, t_k]$), es decir, $p_n(s_i)$ y $p_n(s_j)$ (o $p_n(t_k)$ y $p_n(t_l)$) tienen el mismo signo.

Así se cumple alguna de las siguientes dos condiciones:

1. $p_n(s) > 0$ para todo $s \in S$ y $p_n(t) < 0$ para todo $t \in T$.
2. $p_n(s) < 0$ para todo $s \in S$ y $p_n(t) > 0$ para todo $t \in T$.

En el primer caso elíjase $p = p_n$ y en el segundo $p = -p_n$. $\square$

El siguiente ejemplo es un caso específico de la prueba del Lema 2.10 y pretende aclarar cómo es que se construye el polinomio p.

Ejemplo 2.11. *Supongamos que $S = \{-2, 1, 4, 10\}$ y $T = \{-3, 5, 11, 22\}$. Entonces se tiene que $K = \{-3, -2, 1, 4, 5, 10, 11, 22\}$. Así una elección de los racionales puede ser: $q_0 = \frac{-5}{2}, q_1 = 0, q_2 = 2, q_3 = \frac{9}{2}, q_4 = 7, q_5 = \frac{21}{2}, q_5 = 15$.*

Como $k_0 \in T$ y $k_1 \in S$, $p_1 = (x + \frac{5}{2})$. Luego $k_1, k_2 \in S$, así $p_2 = p_1$. También $k_2, k_3 \in S$, por lo tanto $p_3 = p_2$. Ahora $k_3 \in S$ y $k_4 \in T$, consecuentemente $p_4 = p_3(x - \frac{9}{2})$. También $k_4 \in T$ y $k_5 \in S$, luego $p_5 = p_4(x - 7)$. Además $k_5 \in S$ y $k_6 \in T$, así $p_6 = p_5(x - \frac{21}{1})$. Finalmente $k_6, k_7 \in T$, por lo tanto $p_7 = p_6$.

Así

$$p_7 = (x + \frac{5}{2})(x - \frac{9}{2})(x - 7)(x - \frac{21}{2})$$

y es tal que:

$$p_7(-2) = \frac{-2925}{8}, \quad p_7(1) = \frac{-2793}{4}, \quad p_7(4) = \frac{-507}{8}, \quad p_7(10) = \frac{-825}{8},$$

es decir, $p(s) < 0$ para todo $s \in S$, además:

$$p_7(-3) = \frac{2025}{4}, \quad p_7(5) = \frac{165}{4}, \quad p_7(11) = \frac{351}{2}, \quad p_7(22) = \frac{591675}{8},$$

lo cual significa que $p(t) > 0$ para todo $t \in T$.

Ahora, eligiendo $p = -p_7$, se tiene lo que se quería.

Como se dijo al principio y como se ha visto en las demás pruebas, las familias independientes que se construyen son sobre conjuntos numerables distintos a los racionales, en este caso usaremos el conjunto de los polinomios con coeficientes racionales, por lo tanto lo primero que hay que notar es que si P es dicho conjunto entonces éste es numerable. Para ver esto definamos H_n como el conjunto de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$ y de grado a lo más n, es decir:

$$H_n = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \mid \forall i \in n+1(a_i \in \mathbb{Q})\}.$$

Si definimos f como

$$f(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) = (a_0, a_1, ..., a_{n-1}),$$

f resulta ser una aplicación inyectiva de H_n a $\prod_{i\in n+1} \mathbb{Q}$ y por lo tanto

$$|H_n| \leq \left| \prod_{i\in n+1} \mathbb{Q} \right| = \prod_{i\in n+1} \aleph_0 = \aleph_0.$$

Por otro lado, $\aleph_0 \leq |H_n|$, de donde $\aleph_0 = |H_n|$. Además $P = \bigcup_{n\in\omega} H_n$, luego P es una unión numerable de conjuntos numerables y por lo tanto es numerable.

Ahora definamos para cada $r \in \mathbb{R}$ el conjunto $A_r = \{p \in P \mid p(r) > 0\}$.

Lema 2.12. *La familia* $\mathscr{F} = \{A_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ *es una familia independiente.*

Demostración. Sean $S, T \subseteq \mathbb{R}$ finitos y disjuntos. Lo que queremos probar es que el conjunto:

$$\left(\bigcap_{s\in S} A_s \right) \cap \left(\bigcap_{t\in T} P \setminus A_t \right)$$

es infinito.

Pero por el Lema 2.10 se tiene que existe $p \in P$ tal que $p(s) > 0 > p(t)$ para todos $s \in S, t \in T$, es decir, $\forall s \in S(p \in A_s)$ y $\forall t \in T(p \notin A_t)$, o dicho de otro modo:

$$p \in \left(\bigcap_{s\in S} A_s \right) \cap \left(\bigcap_{t\in T} P \setminus A_t \right).$$

Pero cualquier múltiplo racional positivo de p también está en dicho conjunto, por lo tanto éste es infinito, lo cual termina la prueba. □

Claramente, y nuevamente, como consecuencia del Lema 2.12 se tiene el Teorema 2.3, ya que la familia $\mathscr{F} = \{A_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ es del mismo tamaño que $\mathbb{R}$, pues la indexación es también inyectiva.

2.1.5. Demostración por familias casi disjuntas

Al principio del trabajo se comentó que existe una relación entre las familias casi disjuntas y las familias independientes, la siguiente demostración da muestra de esta relación.

Lema 2.13. *Sea $\mathscr{F}$ una familia casi disjunta en ω de tamaño $2^{\aleph_0}$. A cada $A \in \mathscr{F}$ asignamos la colección A' de todos los subconjuntos finitos de ω que intersectan a A, es decir:*

$$A' = \{B \subseteq \omega \mid B \cap A \neq \emptyset, |B| \in \omega\}.$$

Entonces la familia $\mathscr{F}' = \{A' \mid A \in \mathscr{F}\}$ es una familia independiente en el conjunto numerable de los subconjuntos finitos de ω.

Demostración. Sean $S = \{A_0, ..., A_n\} \subseteq \mathscr{F}$ y $T = \{B_0, ..., B_m\} \subseteq \mathscr{F}$ dos subfamilias disjuntas (y finitas). Por ser $\mathscr{F}$ casi disjunta cada $A_i \in S$ es casi disjunto a $\bigcup T$, es decir, $A_i \cap (\bigcup T)$ es finito, pero como A_i es infinito, $A_i \setminus (\bigcup T)$ también lo es. Eligiendo $k_i \in A_i \setminus (\bigcup T)$ y $H = \{k_0, ..., k_n\}$ se tiene que:

$$H \in \left(\bigcap_{A \in S} A' \right) \setminus \bigcup_{B \in T} B'.$$

Pero la elección de cada k_i es infinita, por lo tanto hay infinitos H que cumplen lo anterior y así la familia $\mathscr{F}'$ es independiente. □

2.1.6. Demostración por *aproximación finita*

Esta es una adaptación nuestra a la prueba convencional conocida como prueba por *aproximación finita*. Lo que se hará es construir *familias independientes* convenientes en subconjuntos finitos, para posteriormente crear con estas una familia independiente *grande* sobre un conjunto numerable adecuado.

Lema 2.14. *Para todo $n \in \omega$ existe un conjunto Y_n y una familia $\{X_s^n \mid s \in n\}$ de subconjuntos de Y_n tales que para cualesquiera dos subconjuntos disjuntos $S, T \subseteq n$ se cumple que:*

$$\left(\bigcap_{k \in S} X_k^n \right) \cap \left(Y_n \setminus \bigcup_{k \in T} X_k^n \right) \neq \emptyset$$

y además $Y_n \cap Y_m = \emptyset$ siempre que $n \neq m$.

Demostración. Sean Y_n el conjunto de todas las funciones que van de n al 2, es decir, $Y_n = \{f \mid f : n \to 2\}$ y $X_k^n = \{f \in Y_n \mid f(k) = 0\}$.

Ahora, si $S, T \subseteq 2^n$ son disjuntos y definimos f_T como la función indicadora de T se tiene que:

$$f_T \in \left(\bigcap_{k \in S} X_k^n \right) \cap \left(2^n \setminus \bigcup_{k \in T} X_k^n \right).$$

Además es claro que $Y_n \cap Y_m = \emptyset$ ya que las funciones de Y_n tienen un dominio distinto a las de Y_m, lo cual termina la prueba. □

Sea ahora $H = \{\sigma : \omega \to \omega \mid \forall k \in \omega(\sigma(k) < k)\}$ y para cada $\sigma \in H$ definamos el conjunto X_σ como:

$$X_\sigma = \bigcup_{n\in\omega} X^n_{\sigma(n)}.$$

Notemos que para cada natural m las únicas funciones en X_σ que tienen dominio m son precisamente las que están en $X^m_{\sigma(m)}$, por lo tanto si $f : m \to 2$, con $m \in \omega$, se tiene que la única posibilidad de que $f \in X_\sigma$ es que $f \in X^m_{\sigma(m)}$.

Teorema 2.15. $\{X_\sigma \mid \sigma \in H\}$ *es una familia independiente sobre el conjunto numerable* $Y = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$.

Demostración. Y es numerable por ser una unión numerable de conjuntos finitos.

Ahora, eligiendo $S, T \subseteq H$ finitos y disjuntos, se tiene que existe un $N \in \omega$ tal que $\sigma \restriction N \neq \tau \restriction N$ para todos $\sigma, \tau \in S \cup T$, con $\sigma \neq \tau$.

Por otro lado, por el Lema 2.14, existe f_N tal que

$$f_N \in \left(\bigcap_{\sigma\in S} X^N_{\sigma(N)}\right) \cap \left(Y_N \setminus \bigcup_{\tau\in T} X^N_{\tau(N)}\right),$$

es decir, existe un elemento $f_N \in Y_N \subseteq Y$ que está en $X^N_{\sigma(N)} \subseteq X_\sigma$ para todo $\sigma \in S$; además $f_N \notin X^N_{\tau(N)}$ para todo $\tau \in T$ y por una observación anterior se sigue que $f_N \notin X_\tau$. De todo esto:

$$f_N \in \left(\bigcap_{\sigma\in S} X_\sigma\right) \setminus \bigcup_{\tau\in T} X_\tau.$$

Pero de esta misma forma, para todo $n > N$, se puede construir una función $f_n : n \to 2$ tal que $f_n \in \left(\bigcap_{\sigma\in S} X_\sigma\right) \setminus \left(\bigcup_{\tau\in T} X_\tau\right)$, lo que prueba que este conjunto es infinito. □

2.2. Familias independientes en cardinales arbitrarios

Una vez que se tiene que existe una familia independiente de cardinalidad $2^{\aleph_0}$ sobre el conjunto de los naturales cabe preguntarse si será cierto que para todo cardinal κ existe una familia independiente de cardinalidad 2^κ de subconjuntos de κ. Si esto es cierto, una estrategia para tratar de probarlo sería intentar generalizar alguna de las demostraciones que se usaron para el caso de $\kappa = \aleph_0$. También resulta intuitivo creer que algunas de las demostraciones no se podrán extender pues éstas utilizan algunas propiedades muy particulares de los conjuntos numerables (o conjuntos numerables muy particulares). En esta sección se verá que dos de aquéllas pruebas sí se pueden generalizar para cualquier cardinal, de hecho una de éstas es una de las pruebas topológicas que se presentaron en la sección anterior y la otra prueba es una generalización de la prueba Hausdorff. La primera de las pruebas es muy larga pues se construye un conjunto de cardinalidad κ con propiedades muy especiales, por otro lado, la prueba de Hausdorff tiene la cualidad de ser una prueba muy corta, aunque muy técnica.

2.2.1. Prueba topológica

En toda esta sección κ denotará un cardinal infinito, 2^κ y 2^{2^κ} denotarán a los productos topológicos $\prod_{i\in\kappa} 2$ y $\prod_{f\in 2^\kappa} 2$ respectivamente, en donde $2 = \{0,1\}$ es considerado con la topología discreta.

Nuestro primer objetivo en esta sección es probar el siguiente resultado:

Lema 2.16. *Sea κ un cardinal infinito. Entonces 2^{2^κ} tiene un conjunto denso D tal que para todo conjunto clopen no vacío A de 2^{2^κ}, $D \cap A$ es de cardinalidad κ. En particular 2^{2^κ} tiene un subconjunto denso de cardinalidad κ.*

La prueba del Lema 2.16 es un tanto compleja, es por ello que la dividiremos en varias proposiciones. Posteriormente este resultado nos permitirá construir una familia independiente sobre el cardinal κ.

Definición 2.17. *Sean A y B conjuntos. Una función parcial finita de A a B es una función f cuyo dominio es un subconjunto finito de A y que toma valores en B. Cuando $B = 2 = \{0,1\}$, denotamos al conjunto de todas las funciones parciales finitas de A al 2 como $FF(A)$.*

Proposición 2.18. *El espacio 2^κ admite una base de conjuntos clopen.*

Demostración. Para cada función parcial finita s de κ al 2 sea

$$[s] = \{f \in 2^\kappa \mid s \subseteq f\},$$

es decir, $[s]$ es el conjunto de todas las posibles extensiones de s a funciones con dominio κ.

Recordemos que los abiertos básicos en el espacio producto son precisamente los conjuntos de la forma

$$\pi_{j_0}^{-1}(A_0) \cap \pi_{j_1}^{-1}(A_1) \cap ... \cap \pi_{j_n}^{-1}(A_n),$$

donde $j_i \in \kappa$ y A_n es un subconjunto propio y abierto en la topología τ_{j_n}. Como en este caso τ_{j_i} es la topología discreta en el conjunto $2 = \{0,1\}$, $A_i \in \{\{0\},\{1\}\}$. De esto se sigue que en este caso los abiertos básicos son de la forma $[s]$ con $s \in FF(\kappa)$.

Para ver que los elementos de esta base son clopen basta ver que son cerrados. Sea $[s]$ un elemento de la base. Sabemos que

$$s = \{(a_0, i_0), (a_1, i_1), ..., (a_{n-1}, i_{n-1})\}$$

donde $a_j \in \kappa$ e $i_j \in 2$ para todo $j \in n$.

Sea $s_j = \{(a_j, 1 - i_j)\}$. Note que para todo $j \in n$ se tiene que $s_j \in FF(\kappa)$, por lo tanto $[s_j]$ es también un elemento de la base de la topología.

Ahora notemos que $2^\kappa \setminus [s] = \bigcup_{j \in n} [s_j]$. Para ver esto sea $f \in 2^\kappa \setminus [s]$, es decir, f no extiende a s y por lo tanto existe un a_j, con $j \in n$, tal que $s(a_j) \neq f(a_j)$, por lo tanto $f(a_j) = s_j(a_j)$ y consecuentemente $f \in [s_j]$. Para ver la otra contención es suficiente notar que si una función f extiende a una s_j, es decir, si $f \in [s_j]$, f no extiende a s y así $f \notin [s]$.

Por lo tanto $2^\kappa \setminus [s]$ es una unión finita de abiertos y en consecuencia es abierto, así se tiene que $[s]$ es cerrado y por lo tanto clopen. □

En la demostración de la Proposición 2.19 utilizaremos el Teorema de Tychonoff, el cual enunciamos a continuación y cuya prueba se puede consultar en [6] y en [11].

Teorema de Tychonoff. *El producto topológico de cualquier colección de espacios compactos es compacto.*

Proposición 2.19. *Todo conjunto clopen en el espacio* 2^κ *es compacto.*

Demostración. Por el Teorema de Tychonoff sabemos que, como $2 = \{0, 1\}$ es compacto, 2^κ también lo es. Por otro lado, cualquier cerrado contenido en un compacto también es compacto, lo cual termina la prueba. □

Ahora, por las Proposiciones 2.18 y 2.19, se sigue que cualquier clopen no vacío es la unión de finitos clopen básicos. Esto se debe a que si A es un clopen, por ser abierto, es la unión de elementos de la base, pero estos son a su vez una cubierta de A, y por ser este compacto, admite una subcubierta finita.

Proposición 2.20. *Existen exactamente* κ *funciones parciales finitas de* κ *a* 2*; es decir,*

$$|FF(\kappa)| = \kappa.$$

Demostración. Primero veamos que la cantidad de subconjuntos finitos no vacíos de κ es justamente κ. Para ver esto sea H_n el conjunto de todos subconjuntos de κ que tienen n elementos, con $n \geq 1$. Claramente $\kappa \leq |H_n|$ y también es claro que se cumple que[5]:

$$|H_n| \leq |\kappa \times ... \times \kappa| = \kappa \times ... \times \kappa = \kappa^n = \kappa$$

Así $|H_n| = \kappa$. Si $C = \bigcup_{n \geq 1} H_n$, entonces, por el Teorema A.21, se tiene que:

$$\kappa \leq |C| \leq \sum_{n \geq 1} |H_n| = \sum_{n \geq 1} \kappa = |\omega| \cdot \kappa = \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa.$$

Así $|C| = \kappa$. Ahora, si elegimos uno de dichos conjuntos finitos, es decir, un $A \in C$, la cantidad de funciones con ese dominio y que vayan al $2 = \{0, 1\}$ son

[5] Aquí $|\kappa \times ... \times \kappa|$ denota la cardinalidad del producto cartesiano de κ consigo mismo n veces mientras que $\kappa \times ... \times \kappa$ denota el producto cardinal.

tantas como 2^n donde $n = |A|$. Es decir, si $F_A = \{f : A \to 2\}$, $|F_A| = 2^n$. De esto y del hecho de que $FF(\kappa) = \bigcup_{A \in C} F_A$ se sigue que:

$$|FF(\kappa)| \leq \sum_{A \in C} |F_A| = \sum_{A \in C} 2^{|A|} = |C| \cdot sup\{2^{|A|} \mid A \in C\} = |C| \cdot \aleph_0 = \kappa \cdot \aleph_0 = \kappa.$$

Y como resulta claro que $\kappa \leq |FF(\kappa)|$ se tiene que $|FF(\kappa)| = \kappa$, como se quería. $\square$

Por otro lado, la base de conjuntos clopen es $\mathscr{B} = \{[s] \mid s \in FF(\kappa)\}$, por lo tanto $|\mathscr{B}| = |FF(\kappa)| = \kappa$.

Corolario 2.21. *Existen exactamente κ conjuntos clopen en 2^κ.*

Demostración. Todos los elementos de la base son clopen, por lo tanto hay al menos κ conjuntos clopen. Ahora, análogamente a como se hizo en la Proposición 2.20, y como $|\beta| = \kappa$, sabemos que si Υ es el conjunto de todos los subconjuntos finitos de elementos de β, entonces $|\Upsilon| = \kappa$.

Por otro lado, se puede encontrar una función inyectiva que va de la familia de todos los clopen a Υ, ya que si A es un clopen, $A = \bigcup B$ para algún $B \in \Upsilon$, de donde se tiene que hay a lo más tantos conjuntos clopen como $|\Upsilon|$, es decir, hay a lo más tantos como κ, lo cual termina la prueba[6]. $\square$

Corolario 2.22. *Existen exactamente κ funciones continuas de 2^κ al 2.*

Demostración. Basta notar que las funciones continuas de 2^κ al 2 son funciones características de conjuntos clopen en 2^κ. $\square$

Sea $D = \{f : 2^\kappa \to 2 \mid f \text{ es continua}\}$.

Proposición 2.23. *Cualquier cantidad finita de elementos de 2^κ puede ser separada por conjuntos clopen disjuntos a pares.*

Demostración. Sean $f_0, f_1, ..., f_{n-1} \in 2^\kappa$ funciones distintas. Por ser funciones distintas, para todo $i, j \in n$, con $i < j$, existe un $x_{ij} \in \kappa$ tal que $f_i(x_{ij}) \neq f_i(x_{ij})$. Sea $H = \{x_{ij} \mid i, j \in n, i < j\}$. Ahora definamos:

$$\begin{gathered} s_0 = \{(x, f_0(x)) \mid x \in H\}, \\ s_1 = \{(x, f_1(x)) \mid x \in H\}, \\ \vdots \\ s_{n-1} = \{(x, f_{n-1}(x)) \mid x \in H\}. \end{gathered}$$

Claramente cada s_i es una función parcial finita de κ al 2, pues $H \subseteq \kappa$ es finito, así cada $[s_i]$ es un conjunto clopen y f_i extiende a s_i, es decir, $f_i \in [s_i]$.

[6] Aquí se está usando el Axioma de Elección para asegurar la existencia de dicha función inyectiva, sin embargo se puede definir sin necesidad de dicho axioma.

Lo único que resta ver es que $[s_i] \cap [s_j] = \emptyset$ si $i \neq j$, pero esto es claro ya que si $f \in [s_i]$:

$$f(x_{ij}) = s_i(x_{ij}) = f_i(x_{ij}) \neq f_j(x_{ij}) = s_j(x_{ij}),$$

en particular $f(x_{ij}) \neq s_j(x_{ij})$, es decir, f no extiende a s_j y consecuentemente $f \notin [s_j]$, lo cual termina la prueba. □

Note que, usando la notación de esta demostración, como H es finito, entonces la cardinalidad de $\kappa \setminus H$ es justamente κ. Ahora definamos para cada $y \in \kappa \setminus H$ el conjunto $H_y = H \cup \{y\}$ y $s_j^y = \{(x, f_{n-1}(x)) \mid x \in H_y\}$ para todo $j \in n$. Entonces se tiene que la colección $([s_j^y])_{j\in n}$ también es una colección de conjuntos clopen disjuntos a pares tales que $f_j \in [s_j^y]$ y además para cada $y \in \kappa \setminus H$ se genera una colección distinta.

Corolario 2.24. *Toda función parcial finita de 2^κ al 2 se puede extender a una función continua.*

Demostración. Una función parcial finita g de 2^κ al 2 es de la forma:

$$g = \{(f_0, g(f_0)), (f_1, g(f_1)), ..., (f_{n-1}, g(f_{n-1}))\},$$

en donde para todo $i \in n$ se cumple que $f_i \in 2^\kappa$, es decir, f es una función de κ al 2 y además $g(f_i) \in \{0, 1\}$.

Por la Proposición 2.23, existe una colección de conjuntos clopen $(C_i)_{i\in n}$ tal que $f_i \in C_i$ y además $C_i \cap C_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$.

Sean $R = \{f_i \mid g(f_i) = 1\}$ y $O = \bigcup_{f_i \in R} C_i$. Así O es una unión finita de conjuntos clopen y por lo tanto es clopen, además, como $C_i \cap C_j = \emptyset$ para $i \neq j$, se tiene que $f_i \in R$ si y sólo si $f_i \in O$. Ahora, la función característica del conjunto O extiende a g y es continua, lo cual termina la prueba. □

Por otro lado, la colección de $(C_i)_{i\in n}$ se pudo haber elegido de κ formas distintas, por lo tanto, O en la demostración anterior también se pudo haber tomado de κ formas distintas; o dicho de otro modo, cada función parcial finita se puede extender a tantas como κ funciones continuas.

Recordemos que en esta sección lo que buscamos es probar el Lema 2.16, y nuestro candidato al conjunto D buscado es $\{f : 2^\kappa \to 2 \mid f \text{ es continua}\}$. Veamos que este efectivamente cumple las condiciones de dicho lema.

Corolario 2.25. *El conjunto $D = \{f : 2^\kappa \to 2 \mid f \text{ es continua}\}$ es denso en 2^{2^κ} y para cualquier clopen no vacío A de 2^{2^κ}, $D \cap A$ tiene cardinalidad κ.*

Demostración. Sabemos que los abiertos básicos en 2^{2^κ} son de la forma $[g] = \{f : 2^\kappa \to 2 \mid g \subseteq f\}$ donde g es una función parcial finita de 2^κ al 2. Ahora, por el Corolario 2.24, sabemos que toda función parcial finita se puede extender a una función continua, dicho de otro modo, para toda $g \in FF(2^\kappa)$ existe una $h \in \{f : 2^\kappa \to 2 \mid f \text{ es continua}\}$ tal que $h \in [g]$, es decir, $[g] \cap D \neq \emptyset$ lo cual prueba la densidad de D.

Sea A un clopen no vacío de 2^{2^κ}. Sabemos que existe una $g \in FF(2^\kappa)$ tal que $[g] \subseteq A$. Pero sabemos que g se puede extender a tantas como κ funciones continuas, es decir, $|[g] \cap D| = \kappa$, consecuentemente

$$\kappa = |[g] \cap D| \leq |A \cap D| \leq |D| = \kappa$$

lo cual termina la prueba. □

El Corolario 2.25 tiene como consecuencia el Lema 2.16 y por lo tanto ya estamos en condiciones de usar este último para probar el siguiente teorema, el cual precisamente afirma la existencia de familias independientes grandes sobre cualquier cardinal infinito.

Teorema 2.26. *Para cualquier cardinal infinito κ, hay una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de κ tal que $|\mathscr{F}| = 2^\kappa$ y además para cualesquiera $S, T \subseteq \mathscr{F}$ finitos y disjuntos se tiene que:*

$$\left(\bigcap_{X \in S} X \right) \setminus \bigcup_{Y \in T} Y$$

es de tamaño κ.

Demostración. Como ya se ha hecho varias veces en lugar de construir directamente la familia de subconjuntos de κ se construirá la familia en otro conjunto de tamaño κ pero que tenga una estructura conveniente, en este caso se usará D.

Sea $D \subseteq 2^{2^\kappa}$ como en el Lema 2.16. Para cada $x \in 2^\kappa$, sean $B_x = \{f \in 2^{2^\kappa} \mid f(x) = 0\}$ y $A_x = D \cap B_x$.

Siempre que $S, T \subseteq 2^\kappa$ finitos y disjuntos, entonces

$$\left(\bigcap_{x \in S} B_x \right) \setminus \bigcup_{x \in T} B_x$$

es el conjunto de todas las funciones que valen 0 en los $x \in S$ y 1 para los $x \in T$, es decir, son todas las posibles extensiones de la función parcial finita

$$s = \{(x, 0) \mid x \in S\} \cup \{(x, 1) \mid x \in T\},$$

lo cual en particular implica que es un conjunto clopen (y además es no vacío).

Ahora notemos que:

$$\left(\bigcap_{x \in S} A_x \right) \setminus \bigcup_{x \in T} A_x = D \cap \left(\left(\bigcap_{x \in S} B_x \right) \setminus \bigcup_{x \in T} B_x \right),$$

es decir, $\left(\bigcap_{x \in S} A_x\right) \setminus \left(\bigcup_{x \in T} A_x\right)$ es la intersección de un clopen no vacío con D, luego, por el Lema 2.16, este es de tamaño κ, lo cual demuestra que $\mathscr{F} = \{A_x \mid x \in 2^\kappa\}$ es una familia de subconjuntos de D que cumple lo que se quería. □

2.2.2. Una variante de la demostración de Hausdorff

La siguiente demostración está inspirada en la prueba original de Felix Hausdorff de la existencia de familias independientes grandes en cardinales arbitrarios ([10]). Además en comparación con la prueba derivada del Lema 2.16, esta prueba es mucho más sencilla.

