



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Centro de Investigación en Matemáticas

Operadores de desplazamiento en el espacio de Lipschitz de un árbol infinito

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Emmanuel Rivera Guasco

Bajo la dirección del

Dr. Rubén Alejandro Martínez Avendaño

PACHUCA, HIDALGO. JULIO DE 2018



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Institute of Basic Sciences and Engineering

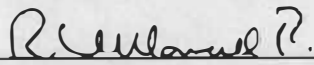
Área Académica de Matemáticas y Física
Mathematics and Physics Department

Emmanuel Rivera Guasco
PRESENTE


Por este conducto le comunico que el Jurado que le fue asignado a su trabajo de tesis titulado *Operadores de desplazamiento en el espacio de Lipschitz de un árbol infinito*, después de revisarlo en reunión han decidido autorizar la impresión del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas. A continuación se anotan las firmas de conformidad de los integrantes del Jurado:




Presidente: Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz




Secretario: Dr. Rafael Villarroel Flores



Primer Vocal: Dr. Jorge Viveros



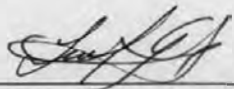
Segundo Vocal: Dr. Federico Menéndez-Conde Lara



Tercer Vocal: Dr. Rubén Alejandro Martínez Avendaño

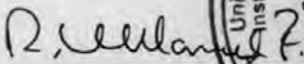


Primer Suplente: Dr. Raúl Temoltzi Ávila



Segundo Suplente: Dra. Rocío Leonel Gómez

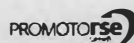
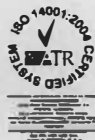
Atentamente,
Amor, Orden y Progreso,
Mineral de la Reforma, Hidalgo, a 17 de Julio del 2013



Dr. Rafael Villarroel Flores
Secretario del Comité de Titulación
de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas



Ciudad del Conocimiento
Carretera Pachuca – Tulancingo Km. 4.5
Colonia Carboneras
Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C.P. 42184
Tel. +52 771 7172000 exts. 6164, Fax 2109
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx



www.uaeh.edu.mx

Agradecimientos

Agradezco de manera muy especial a mis padres y hermanos por su apoyo y confianza incondicional. Quiero agradecer de manera muy especial a mi director de tesis, el Dr. Rubén Martínez Avendaño por el tiempo, el apoyo y los consejos brindados para la elaboración de este trabajo de tesis. Agradezco a todos mis profesores por los consejos, enseñanzas y apoyos brindados durante todo el transcurso de la licenciatura. También agradezco a todos mis amigos y colegas que me han apoyado y brindado sabios consejos durante mi carrera. Finalmente, quiero agradecer a todos mis sinodales por las observaciones y sugerencias que me brindaron para mejorar este trabajo de tesis.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Preliminares | 1 |
| 1.1. Operadores lineales en espacios normados y de Banach | 1 |
| 1.1.1. Operadores lineales acotados | 2 |
| 1.2. Algunos resultados básicos de la teoría espectral de operadores lineales . . | 2 |
| 1.3. Operadores hipercíclicos | 4 |
| 1.4. Árboles infinitos | 6 |
| 1.5. El espacio de Lipschitz de un árbol infinito | 7 |
| 2. Operador de desplazamiento hacia adelante en \mathcal{L} y en \mathcal{L}_0 | 11 |
| 2.1. Acotamiento de S en los espacios \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 | 11 |
| 2.2. Espectro del operador de desplazamiento hacia adelante S | 13 |
| 3. Operador de desplazamiento hacia atrás en \mathcal{L} y en \mathcal{L}_0 | 17 |
| 3.1. Acotamiento de B en los espacios \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 | 18 |
| 3.1.1. Condiciones necesarias para que B sea un operador acotado en \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 | 21 |
| 3.2. La norma del operador B en árboles homogéneos | 25 |
| 3.3. Espectro del operador de desplazamiento hacia atrás B | 26 |
| 4. Hiperciclicidad de los operadores de desplazamiento en \mathcal{L}_0 | 37 |
| 4.1. Hiperciclicidad del operador de desplazamiento hacia atrás en \mathcal{L}_0 | 38 |
| 5. Operadores de desplazamiento hacia atrás con pesos | 45 |
| 5.1. Acotamiento del operador de desplazamiento hacia atrás con pesos en \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 | 45 |
| 5.2. Hiperciclicidad de los operadores de desplazamiento hacia atrás con pesos . | 48 |
| 6. Conclusiones y trabajo a futuro | 53 |
| 6.1. Conclusiones | 53 |
| 6.2. Preguntas abiertas | 54 |
| Bibliografía | 55 |

Resumen

En este trabajo de tesis se estudian algunas propiedades teóricas y dinámicas de los operadores de desplazamiento hacia adelante y hacia atrás en el espacio de Lipschitz de un árbol infinito; particularmente estudiaremos condiciones para que dichos operadores sean acotados, se darán estimaciones para la norma y se calcula esta de forma explícita para una cierta familia de árboles; además, se estudian el espectro, espectro puntual y espectro puntual aproximado de los operadores de desplazamiento. Por otra parte, se demuestran condiciones que caracterizan cuándo el operador de desplazamiento hacia atrás es acotado. También se exhibe una condición que caracteriza la hiperciclicidad del operador de desplazamiento hacia atrás definido en el espacio pequeño de Lipschitz. Finalmente, se estudian condiciones para que el operador de desplazamiento hacia atrás con pesos sea hipercíclico en el espacio pequeño de Lipschitz y su relación con las condiciones obtenidas para el caso sin pesos.

Abstract

In this thesis we study some theoretic and dynamical properties of the backward and forward shift operators on the Lipschitz space of a tree. We particularly study boundedness of the shifts, and we establish estimates on the operator norm (we explicitly compute the norm for a specific type of tree). In addition we determine the spectrum, point spectrum and approximate point spectrum of the backward and forward shifts; we also study hypercyclicity of the backward and forward shift operators on the little Lipschitz space of a tree. Furthermore, we characterize boundedness of the backward shift, and we also obtain a necessary and sufficient condition for hypercyclicity of the backward shift on the little Lipschitz space of a tree. Finally, we obtain necessary and sufficient conditions for hypercyclicity of the weighted backward shift on the little Lipschitz space of a tree, and we show that the sufficient condition coincides with the characterization that we found for the unweighted case.

Introducción

El estudio de operadores en árboles infinitos se ha convertido en un campo de investigación de mucho interés; esto se debe principalmente a que algunas ramas del análisis armónico, análisis funcional y la teoría del potencial estudian algunos operadores clásicos definidos en estructuras discretas, por ejemplo el operador de Laplace, el operador de Green, operadores de composición y operadores de desplazamiento.

Un espacio estudiado en análisis es el espacio de Bloch $B(\mathbb{D})$; este consiste de todas las funciones analíticas f en \mathbb{D} , el disco unitario abierto centrado en el origen del plano complejo, tales que:

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |f'(z)| < \infty.$$

La norma de Bloch está dada por:

$$\|f\|_B = |f(0)| + \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |f'(z)|. \quad (1)$$

El espacio de bloch $B(\mathbb{D})$ es un espacio de Banach bajo la norma dada en (1) (véase [17]). El subespacio $B_0(\mathbb{D})$ que consiste de todas las funciones $f \in B(\mathbb{D})$ tales que:

$$(1 - |z|^2) |f'(z)| \rightarrow 0, \text{ cuando } |z| \rightarrow 1^-,$$

es la cerradura del conjunto de polinomios en $B(\mathbb{D})$ y es llamado el espacio pequeño de Bloch (véase [17]).

De acuerdo a algunos autores los árboles infinitos son los análogos discretos de algunas *superficies de Riemann con curvatura negativa* (ver, por ejemplo, [6]). En particular esto es cierto para el disco unitario en el plano complejo con la métrica hiperbólica (cuya definición se puede encontrar en [17]). Es por esto que Colonna e Easley definieron en [8] los espacios de Lipschitz \mathcal{L} y pequeño de Lipschitz \mathcal{L}_0 de un árbol infinito como los análogos discretos de los espacios de funciones $B(\mathbb{D})$ y $B_0(\mathbb{D})$ respectivamente; dichos autores estudiaron varias propiedades de \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 tales como completez, separabilidad, entre otras (ver [8] y [9]).

Las funciones que son Lipschitz juegan un papel de suma importancia en estos espacios, ya que las funciones en el espacio de Bloch son precisamente las funciones analíticas que son Lipschitz con respecto a los espacios métricos (\mathbb{D}, β) y $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, es decir, $f \in B(\mathbb{D})$ si y solo si $|f(z) - f(w)| < C\beta(z, w)$ (ver, [17, Teorema 5.5] para consultar la demostración de esta equivalencia), donde β es la métrica hiperbólica y $|\cdot|$ denota el módulo en el campo de los complejos.

En [11], Jabłoński, Jung y Stochel comienzan el estudio de una nueva clase de operadores en el espacio de Hilbert $L^2(V)$, donde V denota al conjunto de vértices de un árbol infinito; dichos operadores pueden pensarse como una generalización de los operadores de

desplazamiento clásicos en la teoría de operadores. En dicho artículo, se estudian algunas propiedades de estos operadores tales como acotamiento, subnormalidad, propiedades espectrales, entre otras. Es importante mencionar que parte de la motivación por la cual diversos autores han estudiado propiedades teóricas de operadores definidos en estructuras discretas, es la posibilidad de poder generar ejemplos y contra ejemplos que sirvan como respuesta a preguntas de existencia en teoría de operadores.

Por otro lado, el estudio de la hiperciclicidad de operadores está motivada por la estrecha relación que existe con la idea de caos en sistemas dinámicos, pues una condición necesaria para que un operador sea caótico es que sea hipercíclico. Lo antes mencionado permite determinar si un operador no es caótico (en el sentido de Devaney) únicamente estudiando la órbita de los vectores del espacio bajo el operador, pues si ningún vector tiene órbita densa entonces el operador no puede ser caótico. Otra de las razones por la que es importante estudiar hiperciclicidad es por su relación con el problema del subconjunto invariante en espacios de Hilbert, pues un operador no tiene un subconjunto invariante cerrado no trivial si y solo si cada vector no cero es hipercíclico (véase [12]). En [14], Martínez Avendaño comienza a estudiar hiperciclicidad de los operadores de desplazamiento (hacia adelante y hacia atrás) en los espacios L^p con pesos de un árbol dirigido. En dicho trabajo, se busca caracterizar la hiperciclicidad de los operadores de desplazamiento en los espacios L^p , y así extender la caracterización que dió Salas en [15] para el caso clásico de operadores de desplazamiento con pesos en $\ell^p(\mathbb{Z})$ y $\ell^p(\mathbb{N})$.

Motivado por lo anterior y el hecho de que no se habían estudiado los operadores de desplazamiento en \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 , en esta tesis se analizan algunas propiedades teóricas y dinámicas de los operadores de desplazamiento hacia adelante y hacia atrás definidos en el espacio de Lipschitz de un árbol infinito. En particular nos interesa estudiar acotamiento, estimaciones para la norma, espectro, espectro puntual, espectro puntual aproximado, compacidad e hiperciclicidad de los operadores de desplazamiento. Es importante mencionar que en principio no se sabe cómo estos resultados se ven en el espacio de funciones Bloch, es decir, no conocemos a que tipo de operador en $B(\mathbb{D})$ y $B_0(\mathbb{D})$ representan estos operadores de desplazamiento en \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 .

Para presentar los resultados obtenidos se ha dividido la tesis en 5 capítulos distribuidos de la siguiente manera:

En el capítulo 1, se presentan algunos preliminares de análisis funcional, teoría espectral y dinámica de operadores lineales que serán de suma importancia en el desarrollo de los capítulos posteriores. Además, se introducen definiciones básicas de teoría de gráficas y propiedades importantes de los espacios \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 ; por ejemplo, se dota a los espacios \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 con dos normas equivalentes a las cuales denotaremos por $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_*}$.

A partir del capítulo 2 mostramos los resultados originales de este trabajo de tesis. En este capítulo se demuestra que el operador de desplazamiento hacia adelante S está bien definido y es acotado en \mathcal{L} y en \mathcal{L}_0 ; además, en el teorema 2.6 se prueba que S es una isometría cuando se dota a \mathcal{L} con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_*}$. Posteriormente en la proposición 2.7 y el teorema 2.10 se calcula el espectro, espectro puntual y el espectro puntual aproximado del operador de desplazamiento hacia adelante definido en \mathcal{L} y en \mathcal{L}_0 . Finalmente se deduce que S no puede ser un operador compacto y por lo tanto tampoco de rango finito.

En el capítulo 3, se demuestra que el operador de desplazamiento hacia atrás B es acotado en \mathcal{L} y en \mathcal{L}_0 si el árbol satisface cierta condición combinatoria, además en el teorema 3.13 se prueban condiciones que son necesarias y suficientes para que B sea

acotado; también se calcula explícitamente la norma para una cierta clase de árboles. Posteriormente en los teoremas 3.18 y 3.21 se calcula el espectro, espectro puntual y el espectro puntual aproximado del operador de desplazamiento hacia atrás definido en \mathcal{L} y en \mathcal{L}_0 para una cierta familia de árboles. Finalmente se deduce que B no puede ser un operador compacto y por lo tanto tampoco de rango finito.

En el capítulo 4, se demuestra que el espacio pequeño de Lipschitz es la cerradura del conjunto de funciones con soporte finito y por lo tanto es separable. También se observa que el operador de desplazamiento hacia adelante no puede ser hipercíclico en \mathcal{L}_0 . Posteriormente en el teorema 4.8 se caracteriza la hiperciclicidad del operador de desplazamiento hacia atrás B definido en \mathcal{L}_0 ; este teorema básicamente nos dice que B no es hipercíclico si y solo si el árbol posee cierta propiedad combinatoria.

Por último, en el capítulo 5 se define el operador de desplazamiento hacia atrás con pesos y en el teorema 5.2 se exhiben condiciones para que sea acotado en \mathcal{L} o en \mathcal{L}_0 . Posteriormente en el teorema 5.5 se da una condición suficiente para que el operador de desplazamiento hacia atrás sea hipercíclico, y se demuestra que la condición suficiente para que el operador de desplazamiento hacia atrás con pesos sea hipercíclico coincide con la condición combinatoria sobre el árbol obtenida en el capítulo 4 cuando la sucesión de pesos es constante igual a uno. Finalmente en el teorema 5.7 se da una condición necesaria para que el operador de desplazamiento hacia atrás sea hipercíclico.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunas de las definiciones y resultados que serán de utilidad para el desarrollo de la tesis. Primero se darán algunas definiciones y teoremas clásicos del análisis funcional, de teoría espectral de operadores lineales en espacios de Banach y de operadores hipercíclicos. Posteriormente, se introducen algunos conceptos básicos de teoría de gráficas, se define el espacio de Lipschitz de un árbol infinito y se presentan algunas propiedades del espacio.

Debido a que los resultados de las secciones 1.1 y 1.2 son muy conocidos, preferimos omitir las demostraciones con el fin de no alargar demasiado el trabajo de tesis. Se indicará al inicio de dichas secciones en que referencia puede ser consultada la prueba de los resultados.

1.1. Operadores lineales en espacios normados y de Banach

Sea Z un espacio vectorial con campo escalar en \mathbb{R} o \mathbb{C} . Se define una norma en Z como una función $\|\cdot\| : Z \times Z \rightarrow \mathbb{R}$ tal que satisface las siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in Z$.
2. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, con α un escalar.
4. Dados dos elementos $x, y \in Z$, se satisface la desigualdad del triángulo, es decir:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Una norma en Z define una métrica d en Z dada por $d(x, y) = \|x - y\|$, la cual es llamada la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$. Diremos que $(Z, \|\cdot\|)$ es un espacio normado si $\|\cdot\|$ es una norma en Z .

Definición 1.1. *Sea Z un espacio normado. Se dice que Z es de Banach si es completo con respecto a la métrica inducida por la norma, es decir, toda sucesión de Cauchy $\{x_m\}$ en Z converge.*

1.1.1. Operadores lineales acotados

Definición 1.2. Sean X, Y espacios normados y $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Decimos que A es acotado, si existe $k > 0$ tal que $\|Ax\|_Y \leq k\|x\|_X$ para todo $x \in X$.

Definición 1.3. Dado un operador $A : X \rightarrow Y$ lineal y acotado. Definimos a la norma del operador A como:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Se puede demostrar que $\|\cdot\|$ define una norma en $B(X, Y)$, el cual se define como

$$B(X, Y) = \{A : X \rightarrow Y : A \text{ es lineal y acotado}\}.$$

Para el caso en el que $X = Y$, este conjunto se denotará por $B(X)$. En [13] se demuestran las siguientes dos proposiciones.

Proposición 1.4. Sea $A \in B(X, Y)$, entonces:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y.$$

El siguiente resultado, nos dice que ser un operador continuo es equivalente a que sea acotado.

Proposición 1.5. Sea X un espacio de Banach, y sea T un operador lineal. Entonces T es continuo si y solo si es acotado.

Una clase de operadores muy interesantes son aquellos que preservan distancias, a dichos operadores se les conoce como isometrías.

Definición 1.6. Sean X y Y espacios de Banach y sea $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal y acotado. Se dice que A es una isometría si

$$\|Ax\|_Y = \|x\|_X, \text{ para todo } x \in X.$$

1.2. Algunos resultados básicos de la teoría espectral de operadores lineales

Ahora se presentarán algunos de los resultados básicos de la teoría espectral de operadores en espacios de Banach. Si el lector así lo desea, puede consultar en [4] y [13] la demostración de los resultados que se presentan en esta sección. En esta sección entenderemos que X es un espacio de Banach complejo.

Definición 1.7. Sea $T \in B(X)$. Se define el espectro de T , $\sigma(T)$, como:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ es no invertible}\},$$

donde I es el operador identidad en X .

Sea $T \in B(X)$; se define el espectro puntual de T , $\sigma_p(T)$, como:

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

A los elementos de $\sigma_p(T)$ se les llama eigenvalores de T . Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, a los vectores no cero en $\ker(T - \lambda I)$ se les llama eigenvectores asociados a λ . Claramente $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$.

Proposición 1.8. *Si $T \in B(X)$, entonces $\sigma(T)$ es un conjunto compacto y no vacío, de hecho, $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$.*

Definición 1.9. *Sea $T \in B(X)$. El espectro aproximado de T , $\sigma_{ap}(T)$, consiste de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que, existe una sucesión $\{x_n\} \in X$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$.*

Proposición 1.10. *Sea $T \in B(X)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$.
- (2) $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$ y $\text{Ran}(T - \lambda I)$ es cerrado.
- (3) Existe una constante $C > 0$ tal que $\|(T - \lambda I)x\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in X$.

De la proposición anterior se observa que $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$.

Proposición 1.11. *Si $T \in B(X)$, entonces $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$.*

Definición 1.12. *El radio espectral de un operador $T \in B(X)$ se define como:*

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

Para el caso de algunos operadores lineales puede ser complicado estimar su espectro, a la luz de este hecho, el siguiente teorema ofrece otra alternativa para aproximar el radio espectral de un operador lineal.

Teorema 1.13 (Teorema del radio espectral). *Sea $T \in B(X)$. Entonces*

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

Ahora daremos la definición de operador compacto.

Definición 1.14. *Sea $T \in B(X)$. Se dice que T es compacto si para toda bola abierta $B \subset X$ se tiene que la cerradura de $T(B)$ es compacta.*

Al igual que en la sección anterior la demostración de los siguientes resultados pueden consultarse en [4] y [13]

Teorema 1.15. *Sea $T \in B(X)$.*

1. *Si T es acotado y $\dim(T(X)) < \infty$, entonces T es compacto.*
2. *Si $\dim(X) < \infty$, entonces T es compacto.*

El siguiente teorema establece las características que tiene el espectro de un operador compacto.

Teorema 1.16 (F. Riesz). *Si $\dim(X) = \infty$, y $T \in B(X)$ es compacto, entonces una y solo una de las siguientes afirmaciones puede ocurrir:*

- (a) $\sigma(T) = \{0\}$.
- (b) $\sigma(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, donde para $1 \leq k \leq n$, cada λ_k es un eigenvalor de T , y $\dim(\ker(T - \lambda_k I)) < \infty$.
- (c) $\sigma(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$, donde para cada $k \geq 1$, λ_k es un eigenvalor de T y $\dim(\ker(T - \lambda_k I)) < \infty$, más aún, cero es el único punto de acumulación que posee $\sigma(T)$.

Ejemplos que ilustran las afirmaciones del teorema anterior pueden encontrarse en [4] y [13].

1.3. Operadores hipercíclicos

En esta sección se presentan algunos resultados básicos de operadores hipercíclicos. Las demostraciones de los resultados de esta sección siguen las ideas propuestas por Grosse-Erdmann y Peris Manguillot en [12].

Sea X un espacio métrico, y sea $T \in B(X)$. Se define la órbita de x bajo T como:

$$\text{Orb}(x, T) := \{T^n x : n \in \mathbb{N}_0\},$$

donde $T^0 = I$, con I el operador identidad y T^n la composición de T consigo mismo n veces.

