Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Centro de Investigación en Matemáticas

Suavidad y Ultrasuavidad en Continuos

Tesis que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Rodrigo Zúñiga Trejo

Bajo la dirección de la:

Dra. Rocío Leonel Gómez

PACHUCA, HIDALGO, MAYO DE 2018

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Institute of Basic Sciences and Engineering
Área Académica de Matemáticas y Física
Mathematics and Physics Department

Rodrigo Zúñiga Trejo
P R E S E N T E

Por este conducto le comunico que el Jurado que le fue asignado a su trabajo de tesis titulado *Suavidad y Ultrasuavidad en Continuos*, después de revisarlo en reunión han decidido autorizar la impresión del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.
A continuación se anotan las firmas de conformidad de los integrantes del Jurado:

Presidente: Dr. Rafael Villarroel Flores

Secretario: Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz

Primer Vocal: Dr. Jorge Viveros

Segundo Vocal: Dr. Raúl Temoltzi Ávila

Tercer Vocal: Dra. Rocío Leonel Gómez

Primer Suplente: Dra. Liliana Peralta Hernández

Segundo Suplente: Dr. Arturo Criollo Pérez

Atentamente.
Amor, Orden y Progreso
Mineral de la Reforma, Hidalgo, a 4 de mayo de 2018.

Dr. Rafael Villarroel Flores
Secretario del Comité de Titulación
de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Ciudad del Conocimiento
Carretera Pachuca – Tulancingo Km. 4.5
Colonia Carboneras
Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C.P. 42184
Tel. +52 771 7172000 exts. 6164, Fax 2109
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx

A mi familia.

Agradecimientos

Quiero agradecer a los Doctores Rafael Villarroel Flores, Raúl Temoltzi Ávila, Jorge Viveros Rogel, Benjamín Alfonso Itzá Ortiz, integrantes del comité revisor de tesis. Gracias por sus observaciones, que sin duda hicieron de este un mejor trabajo, por el tiempo y su disposición. También quiero agradecer a mi directora de tesis, la Dra. Rocío Leonel Gómez, quien me ha apoyado a lo largo de mi trabajo en todos los sentidos. Gracias por haberme envuelto con un poco del mundo de la Topología de Conjuntos y así haber marcado un camino en mi futuro.

A mis papás, Fernando Zúñiga y Olivia Trejo, por haberme apoyado en todo lo posible, sin su apoyo hubiese sido muy complicado terminar este trabajo, este logro no solo es para mí, sino también es para ustedes. Agradezco también a mi amiga y pareja de vida, Izamar Ángeles, por haberme apoyado simplemente en todo. Gracias a ella pude continuar cuando más no podía, gracias por haber estado conmigo en momentos difíciles y por haberme escuchado cuando más lo necesitaba.

Finalmente, quiero agradecer a una persona muy especial para mí. Él influyó mucho para ser la persona que soy ahora, crecí admirando cada paso que él daba. Le tuve gran respeto por lo que significaba para mí y sé que muchas de las cosas que he logrado fueron gracias a él. Hero Zúñiga, hermano, este momento también quiero compartirlo contigo.

Índice general

Resumen

Suavidad y ultrasuavidad son conceptos que se han definido en distintas clases dentro del espacio de los continuos, tal es el caso de los dendroides y de los continuos hereditariamente unicoherentes. Existen caracterizaciones de suavidad y ultrasuavidad en estas clases de continuos, dendroides y continuos hereditariamente unicoherentes. En este trabajo se estudian los conceptos de suavidad y ultrasuavidad y se analiza la relación entre ambas propiedades, así como la relación entre los distintos tipos de suavidad y también la relación sobre los distintos tipos de ultrasuavidad. También definimos suavidad y ultrasuavidad para cualquier continuo, no sólo para dendroides o continuos hereditariamente unicoherentes. Se prueba que estas definiciones generalizan suavidad y ultrasuavidad para dendroides y continuos hereditariamente unicoherentes.

Abstract

Smoothness and ultrasmoothness are concepts that have been defined in different kinds of continua, such as dendroids and hereditarily unicoherent continua. There are some characterizations about smoothness and ultrasmoothness in these classes of continua, dendroids and hereditarily unicoherent continua. In this work, the concepts of smoothness and ultrasmoothness are studied and the relationship between these two properties is analyzed, as well as the relationship between the diferent types of smoothness and also the reationship on the different types of ultrasmoothness. In addition, we define smoothness and ultrasmoothness in general, not only for dendroids or hereditarily unicoherent continua. It is proved that these new definitions implies smooth and ultrasmooth for dendroids and hereditarily unicoherent continua.

Introducción

El presente trabajo pertenece a una rama de la topología conocida como teoría de continuos, cuyo propósito es estudiar propiedades topológicas de espacios métricos, conexos, compactos y no vacíos. De hecho, a un espacio X que cumple estas propiedades le llamaremos continuo. Si Y es un continuo contenido en X, entonces diremos que Y es un subcontinuo de X.

Existen diferentes clases de continuos, por ejemplo, los continuos unicoherentes, los cuales son aquellos que cumplen que para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X, tales que $A \cup B = X$, se tiene que $A \cap B$ es conexo. Los continuos hereditariamente unicoherentes son aquellos para los cuales todo subcontinuo es unicoherente. Por otra parte, si además a un continuo hereditariamente unicoherente le pedimos que para todo par de puntos $x, y \in X$ exista f una función continua e inyectiva del intervalo a X tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$ se dice que el continuo es un dendroide.

También existen otras clases de continuos llamados continuos suaves y continuos ultrasuaves, cuyas definiciones veremos más adelante. La definición de suavidad fue propuesta en 1970 por J. J. Charatonik y C. Eberhart ([4]), por otra parte, la definición de ultrasuavidad fue propuesta en 1974 por Lum ([10]). Cabe mencionar que dichas definiciones fueron introducidas en el espacio de los dendroides. Posteriormente, en 1999 J. J. Charatonik en [3], introdujo la definición de suavidad en continuos hereditariamente unicoherentes, cuyo espacio contiene propiamente al espacio de los dendroides y fue Gordh ([6]) quien introdujo ultrasuavidad en continuos hereditariamente unicoherentes. En [3], J. J. Charatonik, muestra que los continuos ultrasuaves son continuos suaves. En el año 2008, I. Puga y M. Torres en [13] se enfocaron en estudiar suavidad y ultrasuavidad en dendroides y caracterizaron a los dendroides ultrasuaves.

En este trabajo estudiamos estas propiedades, las cuales llamaremos suavidad tipo I y ultrasuavidad tipo I haciendo referencia a las definiciones introducidas en dendroides y suavidad tipo II y ultrasuavidad tipo II a las introducidas en continuos hereditariamente unicoherentes. También analizamos algunas pruebas de [13] y [3] relacionadas con estos temas e ilustramos con ejemplos algunas de las definiciones.

Como el conjunto de los continuos hereditariamente unicoherentes es un conjunto propio de los continuos, fue inevitable preguntarse si se podían definir suavidad y ultrasuavidad para continuos en general. De ahí, surgió el objetivo principal de esta tesis, el cual es introducir definiciones de suavidad y ultrasuavidad para continuos en general.

El contenido de esta tesis está estructurado de la siguiente manera: En el capítulo 1 enunciamos algunas definiciones y resultados útiles para desarrollar este trabajo, además de familiarizar al lector con conceptos necesarios para comprender el tema, tales como continuo y funciones de Whitney, entre otros.

En el capítulo 2 definimos y analizamos suavidad tipo I y tipo II así como ultrasuavidad tipo I y tipo II. También ejemplificamos cada una de estas propiedades y analizamos con mayor profundidad algunos resultados de los artículos [3] y [13], los cuales prueban que un continuo ultrasuave tipo I (o tipo II) es suave tipo I (tipo II).

En el capítulo 3 introducimos definiciones de suavidad (definición 3.2.1) y ultrasuavidad (definición 3.3.1), las cuales definimos para continuos en general, es decir, no sólo para dendroides o continuos hereditariamente unicoherentes y les llamaremos suavidad tipo III y ultrasuavidad tipo III. Ilustraremos con ejemplos estas definiciones, veremos que generalizan a las anteriores definidas para dendroides y hereditariamente unicoherentes y también veremos algunas relaciones entre los diferentes tipos de suavidad (tipo I, II y III) y ultrasuavidad (tipo I, II y III).

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos definiciones y resultados que utilizaremos para el desarrollo de este trabajo.

Definición 1.0.1. *Sean* (X, d) *un espacio métrico,* $x \in X$ *y* $r > 0$. *Definimos la* **bola centrada en x de radio r**, *denotada por* $B_r(x)$, *como el conjunto* $\boldsymbol{B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}}$.

Definición 1.0.2. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* V *un subconjunto* X. *Diremos que* V *es* **abierto** *respecto a la métrica* d, *si para cada punto* $x \in V$ *existe una bola centrada en* x *de radio* $0 < r$ *contenida en* V. *Diremos que* V *es una* **vecindad de x**, *si* V *es un abierto y* $x \in V$.

Definición 1.0.3. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* F *un subconjunto de* X. *Diremos que* F *es un* **cerrado** *respecto a la métrica* d, *si* $X - F$ *es abierto respecto a la métrica* d.

Dado un espacio métrico (X, d). Si A es un subconjunto de X, escribiremos $A \subset X$. Por otra parte, si A es un subconjunto propio de X, escribiremos $A \subsetneq X$. Sea $A \subset Y \subset X$, denotaremos como $\overline{A}$ e $int(A)$ la cerradura de A y el interior de A en X, respectivamente. Por otra parte, $\overline{A}_Y$ e $int(A)_Y$ representan la cerradura de A y el interior de A en el subespacio Y de X. En este trabajo, a menos que se indique de otra manera, A^c denotará el complemento de A en X. Finalmente, a una función del espacio métrico (X, d_X) al espacio métrico (Y, d_Y) la denotaremos por $f : X \to Y$.

Definición 1.0.4. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* A *un subconjunto no vacío de* X. *Diremos que* x *es un* **punto de acumulación de A** *si para cualquier abierto* U *de* X *que contenga a* x, *se tiene que* $A \cap (U - \{x\}) \neq \emptyset$.

1.1. Conexidad y compacidad

Definición 1.1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que X es* **disconexo** *si existen dos subconjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos U y V de X, tales que $X = U \cup V$. Si X no es disconexo, diremos que X es* **conexo**.

Considere $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ y d la métrica euclidiana. Entonces X es disconexo, pues $U = [0, 1]$ y $V = [2, 3]$ son subconjuntos abiertos, disjuntos, no vacíos de X y $U \cup V = X$. Por otro lado, el espacio métrico $([0, 1], d)$ con la métrica euclidiana, el cual denotaremos por I, es un conjunto conexo.

Proposición 1.1.2. *Sea (X, d) un espacio métrico. X es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de X, son X y el vacío.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico. Supongamos que X es conexo y veamos que los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de X, son X y el vacío. Procedemos por contradicción. Supongamos que existe $U \subsetneq X$ distinto del vacío, que además es abierto y cerrado en X. Entonces U^c es distinto del vacío pues U es distinto de X, y U^c abierto y cerrado en X. Luego U y U^c son disjuntos y $X = U \cup U^c$. Por tanto X es disconexo, contradiciendo que X es conexo.

Ahora supongamos que los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de X, son X y el vacío y probemos que X es conexo. Nuevamente procedemos por contradicción. Supongamos que X no es conexo. Entonces existen U y V subconjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos de X, tales que $X = U \cup V$. Luego $V = U^c$ y como V es abierto, se sigue que U es cerrado. Entonces U es un subconjunto propio abierto y cerrado en X, contradiciendo que los únicos abiertos y cerrados son el vacío y el total. $\square$

Definición 1.1.3. *Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que una familia $C = \{U_k\}_{k \in J}$ de subconjuntos de X es una* **cubierta para** *X si $X \subset \bigcup_{k \in J} U_k$. Si $C' \subset C$ es una cubierta para X, entonces diremos que C' es una* **subcubierta** *de C para X. Además, si U_k es un conjunto abierto en X para cada $k \in J$, diremos que C es una* **cubierta abierta** *para X.*

Ejemplo 1.1.4. *Los siguientes conjuntos son cubiertas para $\mathbb{R}$ considerando la métrica euclidiana:*

- $C = \{B_1(x) : x \in \mathbb{R}\}$.
- $C_1 = \{B_1(x) : x \in \mathbb{Z}\}$, $C_1 \subset C$ *y es una cubierta para* $\mathbb{R}$. *En este caso* C_1 *es una subcubierta de* C *para* $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.5. *Un espacio métrico* (X, d) *es* **compacto***, si toda cubierta abierta de* X *contiene una subcubierta finita.*

En algunos casos resulta menos complicado probar que un conjunto no es compacto a probar que sí lo es. Por ejemplo, para probar que el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) no es compacto, basta con encontrar una cubierta de $\mathbb{R}$ que no contenga una subcubierta finita.

En el ejemplo 1.1.4, la cubierta C_1 no contiene una subcubierta finita de $\mathbb{R}$. De hecho, si $A = B_1(z)$ para algún $z \in \mathbb{Z}$, $(C_1 - A) = \{B_1(x) : x \in \mathbb{Z} - \{z\}\}$ no es cubierta de $\mathbb{R}$ pues $z \notin \{B_1(x) : x \in \mathbb{Z} - \{z\}\}$, por tanto, $\mathbb{R} \not\subset \{B_1(x) : x \in \mathbb{Z} - \{z\}\}$.

Por otra parte, para probar que un conjunto es compacto, por ejemplo el intervalo cerrado $[1, 2] \subset \mathbb{R}$, es necesario verificar que para toda cubierta de $[1, 2]$ existe una subcubierta finita. El Teorema de Heine-Borel (también conocido como el Teorema de Heine-Borel-Lebesgue) establece una caracterización para subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$. El teorema es el siguiente:

Teorema 1.1.6 (Heine-Borel)**.** *Un subconjunto* A *de* $\mathbb{R}^n$ *es compacto si y sólo si* A *es un subconjunto cerrado y acotado de* $\mathbb{R}^n$.

Daremos la demostración del teorema 1.1.6 sólo para el caso de $n = 1$.

Lema 1.1.7. *Si* $[a, b]$ *es un intervalo cerrado y acotado de* $\mathbb{R}$*, entonces* $[a, b]$ *es compacto.*

Demostración. Sean R una cubierta abierta arbitraria de $[a, b]$ y S el conjunto de puntos $x \in [a, b]$ tal que $[a, x]$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de R. Notemos que $S \neq \emptyset$ pues $a \in S$, además S está acotada superiormente pues $S \subset [a, b]$.