Sea R la colección de todos los subconjuntos finitos de elementos de $FF(\kappa)$ y para cada $f : \kappa \to 2$ sea

$$A_f = \{a \in R \mid \exists s \in a(s \subseteq f)\}.$$

De este modo, un subconjunto finito a de funciones parciales finitas está en A_f si f es la extensión a todo κ de alguna función parcial finita en a.

Proposición 2.27. *Para cualesquiera $S, T \subseteq 2^\kappa$ finitos y disjuntos el conjunto*

$$\left(\bigcap_{f \in S} A_f\right) \setminus \bigcup_{g \in T} A_g$$

tiene cardinalidad κ.

Demostración. Primero notemos que para cada $f \in S$ y para cada $g \in T$ existe un elemento $\alpha_{fg} \in \kappa$ tal que $f(\alpha_{fg}) \neq g(\alpha_{fg})$. De esto se sigue que para todo $f \in S$ existe una $s_f \in FF(\kappa)$ tal que $s_f \subseteq f$ y además $s_f \not\subseteq g$ para todo $g \in T$. Para ver esto basta tomar:

$$s_f = \{(\alpha_{fg}, f(\alpha_{fg})) \mid g \in T\}.$$

Si $a = \{s_f \mid f \in T\}$, se tiene que a es tal que toda $f \in S$ es extensión de algún $s \in a$ (de hecho de s_f) y además ningún $y \in T$ extiende a ninguna $s \in a$, es decir:

$$a \in \left(\bigcap_{f \in S} A_f\right) \setminus \bigcup_{g \in T} A_g.$$

Por otro lado, tomando $\beta = \text{máx}\{\alpha_{fg} \mid f \in S, g \in T\} + 1$ y si para cada $\gamma \geq \beta$, con $\gamma \in \kappa$, definimos los conjuntos

$$s_f^\gamma = s_f \cup \{(\gamma, f(\gamma))\}, \qquad a_\gamma = \{s_f^\gamma \mid f \in S\},$$

por el mismo argumento que usamos para a, se tiene que

$$a_\gamma \in \left(\bigcap_{f \in S} A_f\right) \setminus \bigcup_{g \in T} A_g.$$

Ahora, puesto que si $\gamma, \psi \in \kappa$, con $\beta < \gamma < \psi < \kappa$, se cumple que $a_\gamma \neq a_\psi$, es claro que $(\bigcap_{f \in S} A_f) \setminus (\bigcup_{g \in T} A_g)$ es de cardinalidad κ, que era lo que se quería. $\square$

Corolario 2.28. *La colección $\mathscr{F} = \{A_f \mid f : \kappa \to 2\}$ es una familia independiente de conjuntos de cardinalidad 2^κ sobre el conjunto R, el cual es de cardinalidad κ.*

2.3. Aplicaciones en ultrafiltros

A finales del siglo XIX y principios del XX todavía no se tenía una noción totalmente aceptada de qué debía significar un espacio topológico, debido a eso muchos matemáticos trataron de dar una axiomatización de este concepto, para ello la mayoría creía que la convergencia de las sucesiones debería ser el centro de esta axiomatización. En particular se creía que tomar el límite de las sucesiones debería ser suficiente para poder definir el operador cerradura. Lamentablemente después se vio que las sucesiones sí pueden caracterizar el operador cerradura, y por lo tanto gran parte de la topología, en algunos espacios, pero no en todos. Se dieron cuenta entonces que debían sustituir a las sucesiones por objetos más generales, a los que denominaron filtros. El primero en introducir los conceptos de filtro y ultrafiltro fue F. Riesz en 1908, pero fue hasta 1937 en que Henry Cartan los reintrodujó y los presentó con claridad como la *generalización* de las sucesiones para estudiar espacios abstractos.

Naturalmente la mayor importancia de los filtros es en el campo de la topología, con ellos se pueden definir el operador cerradura y se pueden poner muchos conceptos en términos de filtros, como el ser compacto o el hecho de que una función sea continua. En esta sección sin embargo no veremos eso, en su lugar veremos algunas cuestiones cardinales relacionadas con éstos. Todas las definiciones y resultados relacionadas con filtros y ultrafiltros de esta sección se pueden consultar en [3] y [6].

Definición 2.29. *Sea X un conjunto no vacío. Una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos no vacíos de X es llamada un filtro en X si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Si $A \in \mathscr{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathscr{F}$.*
2. *Si $A, B \in \mathscr{F}$, entonces $A \cap B \in \mathscr{F}$.*

Es consecuencia de la segunda parte de la definición que cualquier intersección finita de elementos del filtro también está en el filtro, además es común decir que la primera propiedad significa que la colección es cerrada bajo superconjuntos (o que es *cerrada por arriba*). Es por esto que se suele decir que un filtro es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos que es cerrada bajo superconjuntos y bajo intersecciones finitas.

Ejemplo 2.30. *Para todo $A \subseteq X$ tal que $A \neq \emptyset$ se tiene que la colección $\mathscr{F}_A = \{B \subseteq X \mid A \subseteq B\}$ es un filtro.*

Ejemplo 2.31. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Si $\mathscr{V}_x$ es el conjunto de vecindades[7] de x, $\mathscr{V}_x$ es un filtro.*

Ejemplo 2.32. *En ω se tiene que la familia $\mathscr{F} = \{A \subseteq \omega \mid \mathbf{Q}(A)\}$ es un filtro, en donde $\mathbf{Q}(A)$ es la propiedad "existe $n_A \in \omega$ tal que si $m > n_A$, $m \in A$".*

[7]Decimos que $V \subseteq X$ es una vecindad de $x \in X$ si $x \in V$ y existe un conjunto abierto U tal que $x \in U \subseteq V$.

Si ahora consideramos la propiedad $\mathbf{P}(A)$ como "existe algún $n_A \in \omega$ tal que si p es un número primo y $p > n_A$, $p \in A$", resulta que la familia $\mathscr{F} = \{A \subseteq \omega \mid \mathbf{P}(A)\}$ es un filtro.

Ejemplo 2.33. *Más generalmente, para toda sucesión creciente $(a_n)_{n\in\omega}$ de números naturales se tiene que la colección*

$$\mathscr{F}_a = \{A \subseteq \omega \mid (\exists n_A \in \omega) \to (m > n_A \to a_m \in A)\}$$

es un filtro en ω.

Note que usando la notación de los Ejemplos 2.30 y 2.33 ningún filtro de la forma $\mathscr{F}_a$ es igual a uno de la forma $\mathscr{F}_A$.

Definición 2.34. *Dado un filtro $\mathscr{F}$ en un conjunto X, una subcolección no vacía $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{F}$ es una base de filtro para $\mathscr{F}$ si para todo $F \in \mathscr{F}$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subseteq F$.*

Es claro que todo filtro es base de sí mismo, sin embargo la propiedad importante de ser una base es caracterizada por la siguiente proposición.

Proposición 2.35. *Sea X un conjunto no vacío y $\mathscr{B}$ una colección no vacía de subconjuntos de X. Entonces $\mathscr{B}$ es una base de filtro en X si y sólo si $\emptyset \notin \mathscr{B}$ y para cualquiera $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si $\mathscr{B}$ es base de filtro, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{F}$ y consecuentemente $\emptyset \notin \mathscr{B}$. Ahora si $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, en particular $B_1, B_2 \in \mathscr{F}$ y luego $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{F}$, y como $\mathscr{B}$ es base, existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

$\Leftarrow$) Sea

$$\mathscr{F}_{\mathscr{B}} = \{F \subseteq X \mid \exists B \in \mathscr{B}(B \subseteq F)\}.$$

Claramente como $\mathscr{B} \neq \emptyset$, $\mathscr{F}_{\mathscr{B}} \neq \emptyset$, además como $\emptyset \notin \mathscr{B}$, entonces $\emptyset \notin \mathscr{F}_{\mathscr{B}}$. Además de la construcción de $\mathscr{F}_{\mathscr{B}}$ es claro que este es cerrado bajo superconjuntos. Por otro lado, si $F_1, F_2 \in \mathscr{F}_{\mathscr{B}}$, existen $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ tales que $B_1 \subseteq F_1$ y $B_2 \subseteq F_2$. Ahora, de la hipótesis sabemos que existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, entonces $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$ y consecuentemente $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}_{\mathscr{B}}$, lo cual termina la prueba de que este es un filtro y además es claro que $\mathscr{B}$ es una base de éste. $\square$

Note que en el Ejemplo 2.30 una base de filtro es simplemente $\{A\}$ mientras que en el Ejemplo 2.33 una base de filtro es $\{\{a_m \mid m > n\} \mid n \in \omega\}$.

Por otro lado, en el Ejemplo 2.31 la base es $\{U \in \tau \mid x \in U\}$, es decir, una base del filtro de vecindades es justamente una base de vecindades en el sentido topológico usual.

Definición 2.36. *Un filtro $\mathscr{F}$ en un conjunto X se dice ultrafiltro (o filtro maximal) si no existe otro filtro $\mathscr{G}$ tal que $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{G}$.*

Notemos que usando la notación del Ejemplo 2.33 se tiene que si existen $x, y \in A$, con $x \neq y$, $\mathscr{F}_A$ no es un ultrafiltro. Para ver esto note que $\mathscr{F}_A \subsetneq \mathscr{F}_{\{x\}}$. Esto es claro ya que cualquier conjunto $B \in \mathscr{F}_A$ es tal que $x \in B$, luego $B \in \mathscr{F}_{\{x\}}$; por otro lado, $\{x\} \in \mathscr{F}_{\{x\}}$ pero $\{x\} \notin \mathscr{F}_A$ ya que $A \nsubseteq \{x\}$ pues $y \notin \{x\}$.

Como era de esperarse algunos filtros no son ultrafiltros, sin embargo, como veremos a continuación, todo filtro se puede extender a un ultrafiltro, para probar esto necesitaremos una definición.

Definición 2.37. *Sea X un conjunto no vacío. Una familia $\mathscr{C}$ de subconjuntos de X se dice centrada (o que tiene la propiedad de intersección finita) si para cualquier subfamilia finita $\mathscr{C}' \subseteq \mathscr{C}$ se cumple que $\bigcap \mathscr{C}' \neq \emptyset$.*

Proposición 2.38. *Todo filtro es una familia centrada.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ un filtro y $\mathscr{F}'$ una subfamilia finita de éste. Como el filtro es cerrado bajo intersecciones finitas, entonces $\bigcap \mathscr{F}' \in \mathscr{F}$. Por otro lado, dado que el filtro es una colección de subconjuntos no vacíos y $\bigcap \mathscr{F}'$ es un elemento de este, $\bigcap \mathscr{F}' \neq \emptyset$, lo cual termina la prueba. □

Lema 2.39. *Sea X un conjunto no vacío. Para toda familia centrada $\mathscr{C}$ de subconjuntos de X existe un ultrafiltro $\mathscr{F}$ que la contiene.*

Demostración. Sea $\Psi = \{\mathscr{D} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathscr{D}$ es una familia centrada y $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}\}$.

Claramente $\Psi \neq \emptyset$ pues $\mathscr{C} \in \Psi$, además de ser un conjunto parcialmente ordenado por el orden de la contención, veamos que satisface las condiciones del Lema de Zorn.

Sea $(\mathscr{D}_i)_{i \in I}$ una cadena en Ψ y sea $\mathscr{E} = \bigcup_{i \in I} \mathscr{D}_i$; es claro que $\mathscr{E}$ es una cota de la cadena, así lo único que resta verificar es que $\mathscr{E} \in \Psi$. Para tener esto es suficiente ver que para toda subfamilia finita $\mathscr{E}' \subseteq \mathscr{E}$ se cumple que $\bigcap \mathscr{E}' \neq \emptyset$.

Sabemos que $\mathscr{E}' = \{A_0, A_1, ..., A_{n-1}\}$ y también que existen $i_0, i_1, ..., i_{n-1} \in I$ tales que $A_j \in \mathscr{D}_{i_j}$ para todo $j \in n$. Usando que $(\mathscr{D}_i)_{i \in I}$ es una cadena y eligiendo $i = \max\{i_j \mid j \in n\}$, se tiene que para todo $j \in n$ se satisface que $A_j \in \mathscr{D}_i$, pero $\mathscr{D}_i$ es una familia centrada y $\mathscr{E}'$ es una subfamilia finita de esta, luego $\bigcap \mathscr{E}' \neq \emptyset$.

Por el Lema de Zorn Ψ admite un elemento maximal $\mathscr{F}$. Resta verificar que $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro. Primero veamos que es un filtro.

Sea $A \in \mathscr{F}$ y $B \supseteq A$. Notemos que la familia $\mathscr{F} \cup \{B\}$ también cumple la propiedad de intersección finita. Para ver esto es suficiente observar que si $C \in \mathscr{F}$, entonces $C \cap B \neq \emptyset$, ya que $\emptyset \neq A \cap B \subseteq C \cap B$. De aquí se tiene que $\mathscr{F}, \mathscr{F} \cup \{B\} \in \Psi$, pero $\mathscr{F}$ es un elemento maximal de Ψ y $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F} \cup \{B\}$, consecuentemente $\mathscr{F} = \mathscr{F} \cup \{B\}$ y así $B \in \mathscr{F}$.

Análogamente sean $A, B \in \mathscr{F}$, la familia $\mathscr{F} \cup \{A \cap B\} \in \Psi$, ya que si $C \in \mathscr{F}$, entonces $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, pues $A, B, C \in \mathscr{F}$ y $\mathscr{F}$ es centrada. Ahora, con el mismo argumento de antes, se tiene que $A \cap B \in \mathscr{F}$ y consecuentemente $\mathscr{F}$ es un filtro. Supongamos que $\mathscr{F}$ no es ultrafiltro, así existe $\mathscr{G}$ un filtro tal que $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{G}$, pero, por la Proposición 2.38, $\mathscr{G}$ es una familia centrada y además $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{G}$, así $\mathscr{G} \in \Psi$, pero luego $\mathscr{F}$ no es maximal, lo cual es una contradicción. □

Corolario 2.40. *Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.*

La siguiente es una caracterización de los ultrafiltros que será de mucha utilidad.

Lema 2.41. *Sea X un conjunto no vacío y $\mathscr{F}$ un filtro en X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathscr{F}$ es un ultrafiltro.*
2. *$\mathscr{F}$ es una familia centrada maximal.*
3. *$\mathscr{F}$ es una base de filtro con la siguiente propiedad: para todo $A \subseteq X$, si $A \cap B \neq \emptyset$ para cada $B \in \mathscr{F}$, entonces $A \in \mathscr{F}$.*
4. *$\mathscr{F}$ es una familia centrada con la siguiente propiedad: para todo conjunto $A \subseteq X$, se tiene que $A \in \mathscr{F}$ o bien $X \setminus A \in \mathscr{F}$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Por la Proposición 2.38 sabemos que $\mathscr{F}$ es una familia centrada, lo único que resta ver es que es maximal. Sea $\mathscr{G}$ una familia centrada tal que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$. Por el Lema 2.39 sabemos que existe un ultrafiltro $\mathscr{H}$ tal que $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{H}$. De esto se sigue que:

$$\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G} \subseteq \mathscr{H},$$

pero $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro y $\mathscr{H}$ es un filtro tal que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}$, así $\mathscr{F} = \mathscr{H}$ y consecuentemente $\mathscr{F} = \mathscr{G}$, es decir, $\mathscr{F}$ es maximal en el ámbito de familias centradas.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $\mathscr{B}$ la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{F}$, es decir:

$$\mathscr{B} = \{F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n \mid (F_1, ..., F_n \in \mathscr{F}) \wedge (n \in \omega)\}.$$

Como $\mathscr{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, por la Proposición 2.35, $\mathscr{B}$ es una base de filtro, y además es claro que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{B}$. Por otro lado, toda base de filtro es una familia centrada, consecuentemente, por la maximalidad de $\mathscr{F}$ se sigue que $\mathscr{F} = \mathscr{B}$, y luego $\mathscr{F}$ es una base de filtro.

Sea A un conjunto tal que para todo $B \in \mathscr{F}$ se tiene que $A \cap B \neq \emptyset$, esto implica, debido a que $\mathscr{F}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, que la familia $\mathscr{F} \cup \{A\}$ también es centrada; ahora, por la maximalidad de $\mathscr{F}$, y puesto que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F} \cup \{A\}$, se tiene que $\mathscr{F} = \mathscr{F} \cup \{A\}$, es decir, $A \in \mathscr{F}$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Sabemos que toda base de filtro es una familia centrada. La segunda parte la haremos por contradicción, es decir, supongamos que existe $A \subseteq X$ tal que $A \notin \mathscr{F}$ y $(X \setminus A) \notin \mathscr{F}$. Por la propiedad que caracteriza a $\mathscr{F}$, sabemos que existen $B, C \in \mathscr{F}$ tales que $A \cap B = \emptyset = (X \setminus A) \cap C$. Pero de esto se sigue que $B \subseteq (X \setminus A)$ y $C \subseteq A$, luego $B \cap C \subseteq (X \setminus A) \cap A = \emptyset$ y consecuentemente $B \cap C = \emptyset$, lo cual contradice que $\mathscr{F}$ es centrada.

(4) $\Rightarrow$ (1) Sea

$$\mathscr{B} = \{A_1 \cap ... \cap A_n \mid (A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}) \wedge (n \in \omega)\}.$$

Es claro que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{B}$ y además, por ser $\mathscr{F}$ centrada, $\emptyset \notin \mathscr{B}$, además $\mathscr{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, luego, por la Proposición 2.35 se sigue que $\mathscr{B}$ es una base de filtro. Vamos a ver que de hecho $\mathscr{B}$ es un ultrafiltro. Sea $A \in \mathscr{B}$ y $B \supseteq A$. Si $B \notin \mathscr{B}$, en particular, $B \notin \mathscr{F}$, consecuentemente, por la hipótesis, $X \setminus B \in \mathscr{F}$. Ahora como $A, (X \setminus B) \in \mathscr{F}$ y $\mathscr{F}$ es base de filtro (en particular es centrada), $A \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$, pero esto es imposible ya que $A \subseteq B$. Esto implica que $B \in \mathscr{B}$, y así $\mathscr{B}$ es cerrada bajo superconjuntos. Así, de la misma construcción de $\mathscr{B}$, se tiene que esta es cerrada bajo intersecciones finitas y en consecuencia es un filtro.

Supongamos que $\mathscr{G}$ es un filtro tal que $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{G}$. Sea $A \in \mathscr{G}$ arbitrario. Sabemos que $A \in \mathscr{F}$ o $(X \setminus A) \in \mathscr{F}$. Pero si $(X \setminus A) \in \mathscr{F}$ entonces, como $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{B} \subseteq \mathscr{G}$, se tiene que $(X \setminus A), A \in \mathscr{G}$, y como $\mathscr{G}$ es filtro, por la Proposición 2.38, es centrada, así debería suceder que $(X \setminus A) \cap A \neq \emptyset$, lo cual es imposible. Así $A \in \mathscr{F}$ y consecuentemente $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$. Concluimos que $\mathscr{G} = \mathscr{F}$ y luego $\mathscr{F} = \mathscr{B} = \mathscr{G}$, lo cual prueba, como $\mathscr{B}$ es filtro que $\mathscr{F}$ lo es, y además que cualquier filtro que lo contenga es él mismo, es decir, que es un ultrafiltro. □

Corolario 2.42. *Sea $\mathscr{F}$ un filtro sobre un conjunto X. Las siguientes dos condiciones son equivalentes.*

1. *$\mathscr{F}$ es ultrafiltro.*

2. *Para todo $A \subseteq X$ se tiene que $A \in \mathscr{F}$ o bien $(X \setminus A) \in \mathscr{F}$.*

Gracias al Lema 2.41, y sobre todo al Corolario 2.42, ahora tenemos una caracterización muy útil de los ultrafiltros que nos ayudará a probar el teorema central de esta sección.

Teorema 2.43. *Para cualquier cardinal κ hay 2^{2^κ} ultrafiltros sobre κ.*

Demostración. Como cualquier ultrafiltro es un elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\kappa))$, hay a lo más 2^{2^κ} ultrafiltros. Ahora sea $\mathscr{F}$ como en el Teorema 2.26. Para cada $f : \mathscr{F} \to 2$ definamos

$$G_f = \{X \subseteq \kappa \mid X \text{ es co-finito}^8\} \cup \{X \subseteq \kappa \mid f(X) = 1\} \cup \{\kappa \setminus X \mid f(X) = 0\}$$

y veamos que G_f es una familia centrada.

Si $A, B \in G_f$ son tales que $f(A) = f(B) = 1$, como en particular $A, B \in \mathscr{F}$, $A \cap B$ es de tamaño κ y consecuentemente es no vacío. Análogamente, tomando en cuenta que $\mathscr{F}$ es una familia independiente, si A, B son tales que $f(A) = 1$ y $f(B) = 0$, $A \cap (\kappa \setminus B) \neq \emptyset$ y si $f(A) = f(B) = 0$, $(\kappa \setminus A) \cap (\kappa \setminus B) \neq \emptyset$. Sólo falta ver qué pasa si se intersecta un elemento de $\{X \subseteq \kappa \mid f(X) = 1\} \cup \{\kappa \setminus X \mid f(X) = 0\}$ con un co-finito. Sea $X \in \mathscr{F}$ y $Y \subseteq \kappa$ co-finito. Ahora si $X \cap Y = \emptyset$, $X \subseteq (\kappa \setminus Y)$, pero $(\kappa \setminus Y)$ es finito, y consecuentemente X lo es, lo cual es imposible porque cualquier elemento de $\mathscr{F}$ es infinito. De igual manera, si $(\kappa \setminus X) \cap Y = \emptyset$, $(\kappa \setminus X)$

[8] Decimos que un conjunto $X \subseteq \omega$ es co-finito si $\omega \setminus X$ es finito, en caso contrario decimos que X es co-infinito.

es finito, lo cual también es una contradicción, ya que también los complementos de los elementos de $\mathscr{F}$ son infinitos.

Ahora que sabemos que G_f es centrada, podemos aplicar el Lema 2.39, el cual garantiza que existe un ultrafiltro U_f tal que $G_f \subseteq U_f$. Si se tienen dos funciones $f, g : \mathscr{F} \to 2$ distintas, existe $X \in \mathscr{F}$ tal que $f(X) \neq g(X)$; supongamos que $f(X) = 1$ y $g(X) = 0$, entonces $X \in U_f$ y $(\kappa \setminus X) \in U_g$, consecuentemente, por el Corolario 2.42, son ultrafiltros distintos. En consecuencia hay al menos tantos ultrafiltros como funciones $f : \mathscr{F} \to 2$, es decir, tantas como $2^{|\mathscr{F}|} = 2^{2^\kappa}$, lo cual termina la prueba. □

El Teorema 2.43 tiene interesantes consecuencias, las cuales muestran la relación que el concepto de filtro tiene con otros objetos matemáticos.

Definición 2.44. *Sea X un conjunto no vacío y $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre X. Decimos que $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro no principal si sucede que $\bigcap \mathscr{F} = \emptyset$.*

Corolario 2.45. *Para cualquier cardinal κ hay 2^{2^κ} ultrafiltros no principales sobre κ.*

Demostración. Sabemos que los únicos ultrafiltros principales sobre κ son de la forma[9] $\mathscr{F}_x$, con $x \in \kappa$, por lo tanto de todos los ultrafiltros sólo κ de ellos son principales. Ahora, si $\mathbb{P}$ es el conjunto de todos los ultrafiltros principales sobre κ y $\mathbb{NP}$ el de los no principales, se cumple que:

$$2^{2^\kappa} = |\mathbb{P} \cup \mathbb{NP}| = |\mathbb{P}| + |\mathbb{NP}| = \kappa + |\mathbb{NP}| = \text{máx}\{\kappa, |\mathbb{NP}|\}.$$

Como $\kappa < 2^{2^\kappa}$, entonces $|\mathbb{NP}| = 2^{2^\kappa}$, que era lo que se quería. □

Corolario 2.46. *Existen ultrafiltros no principales sobre cualquier conjunto infinito.*

Este último corolario podría parecer trivial, sin embargo, como se menciona en [9], la existencia de ultrafiltros no principales no se puede garantizar en ZF pero sí en ZFC, es decir, es imprescindible el Axioma de Elección para garantizar que dichos objetos existen; pero ningún argumento de la demostración del Corolario 2.45 está basado en AC, por lo tanto se debió haber usado en algún otro lugar. Y efectivamente, para probar el Teorema 2.43 hemos usado que cualquier familia centrada se puede extender a un ultrafiltro, lo cual proviene del Lema 2.39, en el cual hemos usado el Lema de Zorn, que es equivalente a AC.

Otro detalle sutil a considerar es que en la demostración topológica de la existencia de las familias independientes grandes sobre cualquier cardinal κ (Lema 2.16 y Teorema 2.26) hemos usado también un equivalente al Axioma de Elección: el Teorema de Tychonoff, pero la segunda demostración (Proposición 2.27 y Corolario 2.28) es en ZF, lo cual es mejor desde un punto de vista lógico.

Veamos ahora otra consecuencia del Teorema 2.43.

Teorema 2.47. *Para cualquier cardinal κ hay 2^{2^κ} topologías sobre κ.*

[9] Aquí estamos usando la notación del Ejemplo 2.30.

Demostración. Como cada topología en κ es un elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\kappa))$ y

$$|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\kappa))| = 2^{2^\kappa},$$

hay a lo más 2^{2^κ} topologías distintas. Para cada ultrafiltro U sobre κ definamos τ_U como $\tau_U = U \cup \{\emptyset\}$.

Veamos que τ_U es una topología sobre κ. Es claro que $\emptyset \in \tau_U$, además como U es filtro, $\kappa \in U \subseteq \tau_u$. Ahora sean $A, B \in \tau_U$ y veamos que $A \cap B \in \tau_U$. Si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$, $A \cap B = \emptyset \in \tau_U$, en caso contrario $A, B \in U$ y como U es filtro -en particular es cerrado bajo intersecciones finitas- se sigue que $A \cap B \in U \subseteq \tau_U$. Sólo resta ver que la unión arbitraria de conjuntos de τ_U está en τ_U. Sea $(O_i)_{i\in I}$ una familia de elementos de τ_U; si algún $O_{i_0} \neq \emptyset$, $O_{i_0} \in U$ y como $O_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$ y U es cerrado por arriba, $\bigcup_{i\in I} O_i \in U \subseteq \tau_U$; si $O_i = \emptyset$ para todo $i \in I$, $\bigcup_{i\in I} O_i = \emptyset \in \tau_U$.

Por último notemos que si U_0, U_1 son dos ultrafiltros distintos, existe $X \subseteq \kappa$ tal que $X \in U_0 \backslash U_1$, consecuentemente, como $X \neq \emptyset$, $X \in \tau_{U_0} \backslash \tau_{U_1}$, así $\tau_{U_0} \neq \tau_{U_1}$. Luego cada ultrafiltro induce una topología distinta y consecuentemente hay al menos 2^{2^κ} topologías. □

Note que en todas las topologías de la forma τ_U se tiene que los únicos conjuntos clopen son $\emptyset$ y κ.