Definición 1.17. *Un operador lineal $T : X \rightarrow X$ se dice que es hipercíclico, si existe un vector $x \in X$ cuya órbita bajo T es densa en X . En tal caso se dice que x es un vector hipercíclico de T . El conjunto de vectores hipercíclicos de T se denota por $HC(T)$.*

Recordemos que un espacio topológico X es separable si existe un subconjunto de X que es numerable y denso. Se observa directamente que si X no es separable, entonces no pueden existir vectores hipercíclicos.

Definición 1.18. *Un operador $T : X \rightarrow X$ se dice que es topológicamente transitivo si para cualesquiera U, V subconjuntos abiertos no vacíos de X , existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Ahora enunciamos el teorema de categoría de Baire (ver [13] para consultar la demostración), el cual nos servirá para probar el teorema de transitividad de Birkhoff.

Teorema 1.19 (Teorema de categoría de Baire). *Sea X un espacio métrico completo. Entonces, la intersección de toda colección numerable de conjuntos abiertos densos en X es densa en X .*

Antes de enunciar y probar el teorema de Birkhoff, hagamos la siguiente observación.

Observación 1.20. Sea X es un espacio métrico sin puntos aislados. Si $\text{Orb}(x, T)$ es densa en X para algún $x \in X$, entonces $\text{Orb}(T^n x, T)$ es densa en X para todo $n \geq 1$.

Teorema 1.21 (Teorema de transitividad de Birkhoff). Sea X un espacio métrico separable sin puntos aislados, y sea $T : X \rightarrow X$ un operador lineal acotado. Entonces T es hipercíclico si y solo si es topológicamente transitivo. En tal caso, el conjunto $HC(T)$ de vectores hipercíclicos es un conjunto denso de clase G_δ .

Demostración. Supongamos que T es hipercíclico, es decir, existe $x \in X$ tal que $\text{Orb}(x, T)$ es densa en X . Sean U y V abiertos no vacíos en X , entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x \in U$. Como $T^n x$ tiene órbita densa en X , entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(T^n x) \in V$, de modo que $T^m(U) \cap V \neq \emptyset$, mostrando que T es topológicamente transitivo.

Recíprocamente, supongamos que T es topológicamente transitivo. Como X es separable, entonces existe un subconjunto $\{z_j : j \in \mathbb{N}\}$ denso en X , esto implica que el conjunto de bolas abiertas $\{B_{\frac{1}{m}}(z_j) : j, m \in \mathbb{N}\}$ forman una base numerable para la topología de X , denotemos a dicha base por $\{U_k\}_{k \geq 1}$. Para poder continuar con la demostración del teorema de Birkhoff es necesario primero probar la siguiente afirmación.

Afirmación. $HC(T) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$.

Demostración. Sea $x \in HC(T)$. Entonces $\text{Orb}(x, T)$ es densa en X y esto implica que para cualquier $W \subset X$ abierto no vacío, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^n x \in W$. En particular, para cada $k \geq 1$ fijo, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^n x \in U_k$; por lo tanto $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ para todo $k \geq 1$, luego

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k).$$

Análogamente, tomemos $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ arbitrario, entonces para todo $k \geq 1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x \in U_k$. Sea $W \subset X$ un conjunto abierto no vacío. Notemos que como $\{U_k\}_{k \geq 1}$ es una base para la topología de X , entonces existe $k^* \geq 1$ tal que $U_{k^*} \subset W$. En particular, debe existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x \in U_{k^*} \subset W$. Luego $\text{Orb}(x, T) \cap W \neq \emptyset$, es decir, $\text{Orb}(x, T)$ es densa en X . Por lo tanto, $x \in HC(T)$. ■

Por otra parte, como T es topológicamente transitivo se sigue que, para cada $k \geq 1$, el conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ es denso en X . Además, como T es continuo se tiene que para todo $k \geq 1$, el conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ es abierto. Por lo tanto, el teorema de categoría de Baire y la afirmación demostrada anteriormente implican que el conjunto de vectores hipercíclicos $HC(T)$ es no vacío, denso en X y de clase G_δ . □

El siguiente resultado proporciona un criterio bastante útil para probar que un operador es hipercíclico.

Teorema 1.22 (Criterio de hiperciclicidad de Kitai–Gethner–Shapiro). Sea X un espacio métrico separable y sin puntos aislados, y sea T un operador acotado. Si existe un subconjunto denso $X_0 \subset X$, una sucesión creciente de enteros positivos $\{n_k\}$, y funciones $S_{n_k} : X_0 \rightarrow X$, $k \geq 1$, tales que para todo $x \in X_0$ se satisfacen:

(1) $T^{n_k} x \rightarrow 0$,

(2) $S_{n_k} x \rightarrow 0$,

$$(3) T^{n_k} S_{n_k} x \longrightarrow x,$$

entonces, T es topológicamente transitivo y por lo tanto hipercíclico.

Demostración. Sean U, V conjuntos abiertos no vacíos de X . Como X_0 es denso en X , entonces existen vectores $x, y \in X$ tales que $x \in U \cap X_0$ y $y \in V \cap X_0$. Se observa que la condición (2) implica que, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x + S_{n_k} y \in U. \quad (1.1)$$

Por otra parte, por la condición (1) se tiene que $T^{n_k} x \longrightarrow 0$ y por la condición (3) tenemos que $T^{n_k} S_{n_k} y \longrightarrow y$, implicando que $T^{n_k}(x + S_{n_k} y) = T^{n_k} x + T^{n_k} S_{n_k} y \longrightarrow y$ y por lo tanto existe k suficientemente grande tal que $T^{n_k}(x + S_{n_k} y) \in V$.

Ahora notemos que por la ecuación (1.1) podemos escoger k_* suficientemente grande tal que, $x + S_{n_{k_*}} y \in U$ y $T^{n_{k_*}}(x + S_{n_{k_*}} y) \in V$, luego $T^{n_{k_*}}(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto T es topológicamente transitivo. \square

1.4. Árboles infinitos

En esta sección se establecen algunas definiciones básicas de teoría de gráficas que se usarán durante el desarrollo de la tesis. Una gráfica infinita $G = (V, E)$ es una pareja que consiste de un conjunto V infinito numerable (llamado el conjunto de vértices de G) y un conjunto $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ (llamado el conjunto de aristas de G). Nótese que no se consideran lazos ni aristas múltiples en nuestra definición de gráfica.

Se dice que dos vértices $v, w \in V$ son adyacentes $v \sim w$ si $\{v, w\} \in E$. Se define un camino finito, como una sucesión de vértices distintos $[v_0, v_1, \dots, v_k]$ tal que, $v_{j-1} \sim v_j$. Diremos que un camino es infinito, si existe una sucesión de vértices distintos $[v_0, v_1, v_2, \dots]$ tal que $v_{j-1} \sim v_j$. Llamaremos a un camino infinito un rayo. Sean $v, w \in V$, diremos que v y w están conectados si existe un camino $[u_0, v_1, \dots, v_k]$ tal que $u_0 = v$ y $u_k = w$.

Sea G una gráfica infinita, diremos que G es localmente finita si todo vértice es adyacente a una cantidad finita de vértices. Se dice que una gráfica T es un árbol si para cualesquiera $v, w \in V$ existe un único camino que los conecta. Dado un árbol T , se escoge un vértice $o \in V$ el cual estará fijo a lo largo del desarrollo de esta tesis; a dicho vértice le llamaremos la raíz de T . Es importante mencionar que los resultados que se presentan dependen de la elección de la raíz.

A partir de este momento solo trabajaremos con árboles infinitos que son localmente finitos, ya que los resultados son interesantes (desde el punto de vista del análisis funcional) solamente en el caso en que el árbol es infinito.

Con la finalidad de simplificar la notación denotaremos al conjunto de vértices de un árbol T simplemente por T .

Sean $u, w \in T$; la distancia entre dos vértices $d(u, w)$ se define como la longitud del único camino que los conecta (número de aristas que componen el camino). Se puede probar que la función $d : T \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ define una métrica para el conjunto de vértices de un árbol. Se define el grado de un vértice $v \in T$, al cual denotaremos por $\deg(v)$, como la cardinalidad del conjunto $\{\{v, u\} \in E : u \in V\}$.

Diremos que un árbol es homogéneo de orden n , si $\deg(v) = n + 1$ para todo $v \in T \setminus \{o\}$ y $\deg(o) = n$. Sean T un árbol con raíz y $v \in T$. Diremos que w es un descendiente de

v si v pertenece al único camino que une a la raíz con w , en tal caso diremos que v es ancestro del vértice w . Denotaremos por v^- al ancestro del vértice v que es adyacente a v . Llamaremos a v^- el padre de v y a v el hijo de v^- .

Sea $v \in T$, se define la longitud de v como $|v| := d(o, v)$. Denotaremos por T_* al conjunto $T \setminus \{o\}$, y por T_{**} al conjunto $T \setminus \{v : d(o, v) \leq 1\}$. Sea $v \in T$, se define el sector determinado por v como el conjunto S_v el cual consiste del mismo v y todos los vértices que son descendientes de v , es decir

$$S_v = \{w \in T : w \text{ es descendiente de } v\} \cup \{v\}.$$

1.5. El espacio de Lipschitz de un árbol infinito

En esta sección se presentan algunas de las definiciones y resultados más importantes acerca de los espacios de Lipschitz definidos por árboles infinitos; una gran parte de los resultados de esta sección fueron propuestos y demostrados por Colonna e Easley en [8].

Sea T un árbol, denotaremos por \mathcal{F} al conjunto de funciones $f : T \rightarrow \mathbb{C}$; el cual tiene estructura de espacio vectorial bajo la suma usual de funciones y producto por escalar. Ahora daremos la definición de espacio de Lipschitz de un árbol infinito.

Definición 1.23. Sea T un árbol infinito, el espacio de Lipschitz \mathcal{L} , se define como:

$$\mathcal{L} = \{f \in \mathcal{F} : \exists k_f > 0 \text{ tal que } |f(v) - f(w)| \leq k_f d(v, w), \text{ para todo } v, w \in T\}.$$

En [8] los autores demuestran la siguiente proposición, en la cual se presenta una caracterización del espacio \mathcal{L} en términos de las diferencias de funciones $f \in \mathcal{F}$ evaluadas en v y v^- .

Proposición 1.24. Sea $f \in \mathcal{F}$. Entonces, $f \in \mathcal{L}$ si y sólo si $\{|f(v) - f(v^-)| : v \in T_*\}$ es acotado.

Denotaremos por L^∞ al espacio de todas las funciones acotadas $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ bajo la norma del supremo, es decir,

$$\left\{ f \in \mathcal{F} : \|f\|_\infty = \sup_{v \in T} |f(v)| < \infty \right\}.$$

Sea T un árbol, definimos la función Df como:

$$Df(v) = \begin{cases} |f(v) - f(v^-)|, & \text{si } v \in T_* \\ 0, & \text{si } v = o. \end{cases}$$

De ahora en adelante, en lugar de usar la definición 1.23, usaremos la equivalencia dada por la proposición 1.24. Es decir, consideramos el espacio de Lipschitz de un árbol infinito como:

$$\mathcal{L} = \left\{ f \in \mathcal{F} : \|Df\|_\infty = \sup_{v \in T_*} Df(v) < \infty \right\}.$$

Observación 1.25. $\|Df\|_\infty$ es solamente una seminorma en \mathcal{L} , pues si f es constante, entonces $\|Df\|_\infty = 0$.

Definición 1.26. Sea $f \in \mathcal{L}$, se define:

$$\|f\|_{\mathcal{L}} = |f(o)| + \|Df\|_{\infty}.$$

En [8] los autores demuestran el siguiente teorema, el cual establece que el espacio de Lipschitz de un árbol infinito es un espacio de Banach.

Teorema 1.27. La función $\|\cdot\|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ define una norma en \mathcal{L} , más aún, $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ es un espacio de Banach.

Con la finalidad de facilitar algunos cálculos, se define la función $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_*} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\|f\|_{\mathcal{L}_*} = \max\{|f(o)|, \|Df\|_{\infty}\},$$

la cual resultará ser una norma en \mathcal{L} .

Proposición 1.28. $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_*}$ define una norma en \mathcal{L} .

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}$, como $\|Df\|_{\infty}$ es una seminorma, se tiene que $\|f\|_{\mathcal{L}_*} \geq 0$ con igualdad en cero si y solo si $f = 0$, en efecto, si $\|f\|_{\mathcal{L}_*}$ es cero, entonces

$$|f(o)| = 0 \quad \text{y} \quad \sup_{v \in T_*} |f(v) - f(v^-)| = 0,$$

por lo tanto, $f(v) = f(v^-)$ para todo $v \in T_*$, es decir, f es constante, pero como $f(o) = 0$, necesariamente $f = 0$. Recíprocamente si $f = 0$, entonces $|f(o)| = \|Df\|_{\infty} = 0$, por lo tanto $\|f\|_{\mathcal{L}_*} = 0$. Además, si se toma $\alpha \in \mathbb{C}$ se cumple que $\|\alpha f\|_{\mathcal{L}_*} = |\alpha| \|f\|_{\mathcal{L}_*}$, pues

$$\|\alpha f\|_{\mathcal{L}_*} = \max\{|\alpha| |f(o)|, |\alpha| \|Df\|_{\infty}\} = |\alpha| \max\{|f(o)|, \|Df\|_{\infty}\} = |\alpha| \|f\|_{\mathcal{L}_*}.$$

Por otro lado, sean $f, g \in \mathcal{L}$, entonces

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}_*} = \max\{|f(o) + g(o)|, \|D(f + g)\|_{\infty}\} \leq \max\{|f(o)| + |g(o)|, \|Df\|_{\infty} + \|Dg\|_{\infty}\}.$$

Supongamos que $\max\{|f(o)| + |g(o)|, \|Df\|_{\infty} + \|Dg\|_{\infty}\} = \|Df\|_{\infty} + \|Dg\|_{\infty}$ entonces,

$$\begin{aligned} \max\{|f(o)| + |g(o)|, \|Df\|_{\infty} + \|Dg\|_{\infty}\} &= \|Df\|_{\infty} + \|Dg\|_{\infty} \\ &\leq \max\{|f(o)|, \|Df\|_{\infty}\} \\ &\quad + \max\{|g(o)|, \|Dg\|_{\infty}\}. \end{aligned}$$

Si el $\max\{|f(o)| + |g(o)|, \|Df\|_{\infty} + \|Dg\|_{\infty}\} = |f(o)| + |g(o)|$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \max\{|f(o)| + |g(o)|, \|Df\|_{\infty} + \|Dg\|_{\infty}\} &= |f(o)| + |g(o)| \\ &\leq \max\{|f(o)|, \|Df\|_{\infty}\} \\ &\quad + \max\{|g(o)|, \|Dg\|_{\infty}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}_*} \leq \max\{|f(o)|, \|Df\|_{\infty}\} + \max\{|g(o)|, \|Dg\|_{\infty}\} = \|f\|_{\mathcal{L}_*} + \|g\|_{\mathcal{L}_*}.$$

mostrando que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_*}$ es una norma. □

En la siguiente proposición se demuestra que las normas son equivalentes.

Proposición 1.29. *Las normas $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_*}$ son equivalentes*

Demostración. Si se toma $f \in \mathcal{L}$ se tiene directamente que $\|f\|_{\mathcal{L}_*} \leq \|f\|_{\mathcal{L}}$. Por otra parte, supongamos que $\max\{|f(o)|, \|Df\|_{\infty}\} = \|Df\|_{\infty}$, entonces

$$\frac{1}{2}\|f\|_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}(|f(o)| + \|Df\|_{\infty}) \leq \|Df\|_{\infty} = \|f\|_{\mathcal{L}_*},$$

de igual manera, si $\max\{|f(o)|, \|Df\|_{\infty}\} = |f(o)|$ también se obtiene que $\frac{1}{2}\|f\|_{\mathcal{L}} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_*}$. Combinando la desigualdad anterior con la primera desigualdad se sigue que

$$\frac{1}{2}\|f\|_{\mathcal{L}} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_*} \leq \|f\|_{\mathcal{L}}.$$

lo cual demuestra que las normas son equivalentes. □

Observación 1.30. *Denotaremos por \mathcal{L}_* al espacio $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_*})$, el cual como consecuencia de la equivalencia en normas resulta ser también un espacio de Banach cuya norma induce la misma topología que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ sobre \mathcal{L} .*

Definición 1.31. *El espacio pequeño de Lipschitz se define como el subespacio $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$ que consiste de todas las funciones $f \in \mathcal{L}$ tales que:*

$$\lim_{|v| \rightarrow \infty} Df(v) = 0.$$

Se demuestra en [8] que \mathcal{L}_0 es un subespacio cerrado de \mathcal{L} , y por lo tanto un espacio de Banach. Denotaremos por \mathcal{L}_{0^*} al espacio $(\mathcal{L}_0, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_*})$.

Introducimos la siguiente notación la cual fue propuesta por Colonna e Easley en [8] para el caso de la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$. Para cada $v \in T$, se define:

$$\begin{aligned} \omega(v) &= \sup \{|f(v)| : f \in \mathcal{L}, f(o) = 0, \|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1\}, \text{ y} \\ \omega_0(v) &= \sup \{|f(v)| : f \in \mathcal{L}_0, f(o) = 0, \|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1\}. \end{aligned}$$

Los siguientes dos lemas fueron demostrados por Colonna e Easley en [8].

Lema 1.32. *Para todo $v \in T$ se satisface que $\omega(v) = \omega_0(v) = |v|$.*

Lema 1.33. *Sea T un árbol y $v \in T$, entonces*

(a) *Si $f \in \mathcal{L}$ entonces, $|f(v)| \leq |f(o)| + |v|\|Df\|_{\infty}$.*

(b) *Si $f \in \mathcal{L}_0$ entonces, $\lim_{|v| \rightarrow \infty} \frac{f(v)}{|v|} = 0$.*

En particular, si $\|f\|_{\mathcal{L}} \leq 1$ entonces, $|f(v)| \leq |v|$ para todo $v \in T_$.*

El siguiente resultado proporciona una cota superior para el modulo de $f(v)$ cuando se dota al espacio de Lipschitz con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_*}$.

Lema 1.34. *Sea $f \in \mathcal{L}$ y $v \in T$. Entonces, $|f(v)| \leq (|v| + 1)\|f\|_{\mathcal{L}_*}$.*

Demostración. Sea v un vértice fijo y $f \in \mathcal{L}$ con $\|f\|_{\mathcal{L}^*} = 1$. Definamos la función $g(v) = f(v) - f(o)$, observemos que $g(o) = 0$ y $\|g\|_{\mathcal{L}} \leq 1$, por lo tanto el lema 1.32 implica que $|g(v)| \leq |v|$, luego

$$|f(v)| \leq |f(o)| + |g(v)| \leq 1 + |v|,$$

mostrando el resultado para funciones de norma uno. Ahora tomemos $f \in \mathcal{L}$ distinta de cero. Notemos que la función $\frac{f}{\|f\|_{\mathcal{L}^*}}$ es de norma uno, por lo tanto

$$|f(v)| \leq (1 + |v|)\|f\|_{\mathcal{L}^*},$$

lo cual demuestra el resultado. □

Capítulo 2

Operador de desplazamiento hacia adelante en \mathcal{L} y en \mathcal{L}_0

En esta sección estudiaremos bajo que condiciones el operador de desplazamiento hacia adelante es acotado, encontraremos la norma del operador y se mostrará que S es una isometría en \mathcal{L}_* . Este operador fue inicialmente definido en [11] por Jabłoński, Jung y Stochel en el espacio de funciones L^2 de un árbol infinito.

Definición 2.1. Sea T un árbol. Definimos el operador de desplazamiento hacia adelante $S : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ como:

$$Sf(v) = \begin{cases} f(v^-), & \text{si } v \neq o \\ 0, & \text{si } v = o. \end{cases}$$

Notemos que al ser \mathcal{F} un espacio vectorial bajo la suma de funciones y producto por escalar, se tiene que S es lineal; en efecto, sean $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Si $v = o$ claramente $S(\alpha f_1 + \beta f_2)(o) = \alpha S f_1(o) + \beta S f_2(o)$, pues $Sf(o)$ vale cero en la raíz para cualquier función en \mathcal{L} . Supongamos que $v \neq o$, entonces

$$S(\alpha f_1 + \beta f_2)(v) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(v^-) = \alpha f_1(v^-) + \beta f_2(v^-) = \alpha S f_1(v) + \beta S f_2(v).$$

Como v se tomó arbitrario se sigue que, $S(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha S f_1 + \beta S f_2$ mostrando la linealidad de S .

2.1. Acotamiento de S en los espacios \mathcal{L} y \mathcal{L}_0

Los siguientes resultados establecen que el operador de desplazamiento hacia adelante es acotado y de norma uno en \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 .

Proposición 2.2. El operador de desplazamiento hacia adelante S está bien definido en \mathcal{L} y es acotado; además $\|S\| \leq 1$.