Sea $\alpha = \sup S$, por ser b cota superior, entonces $a \leq \alpha \leq b$. Luego, como $\alpha \in [a, b]$ y R es una cubierta abierta para $[a, b]$, existe $A \in R$ abierto tal que $\alpha \in A$. Luego, existe $\epsilon > 0$ tal que $[\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon] \subsetneq A$. Además, por ser α el supremo de S y $\alpha - \epsilon < \alpha$, existe $x \in S$ tal que

$\alpha - \epsilon < x \leq \alpha$. Consideremos $[a, \alpha] = [a, x] \cup [x, \alpha]$, como $x \in S$ entonces $[a, x]$ está cubierto por un número finito de elementos de R, por otro lado, $[x, \alpha] \subset [\alpha - \epsilon, \alpha] \subset A$. Así, se sigue que $[a, \alpha]$ está cubierto por un número finito de elementos de R, por tanto, $\alpha \in S$.

Si $\alpha < b$, como $\alpha \in A$ y A es abierto, existe $x \in (\alpha, b]$ tal que $[\alpha, x] \subsetneq A$. Luego, como $[a, \alpha]$ está cubierto por un número finito de elementos de R y $[\alpha, x] \subset A$, entonces $[a, x]$ está cubierta por un número finito de elementos de R, lo cual contradice que α es el supremo de S. Se sigue que $\alpha \geq b$, luego $\alpha = b$ y por tanto $[a, b] \subset S$. Así, concluimos que $[a, b]$ es compacto. □

Lema 1.1.8. *Sea X un conjunto compacto. Si A es un subconjunto cerrado de X, entonces A es compacto.*

Demostración. Sea X un conjunto compacto y $A \subset X$ un conjunto cerrado. Sea R una cubierta abierta de A, entonces $R \cup \{A^c\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existe R^* una subcubierta finita de $R \cup \{A^c\}$ que cubre a X. Luego, $R^* - A^c$ es una subcubierta abierta finita de A, por tanto A es compacto. □

Proposición 1.1.9. *Sea d la métrica euclidiana de* $\mathbb{R}$ *y* $A \subset \mathbb{R}$ *compacto. Entonces A es cerrado y acotado en* $\mathbb{R}$.

Demostración. Para mostrar que A es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$, probaremos que A^c es abierto en $\mathbb{R}$. Sea $p \in A^c$ arbitrario y considere la colección $C = \left\{B_{\frac{d(p,a)}{2}}(a) : a \in A\right\}$. Luego C es una cubierta abierta de A, por ser A compacto, existe una subcubierta finita de C, $C' = \left\{B_{\frac{d(p,a_i)}{2}}(a_i) : 0 \leq i \leq n\right\}$, para algunas $a_i \in A$.

Sea $r = min\left\{\frac{d(p,a_1)}{2}, \frac{d(p,a_2)}{2}, ..., \frac{d(p,a_n)}{2}\right\}$. Luego, si $B_{\frac{r}{2}}(p) \cap B_{\frac{d(p,a_k)}{2}}(a_k) \neq \emptyset$ para algún $0 \leq k \leq n$, sea z en esta intersección, y $d(a_k, z) < \frac{d(p,a_k)}{2}$. Por otro lado, $z \in B_{\frac{r}{2}}(p)$, entonces $d(z, p) < \frac{r}{2} \leq \frac{d(p,a_k)}{4}$, es decir, $d(p, a_k) > \frac{3d(p,a_k)}{4} > d(a_k, z) + d(z, p)$, lo cual es una contradicción, pues d es una métrica.

Por tanto, $B_{\frac{r}{2}}(p) \cap B_{\frac{d(p,a_i)}{2}}(a_i) = \emptyset$ para cada $0 \leq i \leq n$ y de esto se sigue que $B_{\frac{r}{2}}(p) \cap A = \emptyset$. En consecuencia $B_{\frac{r}{2}}(p) \subset A^c$ y por tanto A^c es abierto en $\mathbb{R}$.

Ahora probemos que A es un conjunto acotado. Consideremos $C = \{B_1(a) : a \in A\}$ una cubierta abierta para A y como A es compacto, se sigue que existen $\{a_1, \ldots, a_n\}$ tales que $C' = \{B_1(a_i) : 0 \leq i \leq n\}$ es una subcubierta finita.

Sea $r = max\{d(a_1, a_2), d(a_1, a_3), ..., d(a_1, a_n)\}$ y considere $B_{r+1}(a_1)$. Afirmamos que $A \subset B_{r+1}(a_1)$. Sea $x \in A$, como C' es cubierta de A, $x \in C'$. Luego existe $k \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $x \in B_1(a_k)$ y como d es métrica $d(x, a_1) \leq d(x, a_k) + d(a_k, a_1)$, esto es, $d(x, a_1) < 1 + r$. Se sigue que $x \in B_{r+1}(a_1)$ y por tanto $A \subset B_{r+1}(a_1)$, y se tiene que A es acotado y cerrado en $\mathbb{R}$. □

Teniendo en cuenta los resultados anteriores hacemos la prueba del teorema 1.1.6. Sin embargo, por la proposición 1.1.9 se tiene que todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ es cerrado y acotado. Entonces basta probar solo el recíproco.

Demostración. Sea A un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Por ser A acotado, existe un intervalo cerrado y acotado J tal que $A \subset J$. Por el lema 1.1.7, el intervalo J es compacto, además A es un conjunto cerrado y contenido propiamente en J, entonces es cerrado en J y por el lema 1.1.8, se sigue que A es compacto. □

1.2. Homeomorfismos

Definición 1.2.1. *Sean (X, d_1) y (Y, d_2) dos espacios métricos. Considere $f : X \to Y$ una función y $x \in X$. Diremos que f es* **continua en x** *si para cualquier abierto U de Y tal que $f(x) \in U$, existe V abierto en X tal que $x \in V$ y $f(V) \subset U$. Si f es continua en x para cada $x \in X$, diremos que f es* **continua**.

Teorema 1.2.2. *Sea f una función del espacio métrico (X, d_1) en el espacio métrico (Y, d_2). Entonces f es continua si y solo si para cualquier abierto U de Y, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Probemos que para cualquier abierto U de Y, se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Sea $x \in f^{-1}(U)$, por ser f continua, existe V_x abierto en X tal que $x \in V_x$ y $f(V_x) \subset U$. Se sigue que $V_x \subset f^{-1}(U)$, por tanto, $f^{-1}(U)$ es abierto.

Ahora supongamos que para cualquier abierto U de Y se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Sea $x \in X$ y U un abierto en Y tal que $f(x) \in U$, entonces se sigue de manera inmediata que si $V = f^{-1}(U)$, V cumple que $x \in V$ y V es abierto en X, además $f(V) = U \subset U$. Por lo tanto, f es continua en x y se sigue que f es continua. □

Teorema 1.2.3. *Sea $f : X \to Y$ una función del espacio métrico (X, d_1) al espacio métrico (Y, d_2). Sea $x \in X$, entonces f es continua en x si y solo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x se tiene que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función. Sea $x \in X$ y supongamos que f es continua en x. Probemos que para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x se tiene que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a $x \in X$. Veamos que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Y que converge a $f(x)$. Sea U un abierto de Y, tal que $f(x) \in U$, como f es continua en x, existe V abierto de X que contiene a x tal que $f(V) \subset U$. Como la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y V es una vecindad de x, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \in V$. Se sigue que $f(x_n) \in f(V) \subset U$ para $n \geq N$. Por lo tanto, para todo abierto U que contiene a $f(x)$, existe un número N en los naturales, tal que a partir de este número, $f(x_n) \in U$, es decir, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.

Ahora considere $f : X \to Y$ una función tal que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a $x \in X$, se tiene que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Y que converge a $f(x)$. Probemos que f es una función continua en x. Como X es un espacio métrico, consideremos el conjunto $\left\{B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\right\}$ y supongamos que f no es continua en x, entonces existe un abierto U de Y que contiene a $f(x)$ pero es tal que para todo abierto V de X que contenga a x, se tiene que $f(V) \not\subset U$. Entonces, para cada $B_{\frac{1}{n}}(x)$ existe $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ tal que $f(x_n) \notin U$. Consideremos la sucesión de estos puntos, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por construcción, esta sucesión converge a x, sin embargo la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(x)$, pues U es un abierto de Y que contiene a $f(x)$ y dado que $f(x_n) \notin U$, no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n) \in U$ para $n \geq N$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, f es una función continua en x. □

Definición 1.2.4. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y f una función de X a Y. Decimos que f es un* **homeomorfismo** *entre X e Y si:*

- *f es continua.*
- *f es biyectiva.*
- *La función inversa de f es continua.*

Diremos que los espacios métricos (X, d_X), (Y, d_Y) son **homeomorfos***, o que X es* **homeomorfo** *a Y, si existe un homeomorfismo entre ellos.*

Como ejemplo, el intervalo $[a, b]$ y el intervalo $[c, d]$ son homeomorfos. La función $f : [a, b] \to [c, d]$, definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \tfrac{d-c}{b-a}(x - a) + c,$$

es una función continua, biyectiva y con inversa continua.

1.3. Continuos e hiperespacios

Definición 1.3.1. *Un* **continuo** *X es un espacio métrico, compacto, conexo y distinto del vacío. Diremos que Y es un* **subcontinuo** *de X si Y es un continuo y además $Y \subset X$.*

A partir de este momento, a lo largo de todo este trabajo los espacios en los que trabajaremos serán continuos. Todos los ejemplos de continuos presentados en este trabajo serán en $\mathbb{R}^n$, con $n = 1$ o $n = 2$ y la métrica que se estará considerando será la inducida por la métrica euclidiana. Sin embargo, existen ejemplos de continuos que no son subespacios de $\mathbb{R}$ ni $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo la esponja de Menger que se encuentra en [7, Fig.9,pág. 14].

El intervalo $[0, 1]$ es un ejemplo de un continuo, pues es métrico, compacto, conexo y no vacío. A continuación daremos otro ejemplo de un continuo conocido como el continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ o la curva del topólogo.

Considere $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1], y = sen\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$. Entonces $X = \overline{U}$ (ver figura 1.1) es no vacío y compacto, por ser cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$. Cabe mencionar que $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ es métrico considerando la métrica inducida de la métrica euclidiana en $\mathbb{R}^2$, por [15, Theorem 26.3, pág. 192], se tiene que X es conexo, por lo tanto X es un continuo. Durante este trabajo, al continuo

X lo denotaremos por $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ y al conjunto U le llamaremos el rayo del $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ y para hacer referencia al conjunto $X - U$ le nombraremos barra límite o residuo del $sen\left(\frac{1}{x}\right)$.

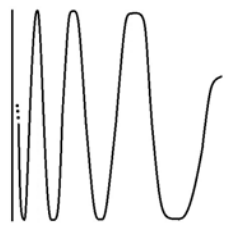

Figura 1.1: Ilustración del continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$.

A continuación se define continuo irreducible.

Definición 1.3.2. *Sea X un continuo, decimos que X es un* **continuo irreducible** *si existen a y b puntos de X tales que ningún subcontinuo propio de X contiene $\{a, b\}$. En tal caso, diremos que a y b son* **puntos de irreducibilidad**.

Teorema 1.3.3. *Sean X un continuo y a, b dos puntos en X. Entonces existe un subcontinuo Y de X tal que Y es irreducible y a, b son sus puntos de irreducibilidad (ver [12, 4.35, pág. 68]).*

Ejemplo 1.3.4. *Considerando la construcción del continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x = (0, -1)$ y $y = (0, 1)$, el continuo irreducible que contiene a x y y es el residuo del $sen\left(\frac{1}{x}\right)$.*

Definición 1.3.5. *Sean X un continuo y $p \in X$. Diremos que X es* **localmente conexo en *p***, *si para cada abierto U de X que contiene a p, existe un abierto y conexo V de X tal que $p \in V \subset U$.*

Definición 1.3.6. *Un continuo X es* **localmente conexo**, *si X es localmente conexo en cada punto $p \in X$.*

Definición 1.3.7. *Un* **arco** *en un continuo X es un subconjunto de este homeomorfo al intervalo* $[0, 1]$. *Si $f : [0, 1] \to X$ es la función continua e inyectiva tal que $f(0) = z$ y $f(1) = w$ entonces denotaremos a dicho arco por* ***zw*** *y diremos que z y w son los* **puntos extremos** *del arco.*

Definición 1.3.8. *Sea X un continuo. Diremos que X es* **arco conexo**, *si para cualesquiera dos puntos z y w de X existe un arco de z a w. Si para cualesquiera dos puntos $z, w \in X$ existe un único arco zw, diremos que X es* **únicamente arco conexo**.

El intervalo $[0, 1]$, es un continuo arco conexo que además es únicamente arco conexo. El círculo de Varsovia, es otro ejemplo de un continuo únicamente arco conexo (ver figura 1.2), cuya construcción es la siguiente. Considere la unión del continuo $X = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ y un arco ajeno a X (excepto en los extremos), que va del punto $(0, -1)$ al punto $(1, sen(1))$. La razón del por qué es un continuo es la siguiente: nótese que el círculo de Varsovia es no vacío y métrico considerando la métrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$. La compacidad se debe a que es la unión de dos conjuntos cerrados y acotados, $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ y un arco, por tanto es compacto. Finalmente, la conexidad se debe a que es unión de dos conexos con al menos un punto en común [15, Theorem 26.7, pág. 201].

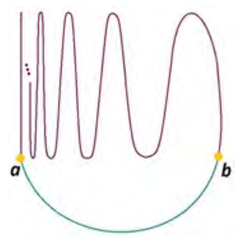

Figura 1.2: Ilustración del círculo de Varsovia.

La circunferencia $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$, es un continuo arco conexo, pero no es únicamente arco conexo ya que para cualesquiera dos puntos existen dos arcos distintos entre ellos. Finalmente, el continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ no es un conjunto arco conexo, ya que si $w \in \overline{U} - U$ y $z \in U$, entonces no existe un arco entre w y z.

Definición 1.3.9. *Sea X un continuo. Diremos que X es* **unicoherente** *si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X, tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

Definición 1.3.10. *Sea X un continuo. Diremos que X es* **hereditariamente unicoherente** *si para cualquier subcontinuo Y de X se tiene que Y es unicoherente.*

Algunos continuos que no son unicoherentes son el círculo de Varsovia y la circunferencia, cuyo continuo es denotado por S^1 y se define como $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$. El círculo de Varsovia no es unicoherente, pues si consideramos los subcontinuos marcados de color vino y color azul en el continuo (ver figura 1.2), la intersección es el conjunto $\{a, b\}$, el cual no es un conjunto conexo. Para el caso de la circunferencia considere dos arcos cuya unión sea la circunferencia y su intersección no sea conexa. En la figura 1.3, los arcos marcados de color azul y color vino, son arcos que cumplen dicha descripción.