Mostramos a continuación una última consecuencia de la existencia de familias independientes grandes que tiene que ver con teoría de la medida.

Definición 2.48. *Sea X un conjunto no vacío. Una medida finito-aditiva sobre X es una función $\mu : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ tal que:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) > 0$.
2. *Si* $A \subseteq B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$.
3. *Si A y B son disjuntos,* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Además una medida μ se dice bivaluada si el rango de μ es $\{0, 1\}$.

Lema 2.49. *Para cualquier cardinal κ hay 2^{2^κ} medidas finito-aditivas bivaluadas sobre κ.*

Demostración. Como cada medida bivaluada finito-aditiva sobre κ es una función que va de 2^κ al 2, existen a lo más 2^{2^κ} de dichas medidas. Por otro lado si U es un ultrafiltro sobre κ y definimos la función $\mu : \mathcal{P}(X) \to 2$ como sigue:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & si \quad A \notin U \\ \\ 1 & si \quad A \in U, \end{cases}$$

μ resulta ser una medida finito-aditiva bivaluada sobre κ.

Se puede observar sin dificultad que la condición (1) se satisface; para la condición (2) procederemos por contradicción. Supongamos que $A \subseteq B$ pero $\mu(A) \nleq \mu(B)$, es decir, $\mu(A) > \mu(B)$, consecuentemente $A \in U$ y $B \notin U$, pero sabemos que $A \subseteq B$, y como U es cerrado por arriba (y $A \in U$), $B \in U$, lo cual es una contradicción. Para la condición (3) notemos que como U es un filtro, puesto que en particular es una familia centrada, no existen conjuntos disjuntos con medida positiva. Ahora, si A, B son disjuntos, existen sólo dos casos:

1. $A \notin U$ y $B \notin U$, en cuyo caso, como U es un ultrafiltro se tiene que $\kappa \setminus A, \kappa \setminus B \in U$, y luego $(\kappa \setminus A) \cap (\kappa \setminus B) \in U$, consecuentemente

$$A \cup B = \kappa \setminus (\kappa \setminus A \cap \kappa \setminus B) \notin U$$

   y así $\mu(A) + \mu(B) = 0 + 0 = 0 = \mu(A \cup B)$.

2. $A \notin U$ y $B \in U$, en cuyo caso, como U es filtro, $A \cup B \in U$ y consecuentemente:

$$\mu(A) + \mu(B) = 0 + 1 = 1 = \mu(A \cup B).$$

   Puesto que cada ultrafiltro induce una medida bivaluada distinta, se tiene que hay al menos 2^{2^κ} medidas, lo cual termina la prueba[10].

□

[10] Es muy importante notar que todas estas medidas no necesariamente son σ-aditivas.

Capítulo 3

Familias independientes maximales

Ya hemos visto en el capítulo anterior que existen las familias independientes *grandes* en el sentido de su cardinalidad y también observamos que la existencia de dichas familias implica algunos resultados interesantes; sin embargo, existe otra noción (una noción sorprendentemente mucho más común) de lo que en matemáticas significa un objeto *grande*: la maximalidad. En este capítulo estudiaremos familias independientes que cumplen precisamente esta propiedad, mostraremos, al igual que antes, que estas familias también existen con los axiomas de ZFC, estudiaremos algunas de sus propiedades más importantes y veremos cómo estas propiedades están íntimamente relacionadas con algunos cardinales invariantes del continuo, además se muestran algunas generalizaciones de las familias independientes maximales y se da prueba (bajo ciertas suposiciones) de la existencia de estas nuevas familias.

3.1. Algunas propiedades básicas

Vamos a mostrar primero una notación que es muy útil y adecuada para trabajar con el envolvente de una familia independiente, esta notación fue introducida por Saharon Shelah en [17].

Definición 3.1. *Si A es un subconjunto de ω, entonces definamos $A^0 = A$ y $A^1 = \omega \setminus A$. Si I es una familia de subconjuntos de ω y si $h \in FF(I)$, entonces definimos I^h como $I^h = \bigcap\{A^{h(A)} \mid A \text{ está en el dominio de } h\}$.*

Note que $ENV(I) = \{I^h \mid h \in FF(I)\}$. Los siguientes resultados nos van ayudar a dar una caracterización de cuándo una familia independiente es o no maximal.

Proposición 3.2. *Si I es una familia independiente, entonces $I^{h_1} \subseteq I^{h_2}$ si y sólo si $h_2 \subseteq h_1$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Por contradicción, es decir, supongamos que $h_2 \not\subseteq h_1$. Por lo tanto existe $A \in dom(h_2)$ tal que o $h_1(A) \neq h_2(A)$ o $A \notin dom(h_1)$. Veamos que no puede suceder que $h_1(A) \neq h_2(A)$. Si así fuese, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $h_1(A) = 0$ y $h_2(A) = 1$. Entonces $I^{h_1} \subseteq A^0 = A$ y $I^{h_2} \subseteq A^1 = (\omega \setminus A)$, pero como $I^{h_1} \subseteq I^{h_2}$ se sigue que $I^{h_1} \subseteq A$ y que $I^{h_1} \subseteq (\omega \setminus A)$, por lo tanto $I^{h_1} = \emptyset$ lo cual es una contradicción pues I^{h_1} es infinito. Luego debe suceder que $A \notin dom(h_1)$.

Como $A \in dom(h_2)$, $I^{h_2} \subseteq (\omega \setminus A)$ o $I^{h_2} \subseteq A$, y como $I^{h_1} \subseteq I^{h_2}$, entonces $I^{h_1} \subseteq (\omega \setminus A)$ o $I^{h_1} \subseteq A$

Ahora, por ser I independiente, y como $A \notin dom(h_1)$, se tiene que $I^{h_1} \cap A$ y $I^{h_1} \cap (\omega \setminus A)$ son ambos infinitos, en particular $I^{h_1} \not\subseteq (\omega \setminus A)$ y $I^{h_1} \not\subseteq A$, lo cual es una contradicción.

$\Leftarrow$] Esta dirección es clara. □

Proposición 3.3. *Sean I una familia independiente, $h \in FF(I)$ y $x \in I^h$, entonces h se puede extender a otra función $k \in FF(I)$ tal que $x \notin I^k$.*

Demostración. Como I es infinita, existe $A \in I$ tal que $A \notin dom(h)$. Sabemos que $x \in A$ o $x \in (\omega \setminus A)$, pero no ambas. Supongamos que $x \in A$ (el otro caso es análogo). La función $k = h \cup \{(A, 1)\}$ extiende a h y cumple que $I^k \subseteq A^1 = (\omega \setminus A)$, y por lo tanto $x \notin I^k$. □

Corolario 3.4. *Sean I una familia independiente, $A \subseteq \omega$ y $E \in ENV(I)$. Si $E \subseteq^* A$ o $E \cap A =^* \emptyset$, existe $F \in ENV(I)$, con $F \subseteq E$, tal que $F \subseteq A$ o $F \cap A = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $E \subseteq^* A$, el otro caso es análogo. Entonces $E \setminus A = \{x_1, ..., x_n\}$. Por otro lado, $E = I^h$ para alguna $h \in FF(I)$. Elijamos $A_1, ..., A_n \in I$ distintos tales que $A_j \notin dom(h)$. Para cada $j \in \{1, ..., n\}$ sucede que $x_j \in A_j$ o $x_j \in (\omega \setminus A_j)$. Si $x_j \in A_j$, definamos $i_j = 1$, y si $x_j \in (\omega \setminus A_j)$, $i_j = 0$. Ahora la función $k = h \cup \{(A_1, i_1), ..., (A_n, i_n)\}$ cumple que $x_j \notin I^k$. Eligiéndose $F = I^k$ se tiene el resultado.

□

Lema 3.5. *Sea I una familia independiente y $A \subseteq \omega$, con $A \notin I$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$I \cup \{A\}$ es independiente.*
2. *A y $(\omega \setminus A)$ tienen intersección no vacía con cada elemento de $ENV(I)$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Basta notar que:

$$ENV(I \cup \{A\}) = ENV(I) \cup \{E \cap A \mid E \in ENV(I)\} \cup \\ \{E \cap (\omega \setminus A) \mid E \in ENV(I)\}.$$

Luego como $I \cup \{A\}$ es independiente, todos los elementos de $ENV(I \cup \{A\})$ deben ser infinitos, en particular lo deben ser los de $(\{E \cap A \mid E \in ENV(I)\})$ y los de $(\{E \cap (\omega \setminus A) \mid E \in ENV(I)\})$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sabemos que para todo $E \in ENV(I)$ se tiene que $E \cap A \neq \emptyset$ y $E \cap (\omega \setminus A) \neq \emptyset$, lo único que falta ver es que ambos son infinitos.

Si existiese $E \in ENV(I)$ tal que $E \cap A$ es finito (o tal que $E \cap (\omega \setminus A)$ lo es), por el Corolario 3.4 existiría $F \in ENV(I)$ tal que $F \cap A = \emptyset$ (o tal que $F \cap (\omega \setminus A) = \emptyset$), pero esto sería una contradicción, pues la hipótesis garantiza que $F \cap A \neq \emptyset$ y $F \cap (\omega \setminus A) \neq \emptyset$. □

3.2. Maximalidad y sus equivalencias

Antes se probó que existen familias independientes de cardinalidad $2^{\aleph_0}$ sobre el conjunto de los naturales, es decir, que existen familias independientes lo más grandes posibles, o dicho de otro modo, de cardinalidad máxima. En esta sección veremos otra propiedad de maximalidad, pero no respecto de la cardinalidad de las familias, sino con respecto de la contención.[1]

Definición 3.6. *Una familia independiente I es maximal si siempre que $A \subseteq \omega$ y $A \notin I$, $I \cup \{A\}$ no es independiente.*

Como suele pasar, la definición refleja muy bien nuestra idea intuitiva de qué es lo que debería significar maximal, sin embargo, no es muy útil trabajar directamente con ella; la importancia del siguiente lema es que nos da una caracterización más conveniente de la maximalidad.

Lema 3.7. *Sea I una familia independiente. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *I es maximal.*
2. *Si $A \subseteq \omega$, existe $B \in ENV(I)$ tal que $B \subseteq A$ o $B \cap A = \emptyset$.*
3. *Si $f : \omega \to 2$, existe $B \in ENV(I)$ tal que $f \restriction B$ es constante.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Si $A \in I$, basta tomar $B = A$. Si $A \notin I$, entonces, como I es maximal, $I \cup \{A\}$ no es independiente, consecuentemente, por el Lema 3.5, se tiene que hay un $B \in ENV(I)$ tal que $A \cap B = \emptyset$ o $(\omega \setminus A) \cap B = \emptyset$, es decir, $A \cap B = \emptyset$ o $B \subseteq A$, como se quería.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $A = \{x \in \omega \mid f(x) = 1\}$. Ahora por la hipótesis sabemos que existe un $B \in ENV(I)$ tal que $B \subseteq A$ o $B \cap A = \emptyset$; en el primer caso se tiene que $f \restriction B = 1$ y en el segundo $f \restriction B = 0$, en ambos casos $f \restriction B$ es constante, como se quería.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que I no es maximal, es decir, existe $A \subseteq \omega$ con $A \notin I$ tal que $I \cup \{A\}$ es independiente. Sea $f : \omega \to 2$ definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ \\ 0 & si \quad x \notin A. \end{cases}$$

[1] En esta sección volvemos a trabajar únicamente con el conjunto de los números naturales ω.

Como $I \cup \{A\}$ es independiente, para todo $B \in ENV(I)$ se tiene que $B \cap A \neq \emptyset$ y $B \nsubseteq A$, de donde se sigue que existen $x, y \in B$ tales que $f(x) = 1$ y $f(y) = 0$, es decir, $f \restriction B$ no es constante para todo $B \in ENV(I)$, lo cual es una contradicción. □

Definición 3.8. *Una familia $\mathscr{R} \subseteq [\omega]^\omega$ es llamada segada (o indivisible) si no existe un conjunto A tal que para todo $B \in \mathscr{R}$ se cumpla que $|A \cap B| = \aleph_0$ y $|B \setminus A| = \aleph_0$.*

Note que por el Lema 3.7 se tiene que si I es una familia independiente, esta es maximal si y sólo si $ENV(I)$ es segada.

Veamos que para ser maximal una familia independiente no puede ser pequeña en cardinalidad, más precisamente, su cardinalidad debe ser mayor que $\aleph_0$.

Lema 3.9. *Si I es una familia independiente numerable, entonces existe $A \subseteq \omega$, con $A \notin I$, tal que $I \cup \{A\}$ es independiente.*

Demostración. Sabemos que $I = \{I_n \mid n \in \omega\}$ y consecuentemente $ENV(I)$ también es numerable. Sea pues $\langle E_n \mid n \in \omega \rangle$ una enumeración de $ENV(I)$. Sean $(a_n)_{n\in\omega}$ y $(b_n)_{n\in\omega}$ dos sucesiones crecientes de números naturales tales que $a_n, b_n \in E_n$ y además $a_n < b_n < a_{n+1}$. Estas dos sucesiones existen ya que cada E_n es infinito y en cada paso sólo se toman finitos elementos. Sea $A = \{a_n \mid n \in \omega\}$. Veamos que $A \notin I$. Sea $B \in I$ arbitrario, entonces $(\omega \setminus B) \in ENV(I)$, y por lo tanto para algún $n \in \omega$ se tiene que $(\omega \setminus B) = E_n$, luego a_n es tal que $a_n \in A$ y $a_n \in (\omega \setminus B)$, de donde $A \neq B$.

Por la misma construcción de A se tiene que A y $(\omega \setminus A)$ tienen intersección con cada elemento de $ENV(I)$, pues $a_n \in A \cap E_n$ y $b_n \in (\omega \setminus B) \cap E_n$. Aplicando el Lema 3.5 se tiene que $I \cup \{A\}$ es independiente, lo cual termina la prueba. □

Así las familias independientes numerables no son maximales, sin embargo, y como es de esperarse, toda familia independiente está contenida en una maximal.

Proposición 3.10. *Toda familia independiente I está contenida en una familia independiente maximal.*

Demostración. Sea

$$\Psi = \{J \mid (J \text{ es independiente }) \wedge (I \subseteq J)\}$$

y veamos que Ψ satisface las condiciones del Lema de Zorn.

Claramente $\Psi \neq \emptyset$ pues $I \in \Psi$. Ahora sea $(J_l)_{l\in L}$ una cadena en Ψ. Si $K = \bigcup_{l \in L} J_l$, es claro que K es una cota de la cadena y además $I \subseteq K$, sólo resta ver que $K \in \Psi$, es decir, que K es independiente. Para esto sean S, T dos subfamilias finitas y disjuntas de K:

$$S = \{A_0, ..., A_{n-1}\}, T = \{B_0, ..., B_{m-1}\}.$$

Ahora, para todo $i \in n$, existe $l_i \in L$ tal que $A_i \in J_{l_i}$ y análogamente para todo $j \in m$ existe $l_j \in L$ tal que $B_j \in J_{l_j}$. Ahora usando que $(J_l)_{l\in L}$ es una cadena y eligiendo $o = max(\{l_i \mid i \in n\} \cup \{l_j \mid j \in m\})$ se tiene que $S, T \subseteq J_o$ y consecuentemente, como J_o es independiente se sigue que:

$$\left(\bigcap S\right) \setminus \bigcup T$$

es infinito, lo cual prueba que K es independiente. Ahora, por el Lema de Zorn, Ψ tiene un elemento maximal (respecto a la contención), lo cual termina la prueba[2]. □

3.3. Desigualdades cardinales

De la Proposición 3.10 se sigue que toda familia independiente de cardinalidad $\mathfrak{c}$ se puede extender a una maximal, pero esa maximal tiene necesariamente la misma cardinalidad. De esto surge una pregunta natural, ¿cuál será el mínimo cardinal $\mathfrak{i}$ para el cual existe una familia independiente maximal? Sabemos, por el Lema 3.9 y por el comentario anterior, que $\aleph_0 < \mathfrak{i} \leq \mathfrak{c}$. Note que si asumiésemos la Hipótesis del Continuo, entonces sería trivial que $\mathfrak{i} = \mathfrak{c}$, así que de momento vamos a suponer su negación ($\neg\mathsf{CH}$).

Definición 3.11. *Definimos el cardinal* $\mathfrak{i}$ *como:*

$$\mathfrak{i} = \text{mín}\{|I| \mid I \text{ es una familia independiente maximal}\}.$$

Como $\aleph_0 < \mathfrak{i} \leq \mathfrak{c}$, $\mathfrak{i}$ es uno de los cardinales invariantes del continuo, además gracias al Lema 3.7 se tiene una cota inferior para $\mathfrak{i}$.

Definición 3.12. *Definimos el cardinal* $\mathfrak{r}$ *como:*

$$\mathfrak{r} = \text{mín}\{|\mathscr{R}| \mid \mathscr{R} \text{ es una familia segada}\}^3.$$

Teorema 3.13. $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{i}$.

Demostración. Ya sabemos que para toda familia independiente $|I| = |ENV(I)|$ y además que I es maximal si y sólo si $ENV(I)$ es segada. Por lo tanto hay familias segadas de cardinalidad $\mathfrak{i}$, pero $\mathfrak{r}$ es el mínimo para el cual existe una familia segada, luego $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{i}$. □

La noción de familia segada nos dio una cota de $\mathfrak{i}$, por lo tanto uno busca *extender* la noción de ser segada para obtener otra cota, un primer intento motiva la siguiente definición.

Definición 3.14. *Una familia $\mathscr{R} \subseteq [\omega]^\omega$ es llamada σ-segada si no existe una familia numerable $\mathscr{F}$ tal que para todo $B \in \mathscr{R}$ exista un $A \in \mathscr{F}$ tal que $|A \cap B| = |B \setminus A| = \aleph_0$.*

---

[2] Una familia independiente es maximal respecto a la definición 3.6 si y sólo si es maximal con respecto a la contención en el ámbito de familias independientes.

[3] Note que el cardinal $\mathfrak{r}$ está bien definido pues las familias segadas existen como consecuencia de la existencia de las familias independientes maximales.

Sea $\mathfrak{r}_\sigma$ el mínimo cardinal para el cual existe una familia σ-segada, es decir:

$$\mathfrak{r}_\sigma = \text{mín}\{|\mathscr{F}| \mid \mathscr{F} \text{ es una familia } \sigma\text{-segada}\}.$$

Puesto que es claro que toda familia σ-segada es segada, se cumple que:

$$\mathfrak{r} \leq \mathfrak{r}_\sigma.$$

Esta desigualdad motiva a que se quieran comparar los cardinales $\mathfrak{i}$ y $\mathfrak{r}_\sigma$ y la forma más natural, y siguiendo lo que se hizo cuando se comparó $\mathfrak{i}$ con $\mathfrak{r}$, sería preguntar si para una familia maximal I se cumple que $ENV(I)$ es σ-segada.

Lamentablemente esto no es cierto, ya que si I es una familia independiente y $ENV(I)$ es su envolvente, eligiendo $\mathscr{F}$ como una subfamilia numerable de I, por la independencia de I, se cumple que para todo $E \in ENV(I)$ existe un $B \in \mathscr{F}$ tal que $B \cap E$ y $B \setminus E$ son ambos infinitos. Para ver más claro esto sea pues E un elemento de $ENV(I)$, es decir:

$$E = X_0 \cap ... \cap X_{n-1} \cap (\omega \setminus Y_0) \cap ... \cap (\omega \setminus Y_{m-1}),$$

con $X_i, Y_j \in I$ todos distintos. Ahora sabemos que, como $\mathscr{F}$ es numerable, existe un $B \in \mathscr{F}$ tal que $B \neq X_i$ y $B \neq Y_j$ para todos $i \in n$ y $j \in m$. Pero también $B \in I$, luego por ser I independiente se tiene que:

$$B \cap E = B \cap X_0 \cap ... \cap X_{n-1} \cap (\omega \setminus Y_0) \cap ... \cap (\omega \setminus Y_{m-1})$$

y

$$E \setminus B = E \cap (\omega \setminus B) = X_0 \cap ... \cap X_{n-1} \cap (\omega \setminus Y_0) \cap ... \cap (\omega \setminus Y_{m-1}) \cap (\omega \setminus B)$$

son ambos infinitos, como se quería.

Por lo tanto $ENV(I)$ no es σ-segada [4] y consecuentemente los cardinales $\mathfrak{i}$ y $\mathfrak{r}_\sigma$ no están obviamente relacionados.

Seguimos buscando cotas para $\mathfrak{i}$, el cardinal $\mathfrak{d}$ es bien conocido y sí nos da otra cota inferior.

Definición 3.15. *Sean $f, g \in \omega^\omega$. Decimos que f domina a g si el conjunto $\{n \in \omega \mid f(n) < g(n)\}$ es finito, y lo denotaremos como $g \leq^* f$.*

Definición 3.16. *Una familia $\mathscr{D} \subseteq \omega^\omega$ es dominante si para cualquier $g \in \omega^\omega$ existe una $f \in \mathscr{D}$ tal que $g \leq^* f$.*

Definición 3.17. *El numero dominante $\mathfrak{d}$ es el mínimo cardinal para el cual existe una familia dominante de ese tamaño, es decir:*

$$\mathfrak{d} = \text{mín}\{|\mathscr{D}| \mid \mathscr{D} \text{ es una familia dominante}\}.$$

[4] Note que en esta demostración nunca se uso que I fuese maximal, luego no sólo $ENV(I)$ no es σ-cegada para familias independientes maximales, sino que no lo es para ninguna familia independiente.

Note que $\mathfrak{d}$ sí está bien definido pues existen las familias dominantes, una de ellas es $\mathscr{D} = \omega^\omega$.

Antes de probar el teorema que relaciona los cardinales $\mathfrak{i}$ y $\mathfrak{d}$ necesitamos un par de lemas importantes, además de dos definiciones.

Definición 3.18. *Una sucesión $(C_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos de ω se dice decreciente si $C_{n+1} \subseteq C_n$ para todo $n \in \omega$.*

Definición 3.19. *Sean A y B dos conjuntos.*

1. *Decimos que A está casi contenido en B si el conjunto $A \setminus B$ es finito y lo denotamos por $A \subseteq^* B$.*

2. *Diremos que A es casi igual a B si $A \subseteq^* B$ y $B \subseteq^* A$ y lo denotaremos por $A =^* B$.*

Definición 3.20. *Una sucesión $(C_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos de ω se dice casi decreciente si $C_{n+1} \subseteq^* C_n$ para todo $n \in \omega$.*

Definición 3.21. *Sea $\mathscr{C}$ una familia de subconjuntos de ω. Entonces $B \subseteq \omega$ es una pseudointersección de $\mathscr{C}$ si para todo $C \in \mathscr{C}$ se cumple que $B \subseteq^* C$.*

Lema 3.22. *Supóngase que $(C_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión decreciente (o casi decreciente) de subconjuntos infinitos de ω y supóngase que $\mathscr{A}$ es una familia de menos de $\mathfrak{d}$ subconjuntos de ω tal que para cada conjunto $A \in \mathscr{A}$ se cumple que $A \cap C_n$ es infinito para todo $n \in \omega$. Entonces $\{C_n \mid n \in \omega\}$ tiene una pseudointersección B tal que tiene intersección infinita con cada elemento de $\mathscr{A}$.*

Demostración. Vamos a asumir que $(C_n)_{n\in\omega}$ es decreciente, ya que si es casi decreciente se puede substituir C_n por $\bigcap_{k\leq n} C_k$ sin afectar las otras hipótesis y la conclusión, ya que cada C_n difiere sólo finitamente de $\bigcap_{k\leq n} C_k$. Para cada $h \in \omega^\omega$ sea

$$B_h = \bigcup_{n\in\omega} (C_n \cap h(n)).$$

Ahora notemos que C_n contiene a todos excepto posiblemente a los primeros n términos de está unión, ya que si $m > n$, $C_m \subseteq C_n$ y luego

$$C_m \cap h(m) \subseteq C_n \cap h(m) \subseteq C_n,$$

y por lo tanto

$$C_n \setminus B_h \subseteq \bigcup_{m\in n} (C_m \cap h(m)),$$

pero el conjunto de la derecha es una unión finita de conjuntos finitos, luego es finito y así $C_n \setminus B_h$ también lo es y consecuentemente B_h es una pseudointersección de $\{C_n \mid n \in \omega\}$. Lo que queda por ver es que existe una función $h \in \omega^\omega$ tal que $A \cap B_h$ es infinito para todo $A \in \mathscr{A}$.

Para cada $A \in \mathscr{A}$ sea $f_A(n)$ el n-ésimo elemento del conjunto infinito $A \cap C_n$.

Observe que $h(n) > f_A(n)$ es equivalente a decir que el n-ésimo elemento de $A \cap C_n$ está en $h(n)$, pero si está el n-ésimo, también está el primero, segundo, tercero, etc. Pero como estos elementos están, por definición, en C_n, entonces están en $C_n \cap h(n)$. Ahora por lo menos estos n elementos que están, de nuevo por definición, en A también están en B_h (ya que $C_n \cap h(n) \subseteq B_h$), y por lo tanto $|B_h \cap A| \geq n$.

Así B_h servirá como la pseudointersección buscada si sucede que para todo $A \in \mathscr{A}$ existen infinitos números naturales n tales que $h(n) > f_A(n)$, porque en ese caso $|B_h \cap A| \geq n$ para infinitos n's distintos, es decir, $B_h \cap A$ será infinito. Pero hay menos de $\mathfrak{d}$ funciones de la forma f_A, así que por lo menos existe una función $h \in \omega^\omega$ tal que no es dominada por ninguna f_A, en otras palabras, $\{n \in \omega \mid h(n) > f_A(n)\}$ es infinito para todo $A \in \mathscr{A}$, lo cual termina la prueba. $\square$

Lema 3.23. *En el espacio topológico 2^ω existen dos subconjuntos densos, numerables y disjuntos.*

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} Q &= \{x \in 2^\omega \mid (\exists n \in \omega)(m > n \to x(m) = 0)\}, \\ Q' &= \{y \in 2^\omega \mid (\exists n \in \omega)(m > n \to y(m) = 1)\}; \end{aligned}$$

En Q están todas las sucesiones de ceros y unos que son eventualmente cero y en Q' las que son eventualmente uno, por lo tanto Q y Q' son disjuntos.

Sea U un subconjunto abierto básico de 2^ω. Se sabe que U es de la forma $\pi_{n_0}^{-1}(i_0) \cap \ldots \cap \pi_{n_m}^{-1}(i_m)$ donde $m, n_0, \ldots, n_m \in \omega$ e $i_0, \ldots, i_m \in 2$. Ahora sea $x_U : \omega \to 2$ definida de la siguiente manera:

$$x_U(n) = \begin{cases} i_j & \text{si } (\exists j \in m+1)(n = n_j) \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente, puesto que $x_U(n) \neq 0$ sólo para finitos n, $x_U \in Q$, lo cual prueba que $U \cap Q \neq \emptyset$, y así Q es denso. Definiendo y_U de forma análoga se prueba que Q' es denso también.