Demostración. Sea $v \in T_*$. Si $v^- = o$, entonces

$$DSf(v) = |Sf(v) - Sf(v^-)| = |f(o) - 0| = |f(o)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}}.$$

y si $v^- \neq o$, entonces

$$D(Sf)(v) = |Sf(v) - Sf(v^-)| = |f(v^-) - f(v^{--})| \leq \|Df\|_{\infty} \leq \|f\|_{\mathcal{L}}, \quad (2.1)$$

por lo tanto $\|f\|_{\mathcal{L}}$ es una cota superior de $D(Sf)(v)$ y como el supremo es la mínima cota superior necesariamente $\|DSf\|_{\infty} \leq \|f\|_{\mathcal{L}}$, obteniendo que $Sf \in \mathcal{L}$.

Por otra parte, la ecuación (2.1) implica que $\|Sf\|_{\mathcal{L}} = |Sf(o)| + \|DSf\|_{\infty} = 0 + \|DSf\|_{\infty} \leq \|f\|_{\mathcal{L}}$; por lo tanto, S es acotado y $\|S\| \leq 1$. \square

La siguiente proposición garantiza que siempre es posible definir el operador de desplazamiento hacia adelante en el espacio pequeño de Lipschitz.

Proposición 2.3. *El operador $S : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{L}_0$ está bien definido y es acotado.*

Demostración. Sea f una función en \mathcal{L}_0 , veamos que $Sf \in \mathcal{L}_0$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $|v| \geq N$ se cumple que $Df(v) < \epsilon$.

Notemos que, $DSf(v) = Df(v^-)$ para todo $v \in T_*$ entonces, si $|v| \geq N + 1$ se cumple que $Df(v^-) < \epsilon$. Por lo tanto, Sf es un elemento de \mathcal{L}_0 , y como S es acotado en \mathcal{L} , en particular, S es acotado en \mathcal{L}_0 . \square

Teorema 2.4. *Si S es el operador de desplazamiento hacia adelante en \mathcal{L} o en \mathcal{L}_0 , entonces $\|S\| = 1$.*

Demostración. Se observa que en la proposición 2.2 se obtuvo que uno es una cota superior para la norma de S , ahora demostremos que $1 \leq \|S\|$. Sea $g(v) = |v|$, como $Dg(v) = 1$ para todo $v \in T_*$ se sigue que $\|Dg\|_{\infty} < \infty$, luego $g \in \mathcal{L}$. Además, se observa que $\|DSg\|_{\infty} = \sup_{v \in T_{**}} \||v^-| - |v^{-}|\| = 1$ y como $Sg(o) = 0$ se obtiene que $\|Sg\|_{\mathcal{L}} = \|g\|_{\mathcal{L}}$.

Por otra parte,

$$1 = \frac{\|Sg\|_{\mathcal{L}}}{\|g\|_{\mathcal{L}}} \leq \sup_{\|f\|_{\mathcal{L}}=1} \|Sf\|_{\mathcal{L}} = \|S\| \leq 1, \quad (2.2)$$

mostrando que $\|S\| = 1$ cuando S es un operador en \mathcal{L} . Análogamente, sea:

$$g(v) = \begin{cases} \frac{1}{|v|}, & \text{si } |v| \geq 1, \\ 0, & \text{si } v = o. \end{cases}$$

Claramente $g \in \mathcal{L}_0$, ya que si $|v^-| \neq o$, entonces $Dg(v) = \left| \frac{1}{|v|} - \frac{1}{|v^-|} \right| \longrightarrow 0$, cuando $|v| \longrightarrow +\infty$. Por otro lado,

$$\|Sg\|_{\mathcal{L}} = |Sg(o)| + \sup_{v \in T_{**}} |g(v^-) - g(v^{-})| = 1 \text{ y } \|g\|_{\mathcal{L}} = \sup_{v \in T_*} |g(v) - g(v^-)| = 1;$$

por lo tanto, $\|Sg\|_{\mathcal{L}} = \|g\|_{\mathcal{L}}$. Usando el mismo argumento que en la ecuación (2.2), se concluye que $S : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{L}_0$ es de norma uno. \square

Observación 2.5. *El operador de desplazamiento hacia adelante S no es una isometría en \mathcal{L} . En efecto, sea T el árbol homogéneo de orden 1 y sea*

$$f(v) = \begin{cases} 2 - |v|, & \text{si } |v| \leq 2, \\ 0, & \text{si } |v| > 2. \end{cases}$$

Por un lado, se tiene que $\|f\|_{\mathcal{L}} = 3$, pues $|f(o)| = 2$ y $\|Df\|_{\infty} = 1$. Por otro lado como $\|DSf\|_{\infty} = 2$ y $|Sf(o)| = 0$, entonces $\|Sf\|_{\mathcal{L}} = 2$. Por lo tanto, S no puede ser isometría.

El siguiente resultado muestra que el operador de desplazamiento hacia adelante S definido en \mathcal{L}_* es una isometría.

Teorema 2.6. *El operador de desplazamiento hacia adelante S definido en \mathcal{L}_* es una isometría.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{F}$ tal que $\|Df\|_\infty < \infty$, entonces

$$\begin{aligned}
 \|Sf\|_{\mathcal{L}_*} &= \max\{|Sf(o)|, \|DSf\|_\infty\} \\
 &= \sup_{v \in T_*} |Sf(v) - Sf(v^-)| \\
 &= \max \left\{ \max_{|v|=1} |Sf(v) - Sf(v^-)|, \sup_{v \in T_{**}} |Sf(v) - Sf(v^-)| \right\} \\
 &= \max \left\{ |f(o)|, \sup_{v \in T_{**}} |f(v^-) - f(v^{--})| \right\} \\
 &= \max \left\{ |f(o)|, \sup_{u \in T_*} |f(u) - f(u^-)| \right\} \\
 &= \|f\|_{\mathcal{L}_*}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, S es una isometría. □

Como consecuencia del teorema anterior se tiene que el operador de desplazamiento hacia adelante también es una isometría en \mathcal{L}_{0^*} .

2.2. Espectro del operador de desplazamiento hacia adelante S

En esta sección se estudiará el espectro del operador de desplazamiento hacia adelante. De igual manera se estudian el espectro puntual y el espectro puntual aproximado de S .

Proposición 2.7. *Sea S el operador de desplazamiento hacia adelante definido en \mathcal{L}_* , entonces $\sigma_p(S) = \emptyset$.*

Demostración. Primero notemos que al ser S una isometría en $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_*})$, entonces S es inyectivo. Si $\lambda = 0$ fuese un eigenvalor de S , entonces $\ker(S) \neq \{0\}$, lo cual contradice que el operador S sea inyectivo; por lo tanto, $0 \notin \sigma_p(S)$.

Por otro lado, sea $f \in \mathcal{F}$ distinta de cero tal que la ecuación

$$Sf = \lambda f, \text{ con } \lambda \neq 0 \tag{2.3}$$

se satisface, y sea $v \in T$. Probemos por inducción sobre la longitud del vértice v que, $f(v) = 0$ para todo $v \in T$, en efecto,

- Si $v = o$, entonces $0 = Sf(o) = \lambda f(o)$; por lo tanto, $f(o) = 0$.
- Si $|v| = 1$, entonces $\lambda f(v) = Sf(v) = f(v^-) = f(o)$, pero $f(o) = 0$; por lo tanto, $f(v) = 0$.

- Supongamos que $f(v) = 0$ para todo vértice de longitud n , demostremos que $f(v) = 0$ para todo $|v| = n + 1$. Sea $v \in T$ tal que $|v| = n + 1$, notemos que la ecuación (2.3) implica:

$$Sf(v) = \lambda f(v),$$

es decir,

$$f(v^-) = \lambda f(v).$$

Como $|v^-| = n$, por hipótesis de inducción se cumple que $f(v^-) = 0$; por lo tanto, $f(v) = 0$.

Esto muestra que $f(v) = 0$ para todo $v \in T$, es decir, $f = 0$; por lo tanto, λ no es un eigenvalor de S , luego $\sigma_p(S) = \emptyset$. \square

Proposición 2.8. *Sea S el operador desplazamiento hacia adelante definido en \mathcal{L}_* , entonces $\sigma_{ap}(S) \subseteq \partial\mathbb{D}$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \neq 1$ y $f \in \mathcal{L}_*$, entonces:

$$\begin{aligned} \|(S - \lambda I)f\|_{\mathcal{L}_*} &= \|Sf - \lambda f\|_{\mathcal{L}_*} \\ &\geq \left| \|Sf\|_{\mathcal{L}_*} - |\lambda| \|f\|_{\mathcal{L}_*} \right|. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad anterior y el hecho de que S es una isometría con la norma \mathcal{L}_* se sigue que:

$$\begin{aligned} \|(S - \lambda I)f\|_{\mathcal{L}_*} &\geq \left| \|Sf\|_{\mathcal{L}_*} - |\lambda| \|f\|_{\mathcal{L}_*} \right| \\ &= |1 - |\lambda|| \|f\|_{\mathcal{L}_*}, \end{aligned}$$

por lo tanto, existe una constante $C > 0$ tal que $\|(S - \lambda I)f\|_{\mathcal{L}_*} \geq C \|f\|_{\mathcal{L}_*}$ para todo $f \in \mathcal{L}_*$. Por la proposición 1.10 se sigue que $\lambda \notin \sigma_{ap}(S)$, además como S es isometría entonces $\sigma(S) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, luego $\sigma_{ap}(S) \subseteq \partial\mathbb{D}$. \square

Observación 2.9. *En la proposición anterior en realidad se probó que, si T es una isometría, entonces $\sigma_{ap}(T) \subseteq \partial\mathbb{D}$, pues la demostración expuesta no depende del espacio ni del operador con el que se este trabajando.*

El siguiente resultado muestra de forma explícita los números que conforman $\sigma(S)$ y $\sigma_{ap}(S)$.

Teorema 2.10. *Si S es el operador de desplazamiento hacia adelante definido en \mathcal{L}_* o en \mathcal{L}_{0^*} , entonces:*

1. $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$.
2. $\sigma_{ap}(S) = \partial\mathbb{D}$.

2.2. Espectro del operador de desplazamiento hacia adelante S

Demostración. Recordemos que $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (S - \lambda I) \text{ es no invertible}\}$. Notemos que como $\|S\| = 1$, entonces $\sigma(S) \subset \overline{\mathbb{D}}$, por lo tanto, basta mostrar que $\mathbb{D} \subset \sigma(S)$.

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |\lambda| < 1$, supongamos que $\lambda \notin \sigma(S)$, esto implica que el operador $R_\lambda = (S - \lambda I)^{-1}$ existe, por lo tanto la ecuación:

$$(S - \lambda I)f = g,$$

tiene una única solución $f \in \mathcal{L}_*$, para todo $g \in \mathcal{L}$. Consideremos la función,

$$g(v) = \begin{cases} 1, & \text{si } v = o \\ 0, & \text{si } v \neq o, \end{cases}$$

y probemos por inducción que si $|v| = n$, entonces $f(v) = -\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right)$.

- Si $|v| = 0$, entonces $Sf(o) - \lambda f(o) = 1$, es decir, $f(o) = -\frac{1}{\lambda}$.
- Si $|v| = 1$, entonces $Sf(v) - \lambda f(v) = 0$, es decir, $f(o) = \lambda f(v)$. Del caso anterior se sigue que $f(v) = -\frac{1}{\lambda^2}$.
- Supongamos que $f(v) = -\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right)$ para todo $|v| = n$, probemos que el resultado es valido para vértices de longitud $n + 1$. Sea $v \in T$ tal que $|v| = n + 1$. Se observa que la ecuación 2.10 implica que:

$$\lambda f(v) = Sf(v) = f(v^-),$$

por hipótesis de inducción, se cumple que $f(v^-) = -\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right)$; por lo tanto, $f(v) = -\left(\frac{1}{\lambda^{n+2}}\right)$.

Por otra parte, como $f \in \mathcal{L}_*$, entonces $Df(v) < \infty$ para todo $v \in T$, es decir,

$$\begin{aligned} Df(v) &= \left| -\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right) + \frac{1}{\lambda^n} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda^n} \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \right| < \infty, \end{aligned}$$

pero al ser $|\lambda| < 1$ se tiene que $\frac{1}{\lambda^n} \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$; por lo tanto, $Df(v) \rightarrow \infty$ cuando $|v| \rightarrow \infty$, contradiciendo el hecho de que f sea una función en \mathcal{L}_* . Por lo tanto, si $0 < |\lambda| < 1$ se cumple $\lambda \in \sigma(S)$.

Notemos que lo obtenido anteriormente implica que, $\mathbb{D} \setminus \{0\} \subset \sigma(S)$, pero al ser $\sigma(S)$ un conjunto cerrado necesariamente se debe cumplir que:

$$\overline{\mathbb{D}} \subseteq \sigma(S) \subseteq \overline{\mathbb{D}},$$

mostrando que $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$. □

Ahora demostremos (2). Notemos que el resultado obtenido en (1) y las proposiciones 2.8 y 1.11 implican que:

$$\partial\mathbb{D} = \partial\sigma(S) \subseteq \sigma_{ap}(S) \subseteq \partial\mathbb{D}.$$

Por lo tanto, $\sigma_{ap}(S) = \partial\mathbb{D}$.

Se observa que el teorema 2.10 también es cierto cuando S es un operador en \mathcal{L} , pues las normas son equivalentes. Obsérvese también que lo mismo se cumple en \mathcal{L}_0 .

El siguiente corolario muestra que el operador de desplazamiento hacia adelante S definido en \mathcal{L} o en \mathcal{L}_0 no es compacto, y por lo tanto tampoco de rango finito.

Corolario 2.11. *El operador de desplazamiento hacia adelante S definido en \mathcal{L} o en \mathcal{L}_0 no es compacto.*

Demostración. Notemos que los teoremas 2.10 y 1.16 implican directamente que S no es compacto, pues su espectro no corresponde al de un operador compacto. \square

Capítulo 3

Operador de desplazamiento hacia atrás en \mathcal{L} y en \mathcal{L}_0

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades del operador de desplazamiento hacia atrás tales como acotamiento, estimaciones para la norma, espectro, espectro puntual, espectro aproximado, compacidad y rango. Para el estudio de ciertas propiedades nos restringiremos solo al caso en donde el árbol T es homogéneo. Sea $v \in T$ y $m \in \mathbb{N}$, denotaremos por:

$$\text{Chi}^m(v) := \{u \in T : u \text{ es descendiente de } v \text{ y } d(u, v) = m\}.$$

A los vértices $u \in \text{Chi}^m(v)$ les llamaremos m -descendientes de v , y cuando $m = 1$ simplemente les llamaremos hijos de v . Denotaremos por $\gamma(v, m)$ a la cardinalidad del conjunto $\text{Chi}^m(v)$, y si $m = 1$ denotaremos por $\gamma(v)$ a la cardinalidad de $\text{Chi}(v)$. Nótese que si T es un árbol homogéneo de orden γ , entonces $\gamma(v) = \gamma$ para todo vértice $v \in T$.

En [14] los autores definen al operador de desplazamiento hacia atrás B como un análogo apropiado del operador de desplazamiento hacia atrás clásico.

Definición 3.1. Sea T un árbol. Se define el operador de desplazamiento hacia atrás $B : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ como:

$$Bf(v) = \sum_{u \in \text{Chi}(v)} f(u).$$

Se observa al igual que en la sección anterior que el operador de desplazamiento hacia atrás B es lineal. En efecto, sean $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, y sea $v \in T$, entonces:

$$\begin{aligned} B(\alpha f_1 + \beta f_2)(v) &= \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \alpha f_1(u) + \beta f_2(u) \\ &= \alpha \sum_{u \in \text{Chi}(v)} f_1(u) + \beta \sum_{u \in \text{Chi}(v)} f_2(u) \\ &= \alpha Bf_1(v) + \beta Bf_2(v). \end{aligned}$$

Como el vértice v fue arbitrario se sigue que, $B(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha Bf_1 + \beta Bf_2$, por lo tanto, B es lineal.

A continuación se presenta un ejemplo de cómo actúa el operador B en el espacio de Lipschitz definido por un árbol.

Ejemplo 3.2. Consideremos el árbol homogéneo de orden γ y sea:

$$f(v) = \begin{cases} \frac{1}{|v|}, & \text{si } v \neq o. \\ 0, & \text{si } v = o. \end{cases}$$

Entonces para cualquier vértice se tiene que $Bf(v) = \frac{\gamma}{|v|+1}$, pues $|u| = |v| + 1$ para todo $u \in \text{Chi}(v)$.

3.1. Acotamiento de B en los espacios \mathcal{L} y \mathcal{L}_0

Antes de comenzar con el desarrollo de esta sección se dará la definición de árbol homogéneo por sectores; es importante mencionar que esta familia de árboles jugará un papel muy importante durante el resto de la tesis.

Definición 3.3 (Árbol homogéneo por sectores). Sea T un árbol infinito. Diremos que T es homogéneo por sectores (a partir de un nivel N), si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $v \in T$ con $|v| = N$ y todo $w \in S_v$, se cumple que $\gamma(w) = \gamma(v)$.

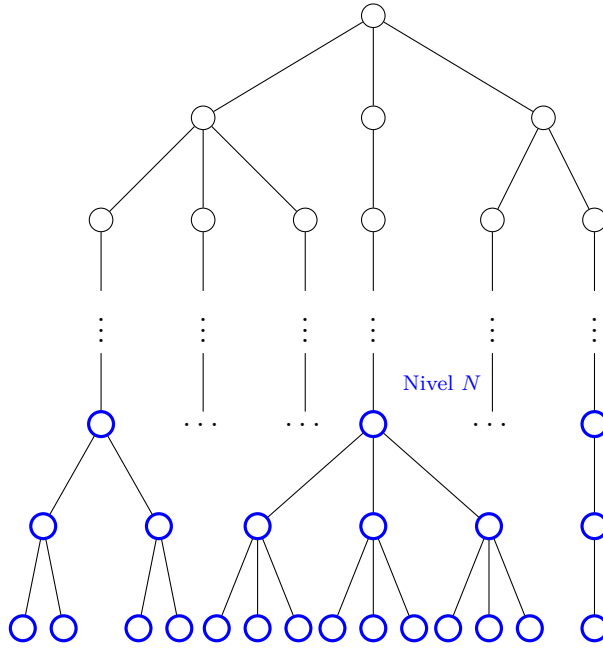


Figura 3.1: Árbol homogéneo por sectores.

De la definición anterior se verifica directamente que un árbol T es homogéneo por sectores si y solo si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $v \in T$ con $|v| > N$, satisface que $\gamma(v) = \gamma(v^-)$. Nótese que si $N = 1$, entonces T es un árbol homogéneo. Sea T es un árbol homogéneo por sectores a partir de un nivel N , denotaremos por:

$$\Gamma := \sup \{ \gamma(v) : v \in T \} \quad \text{y} \quad \Omega_N := \max_{0 < |v| \leq N} | \gamma(v) - \gamma(v^-) | |v|, \quad (3.1)$$

los cuales son finitos, pues $\sup \{ \gamma(v) : v \in T \} = \max \{ \gamma(v) : 0 \leq |v| \leq N \}$ y $\gamma(v) = \gamma(v^-)$ a partir del nivel N . Los siguientes resultados exponen condiciones suficientes para que B sea un operador acotado en \mathcal{L} y en \mathcal{L}_0 .