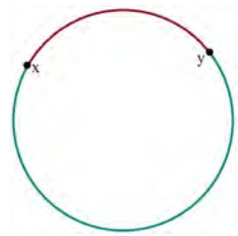

Figura 1.3: Ejemplo de un continuo que no es hereditariamente unicoherente.

Cabe mencionar que si un continuo es hereditariamente unicoherente, entonces es unicoherente, pero el recíproco no es cierto. El continuo conocido como el disco (ver figura 1.4), definido como $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$, es un continuo unicoherente ([5, pág. 62]), pero no hereditariamente unicoherente pues si consideramos un subcontinuo del disco homeomorfo a la circunferencia, entonces podemos encontrar dos arcos cuya unión sea el subcontinuo, pero la intersección de estos arcos no sea conexa. Un ejemplo de un continuo hereditariamente unicoherente es el intervalo $[0, 1]$.

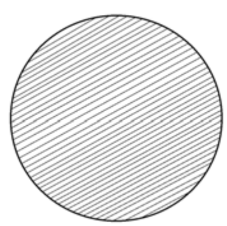

Figura 1.4: Ilustración de un continuo unicoherente pero no hereditariamente unicoherente.

Definición 1.3.11. *Se dice que un continuo X es un* **dendroide***, si X es un continuo arco conexo y hereditariamente unicoherente.*

El intervalo $[0, 1]$ es ejemplo de un continuo hereditariamente unicoherente y además es arco conexo, por tanto es un dendroide. Por otro lado, S^1 (ver figura 1.3) no es unicoherente, en consecuencia S^1 no es dendroide.

Definición 1.3.12. *Sea X un dendroide. Si X es localmente conexo diremos que X es una* **dendrita**.

Como se puede observar, toda dendrita es un dendroide. El intervalo $[0, 1]$ es un ejemplo de una dendrita, pues es un dendroide y además es localmente conexo. Para ver que es localmente conexo, basta considerar un punto $x \in I$ y V una vecindad arbitraria de x. Luego, por ser V

abierto existe $B_r(x) = (x - r, x + r)$ contenida en V, la cual es conexa. Enseguida veremos el ejemplo de un dendroide que no es dendrita, conocido como el abanico armónico.

Ejemplo 1.3.13. *Sean $p = (1, 0)$ y $q_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$, con $n \in \mathbb{N}$. Considere L_n el segmento de recta que va de p a q_n para cada $n \in \mathbb{N}$ y $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$. Luego $X = \overline{U}$ es el continuo conocido como el abanico armónico con vértice p (ver figura 1.5). Este continuo no es localmente conexo en el punto $o = (0, 0)$.*

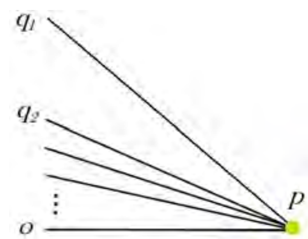

Figura 1.5: Ilustración del abanico armónico.

Las bolas abiertas del punto $(0, 0)$ son como en la figura 1.6, razón por la cual, no existen vecindades abiertas y conexas de $(0, 0)$. Por este motivo, el abanico armónico no es localmente conexo en $(0, 0)$.

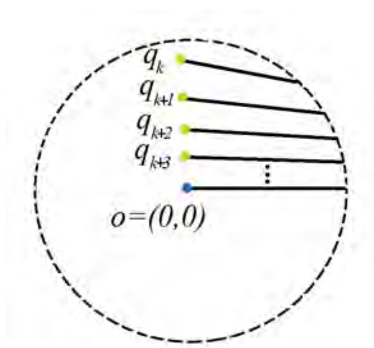

Figura 1.6: Ilustración de una vecindad del punto $(0, 0)$ en el abanico armónico.

Los hiperespacios de un continuo X son ciertas familias de subconjuntos de X que cumplen alguna característica. Enseguida presentamos los que estaremos utilizando en este trabajo.

Definición 1.3.14. *Dado un continuo X, denotamos por $\mathbf{2}^X$ a la colección de todos los subconjuntos cerrados y no vacíos de X. A este espacio $\mathbf{2}^X$ se le conoce como el* **hiperespacio de los subconjuntos cerrados y no vacíos de X**.

Definición 1.3.15. *Dado un continuo X, denotamos por* $\boldsymbol{C(X)}$ *a la colección de todos los subconjuntos cerrados, conexos y no vacíos de X. A este espacio* $\boldsymbol{C(X)}$ *se le conoce como el* ***hiperespacio de los subcontinuos de X***.

Definición 1.3.16. *Sea X un continuo. Si $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$, la* ***nube de radio ϵ con centro en*** *A, denotada por $N(\epsilon, A)$, es* $\boldsymbol{N(\epsilon, A) = \{x \in X : \textit{existe } a \in A \textit{ tal que } d(a, x) < \epsilon\}}$.

Ejemplo 1.3.17. *Considere $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidiana y $A = \overline{B_1((0,0))}$. Entonces la nube de $N\left(\frac{1}{2}, A\right)$ es la bola abierta $B_{\frac{3}{2}}((0,0))$ (ver figura 1.7).*

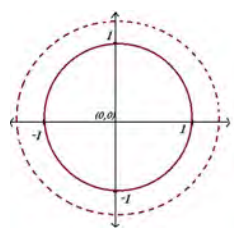

Figura 1.7: Representación gráfica de la nube $N\left(\frac{1}{2}, \overline{B_1((0,0))}\right)$.

Proposición 1.3.18. *Sean X un continuo y A, B subconjuntos cerrados de X. La función $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ definida como:*

$$H(A, B) = inf\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}$$

es una métrica para 2^X.

Demostración. Primero veamos que la función H está bien definida. Para ello veamos que el conjunto $E = \{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}$ es acotado inferiormente y no vacío.

Es claro que el conjunto E está acotado inferiormente por cero. Luego, como para todo $x, y \in X$ se tiene que $d(x, y) < diám(X) + 1$, donde $diám(X) = sup\{d(x, y) : x, y \in X\}$ es conocida como la función diámetro. Entonces $A \subset N(diám(X) + 1, B)$ y $B \subset N(diám(X) + 1, A)$. Luego $\epsilon = diám(X) + 1$ está en E. Se sigue que E es distinto del vacío. Por tanto la función H está bien definida.

Ahora probemos que H es una métrica:

Como el conjunto E está acotado inferiormente por el cero, entonces para cualesquiera $A, B \in 2^X$, $H(A, B) \geq 0$.

Nótese que $\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\} = \{\epsilon > 0 : B \subset N(\epsilon, A) \text{ y } A \subset N(\epsilon, B)\}$, entonces $H(A, B) = H(B, A)$.

Dados $A, B \in 2^X$, probemos que si $H(A, B) = 0$, entonces $A = B$. Sean $\epsilon > 0$ y $a \in A$. Como $H(A, B) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \epsilon$, para cada $\epsilon > 0$, y $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Luego, como $a \in A$ se sigue que $a \in N(\delta, B)$, es decir, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta < \epsilon$, esto implica que $b \in B_\epsilon(a) \cap B$. Por la arbitrariedad de ϵ, se sigue que a es un punto límite de B. Luego $a \in \overline{B}$, pero como $B \in 2^X$, entonces $B = \overline{B}$, por tanto $a \in B$. Por arbitrariedad de a, se sigue que $A \subset B$, análogamente se prueba que $B \subset A$ y se concluye que $A = B$.

El recíproco es más sencillo, como $A = B$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $A \subset N\left(\frac{1}{n}, B\right)$ y $B \subset N\left(\frac{1}{n}, A\right)$, se sigue que $H(A, B) = 0$.

Finalmente, veamos que para cada $A, B, C \in 2^X$ tenemos que $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$. Consideremos U y V los siguientes conjuntos:

$$U := \{\epsilon + \delta : A \subset N(\epsilon, B), B \subset N(\epsilon, A), B \subset N(\delta, C) \text{ y } C \subset N(\delta, B)\} \text{ y}$$
$$V := \{\beta > 0 : A \subset N(\beta, C) \text{ y } C \subset N(\beta, A)\}.$$

Nótese que si $U \subset V$ terminamos la prueba, pues el ínfimo de V es menor o igual que el ínfimo de U. Sean $a \in A$ y $\beta = \epsilon + \delta \in U$, entonces existe $b \in B$ y $c \in C$ tales que $d(a, b) < \epsilon$ y $d(b, c) < \delta$. Por ser d métrica, $d(a, c) < d(a, b) + d(b, c) < \epsilon + \delta = \beta$. Por lo tanto, $A \subset N(\beta, C)$. De igual manera se prueba que $C \subset N(\beta, A)$. Se sigue que $U \subset V$, en consecuencia, H es una métrica. □

A la métrica H se le conoce como la métrica de Hausdorff. Durante este trabajo, se estará trabajando en $C(X)$ con la métrica de Hausdorff de 2^X restringida a $C(X)$. Intuitivamente, esta métrica nos asegura que la distancia entre dos conjuntos es muy pequeña, casi cero, si prácticamente los conjuntos están empalmados (ver figura1.8).

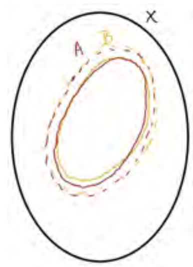

Figura 1.8: Conjuntos cuya distancia respecto a la métrica de Hausdorff es muy cercana a cero.

1.4. Límite superior y límite inferior

Definición 1.4.1. *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de 2^X.*

El **límite superior** *de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, denotado por **lím sup** A_n, es:*

$$\textbf{lím sup } A_n = \{x \in X : \textit{Para cada vecindad } V \textit{ de } x, V \cap A_n \neq \emptyset \textit{ para una infinidad de n's}\}.$$

El **límite inferior** *de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, denotado por **lím inf** A_n, es:*

$$\textbf{lím inf } A_n = \{x \in X : \textit{Para cada vecindad } V \textit{ de } x, \textit{ existe } N \in \mathbb{N} \textit{ tal que } V \cap A_n \neq \emptyset \textit{ si } n \geq N\}.$$

Definición 1.4.2. *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de 2^X.*
Diremos que el **límite** *de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, denotado por **lím** A_n, existe respecto a la métrica de Hausdorff y lím $A_n = A$ siempre que lím inf $A_n = A =$ lím sup A_n.*

El siguiente ejemplo muestra que el límite superior y el límite inferior de una sucesión, pueden ser distintos. En consecuencia, el límite de la sucesión no existe.

Ejemplo 1.4.3. *Sea $X = [0,1] \times [0,1]$. Considere la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera:*

Si n es un número impar, $A_n = [0,1] \times \left\{\frac{1}{n}\right\}$, y si n es un número par, $A_n = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times \left\{\frac{1}{n}\right\}$ (ver figura 1.9). Entonces lím sup $A_n = [0,1] \times \{0\}$ y lím inf $A_n = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times \{0\}$.

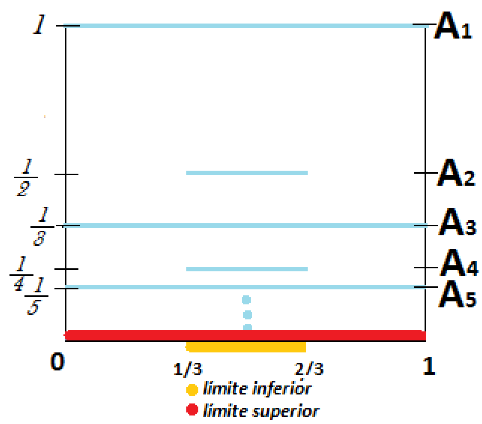

Figura 1.9: Ejemplo de una sucesión cuyo límite inferior y límite superior no coinciden.

Observación 1.4.4. *De la definición de límite superior e inferior se sigue que, para cualquier sucesión* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de elementos en* 2^X, *lím inf* $A_n \subset$ *lím sup* A_n, *ya que si* $x \in$ *lím inf* A_n, *entonces para toda vecindad* V *de* x *se tiene que* V *intersecta a todos los* $A_n's$, *excepto una cantidad finita. En particular,* V *intersecta una infinidad de* A_n. *Por tanto,* x *pertenece a lím sup* $A_{n's}$ *y lím inf* $A_n \subset$ *lím sup* A_n.

La siguiente proposición muestra otras propiedades del límite superior y del límite inferior:

Proposición 1.4.5. *Sean* X *un continuo y* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* 2^X. *Entonces:*

1. *lím sup* A_n *y lím inf* A_n *son subconjuntos cerrados de* X.

2. *lím inf* $A_n = \{$*lím* $x_n : x_n \in A_n\}$ *y lím sup* $A_n = \left\{\text{lím } x_{n_j} : x_{n_j} \in A_{n_j}\right\}$.

Demostración.

1) Probemos que lím sup A_n es cerrado. Para ello probemos que lím sup A_n contiene todos sus puntos de acumulación. Sean x un punto de acumulación de lím sup A_n y V una vecindad arbitraria de x. Entonces lím sup $A_n \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset$, se sigue que $(V \cap \text{lím sup } A_n) - \{x\} \neq \emptyset$. Sea $w \in (V \cap \text{lím sup } A_n) - \{x\}$, luego $w \in V$ y $w \in$ lím sup A_n. Como U es un abierto que contiene a w y $w \in$ lím sup A_n, se sigue que $V \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$. Luego, por arbitrariedad de V, $x \in$ lím sup A_n y por tanto lím sup A_n es cerrado. Análogamente se prueba que lím inf A_n es cerrado.

2) Ahora mostremos que $\text{lím inf } A_n = \{\text{lím } x_n : x_n \in A_n\}$. Es decir, probemos que $\text{lím inf } A_n \subset \{\text{lím } x_n : x_n \in A_n\}$ y $\text{lím inf } A_n \supset \{\text{lím } x_n : x_n \in A_n\}$.

Veamos primero que $\text{lím inf } A_n \supset \{\text{lím } x_n : x_n \in A_n\}$. Sea $x \in \{\text{lím } x_n : x_n \in A_n\}$, entonces $x = \text{lím } x_n$ para alguna sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \in A_n$. Sea V una vecindad de x, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $V \cap \{x_n\} \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Luego, $V \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$, pues $x_n \in A_n$. Se sigue que $x \in \text{lím inf } A_n$ y así $\text{lím inf } A_n \supset \{\text{lím } x_n : x_n \in A_n\}$.