Sólo falta ver que son numerables, lo haremos sólo para Q y una prueba idéntica servirá para Q'. Sea $Q_n = \{x \in 2^\omega \mid m > n \to x(m) = 0\}$. Es claro que Q_n es finito, de hecho tiene cardinalidad 2^n, además $Q = \bigcup_{n \in \omega} Q_n$, luego Q es una unión numerable de finitos y consecuentemente es numerable. $\square$

Teorema 3.24. $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{i}$.

Demostración. Supongamos que I es una familia independiente de cardinalidad menor que $\mathfrak{d}$, probaremos que no es maximal, es decir, buscamos un conjunto $Z \subseteq \omega$ tal que para cada $E \in ENV(I)$ se tenga que E intersecte a Z y $\omega \setminus Z$ en infinitos puntos[5].

[5] Note que si Z y $\omega \setminus Z$ intersectan a todo $E \in ENV(I)$ en infinitos puntos automáticamente se tiene $Z \notin I$.

Sea $\mathscr{D} = \{D_n \in I \mid n \in \omega\}$ una subfamilia numerable de I e $I' = I \setminus \mathscr{D}$. Ahora, puesto que $|ENV(I')| = |I'| \leq |I| < \mathfrak{d}$, para cada función $x : \omega \to 2$ podemos aplicar el Lema 3.22 a las familias

$$\left\{ \bigcap_{k \in n} D_k^{x(k)} \;\middle|\; n \in \omega \right\}, \qquad ENV(I');$$

de donde se sigue que existe un conjunto $B_x \subseteq \omega$ tal que cumple las siguientes condiciones:

1. $B_x \subseteq^* \bigcap_{k \in n} D_k^{x(K)}$.
2. B_x tiene intersección infinita con cada elemento de $ENV(I')$.

De la primera condición se tiene que si $x, y : \omega \to 2$ son distintos, B_x y B_y son casi disjuntos, esto se debe a que existe $k \in \omega$ tal que $x(k) \neq y(k)$, digamos que por ejemplo $x(K) = 0$ y $y(K) = 1$, y entonces $B_x \subseteq^* D_k$ y $B_y \subseteq^* \omega \setminus D_k$ y por lo tanto $B_x \cap B_y \subseteq (B_x \setminus D_k) \cup (B_y \setminus (\omega \setminus D_k))$, pero ambos uniendos son finitos y consecuentemente $B_x \cap B_y$ también lo es. Ahora sean $Q = \{x_0, ..., x_n, ...\}$ y $Q' = \{y_0, ..., y_n, ...\}$ dos subconjuntos de 2^ω disjuntos, numerables y densos (con la topología usual). Para cada $x_i \in Q$ definamos:

$$B'_{x_i} = B_{x_i} \setminus \bigcup_{j \in i} (B_{x_j} \cup B_{y_j})$$

y, análogamente, para cada $y_i \in Q'$ sea:

$$B'_{y_i} = B_{y_i} \setminus \bigcup_{j \in i} (B_{x_j} \cup B_{y_j}).$$

De esta forma estamos removiendo finitos elementos de cada B_{x_i} y de cada B_{y_i} de tal manera que ahora los elementos de $\{B'_{x_i} \mid i \in \omega\} \cup \{B'_{y_i} \mid i \in \omega\}$ son disjuntos a pares y no sólo casi disjuntos.

Sean $Z = \bigcup_{i \in \omega} B'_{x_i}$ y $Z' = \bigcup_{i \in \omega} B'_{y_i}$. Claramente Z y Z' son disjuntos por el párrafo anterior. Vamos a probar que Z tiene intersección infinita con cada elemento de $ENV(I)$. Sea $E \in ENV(I)$. Sabemos que E es de la forma

$$E = A_0 \cap ... \cap A_n \cap (\omega \setminus B_0) \cap ... \cap (\omega \setminus B_m)$$

para algunos elementos $A_i, B_j \in I$. Sean $X = \{A_0, ..., A_n\}$, $Y = \{B_0, ..., B_m\}$, $X' = X \setminus \mathscr{D}$ y $Y' = Y \setminus \mathscr{D}$. Note que definiendo los conjuntos $G_X = \{k \in \omega \mid D_k \in X\}$ y $G_Y = \{k \in \omega \mid D_k \in Y\}$ se cumple que

$$\left(\bigcap_{k \in G_X} \pi_k^{-1}(0) \right) \cap \left(\bigcap_{k \in G_Y} \pi_k^{-1}(1) \right)$$

es un abierto no vacío[6] en 2^ω.

[6] No importa que G_X ó G_Y sean vacíos, pues la intersección del vacío es 2^ω.

Por otro lado, si $G_X \cup G_Y \neq \emptyset$, elíjase

$$N = \text{máx}\{k \in \omega \mid k \in X \cup Y\} + 1$$

y en otro caso $N = 1$.

Ahora, usando la densidad de Q, se tiene que existe un $x \in Q$ tal que $x \in (\bigcap_{k \in G_X} \pi_k^{-1}(0)) \cap (\bigcap_{k \in G_Y} \pi_k^{-1}(1))$. De todo esto se sigue que:

$$\begin{aligned} E = \bigcap X \setminus \bigcup Y = \left(\bigcap X' \setminus \bigcup Y'\right) \cap \left(\bigcap_{k \in G_X \cup G_Y} D_k^{x(k)}\right) \supseteq \\ \supseteq \left(\bigcap X' \setminus \bigcup Y'\right) \cap \left(\bigcap_{k<N} D_k^{x(k)}\right) \supseteq^* \left(\bigcap X' \setminus \bigcup Y'\right) \cap B_x \supseteq \\ \supseteq \left(\bigcap X' \setminus \bigcup Y'\right) \cap B'_x. \end{aligned}$$

Y la penúltima intersección es infinita por la segunda propiedad de B_x, además como B_x y B'_x solo difieren finitamente, la última intersección también es infinita. Así tenemos que un conjunto infinito $((\bigcap X' \setminus \bigcup Y') \cap B'_x)$ que está casi contenido en $Z \cap E$, así $Z \cap E$ es infinito. Análogamente $Z' \cap E$ también es infinito, pero $Z' \cap E \subseteq (\omega \setminus Z) \cap E$, así $(\omega \setminus Z) \cap E$ es infinito, lo cual termina la prueba. □

Se tienen así un par de cotas para $\mathfrak{i}$, ya que $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{i}$ y $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{i}$. Es importante resaltar que estas dos desigualdades son independientes, es decir, no se puede deducir una de la otra, ya que, como se puede consultar en [2], tanto $\mathfrak{d} < \mathfrak{r}$ como $\mathfrak{r} < \mathfrak{d}$ son consistentes en ZFC

Otros dos cardinales importantes son $\mathfrak{u}$, conocido como *ultrafilter number*, y $\mathfrak{a}$, conocido como *almost-disjoint number*, los cuales se definen a continuación.

$$\mathfrak{u} = \text{mín}\{|\mathscr{B}| \mid \mathscr{B} \text{ es base de un ultrafiltro no principal}\},$$

$$\mathfrak{a} = \text{mín}\{|\mathscr{A}| \mid \mathscr{A} \text{ es una familia casi disjunta maximal}\}.$$

Estos dos cardinales existen pues los conjuntos sobre los que se toma el mínimo son no vacíos. La comparación de $\mathfrak{i}$ con estos dos cardinales son en realidad resultados de consistencia: tanto $\mathfrak{u} < \mathfrak{i}$ como $\mathfrak{i} < \mathfrak{u}$ son consistentes ([2], [17]). Por otro lado, Kunen probó la consistencia de $\mathfrak{a} < \mathfrak{i}$, pero es una pregunta abierta si también es consistente $\mathfrak{i} < \mathfrak{a}$ o si en realidad se puede probar en ZFC que $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{i}$.

3.4. Familias independientes selectivas

En esta sección se estudian algunas propiedades de las familias independientes usadas en [17] para probar la consistencia de la desigualdad $\mathfrak{i} < \mathfrak{u}$. Para completar dicha prueba Shelah buscaba familias con una propiedad más fuerte a la maximalidad, por ello, no es de sorprender que lo más natural haya sido tratar de generalizar las propiedades que caracterizan la maximalidad, es decir, las propiedades (2) y (3) del Lema 3.7, en busca de definir estas familias *más fuertes*. Empezamos con una generalización de la propiedad (2) de dicho lema.

Definición 3.25. *Sea I una familia independiente y $h \in FF(I)$. Decimos que I es independiente maximal en I^h si para todo $A \subseteq I^h$ existe otra función parcial finita $k \in FF(I)$ tal que $h \subseteq k$ y además $I^k \subseteq A$ o $I^k \cap A = \emptyset$.*

Definición 3.26. *Sea I una familia independiente. Decimos que I es independiente maximal en todas partes si es independiente maximal en I^h para toda $h \in FF(I)$.*

Proposición 3.27. *Sea I una familia independiente. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *I es independiente maximal en todas partes.*
2. *Para todo $A \subseteq \omega$ y toda $h \in FF(I)$ existe $k \in FF(I)$ tal que $h \subseteq k$ y además $I^k \subseteq A$ o $I^k \cap A = \emptyset$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sean $A \subseteq \omega$ y $h \in FF(I)$ fijos y sea $B = A \cap I^h$. Ahora, como $B \subseteq I^h$, la maximalidad de I en I^h garantiza la existencia de $k \in FF(I)$ tal que $h \subseteq k$ y que cumple que $I^k \subseteq B$ o $I^k \cap B = \emptyset$. Si sucede que $I^k \subseteq B$, entonces $I^k \subseteq A$ ya que $B \subseteq A$. En el otro caso $\emptyset = I^k \cap B = I^k \cap (I^k \cap A) = I^k \cap A$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $h \in FF(I)$ fijo. Como para todo $A \subseteq \omega$ se cumple que existe $k \in FF(I)$ tal que $h \subseteq k$ y que $I^k \subseteq A$ o $I^k \cap A = \emptyset$, en particular se cumple para los $A \subseteq I^h$, lo cual prueba que I es independiente maximal en I^h, ahora como h fue arbitrario I es independiente maximal en todas partes. $\square$

Proposición 3.28. *Sea I una familia independiente. I es una familia independiente maximal en I^h para algún $h \in FF(I)$ si y sólo si es maximal.*

Demostración. $\Rightarrow$] Por el Lema 3.7 es suficiente probar que para todo $A \subseteq \omega$ existe un conjunto $E \in ENV(I)$ tal que $E \subseteq A$ o $E \cap A = \emptyset$. Sea $B = A \cap I^h$. Sabemos que existe $k \in FF(I)$ tal que $h \subseteq k$ e $I^k \subseteq B$ o $I^k \cap B = \emptyset$. Análogamente a como se hizo en la Proposición 3.27, si sucede que $I^k \subseteq B$, entonces, como en particular $B \subseteq A$, se sigue que $I^k \subseteq A$. En el otro caso $\emptyset = I^k \cap B = I^k \cap (I^k \cap A) = I^k \cap A$. Así se tiene que:

$$(I^k \subseteq A) \vee (I^k \cap A = \emptyset).$$

Tomando $E = I^k$ se tiene el resultado.

$\Leftarrow$] Basta tomar $h = \emptyset$. $\square$

Corolario 3.29. *Toda familia independiente maximal en todas partes es maximal.*

Así las familias independientes maximales en todas partes surgen como una generalización de la propiedad (2) del Lema 3.7. Otro tipo de familias provienen de generalizar la propiedad (3).

Definición 3.30. *Sean I una familia independiente y $h \in FF(I)$. Decimos que I es una familia independiente selectiva en I^h si para toda función $f : \omega \to \omega$ existe un $k \in FF(I)$ tal que $h \subseteq k$ y además $f \restriction I^k$ es inyectiva o constante.*

Definición 3.31. *Sea I una familia independiente. Decimos que I es selectiva si siempre que $f : \omega \to \omega$ existe $A \in ENV(I)$ tal que $f \restriction A$ es uno a uno o constante.*

Proposición 3.32. *Una familia independiente es selectiva si y sólo si es selectiva en I^h para alguna $h \in FF(I)$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Basta tomar $h = \emptyset$.

$\Leftarrow$] Sea $f : \omega \to \omega$. Como I es selectiva en I^h para alguna $h \in FF(I)$, existe $k \in FF(I)$ tal que $f \restriction I^k$ es uno a uno o constante. Tomando $A = I^k$ se tiene el resultado. □

Proposición 3.33. *Sea I una familia independiente. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *I es independiente selectiva.*
2. *Si $\mathbb{E}$ es una relación de equivalencia sobre ω, entonces existe un $A \in ENV(I)$ tal que $\mathbb{E} \restriction A$ tiene una sola clase de equivalencia o es la relación igualdad.*
3. *Si $\{A_n \mid n \in \omega\}$ es una partición de ω, entonces existe un conjunto $A \in ENV(I)$ tal que $A \subseteq A_n$ para algún $n \in \omega$ o $|A \cap A_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $\mathbb{E}$ una relación de equivalencia. Sabemos que $\mathbb{E}$ genera una partición de ω; sea $\{A_n \mid n \in \omega\}$ una numeración de dicha partición (posiblemente algunos $A_n = \emptyset$). Sea $f_{\mathbb{E}}$ una función definida como sigue:

$$f_{\mathbb{E}}(m) = n \Leftrightarrow m \in A_n.$$

Como I es independiente selectiva, existe un $A \in ENV(I)$ tal que $f_{\mathbb{E}} \restriction A$ es uno a uno o constante. En el caso de que sea uno a uno, para $n, m \in A$ se tiene que $f_{\mathbb{E}}(m) \neq f_{\mathbb{E}}(n)$, es decir, m y n no están en la misma clase de equivalencia, consecuentemente cada clase de equivalencia tiene un solo elemento, y luego $\mathbb{E} \restriction A$ es la relación igualdad. Si $f_{\mathbb{E}} \restriction A$ es constante, todos los $m \in A$ están en la misma clase de equivalencia.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $\{A_n \mid n \in \omega\}$ una partición de ω y sea $\mathbb{E}$ la relación de equivalencia definida por:

$$k\mathbb{E}l \Leftrightarrow (\exists n \in \omega)(k, l \in A_n).$$

Por la hipótesis existe una $A \in ENV(I)$ tal que $\mathbb{E} \restriction A$ tiene una sola clase de equivalencia o es la relación igualdad. Si tiene una sola clase de equivalencia, para todo $k, l, m \in A$ se cumple que $k\mathbb{E}l\mathbb{E}m$, es decir, existen $n_1, n_2 \in \omega$ tales que $k, l \in A_{n_1}$ y $l, m \in A_{n_2}$, pero en ese caso $l \in A_{n_1}$ y $l \in A_{n_2}$, y por ser

$\{A_n \mid n \in \omega\}$ una partición, $n_1 = n = n_2$. Así todo $k \in A$ es tal que $k \in A_n$, luego $A \subseteq A_n$. Ahora supongamos que $\mathbb{E} \upharpoonright A$ es la relación igualdad. Si sucediese que $|A \cap A_n| \geq 2$ para algún $n \in \omega$, existen dos elementos distintos $k, l \in A$ tales que $k\mathbb{E}l$, pero entonces $\mathbb{E} \upharpoonright A$ no es la relación igualdad, lo cual es una contradicción.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea $f : \omega \to \omega$ arbitraria. Consideremos $A_n = \{m \in \omega \mid f(m) = n\}$, a saber, A_n es la imagen inversa bajo f del conjunto $\{n\}$. Claramente $\{A_n \mid n \in \omega\}$ es una partición de ω y consecuentemente, por la hipótesis, existe un $A \in ENV(I)$ tal que $A \subseteq A_n$ para algún $n \in \omega$ o $|A \cap A_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$. En el primer caso, como $A \subseteq A_n$, se sigue que $\forall m \in A(f(m) = n)$, luego $f \upharpoonright A$ es constante. Para el segundo caso vamos a suponer que $f \upharpoonright A$ no es inyectiva, es decir, existen $k, l \in A$ distintos tales que $f(k) = n = f(l)$ para algún $n \in \omega$; pero esto último significa que $k, l \in A \cap A_n$, luego $|A \cap A_n| \geq 2$, lo cual es una contradicción. $\square$

Definición 3.34. *Sea I una familia independiente. Decimos que I es una familia independiente selectiva en todas partes si es independiente selectiva en I^h para todo $h \in FF(I)$.*

Una vez que hemos generalizado las propiedades (2) y (3) del Lema 3.7 es natural preguntarse cuáles familias son *más fuertes*, si las selectivas en todas partes o las maximales en todas partes, el siguiente lema justo contesta a esto.

Lema 3.35. *Sea I una familia independiente. Entonces:*

1. *I es selectiva en todas partes $\Rightarrow$ I es maximal en todas partes $\Rightarrow$ I es maximal.*

2. *I es selectiva en todas partes $\Rightarrow$ I es selectiva $\Rightarrow$ I es maximal.*

Demostración. (1) Supongamos que I es selectiva en todas partes, vamos a usar el Lema 3.27 para probar que es independiente maximal en todas partes. Sea pues $A \subseteq \omega$ y $h \in FF(I)$. Si f_A es la función indicadora de A, entonces como I es selectiva en I^h, existe $k \in FF(I)$ tal que $h \subseteq K$ y $f \upharpoonright I^k$ es uno a uno o constante; pero $f \upharpoonright I^k$ no puede ser uno a uno pues I^k es infinito y $f(I^k) \subseteq 2$, luego $f \upharpoonright I^k$ es constante y consecuentemente $(f \upharpoonright I^k = 1) \vee (f \upharpoonright I^k = 0)$, lo cual equivale a que $(I^k \subseteq A) \vee (I^k \cap A = \emptyset)$, que era lo que se quería. Ahora, por el Corolario 3.29, toda familia independiente maximal en todas partes es maximal, lo completa la primer parte del lema.

(2) Claramente por la definición y por la Proposción 3.32 se tiene que toda familia independiente selectiva en todas partes es selectiva. Sólo falta ver que si es selectiva entonces es maximal, para esto vamos a ver que I satisface la propiedad (3) del Lema 3.7. Sea $f : \omega \to 2$. Como I es selectiva, y como en particular $f : \omega \to \omega$, existe un conjunto $A \in ENV(I)$ tal que $f \upharpoonright A$ es uno a uno o constante. Pero igual que antes $f \upharpoonright A$ no puede ser uno a uno ya que A es infinito y $f(A) \subseteq 2$, luego $f \upharpoonright A$ es constante, que era lo que se quería. $\square$

Son preguntas abiertas si las familias independientes maximales en todas partes, las selectivas en todas partes y las selectivas existen en ZFC. Se sabe que bajo varias hipótesis sí se puede demostrar la existencia de este tipo de familias, pero no en general, por lo tanto los siguientes cardinales no están necesariamente bien definidos, sin embargo será de utilidad tenerlos en cuenta.

$$\mathfrak{i}_e = \text{mín}\{|I| \mid I \text{ es una familia independiente maximal en todas partes}\},$$

$$\mathfrak{i}_{sel} = \text{mín}\{|I| \mid I \text{ es una familia independiente selectiva}\},$$

$$\mathfrak{i}_{esel} = \text{mín}\{|I| \mid I \text{ es una familia independiente selectiva en todas partes}\}.$$

Por el Lema 3.35 se tiene que:

$$\mathfrak{i}_{esel} \geq \mathfrak{i}_e \geq \mathfrak{i},$$

$$\mathfrak{i}_{esel} \geq \mathfrak{i}_{sel} \geq \mathfrak{i}.$$

Además tenemos otra cota para el cardinal $\mathfrak{i}_{sel}$.

Definición 3.36. *Una familia $\mathbb{H} \subseteq [\omega]^\omega$ se dice homogénea si para cualquier $f : \omega \to \omega$ hay un conjunto $H \in \mathbb{H}$ tal que $f \restriction H$ es uno a uno o constante.*

Definición 3.37. *El cardinal de homogeneidad $\mathfrak{hom}_{1,\mathfrak{c}}$ es el mínimo cardinal para el cual existe una familia homogénea con esa cardinalidad, es decir:*

$$\mathfrak{hom}_{1,\mathfrak{c}} = \text{mín}\{|\mathbb{H}| \mid \mathbb{H} \text{ es una familia homogénea}\}.$$

Teorema 3.38. *Si I es una familia independiente selectiva, $\mathfrak{hom}_{1,\mathfrak{c}} \leq |I|$.*

Demostración. Basta notar que si I es una familia independiente selectiva entonces $ENV(I)$ es homogenea, luego $\mathfrak{hom}_{1,\mathfrak{c}} \leq |ENV(I)|$, pero sabemos que $|ENV(I)| = |I|$, de donde se sigue el resultado.

Corolario 3.39. $\mathfrak{hom}_{1,\mathfrak{c}} \leq \mathfrak{i}_{sel}$.

□

3.5. Familias independientes a partir de CH

Sabemos que el cardinal $\mathfrak{i}$ es no numerable, es decir, $\aleph_0 < \mathfrak{i}$, además como las familias independientes son subconjuntos de $\mathcal{P}(\omega)$, entonces tienen cardinalidad a lo más $2^{\aleph_0}$, de donde se sigue que $\aleph_0 < \mathfrak{i} \leq 2^{\aleph_0}$, consecuentemente si asumiésemos la hipótesis del continuo ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) trivialmente se seguiría que $\mathfrak{i} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Sin embargo la demostración de la existencia de las familias independientes maximales que se mostró en la Proposición 3.10 es usando el Lema de Zorn y la que a continuación se muestra prescinde de éste (o de cualquier equivalencia del Axioma de elección)[7]; por lo tanto la ventaja de esta demostración es que muestra *la forma* de las familias independientes maximales y no simplemente su existencia.

[7]Es importante notar que este comentario es no trivial ya que CH no implica el axioma de elección.

Teorema 3.40. CH *implica* $\mathfrak{i} = \aleph_1$.

Demostración. Primero notemos que podemos partir $\mathcal{P}(\omega)$ en dos conjuntos: los co-finitos ($\mathscr{C}_{fin}$) y los co-infinitos ($\mathscr{C}_{inf}$). Además hay una biyección entre los co-finitos y los finitos (fin), luego $|\mathscr{C}_{fin}| = |fin| = \aleph_0$, así:

$$\aleph_1 = |\mathcal{P}(\omega)| = |\mathscr{C}_{fin} \cup \mathscr{C}_{inf}| = |\mathscr{C}_{fin}| + |\mathscr{C}_{inf}| = \aleph_0 + |\mathscr{C}_{inf}| = \text{máx}\{\aleph_0, |\mathscr{C}_{inf}|\}$$

y consecuentemente $\aleph_1 = |\mathscr{C}_{inf}|$. Sea $(X_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ una enumeración[8] de $\mathscr{C}_{inf}$. Vamos a crear una familia independiente por inducción.

Sea $I_0 = \emptyset$. Para todo $\alpha \in \omega_1$ sea $I_{\alpha+1} = I_\alpha \cup \{X_\alpha\}$ si es que $I_\alpha \cup \{X_\alpha\}$ es independiente, en caso contrario sea $I_{\alpha+1} = I_\alpha$. Ahora si $\alpha \in \omega_1$ es un ordinal límite, sea $I_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} I_\beta$. Así I_{ω_1} es una familia independiente maximal de tamaño $\aleph_1$.

Primero veamos que I_{ω_1} es independiente. Sea $h \in FF(I_{\omega_1})$, y sea $\alpha = \text{máx}\, dom(h)$, entonces $h \in FF(\alpha+1)$ y consecuentemente $I^h_{\omega_1} = I^h_{\alpha+1}$, y como $I_{\alpha+1}$ es independiente, $I^h_{\omega_1}$ es infinito, que era lo que se quería. I_{ω_1} es maximal ya que si no fuese así, existiría un conjunto $A \notin I_{\omega_1}$ tal que $I_{\omega_1} \cup \{A\}$ es independiente, pero como A debe ser co-infinito, $A = X_\alpha$ para algún $\alpha \in \omega_1$, luego $I_\alpha \cup \{X_\alpha\} = I_\alpha \cup \{A\} \subseteq I_{\omega_1} \cup \{A\}$ es independiente, y así $I_\alpha \cup \{X_\alpha\} = I_{\alpha+1}$, y luego, por la construcción de I_{ω_1}, se tiene que $I_{\alpha+1} \subseteq I_{\omega_1}$, lo cual en particular implica que $A \in I_{\omega_1}$, que es una contradicción.

Como I_{ω_1} es maximal, y como sabemos que ninguna familia independiente numerable es maximal, entonces es no numerable; además $I_{\omega_1} \subseteq \mathscr{C}_{inf}$, luego:

$$\aleph_1 \leq |I_{\omega_1}| \leq |\mathscr{C}_{inf}| = \aleph_1$$

y así $\aleph_1 \leq |I_{\omega_1}|$. □

La clave de esta prueba constructiva viene dada de dos fragmentos de información. La primera es considerar todas los posibles conjuntos que podrían estar en la familia independiente (y por lo tanto todos los conjuntos que podrían hacer que la familia fuese o no maximal), y la segunda saber que siempre hay un conjunto que hace que la construcción continúe, es decir, que en cualquier paso intermedio siempre podremos agregar un conjunto a la familia independiente, esto último no es tan explícito en la prueba del Teorema 3.40, pero sí lo es en la del Lema 3.9, el cual fue crucial.

Esta prueba constructiva nos hace preguntarnos si acaso se podrá hacer un argumento análogo para construir algunas de las familias vistas en la sección anterior, cuya existencia no se puede garantizar en ZFC; y la respuesta es sí, pues sorprendentemente estas familias sí existen en ZFC + CH.

El siguiente lema de Shelah, cuya demostración se puede consultar en [17], y para el cual en este trabajo presentamos una prueba alternativa en la Sección 5.2, nos permite hacer justo eso: una construcción similar a la del Teorema 3.40 para probar la existencia de familias selectivas en todas partes vía la hipótesis del continuo.

[8]Recuerde que ω_1 y $\aleph_1$ son iguales como conjuntos, pero la notación ω_1 indica que se está pensando en su estructura como ordinal y $\aleph_1$ como cardinal.

Lema 3.41. *(Lema de Shelah). Si I es una familia independiente numerable, $h_0 \in FF(I)$, y $\mathbb{E}$ es una relación de equivalencia sobre ω, entonces existen un conjunto $B \subseteq \omega$ y una función $h_1 \in FF(I)$ tales que $h_0 \subseteq h_1$, $B \notin I$, $I \cup \{B\}$ es independiente y $\mathbb{E} \restriction (I^{h_1} \cap B)$ es la relación de equivalencia igualdad o tiene sólo una clase de equivalencia.*

Teorema 3.42. CH *implica la existencia de una familia independiente selectiva en todas partes.*

Demostración. Consideremos el conjunto Ψ definido como

$$\Psi = \{(\mathbb{E}, h) \mid (\mathbb{E} \text{ es una relación de equivalencia sobre } \omega) \wedge (h \in FF(\omega_1))\}.$$

Sabemos que la cantidad de relaciones de equivalencia sobre ω coincide con la cantidad de funciones de ω en ω, la cual, bajo la hipótesis del continuo es $\aleph_1$. Por otro lado, por la Proposición 2.20, sabemos que $|F(\omega_1)| = \aleph_1$, consecuentemente $|\Psi| = \aleph_1 \times \aleph_1 = \aleph_1$, y así podemos enlistar a Ψ como $\{(\mathbb{E}_\alpha, h_\alpha) \mid \alpha \in \omega_1\}$. Además, sin perdida de generalidad, podemos asumir que $dom(h_\alpha) \subseteq \alpha$.