Teorema 3.4. *Sea T un árbol infinito. Si T es homogéneo por sectores, entonces el operador de desplazamiento hacia atrás B es acotado en \mathcal{L} .*

Demostración. Sean Γ y Ω_N como en la ecuación (3.1), y sean $v \in T_*$ y $f \in \mathcal{L}$ tal que $\|f\|_{\mathcal{L}} = 1$, entonces

$$DBf(v) = |Bf(v) - Bf(v^-)| = \left| \sum_{u \in \text{Chi}(v)} f(u) - \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} f(w) \right|.$$

Notemos que como $v \in \text{Chi}(v^-)$, entonces

$$Bf(v) - Bf(v^-) = \sum_{u \in \text{Chi}(v)} f(u) - \sum_{\substack{w \in \text{Chi}(v^-) \\ w \neq v}} f(w) - f(v).$$

Esta última expresión es igual a:

$$\sum_{u \in \text{Chi}(v)} (f(u) - f(v)) - \sum_{\substack{w \in \text{Chi}(v^-) \\ w \neq v}} (f(w) - f(v^-)) + (\gamma(v) - 1)f(v) - (\gamma(v^-) - 1)f(v^-). \quad (3.2)$$

Por otro lado, sean $u^* \in \text{Chi}(v)$ y $w^* \in \text{Chi}(v^-)$ tales que:

$$|f(u^*) - f(v)| = \max_{u \in \text{Chi}(v)} |f(u) - f(v)| \text{ y } |f(w^*) - f(v^-)| = \max_{w \in \text{Chi}(v^-)} |f(w) - f(v^-)|. \quad (3.3)$$

Combinando (3.2), (3.3) y aplicando la desigualdad del triángulo se sigue que

$$DBf(v) \leq \gamma(v)|f(u^*) - f(v)| + (\gamma(v^-) - 1)|f(w^*) - f(v^-)| + |(\gamma(v) - 1)f(v) - (\gamma(v^-) - 1)f(v^-)|. \quad (3.4)$$

Si se toma el supremo sobre el conjunto T_* en la desigualdad (3.4), se obtiene:

$$\|DBf\|_{\infty} \leq (2\Gamma - 1)\|Df\|_{\infty} + \sup_{v \in T_*} |(\gamma(v) - 1)f(v) - (\gamma(v^-) - 1)f(v^-)|. \quad (3.5)$$

Notemos que como $\|f\|_{\mathcal{L}} = 1$ entonces $\sup_{|v| > N} |f(v) - f(v^-)| \leq 1$, además, como T es un árbol homogéneo por sectores, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $|v| = N$ y $w \in S_v$ se cumple que $\gamma(w) = \gamma(v)$. En particular, $\gamma(v) = \gamma(v^-)$ para todo $|v| > N$, por lo tanto el último sumando de la ecuación (3.5) es igual a

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \max_{0 < |v| \leq N} |(\gamma(v) - 1)f(v) - (\gamma(v^-) - 1)f(v^-)|, \sup_{|v| > N} |(\gamma(v) - 1)f(v) - (\gamma(v^-) - 1)f(v^-)| \right\} \\ & \leq \max \left\{ \max_{0 < |v| \leq N} |(\gamma(v) - 1)f(v) - (\gamma(v^-) - 1)f(v^-)|, \Gamma - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Si se suma en la expresión anterior $(\gamma(v^-) - 1)f(v) - (\gamma(v^-) - 1)f(v)$, se obtiene

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \max_{0 < |v| \leq N} |(\gamma(v) - 1)f(v) - (\gamma(v^-) - 1)f(v^-)|, \Gamma - 1 \right\} \\ & \leq \max \left\{ \max_{0 < |v| \leq N} |(\gamma(v^-) - 1)(f(v) - f(v^-))| + \max_{0 < |v| \leq N} |(\gamma(v) - \gamma(v^-))f(v)|, \Gamma - 1 \right\} \\ & \leq \max \left\{ \max_{0 < |v| \leq N} (\gamma(v^-) - 1) + \max_{0 < |v| \leq N} |\gamma(v) - \gamma(v^-)| \|f(v)\|, \Gamma - 1 \right\}. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Usando el lema 1.33 en (3.6) se tiene que,

$$\begin{aligned} \|DBf\|_\infty &\leq (2\Gamma - 1) + \max \left\{ \max_{0 < |v| \leq N} (\gamma(v^-) - 1) + \max_{0 < |v| \leq N} |\gamma(v) - \gamma(v^-)| |v|, \Gamma - 1 \right\} \\ &= (2\Gamma - 1) + \max \{ \Gamma - 1 + \Omega_N, (\Gamma - 1) \} \\ &= 3\Gamma - 2 + \Omega_N. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por otra parte, el lema 1.33 implica que

$$|Bf(o)| = \left| \sum_{s \in \text{Chi}(o)} f(s) \right| \leq \sum_{s \in \text{Chi}(o)} |f(s)| \leq \gamma(o)|s| = \gamma(o) \leq \Gamma. \quad (3.8)$$

Combinando lo obtenido en (3.7) y (3.8) se sigue que:

$$\|Bf\|_{\mathcal{L}} \leq 4\Gamma - 2 + \Omega_N. \quad (3.9)$$

Por lo tanto,

$$\sup_{\|f\|_{\mathcal{L}}=1} \|Bf\|_{\mathcal{L}} = \|B\| \leq 4\Gamma - 2 + \Omega_N, \quad (3.10)$$

es decir, B es acotado en \mathcal{L} . \square

Corolario 3.5. *Sea T un árbol infinito. Si T es homogéneo por sectores, entonces el operador de desplazamiento hacia atrás B es acotado en \mathcal{L}_* . Además*

$$\|B\| \leq \max \{ 2\Gamma, 3\Gamma - 2 + \Omega_N \}.$$

Demostración. El acotamiento de B en \mathcal{L}_* se sigue de la equivalencia de normas. Por otro lado, de acuerdo con la desigualdad (3.6) si se suma $(\gamma(v) - 1)f(v^-) - (\gamma(v^-) - 1)f(v^-)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} &\max \left\{ \max_{0 < |v| \leq N} |(\gamma(v) - 1)f(v) - (\gamma(v^-) - 1)f(v^-)|, \Gamma - 1 \right\} \\ &\leq \max \left\{ \max_{0 < |v| \leq N} |(\gamma(v) - 1)(f(v) - f(v^-))| + \max_{0 < |v| \leq N} |(\gamma(v) - \gamma(v^-))f(v^-)|, \Gamma - 1 \right\} \\ &\leq \max \left\{ \max_{0 < |v| \leq N} (\gamma(v) - 1) + \max_{0 < |v| \leq N} |\gamma(v) - \gamma(v^-)| |f(v^-)|, \Gamma - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Usando el lema 1.34 en la desigualdad anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned} \|DBf\|_\infty &\leq 2\Gamma - 1 + \max \left\{ \max_{0 < |v| \leq N} (\gamma(v) - 1) + \max_{0 < |v| \leq N} |\gamma(v) - \gamma(v^-)| (|v^-| + 1), \Gamma - 1 \right\} \\ &= 3\Gamma - 2 + \max_{0 < |v| \leq N} |\gamma(v) - \gamma(v^-)| |v| \\ &= 3\Gamma - 2 + \Omega_N. \end{aligned}$$

De igual manera el lema 1.34 implica que $|f(s)| \leq |s| + 1$ para todo $s \in \text{Chi}(o)$, de donde

$$|Bf(o)| = \left| \sum_{s \in \text{Chi}(o)} f(s) \right| \leq \sum_{s \in \text{Chi}(o)} |f(s)| \leq 2\gamma(o) \leq 2\Gamma,$$

por lo tanto

$$\|Bf\|_{\mathcal{L}_*} \leq \max\{2\Gamma, 3\Gamma - 2 + \Omega_N\},$$

luego, $\|B\| = \sup_{\|f\|_{\mathcal{L}_*}=1} \|Bf\|_{\mathcal{L}_*} \leq \max\{2\Gamma, 3\Gamma - 2 + \Omega_N\}$. \square

Observación 3.6. *El teorema 3.5 implica que si T es un árbol homogéneo de orden γ , entonces $\|B\| \leq \max\{2\gamma, 3\gamma - 2\}$.*

Teorema 3.7. *Sea T un árbol infinito. Si T es un árbol homogéneo por sectores, entonces el operador de desplazamiento hacia atrás B es acotado en \mathcal{L}_0 .*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}_0$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(v) - f(v^-)| \leq \frac{\epsilon}{3\Gamma}$ siempre que $|v| \geq N_1$, donde Γ está dado como en la ecuación (3.1).

De las ecuaciones (3.3) y (3.4) del teorema 3.4, se sigue que:

$$\begin{aligned} DBf(v) &= |Bf(v) - Bf(v^-)| \leq \Gamma|f(u^*) - f(v)| + (\Gamma - 1)|f(w^*) - f(v^-)| \\ &\quad + |\gamma(v)f(v) - \gamma(v^-)f(v^-)| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} + |\gamma(v)f(v) - \gamma(v^-)f(v^-)|, \text{ con } |v| \geq N_1. \end{aligned}$$

Sea $M = \max\{N + 1, N_1 + 1\}$ con N el nivel a partir de donde el árbol es homogéneo por sectores entonces, si $|v| \geq M$ se tiene que:

$$DBf(v) \leq \frac{2\epsilon}{3} + |\gamma(v)||f(v) - f(v^-)| \leq \frac{2\epsilon}{3} + \Gamma|f(v) - f(v^-)| \leq \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Por lo tanto, $Bf \in \mathcal{L}_0$, es decir, B está bien definido, y como B es acotado en \mathcal{L} , en particular B es acotado en \mathcal{L}_0 . \square

Claramente se tiene que B es acotado en \mathcal{L}_{0^*} , pues las normas son equivalentes.

3.1.1. Condiciones necesarias para que B sea un operador acotado en \mathcal{L} y \mathcal{L}_0

En esta sección se caracteriza el acotamiento del operador de desplazamiento hacia atrás definido en \mathcal{L} o en \mathcal{L}_0 . Primero demostremos el siguiente lema.

Lema 3.8. *Sea T un árbol infinito que no es homogéneo por sectores y supongamos que $\sup\{\gamma(v) : v \in T\} = \infty$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $v \in T$ con $|v| > n$ tal que $\gamma(v^-) < \gamma(v)$.*

Demostración. Supongamos que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $v \in T$ con $|v| \geq N$ se cumple $\gamma(v) \leq \gamma(v^-)$. Notemos que si $|v| = N + 1$, entonces $\gamma(v) \leq \gamma(v^-)$. Si $|v| = N + 2$, entonces $\gamma(v) \leq \gamma(v^-) \leq \gamma(v^{--})$. De acuerdo con la observación anterior se tiene que, para todo $n \in \mathbb{N}$, si $|v| = N + n$ entonces $\gamma(v) \leq \gamma(v^-) \leq \gamma(v^{--}) \leq \dots \leq \gamma(v^{(n)})$. Esto muestra que para todo $|u| \geq N$ se cumple que $\gamma(u) \leq \max\{\gamma(w) : |w| = N\}$; por lo tanto, $\gamma(u) \leq \max\{\gamma(w) : |w| \leq N\}$ para todo $u \in T$, lo cual es una contradicción. Esto muestra que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $v \in T$ con $|v| > n$ tal que $\gamma(v^-) < \gamma(v)$. \square

El siguientes teorema muestran una condición necesaria para que B sea un operador acotado en \mathcal{L}_0 .

Teorema 3.9. *Sea T un árbol infinito. Si el operador de desplazamiento hacia atrás $B : \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0$ es acotado, entonces T es homogéneo por sectores.*

Demostración. Supongamos que T no es homogéneo por sectores; por lo tanto se tienen los siguientes caso: $\sup \{\gamma(v) : v \in T\} = \infty$ ó $\sup \{\gamma(v) : v \in T\} < \infty$. Consideremos primero el caso en el que $\sup \{\gamma(v) : v \in T\} = \infty$. Sea $v \in T_*$, se define la función

$$g(v) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{|v|} \frac{1}{k}, & \text{si } |v| \geq 1 \\ 0, & \text{si } v = o, \end{cases}$$

la cual es una función en \mathcal{L}_0 , pues $Dg(v) = \left| \sum_{k=1}^{|v|} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{|v|-1} \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{|v|}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} DBg(v) &= \left| \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \sum_{k=1}^{|u|} \frac{1}{k} - \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \sum_{k=1}^{|w|} \frac{1}{k} \right| \\ &= \left| \gamma(v) \sum_{k=1}^{|v|+1} \frac{1}{k} - \gamma(v^-) \sum_{k=1}^{|v|} \frac{1}{k} \right| \\ &= \left| \gamma(v) \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{|v|+1} \right] - \gamma(v^-) \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{|v|} \right] \right| \\ &= \left| (\gamma(v) - \gamma(v^-)) \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{|v|} \right] + \frac{\gamma(v)}{|v|+1} \right|. \end{aligned}$$

Como T no es homogéneo por sectores, por el lema 3.8 se sigue que, existe una sucesión de vértices $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ con $|v_m| \geq m$, tal que $\gamma(v_m) - \gamma(v_m^-) \geq 1$. Evaluando DBg en $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} DBg(v_m) &= \left| (\gamma(v_m) - \gamma(v_m^-)) \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{|v_m|} \right] + \frac{\gamma(v_m)}{|v_m|+1} \right| \\ &= (\gamma(v_m) - \gamma(v_m^-)) \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{|v_m|} \right] + \frac{\gamma(v_m)}{|v_m|+1} \\ &\geq \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{|v_m|} \right] + \frac{\gamma(v_m)}{|v_m|+1}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Por otro lado, se sabe que la serie armónica es divergente, es decir,

$$\sum_{k=1}^{|v_m|} \frac{1}{k} \rightarrow +\infty, \quad m \rightarrow \infty. \tag{3.12}$$

Por lo tanto, $DBg(v_m) \rightarrow \infty$, luego

$$\sup_{v \in T_*} D(Bg)(v) = \|DBg\|_\infty = \infty,$$

es decir, B no es acotado en \mathcal{L}_0 .

3.1. Acotamiento de B en los espacios \mathcal{L} y \mathcal{L}_0

Ahora supongamos que $\sup\{\gamma(v) : v \in T\} < \infty$. Notemos que como T no es homogéneo por sectores, entonces para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $v \in T$ con $|v| > m$, tal que $\gamma(v) \neq \gamma(v^-)$. Por lo tanto, existe una sucesión $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ con $|v_m| \geq m$ tal que $|\gamma(v_m) - \gamma(v_m^-)| \geq 1$. Sea $k = \max\{\gamma(v) : v \in T\}$ y sea g la misma función que en el caso anterior, entonces

$$\begin{aligned} DBg(v_m) &\geq |\gamma(v_m) - \gamma(v_m^-)| \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{|v_m|} \right] - \frac{\gamma(v_m)}{|v_m| + 1} \\ &\geq \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{|v_m|} \right] - \frac{k}{|v_m| + 1} \rightarrow \infty \text{ si } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|DBg\|_\infty = \sup_{v \in T_*} DBg(v) = \infty$, es decir B no es acotado en \mathcal{L}_0 . \square

Se observa que el teorema 3.9 también es cierto cuando B es un operador en \mathcal{L} , ya que la función que se construyó en el teorema 3.9 también está en \mathcal{L} . Por lo tanto, si T no es homogéneo por sectores, entonces B no puede ser un operador acotado en \mathcal{L} . esta observación se resume en el siguiente corolario.

Corolario 3.10. *Sea T un árbol infinito. Si el operador de desplazamiento hacia atrás B es acotado en \mathcal{L} , entonces T es un homogéneo por sectores.*

Mostraremos un ejemplo en el que B no es acotado en \mathcal{L}_0 si T no es homogéneo por sectores.

Ejemplo 3.11. *Sea T el árbol infinito tal que*

$$\gamma(v) = \begin{cases} 2, & \text{si } v = o, \\ 2, & \text{si } |v| \text{ es par,} \\ 1, & \text{si } |v| \text{ es impar,} \end{cases}$$

el cual claramente no es homogéneo por sectores. Entonces B no es acotado en \mathcal{L}_0 .

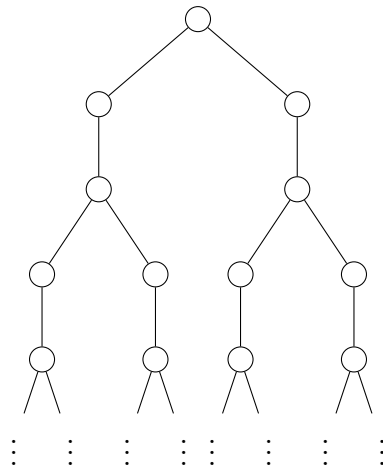


Figura 3.2: Árbol, ejemplo 3.11

Demostración. Sea g definida como en el teorema 3.9 y sea $v \in T_*$. Si $|v|$ es par, entonces

$$\begin{aligned} DBg(v) &= \left| 2 \sum_{k=1}^{|v|+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{|v|} \frac{1}{k} \right| \\ &= \left| 2 \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{|v|+1} \right] - \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{|v|} \right] \right| \\ &= \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{|v|+1} \right] + \frac{1}{|v|+1} \longrightarrow \infty, \text{ si } |v| \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Si $|v|$ es impar, entonces

$$\begin{aligned} DBg(v) &= \left| \sum_{k=1}^{|v|+1} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^{|v|} \frac{1}{k} \right| \\ &= \left| \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{|v|+1} \right] - 2 \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{|v|} \right] \right| \\ &= \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{|v|} \right] - \frac{1}{|v|+1} \longrightarrow \infty, \text{ si } |v| \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|DBg\|_\infty = \infty$, luego B no es acotado. \square

La siguiente proposición muestra una equivalencia a ser un árbol homogéneo por sectores.

Proposición 3.12. *Sea T un árbol infinito. Entonces, $\sup \{|\gamma(v) - \gamma(v^-)||v| : v \in T_*\} < \infty$ si y solo si T es homogéneo por sectores.*

Demostración. si T es homogéneo por sectores, entonces

$$\sup \{|\gamma(v) - \gamma(v^-)||v| : v \in T_*\} < \infty.$$

Recíprocamente, supongamos que T no es homogéneo por sectores. Notemos que el lema 3.8 garantiza que existe una sucesión $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ con $|v_m| \geq m$ tal que $|\gamma(v_m) - \gamma(v_m^-)| \geq 1$, luego $|\gamma(v_m) - \gamma(v_m^-)||v_m| > |v_m| \longrightarrow \infty$. Por lo tanto, $\sup \{|\gamma(v) - \gamma(v^-)||v| : v \in T_*\} = \infty$. \square

Combinando los teoremas 3.4, 3.7, 3.9, corolario 3.10 y la proposición 3.12 se obtiene la siguiente caracterización para el acotamiento de B en \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 .

Corolario 3.13. *Sea T un árbol infinito; las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) $B : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ es acotado
- (2) $B : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{L}_0$ es acotado
- (3) T es un árbol homogéneo por sectores.
- (4) $\sup \{|\gamma(v) - \gamma(v^-)||v| : v \in T_*\} < \infty$.

3.2. La norma del operador B en árboles homogéneos

En esta sección se estudiará la norma del operador de desplazamiento hacia atrás B definido en \mathcal{L} o en \mathcal{L}_0 cuando T es un árbol homogéneo.

Teorema 3.14. *Sea B el operador de desplazamiento hacia atrás en \mathcal{L}_* . Si T es un árbol homogéneo de orden γ , entonces*

$$\|B\| = \begin{cases} 3\gamma - 2, & \text{si } \gamma \geq 2 \\ 2, & \text{si } \gamma = 1 \end{cases}$$

Demostración. De la observación 3.6 se tiene que: $\|B\| \leq 3\gamma - 2$, si $\gamma \geq 2$ y $\|B\| \leq 2$, si $\gamma = 1$. Sea $u \in \text{Chi}(o)$ fijo, definimos la función:

$$h_u(v) = \begin{cases} 1, & \text{si } v = o \\ |v| + 1, & \text{si } v \in S_u \text{ y } |v| \leq 2 \\ 5 - |v|, & \text{si } v \in S_u \text{ y } 3 \leq |v| < 5 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

la cual claramente está en \mathcal{L}_0 . La figura 3.3 muestra los valores no cero que toma la función h_u en un caso concreto.

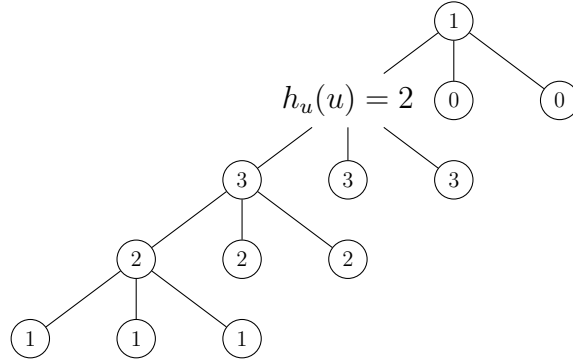


Figura 3.3: $h_u(v)$ cuando T es un árbol homogéneo de orden 3 (solo se muestran algunos vértices).

Por otra parte, si se evalúa Bh_u en la raíz, se obtiene que $|Bh_u(o)| = |2| = 2$, pues, $h_u(v) = 0$ para todo $v \in \text{Chi}(o) \setminus \{u\}$. Ahora calculemos DBh_u . Sea $v \in T_*$, y consideremos los siguientes casos:

- Supongamos que $v = u$. Como $h_u(v) = 0$ para todo $v \in \text{Chi}(o) \setminus \{u\}$, entonces:

$$DBh_u(v) = \left| \sum_{w \in \text{Chi}(v)} h_u(w) - \sum_{s \in \text{Chi}(v^-)} h_u(s) \right| = |\gamma(|u| + 1) - 2| = |3\gamma - 2| = 3\gamma - 2.$$

- Si $v \in \text{Chi}(o) \setminus \{u\}$, entonces:

$$DBh_u(v) = \left| \sum_{w \in \text{Chi}(v)} h_u(w) - \sum_{s \in \text{Chi}(v^-)} h_u(s) \right| = |0 - 2| = 2.$$

- Si $v \in S_u$ con $|v| = 2$, entonces

$$DBh_u(v) = \left| \sum_{w \in \text{Chi}(v)} h_u(w) - \sum_{s \in \text{Chi}(v^-)} h_u(s) \right| = |(5 - (|v| + 1))\gamma - (|u| + 1)\gamma| = \gamma.$$

- Si $v \in S_u$ con $|v| = 3$, entonces $Bh_u(v^-) = \gamma(|v^-| + 1) = 3\gamma$, luego

$$DBh_u(v) = \left| \sum_{w \in \text{Chi}(v)} h_u(w) - \sum_{s \in \text{Chi}(v^-)} h_u(s) \right| = |(5 - |v|)\gamma - 3\gamma| = \gamma.$$

- Si $v \in S_u$ con $3 < |v| \leq 5$, entonces

$$DBh_u(v) = \left| \sum_{w \in \text{Chi}(v)} h_u(w) - \sum_{s \in \text{Chi}(v^-)} h_u(s) \right| = |(5 - |v|)\gamma - (5 - |v^-|)\gamma| = \gamma.$$

Notemos que en el resto de los casos se tiene que $Bh_u(v) = 0$, por lo tanto

$$\|DBh_u\|_\infty = \begin{cases} 3\gamma - 2, & \text{si } \gamma \geq 2 \\ 2, & \text{si } \gamma = 1, \end{cases}$$

y como $\|Bh_u\|_{\mathcal{L}^*} = \max\{|Bh_u(o)|, \|DBh_u\|_\infty\}$, se sigue que

$$\|Bh_u\|_{\mathcal{L}^*} = \begin{cases} 3\gamma - 2, & \text{si } \gamma \geq 2 \\ 2, & \text{si } \gamma = 1. \end{cases}$$

Por otra parte, la observación 3.6 implica que, $\|B\| \leq 3\gamma - 2$ si $\gamma \geq 2$, y $\|B\| \leq 2$ si $\gamma = 1$, por lo tanto

$$\frac{\|Bh_u\|_{\mathcal{L}^*}}{\|h_u\|_{\mathcal{L}^*}} \leq \sup_{\|g\|_{\mathcal{L}^*}=1} \|Bg\|_{\mathcal{L}^*} = \|B\|,$$

mostrando que

$$\|B\| = \begin{cases} 3\gamma - 2, & \text{si } \gamma \geq 2 \\ 2, & \text{si } \gamma = 1. \end{cases} \quad \square$$

3.3. Espectro del operador de desplazamiento hacia atrás B

En esta sección se estudiará el espectro del operador de desplazamiento hacia atrás para el caso en el que T es un árbol homogéneo. De igual manera se estudian el espectro puntual y el espectro puntual aproximado de B .