Ahora probemos que $\text{lím inf } A_n \subset \{\text{lím } x_n : x_n \in A_n\}$. Sea $x \in \text{lím inf } A_n$ y consideremos $B_{\frac{1}{k}}(x)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ (las bolas existen pues X es un espacio métrico), entonces existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{k}}(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq N_k$. Nótese que:

$$B_1(x) \supset B_{\frac{1}{2}}(x) \supset \cdots \supset B_{\frac{1}{k}}(x) \supset B_{\frac{1}{k+1}}(x) \supset \cdots,$$

entonces $N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_k \leq N_{k+1} \leq \cdots$. Sean $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_{N_1-1} \in A_{N_1-1}$. Ahora, si $\left(B_1(x) \cap \bigcup_{n\geq N_1} A_n\right) - \left(B_1(x) \cap \bigcup_{n\geq N_2} A_n\right) \neq \emptyset$, considere:

$$x_{N_1} \in (A_{N_1} \cap B_1(x)), x_{N_1+1} \in (A_{N_1+1} \cap B_1(x)), \ldots, x_{N_2-1} \in (A_{N_2-1} \cap B_1(x)).$$

Por otra parte, si $\left(B_1(x) \cap \bigcup_{n\geq N_1} A_n\right) - \left(B_1(x) \cap \bigcup_{n\geq N_2} A_n\right) = \emptyset$ no es difícil convencerse que $N_1 = N_2$. En este caso, consideramos $\left(B_{\frac{1}{2}}(x) \cap \bigcup_{n\geq N_2} A_n\right) - \left(B_{\frac{1}{2}}(x) \cap \bigcup_{n\geq N_3} A_n\right)$. Si este conjunto es distinto del vacío, entonces sean:

$$x_{N_2} \in \left(A_{N_2} \cap B_{\frac{1}{2}}(x)\right), x_{N_2+1} \in \left(A_{N_2+1} \cap B_{\frac{1}{2}}(x)\right), \ldots, x_{N_3-1} \in \left(A_{N_3-1} \cap B_{\frac{1}{2}}(x)\right).$$

De igual manera, si $\left(B_{\frac{1}{2}}(x) \cap \bigcup_{n\geq N_2} A_n\right) - \left(B_{\frac{1}{2}}(x) \cap \bigcup_{n\geq N_3} A_n\right) = \emptyset$ entonces $N_2 = N_3$ y consideremos ahora el conjunto $\left(B_{\frac{1}{3}}(x) \cap \bigcup_{n\geq N_3} A_n\right) - \left(B_{\frac{1}{3}}(x) \cap \bigcup_{n\geq N_4} A_n\right)$. Repetimos este proceso para construir la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

En el caso de que $\left(B_{\frac{1}{K}}(x) \cap \bigcup_{n\geq N_K} A_n\right) - \left(B_{\frac{1}{K}}(x) \cap \bigcup_{n\geq N_{K+1}} A_n\right) = \emptyset$ a partir de cierto número N_K. Entonces se tiene que $N_K = N_{K+1} = N_{K+2} = \cdots$. En consecuencia $x \in A_{N_j}$ para cada $j \geq K$ y se puede considerar $x_{N_K} = x_{N_{K+1}} = \cdots = x_{N_{K+i}} = \cdots = x$.

Entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, ya que para toda vecindad V de x existe un K tal que $B_{\frac{1}{K}}(x) \subset V$, esto es, $V \cap \{x_n\}_{n\geq K} \neq \emptyset$. Además por construcción $x_n \in A_n$. Así se sigue que

$x \in \{\text{lím } x_n : x_n \in A_n\}$, es decir, $\text{lím inf } A_n \subset \{\text{lím } x_n : x_n \in A_n\}$. Por lo tanto, $\text{lím inf } A_n = \{\text{lím } x_n : x_n \in A_n\}$.

Para probar que $\text{lím sup } A_n = \left\{\text{lím } x_{n_j} : x_{n_j} \in A_{n_j}\right\}$ procedemos de manera similar. Primero probemos que $\text{lím sup } A_n \supset \left\{\text{lím } x_{n_j} : x_{n_j} \in A_{n_j}\right\}$. Sea $x \in \left\{\text{lím } x_{n_j} : x_{n_j} \in A_{n_j}\right\}$ entonces $x = \text{lím } x_{n_j}$ para $x_{n_j} \in A_{n_j}$. Considere V una vecindad de x, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $V \cap A_{n_m} \neq \emptyset$ para todo $m \geq M$, es decir, V intersecta una infinidad de $A'_{n_j}s$. Por lo tanto, $x \in \text{lím sup } A_n$.

Para probar que $\text{lím sup } A_n \subset \left\{\text{lím } x_{n_j} : x_{n_j} \in A_{n_j}\right\}$ se consideran los abiertos $B_{\frac{1}{k}}(x)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces debe existir un A_{n_k} tal que a partir de k, la intersección de ambos conjuntos sea distinta del vacío (como en la prueba de $\text{lím inf } A_n$). Ahora construimos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de tal manera que cada $x_k \in B_{\frac{1}{k}}(x) \cap A_{n_k}$. □

Otro resultado interesante sobre el límite inferior en dendroides es el siguiente, cuya prueba no la realizamos en este trabajo, sin embargo puede encontrarse en [14, Proposición 3.7, pág. 35].

Proposición 1.4.6. *Sean X un dendroide y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos conexos de X. Entonces el $\text{lím inf } A_n$ es conexo.*

1.5. Funciones de Whitney

Las funciones de Whitney son una manera de medir el tamaño de elementos de un hiperespacio y en esta sección hablaremos de ellas.

Definición 1.5.1. *Sea X un continuo. Una* **función de Whitney** *para 2^X, es una función continua $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ tal que $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$ y $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$.*

En [2, Teorema 2.9, pág. 27] se garantiza la existencia de funciones de Whitney para el hiperespacio 2^X.

Como el hiperespacio $C(X)$ es un subconjunto propio de 2^X, también tendremos funciones de Whitney para $C(X)$, el siguiente teorema asegura este hecho.

Teorema 1.5.2. *Sean X un continuo y $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ una función de Whitney para 2^X. Entonces $\mu|_{C(X)}$ es una función de Whitney para $C(X)$.*

Demostración. Primero veamos que $\mu|_{C(X)}$ es una función continua. Sea U un abierto en $\mathbb{R}$ y probemos que $(\mu|_{C(X)})^{-1}(U)$ es un abierto en $C(X)$. Como μ es una función de Whitney en 2^X, entonces μ es continua y se sigue que $\mu^{-1}(U)$ es abierto en 2^X. Entonces $\mu^{-1}(U) \cap C(X)$ es un abierto en $C(X)$, pero $\mu^{-1}(U) \cap C(X) = (\mu|_{C(X)})^{-1}(U)$. Del teorema 1.2.2, $\mu|_{C(X)}$ es una función continua.

Ahora, la prueba de que para cada $x \in C(X)$ se tiene que $\mu|_{C(X)}(\{x\}) = 0$, es inmediata pues $\mu|_{C(X)}(\{x\}) = \mu(\{x\}) = 0$. Del mismo modo, como $\mu|_{C(X)}(A) = \mu(A)$ para cada $A \in C(X)$, por ser $C(X)$ un subconjunto de 2^X, entonces se sigue que si $A, B \in C(X)$ tal que $A \subsetneq B$, se tiene que $\mu|_{C(X)}(A) < \mu|_{C(X)}(B)$. Por tanto, $\mu|_{C(X)}$ es una función de Whitney para $C(X)$. □

De este modo garantizamos la existencia de funciones de Whitney para el hiperespacio $C(X)$.

Por otro lado, como $\mu(X) = r$, para algún $r \in \mathbb{R}$, y $[0, r]$ y $[0, 1]$ son homeomorfos, podemos considerar las funciones de Whitney como funciones $\mu : 2^X \to [0, 1]$. A partir de este momento se estará trabajando sólo con funciones de Whitney de $C(X)$ al $[0, 1]$.

Un ejemplo de una función de Whitney en $C(X)$ es el siguiente:

Ejemplo 1.5.3. *Sean $X = [0, 1]$ y $\mu : C(X) \to [0, 1]$, definida para cada $A \in C(X)$ con $A = [a, b]$ y $0 \leq a \leq b \leq 1$, de la forma $\mu([a, b]) = |b - a|$.*

A continuación se verifica que μ efectivamente es una función de Whitney para $C(X)$.

Primero veamos que μ es una función continua. Sea $\{[x_n, y_n]\}$ una sucesión de elementos de $C(X)$ que convergen a $[x, y] \in C(X)$, respecto a la métrica de Hausdorff. Luego, se concluye que x_n converge a x e y_n converge a y. Entonces $\{\mu([x_n, y_n])\} = \{|y_n - x_n|\}$ y por otro lado,

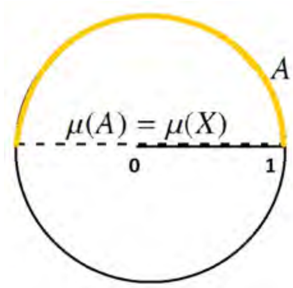

Figura 1.10: Ejemplo en el que la función diámetro no es una función de Whitney.

$\mu([x, y]) = |y - x|$ y como x_n converge a x y y_n converge a y, entonces $\{|y_n - x_n|\} \to |y - x|$, por el teorema 1.2.3 μ es continua.

Para las otras condiciones, es fácil ver que $\mu(\{x\}) = |x - x| = 0$ y, si $A, B \in C(X)$ son tales que $A \subset B$, entonces se puede suponer $A = [a, b]$ y $B = [c, d]$ con $c \leq a$ y $b \leq d$. Se sigue que $\mu(A) = |b - a|$ y $\mu(B) = |d - c|$, pero como $A \subset B$, sin pérdida de generalidad, se puede suponer $c < a \leq b \leq d$, entonces $|b - a| < |d - c|$.

Nótese que en el ejemplo anterior μ es la función diámetro, pero esta función no siempre es una función de Whitney, de hecho, saber si existe algún otro continuo en el que el diámetro es una función de Whitney, es un problema abierto [11, Problema 1, pág. 279].

El siguiente ejemplo prueba que el diámetro no es una función de Whitney en $C\left(S^1\right)$.

Ejemplo 1.5.4. *Sea $X = S^1$ y $\mu : C(X) \to [0, 1]$ la función diámetro.*
Si $A = \left\{(x, y) : 0 \leq y,\ x^2 + y^2 = 1\right\}$, entonces se tiene que A es un subcontinuo propio de X, pero $\mu(A) = 2 = \mu(X)$, (ver figura 1.10). Por lo que la función diámetro no es una función de Whitney en $C\left(S^1\right)$.

Una representación gráfica que usualmente se da al hiperespacio $C(X)$ es la de un "cono". Por ejemplo, si el continuo con el que estamos trabajando es S^1, entonces $C(S^1)$ es homeomorfo al disco ([1, Sección 3.2, pág. 321]), el cual es homeomorfo a un cono, donde los conjuntos que contienen un solo punto (que en este trabajo estaremos llamando singulares) se encuentran en la parte baja, mientras que S^1 se localiza en la parte superior. Hay que destacar que no se está diciendo que el hiperespacio $C(X)$, de cualquier continuo X, es homeomorfo al cono, sin embargo este sirve como esquema para ilustrar algunas propiedades importantes.

La figura 1.11 ayudará a una mejor comprensión de las funciones de Whitney. Si X es un continuo y μ es una función de Whitney de $C(X)$ al $[0, 1]$, entonces los singulares se representan en la base del cono. Se representan en la parte baja pues su imagen bajo μ es cero, es decir, tienen tamaño cero. X se representa en la parte alta del cono pues su imagen bajo μ es 1, esto quiere decir que X es el conjunto de mayor tamaño en X, lo cual suena razonable. Ahora, cualquier otro elemento de $C(X)$ entre los conjuntos de un solo elemento y X se representan en un nivel más arriba de la base, pero más abajo del total, ya que la imagen bajo μ es mayor que cero, pero menor que 1.

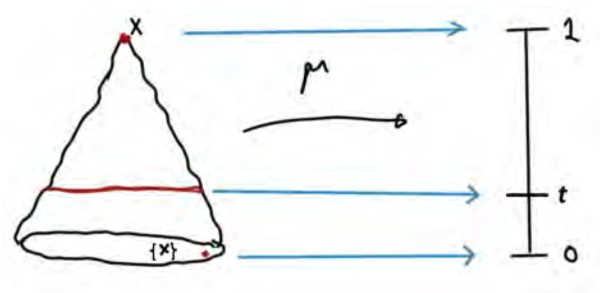

Figura 1.11: Esquema que relaciona las funciones de Whitney y $C(X)$.

1.6. Retracciones

Definición 1.6.1. *Sean X un continuo, $A \subset X$ y $r : X \to A$ una función continua. Si $r|_A$ es tal que, para cada $x \in A$, $r(x) = x$, diremos que r es una* **retracción** *de X en A y a A se le llama* **retracto** *de X.*

Veamos el ejemplo de una retracción, para ello considere el abanico armónico con vértice p, como en el ejemplo 1.3.13. Sea $o = (0, 0)$, verifiquemos que op es un retracto de X.

Sea $r : X \to op$ definida como $r((x, y)) = (x, 0)$, es decir, proyectamos el abanico armónico verticalmente sobre el arco op.

Probemos que r es una función continua. Consideremos $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X que converge en X, $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to (x, y)$. Por definición $\{r((x_n, y_n))\} = \{(x_n, 0)\}$ y $r((x, y)) = (x, 0)$ y como $x_n \to x$, entonces $\{(x_n, 0)\} \to \{(x, 0)\}$, es decir, $\{r(x_n, y_n)\} \to r(x, y)$. Por tanto, por el teorema 1.2.3, r es una función continua.

Probemos que $r|_{op}$ es la función identidad en op. Sea $(x, y) \in op$, entonces $y = 0$, es decir, $(x, y) = (x, 0)$ pero por definición de r se tiene $r((x, 0)) = (x, 0)$. Como consecuencia $r|_{op}$ es la identidad en op. Concluimos que r es una retracción de X, lo cual implica que op es un retracto de X.

Capítulo 2

Suavidad y Ultrasuavidad

Durante este capítulo, introduciremos las definiciones de suavidad y ultrasuavidad en dendroides (suavidad y ultrasuavidad tipo I) y en continuos hereditariamente unicoherentes (suavidad y ultrasuavidad tipo II). Ejemplificaremos cada una de estas definiciones y veremos algunos resultados con estas definiciones (suavidad tipo I y II y ultrasuavidad tipo I y II).