Ahora sea I_0 una familia independiente numerable y para cada $\alpha \in \omega_1$ sea el conjunto B_α como en el Lema 3.41 para el par $(\mathbb{E}_\alpha, h_\alpha)$.

Vamos a construir la familia recursivamente, igual que como en el Lema 3.40, es decir, para cada α sea $I_{\alpha+1} = I_\alpha \cup \{B_\alpha\}$ y si $\beta \in \omega$ es ordinal límite entonces $I_\beta = \bigcup_{\alpha\in\beta} I_\alpha$. Veamos que I_{ω_1} es una familia independiente selectiva en todas partes.

Sea $\mathbb{E}$ una relación de equivalencia sobre ω y $h \in FF(\omega_1)$, entonces existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $\mathbb{E} = \mathbb{E}_\alpha$ y $h = h_\alpha$. Pero luego B_α cumple que $B_\alpha \in I_{\alpha+1}$, y además, por el Lema 3.41, se tiene que existe $h_1 \supseteq h$, con $h_1 \in FF(\alpha)$, tal que $\mathbb{E} \restriction (I_\alpha^{h_1} \cap B)$ tiene una clase de equivalencia o es la relación igualdad. Definiendo $h_2 = h_1 \cup \{(B, 0)\}$ se sigue que $h_2 \in FF(\alpha+1)$ y $I_{\omega_1}^{h_2} = I_{\alpha+1}^{h_2}$ es un testigo de que I_{ω_1} es independiente selectiva sobre h. Como h se eligió arbitrariamente, I_{ω_1} es una familia independiente selectiva en todas partes. $\square$

Note que, como I_0 en la demostración anterior fue una familia independiente numerable arbitraria e $I_0 \subseteq I_{\omega_1}$, entonces en realidad se ha probado algo más fuerte.

Corolario 3.43. *En* ZFC + CH *toda familia independiente numerable se puede extender a una familia independiente selectiva en todas partes.*

El Lema 3.35 nos dice que las familias independientes selectivas en todas partes son las familias independientes más *robustas*, por lo tanto también tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.44. *En* ZFC + CH *tanto las familias independientes selectivas como las familias independientes maximales en todas partes existen.*

Aquí es importante notar nuevamente que bajo la Hipótesis del Continuo es trivial el hecho de que cualquier cardinal no numerable menor o igual que $\mathfrak{c}$ tiene que ser de hecho igual a $\mathfrak{c}$, en particular esto nos dice que bajo CH se cumple trivialmente que $i = \aleph_1$. Aquí uno está tentado a afirmar que entonces trivialmente también se satisface que $\mathfrak{i}_{esel} = \mathfrak{i}_{sel} = \mathfrak{i}_e = \mathfrak{c}$, sin embargo esto no es trivial, pues no es obvio que los cardinales $\mathfrak{i}_{esel}, \mathfrak{i}_{sel}$ y $\mathfrak{i}_e$ ya existan bajo CH; esto se debe a una diferencia cualitativa entre el cardinal $\mathfrak{i}$ y los cardinales $\mathfrak{i}_{esel}, \mathfrak{i}_{sel}, \mathfrak{i}_e$, y es que mientras que la existencia de $\mathfrak{i}$ se garantiza gracias al Axioma de Elección (más particularmente al Lema de Zorn), la existencia de los otros cardinales no la hemos demostrado en ZFC.

Por lo tanto, la igualdad $\mathfrak{i}_{esel} = \mathfrak{i}_{sel} = \mathfrak{i}_e = \mathfrak{c}$ suponiendo CH tiene implícitas dos componentes, una trivial y otra no. No es trivial que los cardinales existan, pero una vez que existen, y dado que son no numerables, entonces ya es trivial que todos ellos son iguales a $\mathfrak{c}$.

Aquí surge una pregunta natural, el axioma de elección nos permitió demostrar la existencia del cardinal $\mathfrak{i}$, pero no la del cardinal $\mathfrak{i}_{sel}$. Por otro lado, gracias al Lema 3.35, se tiene que la existencia del cardinal $\mathfrak{i}_{esel}$ (o la de $\mathfrak{i}_{sel}$) también implica la existencia de $\mathfrak{i}$, entonces, ¿no será que la existencia de $\mathfrak{i}_{sel}$ sea *más fuerte* que el axioma de elección? Es decir, ¿será que dada la existencia de $\mathfrak{i}_{esel}$ (o la de $\mathfrak{i}_{sel}$) podamos demostrar el axioma de elección al menos en su versión numerable?

Otra razón para sospechar que la pregunta anterior podría ser cierta es que, quizás asumiendo la Hipótesis Generalizada del Continuo (GHC) es decir, que para todo cardinal κ se satisface que $\kappa^+ = 2^\kappa$, se pueda demostrar la existencia de familias independientes selectivas en todas partes sobre cualquier cardinal infinito κ, pero ya sabemos que GHC sí implica el axioma de elección. Esperamos trabajar esta pregunta en ulteriores trabajos.

Capítulo 4

Familias independientes e ideales

Como veremos en la cuarta sección de este capítulo, se puede asociar de una manera *natural* un ideal a una familia independiente, y esta asociación es útil y conveniente para abordar aspectos sobre cardinales relacionados con las familias independientes, sin embargo creemos que antes de comenzar a explorar estas técnicas es conveniente explorar el concepto de ideal por sí solo.

Además, como la noción de *ideal* surgió en la teoría de anillos, comenzaremos con conceptos de esta rama para después compararlos con ideas más *conjuntistas* de los mismos objetos. Esperamos que esta comparación sirva de justificación del llamarles *ideales* a algunos objetos que no están obviamente relacionados con la teoría de anillos. Algunos de los resultados de este capítulo se pueden consultan en [14] y en [16].

4.1. Ideales en anillos

Definición 4.1. *Una terna $(R, +, *)$ es un anillo si R es un conjunto no vacío y $+, *$ son dos operaciones binarias sobre R tales que $(R, +)$ es un grupo abeliano y $*$ es asociativa y distributiva por los dos lados respecto a $+$.*

Como $(R, +)$ es un grupo, entonces para todo $a \in R$ existe $b \in R$ tal que $a + b = e$, donde e es la identidad, a b le denotaremos con $-a$ y escribiremos $a + (-a)$ simplemente como $a - a$.

Ejemplo 4.2. *El conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ con las operaciones de suma y multiplicación usuales es un anillo.*

Definición 4.3. *Sea $(R, +, *)$ un anillo e I un subconjunto de R. Decimos que I es un ideal si cumple las siguientes dos condiciones:*

1. *I es un subgrupo de R.*

2. Si $a \in I$ y $r \in R$, entonces $a * r, r * a \in I$.

Ejemplo 4.4. *Sea p es un número primo y sea $I_p = \{mp \mid m \in Z\}$. Entonces I_p es un ideal en $\mathbb{Z}$.*

Recordemos que si R es un anillo e I es un ideal sobre R, I induce una relación de equivalencia $\approx$ sobre R de tal forma que el conjunto $\frac{R}{I} = \{[X] \mid X \in R\}$ vuelve a ser un anillo, en donde $[X]$ denota a la clase de equivalencia de X. Dicha relación de equivalencia está definida por $X \approx Y \leftrightarrow X - Y \in I$.

Definición 4.5. *Un anillo $(R, +, *)$ se dice booleano si para todo $r \in R$ se cumple que $r * r = r$.*

Lema 4.6. *Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{P}(X)$ su conjunto potencia. Si definimos $+$ y $*$ como:*

$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

$$A * B = A \cap B,$$

$(\mathcal{P}(X), +, *)$ es un anillo booleano.

Demostración. Primero es necesario ver que $(\mathcal{P}(X), +)$ es un grupo abeliano. Para probar la asociatividad vamos a usar la notación $A^c = X \setminus A$ y las siguientes dos igualdades de conjuntos:

$$A + B \ = \ (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B), \qquad (A + B)^c \ = \ (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c).$$

Sean $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Sabemos que

$$(A + B) + C = [(A + B) \cap C^c] \cup [(A + B)^c \cap C].$$

Veamos qué son $[(A + B) \cap C^c]$ y $[(A + B)^c \cap C]$ por separado. Notemos que

$$\begin{aligned} (A + B) \cap C^c &= [(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] \cap C^c = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c), \\ (A + B)^c \cap C &= [(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)] \cap C = (A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \\ &= [(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c)] \cup [(A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)] \\ &= [A \cap ((B \cap C) \cup (B^c \cap C^c)] \cup [A^c \cap ((B \cap C^c) \cup (B^c \cap C))] \\ &= [A \cap (B + C)^c] \cup [A^c \cap (B + C)] = A + (B + C). \end{aligned}$$

El elemento neutro para $+$ es el vacío, pues, para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ se cumple que $A + \emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$.

Falta probar la existencia de un inverso, pero para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ se cumple que $A + A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$. Además es claro de la definición de + que esta operación es conmutativa, por lo tanto $(\mathcal{P}(X), +)$ es un grupo abeliano.

Es claro que $*$ también es asociativa, por lo tanto lo único que resta ver es que es distributiva bilateral respecto a $+$. Vamos a demostrar únicamente que $*$ es distributiva por la izquierda (para la derecha la demostración es completamente análoga). Veamos que:

$$A * (B + C) = A \cap ((B \cap C^c) \cup (B^c \cap C) = (A \cap (B \cap C^c)) \cup (A \cap B^c \cap C).$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\begin{aligned}(A*B)+(A*C) = (A\cap B)+(A\cap C) &= [(A\cap B)\cap(A\cap C)^c)]\cup[(A\cap B)^c\cap(A\cap C)]\\ &= [(A \cap B) \cap (A^c \cup B^c)] \cup [(A^c \cup B^c) \cap (A \cap C)]\\ &= [((A \cap B) \cap A^c) \cup ((A \cap B) \cap C^c)] \cup [((A \cap C) \cap A^c) \cup ((A \cap C) \cap B^c)]\\ &= [\emptyset \cup ((A\cap B)\cap C^c)]\cup[\emptyset\cup((A\cap C)\cap B^c)] = ((A\cap B)\cap C^c)\cup(A\cap C)\cap B^c).\end{aligned}$$

Y así $A * (B + C) = A * B + A * C$ que era lo que se quería.

Además para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ se cumple que $A * A = A \cap A = A$, lo que prueba que el anillo es efectivamente booleano. $\square$

Notemos que si I es un ideal sobre el anillo booleano $(\mathcal{P}(X), +, *)$, la relación de equivalencia inducida por I es

$$X \approx Y \leftrightarrow X - Y \in I \leftrightarrow X + Y \in I \leftrightarrow (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) \in I.$$

4.2. Ideales en álgebras booleanas.

Además de la noción de ideales que se tiene en teoría de anillos también hay una noción de ideal para álgebras booleanas. A continuación veremos que estos dos conceptos coinciden en algunos conjuntos que admiten estructura de anillos y también de álgebras booleanas.

Definición 4.7. *Un álgebra booleana es un conjunto B con dos operaciones binarias $+$ y $*$ (suma y multiplicación booleanas), una operación $-$ (complemento) y dos elementos distinguidos $1, 0$ que cumplen las siguientes condiciones:*

1. $u + u = u = u * u$;
2. $u + v = v + u$ y $u * v = v * u$;
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$ y $u * (v * w) = (u * v) * w$;
4. $(u + v) * w = (u * w) + (v * w)$ y $(u * v) + w = (u + w) * (v + w)$;
5. $u + (u * v) = u = u * (u + v)$;
6. $u + (-u) = 1$ y $u * (-u) = 0$;

7. $-(u+v) = (-u)*(-v)$ *y* $-(u*v) = (-u)+(-v)$*;*

8. $-(-u) = u$*;*

9. $u*1 = u$ *y* $u+0 = u$*;*

Si se tiene un álgebra booleana se puede introducir un orden parcial ($\leq$) de manera natural dado por

$$u \leq v \Leftrightarrow u+v = v$$

o equivalentemente

$$u \leq v \Leftrightarrow u*v = u.$$

Ejemplo 4.8. *Para cualquier conjunto* X *se cumple que* $\mathcal{P}(X)$ *con* $\cup$ *como suma,* $\cap$ *como multiplicación y* $\forall A \in \mathcal{P}(X)(-A := X\backslash A)$ *es un álgebra booleana. Además aquí* $\leq$ *es simplemente la contención de conjuntos.*

De hecho la idea de álgebra booleana surge como una forma de generalizar las estructuras que se comportan como $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$, es decir, esta es la álgebra booleana canónica.

Definición 4.9. *Un ideal* I *en un álgebra booleana* B *es un subconjunto no vacío de* B *tal que:*

1. $u \in I$ *y* $v \leq u$ *implica* $v \in I$*;*

2. $u, v \in I$ *implica* $u+v \in I$*.*

En este trabajo trabajaremos principalmente con el álgebra booleana del Ejemplo 4.8. La siguiente proposición es simplemente una traducción trivial, pero muy útil de lo que es un ideal en esta álgebra booleana.

Proposición 4.10. *Un subconjunto* I *de* $\mathcal{P}(X)$ *es un ideal si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

1. *Si* $A \in I$ *y* $B \subseteq A$*, entonces* $B \in I$*;*

2. *Si* $A, B \in I$*, entonces* $A \cup B \in I$*.*

Así, de acuerdo a la Proposición 4.10, un ideal es una familia de conjuntos que es cerrada bajo subconjuntos (o *cerrada por abajo*) y cerrada bajo uniones finitas.

A continuación presentamos un resultado que justifica que ambos conceptos compartan nombre y que además da una idea de por qué llamarle ideales a algunos subconjuntos de un álgebra booleana.

Teorema 4.11. *Sea* X *un conjunto no vacío,* $\mathcal{P}(X)$ *su potencia e* I *un subconjunto no vacío de* $\mathcal{P}(X)$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. I *es un ideal en el sentido algebraico en el anillo* $(\mathcal{P}(X), +, *)$[1]*.*

[1] Las operaciones son las que están definidas en el Lema 4.6

2. *I es un ideal en el sentido de álgebra booleana en $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Es necesario ver que I es cerrado por abajo y cerrado bajo uniones finitas. Sean $A, B \in I$ y $C \subseteq A$. Como en particular $C \in \mathcal{P}(X)$ e I es absorbente con la multiplicación, $C = A \cap C = A * C \in I$, es decir, I sí es cerrado por abajo. Ahora que ya sabemos que I es cerrado por abajo, $D = A \setminus B$ también es un elemento de I, y luego como $(I, +)$ es grupo:

$$\begin{aligned} A \cup B = (A \setminus B) \cup B = ((A \setminus B) \cup B) \setminus \emptyset &= ((A \setminus B) \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cap B)) \\ &= (D \cup B) \setminus (D \cap B) = D + B \in I \end{aligned}$$

lo cual significa que I es cerrado bajo uniones finitas.

(2) $\Rightarrow$ (1) Es necesario verificar dos condiciones, la primera es que I es un grupo con la operación $+$ y la segunda es que es absorbente con $*$. Sean $A, B \in I$ y $C \in \mathcal{P}(X)$. Como I es cerrado bajo uniones finitas, $A \cup B \in I$, ahora notemos que $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \cup B \in I$, y como I es cerrado por abajo entonces $A + B \in I$, lo cual prueba que $(I, +)$ es grupo. Por otro lado, $A * C = A \cap C \subseteq A \in I$, y de nuevo, como I es cerrado por abajo, $A * C \in I$, es decir, I es absorbente con $*$. $\square$

4.2.1. Cocientes en álgebras booleanas

Naturalmente en teoría de anillos le llaman ideal a un objeto ya que si R es un anillo e I es un ideal sobre él, entonces $\frac{R}{I}$ vuelve a admitir estructura de anillo, veremos que esto también sucede en las álgebras booleanas $\mathcal{P}(S)$, donde S es un conjunto no vacío, y además ambos conceptos coinciden.

Sea I un ideal propio de un álgebra booleana $\mathcal{P}(S)$. Vamos a definir una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathcal{P}(S)$ como sigue:

$$X \sim Y \Leftrightarrow (\exists I_1, I_2 \in I)(X \cup I_1 = Y \cup I_2).$$

Claramente $\sim$ es reflexiva, pues basta tomar $I_1 = I_2 = \emptyset \in I$ y luego $X \cup I_1 = X \cup I_2$. También dada la definición de $\sim$ se tiene directamente la simetría. Veamos que también es transitiva. Si $X \sim Y$ y $Y \sim Z$, existen $I_1, I_2, I_3, I_4 \in I$ tales que $X \cup I_1 = Y \cup I_2$ y $Y \cup I_3 = Z \cup I_4$, de esto:

$$(X \cup I_1) \cup I_3 = (Y \cup I_2) \cup I_3 = (Y \cup I_3) \cup I_2 = (Z \cup I_4) \cup I_2$$

así $X \cup (I_1 \cup I_3) = Z \cup (I_2 \cup I_4)$, pero $I_1 \cup I_3, I_2 \cup I_4 \in I$, lo cual prueba que $X \sim Z$.

Lema 4.12. *Si $A \sim B$, entonces $A \cup X \sim B \cup X$ y $A \cap X \sim B \cap X$ para todo $X \in \mathcal{P}(S)$.*

Demostración. Como $A \sim B$, $A \cup I_1 = B \cup I_2$ para algunos $I_1, I_2 \in I$, luego para todo $X \in \mathcal{P}(S)$ se cumple que $(A \cup X) \cup I_1 = (B \cup X) \cup I_2$, y así $A \cup X \sim B \cup X$. Similarmente $(A \cup I_1) \cap X = (B \cup I_2) \cap X$ y así

$$(A \cap X) \cup (I_1 \cap X) = (B \cap X) \cup (I_2 \cap X)$$

pero como I es cerrado por abajo, $I_1 \cap X, I_2 \cap X \in I$, luego $A \cap X \sim B \cap X$. $\square$

Como usualmente se hace, vamos a denotar por $[X]_I$ a la clase de equivalencia de X, es decir, al conjunto $\{Y \in \mathcal{P}(S) \mid X \sim Y\}$.

Lema 4.13. $I = [\emptyset]_I$.

Demostración. Si $X \in I$, $X \cup \emptyset = \emptyset \cup X$, lo que prueba que $X \sim \emptyset$ y luego $I \subseteq [\emptyset]_I$. Ahora sea $X \in [\emptyset]_I$; existen $I_1, I_2 \in I$ tales que $\emptyset \cup I_1 = X \cup I_2$, es decir, $I_1 = X \cup I_2$, pero entonces $X \subseteq I_1 \in I$, consecuentemente $X \in I$, así $[\emptyset]_I \subseteq I$, lo cual termina la prueba. □

Una vez que tenemos a las clases de equivalencia cabe la pregunta de si este conjunto admite una estructura de álgebra booleana, es decir, si existen operaciones $+$ y $*$ que se comporten bien, y la respuesta es que sí y estas operaciones son tan simples como las de $\mathcal{P}(S)$, y de hecho, tal como pasa en teoría de anillos, el resultado de las operaciones entre clases de equivalencia es simplemente la clase de equivalencia del resultado de las operaciones en $\mathcal{P}(S)$.

Sea $\frac{\mathcal{P}(S)}{I} = \{[X]_I \mid X \in \mathcal{P}(S)\}$ y sea $[A]_I + [B]_I = [A \cup B]_I$ y $[A]_I * [B]_I = [A \cap B]_I$.

Lo primero que debemos de probar es que las operaciones $+$ y $*$ no dependen de los representantes, es decir, si $A \sim A'$ y $B \sim B'$, entonces $[A \cup B]_I = [A' \cup B']_I$ y $[A \cap B]_I = [A' \cap B']_I$, pero para ver esto último es suficiente notar que $A \cup B \sim A' \cup B'$ y $A \cap B \sim A' \cap B'$. Ahora, por el Lema 4.12, sabemos que $A \cup B \sim A \cup B' \sim A' \cup B'$ y que $A \cap B \sim A \cap B' \sim A' \cap B'$, luego (por la transitividad) se tiene que $A \cup B \sim A' \cup B'$ y que $A \cap B \sim A' \cap B'$, como se quería.

También es clara la conmutatividad de $+$ y $*$, pues $\cup$ y $\cap$ lo son. Veamos la distributividad de una operación respecto a la otra. Sean $[A]_I, [B]_I, [C]_I \in \frac{\mathcal{P}(S)}{I}$.

$$[A]_I + ([B]_I * [C]_I) = [A]_I + [B \cap C]_I = [A \cup (B \cap C)]_I =$$
$$[(A \cup B) \cap (A \cup C)]_I = [A \cup B]_I * [A \cup C]_I = ([A]_I + [B]_I) * ([A]_I + [C]_I).$$

Por otro lado, se tiene que:

$$[A]_I * ([B]_I + [C]_I) = [A]_I * [B \cup C]_I = [A \cap (B \cup C)]_I =$$
$$[(A \cap B) \cup (A \cap C)]_I = [A \cap B]_I + [A \cup C]_I = ([A]_I * [B]_I) + ([A]_I * [C]_I).$$

Además existen $[\emptyset]_I = I$ y $[S]_I = S$ en $\frac{\mathcal{P}(S)}{I}$ tales que

$$[A]_I + [\emptyset]_I = [A \cup \emptyset]_I = [A]_I$$

y

$$[A]_I * [S]_I = [A \cap S]_I = [A]_I.$$

También, eligiendo $A' = S \backslash A$ se tiene que $[A]_I + [A']_I = [S]_I$ y $[A]_I * [A']_I = [\emptyset]_I$. Esto prueba la existencia de los elementos neutros y de los inversos.

En resumen hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 4.14. *Sea I un ideal sobre un álgebra booleana $\mathcal{P}(S)$. Se tiene entonces $(\frac{\mathcal{P}(S)}{I}, +, *)$ es también un álgebra booleana con elemento cero $[\emptyset]_I = I$ y elemento unitario $[S]_I$.*

Esta álgebra booleana es llamada el álgebra cociente de $\mathcal{P}(S)$ sobre I.

El hecho de que un conjunto $\mathcal{P}(S)$ admita una estructura de álgebra booleana y que un subconjunto I de $\mathcal{P}(S)$ cumpla que $\frac{\mathcal{P}(S)}{I}$, definido adecuadamente, vuelva a admitir estructura de álgebra booleana, justifica el hecho de llamarle a I un ideal.

Por último veamos que las clases de equivalencia definidas para el anillo booleano son las mismas clases de equivalencia como álgebra booleana en el caso de que se trabaje sobre $\mathcal{P}(X)$.

Lema 4.15. *Sea X un conjunto no vacío e I un ideal*[2] *sobre $\mathcal{P}(X)$. Y sean $A, B \subseteq X$. Entonces $A \approx B$ si y sólo si $A \sim B$.*

Demostración. Recordemos que:

$$A \approx B \leftrightarrow A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in I$$

y que

$$A \sim B \leftrightarrow (\exists I_1, I_2 \in I)(A \cup I_1 = B \cup I_2).$$

$\Rightarrow$] Basta elegir $I_1 = I_2 = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, pues $A \cup I_1 = A \cup B = B \cup I_2$ y consecuentemente $A \sim B$.

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que existen $I_1, I_2 \in I$ tales que $A \cup I_1 = B \cup I_2$. Usaremos de nuevo la notación $B^c = X \setminus B$. Notemos que como $A \cup I_1 = B \cup I_2$, entonces $A \subseteq B \cup I_2$, luego, intersectando con B^c, se sigue que:

$$A \cap B^c \subseteq (B \cup I_2) \cap B^c = (B \cap B^c) \cup (B^c \cup I_2) = \emptyset \cup (B^c \cup I_2) = B^c \cup I_2 \subseteq I_2.$$

Y análogamente $A^c \cap B \subseteq I_1$. De esto se sigue que:

$$A + B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \subseteq I_2 \cup I_1 \in I,$$

pero como I es cerrado bajo subconjuntos, $A + B \in I$, que era lo que se quería. □

Estas dos secciones muestran que el considerar los ideales de acuerdo a la Proposición 4.10 es consistente con todo el trabajo que se tiene en teoría de anillos y de álgebras booleanas de estos objetos.

4.3. Algunos ideales importantes

Gracias a la Proposición 4.10 es muy fácil saber cuando un colección de subconjuntos de un conjunto X es un ideal. Note además que, en simetría con

[2] Note que gracias al Teorema 4.11 ya no es necesario aclarar si es un ideal en el sentido de anillos o de álgebra booleana.

el concepto de filtro, y desde el enfoque de la Proposición 4.10, la noción de ideal lo que trata de capturar es la idea de pequeñez.

Dependiendo el contexto en el que se trabaje, la idea de *pequeñez* puede variar mucho, pero resulta que las propiedades de un ideal son algo común a todas estas nociones, y justo los ejemplos que se muestran tratan de ilustran esto.

Ejemplo 4.16. *En $\mathcal{P}(X)$ la colección de todos los conjuntos finitos es un ideal. A este ideal le denotaremos como fin.*

Ejemplo 4.17. *En $\mathcal{P}(X)$ la colección de todos los conjuntos a lo más numerables es un ideal.*

Ejemplo 4.18. *En $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ la colección de todos los conjuntos que tienen medida cero según Lebesgue es un ideal.*

Ejemplo 4.19. *Sea (X, τ) un espacio topológico. En $\mathcal{P}(X)$ la colección de todos los subconjuntos densos en ninguna parte es un ideal.*

Es particularmente interesante el Ejemplo 4.18 ya que surge una pregunta natural: ¿Será que si se comienza con un ideal I en $\mathcal{P}(X)$ existirá alguna medida μ tal que $I = \{A \subset X \mid \mu(A) = 0\}$? Veamos que la respuesta es afirmativa si el ideal cumple una propiedad adicional.

Definición 4.20. *Sea un I un ideal en $\mathcal{P}(X)$. Al complemento de I (es decir, $\mathcal{P}(X) \setminus I$) le llamaremos el coideal de I y lo denotaremos por I^+.*

Teorema 4.21. *Sea I un ideal propio en $\mathcal{P}(X)$. Si I^+ es un filtro, entonces existe una medida bivaluada $\mu : \mathcal{P}(X) \to 2$ tal que $I = \{A \subset X \mid \mu(A) = 0\}$.*

Demostración. Es suficiente notar que en la demostración que se hizo para el Lema 2.49 nunca se uso el hecho de que U fuese un filtro maximal, sino simplemente un filtro, por lo tanto esa misma demostración también aplica para la función $\mu : \mathcal{P}(X) \to 2$ definida como sigue:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & si \quad A \in I \\ \\ 1 & si \quad A \in I^+. \end{cases}$$

Es decir, μ es efectivamente una medida, y ahora es claro, por construcción, que $I = \{A \subset X \mid \mu(A) = 0\}$. □

Una pregunta interesante es si se puede hacer algo análogo a esta construcción para el ideal del Ejemplo 4.19, es decir, si I es un ideal sobre X, ¿existirá alguna topología τ sobre X tal que

$$I = \{A \subseteq X \mid A \text{ es nunca denso en } (X, \tau)\}?$$

Esta es un problema que nos gustaría estudiar en futuros trabajos.