Proposición 3.15. *Sea T un árbol homogéneo de orden γ , y sea B el operador de desplazamiento hacia atrás definido en \mathcal{L} o en \mathcal{L}_0 , entonces*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \gamma\} \subseteq \sigma_p(B) \text{ o } \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \gamma\} \cup \{\gamma\} \subseteq \sigma_p(B)$$

respectivamente.

3.3. Espectro del operador de desplazamiento hacia atrás B

Demostración. Recordemos que una función $f \in \mathcal{F}$ distinta de cero es un eigenvector de B si y solo si se satisface la ecuación $Bf = \lambda f$, es decir,

$$\sum_{s \in \text{Chi}(v)} f(s) = \lambda f(v), \text{ para todo } v \in T. \quad (3.13)$$

Sea $f_\lambda(v) = \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{|v|}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$. Veamos para que valores de λ la función f_λ es un eigenvector de B . Se observa que f_λ satisface (3.13), ya que

$$Bf_\lambda(v) = \sum_{s \in \text{Chi}(v)} f_\lambda(s) = \sum_{s \in \text{Chi}(v)} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{|s|+1} = \gamma \left(\frac{\lambda^{v|+1}}{\gamma^{v|+1}}\right) = \lambda f_\lambda(v).$$

Ahora solo resta ver bajo que condiciones f_λ es una función en \mathcal{L} o en \mathcal{L}_0 . Sea $v \in T_*$, entonces:

$$Df_\lambda(v) = \left| \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{|v|} - \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{|v-|} \right| = \left| \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{|v|} - \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{|v-1|} \right| = \left| \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{|v-1|} \left| \frac{\lambda}{\gamma} - 1 \right| \right|.$$

Notemos que la desigualdad anterior implica que, $f_\lambda \in \mathcal{L}$ si y solo si $\frac{|\lambda|}{\gamma} \leq 1$; por lo tanto f_λ es un eigenvector del operador B definido en \mathcal{L} si y sólo si $|\lambda| \leq \gamma$.

Análogamente, $f_\lambda \in \mathcal{L}_0$ si y solo si $\frac{|\lambda|}{\gamma} < 1$ ó $\lambda = \gamma$; por lo tanto, f_λ es un eigenvector del operador B definido en \mathcal{L}_0 si y solo si $\lambda < \gamma$ ó $\lambda = \gamma$.

Lo anterior muestra que el espectro puntual para B definido en \mathcal{L} o en \mathcal{L}_0 satisface

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \gamma\} \subseteq \sigma_p(B) \text{ o } \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \gamma\} \cup \{\gamma\} \subseteq \sigma_p(B)$$

respectivamente. □

Para calcular el espectro del operador B necesitaremos el siguiente resultado.

Lema 3.16. *Sea T un árbol homogéneo de orden γ , y sea B el operador de desplazamiento hacia atrás definido en \mathcal{L}_* o en \mathcal{L}_{0*} , entonces*

$$\|B^n f\|_{\mathcal{L}_*} \leq \max \left\{ (2n+1)\gamma^n - 2n\gamma^{n-1}, (n+1) \right\}$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}$ o en \mathcal{L}_0 tal que $\|f\|_{\mathcal{L}^*} = 1$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $v \in T_*$, primero encontraremos una cota superior para $\|DB^n f\|_\infty$. Notemos que cada vértice $u \in \text{Chi}^{n-1}(v)$ es padre de γ vértices distintos del conjunto $\text{Chi}^n(v)$, por lo tanto

$$(B^n f)(v) = \sum_{u \in \text{Chi}^n(v)} f(u) = \sum_{u \in \text{Chi}^n(v)} (f(u) - f(u^-)) + \gamma \sum_{s \in \text{Chi}^{n-1}(v)} f(s). \quad (3.14)$$

Por otro lado, notemos que los vértices que pertenecen al conjunto $\text{Chi}^{n-1}(v)$ están en $\text{Chi}^n(v^-)$, entonces

$$(B^n f)(v^-) = \sum_{w \in \text{Chi}^n(v^-)} f(w) = \sum_{\substack{w \in \text{Chi}^n(v^-) \\ w \notin \text{Chi}^{n-1}(v)}} f(w) + \sum_{s \in \text{Chi}^{n-1}(v)} f(s), \quad (3.15)$$

por lo tanto, se tiene que

$$B^n f(v) - B^n f(v^-) = \sum_{u \in \text{Chi}^n(v)} (f(u) - f(u^-)) + (\gamma - 1) \sum_{s \in \text{Chi}^{n-1}(v)} f(s) - \sum_{\substack{w \in \text{Chi}^n(v^-) \\ w \notin \text{Chi}^{n-1}(v)}} f(w). \quad (3.16)$$

Observemos que cada $u \in \text{Chi}^{n-2}(v)$ es padre de γ vértices distintos que pertenecen a $\text{Chi}^{n-1}(v)$ (como sucedió en (3.14)), entonces

$$\sum_{s \in \text{Chi}^{n-1}(v)} f(s) = \sum_{s \in \text{Chi}^{n-1}(v)} (f(s) - f(s^-)) + \gamma \sum_{s \in \text{Chi}^{n-2}(v)} f(s). \quad (3.17)$$

Aplicando un razonamiento análogo se obtiene que la expresión (3.17) es equivalente a que:

$$\sum_{s \in \text{Chi}^{n-1}(v)} f(s) = \sum_{s \in \text{Chi}^{n-1}(v)} (f(s) - f(s^-)) + \gamma \sum_{s \in \text{Chi}^{n-2}(v)} (f(s) - f(s^-)) + \gamma^2 \sum_{s \in \text{Chi}^{n-3}(v)} f(s).$$

Procediendo inductivamente sobre n se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \text{Chi}^{n-1}(v)} f(s) &= \sum_{u \in \text{Chi}^{n-1}(v)} (f(u) - f(u^-)) + \gamma \sum_{s \in \text{Chi}^{n-2}(v)} (f(s) - f(s^-)) + \gamma^2 \sum_{s \in \text{Chi}^{n-3}(v)} f(s) \\ &+ \cdots + \gamma^{n-3} \sum_{s \in \text{Chi}^2(v)} (f(s) - f(s^-)) + \gamma^{n-2} \sum_{s \in \text{Chi}(v)} f(s). \end{aligned}$$

Observemos que si $s \in \text{Chi}(v)$, entonces $f(s^-) = f(v)$. Usando esta observación en la ecuación anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \text{Chi}^{n-1}(v)} f(s) &= \sum_{u \in \text{Chi}^{n-1}(v)} (f(u) - f(u^-)) + \gamma \sum_{s \in \text{Chi}^{n-2}(v)} (f(s) - f(s^-)) + \cdots \\ &+ \gamma^{n-3} \sum_{s \in \text{Chi}^2(v)} (f(s) - f(s^-)) + \gamma^{n-2} \sum_{s \in \text{Chi}(v)} (f(s) - f(s^-)) + \gamma^{n-1} f(v). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por otra parte, notemos que cada $w \in \text{Chi}^{n-1}(v^-) \setminus \text{Chi}^{n-2}(v)$ es padre de γ vértices distintos del conjunto $\text{Chi}^n(v^-) \setminus \text{Chi}^{n-1}(v)$, entonces

$$\sum_{\substack{w \in \text{Chi}^n(v^-) \\ w \notin \text{Chi}^{n-1}(v)}} f(w) = \sum_{\substack{w \in \text{Chi}^n(v^-) \\ w \notin \text{Chi}^{n-1}(v)}} (f(w) - f(w^-)) + \gamma \sum_{\substack{w \in \text{Chi}^{n-1}(v^-) \\ w \notin \text{Chi}^{n-2}(v)}} f(w). \quad (3.19)$$

Argumentando de forma análoga sobre los vértices en $\text{Chi}^{n-2}(v^-) \setminus \text{Chi}^{n-3}(v)$, se sigue que el término izquierdo de la expresión (3.19) es igual a

$$\sum_{\substack{w \in \text{Chi}^n(v^-) \\ w \notin \text{Chi}^{n-1}(v)}} (f(w) - f(w^-)) + \gamma \sum_{\substack{w \in \text{Chi}^{n-1}(v^-) \\ w \notin \text{Chi}^{n-2}(v)}} (f(w) - f(w^-)) + \gamma^2 \sum_{\substack{w \in \text{Chi}^{n-2}(v^-) \\ w \notin \text{Chi}^{n-3}(v)}} f(w).$$

Procediendo inductivamente sobre n obtenemos que,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{w \in \text{Chi}^n(v^-) \\ w \notin \text{Chi}^{n-1}(v)}} f(w) &= \sum_{\substack{w \in \text{Chi}^n(v^-) \\ w \notin \text{Chi}^{n-1}(v)}} (f(w) - f(w^-)) + \gamma \sum_{\substack{w \in \text{Chi}^{n-1}(v^-) \\ w \notin \text{Chi}^{n-2}(v)}} (f(w) - f(w^-)) \\ &+ \cdots + \sum_{\substack{w \in \text{Chi}^2(v^-) \\ w \notin \text{Chi}(v)}} (f(w) - f(w^-)) + \gamma^{n-1} \sum_{\substack{w \in \text{Chi}(v^-) \\ w \neq v}} f(w). \end{aligned}$$

Ahora observemos que cada $w \in \text{Chi}(v^-)$ satisface que $f(w^-) = f(v^-)$, y como $|\text{Chi}(v^-) \setminus \{v\}| = \gamma - 1$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{w \in \text{Chi}^n(v^-) \\ w \notin \text{Chi}^{n-1}(v)}} f(w) &= \sum_{\substack{w \in \text{Chi}^n(v^-) \\ w \notin \text{Chi}^{n-1}(v)}} (f(w) - f(w^-)) + \gamma \sum_{\substack{w \in \text{Chi}^{n-1}(v^-) \\ w \notin \text{Chi}^{n-2}(v)}} (f(w) - f(w^-)) \\ &+ \cdots + \gamma^{n-1} \sum_{\substack{w \in \text{Chi}(v^-) \\ w \neq v}} (f(w) - f(w^-)) + \gamma^{n-1}(\gamma - 1)f(v^-). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sustituyendo lo que se obtuvo en las ecuaciones (3.18), (3.20) y (3.16), y aplicando la desigualdad del triángulo a $DB^n f(v)$ se sigue que

$$\begin{aligned} DB^n f(v) &\leq \sum_{u \in \text{Chi}^n(v)} |f(u) - f(u^-)| + (\gamma - 1) \left[\sum_{u \in \text{Chi}^{n-1}(v)} |f(u) - f(u^-)| \right. \\ &+ \gamma \sum_{s \in \text{Chi}^{n-2}(v)} |f(s) - f(s^-)| + \cdots + \gamma^{n-2} \sum_{s \in \text{Chi}(v)} |f(s) - f(s^-)| \left. \right] + \sum_{\substack{w \in \text{Chi}^n(v^-) \\ w \notin \text{Chi}^{n-1}(v)}} |f(w) - f(w^-)| \\ &+ \gamma \sum_{\substack{w \in \text{Chi}^{n-1}(v^-) \\ w \notin \text{Chi}^{n-2}(v)}} |f(w) - f(w^-)| + \cdots + \gamma^{n-1} \sum_{\substack{w \in \text{Chi}(v^-) \\ w \neq v}} |f(w) - f(w^-)| + \gamma^{n-1}(\gamma - 1)|f(v) - f(v^-)|. \end{aligned}$$

Notemos que al ser T un árbol homogéneo se satisface que, $|\text{Chi}^k(v)| = \gamma^k$ y $|\text{Chi}^k(v^-) \setminus \text{Chi}^{k-1}(v)| = \gamma^k - \gamma^{k-1} = \gamma^{k-1}(\gamma - 1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} DB^n f(v) &\leq \gamma^n \|Df\|_\infty + (n-1)(\gamma-1)\gamma^{n-1} \|Df\|_\infty + n(\gamma^n - \gamma^{n-1}) \|Df\|_\infty + \gamma^{n-1}(\gamma-1) \|Df\|_\infty \\ &= (\gamma^n + (n-1)(\gamma-1)\gamma^{n-1} + n(\gamma-1)\gamma^{n-1} + \gamma^{n-1}(\gamma-1)) \|Df\|_\infty, \end{aligned}$$

y como $\|Df\|_\infty \leq 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} DB^n f(v) &\leq \gamma^n + (n-1)(\gamma-1)\gamma^{n-1} + (n+1)(\gamma-1)\gamma^{n-1} \\ &= \gamma^n + (2n-1)\gamma^{n-1}(\gamma-1) \\ &= (2n+1)\gamma^n - 2n\gamma^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por lo tanto, $\|DB^n f\|_\infty \leq (2n+1)\gamma^n - 2n\gamma^{n-1}$.

Por otra parte, notemos que los γ^{n-1} vértices que pertenecen al conjunto $\text{Chi}^{n-1}(o)$ son padres de todos los vértices del conjunto $\text{Chi}^n(o)$, entonces

$$\sum_{s \in \text{Chi}^n(o)} f(s) = \sum_{s \in \text{Chi}^n(o)} (f(s) - f(s^-)) + \gamma \sum_{s \in \text{Chi}^{n-1}(o)} f(s),$$

de igual manera observamos que los γ^{n-2} vértices en $\text{Chi}^{n-2}(o)$ son padres de los vértices en $\text{Chi}^{n-1}(o)$, esto implica que

$$\sum_{s \in \text{Chi}^n(o)} f(s) = \sum_{s \in \text{Chi}^n(o)} (f(s) - f(s^-)) + \gamma \sum_{s \in \text{Chi}^{n-1}(o)} (f(s) - f(s^-)) + \gamma^2 \sum_{s \in \text{Chi}^{n-2}(o)} f(s),$$

continuando de forma inductiva este proceso sobre n se obtiene

$$\begin{aligned} B^n f(o) &= \sum_{s \in \text{Chi}^n(o)} (f(s) - f(s^-)) + \gamma \sum_{s \in \text{Chi}^{n-1}(o)} (f(s) - f(s^-)) + \gamma^2 \sum_{s \in \text{Chi}^{n-2}(o)} f(s) \\ &+ \cdots + \gamma^{n-1} \sum_{s \in \text{Chi}(o)} (f(s) - f(s^-)) + \gamma^n f(o), \end{aligned} \quad (3.22)$$

aplicando la desigualdad del triángulo y acotando por $\|Df\|_\infty$ en la ecuación (3.22) obtenemos que, $|B^n f(o)| \leq \gamma^n(n+1)\|Df\|_\infty \leq \gamma^n(n+1)$. Combinando la desigualdad anterior y (3.21) se sigue que

$$\|B^n f\|_{\mathcal{L}} \leq \max \left\{ (2n+1)\gamma^n - 2n\gamma^{n-1}, (n+1)\gamma^n \right\}.$$

Notemos que si $\gamma = 1$, claramente $\max \left\{ (2n+1)\gamma^n - 2n\gamma^{n-1}, (n+1)\gamma^n \right\} = n+1$. Si $\gamma \geq 2$, entonces

$$\max \left\{ (2n+1)\gamma^n - 2n\gamma^{n-1}, (n+1)\gamma^n \right\} = (2n+1)\gamma^n - 2n\gamma^{n-1},$$

ya que, $(2n+1)\gamma^n - 2n\gamma^{n-1} \geq (n+1)\gamma^n$ si y solo si $n\gamma^n \geq 2n\gamma^{n-1}$, si y solo si $\gamma^n \geq 2\gamma^{n-1}$, lo cual sucede si y solo si $\gamma \geq 2$. Por lo tanto

$$\|B^n f\|_{\mathcal{L}} \leq \max \left\{ (2n+1)\gamma^n - 2n\gamma^{n-1}, (n+1)\gamma^n \right\}. \quad \square$$

Teorema 3.17. *Sea T un árbol homogéneo de orden γ , y sea B el operador de desplazamiento hacia atrás definido en \mathcal{L}_* o en \mathcal{L}_{0*} , entonces*

$$\|B^n\| = \begin{cases} (2n+1)\gamma^n - 2n\gamma^{n-1}, & \text{si } \gamma \geq 2 \\ (n+1), & \text{si } \gamma = 1. \end{cases}$$

Demostración. Sean $u \in \text{Chi}(o)$ fijo, $n \in \mathbb{N}$, y sea $f_{u,n}$ una función definida como:

$$f_{u,n}(v) = \begin{cases} 1, & \text{si } v = o \\ |v| + 1, & \text{si } v \in S_u, |v| \leq n+1 \\ (2n+3) - |v|, & \text{si } v \in S_u, n+2 \leq |v| < 2n+3 \\ -|v| + 1, & \text{si } v \notin S_u, |v| \leq n+1, v \neq o \\ |v| - (2n+1), & \text{si } v \notin S_u, n+2 \leq |v| < 2n+1 \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

La figura 2.3 muestra algunos valores que toma la función $f_{u,n}$ en un caso concreto.

Claramente $f_{u,n} \in \mathcal{L}_0$, pues $Df_{u,n}(v) = 0$, siempre que $|v| > 2n+3$.

Por otra parte, notemos que $f_{u,n}$ manda a γ^{n-1} vértices del conjunto $\text{Chi}^n(o)$ a $n+1$, y manda al resto de los vértices a $1-n$, por lo tanto si se evalúa $B^n f_{u,n}$ en la raíz se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} |B^n f_{u,n}(o)| &= |\gamma^{n-1}(n+1) - (\gamma^n - \gamma^{n-1})(1-n)| \\ &= |\gamma^{n-1}(n+1) + (\gamma^n - \gamma^{n-1})(n-1)| = 2\gamma^{n-1} + (n-1)\gamma^n. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ahora calculemos $DB^n f_{u,n}$. Sea $v \in T_*$, y consideremos los siguientes casos:

- Supongamos que $v = u$. Notemos que si $w \in \text{Chi}^n(u)$, entonces $f_{u,n}(w) = n+2$, además observemos que $f_{u,n}(w)$ manda a γ^{n-1} vértices del conjunto $\text{Chi}^n(u^-)$ a $n+1$, y al resto de los vértices les asigna el valor $1-n$; por lo tanto

$$\begin{aligned} DB^n f_{u,n}(v) &= \left| \sum_{w \in \text{Chi}^n(v)} f_{u,n}(w) - \sum_{s \in \text{Chi}^n(v^-)} f_{u,n}(s) \right| \\ &= |\gamma^n(n+2) - \gamma^{n-1}(n+1) - (\gamma^n - \gamma^{n-1})(1-n)| \\ &= |\gamma^n(n+2) - \gamma^{n-1}(n+1) + (\gamma^n - \gamma^{n-1})(n-1)| = (2n+1)\gamma^n - 2n\gamma^{n-1}. \end{aligned}$$

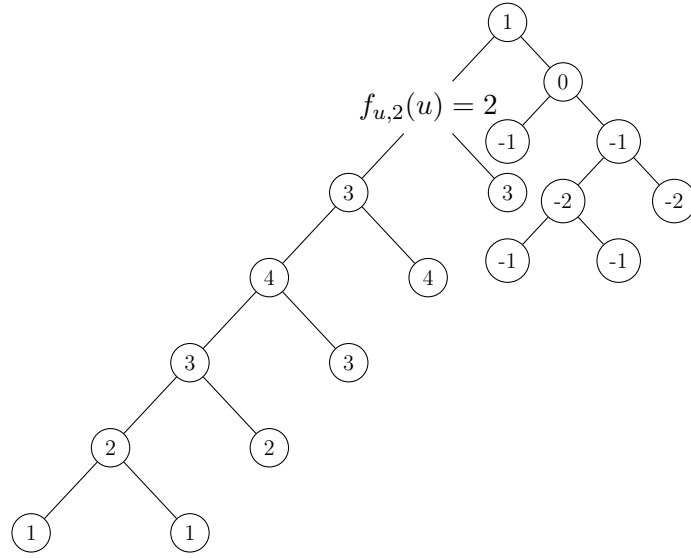


Figura 3.4: $f_{u,2}(v)$ cuando T es un árbol homogéneo de orden 2.