2.1. Suavidad y ultrasuavidad en dendroides

Definición 2.1.1. *Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que X es* **suave en p tipo I** *si X es un dendroide y para toda sucesión $\{z_n\}$ de puntos de X que convergen a z en X, se tiene que $\lim_{n\to\infty} pz_n = pz$. En este caso al punto p le llamaremos* **punto de suavidad tipo I**. *Y diremos que X es* **suave tipo I** *si X tiene al menos un punto de suavidad tipo I.*

El intervalo I es un continuo suave tipo I en cualquiera de sus puntos. Si $y \in I$, para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ que converge a $x \in I$ se tiene que los arcos yx_n convergen al arco yx.

El doble abanico (ver figura 2.1) es un dendroide que se construye de la siguiente manera. Considere el abanico armónico y su reflexión respecto a la recta paralela al eje Y y que pasa por el punto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Entonces estos abanicos armónicos unidos al arco que va del punto $(1, 0)$ al punto $(-2, 0)$ forman este doble abanico.

Este doble abanico no es suave tipo I, veamos por qué no. Notemos que por la simetría de

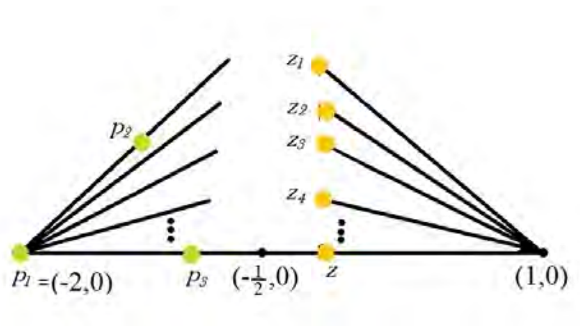

Figura 2.1: Ilustración del doble abanico, el cual no cumple suavidad tipo I.

este doble abanico, solo hay tres tipos de puntos que podemos contemplar para ver si son puntos de suavidad tipo I, p_1, p_2 y p_3, como se muestran en la figura 2.1, los cuales son puntos en el abanico que está del lado izquierdo del punto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. El punto p_1 es el vértice de dicho abanico, el punto p_3 es cualquier punto sobre el arco que va del punto $(0, 0)$ al punto $(-2, 0)$ y el punto p_2 es cualquier punto restante de este mismo abanico. Consideramos sólo estas tres clases de puntos, pues cualquier otro punto está representado en alguna de estas tres clases. Considere una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como en la figura 2.1 y note que dicha sucesión se encuentra en el abanico del lado derecho del punto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Ahora, si $p \in \{p_1, p_2, p_3\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} pz_n$ no converge al arco pz. Por lo tanto el doble abanico no es suave tipo I.

Ejemplo 2.1.2. *El continuo conocido como la chafaldrana (ver figura 2.2) tampoco es suave tipo I.*

La chafaldrana es homeomorfo al continuo cuya construcción es la siguiente. Sean $z = (0, 0)$, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\left(0, -\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Definimos U_n para cada $n \in \mathbb{N}$ como la unión entre los segmentos de recta que van del punto z al punto q_n, del punto q_n al punto s_n y del punto s_n al punto w_n. Sea $U = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$, entonces $\overline{U}$ es homeomorfo al continuo conocido como la chafaldrana.

Ahora veamos que la chafaldrana no es suave tipo I. Considere p_1 y p_2 donde p_2 representa cualquier punto sobre U y p_1 es cualquier otro punto (ver figura 2.2), si $p \in \{p_1, p_2\}$. Entonces la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n = w_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y converge a $z = (0, 0)$, es tal que $\lim\limits_{n\to\infty} pz_n$ no converge al arco pz.

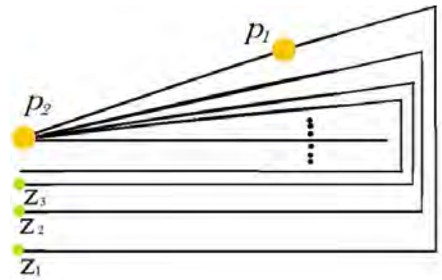

Figura 2.2: Ejemplo que ilustra un continuo que no es suave tipo I.

Definición 2.1.3. *Sean X y Y dendroides, $f : X \to Y$ una función continua y $p, b \in X$. Decimos que f* **preserva el orden parcial $\leq_p$ tipo I** *si para cada $a \in pb$ se cumple que $f(a) \in f(p)f(b)$.*

Ejemplo 2.1.4. *Sean X el abanico armónico con vértice p y $r : X \to op$ definida como $r((x, y)) = (x, 0)$. Entonces r es una función que preserva el orden parcial $\leq_p$ tipo I.*

A continuación veremos que efectivamente, r preserva el orden parcial $\leq_p$ tipo I. Sean $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$ puntos en X tales que $a \in pb$. Nótese que como $a \in pb$ entonces $b_1 \leq a_1$. Al considerar las imágenes de a y b bajo la función r se tiene que $r(a) = (a_1, 0)$ y $r(b) = (b_1, 0)$. Y como $b_1 \leq a_1$, se sigue que $r(a) \in pr(b)$. Por lo tanto, r es una función que preserva el orden $\leq_p$ tipo I.

El ejemplo de una función que no preserva el orden $\leq_p$ tipo I es el siguiente:

Ejemplo 2.1.5. *Considere $X = [0, 1]$, $p = 0$ y $f : I \to I$ la siguiente función.*

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \leq \frac{1}{2} \\ \\ 1 - x & si \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Para ver que f no preserva el orden parcial $\leq_p$ tipo I. Sea $a = \frac{1}{2}$ y $b = 1$, entonces $a \in pb$ pero $f(a) \notin pf(b)$ pues $f(a) = \frac{1}{2}$, $f(b) = 0$ y $f(p) = p = 0$. Por lo tanto f no preserva el orden $\leq_p$ tipo I.

Definición 2.1.6. *Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que X es* **ultrasuave en p tipo I** *si X es dendroide y para cada $x, y \in X$, existe una retracción $r : X \to px \cup py$ que preserva el* *orden parcial $\leq_p$ tipo I. En este caso al punto p le llamaremos* **punto de ultrasuavidad tipo I**. *Y diremos que X es* **ultrasuave tipo I** *si X tiene al menos un punto de ultrasuavidad tipo I.*

Un ejemplo de un continuo ultrasuave tipo I es el siguiente.

Ejemplo 2.1.7. *Sean $X = [0, 1]$ y $p = 0$. Entonces p es un punto de ultrasuavidad tipo I de X.*

A continuación verificamos que $X = [0, 1]$ es ultrasuave en $p = 0$ tipo I. Sean x e y puntos arbitrarios en X, sin pérdida de generalidad podemos suponer $x \leq y$. Consideremos $r : [0, 1] \to xp \cup py$ dada de la siguiente manera:

$$r(z) = \begin{cases} z & si \quad z \leq y \\ \\ y & si \quad z > y \end{cases}.$$

Probemos que r es una retracción, para ello hay que verificar que r es una función continua y que restringida a $xp \cup py$ es la identidad. De la definición de r se tiene que $r|_{xp \cup py}$ es la identidad, así sólo falta ver que r es continua.

Sea U un abierto arbitrario en $xp \cup py$. Notemos que, como $p = 0$ y $x \leq y$, $px \subset py$, entonces $xp \cup py = py$. Luego $U = py \cap V$, con V abierto en $\mathbb{R}$. Si $y \notin U$, entonces $r^{-1}(U) = U$ el cual es un abierto en $[0, 1]$ pues $V \cap [0, 1] = U$. Si $y \in U$, entonces $r^{-1}(U) = U \cup (y, 1]$, el cuál es abierto ya que $V \cup (y, \infty)$ es un abierto en $\mathbb{R}$ y $V \cup (y, \infty) \cap [0, 1] = U \cup (y, 1]$. Por tanto, por el teorema 1.2.2, r es continua y se concluye que r es una retracción.

Ahora, veamos que r preserva el orden parcial $\leq_p$ tipo I, lo cual no es difícil de comprobar dado que se tienen dos casos muy particulares. Sea b un punto arbitrario en $[0, 1]$ y a un punto en el arco pb. Si $b \leq y$, entonces $r(a) = a$ y $r(a) \in pb = pr(b)$. Si $b > y$, entonces $r(b) = y$ y $r(a) \in py$ pues la imagen de r es el arco py.

Como x, y son arbitrarios se sigue que r es una retracción que preserva el orden $\leq_p$ tipo I y se concluye que el intervalo es ultrasuave tipo I.

Observación 2.1.8. *El intervalo es ultrasuave tipo I en cualquiera de sus puntos.*

Observación 2.1.9. *Existen dendroides que no tienen puntos de suavidad tipo I, como el ejemplo de la chafaldrana (ver ejemplo 2.1.2), así mismo, existen dendroides que no tienen puntos de ultrasuavidad tipo I, el doble abanico es uno de ellos y la prueba la daremos más adelante.*

Dada la observación anterior, surge la pregunta inmediata, ¿Cuál es la relación entre suavidad tipo I y ultrasuavidad tipo I? En la siguiente sección veremos que si un continuo X es ultrasuave tipo I, entonces X es suave tipo I.

2.1.1. Caracterización

En esta sección veremos cuál es la relación que existe entre suavidad tipo I y ultrasuavidad tipo I.

Teorema 2.1.10. *Sea X un continuo. Si X es ultrasuave tipo I, entonces X es suave tipo I.*

Para dar la prueba de este resultado vamos a utilizar el siguiente teorema.

Teorema 2.1.11. *Sea X un dendroide. Un punto p en X es un punto de suavidad tipo I si y sólo si para cada $x \in X$ existe una retracción $r : X \to px$ que preserva el orden parcial $\leq_p$ tipo I.*

Demostración. Sean X un dendroide y $p \in X$. Supongamos que p es un punto de suavidad tipo I de X y probemos que para cada $x \in X$ existe una retracción $r : X \to px$ que preserva el orden parcial $\leq_p$ tipo I. Sean μ una función de Whitney (se garantiza su existencia por el teorema 1.5.2) para $C(X)$ y $x \in X$ arbitrario. Se define $r_{x,p} : X \to px$ de la siguiente manera:

$$r_{x,p}(y) = \begin{cases} \text{el punto } z \text{ en } px \text{ tal que } \mu(pz) = \mu(py) & si \quad \mu(py) \leq \mu(px) \\ x & si \quad \mu(py) \geq \mu(px) \end{cases}.$$

Notemos que la función r está definida en base a una función de Whitney sobre el hiperespacio $C(X)$. El primer paso importante es recordar que de alguna manera, la función μ está midiendo el tamaño de los elementos de $C(X)$ y el segundo paso es ver que la función r está definida por casos. Sea $y \in X$, si el arco py es más grande que el arco px entonces la imagen de y bajo la función r es x (como se ilustra en la figura 2.3).

Por otra parte, si el arco py es de igual o menor tamaño que el del arco px, considere $z \in px$ tal que el tamaño de los arcos py y pz son iguales. Entonces, la imagen de y bajo r es el punto z

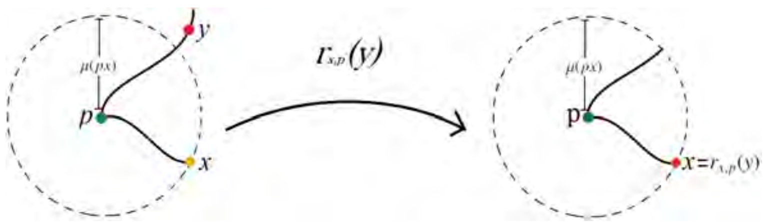

Figura 2.3: Esquema que ilustra el caso $\mu(py) \geq \mu(px)$.

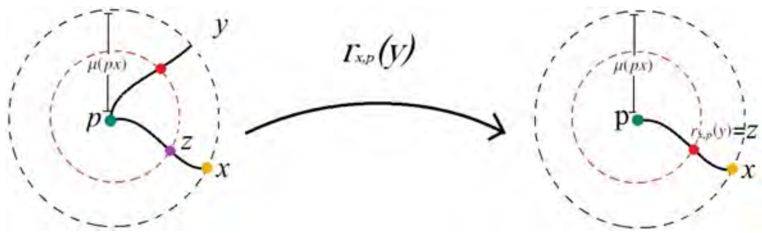

Figura 2.4: Esquema que ilustra el caso $\mu(py) \leq \mu(px)$.

(ver figura 2.4).

Probemos que $r_{x,p}$ es una retracción que preserva el orden parcial $\leq_p$ tipo I. Veamos que $r_{x,p}$ es una función continua. Sea $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a $w \in X$. Como X es suave en p tipo I, $\lim\limits_{n\to\infty} pw_n = pw$. Como μ es una función continua, la sucesión $\{\mu(pw_n)\}$ converge a $\mu(pw)$. Ahora, supongamos que $\mu(pw) \leq \mu(px)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $z_n, z \in px$ tal que $r_{x,p}(w_n) = z_n$ y $r_{x,p}(w) = z$ con $\mu(pw_n) = \mu(pz_n)$ y $\mu(pw) = \mu(pz)$, entonces la sucesión $\{\mu(pz_n)\}$ converge a $\mu(pz)$, por tanto $\{z_n\}$ converge a z, en consecuencia $\left\{r_{x,p}(w_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $r_{x,p}(w)$. Por otro lado, si estamos en el otro caso ($\mu(pw) \geq \mu(px)$), se sigue de manera inmediata que $\{z_n\}$ converge a z pues en este caso $z = x = z_n$ para n mayor o igual que algún $N \in \mathbb{N}$. Luego, por cómo se define la función, es inmediato que $r_{x,p}$ restringida al arco px es la identidad.

Sólo nos falta ver que la función preserva el orden parcial $\leq_p$ tipo I. Sea b un punto arbitrario en X y a un punto en el arco pb. Si $\mu(pb) \leq \mu(px)$, entonces $r_{x,p}(b) = z_b$ con z_b en px tal que $\mu(pb) = \mu(pz_b)$ y como $a \in pb$ se sigue que $\mu(pa) \leq \mu(pb)$, luego $r_{x,p}(a) = z_a$ con z_a en px tal que $\mu(pa) = \mu(pz_a)$, entonces z_a está en $pz_b = pr_{x,p}(b)$ y $r_{x,p}(a) \leq_p r_{x,p}(b)$; si $\mu(pb) \geq \mu(px)$ entonces $r_{x,p}(b) = x$ y por tanto la imagen de a bajo $r_{x,p}$ está en el arco px, en consecuencia $r_{x,p}(a) \leq_p r_{x,p}(b)$.