4.4. Ideales inducidos por familias independientes

Como se dijo al comienzo de la sección anterior, se puede asociar un ideal a una familia independiente de manera más o menos natural, lo bueno de esta asignación es que propiedades de la familia independiente se ven reflejadas en propiedades de su ideal.

Sea pues I una familia independiente y sea

$$id_I = \{A \subseteq \omega \mid \forall E \in ENV(I)(\exists B \subseteq E(B \in ENV(I))B \cap A = \emptyset)\}.$$

Proposición 4.22. *id_I es un ideal sobre ω.*

Demostración. Sea $A \in id_I$ y sea $B \subseteq A$, queremos ver que $B \in id_I$. Sea $C \in ENV(I)$; como $A \in id_I$, existe un $D \in ENV(I)$ tal que $D \subseteq C$ y $D \cap A = \emptyset$, pero $D \cap B \subseteq D \cap A$, consecuentemente $D \cap B = \emptyset$, lo cual prueba que $B \in id_I$. Sean $A, B \in id_I$ y $C \in ENV(I)$, queremos ver que $A \cup B \in id_I$, es decir, que existe $D \in ENV(I)$ que cumple $D \subseteq C$ y $D \cap (A \cup B) = \emptyset$. Como $A \in id_I$, existe $E \in ENV(I)$ tal que $E \subseteq C$ y $E \cap A = \emptyset$. Ahora como $B \in id_I$ y $E \in ENV(I)$, existe $D \in ENV(I)$ de forma que $D \cap B = \emptyset$, consecuentemente:

$$D \cap (A \cup B) = (D \cap A) \cup (D \cap B) = (D \cap A) \cup \emptyset = D \cap A \subseteq E \cap A = \emptyset,$$

que era lo que se quería. □

Note que la definición de id_I también la podemos dar en términos de $FF(I)$, es decir, $A \in id_I$ si y sólo si para toda $h \in FF(I)$ existe otra $k \in FF(I)$, con $h \subseteq k$, tal que $I^k \cap A = \emptyset$.

Ahora podemos observar una relación entre id_I^+ y el envolvente de la familia independiente, además de otras propiedades de id_I y de id_I^+, pero antes de eso necesitamos un par de definiciones.

Definición 4.23. *Si $\mathbb{A}$ es una colección de subconjuntos de ω, entonces*

$$\mathbb{A} \uparrow = \{X \subseteq \omega \mid \exists A \in \mathbb{A}(A \subseteq X)\}$$

es llamada la clausura ascendente de $\mathbb{A}$.

Definición 4.24. *Si $A \in id_I^+$, entonces existe un $E \in ENV(I)$ tal que para todo $F \subseteq E$, con $F \in ENV(I)$, se satisface que $F \cap A \neq \emptyset$. A dicho E le llamaremos un testigo de que $A \in id_I^+$.*

Note que, gracias el Corolario 3.4, y usando la notación de la Definición 4.24, sabemos que de hecho $F \cap A$ debe ser infinito, pues si fuese finito existiría un $F_0 \subseteq F$ (y por lo tanto $F_0 \subseteq E$) tal que $F_0 \in ENV(I)$ y además $F_0 \cap A = \emptyset$, lo cual sería una contradicción. Otra observación es que si E es un testigo de que $A \in id_I^+$ y $F \in ENV(I)$ es tal que $F \subseteq E$, F también es un testigo de $A \in id_I^+$.

Lema 4.25. *Sean I y J familias independientes sobre ω, entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Si $I \subseteq J$, entonces $id_I \subseteq id_J$.*
2. *$ENV(I) \uparrow \subseteq id_I^+$.*

Demostración. (1) Sea $A \in id_I$ y sea $B \in ENV(J)$. Como $B \in ENV(J)$, entonces $B = J^h$ para alguna $h \in FF(J)$, ahora podemos ver que

$$h = \{(A, h(A) \mid A \in dom(h) \cap I\} \cup \{(A, h(A)) \mid A \in (dom(h) \cap (J \setminus I)\},$$

es decir, h es la unión de una función en $FF(I)$ (posiblemente vacía) y otra en $FF(J \setminus I)$ (también posiblemente vacía). Sean

$$h_0 = \{(A, h(A) \mid A \in dom(h) \cap I\},$$

$$h_1 = \{(A, h(A)) \mid A \in (dom(h) \cap (J \setminus I)\}.$$

Como $h_0 \in FF(I)$ y además $A \in id_I$, existe una función $k \in FF(I)$ tal que $h_0 \subseteq k$ y además $I^k \cap A = \emptyset$. Si definimos $s = k \cup h_1$, y puesto que k y h_1 tienen dominios disjuntos, tenemos que s es una función tal que $s \in FF(J)$ y además $h \subseteq s$, consecuentemente $J^s \subseteq J^h$ y $J^s = J^{h_1} \cap I^k \subseteq I^k$ y así $J^s \cap A \subseteq I^k \cap A = \emptyset$ lo cual prueba, por la arbitrariedad de h, que $A \in id_J$.

(2) Primero veamos que id_I^+ es cerrado por arriba; para esto sea $A \in id_I^+$ y $B \supseteq A$. Como $A \in id_I^+$, entonces $A \notin id_I$; si sucediese que $B \in id_I$, como id_I es cerrado por abajo, también se tendría que $A \in id_I$, lo cual es una contradicción[3]. Ahora notemos que si $E \in ENV(I)$, entonces $E \notin id_I$. En efecto, E mismo es testigo de que $E \in id_I^+$, ya que para todo $F \subseteq E$, con $F \in ENV(I)$, se cumple que $E \cap F = F$ es infinito, lo cual implica que $E \notin id_I$ y consecuentemente $E \in id_I^+$, y así $ENV(I) \subseteq id_I^+$, ahora, usando el hecho de que id_I^+ es cerrado por arriba, concluimos que $ENV(I) \uparrow \subseteq id_I^+$.

□

Dada la segunda parte del Lema 4.25 surge una pregunta natural, ¿será que en realidad $ENV(I) \uparrow = id_I^+$? La respuesta en general es no, de hecho esto sólo pasa para familias independientes maximales en todas partes y es una caracterización de ellas.

Lema 4.26. *Sea I una familia independiente. Entonces I es independiente maximal en todas partes si y sólo si $ENV(I) \uparrow = id_I^+$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que I es independiente maximal y sea $X \in id_I^+$. Como $X \in id_I^+$, existe un $B \in ENV(I)$ tal que para todo $C \in ENV(I)$ con $C \subseteq B$ se cumple que $C \cap X$ es infinito. Como I es maximal en todas partes, debe existir un $C_0 \in ENV(I)$, con $C_0 \subseteq B$, de modo que $C_0 \subseteq X$ o $C_0 \cap X = \emptyset$; pero por la condición de antes no puede suceder que $C_0 \cap X = \emptyset$, consecuentemente $C_0 \subseteq X$, lo cual prueba, como $C \in ENV(I)$, que $X \in ENV(I) \uparrow$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $ENV(I) \uparrow = id_I^+$ y sean $X \subseteq \omega$ y $E \in ENV(I)$ arbitrarios. Si existe un $F \in ENV(I)$, con $F \subseteq E$, tal que $F \cap X = \emptyset$, entonces

[3] Note que esta prueba es válida para cualquier ideal, no sólo los de la forma id_I para alguna familia independiente I; es decir, si id es un ideal, entonces id^+ es cerrado por arriba.

ya terminamos. En caso de que no, $F \cap X$ es infinito para todo $F \subseteq E$ con $F \in ENV(I)$, consecuentemente $E \cap X \in id_I^+$ y E mismo es un testigo de esto, ya que $F \cap (E \cap X) = F \cap X \neq \emptyset$. Ahora como $E \cap X \in id_I^+$, y además $ENV(I) \uparrow = id_I^+$, necesariamente existe un $F_0 \in ENV(I)$ tal que $F_0 \subseteq E \cap X$. Así en particular $F_0 \subseteq E$ y $F_0 \subseteq X$, lo cual prueba que I es independiente maximal en todas partes. $\square$

En la literatura existen muchas definiciones de lo que es un ideal selectivo, estas definiciones son equivalentes en el caso de que el ideal sea el complemento de un ultrafiltro, pero no lo son en general, es por ello que es necesario tener claro cuáles son las implicaciones entre estas distintas definiciones. Antes de aclarar esto es necesario recordar que si $\leq$ es una relación reflexiva y transitiva sobre un conjunto P, decimos que la pareja $(P, \leq)$ es un preorden.

Definición 4.27. *Sea $(P, \leq)$ un preorden y sean $D, U \subseteq P$.*

1. *Decimos que D es denso si para todo $p \in P$ existe un $d \in D$ tal que $d \leq p$.*
2. *Decimos que U es abierto si siempre que $u \in U$ y $v \leq u$, entonces $v \in U$.*

Definición 4.28. *Un ideal id sobre un conjunto X se dice no principal si sucede que $\bigcup id = X$.*

Usando la notación del Ejemplo 4.16 y la Definición 4.28 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.29. *Sea id un ideal sobre un conjunto X. Entonces id es no principal si y sólo si $fin \subseteq id$.*

Demostración. Supongamos que id es no principal y sea A un subconjunto finito no vacío de X. Así $A = \{a_0, ..., a_{n-1}\}$ para algún $n \in \omega$. Puesto que $A \subseteq X = \bigcup id$, para cada $m \in n$ existe $B_m \in id$ tal que $a_m \in B_m$, ahora, como id es cerrado bajo uniones finitas se sigue que $A \subseteq \bigcup_{m \in n} B_m \in id$ y como id es cerrado bajo subconjuntos, $A \in id$, lo cual prueba que $fin \subseteq id$. Recíprocamente si $fin \subseteq id$, entonces $X = \bigcup fin \subseteq \bigcup id$, así, $X = \bigcup id$, lo cual prueba que id es no principal. $\square$

Definición 4.30. *Sea id un ideal no principal e id^+ su coideal. Entonces:*

1. *id es primero selectivo si siempre que $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$, con $A_n \in id^+$, existe un $B \in id_+$ tal que $B \setminus n \subseteq A_n$.*
2. *id es segundo selectivo (o semiselectivo) si para toda colección $\{\mathscr{D}_n \mid n \in \omega\}$ de conjuntos densos y abiertos en $(id^+, \subseteq^*)$ y para todo $A \in id^+$ existe un $B \in id^+$ tal que $B \subseteq A$ y además $B \setminus n \in \mathscr{D}_n$.*
3. *id es tercero selectivo (o Ramsey) si para todo $A \in id^+$ y toda $f : [A]^2 \to 2$, existe un $B \in id^+$ tal que $f \restriction [B]^2$ es constante.*
4. *id es cuarto selectivo si para todo $A \in id^+$ y toda $f : A \to \omega$, hay un $B \in id^+$ tal que $f \restriction B$ es inyectiva o constante.*

5. *id es quinto selectivo si siempre que $f : \omega \to \omega$, hay un $B \in id^+$ tal que $f \restriction B$ es inyectiva o constante.*

Lema 4.31. *Sea id un ideal, entonces se cumplen las siguientes implicaciones:*
(1) id es primero selectivo $\Rightarrow$ *(2) id* es segundo selectivo*,*
(3) id es tercero selectivo $\Rightarrow$ *(4) id* es cuarto selectivo $\Rightarrow$ *(5) id* es quinto selectivo*.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $A \in id^+$ y sea $\{\mathscr{D}_n \mid n \in \omega\}$ una colección de conjuntos densos y abiertos en $(id^+, \subseteq^*)$. Como en particular $\mathscr{D}_0$ es denso, existe un $E_0 \in \mathscr{D}_0$ tal que $E_0 \subseteq^* A$, es decir, $E_0 \setminus A$ es finito. Ahora como $E_0 = (E_0 \cap A) \cup (E_0 \setminus A)$, necesariamente $E_0 \cap A \in id^+$, ya que si no fuese así (es decir, si $E_0 \cap A \in id$), como $E_0 \setminus A$ es finito y el ideal es no principal, $E_0 \setminus A \in id$, luego tendríamos que $E_0 = (E_0 \cap A) \cup (E_0 \setminus A) \in id$, lo cual es una contradicción, pues $E_0 \in id^+$. Sea $D_0 = E_0 \cap A$. Análogamente, y siguiendo esta misma construcción, debe existir $D_1 \in \mathscr{D}_1$ tal que $D_1 \subseteq D_0$; más aún, existe una sucesión

$$A \subseteq D_0 \subseteq D_1 \subseteq \cdots \subseteq D_n \subseteq D_{n+1} \subseteq \cdots$$

tal que $D_n \in \mathscr{D}_n$ para todo $n \in \omega$. Como id es primero selectivo, existe un $B \in id^+$ tal que $B \subseteq A$ y $B \setminus n \subseteq D_n \in \mathscr{D}_n$ para todo $n \in \omega$, ahora, usando el hecho de que $\mathscr{D}_n$ es abierto, se concluye que $B \setminus n \in \mathscr{D}_n$, que era lo que se quería.

(3) $\Rightarrow$ (4) Sean $A \in id^+$ y $f : A \to \omega$ y definamos $g : [A]^2 \to 2$ como sigue:

$$g(\{a,b\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(a) = f(b) \\ \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Puesto que id es tercero selectivo, existe un $B \in id^+$ tal que $g \restriction [B]^2$ es constante. Si $g \restriction [B]^2 = 0$, entonces $\forall a, b \in B(f(a) = f(b))$, y si $g \restriction [B]^2 = 1$, $f(a) \neq f(b)$ para cualesquiera $a, b \in B$ con $a \neq b$, esto quiere decir, que $f \restriction B$ es uno a uno o constante, como se quería.

(4) $\Rightarrow$ (5) Este implicación es clara, pues basta tomar $A = \omega \in id^+$ y usar que id es cuarto selectivo. $\square$

Desde el punto de vista del estudio de las familias independientes, lo importante de las propiedades de selectividad de los ideales es que si se tiene un ideal proveniente de una familia independiente y este ideal cumple alguna propiedad de selectividad, podemos conocer propiedades de selectividad de la familia independiente. Esto tiene la ventaja de que los ideales, como ya se demostró en las primeras secciones de este capitulo, se pueden estudiar desde distintos puntos de vista. Los siguientes dos resultados dan testimonio de esto, además de tener consecuencias interesantes.

Lema 4.32. *Si I es una familia independiente selectiva, id_I es quinto selectivo.*

Demostración. Sea $f : \omega \to \omega$. Como I es selectiva se tiene que existe $E \in ENV(I)$ tal que $f \restriction E$ es uno a uno o constante, ahora como $ENV(I) \subseteq id_I^+$, $E \in id_I^+$, lo cual da el resultado. $\square$

Teorema 4.33. *Sea I una familia independiente. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *I es independiente selectiva en todas partes.*

2. *I es independiente maximal en todas partes e id_I es cuarto selectivo.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Ya se probó en el Lema 3.35 que si I es selectiva en todas partes, es maximal en todas partes, por lo tanto lo único que resta ver es que id_I es cuarto selectivo. Sea $A \in id_I^+$ y $f : A \to \omega$ y definamos

$$g(n) = \begin{cases} f(n) & \text{si } n \in A \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como ya sabemos I es independiente maximal en todas partes podemos aplicar el Lema 4.26, por lo tanto existe $h \in FF(I)$ tal que $I^h \subseteq A$. Como I es independiente selectiva en todas partes, en particular lo es en h, consecuentemente existe $k \in FF(I)$, con $h \subseteq k$, tal que $g \restriction I^k$ es uno a uno o constante, pero como $I^k \subseteq A$, entonces $g \restriction I^k = f \restriction I^k$, lo cual termina la prueba pues $I^k \in ENV(I) \subseteq id_I^+$.[4]

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $h \in FF(I)$ y $f : \omega \to \omega$. Queremos probar que existe $k \in FF(I)$ tal que $h \subseteq k$ y $f \restriction I^k$ es uno a uno o constante.

Para ello sea $A = I^h$. Es claro que $A \in id_I^+$, pues $ENV(I) \subseteq id_I^+$. Ahora sea $g = f \restriction A$. Como id_I es cuarto selectivo, existe un $B \in id_I^+$ tal que $g \restriction B$ es uno a uno o constante. Nuevamente, como I es independiente maximal en todas partes, podemos usar el Lema 4.26 y por lo tanto existe una $k \in FF(I)$ tal que $I^k \subseteq B$. Así se tiene que $g \restriction I^k \subseteq g \restriction B$, por lo tanto $g \restriction I^k$ también es uno a uno o constante, de aquí se tiene la prueba, pues como $I^k \subseteq A$, $g \restriction I^k = f \restriction I^k$. $\square$

Es gracias a esta caracterización que las familias independientes pueden ser objetos de estudio de la técnica conocida como *forcing*. Esta técnica conjuntista nos permite conocer la independencia y consistencia de ciertas afirmaciones, como por ejemplo podemos preguntarnos si es consistente que $\mathfrak{i}_{sel} < \mathfrak{c}$. Lo importante del Teorema 4.33, y de toda esta sección, es que conecta los ideales con las familias independientes, y los ideales son objetos que se han estudiado mucho y que se entienden en la óptica del forcing. De hecho es este trabajo es solo una parte de todo este proyecto, posteriormente ya se trabaja con ideales cuarto selectivos en distintos modelos de la teoría de conjuntos, en uno de los cuales efectivamente sucede que $\mathfrak{i}_{sel} < \mathfrak{c}$, lo cual, en particular, implica la consistencia de $\mathfrak{i} < \mathfrak{c}$.

[4]Note que no jugó ningún papel el cómo está definida g fuera de A, por lo tanto se pudo haber usado g como cualquier extensión de f a todo ω.

Capítulo 5

Una interpretación topológica

Cuando se profundiza en el estudio de las matemáticas se encuentran teoremas que muestran las relaciones entre conceptos de distintas áreas, en el caso del envolvente de una familia independiente se puede notar la enorme semejanza con el concepto topológico de base, donde $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es base para alguna topología sobre X si y sólo si cumple las condiciones:

1. $\cup\mathscr{B} = X$
2. Si $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ son tales que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $\emptyset \neq B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

El siguiente lema prueba que efectivamente estos dos conceptos están estrechamente relacionados.

Lema 5.1. *Si I es una familia independiente sobre ω, entonces el envolvente de I es base de alguna topología sobre ω.*

Demostración. Puesto que $ENV(I) = \{I^h \mid h \in FF(I)\}$, en particular $I^\emptyset = \omega \in ENV(I)$, por lo tanto $\omega = \cup ENV(I)$. Por otro lado, si se tienen dos funciones $h_0, h_1 \in FF(I)$ tales que $I^{h_0} \cap I^{h_1} \neq \emptyset$, $k = h_0 \cup h_1$ es una función. En efecto, si no fuese así es porque existe $A \in dom(h_0) \cap dom(h_1)$ tal que $h_0(A) \neq h_1(A)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $h_0(A) = 0$ y $h_1(A) = 1$. Luego $I^{h_0} \subseteq A^{h_0(A)} = A^0 = A$ y $I^{h_1} \subseteq A^{h_1(A)} = A^1 = \omega \setminus A$, consecuentemente $I^{h_0} \cap I^{h_1} = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto k es función y $h_0, h_1 \subseteq k$, luego, por la Proposición 3.2, se tiene que $I^k \subseteq I^{h_0}$ e $I^k \subseteq I^{h_1}$, así $I^k \subseteq I^{h_0} \cap I^{h_1}$. Como $I^k \in ENV(I)$, se tiene el resultado. $\square$

En esta sección los conjuntos densos en ninguna parte jugarán un papel crucial, por ello es preciso recordar su definición y una caracterización importante.

Definición 5.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $N \subseteq X$. Decimos que N es un conjunto denso en ninguna parte si el interior de su clausura es vacío.*

Proposición 5.3. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $N \subseteq X$. N es denso en ninguna parte si y sólo si para todo abierto no vacío A existe otro abierto $B \neq \emptyset$ contenido en A tal que $N \cap B = \emptyset$.*

Demostración. Recordemos que

$$cl(N) = \{x \in X \mid \forall V \in \tau(x \in V \to V \cap N \neq \emptyset)\}.$$

$\Rightarrow$] Por contradicción. Supongamos que existe un conjunto $A \neq \emptyset$ abierto tal que para todo $B \neq \emptyset$, con $B \subseteq A$, se cumple que $B \cap N \neq \emptyset$. La afirmación es que en este caso $A \subseteq cl(N)$ y consecuentemente, como A es abierto, $\emptyset \subsetneq A \subseteq int(cl(N))$, lo cual sería una contradicción. En efecto, sea $a \in A$ y sea $V \in \tau$ tal que $x \in V$. Ahora, tomando $B = V \cap A$, se tiene que $B \neq \emptyset$ (pues $a \in B$) y además $B \subseteq A$, luego, por la hipótesis, $B \cap N \neq \emptyset$ y así $V \cap N \neq \emptyset$, por lo tanto $x \in cl(A)$.
$\Leftarrow$] Por contradicción. Supongamos que N no es denso en ninguna parte, es decir, que $\emptyset \neq A = int(cl(N))$. Vamos a demostrar que A es tal que para todo $B \neq \emptyset$ contenido en A se cumple que $B \cap N \neq \emptyset$, lo que supondrá una contradicción (pues A es abierto). En efecto, sabemos que:

$$\emptyset \neq B \subseteq A = int(cl(N)) \subseteq cl(N),$$

luego $B \subseteq cl(N)$. Ahora sea $x \in B$ y sea $V \in \tau$ tal que $x \in V$. Como $x \in V \cap B$, $V \cap B$ es abierto y $x \in cl(N)$, entonces $(V \cap B) \cap N \neq \emptyset$ y así $B \cap N \neq \emptyset$, lo cual termina la prueba. $\square$

Corolario 5.4. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $N \subseteq X$. N es denso en ninguna parte si y sólo si para todo abierto básico no vacío A existe otro abierto básico $B \neq \emptyset$ contenido en A tal que $N \cap B = \emptyset$.*

Lema 5.5. *Sea I una familia independiente y sea τ_I la topología generada por $ENV(I)$. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Si $A \subseteq \omega$, con $A \notin I$, entonces $I \cup \{A\}$ es independiente si y sólo si A y $\omega \setminus A$ son ambos densos en (ω, τ_I).*

2. *Si $A \subseteq \omega$, entonces $A \in id_I$ si y sólo si A es denso en ninguna parte en (ω, τ_I).*

3. *(ω, τ_I) no tiene puntos aislados.*

4. *(ω, τ_I) es cero dimensional[1].*

Demostración. 1. Notemos que esto es un resultado del Lema 3.5, pues que $I \cup \{A\}$ sea independiente es equivalente a que A y $\omega \setminus A$ tengan intersección no vacía con cada elemento de $ENV(I)$, pero los elementos de $ENV(I)$ son los abiertos básicos de (ω, τ_I), luego, esta condición es equivalente a que A y $\omega \setminus A$ sean densos en (ω, τ_I).

[1] Un espacio (X,τ) es cero dimensional si admite una base de conjuntos clopen.

2. Basta recordar que

$$id_I = \{A \subseteq \omega \mid \forall E \in ENV(I)(\exists B \subseteq E(B \in ENV(I))B \cap A = \emptyset)\}.$$

Ahora, la condición $\forall E \in ENV(I)(\exists B \subseteq E(B \in ENV(I))B \cap A = \emptyset)$ es equivalente, en términos de (ω, τ_I), a que para todo abierto básico E exista otro abierto básico $F \subseteq E$ tal que $A \cap F = \emptyset$, la cual es la caracterización[2] de los conjuntos nunca densos del Corolario 5.4.
3. Es suficiente notar que para todo $n \in \omega$ se tiene que $\{n\}$ no es un conjunto abierto, pues todos los abiertos básicos en (ω, τ_I) son infinitos por ser los elementos de $ENV(I)$, por lo tanto n no es aislado.
4. Basta probar que todos los elementos de $ENV(I)$ son clopen. Sea $E \in ENV(I)$, entonces:

$$E = X_0 \cap \cdots \cap X_n \cap (\omega \setminus Y_0) \cap \cdots \cap (\omega \setminus Y_m),$$

en donde $X_0, \ldots, X_n, Y_0, \ldots, Y_m \in I$ son todos distintos.

Ahora, puesto que para cada par (i, j), con $i \in n+1$ y $j \in m+1$, X_i y Y_j son conjuntos clopen (ya que $X_i, (\omega \setminus X_i), Y_j, (\omega \setminus Y_j) \in ENV(I)$), E es una intersección finita de conjuntos clopen y por lo tanto es clopen, como se quería. $\square$

Este primer lema nos da indicios de que ciertas propiedades importantes de una familia independiente quedan caracterizadas por el espacio topológico que generan. Las siguientes definiciones y resultados dan testimonio de esto.

Definición 5.6. *Sea $(X\tau)$ un espacio topológico.*

1. *Decimos que (X, τ) es irresoluble si X no puede ser escrito como la unión de dos conjuntos densos disjuntos.*

2. *Decimos que (X, τ) es fuertemente irresoluble si para todo conjunto abierto $U \neq \emptyset$ se tiene que U, con la topología de subespacio, es irresoluble.*

Proposición 5.7. *Sea I una familia independiente.*

1. *I es maximal si y sólo si (ω, τ_I) es irresoluble.*

2. *I es maximal en todas partes si y sólo si (ω, τ_I) es fuertemente irresoluble.*

Demostración. 1. I es maximal si y sólo si para todo $A \subseteq \omega$, con $A \notin I$, se cumple que $I \cup \{A\}$ no es independiente, lo cual, por la parte (1) del Lema 5.5, es equivalente a que A y $\omega \setminus A$ no sean simultáneamente densos[3], esto es, que (ω, τ_I) sea irresoluble.

2. $\Rightarrow$] Primero notemos que es suficiente verificar la irresolubilidad de los abiertos básicos. Supongamos entonces que I es maximal en todas partes y

[2] Aquí no es necesario pedir que E y F sean no vacíos pues eso es algo que ya se tiene por ser elementos del envolvente.

[3] Note que ningún elemento en $A \in I$ va a ser denso, puesto que $\omega \setminus A$ es abierto.

sea $h \in FF(I)$. Queremos probar que I^h es irresoluble. Sea pues $A \subseteq I^h$ y $B = (I^h \setminus A)$. Como I es independiente maximal en h, existe $k \supseteq h$ tal que $(I^k \subseteq A) \vee (I^k \cap A = \emptyset)$. Si A fuese denso, en particular no puede suceder que $I^k \cap A = \emptyset$, ya que I^k es un abierto no vacío en I^h, por lo tanto $I^k \subseteq A$ y luego $B \cap I^k = \emptyset$, consecuentemente B no es denso.