- Sea $v \in S_u$ tal que $|v| = 2$. Se observa que los vértices $w \in \text{Chi}^n(v)$ y los vértices en $s \in \text{Chi}^n(v^-)$ satisfacen la condición $|w| = n + 2$ y $|s| = n + 1$ respectivamente; por lo tanto

$$\begin{aligned} DB^n f_{u,n}(v) &= \left| \sum_{w \in \text{Chi}^n(v)} f_{u,n}(w) - \sum_{s \in \text{Chi}^n(v^-)} f_{u,n}(s) \right| \\ &= |((2n + 3) - (n + 2))\gamma^n - (n + 2)\gamma^n| = \gamma^n. \end{aligned}$$

- Sea $v \in S_u$ tal que $2 < |v| < n + 3$. Obsérvese que los vértices w en $\text{Chi}^n(v)$ y $\text{Chi}^n(v^-)$ satisfacen que $n + 2 \leq |w| < 2n + 3$, entonces

$$\begin{aligned} DB^n f_{u,n}(v) &= \left| \sum_{w \in \text{Chi}^n(v)} f_{u,n}(w) - \sum_{s \in \text{Chi}^n(v^-)} f_{u,n}(s) \right| \\ &= |((2n + 3) - (|v| + n))\gamma^n - ((2n + 3) - (|v^-| + n))\gamma^n| = \gamma^n. \end{aligned}$$

- Sea $v \in S_u$ tal que $|v| = n + 3$, entonces la longitud de los n -hijos de v^- es $2n + 2$; por lo tanto

$$\begin{aligned} DB^n f_{u,n}(v) &= \left| \sum_{w \in \text{Chi}^n(v)} f_{u,n}(w) - \sum_{s \in \text{Chi}^n(v^-)} f_{u,n}(s) \right| \\ &= |0 \cdot \gamma^n - ((2n + 3) - (2n + 2))\gamma^n| \\ &= \gamma^n. \end{aligned}$$

- Sea $v \in S_u$ tal que $|v| > n + 3$. Como la longitud de los vértices en $\text{Chi}^n(v)$ y $\text{Chi}^n(v^-)$ siempre es mayor que $2n + 3$, necesariamente $DB^n f_{u,n}(v) = 0$.

- Si $v \notin S_u$ tal que $|v| = 1$, entonces la longitud de los vértices en $\text{Chi}^n(v)$ y $\text{Chi}^n(v^-)$ es $n + 1$ y n respectivamente, luego

$$\begin{aligned} DB^n f_{u,n}(v) &= \left| \sum_{w \in \text{Chi}^n(v)} f_{u,n}(w) - \sum_{s \in \text{Chi}^n(v^-)} f_{u,n}(s) \right| \\ &= |(-(n+1) + 1)\gamma^n - (-n + 1)\gamma^n| = \gamma^n \end{aligned}$$

- Si $v \notin S_u$ tal que $|v| = 2$, entonces la longitud de los vértices en $\text{Chi}^n(v)$ y $\text{Chi}^n(v^-)$ es $n + 1$ y n respectivamente, luego

$$\begin{aligned} DB^n f_{u,n}(v) &= \left| \sum_{w \in \text{Chi}^n(v)} f_{u,n}(w) - \sum_{s \in \text{Chi}^n(v^-)} f_{u,n}(s) \right| \\ &= |(n+2 - (2n+1))\gamma^n - (-(n+1) + 1)\gamma^n| = \gamma^n. \end{aligned}$$

- Sea $v \notin S_u$ tal que $2 < |v| < n+1$. Notemos que los vértices $w \in \text{Chi}^n(v)$ satisfacen, $n+2 < |w| < 2n+1$ y los vértices $s \in \text{Chi}^n(v^-)$ satisfacen que $n+2 \leq |s| < 2n+1$; por lo tanto

$$\begin{aligned} DB^n f_{u,n}(v) &= \left| \sum_{w \in \text{Chi}^n(v)} f_{u,n}(w) - \sum_{s \in \text{Chi}^n(v^-)} f_{u,n}(s) \right| \\ &= (|v| - (2n+1))\gamma^n - (|v^-| - (2n+1))\gamma^n = \gamma^n. \end{aligned}$$

- Si $v \notin S_u$ tal que $|v| = n+1$, entonces la longitud de los vértices en $\text{Chi}^n(v)$ y $\text{Chi}^n(v^-)$ es $2n+1$ y $2n$ respectivamente, luego

$$\begin{aligned} DB f_{u,n}(v) &= \left| \sum_{w \in \text{Chi}(v)} f_{u,n}(w) - \sum_{s \in \text{Chi}(v^-)} f_{u,n}(s) \right| \\ &= |0 \cdot \gamma^n - (|v^-| - (2n-1))\gamma^n| \\ &= |(2n - (2n+1))\gamma^n| = \gamma^n. \end{aligned}$$

- Sea $v \notin S_u$ tal que $|v| > n+1$. Como la longitud de los vértices en $\text{Chi}^n(v)$ y $\text{Chi}^n(v^-)$ siempre es mayor que $2n+1$, entonces $DB^n f_{u,n}(v) = 0$.

Combinando los casos anteriores se concluye que $\|DB^n f_{u,n}\|_\infty = (2n+1)\gamma^n - 2n\gamma^{n-1}$. Notemos que para concluir nuestro cálculo de $\|B^n f\|_{\mathcal{L}}$ solo resta encontrar para que valores de γ se satisface $(n-1)\gamma^{n-1} + 2\gamma^{n-1} \leq (2n+1)\gamma^n - 2n\gamma^{n-1}$. Se observa que la desigualdad es valida si y solo si

$$2(n+1)\gamma^{n-1} \leq (n+2)\gamma^n, \quad (3.24)$$

lo cual es cierto si y solo si $2(n+1) \leq (n+2)\gamma$, es decir, $\gamma \geq 2 > 2\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ mostrando que la desigualdad debe ser cierta para $\gamma \geq 2$; obteniendo así que

$$\|B^n f_{u,n}\|_{\mathcal{L}} = \begin{cases} (2n+1)\gamma^n - 2n\gamma^{n-1}, & \text{si } \gamma \geq 2 \\ n+1, & \text{si } \gamma = 1. \end{cases}$$

Por otro lado, se sabe que

$$\|B^n f_{u,n}\|_{\mathcal{L}_*} \leq \sup_{\|g\|_{\mathcal{L}_*}=1} \|B^n g\|_{\mathcal{L}_*} = \|B^n\|,$$

por el lema 3.16, se tiene que $\|B^n f_{u,n}\|_{\mathcal{L}_*} \leq (2n+1)\gamma^n - 2n\gamma^{n-1}$, si $\gamma \geq 2$ y $\|B^n f_{u,n}\|_{\mathcal{L}_*} \leq n+1$, si $\gamma = 1$; por lo tanto

$$\|B^n\| = \begin{cases} (2n+1)\gamma^n - 2n\gamma^{n-1}, & \text{si } \gamma \geq 2 \\ (n+1), & \text{si } \gamma = 1. \end{cases} \quad \square$$

Teorema 3.18. *Sea T un árbol homogéneo de orden γ , y sea B el operador de desplazamiento hacia atrás definido en \mathcal{L}_* o en \mathcal{L}_{0^*} , entonces:*

$$\sigma(B) = \sigma_{ap}(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \gamma\}.$$

Demostración. De acuerdo con el teorema del radio espectral, basta calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \|B^n\|_{\mathcal{L}_*}^{\frac{1}{n}}$ para encontrar el radio del disco más pequeño que contiene al espectro del operador de desplazamiento hacia atrás. Si $\gamma = 1$, entonces el radio espectral del operador B está dado por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1.$$

Si $\gamma \geq 2$, entonces el radio espectral del operador B está dado por

$$r(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\gamma^{n-1}((2n+1)\gamma - 2n)]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^{\frac{n-1}{n}} ((2n+1)\gamma - 2n)^{\frac{1}{n}}.$$

Notemos que $[(2n+1)\gamma - 2n]^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{\ln((2n+1)\gamma - 2n)}{n}\right)$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(2n+1)\gamma - 2n]^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln((2n+1)\gamma - 2n)}{n}\right). \quad (3.25)$$

Por otra parte, el teorema de L' Hôpital implica que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln((2n+1)\gamma - 2n)}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2(\gamma-1)}{(2n+1)\gamma - 2n}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Combinando lo anterior y la ecuación (3.27) se obtiene que,

$$r(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^{\frac{n-1}{n}} = \gamma.$$

Por lo tanto, el espectro del operador B definido en \mathcal{L} o en \mathcal{L}_0 es un subconjunto del disco $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \gamma\}$.

Por otro lado, se observa que la proposición 3.15 implica que el espectro de B definido en \mathcal{L}_* o en \mathcal{L}_{0^*} satisface que

$$\begin{aligned} \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \gamma\} &\subseteq \sigma(B) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \gamma\} \text{ y} \\ \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \gamma\} \cup \{\gamma\} &\subseteq \sigma(B) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \gamma\}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

respectivamente. Por lo tanto, si se toma cerradura en (3.26) se obtiene que el espectro del operador de desplazamiento hacia atrás definido en \mathcal{L} o en \mathcal{L}_0 es el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \gamma\}$.

Por otra parte, la proposición 1.11 implica que $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \gamma\} \subseteq \sigma_{ap}(B)$ y como $\sigma_p(B) \subseteq \sigma_{ap}(B)$ necesariamente $\sigma_{ap}(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \gamma\}$. \square

Corolario 3.19. *Sea T un árbol homogéneo de orden γ , y sea B el operador desplazamiento hacia atrás definido en \mathcal{L}_* , entonces $\sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \gamma\}$.*

Otra consecuencia del teorema 3.18 es la siguiente: si T es un árbol homogéneo, y B está definido en el espacio pequeño de Lipschitz, entonces $\sigma_p(B) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \gamma\}$. Ahora se calcula $\sigma_p(B)$ cuando B es un operador en \mathcal{L}_{0^*} . Primero se hace una observación que será útil.

Observación 3.20. *Sea f un eigenvector de B . Notemos que, si $f(o) = 0$, entonces debe existir al menos un $w \in T$ tal que $f(w) = c$ con $c \neq 0$. Si $f(w) = c \neq 0$, entonces $\frac{1}{c}f$ también es un eigenvector con la propiedad $f(w) = 1$.*

El siguiente resultado muestra de forma explícita los elementos que componen el espectro puntual del operador B en \mathcal{L}_{0^*} .

Teorema 3.21. *Sea T un árbol homogéneo de orden γ , y sea B el operador de desplazamiento hacia atrás definido en \mathcal{L}_{0^*} , entonces $\sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \gamma\} \cup \{\gamma\}$.*

Demostración. Recordemos que en la proposición 3.15 se muestra que $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \gamma\} \cup \{\gamma\} \subseteq \sigma_p(B)$. Además, notemos que el teorema 3.18 implica que $\sigma_p(B) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \gamma\}$; por lo tanto, para probar la otra contención basta verificar que el único número λ de módulo γ que puede ser eigenvalor de B es γ . Antes de probar el teorema demostremos lo siguiente:

Afirmación. *Si $f \in \mathcal{L}_0$ es un eigenvector de B , entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $v \in \text{Chi}^n(w)$, tal que*

$$|f(v)| \geq \left| \frac{\lambda}{\gamma} \right|^n. \quad (3.27)$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}_0$ un eigenvector de B . Supongamos que la afirmación fuese falsa, es decir, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que para todo $v \in \text{Chi}^m(w)$, se tiene que $|f(v)| < \left| \frac{\lambda}{\gamma} \right|^m$. Como f es eigenvector de B sabemos que se satisface la ecuación

$$\sum_{v \in \text{Chi}^m(w)} f(v) = \lambda^m f(w);$$

por lo tanto

$$|\lambda^m| \leq \sum_{v \in \text{Chi}^m(w)} |f(v)| < \gamma^m \left| \frac{\lambda}{\gamma} \right|^m = |\lambda^m|,$$

lo cual es una contradicción. Esto muestra que la afirmación debe ser cierta. ■

Ahora supongamos que $\lambda \neq \gamma$, con $|\lambda| = \gamma$ es un eigenvalor de B , esto implica que existe un eigenvector $f \in \mathcal{L}_0$ tal que la ecuación $Bf = \lambda f$ se satisface. Sea w un vértice tal que $f(w) \neq 0$, el cual de acuerdo con la observación 3.20 podemos suponer que $f(w) = 1$. Como f es una función en \mathcal{L}_0 , entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $|u| > N$ se cumple que $|f(u) - f(u^-)| < \frac{|\lambda - \gamma|}{2\gamma}$. Por un lado, notemos que la afirmación anterior garantiza que existe $u^* \in S_w$, con $u^* \in \text{Chi}^N(w)$, tal que $|f(u^*)| \geq \left(\frac{|\lambda|}{\gamma} \right)^N = 1$. Por otro lado,

$$\sum_{v \in \text{Chi}(u^*)} (f(v) - f(u^*)) = (\lambda - \gamma)f(u^*),$$

y como $|u^*| > N$, se sigue que

$$\frac{\gamma|\lambda - \gamma|}{2\gamma} > \sum_{v \in \text{Chi}(u^*)} |f(v) - f(u^*)| \geq |\lambda - \gamma| |f(u^*)|,$$

de donde $|f(u^*)| < \frac{1}{2}$, lo cual es una contradicción. Esto muestra que γ es el único escalar de módulo γ que puede ser un eigenvalor de B . Por lo tanto

$$\sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \gamma\} \cup \{\gamma\}. \quad \square$$

Observación 3.22. *Todos los resultados obtenidos en esta sección para el espectro de B también son válidos para \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 , pues las normas $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_*}$ son equivalentes.*

El siguiente corolario muestra que si T es un árbol homogéneo de orden γ , entonces el operador de desplazamiento hacia atrás B definido en \mathcal{L} o en \mathcal{L}_0 no es compacto, y por lo tanto tampoco de rango finito.

Corolario 3.23. *Si T es un árbol homogéneo de orden γ , entonces el operador de desplazamiento hacia atrás B no es compacto.*

Demostración. Notemos que los teoremas 3.18 y 1.16 implican directamente que B no es compacto, pues su espectro no corresponde al de un operador compacto. \square

Capítulo 4

Hiperciclicidad de los operadores de desplazamiento en \mathcal{L}_0

En este capítulo se estudiará hiperciclicidad de los operadores de desplazamiento hacia adelante y hacia atrás en el espacio pequeño de Lipschitz \mathcal{L}_0 . El siguiente resultado es demostrado por Colonna y Martínez Avendaño en [9].

Proposición 4.1. *El espacio de Lipschitz \mathcal{L} no es separable.*

Se observa que el resultado anterior establece que no es posible estudiar hiperciclicidad de un operador lineal definido en \mathcal{L} , pues el estudio de hiperciclicidad exige que el espacio donde se trabaje sea separable.

El siguiente resultado establece que el operador de desplazamiento hacia adelante no puede ser hipercíclico.

Proposición 4.2. *Sea T un árbol infinito, y sea S el operador desplazamiento hacia adelante definido en \mathcal{L}_0 , entonces S no es hipercíclico.*

Demostración. Como $Sf(o) = 0$ para toda $f \in \mathcal{L}$, se sigue que $S^n f(o) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea χ_o la función característica de la raíz y supongamos que S es hipercíclico, entonces existe una sucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\|S^{n_k} f - \chi_o\|_{\mathcal{L}} \longrightarrow 0,$$

la ecuación anterior y el lema 1.34 implican que

$$|S^{n_k} f(v) - \chi_o(v)| \longrightarrow 0, \text{ para todo } v \in T,$$

en particular si evaluamos $v = o$, se tiene que:

$$|S^{n_k} f(o) - \chi_o(o)| = |0 - 1| = 1,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, S no puede ser hipercíclico. □

4.1. Hiperciclicidad del operador de desplazamiento hacia atrás en \mathcal{L}_0

En esta sección se estudiarán las condiciones bajo las cuales el operador desplazamiento hacia atrás es hipercíclico. A continuación se prueban algunos lemas que serán de mucha utilidad para caracterizar la hiperciclicidad de B en el espacio pequeño de Lipschitz.

Lema 4.3. *El conjunto de funciones con soporte finito,*

$$X_0 = \{f \in \mathcal{L}_0 : f(v) \neq 0 \text{ para un número finito de vértices}\}$$

es denso en \mathcal{L}_0 .

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $f \in \mathcal{L}_0$. Demostraremos que $\overline{X_0} = \mathcal{L}_0$, es decir, que existe una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}_0$ tal que $f_n \rightarrow f$ en norma \mathcal{L} . Notemos que al ser f una función en el espacio pequeño de Lipschitz, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ entonces, $|f(v) - f(v^-)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Por otra parte, como para cada nivel del árbol hay una cantidad finita de vértices, entonces para cada $v \in T$ con $|v| = n$ existe $N_2(n) \in \mathbb{N}$ tal que, $\frac{|f(v)|}{N_2(n)} < \frac{\epsilon}{2}$. Dado $n \in \mathbb{N}$ y $v \in T_*$ tal que $|v| > n$; definamos al vértice $w_{v,n}^*$ como el ancestro de v de longitud n , y sea

$$f_n(v) = \begin{cases} f(v), & \text{si } |v| \leq n \\ \left(\frac{n+N_2(n)-|v|}{N_2(n)}\right) f(w_{v,n}^*), & \text{si } n+1 \leq |v| \leq n+N_2(n) \\ 0, & \text{si } |v| \geq n+N_2(n), \end{cases}$$

una sucesión de funciones en \mathcal{L}_0 . Claramente $f_n \in X_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que el conjunto de vértices donde cada f_n es distinta de cero es finito. Como $|f_n(o) - f(o)| = 0$ para todo n , basta con demostrar que $\|D(f_n - f)\|_\infty \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ para concluir el resultado.

Sea n un entero positivo tal que $n \geq N_1$, demostremos que $D(f - f_n)(v) = |(f(v) - f_n(v)) - (f(v^-) - f_n(v^-))| < \epsilon$ para todo $v \in T_*$. En efecto,

- Si $|v| \leq n$, entonces $D(f - f_n)(v) = 0$, ya que $f_n(v) = f(v)$ y $f_n(v^-) = f(v^-)$.
- Si $|v| = n+1$, entonces

$$\begin{aligned} D(f - f_n)(v) &= \left| (f(v) - f(v^-)) - \left(\frac{n+N_2(n)-|v|}{N_2(n)}\right) f(w_{v,n}^*) + f_n(v^-) \right| \\ &= \left| f(v) + \frac{f(w_{v,n}^*)}{N_2(n)} - f(w_{v,n}^*) \right| \\ &\leq |f(v) - f(v^-)| + \frac{|f(w_{v,n}^*)|}{N_2(n)} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

- Supongamos que $|v| = k$, con $n+1 \leq k \leq n+N_2(n)$, entonces $D(f - f_n)(v)$ es igual a

$$\left| (f(v) - f(v^-)) - \left(\frac{n+N_2(n)-k}{N_2(n)}\right) f(w_{v,n}^*) + \left(\frac{n+N_2(n)-(k-1)}{N_2(n)}\right) f(w_{v^-,n}^*) \right|.$$

4.1. *Hiperciclicidad del operador de desplazamiento hacia atrás en \mathcal{L}_0*

Notemos que $f(w_{v,n}^*) = f(w_{v^-,n}^*)$, pues $w_{v,n}^* = w_{v^-,n}^*$, por lo tanto

$$D(f - f_n)(v) = \left| f(v) - f(v^-) + \frac{f(w_{v,n}^*)}{N_2(n)} \right| \leq |f(v) - f(v^-)| + \frac{|f(w_{v,n}^*)|}{N_2(n)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

- Supongamos que $|v| > n + N_2(n)$, entonces:

$$D(f - f_n)(v) = |f(v) - f(v^-)| < \epsilon.$$

De los casos se sigue que, si $n \geq N_1$, entonces $\sup_{v \in T_*} D(f - f_n)(v) = \|D(f - f_n)\|_\infty \leq \epsilon$, es decir, $\|D(f_n - f)\|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Por lo tanto X_0 es denso en \mathcal{L}_0 . \square

Para continuar con el desarrollo del capítulo, es de suma importancia dar a conocer la siguiente definición.