Ahora supongamos que para cada $x \in X$ existe una retracción $r : X \to px$ que preserva el orden parcial $\leq_p$ tipo I y probemos que p es un punto de suavidad tipo I de X. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a $a \in X$, entonces $\{p, a\} \subset \text{lím inf } pa_n$. La justificación de este hecho es la siguiente: Para toda vecindad V de a, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $V \cap a_N \neq \emptyset$ siempre que $n \geq N$, entonces $V \cap pa_n \neq \emptyset$ siempre que $n \geq N$, es decir, $a \in \text{lím inf } pa_n$. Y como $p \in pa_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $p \in \text{lím inf } pa_n$. Ahora, por las propiedades del límite inferior vistas en los preliminares, el lím inf pa_n es conexo (ver proposición 1.4.6), pues pa_n es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$. Además lím inf pa_n es no vacío porque $\{p, a\} \subset \text{lím inf } pa_n$ y también es cerrado en el compacto X (proposición 1.4.5), por tanto compacto. Luego, como lím inf pa_n es un subcontinuo de X y X es un dendroide, se sigue que lím inf pa_n es dendroide, en particular, lím inf pa_n es arco conexo. Como $\{p, a\} \subset \text{lím inf } pa_n$ se sigue que $pa \subset \text{lím inf } pa_n$.

Por otro lado, supongamos que existe $y \in (\text{lím sup } pa_n) - pa$ y consideremos la retracción $r : X \to py$. Como $y \in \text{lím sup } pa_n$, por la proposición 1.4.5, $y = \text{lím}\, y_{n_k}$ para $y_{n_k} \in pa_{n_k}$, luego $y_{n_k} \leq_p a_{n_k}$ para cada $n_k \in \mathbb{N}$. Como r preserva el orden parcial dado, entonces $r(y_{n_k}) \leq_p r(a_{n_k}) \leq_p y$ pues la imagen de r es el arco py. Ahora, como r es una función continua, entonces, tomando límites se tiene que $\lim\limits_{n_k\to\infty} r(y_{n_k}) \leq_p \lim\limits_{n_k\to\infty} r(a_{n_k}) \leq_p \lim\limits_{n_k\to\infty} y$, pero $y = r(y) = \lim\limits_{n_k\to\infty} r(y_{n_k})$ entonces $y = r(y) \leq_p r(a) \leq_p y$, y se sigue que $r(a) = y$. Por otro lado, como $y \notin pa$, entonces $a \neq y$ y $p \neq y$. Si $a \in py$ y como $a \neq y$, entonces $r(a) <_p y$, lo cual es una contradicción pues $r(a) = y$. Entonces se concluye que $a \notin py$ y se puede suponer que $pa \cap py = pb$ para algún $b \in X$. Luego, como $r(a) = y$ y $r(b) = b$, existe $z \in ba$ tal que $r(z) \in by$ (nótese que automáticamente $z \neq y$ y $r(z) \neq y$). Por ser X únicamente arco conexo, se sigue que $z \in ya \subset \text{lím inf } y_{n_k}a_{n_k}$ y nuevamente por la proposición 1.4.5, se tiene que $z = \lim\limits_{n_k\to\infty} z_{n_k}$, donde $z_{n_k} \in y_{n_k}a_{n_k}$. Se sigue que $r(y_{n_k}) \leq_p r(z_{n_k}) \leq_p y$, esto implica que $r(z) = y$, lo cual es una contradicción. Por tanto, lím sup $pa_n \subset pa$ y como $pa \subset \text{lím inf } pa_n$, se sigue que $\text{lím}\, pa_n$ existe y es igual a pa. Luego p es un punto de suavidad tipo I de X. □

Ahora daremos la prueba del teorema 2.1.10 que se sigue de manera inmediata del teorema anterior:

Demostración. Sea $p \in X$ un punto de ultrasuavidad tipo I, entonces por definición de ultrasuavidad tipo I, para x, y tales que $px \cup py = px$ existe una retracción $r : X \to px$ que preserva el orden parcial $\leq_p$ tipo I. Se concluye que p es punto de suavidad tipo I y por tanto, X es suave tipo I. $\square$

Del teorema 2.1.10 es inmediato notar que si un continuo no es suave tipo I, entonces tampoco es ultrasuave tipo I. Dado que ya mostramos que la chafaldrana (ver ejemplo 2.1.2) es un dendroide que no es suave tipo I, concluimos que tampoco es ultrasuave tipo I. El doble abanico tampoco es ultrasuave tipo I, pues es un dendroide que no es suave tipo I.

Por otra parte, el recíproco del teorema 2.1.10 no es cierto. El siguiente ejemplo nos ayudará a verificar el reciproco del teorema 2.1.10 es falso.

Ejemplo 2.1.12. *Sean $p = (0,0)$, $x_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ y $y_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Considere U_n, para cada $n \in \mathbb{N}$, la unión de los segmentos de recta que van del punto p al punto x_n y del punto x_n al punto y_n y sea $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ y $o = (1,0)$. Sea $X = \overline{U}$, a este continuo X se le conoce como peine $\mathbb{P}$ con vértice p (ver figura 2.5).*

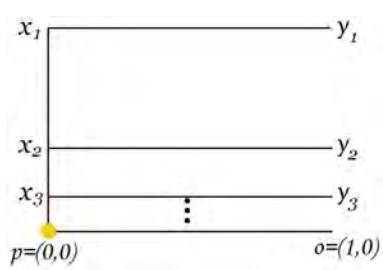

Figura 2.5: Ejemplo de un continuo con un punto de suavidad tipo I que no es punto de ultrasuavidad tipo I.

Considere X el peine $\mathbb{P}$ con vértice p como el del ejemplo 2.1.12, entonces p es punto de suavidad tipo I, pues X es un dendroide y además se cumple que para toda sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X que converge a $z \in X$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} pz_n = pz$.

Ahora veamos que p no es un punto de ultrasuavidad tipo I, ya que para los puntos o y y_1 no existe una retracción que preserve el orden. Para ver esto, supongamos que existe una retracción $r : \mathbb{P} \to po \cup py_1$ que preserva el orden $\leq_p$ tipo I. Nótese que $x_n \in py_n$ y $x_n \notin po$. Luego, para

n lo suficientemente grande $r(x_n) \in po$, por continuidad de r y porque los arcos $x_n y_n$ convergen al arco po. Por otro lado, $x_n \in py_1$, esto implica que $r(x_1) = x_1$, es decir, se tiene $x_1 \in po$ que es una contradicción.

Las siguientes proposiciones también son de gran utilidad para conocer cuando un dendroide es, o no, suave tipo I o ultrasuave tipo I.

Proposición 2.1.13. *Sea X un continuo. Si $p \in X$ y p es punto de suavidad tipo I de X, entonces X es localmente conexo en p.*

Demostración. Sea V una vecindad arbitraria de p, definimos:

$$U = \{w \in X : pw \cap (X - V) = \emptyset\}.$$

Primero notemos que $p \in U$, además, si $a \in U$ entonces el arco $pa \subset U$. La justificación de este hecho es de la siguiente manera. Sea $a \in U$ y considere $z \in pa$, luego, como $a \in U$, $pa \cap (X - V)\, \emptyset$ esto implica que $pz \cap (X - V)\, \emptyset$ pues $pz \subset pa$ por ser X únicamente arco conexo. Se sigue que $z \in U$ y por tanto, $pa \subset U$. Ahora considere $a, b \in U$, entonces el arco $ab = pa \cup pb$ está contenido en U, por tanto U es arco conexo.

Luego, por ser U arco conexo, se tiene que U es conexo, además $U \subset V$. Sólo falta verificar que U es un conjunto abierto en X, para ello probemos que $X - U$ es cerrado.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de $X - U$ que converge a $x \in X$ y mostremos que $x \in (X - U)$. Como $x_n \in X - U$ se tiene que $px_n \cap (X - V) \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, como V es abierto, $X - V$ es cerrado, esto implica que contiene a sus puntos límite, es decir, lím $px_n \cap (X - V) \neq \emptyset$. Se sigue que $px \cap (X - V) \neq \emptyset$, luego $x \notin U$ y por tanto, $x \in (X - U)$. □

Dada la proposición 2.1.13 se concluye que la unión de abanicos de la figura 2.6 no puede ser suave en p tipo I, pues el doble abanico no es localmente conexo en p.

Corolario 2.1.14. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si p es punto de ultrasuavidad tipo I, entonces X es localmente conexo en p.*

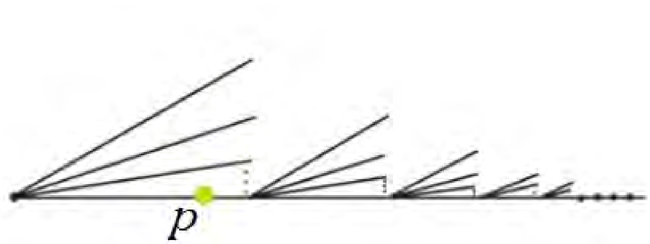

Figura 2.6: Ejemplo de un continuo donde el punto p no es punto de suavidad tipo I.

Demostración. Sea $p \in X$ tal que p es punto de ultrasuavidad tipo I de X, por el teorema 2.1.10, p es punto de suavidad tipo I. Por tanto, por la proposición 2.1.13, X es localmente conexo en p □

Corolario 2.1.15. *Sea X un continuo. Si para todo punto $p \in X$, p es un punto de suavidad tipo I de X, entonces X es una dendrita.*

Demostración. Sean X un continuo y $p \in X$ un punto arbitrario, se sigue que X es dendroide. Entonces basta probar que X es localmente conexo en p. Por la proposición 2.1.13, X es localmente conexo en p y por tanto, X es una dendrita. □

2.2. Suavidad y ultrasuavidad en continuos hereditariamente unicoherentes

Durante esta sección introducimos las definiciones de suavidad tipo II y ultrasuavidad tipo II. También se analizará si la relación que se tenía entre suavidad tipo I y ultrasuavidad tipo I, es decir, analizaremos si los puntos de ultrasuavidad tipo II, son puntos de suavidad tipo II.

Definición 2.2.1. *Diremos que X es* **hereditariamente unicoherente en p** *si para cualesquier par de subcontinuos $A, B \in X$, tal que $p \in A$ y $p \in B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

A continuación veremos que la definición 2.2.1 y la definición 1.3.10 son equivalentes.

Lema 2.2.2. *Sea X un continuo. X es hereditariamente unicoherente en p para cada punto $p \in X$ si y solo si el continuo X es hereditariamente unicoherente.*

Demostración. Supongamos que X es hereditariamente unicoherente en cada punto de X. Sean Y un subcontinuo de X y A, B subcontinuos de Y tales que $A \cup B = Y$. Considere $p \in A \cap B$, se sigue $p \in X$. Luego X es hereditariamente unicoherente en p y además $p \in A$ y $p \in B$ y A, B son subcontinuos de Y, entonces también son subcontinuos de X. Se sigue que $A \cap B$ es conexo. Luego Y es unicoherente y por lo tanto, X es hereditariamente unicoherente.

Ahora supongamos que X es hereditariamente unicoherente y veamos que X es hereditariamente unicoherente en cada punto de X. Sean $p \in X$, A y B subcontinuos de X tales que $p \in A$ y $p \in B$. Entonces $Y = A \cup B$ es un continuo, pues A y B son continuos con un punto en común, se sigue que Y es un subcontinuo de X. Como X es hereditariamente unicoherente, Y es unicoherente. Luego, $A \cap B$ es conexo. Se sigue que X es hereditariamente unicoherente en p, por lo tanto se tiene que X es hereditariamente unicoherente en cada punto de X. □

En algunos resultados de esta sección, conviene usar la definición puntual.

Antes de comenzar con suavidad y ultrasuavidad en continuos hereditariamente unicoherentes, es necesario hablar un poco más sobre continuos irreducibles. En el siguiente ejemplo se muestra que pueden existir dos continuos irreducibles distintos para dos puntos distintos.

Ejemplo 2.2.3. *Sea X el círculo de Varsovia, para los puntos a, b marcados en la figura 1.2, el arco ab marcado con color azul, es un continuo irreducible que contiene a a y b. Además, el subcontinuo homeomorfo al sen$\left(\frac{1}{x}\right)$ marcado en color vino es otro continuo irreducible que contiene a los puntos a, b.*

En un dendroide, es decir, un continuo hereditariamente unicoherente y arco conexo, los continuos irreducibles son únicos y además son arcos. Por otra parte, en un continuo hereditariamente unicoherente, los continuos irreducibles son únicos [3, Teorema 1.3 (Gordh), pág. 402]. De hecho, el teorema de Gordh enuncia más, asegura que un continuo X es hereditariamente unicoherente en p si y solo si para cada $x \in X$ existe un único subcontinuo irreducible que contiene a p y x.

Notación 2.2.4. *Sea X un continuo hereditariamente unicoherente y a, b puntos en X. $\boldsymbol{I(a, b)}$ denota el subcontinuo irreducible entre a y b contenido en X.*

Por lo tanto se puede hablar del continuo irreducible en continuos hereditariamente unicoherentes, esto asegura que la siguiente definición es válida.

Definición 2.2.5. *Sea X un continuo y $p \in X$. Diremos que X es* **suave en** p **tipo II** *si X es hereditariamente unicoherente y para cada $x \in X$ y cada sucesión $\{x_n\}_{n\in} \subset X$ tal que x_n converge a x, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} I(p, x_n) \to I(p, x)$. En este caso al punto p le llamaremos* **punto de suavidad tipo II**. *Y diremos que X es* **suave tipo II** *si X tiene al menos un punto de suavidad tipo II.*

Ejemplo 2.2.6. *El continuo $X = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ es un continuo suave tipo II. Notemos que X es un continuo que no es arco conexo, por lo tanto X no es suave tipo I.*

El siguiente ejemplo es de un continuo que no es suave tipo II.

Ejemplo 2.2.7. *El continuo conocido como continuo Knaster o herradura de Smale (ver figura 2.7) no es un continuo suave tipo II.*

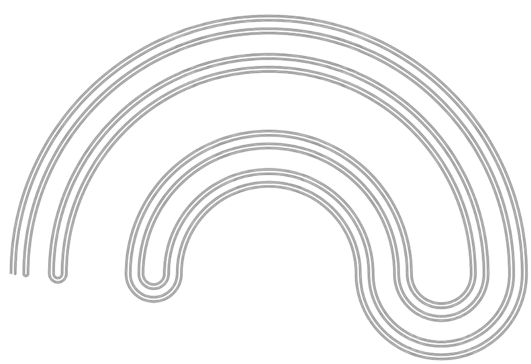

Figura 2.7: Ilustración del continuo Knaster.

Este continuo satisface lo siguiente:

1. Los únicos subcontinuos del Knaster son arcos o el propio Knaster.

2. El Knaster tiene una cantidad no numerable de arco componentes.

3. Es irreducible entre cualesquiera dos puntos que están en distintas arco componentes.

La construcción de este continuo, así como sus propiedades, se puede encontrar en [9, Additional remarks, pág. 224]. Las arco componentes de un continuo X se definen como los conjuntos maximales arco conexos, es decir, $Y \subset X$ es una arco componente de X si Y es arco conexo y cumple que para cualquier subconjunto $K \subset X$, que contiene propiamente a Y, K no es arco conexo.