$\Leftarrow]$ Ahora supongamos que (ω, τ_I) es fuertemente irresoluble y sea $h \in FF(I)$. Probaremos que I es maximal en h. Sea $A \subseteq I^h$ y $B = I^h \setminus A$. Como A y B no son ambos densos, debe existir un abierto básico I^k, con $k \supseteq h$[4], tal que $I^k \cap A = \emptyset$ o $I^k \cap B = \emptyset$. En el primer caso ya se tiene lo que se quería, en el segundo caso $I^k \subseteq I^h \setminus B = A$. □

Definición 5.8. *Decimos que un espacio topológico (X, τ) es selectivo si para toda colección numerable de conjuntos fronterizos*[5] *cuya unión cubre a X, se cumple que existe un conjunto abierto $U \neq \emptyset$ tal que U intersecta a cada uno de esos fronterizos en a lo más un punto.*

Proposición 5.9. *Sea I una familia independiente. Entonces I es selectiva en todas partes si y sólo si para toda $h \in FF(I)$ se cumple que I^h, con la topología de subespacio, es selectivo.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Supongamos que I es selectiva en todas partes y sea $h \in FF(I)$. Sean $\{K_n \mid n \in \omega\}$ una familia de conjuntos fronterizos en I^h, $f : I^h \to \omega$ la función definida por $f(n) = m \Leftrightarrow n \in K_m$ y g cualquier extensión de f a todo ω. Como I es selectiva en todas partes, en particular lo es en I^h, por lo tanto existe $k \in FF(I)$, con $k \supseteq h$, tal que $g \restriction I^k = f \restriction I^k$ es uno a uno o constante[6]. Si $f \restriction I^k$ fuese constante, es decir, si para todo $n \in I^k$ se cumple que $f(n) = m$, entonces $I^k \subseteq K_m$, pero en ese caso K_m no es fronterizo en I^h, pues I^k es un abierto no vacío en I^h e $I^k \subseteq K_m$, consecuentemente $\emptyset \neq I^k \subseteq K_m$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f \restriction I^k$ es uno a uno. Si para algún $m \in \omega$ sucediese que $|I^k \cap K_m| \geq 2$, elíjase $a, b \in I^k \cap K_m$, con $a \neq b$, luego, por la definición de f se tendría que $f(a) = m = f(b)$, lo cual es una contradicción pues f es inyectiva en I^k.

$\Leftarrow]$ Sea $h \in FF(I)$. Sabemos que I^h, con la topología de subespacio, es selectivo y queremos probar que I es selectiva en h. Sean $f : \omega \to \omega$ y $K_n = f^{-1}(\{n\}) \cap I^h$. Si existe un abierto básico I^k en I^h tal que $I^k \subseteq K_m$ para algún $m \in \omega$, entonces hemos terminado, pues $f \restriction I^k$ sería constante. En caso contrario, cada K_m es fronterizo en I^h y por lo tanto, aplicando que I^h es selectivo, existe un abierto básico I^k tal que $|I^k \cap K_n| \leq 1$ para todo $n \in \omega$. Sean $a, b \in I^k$, con $a \neq b$, entonces, por la condición anterior, $a \in K_n$ y $b \in K_m$ con $n \neq m$, consecuentemente $f(a) = n \neq m = f(b)$, lo que prueba que $f \restriction I^k$ es inyectiva y por lo tanto I es selectiva en h, como se quería. □

---

[4]Note que efectivamente estos son los abiertos básicos en I^h, pues son los abiertos básicos de (ω, τ_I) que intersectan a I^h intersectados con I^h.

[5]Recodemos que un conjunto es fronterizo si su interior es vacío.

[6]Pues $I^k \subseteq I^h$.

Note que, de hecho, hemos probado algo más fuerte: si $h \in FF(I)$, I es selectiva en h si y sólo si I^h es selectivo con la topología de subespacio. Por lo tanto tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.10. *Sea I una familia independiente. Entonces I es selectiva si y solo si (ω, τ_I) es selectivo.*

Demostración. Basta recordar que si I es selectiva, entonces es selectiva en I^h para $h = \emptyset$ e $I^\emptyset = \omega$. □

5.1. Familias independientes numerables

Siguiendo la misma notación se tiene el siguiente resultado.

Lema 5.11. *I es numerable si y sólo si (ω, τ_I) es primero numerable.*

Demostración. $\Rightarrow$] Notemos que como consecuencia de la Proposición 2.20 sabemos que para toda familia independiente[7] I se tiene que $|I| = |ENV(I)|$, por lo tanto si I es numerable $ENV(I)$ también lo es, así (ω, τ_I) es segundo numerable y por lo tanto primero numerable.

$\Leftarrow$] Sea $I = \{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia independiente y supongamos que (ω, τ_I) es primero numerable. Ahora, como para cada $n \in \omega$ existe $\mathscr{B}_n$ base local de n, entonces $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \omega} \mathscr{B}_n$ es una base numerable del espacio y por lo tanto (ω, τ_I) es segundo numerable. Definamos, para cada $\alpha \in J$, el conjunto H_α como:

$$H_\alpha = X_\alpha \cap \left(\bigcup_{\gamma \in J, \gamma \neq \alpha} (\omega \setminus X_\gamma) \right).$$

Vamos a demostrar que H_α es un abierto no vacío. Primero notemos que

$$H_\alpha = X_\alpha \setminus \bigcap_{\gamma \in J, \gamma \neq \alpha} X_\gamma = X_\alpha \cap \left(\omega \setminus \bigcap_{\gamma \in J, \gamma \neq \alpha} X_\gamma) \right).$$

Como cada X_γ con $\gamma \neq \alpha$ es cerrado, entonces $\bigcap_{\gamma \in J, \gamma \neq \alpha} X_\gamma$ lo es, luego $\omega \setminus \left(\bigcap_{\gamma \in J, \gamma \neq \alpha} X_\gamma \right)$ es abierto, y por lo tanto H_α es la intersección de dos abiertos, luego es abierto. Por otro lado, H_α es no vacío, ya que si lo fuese se tendría que

$$X_\alpha \subseteq \bigcap_{\gamma \in J, \gamma \neq \alpha} X_\gamma,$$

en particular, $X_\alpha \subseteq X_\gamma$ para algún $\gamma \neq \alpha$. Pero en ese caso $X_\alpha \cap (\omega \setminus X_\gamma) \in ENV(I)$, lo cual es imposible.

Ahora si $\alpha, \gamma \in J$ con $\alpha \neq \gamma$, entonces $H_\alpha \cap H_\gamma = \emptyset$. En efecto, basta notar que

$$H_\alpha \cap H_\gamma \subseteq (X_\alpha \cap (\omega \setminus X_\gamma)) \cap (X_\gamma \cap (\omega \setminus X_\alpha)) = \emptyset.$$

[7] Recordemos que todas las familias independientes que consideramos son infinitas.

Como $\mathcal{C}$ es una base y cada H_α es un abierto no vacío, existe $\emptyset \neq C_\alpha \in \mathcal{C}$ tal que $C_\alpha \subseteq H_\alpha$. Dado que si $\alpha \neq \gamma$, entonces $H_\alpha \cap H_\gamma = \emptyset$, se tiene que $C_\alpha \neq C_\gamma$; esto muestra que la asignación $F : J \to \mathcal{C}$ dada por $F(\alpha) = C_\alpha$ es inyectiva y por lo tanto J, y consecuentemente I, es numerable, como se quería. □

Gracias a los Lemas 5.5 y 5.11 y al siguiente teorema de Sierpinsky, cuya prueba se puede consultar en [5], obtendremos un resultado importante sobre las familias independientes numerables.

Teorema 5.12. *El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, dotado de la topología de subespacio que hereda de $(\mathbb{R}, \tau_d)$, es el único espacio topológico, salvo homeomorfismo, que es numerable, primero numerable, regular y sin puntos aislados.*

Corolario 5.13. *Sea I una familia independiente. Entonces I es numerable si y sólo si (ω, τ_I) es homeomorfo a $\mathbb{Q}$.*

El Corolario 5.13 es una herramienta para poder decir cuándo una familia independiente es numerable: si una familia independiente es numerable sabemos que no es selectiva en todas partes, ni maximal en todas partes, ni selectiva, ni maximal.

Por otro lado, se puede observar que si I es numerable, entonces para cada $h \in FF(I)$ se tendrá que I^h, con la topología de subespacio, también será numerable, primero numerable, regular y sin puntos aislados; esta observación permite que podamos mejorar el Corolario 5.13.

Lema 5.14. *Sea I una familia independiente. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *I es numerable.*
2. *(ω, τ_I) es homeomorfo a $\mathbb{Q}$.*
3. *Para toda $h \in FF(I)$ se cumple que I^h, con la topología de subespacio, es homeomorfo a $\mathbb{Q}$.*
4. *Para alguna $h \in FF(I)$ se cumple que I^h, con la topología de subespacio, es homeomorfo a $\mathbb{Q}$.*

Demostración. Es claro que (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4), por lo tanto lo único que resta probar es que (4) ⇒ (1), para ello haremos una prueba completamente análoga a la del Lema 5.11.

Sean I una familia independiente y $h_0 \in FF(I)$ tales que I^{h_0}, con la topología de subespacio, es homeomorfo a $\mathbb{Q}$. En particular I^{h_0} es primero numerable, y por ser numerable, es segundo numerable. Sean $\mathcal{C}$ una base numerable de I^{h_0} e $I_0 = I \setminus dom(h_0)$. Como $dom(h_0)$ es finito, entonces $|I_0| = |I|$. Considere $I_0 = \{X_\alpha \mid \alpha \in J\}$ una indexación de I_0. Para cada $\alpha \in J$ sea

$$H_\alpha = X_\alpha \cap \left(\bigcup_{\gamma \in J, \gamma \neq \alpha} (\omega \setminus X_\gamma) \right) \cap I^{h_0},$$

el cual, gracias a lo probado en el Lema 5.11, es un abierto en el subespacio I^{h_0}. No puede suceder que $H_\alpha = \emptyset$, ya que si así fuese:

$$X_\alpha \cap I^{h_0} \subseteq \bigcap_{\gamma \in J, \gamma \neq \alpha} X_\gamma,$$

pero en ese caso, para un $\gamma \in J$ fijo, con $\gamma \neq \alpha$, se tiene que $X_\alpha \cap I^{h_0} \subseteq X_\gamma$, lo cual, a su vez, implica que $\emptyset = X_\alpha \cap I^{h_0} \cap (\omega \setminus X_\gamma) \in ENV(I)$ y esto es una contradicción.

Nuevamente para $\alpha, \gamma \in J$, con $\alpha \neq \gamma$, $H_\alpha \cap H_\gamma = \emptyset$.

Ahora, como $\mathcal{C}$ es una base de I^{h_0} y cada H_α es un abierto no vacío en I^{h_0}, existe $\emptyset \neq C_\alpha \in \mathcal{C}$ tal que $C_\alpha \subseteq H_\alpha$. Finalmente por la condición de que $H_\alpha \cap H_\gamma = \emptyset$ si $\alpha \neq \gamma$, $C_\alpha \neq C_\gamma$. Esto muestra que la asignación $F : J \to \mathcal{C}$ dada por $F(\alpha) = C_\alpha$ es inyectiva y por lo tanto J es numerable, y consecuentemente I_0 lo es y por lo tanto I también, como se quería. □

5.2. Familias densas independientes

Es claro que, en principio, podemos considerar familias independientes sobre cualquier conjunto X, en particular podemos considerarlas en el caso de que $X = \mathbb{Q}$, pero es importante darse cuenta de que si J es una familia independiente sobre $\mathbb{Q}$, y si $H : \mathbb{Q} \to \omega$ es una biyección, entonces $H(J) = \{H(X) \mid J \in J\}$ es una familia independiente sobre ω, y viceversa, si I es una independiente sobre ω, $H^{-1}(I)$ lo es sobre $\mathbb{Q}$. Lo que quiere decir esto es que, en principio, no se gana nada al pensar en las familias independientes sobre un conjunto numerable u otro, y esto se debe a que lo único que captura la definición de familia independiente es una noción de *tamaño*.

Por otro lado, en la sección anterior se vio que existe una relación entre las familias independientes sobre ω y la topología sobre $\mathbb{Q}$. Esta observación sugiere que si lo que se quiere es utilizar la estructura que conocemos de $\mathbb{Q}$, entonces no debemos considerar a todas las familias independientes sobre este conjunto, sino solo a aquellas que además cumplen alguna propiedad topológica, es decir, aprovechar el hecho de que $\mathbb{Q}$ no es cualquier conjunto numerable, sino uno muy particular cuando se le ve como espacio topológico.

Ahora surge el problema de decidir cuál es la propiedad topológica que será de utilidad o que sería importante analizar, y es natural suponer que esta propiedad topológica debería estar inspirada en la sección anterior. La siguiente definición es entonces clara en perspectiva del Lema 5.5.

Definición 5.15. *Sea I una colección de conjuntos densos de $\mathbb{Q}$. Decimos que I es una familia densa independiente si todo conjunto de $ENV(I)$ es denso en $\mathbb{Q}$.*

Aquí $ENV(I)$ denota igualmente al conjunto

$$\left\{ \bigcap A \setminus \bigcup B \mid (A, B \subseteq I) \wedge (A \cap B = \emptyset) \wedge (A, B \text{ son finitos }) \right\}.$$

Note que en la definición de familia densa independiente no se pide directamente la independencia, sin embargo, como los elementos de $ENV(I)$ son densos, en particular son infinitos, por lo tanto si I es densa independiente sobre $\mathbb{Q}$, entonces es independiente.

Lema 5.16. *Si I es una familia independiente numerable sobre ω y $A \subseteq \mathbb{Q}$, entonces existen un conjunto $B \subseteq \omega$ y un conjunto $E \in ENV(I)$ tal que $I \cup \{B\}$ es independiente y $H(E \cap B) \subseteq A$ o $H(E \cap B) \cap A = \emptyset$, donde $H : (\omega, \tau_I) \to \mathbb{Q}$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Haremos la demostración en dos casos: cuando A es denso en ninguna parte y cuando no lo es.

Caso 1) Supongamos que $A \subseteq \mathbb{Q}$ es denso en ninguna parte. Como H es un homeomorfismo, se tiene que $H^{-1}(A)$ es denso en ninguna parte sobre (ω, τ_I). Por la parte (2) del Lema 5.5 se sigue que $H^{-1}(A) \in id_I$. Ahora como $\omega \in ENV(I)$, existe un $F_0 \subseteq \omega$, con $F_0 \in ENV(I)$, tal que $F_0 \cap H^{-1}(A) = \emptyset$. Por otro lado, como I es numerable, por el Lema 3.9, existe $B \subseteq \omega$, con $B \notin I$, tal que $I \cup \{B\}$ es independiente. De todo esto se sigue que:

$$F_0 \cap H^{-1}(A) = \emptyset \Rightarrow F_0 \cap B \cap H^{-1}(A) = \emptyset \Rightarrow H(F_0 \cap B) \cap A = \emptyset,$$

que era lo que se quería.

Caso 2) Supongamos que A no es denso en ninguna parte. Nuevamente, como A no es denso en ninguna parte en $\mathbb{Q}$, $H^{-1}(A)$ no lo es en (ω, τ_I). Usando de nuevo la parte (2) del Lema 5.5, se sigue que $H^{-1}(A) \in id_I^+$. Sea $E \in ENV(I)$ un testigo de que $H^{-1}(A) \in id_I^+$. Esto significa que para todo $F \subseteq E$ con $F \in ENV(I)$ se cumple que $H^{-1}(A) \cap F \neq \emptyset$.

Si existiese algún $F_0 \in ENV(I)$ tal que $F_0 \subseteq H^{-1}(A)$, bastaría considerar dicho F_0 y a cualquier $B \subseteq \omega$ tal que $I \cup \{B\}$ sea independiente, ya que en ese caso se tendría que:

$$F_0 \subseteq H^{-1}(A) \Rightarrow F_0 \cap B \subseteq H^{-1}(A) \Rightarrow H(F_0 \cap B) \subseteq A.$$

Supongamos que no existe dicho F_0, es decir, supongamos que para todo $F \subseteq E$, con $F \in ENV(I)$, se cumple que $F \cap (\omega \setminus H^{-1}(A)) \neq \emptyset$, lo cual equivale a decir que todo elemento del envolvente contenido en E además de intersectar a $H^{-1}(A)$ también intersecta a su complemento.

Sea $B_0 \subseteq \omega$ cualquier conjunto tal que $I \cup \{B_0\}$ sea independiente, con $B_0 \notin I$ y sea $B_1 = B_0 \setminus E$. Consideremos el conjunto $B = B_1 \cup (H^{-1}(A) \cap E)$ y veamos que éste es el conjunto buscado. Primero obsérvese que:

$$E \cap B = H^{-1}(A) \cap E \subseteq H^{-1}(A) \Rightarrow H(E \cap B) \subseteq H(H^{-1}(A)) = A,$$

por lo tanto sólo resta ver que $I \cup \{B\}$ es independiente, es decir, que para todo $S \in ENV(I)$ se cumple que $S \cap B \neq \emptyset \neq S \cap (\omega \setminus B)$.

Sea $S \in ENV(I)$. Definiendo $S_0 = S \cap E$ y $S_1 = S \cap (\omega \setminus E)$, se tiene que $S = S_0 \cup S_1$ y además $S_0 \neq \emptyset$ ó $S_1 \neq \emptyset$.

Supongamos que $S_0 \neq \emptyset$, luego $S_0 \in ENV(I)$, y como $S_0 \subseteq E$, $S_0 \cap H^{-1}(A) \neq \emptyset$ y también $S_0 \cap (\omega \setminus H^{-1}(A) \neq \emptyset$. Consecuentemente:

$$\emptyset \neq S_0 \cap H^{-1}(A) = S_0 \cap H^{-1}(A) \cap E \subseteq S \cap (H^{-1}(A) \cap E) \subseteq S \cap B$$

y además:

$$\emptyset \neq S_0 \cap ((\omega \setminus H^{-1}(A)) = S_0 \cap (\omega \setminus H^{-1}(A)) \cap E) \subseteq S_0 \cap (\omega \setminus B) \subseteq S \cap (\omega \setminus B).$$

Del mismo modo, si $S_1 \neq \emptyset$, $S_1 \in ENV(I)$, y por lo tanto existe un $b \in B_0$ tal que $b \in S_1$, pero como $b \in S_1 = S \cap (\omega \setminus E)$, $b \in B_0 \setminus E = B_1$, y luego:

$$b \in S_1 \cap B_1 \subseteq S \cap B.$$

También sucede que, como $I \cup \{B_0\}$ es independiente, $S_1 \cap (\omega \setminus B_0) \neq \emptyset$, pero, como $S_1 \subseteq (\omega \setminus E)$ se sigue que

$$\emptyset \neq S_1 \cap (\omega \setminus B_0) = S_1 \cap (\omega \setminus B_0) \cap (\omega \setminus E) = S_1 \cap (\omega \setminus B_1) \subseteq S_1 \cap (\omega \setminus B) \subseteq S \cap (\omega \setminus B).$$

Esto prueba que $S \cap B \neq \emptyset \neq S \cap (\omega \setminus B)$, es decir, $I \cup \{B\}$ es independiente, que era lo que se quería. □

Note que además esta última demostración nos permite saber cuándo sucede $H(E \cap B) \subseteq A$ y cuándo $H(E \cap B) \cap A = \emptyset$, por lo tanto, adaptando la prueba del caso en que A no es denso en ninguna parte y recordando lo establecido por el Lema 5.14, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 5.17. *Si I es una familia independiente, $A \subseteq \mathbb{Q}$ es un conjunto que no es denso en ninguna parte y $h_0 \in FF(I)$, entonces existen $B \subseteq \omega$ y $h_1 \in FF(I)$ tales que $I \cup \{B\}$ es independiente, $h_0 \subseteq h_1$ y $H(I^{h_1} \cap B) \subseteq A$, donde H es el homeomorfismo de I^{h_0}, con la topología de subespacio, a $\mathbb{Q}$.*

Puesto que el envolvente de una familia independiente numerable es numerable, podemos aplicar el Corolario 5.17 para cada $h \in FF(I)$, de hecho, lo podemos aplicar recursivamente y obtener el siguiente resultado.

Corolario 5.18. *Si I es una familia independiente numerable y $A \subseteq \mathbb{Q}$, existe una colección numerable $\{B_n \mid n \in \omega\}$ de subconjuntos de ω tal que $I \cup \{B_n \mid n \in \omega\}$ es independiente y además para cada $h_0 \in FF(J)$ existe $h_1 \in FF(J)$ tal que $H(J^{h_1} \subseteq A)$ o $H(J^{h_1}) \cap A = \emptyset$.*

En completa analogía a la Proposición 3.10, podemos verificar que las familias independientes densas satisfacen el Lema de Zorn, por lo tanto, al igual de como definimos $\mathfrak{i}$, podemos definir el siguiente cardinal:

$$\mathfrak{i}_{\mathbb{Q}} = \text{mín}\{|I| \mid I \text{ es una familia densa independiente maximal}\}.$$

Uno está tentado a decir que, puesto que toda familia independiente densa es independiente, entonces $\mathfrak{i} \leq \mathfrak{i}_{\mathbb{Q}}$; sin embargo, no sabemos si en realidad toda familia independiente densa maximal también es maximal en el sentido de las familias independientes. Vamos a probar que en realidad sí, y que además no sólo se da la desigualdad sino la igualdad.

Lema 5.19. *Hay una familia independiente maximal sobre ω de cardinalidad κ si y sólo si hay una familia densa independiente maximal de cardinalidad κ.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que I es una familia independiente maximal sobre ω y supongamos que $|I| = \kappa$. Sea $J \subseteq I$ numerable y sea $H : (\omega, \tau_J) \to Q$ un homeomorfismo. Entonces $T = \{H(X) \mid X \in I \setminus J\}$ es una familia densa independiente maximal.

Lo primero que hay que probar es que T es densa independiente, lo cual significa que cada elemento $E \in ENV(T)$ es denso en $\mathbb{Q}$; para ello basta verificar que $H^{-1}(E)$ es denso en (ω, τ_J). Pero $H^{-1}(E) = I_0^{h_0}$, donde $I_0 = I \setminus J$ y $h_0 \in FF(I_0)$. Ahora $I_0^{h_0}$ es claramente denso, pues intersecta a cada abierto básico (los elementos de $ENV(J)$) por la independencia de I.

Si T no fuese maximal, existiría $A \subseteq \mathbb{Q}$, con $A \notin T$, tal que $T^* = T \cup \{A\}$ fuese densa independiente. Pero en ese caso $I \cup \{H^{-1}(A)\}$ sería independiente. Para ver que $I \cup \{H^{-1}(A)\}$ sería independiente basta notar, por la Proposición 3.5, que cada elemento de $ENV(I)$ intersecta a $H^{-1}(A)$ y a $\omega \setminus H^{-1}(A)$. Además sabemos que:

$$I = J \cup I_0.$$

Por lo tanto cada elemento del envolvente de I se obtiene al intersectar uno del envolvente de J con uno del envolvente de I_0. Sean entonces $E \in ENV(J)$ y $F \in ENV(I_0)$. Queremos observar que

$$E \cap F \cap H^{-1}(A), \qquad E \cap F \cap (\omega \setminus H^{-1}(A))$$

son ambos no vacíos; veamos que $E \cap F \cap H^{-1}(A) \neq \emptyset$, el otro caso es análogo. Es claro que $E \cap F \cap H^{-1}(A) \neq \emptyset$ es equivalente a que:

$$H(E \cap F \cap H^{-1}(A)) = H(E) \cap H(F) \cap A \neq \emptyset.$$

Pero $H(F) \cap A$ es un elemento de T^*, y esta última es densa independiente, por lo tanto $H(F) \cap A$ es un conjunto denso sobre $\mathbb{Q}$. Por otro lado, como E es un abierto no vacío en (ω, τ_C), $H(E)$ es un abierto no vacío en $\mathbb{Q}$, y la intersección de un denso y un abierto no vacío es no vacía, luego

$$E \cap F \cap H^{-1}(A) \neq \emptyset,$$

que era lo que se quería. Pero luego $I \cup \{H^{-1}(A)\}$ es una familia independiente sobre ω y además, puesto que $A \notin T$, $H^{-1}(A) \notin I_0$. Por otro lado, $H^{-1}(A)$ no puede ser un elemento de C, ya que los elementos de C son abiertos propios (en (ω, τ_C)) y ningún abierto propio es denso (y $H^{-1}(A)$ es denso en (ω, τ_C)). Por lo tanto, $H^{-1}(A) \notin I$ e $I \cup \{H^{-1}(A)\}$ es una familia independiente, pero I es maximal, ésta es una contradicción derivada de suponer que T no es maximal.

Por lo tanto, T es una familia densa independiente maximal y además

$$\kappa = |I| = |I_0| + |C| = |T| + \aleph_O = \text{máx}\{|T|, \aleph_0\} = |T|;$$

es decir, $|T| = \kappa$, que era lo que se quería.

$\Leftarrow$] Sea I una familia independiente densa maximal sobre $\mathbb{Q}$ de cardinalidad κ. Sean C una familia independiente numerable sobre ω y $H : (\omega, \tau_C) \to \mathbb{Q}$ un homeomorfismo. Entonces $J = C \cup H^{-1}(I)$ es independiente. En efecto, basta notar que un elemento del envolvente de J se obtiene al intersectar uno del envolvente de C con otro del envolvente de $H^{-1}(I)$. Ahora, puesto que cada elemento de $ENV(I)$ es denso en $\mathbb{Q}$, cada elemento de $ENV(H^{-1}(I))$ lo es en (ω, τ_C), lo que en particular dice que intersecta en infinitos puntos a cada abierto básico (no lo podría intersectar en finitos puntos por el Corolario 3.4), pero los abiertos básicos son precisamente los elementos de $ENV(C)$.

Si J no fuese maximal, sea $A \subseteq \omega$ un testigo de esto, es decir, $A \notin J$ y $J \cup \{A\}$ es independiente. Entonces $I \cup \{H(A)\}$ es una familia densa independiente. Basta notar que para todo $E \in ENV(I)$ se cumple que $E \cap H(A)$ y $E \cap (\mathbb{Q} \setminus H(A))$ son densos en $\mathbb{Q}$, pero a su vez esto es equivalente a que $H^{-1}(E) \cap A$ y $H^{-1}(E) \cap (\omega \setminus A)$ sean densos en (ω, τ_C), lo cual a su vez equivale a que $H^{-1}(E) \cap A$ y $H^{-1}(E) \cap (\omega \setminus A)$ intersecten a cada $F \in ENV(C)$. Pero esto último es cierto pues

$$[H^{-1}(E) \cap A] \cap F, [H^{-1}(E) \cap (\omega \setminus A)] \cap F \in ENV(J \cup \{A\}),$$

y los elementos de $ENV(J \cup \{A\})$ son infinitos por la independencia de $J \cup \{A\}$.