Definición 4.4 (Cabo suelto). *Sea T un árbol infinito. Se dice que T posee cabos sueltos si existe al menos un vértice $u \in T$, tal que para todo $v \in S_u$ se cumple que $\gamma(v) = 1$.*

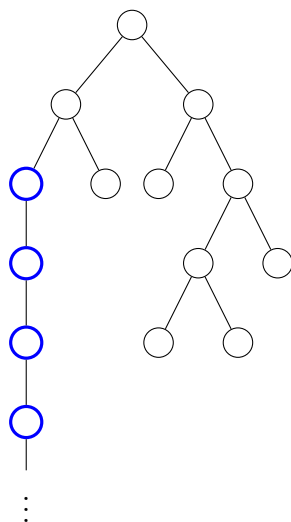


Figura 4.1: Cabo Suelto.

Dado $n \in \mathbb{N}$, a los vértices en $\{v \in T : v \in \text{Chi}^n(o)\}$ les llamaremos los vértices en el nivel n y denotaremos por $c(n)$ a la cantidad de vértices en el nivel n . Denotaremos por V^n al el conjunto de vértices $v \in T$ tales que v tiene al menos n ancestros. Ahora se define la función $\beta : T \rightarrow \mathbb{R}$, como:

$$\beta(v, n) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma(v^{(n)}, n)}, & \text{si } v \in V^n \\ 0, & \text{si } v \notin V^n, \end{cases}$$

donde $v^{(n)}$ denota al n -ancestro de v y $\gamma(v^{(n)}, n) = |\text{Chi}^n(v^{(n)})|$.

Lema 4.5. *Sea T un árbol homogéneo por sectores que no posee cabos sueltos, entonces*

$$\sup_{v \in T} \beta(v, n) \rightarrow 0, \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Demostración. Notemos que como T es homogéneo por sectores, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $|v_j| \geq M$ y $u \in S_{v_j}$, entonces:

$$\gamma(u, n) = \gamma(v_j, n) = \mu_j,$$

donde v_j , con $j \in I = \{1, 2, \dots, c(M)\}$ denota a cada uno de los vértices de longitud M , y μ_j denota el orden de homogeneidad que tiene cada sector definido por el vértice v_j .

Por otra parte, sean $n > 2M$, $v \in T$, y sea $\mu = \min\{\mu_j : j \in I\}$; como T no tiene cabos sueltos, entonces $\mu > 1$. Ahora consideremos los siguientes casos, los cuales serán de utilidad para probar el resultado.

- Supongamos que $|v| < n$ entonces, $\beta(v, n) = 0$, pues $v \notin V^n$ y por lo tanto la función es cero por definición.
- Si $|v| \geq M + n$ entonces, $|v^{(n)}| \geq M$, por lo tanto, $\gamma(v^{(n)}, n) = \mu_j^n$ para algún $j \in I$. De lo anterior se sigue que:

$$\beta(v, n) = \frac{1}{\gamma(v^{(n)}, n)} = \frac{1}{\mu_j^n}$$

y como $\mu^n \leq \mu_j^n$ para todo $j \in I$, entonces:

$$\beta(v, n) \leq \frac{1}{\mu^n},$$

de donde,

$$\sup_{|v| \geq M+n} \beta(v, n) \leq \frac{1}{\mu^n}.$$

- Supongamos que $n \leq |v| \leq M + n$ y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $|v| = k$. Observemos que los $(k - M)$ -descendientes de $v^{(k-M)}$ son algunos de los n -descendientes de $v^{(n)}$ (pues $v^{(k-M)}$ es un descendiente de $v^{(n)}$). Por lo tanto, se debe cumplir que:

$$\gamma(v^{(n)}, n) \geq \gamma(v^{(k-M)}, k - M). \quad (4.1)$$

De igual manera, se observa que como $n \leq k \leq M + n$, entonces $M \leq k - M \leq n$, por lo tanto $\gamma(v^{(k-M)}, k - M) = \mu_i^{k-M}$ para algún $i \in I$. Combinando lo anterior y la desigualdad (4.1) se sigue que:

$$\gamma(v^{(n)}, n) \geq \mu_i^{k-M}.$$

Por lo tanto,

$$\beta(v, n) = \frac{1}{\gamma(v^{(n)}, n)} \leq \frac{1}{\mu_i^{k-M}} \leq \frac{1}{\mu^{k-M}},$$

de donde,

$$\sup_{|v|=k} \beta(v, n) \leq \frac{1}{\mu^{k-M}}.$$

Así,

$$\sup_{n \leq |v| \leq M+n} \beta(v, n) \leq \frac{1}{\mu^{n-M}}.$$

Combinando lo obtenido en los tres casos anteriores se tiene que:

$$\sup_{v \in T} \beta(v, n) \leq \max \left\{ \frac{1}{\mu^{n-M}}, \frac{1}{\mu^n} \right\} = \frac{1}{\mu^{n-M}},$$

y como $\mu > 1$, necesariamente $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{v \in T} \beta(v, n) = 0$, es decir, $\beta(v, n)$ converge a cero uniformemente. \square

El siguiente resultado establece una condición suficiente para que el operador de desplazamiento hacia atrás sea hipercíclico en \mathcal{L}_0 con norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ ó $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^*}$.

Teorema 4.6. *Supongamos B es un operador acotado en \mathcal{L}_0 . Si T es un árbol que no posee cabos sueltos, entonces B es hipercíclico.*

Demostración. Para mostrar que B es hipercíclico, usaremos el criterio de Kitai–Gethner–Shapiro para hiperpicicidad de operadores lineales (véase el teorema 1.22 para consultar este criterio).

Sean $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $X_0 = \{f \in \mathcal{L}_0 \mid f \text{ es de soporte finito}\}$ (el cual es denso en \mathcal{L}_0), y sea $R_k : \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0$ una sucesión de funciones definida por:

$$R_k f(v) = \begin{cases} \beta(v, k) f(v^{(k)}), & \text{si } v \in V^k \\ 0, & \text{si } v \notin V^k. \end{cases}$$

Demostremos que se satisfacen las condiciones del criterio de hiperpicicidad.

1. Sea $f \in X_0$ entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(v)| = 0$ siempre que $|v| \geq N$. Sea $v \in T_*$ entonces,

$$|DB^k f(v)| = \left| \sum_{u \in \text{Chi}^k(v)} f(u) - \sum_{w \in \text{Chi}^k(v^-)} f(w) \right| = 0, \text{ siempre que } k > N, \quad (4.2)$$

si se toma supremos sobre el conjunto T_* en la ecuación (4.2), se obtiene:

$$\|DB^k f(v)\|_{\infty} = \sup_{v \in T_*} \left| \sum_{u \in \text{Chi}^k(v)} f(u) - \sum_{w \in \text{Chi}^k(v^-)} f(w) \right| = 0, \text{ siempre que } k > N,$$

además, $|B^k f(o)| = 0$ para todo $k \geq N$, por lo tanto, $\|B^k f\|_{\mathcal{L}} = 0$, para $k > N$. En particular $B^k f$ converge a 0 en norma \mathcal{L} , cuando $k \rightarrow +\infty$.

2. Sea $v \in T_*$ y $f \in X_0$. Notemos que si $|v| < k$, entonces $DR_k f(v) = 0$. Supongamos que $|v| \geq k$, entonces

$$\begin{aligned} D(R_k f)(v) &= |R_k f(v) - R_k f(v^-)| \\ &= \left| \beta(v, k) f(v^{(k)}) - \beta(v^-, k) f(v^{(k+1)}) \right| \\ &\leq \beta(v, k) |f(v^{(k)})| + \beta(v^-, k) |f(v^{(k+1)})|. \end{aligned}$$

Como f es de soporte finito entonces $f \in L^{\infty}$, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(v)| \leq M$ para todo $v \in T$, luego:

$$D(R_k f)(v) \leq M (\beta(v, k) + \beta(v^-, k)). \quad (4.3)$$

Por lo tanto, si se toma el supremo sobre todos los vértices en T_* en la desigualdad (4.3), se sigue que

$$\sup_{v \in T_*} D(R_k f)(v) = \|D(R_k f)\|_\infty \leq 2M \sup_{v \in T_*} \beta(v, k).$$

Por otra parte, como el árbol T no posee cabos sueltos, el lema 4.5 implica que $\|DR_k f\|_\infty \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, y como $|R_k f(o)| = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, necesariamente $R_k f \rightarrow 0$ en norma \mathcal{L} , cuando $k \rightarrow \infty$.

3. Sea $v \in T$ un vértice arbitrario y f una función en \mathcal{L}_0 . Entonces,

$$\begin{aligned} B^k(R_k f)(v) &= \sum_{u \in \text{Chi}^k(v)} R_k(u) \\ &= \sum_{u \in \text{Chi}^k(v)} \beta(u, k) f(u^{(k)}) \\ &= \sum_{u \in \text{Chi}^k(v)} \frac{1}{\gamma(u^{(k)}, k)} f(u^{(k)}) \\ &= \sum_{u \in \text{Chi}^k(v)} \frac{1}{\gamma(v, k)} f(v) \\ &= f(v), \end{aligned}$$

así, $B^k R_k f(v) = f(v)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de donde, $B^k R_k f = f$.

Por lo tanto, el criterio de hiperciclicidad implica que B es hipercíclico. \square

El siguiente resultado muestra que la condición de que el árbol no tenga cabos sueltos es también una condición necesaria para que B sea hipercíclico en \mathcal{L}_0 .

Teorema 4.7. *Sea T un árbol infinito y supongamos que B es un operador acotado en \mathcal{L}_0 . Si B es hipercíclico, entonces T no posee cabos sueltos.*

Demostración. Supongamos que T tiene un cabo suelto, es decir, existe un vértice $v^* \in T$ tal que:

$$\gamma(w) = 1, \quad \text{para todo } w \in S_{v^*}.$$

Notemos que lo anterior implica que para cada vértice $v \in S_v^*$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple que v tiene exactamente un n -descendiente; dado $v \in S_{v^*}$ denotaremos por $v_{(n)}$ al n -descendiente que tiene el vértice v . Sea $u \in S_{v^*}$ con $u \neq v^*$ y consideremos la función:

$$\chi_u(v) = \begin{cases} 1, & \text{si } v = u \\ 0, & \text{si } v \neq u. \end{cases}$$

Sea $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \frac{1}{2}$. Como B es hipercíclico, el teorema de transitividad de Birkhoff implica que el conjunto de vectores hipercíclicos de B es un conjunto denso en \mathcal{L}_0 y de clase G_δ ; por lo tanto, es posible elegir un vector hipercíclico $f \in \mathcal{L}_0$ tal que $\|f\|_{\mathcal{L}} < \epsilon$.

De igual manera, al ser B un operador hipercíclico se tiene que existe una sucesión creciente $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, tal que

$$\|B^{n_k} f - \chi_u\|_{\mathcal{L}} < \epsilon. \quad (4.4)$$

Notemos que para cualquier vértice $v \in T$ se satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|B^{n_k} f - \chi_u\|_{\mathcal{L}} &\geq \left| (B^{n_k} f - \chi_u)(v) - (B^{n_k} - \chi_u)(v^-) \right| \\ &= \left| \sum_{s \in \text{Chi}^{n_k}(v)} f(s) - \chi_u(v) - \sum_{r \in \text{Chi}^{n_k}(v^-)} f(r) + \chi_u(v^-) \right|. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Si evaluamos $v = u$, la desigualdad (4.5) implica que:

$$\begin{aligned} \|B^{n_k} f - \chi_u\|_{\mathcal{L}} &> \left| \sum_{s \in \text{Chi}^{n_k}(u)} f(s) - \sum_{r \in \text{Chi}^{n_k}(u^-)} f(r) - \chi_u(u) + \chi_u(u^-) \right| \\ &= \left| f(u_{(n_k)}) - f(u_{(n_k-1)}) - 1 \right| \\ &\geq \left| 1 - \left| f(u_{(n_k)}) - f(u_{(n_k-1)}) \right| \right| \\ &\geq 1 - \left| f(u_{(n_k)}) - f(u_{(n_k-1)}) \right|, \end{aligned}$$

además, por la desigualdad (4.4) y la expresión anterior se sigue que:

$$1 - \epsilon < \left| f(u_{(n_k)}) - f(u_{(n_k-1)}) \right|. \quad (4.6)$$

Por otra parte, como $\|f\|_{\mathcal{L}} < \epsilon$, necesariamente se satisface que

$$\left| f(u_{(n_k)}) - f(u_{(n_k-1)}) \right| < \epsilon.$$

Combinando lo obtenido en la desigualdad anterior y en (4.6), se sigue que $1 < 2\epsilon$; lo cual contradice la elección de ϵ . Esto muestra que si B es hiperpicíclico, entonces T no posee cabos sueltos. \square

Combinando lo obtenido en los teoremas 4.6 y 4.7, se obtiene la siguiente caracterización para la hiperpicicidad del operador de desplazamiento hacia atrás.

Corolario 4.8. *Sea T un árbol infinito, y supongamos que B es un operador acotado en \mathcal{L}_0 . Entonces el operador de desplazamiento hacia atrás es hiperpicíclico si y solo si T no posee cabos sueltos.*

Es interesante notar que la condición combinatoria de no poseer cabos sueltos también aparece en [14] como una caracterización de la hiperpicicidad del operador de desplazamiento hacia atrás B definido en el espacio L^p de un árbol infinito; sin embargo, dicha caracterización fue obtenida por Martínez Avendaño mientras estudiaba la hiperpicicidad de una clase de operadores de desplazamiento hacia atrás más generales conocida como los operadores de desplazamiento hacia atrás con pesos. Motivados por lo anterior, en el siguiente capítulo comenzaremos a estudiar condiciones para que el operador de desplazamiento hacia atrás con pesos sea hiperpicíclico en \mathcal{L}_0 .

Capítulo 5

Operadores de desplazamiento hacia atrás con pesos

En este capítulo se quiere estudiar el acotamiento e hiperciclicidad de los operadores de desplazamiento hacia atrás con pesos; para ello, hemos dividido el capítulo en dos secciones, una en donde se estudian condiciones para que estos operadores sean acotados y otra en el que se estudian condiciones sobre los pesos para que el operador de desplazamiento hacia atrás con pesos sea hipercíclico. Ahora daremos la definición de operador de desplazamiento hacia atrás con pesos.

Definición 5.1. *Sea T un árbol infinito localmente finito, y sea $\{\lambda_v\}_{v \in T_*}$ una sucesión de números positivos indexada sobre el conjunto T_* . Se define el operador de desplazamiento hacia atrás con pesos $B_\lambda : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ como:*

$$B_\lambda f(v) = \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u f(u). \quad (5.1)$$

Observamos que, al igual que en el capítulo 3, el operador de desplazamiento hacia atrás con pesos B_λ es lineal.

5.1. Acotamiento del operador de desplazamiento hacia atrás con pesos en \mathcal{L} y \mathcal{L}_0

En esta sección se demuestra que, bajo ciertas condiciones, el operador de desplazamiento hacia atrás con pesos B_λ es acotado en \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 ; pero primero, se introducirá un poco de notación. Sea $\{\lambda_v\}_{v \in T_*}$ una sucesión de números positivos, denotaremos por Θ_λ y M_λ a los números:

$$(a) \quad \Theta_\lambda = \sup_{v \in T_*} |v| \left| \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u - \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w \right|.$$

$$(b) \quad M_\lambda = \sup_{v \in T} \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u.$$

Teorema 5.2. Sea $\{\lambda_v\}_{v \in T}$ una sucesión de números positivos, y sea B_λ el operador de desplazamiento hacia atrás con pesos. Si $\Theta_\lambda < \infty$ y $M_\lambda < \infty$, entonces B_λ es acotado en \mathcal{L}_* .

Demostración. Sea $v \in T$ y $f \in \mathcal{L}$ tal que $\|f\|_{\mathcal{L}^*} = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} D(B_\lambda f)(v) &= \left| \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u f(u) - \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w f(w) \right| \\ &= \left| \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u (f(u) - f(v)) - \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w (f(w) - f(v^-)) + \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u f(v) - \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w f(v^-) \right| \\ &\leq \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u |f(u) - f(v)| + \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w |f(w) - f(v^-)| + \left| \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u f(v) - \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w f(v^-) \right|. \end{aligned}$$

Como $|f(v) - f(v^-)| \leq \|Df\|_\infty$ para todo $v \in T_*$, entonces

$$\sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u |f(u) - f(v)| + \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w |f(w) - f(v^-)| \leq 2M_\lambda \|Df\|_\infty \leq 2M_\lambda. \quad (5.2)$$

Por otro lado, se observa que la siguiente desigualdad se satisface:

$$\left| \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u f(v) - \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w f(v^-) \right| \leq \left| \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u - \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w \right| |f(v^-)| + \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u |f(v) - f(v^-)| \quad (5.3)$$

Si combinamos lo obtenido en las ecuaciones (5.2) y (5.3), y usando el lema 1.34, se sigue que

$$\begin{aligned} D(B_\lambda f)(v) &\leq 3M_\lambda + \left| \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u - \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w \right| (|v^-| + 1) \\ &\leq 3M_\lambda + \left| \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u - \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w \right| |v| \leq 3M_\lambda + \Theta_\lambda, \end{aligned}$$

tomando el supremo sobre todos los vértices en T_* en la desigualdad anterior, se tiene que

$$\|D(B_\lambda f)\|_\infty \leq 3M_\lambda + \Theta_\lambda. \quad (5.4)$$

Por otra parte, si evaluamos B_λ en la raíz se obtiene que

$$|B_\lambda f(o)| = \left| \sum_{s \in \text{Chi}(o)} \lambda_s f(s) \right| \leq \sum_{s \in \text{Chi}(o)} \lambda_s |f(s)| \leq M_\lambda (|s| + 1) = 2M_\lambda.$$

Por lo tanto, $\|B_\lambda f\|_{\mathcal{L}} \leq 3M_\lambda + \Theta_\lambda$, es decir, B_λ es acotado en \mathcal{L} . \square

Nótese que, la equivalencia de $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_*}$ implican que B_λ también es acotado en \mathcal{L} .

Resulta que la condición del teorema 5.2 para el caso en el que los pesos son $\lambda_v = 1$ es equivalente a que T sea homogéneo por sectores, pues la proposición 3.12 garantiza que

$\Theta_1 = \sup \{|\gamma(v) - \gamma(v^-)||v| : v \in T_*\} < \infty$ si y solo si T es homogéneo por sectores. Sin embargo, no hemos podido demostrar si esta condición también es necesaria para el caso general.

El siguiente resultado establece una condición suficiente para que B_λ sea un operador acotado en \mathcal{L}_0 .

Teorema 5.3. *Sea $\{\lambda_v\}_{v \in T_*}$ una sucesión de números positivos, y sea B_λ el operador de desplazamiento hacia atrás con pesos. Si $\Theta_\lambda < \infty$ y $M_\lambda < \infty$, entonces B_λ es acotado en \mathcal{L}_{0^*} .*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}_0$ tal que $\|f\|_{\mathcal{L}_*} = 1$ y sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(v) - f(v^-)| \leq \frac{\epsilon}{6M_\lambda}$ siempre que $|v| \geq N_1$. De acuerdo con la ecuación (5.2) del teorema 5.2, se sigue que

$$\begin{aligned} DB_\lambda f(v) &\leq M_\lambda (\|Df\|_\infty + \|Df\|_\infty) + \left| \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u f(v) - \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w f(v^-) \right| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{6} + \left| \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u f(v) - \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w f(v^-) + \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w f(v) - \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w f(v) \right| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{6} + \left| \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u f(v) - \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w f(v) \right| + \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w |f(v^-) - f(v)| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{6} + \left| \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u - \sum_{w \in \text{Chi}(v^-)} \lambda_w \right| |f(v)| + \frac{\epsilon}{6}, \text{ para } |v| > N_1, \end{aligned}$$

luego,

$$DB_\lambda f(v) \leq \frac{\epsilon}{2} + \Theta_\lambda \frac{|f(v)|}{|v|}.$$

Por otro lado, notemos que al ser f una función definida en el espacio pequeño de Lipschitz, el inciso b) del lema 1.33 implica que, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, si $|v^-| \geq N_2$, entonces $\frac{|f(v)|}{|v|} < \frac{\epsilon}{2\Theta_\lambda + 1}$. Si se toma $N = \max\{N_1, N_2\}$, se sigue que

$$DB_\lambda f(v) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon\Theta_\lambda}{2\Theta_\lambda + 1} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \text{ siempre que } |v| \geq N.$$

Esto muestra que B_λ es un operador acotado en \mathcal{L}_0 . \square

Un ejemplo interesante de operador de desplazamiento hacia atrás con pesos es aquel en el que se toman los promedios, el cual se define como:

$$\bar{B}f(v) = \frac{1}{\gamma(v)} \sum_{u \in \text{Chi}(v)} f(u).$$

Para este operador se presenta el siguiente resultado.

Ejemplo 5.4. *El operador de desplazamiento hacia atrás \bar{B} siempre es acotado en \mathcal{L} y en \mathcal{L}_0 .*

Demostración. Sea T un árbol infinito y sea $\lambda_u = \frac{1}{\gamma(u^-)}$. Observemos que, $\Theta_\lambda = 0$ y $M_\lambda = 1$, pues $\sum_{u \in \text{Chi}(v)} \frac{1}{\gamma(v)} = 1$. Por lo tanto, el teorema 5.2 implica que \bar{B} es acotado. \square

5.2. Hiperciclicidad de los operadores de desplazamiento hacia atrás con pesos

En esta sección se estudiará hiperciclicidad de los operadores de desplazamiento hacia atrás con pesos. Antes de comenzar a enunciar y demostrar los resultados principales de esta sección, demostremos la siguiente afirmación.