El Knaster no es suave tipo II por la siguiente razón. Sean p y x puntos en la misma arco componente y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, en otra arco componente, una sucesión de puntos tal que converge a x. Dado que los únicos subcontinuos del Knaster son arcos y el Knaster, entonces por la propiedad 3 se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ el continuo $I(p, x_n)$ es el Knaster. Por otro lado, por las propiedades 1 y 2, el continuo $I(p, x)$ es el arco px. Por lo tanto, el Knaster no es suave en p tipo II.

Enseguida definiremos ultrasuavidad tipo II, pero antes veamos la siguiente definición.

Definición 2.2.8. *Sean X y Y continuos hereditariamente unicoherentes, $f : X \to Y$ una función continua y $p, b \in X$. Decimos que f* **preserva el orden $\leq_p$ tipo II** *si para cada $a \in I(p, b)$ se cumple que $f(a) \in I(f(p), f(b))$.*

Definición 2.2.9. *Sean X un continuo y $p \in X$. Diremos que X es* **ultrasuave en p tipo II**, *si X es un continuo hereditariamente unicoherente y para cada par de puntos $x, y \in X$, existe una retracción $r : X \to I(p, x) \cup I(p, y)$ que preserva el orden $\leq_p$ tipo II. En este caso, al punto p le llamaremos,* **punto de ultrasuavidad tipo II**. *Y diremos que X es* **ultrasuave tipo II** *si X tiene al menos un punto de ultrasuavidad tipo II.*

Ejemplo 2.2.10. *El continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ es un continuo hereditariamente unicoherente que no es dendroide y que es ultrasuave tipo II.*

Sea X el continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$. Considere el punto $p = (1, sen(1))$ y sean $x, y \in X$. Si x y y son puntos en el residuo, entonces $I(p, x) \cup I(p, y) = X$ y la retracción es la función identidad.

Sin pérdida de generalidad supongamos x y y puntos en el rayo y $I(p, x) \cup I(p, y) = I(p, x)$. Sea $r : X \to px$ definida de la siguiente manera:

$$r(z) = \begin{cases} z & si \quad z \in px \\ & \\ x & si \quad z \in (X - px) \end{cases}.$$

Probemos que r es una retracción y además, dados $a, b \in X$, si $a \in I(p, b)$ entonces $r(a) \in I(p, r(b))$. Primero veamos que r es una función continua, y como X es un espacio métrico, entonces basta probar que para toda sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $w \in X$, se tiene que la sucesión $\{r(w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $r(w) \in px$. Para ello consideremos 3 casos: Si $w \in (X - px)$, entonces, para n lo suficientemente grande, $w_k \in (X - px)$ siempre que $k \geq n$. Esto implica que $r(w) = x$ y $r(w_k) = x$ siempre que $k \geq n$.

Ahora consideremos $w = x$. Si w_n es un elemento de la sucesión tal que $w \in px$, entonces $r(w_n) = w_n$, por otro lado, si $w_n \in (X - px)$, entonces $r(w_n) = x$. Por tanto, como w_n converge a w cuando n tiende a infinito, entonces la sucesión $\{r(w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $r(w)$.

Finalmente, supongamos que $w \in px$ pero $w \neq x$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset px$ para todo $n \geq k$. Por lo que $r(w_k) = w_k$ para $k \geq n$. Se sigue que la sucesión $\{r(w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $r(w)$. Y por tanto, se tiene que la función r es continua.

Ver que la función $r|_{px}$ es la identidad, se sigue de manera inmediata de la definición de r.

Ahora veamos que la función cumple que si para cualesquiera $a, b \in X$ tales que si $a \in I(p, b)$, entonces $r(a) \in I(p, r(b))$. Sea b un punto arbitrario en X, si $b \in px$, no es difícil convencerse que para todo punto $a \in I(p, b)$ se tiene que $r(a) \in I(p, r(b))$. Por otra parte, si $b \in (X - px)$, nótese que el irreducible $I(p, r(b)) = I(p, x) = px$ y como la imagen de r es el arco px, entonces, $r(a) \in I(p, r(b))$. Se concluye que p es un punto de suavidad tipo II y por tanto, el continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ es ultrasuave tipo II.

El teorema 2.1.10 nos ayuda para determinar cuándo un continuo X es suave tipo I y cuándo no es ultrasuave tipo I. Por lo que surge la siguiente pregunta. ¿Será cierto que ultrasuave tipo II implica suave tipo II? En la siguiente sección veremos que la respuesta es cierta.

2.2.1. Caracterización

A continuación damos a conocer algunas definiciones necesarias y resultados necesarios para probar que ultrasuavidad tipo II también implica suavidad tipo II.

Comencemos enunciando dos resultados inmediatos de las definiciones ultrasuavidad tipo II y suavidad tipo II.

Lema 2.2.11. *Sean X un continuo ultrasuave en p tipo II y Y un subcontinuo de X, tal que $p \in Y$. Entonces Y es ultrasuave en p tipo II.*

Lema 2.2.12. *Sean X un continuo suave en p tipo II y Y un subcontinuo de X, tal que $p \in Y$. Entonces Y es suave en p tipo II.*

Lema 2.2.13. *Sea X un continuo ultrasuave en p tipo II. Entonces para cada punto $a \in X$, el irreducible $I(p,a)$ es hereditariamente unicoherente en p y para cada $x \in I(p,a)$ existe una retracción $r : I(p,a) \to I(p,x)$ que preserva el orden $\leq_p$ tipo II.*

Demostración. Ver que $I(p,a)$ es hereditariamente unicoherente no es difícil, pues como X es hereditariamente unicoherente y el irreducible $I(p,a)$ es un subcontinuo de X, entonces $I(p,a)$ es unicoherente. Sólo falta verificar que para cualquier subcontinuo Y de $I(p,a)$ se cumple que Y es unicoherente, pero como $Y \in C(I(p,a))$ y $I(p,a) \in C(X)$, entonces se sigue que $Y \in C(X)$. Por tanto Y es unicoherente y se sigue que $I(p,a)$ es hereditariamente unicoherente. Por otra parte, por el lema 2.2.11 se tiene que $I(p,a)$ es ultrasuave tipo II y por tanto, para cada $x \in I(p,a)$ existe una retracción $r : I(p,a) \to I(p,x)$ que preserva el orden $\leq_p$ tipo II. □

Dado un continuo irreducible Y se sabe que existe una función ϕ, de Y en un arco o un punto (ver [9, pág. 199-200] y [8, Fundamental theorem, pág. 259]). Esta función ϕ cumple en particular que es una función continua, suprayectiva y monótona (monótona significa que la imagen inversa de un conexo es conexa). Además es la función mínima en el sentido de que para cualquier función monótona $f : Y \to [0,1]$, cada conjunto que es imagen inversa bajo f de un punto es la unión de la imagen inversa bajo ϕ de algunos puntos [9, Theorem 1, pág. 200]. A la función ϕ se le llama ***función descomposición***.

Definición 2.2.14. *Sean X un continuo irreducible, $\phi : X \to [0,1]$ una función como la ya mencionada. Considere $T_t = \phi^{-1}(t)$, diremos que T_t es una* **fibra** *de X, para cada $t \in [0,1]$.*

Ejemplo 2.2.15. *Consideremos el continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ (ver figura 2.8). Notemos que el continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ es un continuo irreducible, pues si consideramos el punto extremo del rayo y un punto en el residuo, no existe un subcontinuo propio del continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ que contenga estos dos puntos.*

Considere la función $\varphi : sen\left(\frac{1}{x}\right) \to [0,1]$ dada por la proyección en la primera coordenada. Esta función satisface las siguientes condiciones: es continua, suprayectiva y monótona. Luego, T_0 es la barra límite y para cada $t \in (0,1)$ $T_t = \left\{\left(t, sen\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right\}$ y $T_1 = \{(1, sen(1))\}$.

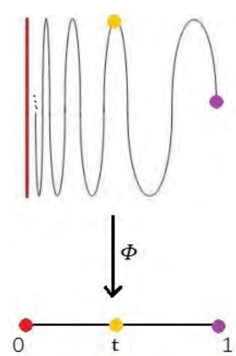

Figura 2.8: Ejemplo en el que se muestran algunas fibras del continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$.

Definición 2.2.16. *Sean X un continuo irreducible y T_t las fibras de X. Si T_t tiene interior vacío, para cada $t \in [0,1]$, entonces diremos que X es* **tipo** *λ.*

Ejemplo 2.2.17. *El continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ es un continuo tipo λ.*

Cabe mencionar que la fibra T_0 del continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ puede pensarse de interior distinto del vacío, sin embargo, recordemos que el interior de un conjunto es el abierto más grande que se queda contenido en este. Dado que los abiertos del continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ son abiertos de $\mathbb{R}^2$ intersectados con el continuo, no existe un solo abierto que se quede contenido totalmente en la barra límite.

Sea X un continuo irreducible tipo λ, nótese que el continuo irreducible se puede escribir como $X = \cup\{T_t : t \in [0,1]\}$. Ahora, para algún $t_0 \in (0,1)$ fijo, consideremos los siguientes conjuntos:

$$L_{t_0} = \bigcup\{T_u : u \in [0, t_0)\} \qquad \text{y} \qquad R_{t_0} = \bigcup\{T_v : v \in (t_0\ , 1]\},$$

Además $L_0 = R_1 = \emptyset$.

La demostración de las observaciones siguientes se pueden encontrar en [9, Teorema 7, pág. 194].

Observación 2.2.18. *Sea X un continuo irreducible tipo λ. Para cada $t \in (0,1)$, $\overline{L_t}$ es un continuo. Pues $\overline{L_t}$ es cerrado en el compacto X, es métrico por la métrica que se hereda de X, es conexo por ser $\phi : X \to [0,1]$ una función continua y monótona y es no vacío pues $p \in \overline{L_t}$. De igual manera se puede observar que $\overline{R_t}$ también es un continuo.*

Observación 2.2.19. *$\overline{L_t}$ es un continuo irreducible entre p y cualquier punto de la frontera de L_t. Análogamente R_t es un continuo irreducible entre p y cualquier punto de la frontera de R_t.*

Definición 2.2.20. *Sea X tipo λ y T_t sus fibras. Sea $t_0 \in [0,1]$ fijo, decimos que T_{t_0} es de* **cohesión por la izquierda** *(***o por la derecha***) si $t_0 = 0$, o bien, $T_{t_0} = \overline{L_{t_0}} - L_{t_0}$ (si $t_0 = 1$, o bien, $T_{t_0} = \overline{R_{t_0}} - R_{t_0}$). En caso de que una fibra sea de cohesión por la izquierda y por la derecha, diremos que es de* **cohesión***.*

Las fibras del continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$, son de cohesión.

Definición 2.2.21. *Decimos que un espacio X es* **conexo entre dos subconjuntos de** *X***,** *A* **y** *B, siempre que X no contenga un subconjunto cerrado y abierto F tal que $A \subset F$ y $B \cap F = \emptyset$.*

Nótese que, en otras palabras, decir que un espacio X es conexo entre dos de sus subconjuntos A y B quiere decir que no existe una separación U y V de X en la cual A se quede en contenido en U y $B \subset V$. Esto implica, si X es conexo, entonces para cualquier par de subconjuntos no vacíos, X es conexo entre estos (por la proposición 1.1.2). Para saber un poco más sobre esta definición, se puede consultar [9, IV. Connectedness between sets, pág. 142]. El siguiente ejemplo es conexo entre A y B, dado que el continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ es conexo.

Ejemplo 2.2.22. *Sean $X = sen\left(\frac{1}{x}\right)$, A el residuo y B el rayo, entonces X es conexo entre A y B.*

Ejemplo 2.2.23. *Sean $X = [0,1] \cup [2,3]$, $A = [0,1]$ y $B = [2,3]$. Luego, X no es conexo entre A y B, pues si definimos $F = [0,1]$, entonces F es abierto y cerrado y además $A \subset F$ y $B \cap F = \emptyset$.*

Definición 2.2.24. *Sean A y B dos subconjuntos de un continuo X. Definimos* **L(A,B)** *como el continuo irreducible en X que contiene a A y B y es tal que es conexo entre A y B.*

Definición 2.2.25. *Sean X un continuo y $x \in X$. Definimos la* **composante de** x **en** *X como el siguiente conjunto:*

$$\bigcup \{W \in C(X) : x \in W \text{ y } W \neq X\}.$$

Ejemplo 2.2.26. *Sean $X = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ y x el punto extremo del rayo. La composante de x en X es el rayo. Por otra parte, si x es un punto en el rayo y no es el extremo, entonces la composante de x en X es el continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$.*

Proposición 2.2.27. *Sea X un continuo irreducible con p y a sus puntos de irreducibilidad, hereditariamente unicoherente y $\varphi : X \to [0,1]$ la función descomposición. Si para cada $x \in X$ existe una retracción $r : X \to I(p,x)$ que preserva el orden $\leq_p$ tipo II, entonces:*

1. *X es tipo λ, y por tanto, puede ser escrito como $X = \bigcup \{T_t : t \in [0,1]\}$.*
2. *La fibra T_0 a la cual pertenece p, es un singular.*
3. *Para cada $t \in (0,1]$, la fibra T_t es de cohesión por izquierda.*

Demostración.

1) Para probar que $X = I(p,a)$ es tipo λ, es necesario ver que cada fibra del irreducible tiene interior vacío. La prueba se hace por contradicción, supongamos que existe una fibra K cuyo interior es distinto del vacío.

En [3, Teorema 1.5, pág. 404] se afirma que $I(p,a)$, es un continuo irreducible y es hereditariamente unicoherente si y solo si para cada subconjunto cerrado y no vacío F existe en X un único subcontinuo $L(p,F)$. Dado que $I(p,a)$ es irreducible y hereditariamente unicoherente, se sigue que existe un continuo $L(p,K)$.

Sean $y \in K \cap L(p, K)$ y C la composante de y en K. Luego, la composante C es un subconjunto denso en K ([12, 5.20, pág. 83]) y como *int* $K \neq \emptyset$, se tiene que $C - I(p, y) \neq \emptyset$. Pues de no ser así, $C = I(p, y)$, y por otra parte, como C es denso en K, $\overline{C} = K$, es decir, $\overline{I(p, y)} = I(p, y) = C = K$ y esto contradice la definición de composante. Luego, considere $x \in (C - I(p, y))$, entonces $x \in K$ y como $L(p, K) \subset \cap\{I(p, w) : w \in K\}$, entonces $y \in I(p, x)$. Además, como $x \notin I(p, y)$, entonces $y <_p x$. Por otra parte, como C es denso en K, existe una sucesión de puntos $y_n \in C$ tal que $y = \lim y_n$ y $I(p, x) \subset I(p, y_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \leq_p y_n$.