Esto prueba que $I \cup \{H(A)\}$ es una familia densa independiente, pero como $A \notin J$, entonces $H(A) \notin I$, consecuentemente I no es una familia densa independiente maximal, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, J es una familia independiente maximal y además

$$|J| = |C| + |H^{-1}(I)| = |C| + |I| = \aleph_0 + \kappa = \max\{\aleph_0, \kappa\} = \kappa,$$

que era lo que se quería. □

Corolario 5.20. $\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_{\mathbb{Q}}$.

Gracias al Corolario 5.20 tenemos una nueva forma de encontrar cotas para $\mathfrak{i}$: encontrar cotas para $\mathfrak{i}_{\mathbb{Q}}$. Ya habíamos probado que $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{i}$, y en el contexto de las familias independientes densas sobre $\mathbb{Q}$ podemos encontrar una cota similar, ¡pero sorprendentemente distinta y *mejor*!

Definimos el cardinal $\mathfrak{r}_{\mathbb{Q}}$ como la cardinalidad más pequeña para la cual existe una familia segada sobre $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus NWD$, donde

$$NWD = \{X \subseteq \mathbb{Q} \mid X \text{ es denso en ninguna parte}\}.$$

Es importante notar que una familia segada $\mathscr{R}$ sobre $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus NWD$ es aquella para la cual no existe $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus NWD$ tal que $A \cap R, A \cap (\mathbb{Q} \setminus R) \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus NWD$ para todo $R \in \mathscr{R}$.

Resulta que en [1], se prueba que $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{r}_{\mathbb{Q}} \leq \mathfrak{i}_{\mathbb{Q}}$, pero lo más impresionante es que es consistente con ZFC que $\mathfrak{r} < \mathfrak{r}_{\mathbb{Q}}$, es decir, $\mathfrak{r}_{\mathbb{Q}}$ es en realidad una *mejor* cota para $\mathfrak{i}$.

De la misma manera, e inspirados en el Corolario 3.39, surgen la siguientes definiciones.

Definición 5.21. *Sea I una familia de subconjuntos de $\mathbb{Q}$. Decimos que I es una familia independiente densa selectiva si es independiente densa y además para toda función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ se cumple que existe un elemento $E \in ENV(I)$ tal que $f \restriction E$ es uno a uno o constante.*

Como es de esperarse, y del mismo modo que antes, no podemos asegurar la existencia de las familias independientes densas selectivas, sin embargo conviene considerar el siguiente cardinal:

$$\mathfrak{i}_{sel,\mathbb{Q}} = \text{mín}\{|I| \mid I \text{ es una familia densa independiente selectiva}\}.$$

Recordemos que las familias selectivas tienen una relación con las familias homogéneas, por lo tanto, no es de sorprender que se tenga esta misma relación para las familias densas independientes selectivas. Más precisamente si definimos $\mathfrak{hom}_{1,\mathbb{Q}}$ como

$$\mathfrak{hom}_{1,\mathbb{Q}} = \text{mín}\{|\mathbb{H}| \mid \mathbb{H} \text{ es una subfamilia homogénea de } \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus NWD\},$$

tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.22. $\mathfrak{r}_{\mathbb{Q}} \leq \mathfrak{hom}_{1,\mathbb{Q}} \leq \mathfrak{i}_{sel,\mathbb{Q}}$.

Demostración. Para la primera desigualdad es suficiente notar que toda familia homogénea es también una familia segada, lo cual se probará por contradicción. Supongamos que $\mathbb{H} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus NWD$ es una familia homogénea y supongamos que no es segada, es decir, que existe un conjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$, con $A \notin NWD$, tal que para todo $H \in \mathbb{H}$ se cumple que $|H \cap A| = |H \cap (\mathbb{Q} \setminus A)| = \aleph_0$. Ahora sea $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ la función indicadora de A, es decir, $f(q) = 1$ si $q \in A$ y $f(q) = 0$ si $q \notin A$.

Puesto que $\mathbb{H}$ es homogénea, necesariamente existe $H_0 \in \mathbb{H}$ tal que $f \restriction H_0$ es inyectiva o constante. Pero $f \restriction H_0$ no podría ser inyectiva ya que H_0 es infinito y el rango de $f \restriction H_0$ está contenido en el conjunto $\{0, 1\}$. Por lo tanto $f \restriction H_0$ es constante, es decir, $H_0 \subseteq A$ o $H_0 \cap A = \emptyset$, en otras palabras, $(|H \cap A| = 0) \vee (|H \cap (\mathbb{Q} \setminus A)| = 0)$, lo cual es una contradicción.

Para la segunda desigualdad basta notar que si I es una familia densa independiente selectiva, $ENV(I)$ es una familia homogénea, $|I| = |ENV(I)|$, y además $ENV(I) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus NWD$. Esto último se debe a que los elementos de $ENV(I)$ son densos sobre $\mathbb{Q}$, lo que implica que, en particular, no son densos en ninguna parte. $\square$

Ya sabemos que $\mathfrak{i}_{sel,\mathbb{Q}}$ no está necesariamente bien definido pues no podemos garantizar la existencia de familias densas independientes selectivas, entonces surge naturalmente la necesidad de saber si $\mathfrak{hom}_{1,\mathbb{Q}}$ sí lo está. El siguiente lema da una respuesta afirmativa a esta cuestión.

Lema 5.23. *Sea $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. Entonces existe un conjunto $B \subseteq \mathbb{Q}$ tal que B no es denso en ninguna parte y $f \restriction B$ es uno a uno o constante.*

Demostración. Puesto que $\mathbb{Q}$ es segundo numerable, existe $\mathscr{B} = \{O_n \mid n \in \omega\}$ una base numerable. Haremos la demostración por casos.

Caso 1) Para todo $n \in \omega$ se cumple que $f \restriction O_n$ tiene rango infinito. Aquí podemos elegir de forma inductiva $a_n \in O_n$ tal que $f(a_n) \neq f(a_i)$ para todo $i < n$. Sea $B = \{a_n \mid n \in \omega\}$. Es claro que $f \restriction B$ es inyectiva, y además para todo $n \in \omega$ se cumple $a_n \in B \cap O_n$, lo que prueba que B es denso en $\mathbb{Q}$, pues intersecta a cada abierto básico, luego en particular no es denso en ninguna parte.

Caso 2) Existe un $n_0 \in \omega$ tal que $f \restriction O_{n_0}$ tiene rango finito. Sea pues $\{k_0, \ldots, k_m\}$ el rango de $f \restriction O_{n_0}$ y sea $A_i = f^{-1}(\{k_i\}) \cap O_{n_0}$ para $i \leq m$. Ahora notemos que $\bigcup_{i \leq m} A_i = O_{n_0}$, por lo tanto no puede suceder que cada A_i sea denso en ninguna parte, pues entonces O_{n_0} lo sería, lo cual es imposible. Por lo tanto existe $i_0 \leq m$ tal que A_{i_0} no es denso en ninguna parte. Tomando $B = A_{i_0}$ se tiene el resultado. $\square$

Corolario 5.24. *$\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus NWD$ es una familia homogénea sobre $\mathbb{Q}$.*

Corolario 5.25. *$\mathfrak{hom}_{1,\mathbb{Q}}$ está bien definido.*

Aquí es bueno detenerse un poco para preguntarse por qué es importante considerar las familias que hemos tratado como subfamilias de $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus NWD$ y no simplemente como subfamilias de $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$; la respuesta es que queremos utilizar la estructura topológica de $\mathbb{Q}$ y queremos que algunas cosas ocurran en conjuntos *grandes*, entonces es natural quitar a los conjuntos *pequeños*, que desde el punto de vista topológico son precisamente los densos en ninguna parte. Es importante también señalar que esta noción de pequeñez es más *fina* que la que deriva simplemente de la cardinalidad, pues todo conjunto finito es denso en ninguna parte pero no al revés.

Antes de que veamos qué relación existe entre los cardinales $\mathfrak{i}_{sel}, \mathfrak{i}_{sel,\mathbb{Q}}, \mathfrak{hom}_{1,\mathfrak{c}}$ y $\mathfrak{hom}_{1,\mathbb{Q}}$ recordemos que en la Sección 3.5 se mencionó que se presentaría una demostración del Lema 3.41 alternativa a la que muestra Shelah en [17], ahora estamos ya en condiciones de presentar dicha prueba.

Lema de Shelah. *Si I es una familia independiente numerable, $h_0 \in FF(I)$, y $\mathbb{E}$ es una relación de equivalencia sobre ω, entonces existen un conjunto $B \subseteq \omega$ y una función $h_1 \in FF(I)$ tales que $h_0 \subseteq h_1$, $B \notin I$, $I \cup \{B\}$ es independiente y $\mathbb{E} \restriction (I^{h_1} \cap B)$ es la relación de equivalencia igualdad o tiene sólo una clase de equivalencia.*

Demostración. Si consideramos a f como la función que a cada elemento de I^{h_0} le asocia su clase de equivalencia, entonces, puesto que I^{h_0} es numerable, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que las clases de equivalencia están indexadas con el mismo I^{h_0}, es decir, se puede suponer que $f : I^{h_0} \to I^{h_0}$.

Si $H : I^{h_0} \to \mathbb{Q}$ en un homeomorfismo[8], entonces se cumple que:

$$g = H\left(f\left(H^{-1}\right)\right) : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},$$

[8]Considerando a I^{h_0} con la topología de subespacio heredada por (ω, τ_I).

luego, por el Lema 5.23, existe un conjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ que no es denso en ninguna parte en el que g es uno a uno o constante.

Aplicando el Corolario 5.17 se tiene que existen un conjunto $B \subseteq \omega$ y una función $h_1 \in FF(I)$ tales que $I \cup \{B\}$ es independiente, $h_1 \supseteq h_0$ y

$$H\left(I^{h_1} \cap B\right) \subseteq A.$$

De esta última contención se sigue que $I^{h_1} \cap B \subseteq H^{-1}(A)$. Pero claramente, como g es uno a uno o constante sobre A, f lo es sobre $H^{-1}(A)$, y consecuentemente también lo es sobre $I^{h_1} \cap B$.

Pero, por la construcción de f, el hecho de que f sea uno a uno o constante sobre $I^{h_1} \cap B$ es equivalente a que $\mathbb{E} \restriction I^{h_1} \cap B$ sólo tenga una clase de equivalencia o sea la relación igualdad. $\square$

Volviendo nuevamente al estudio de los cardinales $\mathfrak{i}_{sel}, \mathfrak{i}_{sel,\mathbb{Q}}, \mathfrak{hom}_{1,\mathfrak{c}}$ y $\mathfrak{hom}_{1,\mathbb{Q}}$ es importante señalar que mediante una prueba análoga a la del Lema 5.19 se puede demostrar el siguiente lema, el cual ya empieza a dar muestra de las relaciones entre dichos cardinales.

Lema 5.26. *Existe una familia independiente selectiva sobre ω de cardinalidad κ si y sólo si existe una familia densa independiente selectiva de cardinalidad κ.*

Corolario 5.27. $\mathfrak{i}_{sel} = \mathfrak{i}_{sel,\mathbb{Q}}$.

Lema 5.28. *Si existe una familia homogénea sobre $\mathbb{Q}$ de cardinalidad κ formada por conjuntos que no son densos en ninguna parte, entonces existe una familia homogénea sobre ω de cardinalidad κ.*

Demostración. Sea $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus NWD$ tal que para cada $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ hay un $A \subseteq X$ tal que $g \restriction A$ es uno a uno o constante. Además sean $H : \omega \to \mathbb{Q}$ una biyección y $Y = H^{-1}(X) = \left\{H^{-1}(A) \mid A \in X\right\}$. Vamos a probar que Y es una familia homogénea sobre ω.

Sea $f : \omega \to \omega$ fija y $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $g(n) = H\left(f\left(H^{-1}(n)\right)\right)$. Usando la hipótesis que se tiene sobre X, se sigue que hay un conjunto $A_0 \in X$ tal que $g \restriction A_0$ es uno a uno o constante.

Supongamos que $g \restriction A_0$ es uno a uno y vamos a demostrar que $f \restriction H^{-1}(A_0)$ también es uno a uno.

Si $f \restriction H^{-1}(A_0)$ no fuese uno a uno, existen $a, b \in H^{-1}(A_0)$ distintos tales que $f(a) = f(b)$. Pero como $a, b \in H^{-1}(A_0)$, dado que H es biyectiva, se cumple que existen $c, d \in A_0$, con $c \neq d$, tales que $a = H^{-1}(c)$ y $b = H^{-1}(d)$.

Pero entonces $c, d \in A_0$ son tales que:

$$g(c) = H\left(f\left(H^{-1}(c)\right)\right) = H(f(a)) = H(f(b)) = H\left(f\left(H^{-1}(d)\right)\right) = g(d),$$

lo que implica que $g \restriction A_0$ no es uno a uno, lo cual es una contradicción. El caso en el que $g \restriction A_0$ es constante es completamente análogo. Ahora, usando de nuevo que H es biyectiva, se cumple que $|X| = |Y|$ y así $|Y| = \kappa$, como se quería. $\square$

Corolario 5.29. $\mathfrak{hom}_{1,\mathfrak{c}} \leq \mathfrak{hom}_{1,\mathbb{Q}}$.

Entonces $\mathfrak{hom}_{1,\mathfrak{c}} \leq \mathfrak{hom}_{1,\mathbb{Q}} \leq \mathfrak{i}_{sel,\mathbb{Q}} = \mathfrak{i}_{sel}$. Una buena pregunta, en analogía a lo probado en [1], sería saber si en realidad sucede que $\mathfrak{hom}_{1,\mathfrak{c}} = \mathfrak{hom}_{1,\mathbb{Q}}$ o si de hecho $\mathfrak{hom}_{1,\mathbb{Q}}$ es una mejor cota para $\mathfrak{i}_{sel}$, es decir, si es consistente que $\mathfrak{hom}_{1,\mathfrak{c}} < \mathfrak{hom}_{1,\mathbb{Q}}$.

Conclusiones

Sin duda las familias independientes son objetos que están ampliamente conectados con muchos otros conceptos y cuyo estudio se puede hacer desde varias perspectivas distintas. Hemos presentado las principales propiedades que cumplen estas familias *per se* y algunas otras cuando se les mira en relación con otros objetos matemáticos. Dada la riqueza de su estructura, muchas preguntas siguen aún sin contestar, como por ejemplo si se pueden conseguir mejores cotas para $\mathfrak{i}$ encontrando cotas para $\mathfrak{i}_{\mathbb{Q}}$, es decir, si además de $\mathfrak{r}_{\mathbb{Q}}$ existe algún otro cardinal definido sobre $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus NWD$ que acote *mejor* que el respectivo cardinal definido sobre ω, esto es, nos gustaría saber qué tanto se puede *explotar* la estructura topológica de $\mathbb{Q}$ en propósito de estudiar el cardinal $\mathfrak{i}$.

Queda también abierta la pregunta de si es posible que la Hipótesis Generalizada del Continuo implique la existencia de familias independientes selectivas (o algún equivalente de estas) sobre cualquier cardinal infinito κ, lo cual creemos podría pasar por probar alguna generalización adecuada del Lema de Shelah. Es también de nuestro interés estudiar la relación que existe (si es que la hay) entre las familias independientes selectivas, las selectivas en todas partes y las maximales en todas partes con el Axioma de Elección; en particular nos gustaría estudiar si la existencia de algunas de estas familias pueda implicar dicho axioma al menos en su versión numerable, o más aún, si para cada cardinal infinito κ se de una implicación (o una doble implicación) entre la existencia de funciones de elección para conjuntos de cardinalidad κ y la existencia de familias independientes con cierta propiedad de selectividad sobre tal cardinal.

Apéndice A

Teoría de conjuntos

La mayor parte de las matemáticas contemporáneas encuentra sustento en la teoría de conjuntos, en particular en el sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel. Este sistema contiene únicamente un término indefinido, a saber, conjunto; y una relación indefinida $\in$, llamada pertenencia. Por esta razón todos los objetos en esta teoría son conjuntos, en particular, cualquier conjunto tiene como elementos a otros conjuntos. A continuación presentamos los axiomas, definiciones y resultados importantes, cuyas pruebas pueden consultarse en [11] y [13].

A.1. Axiomas

Axioma A.1. *(de Existencia). Existe un conjunto que no tiene elementos.*

Axioma A.2. *(de Extensión). Si todo elemento de X es un elemento de Y y todo elemento de Y es un elemento de X, entonces $X = Y$.*

Axioma A.3. *(Esquema de Comprensión). Sea P una fórmula. Para cualquier conjunto A hay un conjunto B tal que $x \in B$ si y sólo si $x \in A$ y x satisface la fórmula P.*

Axioma A.4. *(del Par). Para cualesquiera conjuntos a y b hay un conjunto C tal que $x \in C$ si y sólo si $x = a$ o $x = b$.*

Axioma A.5. *(de Unión). Para cualquier conjunto S, existe un conjunto denotado por $\bigcup S$ tal que $x \in \bigcup S$ si y sólo si $x \in X$ para algún $X \in S$.*

En particular, cuando el conjunto S es una familia indexada de conjuntos, digamos $S = \{F_i \mid i \in J\}$, $\bigcup S$ denota lo que usualmente se escribe como $\bigcup_{i\in J} F_i$ o $\bigcup_{F\in S} F$.

Axioma A.6. *(del Conjunto Potencia). Para cualquier conjunto X, existe un conjunto S tal que $A \in S$ si y sólo si $A \subseteq X$.*

Al conjunto S le llamaremos el conjunto potencia de X y lo vamos a denotar por $\mathcal{P}(X)$.

Axioma A.7. *(de Fundación). En cada conjunto o vacío A existe $u \in A$ tal que u y A son ajenos.*

Axioma A.8. *(de Infinitud). Existe un conjunto inductivo.*

Axioma A.9. *(Esquema de Reemplazo). Sea $\mathbf{P}(x, y)$ una fórmula tal que para todo x existe un único y para el cual $\mathbf{P}(x, y)$ se satisface.*

Para todo conjunto A, existe un único B tal que, para todo $x \in A$, existe $y \in B$ para el cual $\mathbf{P}(x, y)$ se satisface.

Al sistema axiomático determinado por estos nueve axiomas se le conoce como ZF.

Axioma A.10. *(de Elección). Todo conjunto no vacío tiene una función de elección.*

Al sistema axiomático determinado por ZF y el Axioma de Elección (AC) se le conoce como ZFC.

A.1.1. El Lema de Zorn

El Axioma de Elección tiene algunas equivalencias, que según el contexto, pueden ser más convenientes que el propio axioma. Resulta de particular interés para este trabajo el Lema de Zorn.

Definición A.11. *Una relación $\leq$ en A, que es reflexiva, antisimétrica y transitiva se llama orden (parcial) en A. El par $(A, \leq)$ se llama conjunto (parcialmente) ordenado.*

Definición A.12. *Sean $a, b \in A$ y sea $\leq$ un orden parcial en A. Decimos que a y b son comparables en el orden $\leq$ (o que son $\leq$-comparables) si:*

$$a \leq b \qquad o \qquad b \leq a.$$

Definición A.13. *Sea $B \subseteq A$, donde A está ordenado por $\leq$. B es una cadena en $(A, \leq)$ si cualesquiera dos elementos de B son $\leq$-comparables.*

Definición A.14. *Sean $\leq$ un orden en A y $B \subseteq A$.*

1. *$a \in A$ es una cota superior de B en el conjunto ordenado $(A, \leq)$, si $x \leq a$ para todo $x \in B$.*

2. *$b \in B$ es un elemento maximal de B en el orden $\leq$, si no existe $x \in B$ tal que $b \leq x$ y $x \neq b$.*

Lema de Zorn. *Cualquier conjunto (parcialmente) ordenado y no vacío en el cual toda cadena tiene una cota superior tiene un elemento maximal.*

A.2. Números naturales

Definición A.15. *Para todo conjunto x definimos el sucesor de x como $S(x) = x \cup \{x\}$.*

Los números naturales se construyen recursivamente utilizando la definición anterior, de la siguiente manera $0 = \emptyset$, $1 = S(0) = \{0\}$, $2 = S(1) = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$, $3 = S(2) = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$, etc.

En general se puede verificar que el número natural $n + 1$ tiene como elementos a los números naturales anteriores, es decir, $n + 1 = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$. En este contexto, $n < m$ significa $n \in m$.

Al conjunto formado por todos los números naturales, cuya existencia está garantizada por el Axioma de Infinitud, lo denotamos por ω.

Definición A.16. *Decimos que un conjunto X es finito si existe una función biyectiva $f : X \to n$, en donde n es algún número natural. En caso contrario diremos que X es infinito.*

A.3. Cardinales

Es posible construir en ZFC conjuntos llamados números cardinales con la propiedad de que para cualquier conjunto X, hay un único cardinal $|X|$ (el número cardinal de X), y para cualesquiera conjuntos X y Y, son equipotentes si y sólo si $|X|$ es igual a $|Y|$. En particular se pueden definir un buen orden $\leq$ sobre la clase de los números cardinales, además de tres operaciones (suma, producto y exponenciación) que presentamos a continuación.

Definición A.17. *Sean A y B conjuntos tales que $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$. Entonces:*

1. *Si $A \cap B = \emptyset$, $\kappa + \lambda = |A \cup B|$.*
2. *$\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$, en donde $A \times B$ es el producto cartesiano de A con B.*
3. *$\kappa^\lambda = |A^B|$, en donde $A^B = \{f \mid f : B \to A\}$.*

Las operaciones así definidas cumplen las siguientes propiedades.

Teorema A.18. *Si κ, λ y μ son números cardinales entonces:*

1. *$\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$.*
2. *$\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$.*
3. *$\kappa \leq \kappa + \lambda$.*
4. *Si $\kappa_1 \leq \kappa_2$ y $\lambda_1 \leq \lambda_2$, entonces $\kappa_1 + \lambda_1 \leq \kappa_2 + \lambda_2$.*
5. *$\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$.*
6. *$\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$.*

7. $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.

8. $\kappa \leq \kappa \cdot \lambda$ *si* $\lambda > 0$.

9. *Si* $\kappa_1 \leq \kappa_2$ *y* $\lambda_1 \leq \lambda_2$, *entonces* $\kappa_1 \cdot \lambda_1 \leq \kappa_2 \cdot \lambda_2$.

10. $\kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa$.

11. $\kappa + \kappa \leq \kappa \cdot \kappa$ *si* $\kappa \geq 2$.

12. $\kappa \leq \kappa^\lambda$ *si* $\lambda > 0$.

13. $\lambda \leq \kappa^\lambda$ *si* $\kappa > 1$.

14. *Si* $\kappa_1 \leq \kappa_2$ *y* $\lambda_1 \leq \lambda_2$, *entonces* $\kappa_1^{\lambda_1} \leq \kappa_2^{\lambda_2}$.

15. $\kappa \cdot \kappa = \kappa^2$.

16. $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.

17. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.

Teorema A.19. *Si* $|A| = \kappa$, *entonces* $|\mathcal{P}(A)| = 2^\kappa$.

De manera análoga a la definición de $+$, podemos definir la suma infinita de cardinales.

Definición A.20. *Sea* $\{A_i\}_{i \in I}$ *una familia de conjuntos ajenos por pares, y sea* $|A_i| = \kappa_i$ *para cada* $i \in I$. *Definimos la suma de* $\{\kappa_i\}_{i \in I}$ *por*

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right|.$$

Teorema A.21. *Sea* λ *un cardinal infinito, sea* κ_α *un cardinal no nulo para cada* $\alpha < \lambda$, *y sea* $\kappa = \sup\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$. *Entonces*

$$\sum_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha = \lambda \cdot \kappa = \lambda \cdot \sup\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda\}.$$

Teorema A.22. *El cardinal de los números naturales es el primer cardinal infinito y lo denotamos por* $\aleph_0$.

Definición A.23. *Al cardinal de los números reales le llamamos continuo y lo denotamos por* $\mathfrak{c}$.

Teorema A.24. $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Hipótesis del Continuo. *No existe un cardinal* κ *tal que* $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$.

La Hipótesis del Continuo (CH) fue formulada por Cantor en 1900 y no fue sino hasta 1939 que K. Gödel ([8]) demostró que es consistente con los axiomas de la teoría de conjuntos; esto es, usando los Axiomas de ZFC no se puede probar que la Hipótesis del Continuo es falsa. En 1963, P. J. Cohen ([4]) demostró que la Hipótesis del Continuo es independiente de los axiomas de ZFC, es decir, que no se puede deducir usando estos axiomas. Más aún, los trabajos de Gödel y Cohen, muestran que en realidad no sólo la Hipótesis del Continuo, sino su generalización (GCH), que presentamos a continuación, es consistente e independiente de ZFC.

Hipótesis Generalizada del Continuo. *Para todos los cardinales infinitos κ se tiene que si $\kappa \leq \lambda \leq 2^\kappa$, entonces $\lambda = \kappa$ o $\lambda = 2^\kappa$.*

Bibliografía

[1] BALCAR, B., HERNÁNDEZ-HERNÁNDEZ, F. AND HRUŠÁK,M., *Combinatorial of Dense Subsets of the Rationals*, Fundamenta Mathematicae 183, 2004.

[2] BLASS, A., *Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum*, in: *Handbook of Set Theory*, 2003.

[3] CASARRUBIAS-SEGURA, F. & TAMARIZ-MASCARÚA, A., *Elementos de topología de conjuntos*; Facultad de ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2011.

[4] COHEN. P. J., *The independence of the continuum hypothesis*; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A 50, 1963; 51, 1964.

[5] DASGUPTA, A. *Countable Metric Spaces Without Isolated Points*, Topology Atlas, 2005.

[6] ENGELKING, R., *General Topology*; Heldermann Verlag, 1989.

[7] GESCHKE, S., *Almost disjoint and independent families*, artículo sin publicar.

[8] GÖDEL, K., *The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis*: Annals of Math. Studies. 3, 1951.

[9] HALBEISEN, L., *Combinatorial Set Theory: With a Gentle Introduction to Forcing*; 1a edición, Springer Science & Business Media, 2011

[10] HAUDORFF, F.,*Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kantarovich*, Studia Math. 6, 1936.

[11] HERNÁNDEZ-HERNÁNDEZ, F., *Teoría de conjuntos. Una introducción*; 3a edición, Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.

[12] HRUŠÁK,M., *Almost disjoint families and topology*, Recent progress in general topology. III, Atlantis Press, 2014.

[13] JECH, T., *Set Theory. The Third Millennium Edition, Revised and expanded*; Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003.

[14] Lang, S., *Algebra*; 3a edición, Springer Science & Business Media, 2012.

[15] Perron, J., *On the structure of independent families*; tesis doctoral, Ohio University, 2017.

[16] Seung-Il, B, & Il-Ho, K, *On the quotient boolean algebra* $\varphi(S)/I$, Kangweon-Kyungki Math. Jour. 12, 2004.

[17] Shelah, S. $Con(\mathfrak{u} > \mathfrak{i})$, Arch. Math Logic 31, 1992.