Afirmación. Para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que,

$$B^m f(v) = \sum_{u \in \text{Chi}^m(v)} \left(\prod_{j=1}^m \lambda_{u^{(j)}} \right) f(u).$$

Demostración. Sea $\{\lambda_v\}_{v \in T_*}$ una sucesión de números positivos; si $n = 2$, entonces:

$$B^2 f(v) = B(Bf)(v) = \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u Bf(u) = \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u \sum_{s \in \text{Chi}(u)} \lambda_s f(s) = \sum_{u \in \text{Chi}^2(v)} \lambda_u \lambda_{u^-} f(u).$$

Supongamos que $B^n f(v) = \sum_{u \in \text{Chi}^n(v)} \left(\prod_{j=1}^n \lambda_{u^{(j)}} \right) f(u)$. Observemos que

$$\begin{aligned} B^{n+1} f(v) &= B(B^n f)(v) = \sum_{u \in \text{Chi}(v)} B^n f(u) = \sum_{u \in \text{Chi}(v)} \lambda_u \sum_{w \in \text{Chi}^n(v)} \left(\prod_{j=1}^n \lambda_{w^{(j)}} \right) f(w) \\ &= \sum_{u \in \text{Chi}^{n+1}(v)} \left(\prod_{j=1}^{n+1} \lambda_{u^{(j)}} \right) f(u). \end{aligned}$$

Esto muestra que $B^m f(v) = \sum_{u \in \text{Chi}^m(v)} \left(\prod_{j=1}^m \lambda_{u^{(j)}} \right) f(u)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. ■

Dada una sucesión $\{\lambda_v\}_{v \in T_*}$ de números positivos y un $n \in \mathbb{N}$, definimos la función $\rho(v, n)$ como:

$$\rho(v, n) = \begin{cases} \left[\sum_{u \in \text{Chi}^n(v^{(n)})} \left(\prod_{j=1}^n \lambda_{u^{(j)}} \right) \right]^{-1}, & \text{si } v \in V^n \\ 0, & \text{si } v \notin V^n, \end{cases}$$

El siguiente teorema exhibe una condición suficiente en términos de los pesos $\{\lambda_v\}_{v \in T_*}$ para que el operador B_λ sea hipercíclico.

Teorema 5.5. *Sea T un árbol infinito, $\{\lambda_v\}_{v \in T_*}$ una sucesión de números positivos, y supongamos que B_λ es un operador acotado \mathcal{L}_0 . Si existe una sucesión creciente $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\sup_{v \in T} \rho(v, n_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, entonces B_λ es hipercíclico.*

Demostración. Para mostrar que B_λ es hipercíclico, usaremos el criterio de Kitai–Gethner–Shapiro para hiperciclicidad de operadores. Sean $X_0 = \{f \in \mathcal{L}_0 : f \text{ es de soporte finito}\}$ (el cual es denso en \mathcal{L}_0) y $R_n : \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0$ una sucesión de funciones definida como:

$$R_n f(v) = \begin{cases} \rho(v, n) f(v^{(n)}), & \text{si } v \in V^n \\ 0, & \text{si } v \notin V^n. \end{cases}$$

1. Sea $f \in X_0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(v)| = 0$ siempre que $|w| \geq N$. Sea $v \in T_*$, entonces

$$\begin{aligned} |DB_\lambda^n f(v)| &= |B_\lambda^n f(v) - B_\lambda^n f(v^-)| \\ &= \left| \sum_{u \in \text{Chi}^n(v)} \left(\prod_{j=1}^n \lambda_{u^{(j)}} \right) f(u) - \sum_{w \in \text{Chi}^n(v^-)} \left(\prod_{j=1}^n \lambda_{w^{(j)}} \right) f(w) \right| \\ &= 0, \text{ siempre que } n > N, \end{aligned}$$

así, $\|DB_\lambda^n\|_\infty = 0$, siempre que $n > N$. Además, $|B_\lambda^n f(o)| = 0$ para todo $n \geq N$; por lo tanto, $\|B_\lambda^n f\|_{\mathcal{L}} = 0$, siempre que $n > N$. En particular $B_\lambda^{n_k} f$ converge a 0 en norma \mathcal{L} .

2. Sea $v \in T_*$ y $f \in X_0$. Notemos que si $|v| < n$, entonces $DR_n f(v) = 0$. Supongamos que $|v| \geq n$, entonces

$$\begin{aligned} D(R_n f)(v) &= |R_n f(v) - R_n f(v^-)| \\ &= |f(v^{(n)})\rho(v, n) - f(v^{(n+1)})\rho(v^-, n)| \\ &\leq |f(v^{(n)})|\rho(v, n) + |f(v^{(n+1)})|\rho(v^-, n). \end{aligned}$$

Como f es de soporte finito entonces, $f \in L^\infty$, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(v)| \leq M$ para todo $v \in T$, por lo tanto:

$$D(R_n f)(v) \leq M (\rho(v, n) + \rho(v^-, n)). \quad (5.5)$$

Por lo tanto, si se evalúa la sucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en la desigualdad (5.5), y se toma supremo sobre todos los vértices en T_* , se sigue que

$$\|DR_{n_k} f\|_\infty \leq 2M \sup_{v \in T} \rho(v, n_k) \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty,$$

y como $|R_{n_k} f(o)| = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, necesariamente $R_{n_k} f$ converge a cero en norma \mathcal{L} .

3. Sea $v \in T$ arbitrario, y sea f una función en \mathcal{L}_0 , entonces

$$\begin{aligned} B_\lambda^{n_k}(R_{n_k} f)(v) &= \sum_{u \in \text{Chi}^{n_k}(v)} R_{n_k} f(u) \\ &= \sum_{u \in \text{Chi}^{n_k}(v)} \left(\prod_{j=1}^{n_k} \lambda_{u^{(j)}} \right) f(u^{(n_k)})\rho(u, n_k) \\ &= \sum_{u \in \text{Chi}^{n_k}(v)} \left(\prod_{j=1}^{n_k} \lambda_{u^{(j)}} \right) \left[\sum_{w \in \text{Chi}^{n_k}(u^{(n_k)})} \left(\prod_{j=1}^{n_k} \lambda_{w^{(j)}} \right) \right]^{-1} f(u^{(n_k)}) \\ &= \sum_{u \in \text{Chi}^{n_k}(v)} \left(\prod_{j=1}^{n_k} \lambda_{u^{(j)}} \right) \left[\sum_{w \in \text{Chi}^{n_k}(v)} \left(\prod_{j=1}^{n_k} \lambda_{w^{(j)}} \right) \right]^{-1} f(v) \\ &= f(v), \end{aligned}$$

asi, $B_\lambda^{n_k} R_{n_k} f(v) = f(v)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir, $B_\lambda^{n_k} R_{n_k} f = f$.

Por lo tanto, el criterio de hiperciclicidad implica que B_λ es hipercíclico. \square

Ahora daremos una sucesión concreta de pesos para la cual B_λ es un operador hipercíclico.

Ejemplo 5.6. Sea T un árbol homogéneo por sectores a partir del nivel N sin cabos sueltos, y sea $\{\lambda_v\}_{v \in T_*}$ definida por $\lambda_v = \frac{\gamma(v^-)}{\gamma(v)}$. Entonces B_λ es hipercíclico.

Demostración. Notemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ la función $\rho(v, n)$ está definida como:

$$\rho(v, n) = \begin{cases} \left[\sum_{u \in \text{Chi}^n(v^{(n)})} \frac{\gamma(v^-)}{\gamma(u^-)} \right]^{-1}, & \text{si } v \in V^{n+1} \\ 0, & \text{si } v \notin V^{n+1}. \end{cases}$$

De acuerdo con el teorema 5.5, es suficiente probar que existe una sucesión creciente $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\sup_{v \in T} \rho(v, n_k)$ converge a cero; observemos que si $|v| < n + 1$, entonces $\rho(v, n) = 0$. Supongamos que $|v| \geq n + 1$ y sean $\Gamma = \max\{\gamma(v) : |v| \leq N\}$ y $\mu = \min\{\gamma(v) : |v| \leq N\}$. Como $\frac{\gamma(v)}{\gamma(w)} \leq \frac{\Gamma}{\mu}$ para cualesquiera $v, w \in T_*$, entonces

$$\frac{\Gamma}{\mu} \gamma(v^{(n)}, n) \geq \sum_{u \in \text{Chi}^n(v^{(n)})} \frac{\gamma(v^-)}{\gamma(u^-)},$$

de donde,

$$\sup_{v \in T} \rho(v, n) \leq \frac{\mu}{\Gamma} \sup_{v \in T} \left(\frac{1}{\gamma(v^{(n)}, n)} \right).$$

Por otra parte, el lema 4.5 implica que $\sup_{v \in T} \left(\frac{1}{\gamma(v^{(n)}, n)} \right)$ converge a cero, pues T es homogéneo por sectores y no posee cabos sueltos; por lo tanto

$$\sup_{v \in T} \rho(v, n) \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty,$$

mostrando que el operador B_λ es hipercíclico. \square

En el siguiente teorema se estudiará una condición necesaria para la hiperciclicidad del operador de desplazamiento hacia atrás con pesos B_λ . Es importante mencionar que esta condición estará en términos de la suma de los productos de los pesos asociados a los n -ancestros de cada uno de los n -descendientes de un vértice dado.

Teorema 5.7. Sean T un árbol infinito, $\{\lambda_v\}_{v \in T_*}$ una sucesión de números positivos, y supongamos que B_λ es un operador acotado en \mathcal{L}_0 . Si B_λ es hipercíclico, entonces para todo $v \in T_*$, existe una sucesión creciente $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\max \left\{ \left(1 + \frac{n_k}{|v|} \right) \sum_{u \in \text{Chi}^{n_k}(v)} \left(\prod_{j=1}^{n_k} \lambda_{u^{(j)}} \right), \left(1 + \frac{n_k}{|v^-|} \right) \sum_{w \in \text{Chi}^{n_k}(v^-)} \left(\prod_{j=1}^{n_k} \lambda_{w^{(j)}} \right) \right\} \longrightarrow \infty.$$

Demostración. Supongamos que B_λ es hipercíclico. Sea $u \in T_*$ un vértice arbitrario y definamos la función:

$$\chi_u(v) = \begin{cases} 1, & \text{si } v = u \\ 0, & \text{si } v \neq u. \end{cases}$$

Como B_λ es hipercíclico, el teorema de transitividad de Birkhoff garantiza que el conjunto de vectores hipercíclicos del operador B_λ es un conjunto denso en \mathcal{L}_0 y de clase G_δ ; por lo tanto, dado $\epsilon > 0$ es posible elegir un vector hipercíclico $f \in \mathcal{L}_0$ tal que, $\|f\|_{\mathcal{L}} < \frac{\epsilon}{|u|}$.

De igual manera, al ser B_λ hipercíclico se cumple que para todo $N \in \mathbb{N}$, existe $m > N$ tal que

$$\|B_\lambda^m f - \chi_u\|_{\mathcal{L}} < \epsilon. \quad (5.6)$$

Recordemos que para cualquier función $g \in \mathcal{L}$ se satisface que, $Dg(v) \leq \|g\|_{\mathcal{L}}$ para todo $v \in T_*$. En particular, si se evalúa en el vértice u , se sigue que:

$$\begin{aligned} \|B_\lambda^m f - \chi_u\|_{\mathcal{L}} &\geq |(B_\lambda^m f - \chi_u)(u) - (B_\lambda^m f - \chi_u)(u^-)| \\ &= \left| \sum_{s \in \text{Chi}^m(u)} \left(\prod_{j=1}^m \lambda_{s^{(j)}} \right) f(s) - \chi_u(u) - \sum_{w \in \text{Chi}^m(u^-)} \left(\prod_{j=1}^m \lambda_{w^{(j)}} \right) f(w) + \chi_u(u^-) \right| \\ &= \left| \sum_{s \in \text{Chi}^m(u)} \left(\prod_{j=1}^m \lambda_{s^{(j)}} \right) f(s) - 1 - \sum_{w \in \text{Chi}^m(u^-)} \left(\prod_{j=1}^m \lambda_{w^{(j)}} \right) f(w) \right| \\ &\geq 1 - \left| \sum_{s \in \text{Chi}^m(u)} \left(\prod_{j=1}^m \lambda_{s^{(j)}} \right) f(s) - \sum_{w \in \text{Chi}^m(u^-)} \left(\prod_{j=1}^m \lambda_{w^{(j)}} \right) f(w) \right|. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Usando el lema 1.34 se tiene que $|f(s)| \leq \frac{\epsilon|s|}{|u|}$. Por lo tanto, si se aplica la desigualdad del triángulo en (5.7), se obtiene:

$$\begin{aligned} \|B_\lambda^m f - \chi_u\|_{\mathcal{L}} &\geq 1 - \left[\sum_{s \in \text{Chi}^m(u)} \left(\prod_{j=1}^m \lambda_{s^{(j)}} \right) \frac{\epsilon|s|}{|u|} + \sum_{w \in \text{Chi}^m(u^-)} \left(\prod_{j=1}^m \lambda_{w^{(j)}} \right) \frac{|w|\epsilon}{|u|} \right] \\ &\geq 1 - \epsilon \left[\left(\frac{|u|+m}{|u|} \right) \sum_{s \in \text{Chi}^m(u)} \left(\prod_{j=1}^m \lambda_{s^{(j)}} \right) + \left(\frac{|u^-|+m}{|u|} \right) \sum_{w \in \text{Chi}^m(u^-)} \left(\prod_{j=1}^m \lambda_{w^{(j)}} \right) \right] \\ &\geq 1 - \epsilon \left[\left(\frac{|u|+m}{|u|} \right) \sum_{s \in \text{Chi}^m(u)} \left(\prod_{j=1}^m \lambda_{s^{(j)}} \right) + \left(\frac{|u^-|+m}{|u^-|} \right) \sum_{w \in \text{Chi}^m(u^-)} \left(\prod_{j=1}^m \lambda_{w^{(j)}} \right) \right] \end{aligned}$$

Con la finalidad de simplificar la notación de la expresión anterior, definamos la función

$$R(u, m) := \max \left\{ \left(1 + \frac{m}{|u|} \right) \sum_{s \in \text{Chi}^m(u)} \left(\prod_{j=1}^m \lambda_{s^{(j)}} \right), \left(1 + \frac{m}{|u^-|} \right) \sum_{w \in \text{Chi}^m(u^-)} \left(\prod_{j=1}^m \lambda_{w^{(j)}} \right) \right\}.$$

Notemos que la ecuación (5.6) implica que, $\epsilon > 1 - 2\epsilon R(u, m)$, de donde

$$h(u, m) := \frac{1}{1 + 2R(u, m)} < \epsilon.$$

Esto muestra que para todo $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, existe $m > N$ tal que $h(u, m) < \epsilon$, lo cual es equivalente a que exista una sucesión creciente $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $h(u, n_k) \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$, y esto ocurre si y solo si $R(u, n_k) \rightarrow \infty$, cuando $k \rightarrow \infty$. Esto demuestra el resultado. \square

Observación 5.8. *La condición que se obtuvo en el teorema 5.5 para que B_λ sea hipercíclico, coincide con la propiedad combinatoria de no poseer cabos sueltos en el caso en que la sucesión de pesos $\{\lambda_v\}_{v \in T}$ es constante uno.*

Demostración. Supongamos que $\sup_{v \in T} \rho(v, n)$ converge a cero. Esto implica que $\rho(v, n)$ debe converger a cero para todo $v \in T$. Por otro lado, notemos que

$$\rho(v, n) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma(v^{(n)}, n)}, & \text{si } v \in V^n \\ 0, & \text{si } v \notin V^n, \end{cases}$$

por lo tanto, el árbol no puede tener cabos sueltos.

Recordemos que en el lema 4.5 se demuestra la otra implicación. □

Otra observación es el hecho de que la condición necesaria para que B_λ sea hipercíclico no coincide con la condición de no poseer cabos sueltos. Desafortunadamente no hemos sido capaces de caracterizar la hiperciclicidad salvo en el caso en el que los pesos son constantes, la pregunta quedará pendiente para futuras investigaciones.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo a futuro

6.1. Conclusiones

El objetivo fundamental de esta tesis es estudiar acotamiento, espectro, compacidad e hiperciclicidad de los operadores de desplazamiento hacia adelante y hacia atrás definidos en \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 . En este trabajo de tesis logramos:

- Demostrar que el operador S es acotado en \mathcal{L} y es una isometría cuando está definido en \mathcal{L}_* .
- Caracterizar el acotamiento del operador de desplazamiento hacia atrás en \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 ; dicha caracterización establece que B es acotado si y solo si T es un árbol homogéneo por sectores.
- Calcular el espectro, el espectro puntual y el espectro puntual aproximado del operador S definido en \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 .
- Demostrar que los operadores S y B no son compactos.
- Calcular el espectro, el espectro puntual y el espectro puntual aproximado del operador B definido en \mathcal{L} y \mathcal{L}_0 cuando T es un árbol homogéneo.
- Caracterizar la hiperciclicidad del operador B definido en \mathcal{L}_0 ; dicha caracterización establece que B es un operador hipercíclico si y solo si el árbol T no posee cabos sueltos.
- Dar condiciones para que el operador de desplazamiento hacia atrás con pesos B_λ sea acotado.
- Exhibir condiciones necesarias y condiciones suficientes para que el operador B_λ sea hipercíclico.

Es importante mencionar que la caracterización para el acotamiento de B , los resultados espectrales de los operadores S y B , la caracterización para la hiperciclicidad de B y el teorema 5.5 se consideran los resultados más importantes de este trabajo de tesis.

6.2. Preguntas abiertas

Concluimos este trabajo de tesis con algunas preguntas abiertas que quedarán pendientes para futuros trabajos de investigación.

1. ¿Será el número $3\Gamma - 2 + \Omega_N$ una cota inferior para la norma de B ?
2. Calcular el espectro, el espectro puntual y el espectro puntual aproximado del operador B cuando T es homogéneo por sectores a partir de un nivel $N > 1$.
3. ¿Será cierto que el recíproco del teorema 5.2 también se cumple?
4. Las condiciones del teorema 5.5, ¿también son necesarias para que el operador B_λ sea hipercíclico?

Bibliografía

- [1] Allen, R.; Colonna, F.; Easley, G.; *Multiplication operators on the weighted Lipschitz space of a tree*. J. Oper Theory **69** (2013) 209—231.
- [2] Allen, R.; Colonna, F.; Easley, G.; *Composition operators on the Lipschitz space of a tree*, Mediterr. J. Math. **11** (2014) 97—108.
- [3] Cartier, P.; *Fonctions harmoniques sur un arbre*. Symp. Math. **9** (1972) 203—270.
- [4] Conway, J.B.; *A course in functional analysis*. 2nd ed, Graduate texts in mathematics, Springer (1990).
- [5] Cohen, J.M.; Colonna, F.; *The Bloch space of a homogeneous tree*. Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) **37**(1-2), (1992) 63—82.
- [6] Cohen, J.M.; Colonna, F.; *Embeddings of trees in the hyperbolic disk*. Complex Variables **94** (1994) 311—335.
- [7] Cohen, J.M.; Colonna, F.; *Extreme points of the Bloch space of a homogeneous tree*. Israel J. Math. **94**, (1996) 247—271.
- [8] Colonna, F.; Easley, G.; *Multiplication operators on the Lipschitz space of a tree*. Integr. Equ. Oper. Theory **68** (2010) 391—411.
- [9] Colonna, F.; Martínez–Avenidaño, R.A.; *Some classes of operators with symbol on the Lipschitz space of a tree*. Mediterr. J. Math. **14** (2017), no. 1, Art. 18, 25 pp.
- [10] Colonna, F.; *Bloch and normal functions and their relation*. Rend. Circ. Mat. Palermo II **XXXVIII** (1989) 161—180.
- [11] Jabłoński, Z.J; Jung, I.B.; Stochel, J.; *Weighted shifts on directed trees*, Mem. Amer. Math. Soc. **216** (1017) (2012).
- [12] Grosse–Erdmann, K.G.; Peris Manguillot, A.; *Linear Chaos*. Springer, London, (2006).
- [13] Kreyszig, E.; *Introductory functional analysis with applications*, Wiley Classics Library Edition Published, New York (1989).
- [14] Martínez–Avenidaño, R.A.; *Hypercyclicity of shifts on weighted L^p spaces of directed trees*. J. Math. Anal. Appl. **446** (2017) 823—842.

- [15] Salas, H.N.; *Hypercyclic weighted shifts*. Trans. Am. Math. Soc. **347** (1995) 993—1004.
- [16] Shapiro, J.H.; *Composition Operators and Classical Function Theory*. Springer, New York, (1993).
- [17] Zhu, K.; *Operator theory in function spaces*. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 138. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. xvi+348 pp. ISBN: 978-0-8218-3965-2.