Sea $r : I(p, a) \to I(p, x)$ una retracción que preserva el orden $\leq_p$ tipo II. Entonces $x = r(x) \leq_p r(y_n)$ y por continuidad de r y tomando límite, tenemos que $r(y_n) = r(y) = y$. Por tanto, $x \leq_p y$, lo cual es una contradicción pues $y <_p x$. Entonces no existe K una fibra con interior distinto del vacío de $I(p, a)$, es decir, $X = I(p, a)$ es tipo λ y por tanto puede ser escrito como $X = \bigcup\{T_t : t \in [0, 1]\}$.

2) Nuevamente procedemos por contradicción para la prueba, es decir, supongamos que la fibra es un continuo T_0 no degenerado. Sean $x, y \in T_0$ tales que $y \in I(p, x)$ y $x \in (T_0 - I(p, y))$, entonces $y <_p x$.

Como se mencionó anteriormente, en el inciso 1), $intT_0 = \emptyset$. Esto implica que T_0 es de cohesión derecha, es decir, $T_0 = \overline{R_0} - R_0$. Por lo tanto, existen dos sucesiones de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tales que $x_n, y_m \in R_0$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$ y $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$.

Se sigue que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_m} \leq_p y_m$, entonces, por hipótesis existe una retracción $r : I(p, a) \to I(p, x)$ que preserva el orden $\leq_p$ tipo II, luego tenemos que $r(x_{n_m}) \leq_p r(y_m)$, de donde se sigue por continuidad de r, y tomando límite en m, que $x = r(x_{n_m}) \leq_p r(y_m) = y$, es decir, $x \leq_p y$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, la fibra T_0 que contiene a p es un singular.

3) Por definición de cohesión, tenemos que T_0 es de cohesión izquierda y por el inciso 1) T_1 es cohesión izquierda. Ahora, procedemos por contradicción, supongamos que existe $t_0 \in (0, 1)$

tal que la fibra T_{t_0} no es de cohesión izquierda, es decir, hay un punto $x \in \left(T_{t_0} - \overline{L_{t_0}}\right)$.

Por 1) tenemos que $T_t = \left(T_t \cap \overline{L_t}\right) \cup \left(T_t \cap \overline{R_t}\right)$ para cada $t \in [0,1]$ y se deduce que $x \in \left(T_{t_0} \cap \overline{R_{t_0}}\right)$. Y la conexidad de $I(p,a)$ implica que existe un punto $y \in T_{t_0} \cap \overline{L_{t_0}} \cap \overline{R_{t_0}}$, de donde se sigue que $y <_p x$.

Entonces, existen dos sucesiones de puntos, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tales que $x_n, y_m \in R_{t_0}$ para cada $n,m \in \mathbb{N}$ y $x = \text{lím}\, x_n$, $y = \text{lím}\, y_n$. Se sigue que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_m} \leq_p y_m$. Por hipótesis, existe una $\leq_p$ −retracción $r : I(p,a) \to I(p,x)$. Entonces tenemos que $r\left(x_{n_m}\right) \leq_p r\left(y_m\right)$ de donde se sigue por continuidad, y aplicando límite sobre m, que $x = r(x) = r\left(x_{n_m}\right) \leq_p r\left(y_m\right) = r(y) = y$, lo cual contradice que $y <_p x$.

Por lo tanto, no hay t_0 tal que no existe un punto en T_{t_0} que no está en la cerradura de L_{t_0}, es decir, T_t es de cohesión izquierda para todo $t \in [0,1]$. □

Proposición 2.2.28. *Sean X un continuo suave en p tipo II y Y un subcontinuo de X tal que $p \in Y$. Entonces para cada subconjunto abierto V de X que contiene a Y existe un conjunto abierto y conexo U tal que $Y \subset U \subset V$.*

Demostración. Sea V un abierto en X, tal que $Y \subset V$. Definimos

$$U = \{x \in X : I(p,x) \cap (X - V) = \emptyset\}.$$

Notemos que $U \subset V$, además U es conexo, pues U es la unión de los continuos I(p,x), en particular conexos, con un punto en común p. Probemos que U es abierto, para ello probemos que $X - U$ es cerrado.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X - U$ la cual converge a x. Notemos que si probamos que $x \in (X-U)$ habremos terminado la prueba, pues esto implica que $\overline{X - U} \subset X-U$, consecuentemente, $\overline{X - U} = X - U$. Luego, como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $X - U$, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$I\left(p, x_n\right) \cap (X - V) \neq \emptyset,$$

y como $X - V$ es cerrado, se sigue que

$$\text{lím}\,[I\,(p, x_n) \cap (X - V)] \in 2^X.$$

En consecuencia,

$$\text{lím}\,[I\,(p, x_n) \cap (X - V)] \neq \emptyset.$$

Como X es suave en p tipo II,

$$I\,(p, x) \cap (X - V) \neq \emptyset.$$

Se sigue que $x \in X - U$, entonces $X - U$ es cerrado. Por tanto U es abierto y eso termina la demostración. □

Corolario 2.2.29. *Si X es un continuo suave en p tipo II, entonces X es localmente conexo en p.*

Proposición 2.2.30. *Un continuo irreducible X es suave en p tipo II si y solo si*

a) *X es localmente conexo en p, y*

b) *Cada fibra T_t de X es de cohesión izquierda.*

Demostración. Sea X un continuo irreducible suave en p tipo II y probemos los incisos *a*) y *b*). Como X es suave en p tipo II, por el corolario 2.2.29 se concluye que X es localmente conexo en p.

A continuación probemos que cada fibra T_t de X es de cohesión izquierda. Procedemos por contradicción, supongamos que existe una fibra T_t la cual no es de cohesión por la izquierda. Como X es irreducible, por [3, Proposición 2.1, pág 408], X es tipo λ, entonces $t \neq 0$. Luego, existe $x \in \left(T_t - \overline{L_t}\right)$. Sea $y \in \overline{L_t} \cap \overline{R_t}$ y como $p \in \overline{L_t}$, tenemos que el irreducible $I(p, y) \subset \overline{L_t}$, por tanto $x \in (T_t - I(p, y))$. Como X es tipo λ y y pertenece a $\overline{R_t}$, existe una sucesión decreciente z_n de reales donde $t < z_n$, tal que podemos elegir una sucesión de puntos $y_n \in T_{z_n} \subset R_t$ con $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Como $t < z_n$, entonces $T_t \subset I\,(p, y_n)$ y además $I\,(p, y_n) = \overline{L_{z_n}}$, se sigue que $T_t \subset \overline{L_{z_n}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $T_t \subset \cap I\,(p, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} I\,(p, y_n)$, por ser $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente.

Finalmente, como $x \in T_t - I(p, y)$ concluimos que $x \in \left(\lim_{n\to\infty} I(p, y_n) - I(p, y)\right)$. Pero esto es una contradicción, pues se tenía que $\lim_{n\to\infty} I(p, y_n) = I(p, y)$ porque X es suave en p tipo II. Por tanto, cada fibra del irreducible X es de cohesión izquierda.

Ahora supongamos que X es localmente conexo en p y que cada fibra T_t de X es de cohesión izquierda. Probemos que X es suave en p tipo II, para ello primero veamos que X es hereditariamente unicoherente en p.

Sean $x \in X$ arbitrario y $\varphi(x) = t$ con φ la función descomposición. Para probar que X es hereditariamente unicoherente en p, el Teorema de Gordh ([3, Teorema 1.3 (Gordh), pág. 402]) garantiza que basta mostrar que existe un único irreducible $I(p, x)$ para cada $x \in X$. Como X es localmente conexo en p, entonces la fibra T_0 a la cual pertenece p, es singular, tenemos que $T_0 = \{p\}$ y por tanto, el único irreducible que contiene a p es el singular.

Trabajemos ahora con el caso $t > 0$. Por hipótesis, T_t es una fibra de cohesión por la izquierda, es decir, $T_t = \overline{L_t} - L_t$. Luego, como $x \in T_t$, pues $\varphi(x) = t$, entonces $x \in \left(\overline{L_t} - L_t\right)$ y además, p también pertenece a $\overline{L_t}$. Por la observación 2.2.18, $\overline{L_t}$ es un continuo, además, como $x \in \left(\overline{L_t} - L_t\right)$, entonces x es un punto de la frontera de L_t. Por la observación 2.2.19, se sigue que $\overline{L_t}$ es un irreducible entre p y x.

Ahora, supongamos que existe otro continuo Q irreducible entre p y x. Existe $y \in \left(Q - \overline{L_t}\right)$. Como cada fibra T_t de X es de cohesión izquierda, entonces $T_t \subset \overline{L_t}$, es decir, $\overline{L_t} = \varphi^{-1}([0, t])$, se sigue que $t < \varphi(y) = v$. Luego, el continuo Q contiene a p e intersecta la fibra T_v con $t < v$. Esto implica que $L_t \subset \overline{L_t} \subset Q$. Entonces, $\overline{L_t}$ es un subcontinuo propio de Q, el cual contiene a p y x y esto es una contradicción al hecho de que Q sea irreducible. Por tanto, $\overline{L_t}$ es el único continuo irreducible que contiene a p y a x.

Dado que ya sabemos que X es hereditariamente unicoherente en p, procedemos a demostrar que X es suave en p tipo II. Para probar suavidad tipo II procedemos por contradicción, supongamos que X no es suave en p tipo II, es decir, existe una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que convergen a x tal que $\lim_{n\to\infty} I(p,x_n)$ no converge a $I(p,x)$. Podemos considerar una sucesión de elementos $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \in I(p,x_n)$, $y \in (X - I(p,x))$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Por la continuidad de φ, la función descomposición, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x),$$
$$\lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = \varphi(y).$$

Además, como $y_n \in I(p,x_n)$ entonces $\varphi(y_n) \leq \varphi(x_n)$ y como $y \in (X - I(p,x))$ entonces $y \notin I(p,x)$. Se sigue que $\varphi(y)$ no es mayor o igual que $\varphi(x)$, es decir, $\varphi(x) < \varphi(y)$.

Como $\varphi(x) < \varphi(y)$, entonces consideremos $t = \frac{\varphi(y)+\varphi(x)}{2}$. Entonces $\varphi(x) < t < \varphi(y)$ y dado que la sucesión de puntos x_n convergen a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x_n) < t$ siempre que $n \geq N$. Por otro lado, como $y_n \in I(p,x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\varphi(y_n) < \varphi(x_n)$. En consecuencia, $\varphi(y_n) < t$ y como $\lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = \varphi(y)$ entonces $\varphi(y) < t$ y esto es una contradicción. Por lo tanto, X es suave en p tipo II y esto termina la prueba. □

La prueba de la siguiente proposición se puede encontrar en [3, Theorem 1.12, pág. 406].

Proposición 2.2.31. *Sean X un continuo y $p \in X$ un punto de ultrasuavidad tipo II. X es suave en p tipo II si y solo si para cada punto $x \in X$ se tiene que $I(p,x)$ es suave en p tipo II.*

Teorema 2.2.32. *Si X es un continuo ultrasuave en p tipo II, entonces X es suave en p tipo II.*

Demostración. Sean X un continuo y $p \in X$ tal que p es un punto de ultrasuavidad tipo II. Por el lema 2.2.13 para cada $x \in X$ se tiene que el continuo irreducible $I(p,x)$ es ultrasuave en p tipo II y por la proposición 2.2.27 se obtienen los siguientes puntos:

a) $I(p,x)$ es tipo λ, y por tanto, puede ser escrito como $I(p,x) = \bigcup\{T_t : t \in [0,1]\}$.

b) La fibra T_0 a la cual pertenece p, es un singular.

c) Para cada $t \in [0,1]$, la fibra T_t es de cohesión por izquierda.

Note que la fibra T_1 de un continuo irreducible $I(p,x)$ tipo λ es un singular $\{p\}$ si y solo si $I(p,x)$ es localmente conexo en p. Entonces, por el inciso b) obtenemos que $I(p,x)$ es localmente conexo en p. Por lo tanto, dado que $I(p,x)$ es localmente conexo en p, se cumple c) y la proposición 2.2.30, se tiene que $I(p, x)$ es suave en p tipo II para cada $x \in X$. Por lo tanto, por el recíproco de la proposición 2.2.31 se obtiene que el continuo X es suave en p tipo II. $\square$

Por el teorema anterior se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 2.2.33. *Si X es un continuo ultrasuave en p tipo II, entonces X es localmente conexo en p.*

Demostración. La demostración de este hecho es relativamente sencilla, por el teorema 2.2.32 se tiene que X es un continuo suave en p tipo II y por el corolario 2.2.29 se obtiene que X es localmente conexo en p. $\square$

Capítulo 3

Suavidad y Ultrasuavidad en Continuos

Dado que el conjunto de dendroides está contenido en el conjunto de los continuos hereditariamente unicoherentes, tiene sentido preguntarse cuál es la relación entre suavidad tipo I y suavidad tipo II, así como ultrasuavidad tipo I y ultrasuavidad tipo II. En este capítulo veremos estas relaciones. Además, generalizaremos las definiciones de suavidad tipo II y ultrasuavidad tipo II en la clase de los continuos. Veremos que suavidad tipo I implica suavidad tipo II y tipo III, así como ultrasuavidad tipo I implica ultrasuavidad tipo II y tipo III. También mostraremos con ejemplos que los recíprocos no son ciertos.

3.1. Relaciones entre propiedades tipo I y tipo II

La siguiente proposición relaciona suavidad tipo I con suavidad tipo II.

Proposición 3.1.1. *Sean X un dendroide y $p \in X$. X es suave en p tipo I si y solo si X es suave en p tipo II.*

Demostración. Sean X un dendroide y $p \in X$. Primero supongamos que X es suave en p tipo I y probemos que X es suave en p tipo II. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria que converge a $x \in X$, por ser X suave en p tipo I, se tiene que $\lim_{n\to\infty} px_n = px$. Luego, como X es un dendroide, es hereditariamente unicoherente. Entonces, por [3, Teorema 1.3 (Gordh), pág. 402], existe un único continuo irreducible $I(p, x_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y además, por ser arco conexo, $I(p, x_n) = px_n$. De igual manera se tiene que $I(p, x) = px$. Se sigue de manera inmediata que $\lim_{n\to\infty} I(p, x_n) = I(p, x)$. Por lo tanto, X es suave en p tipo II.

Ahora supongamos que X es suave en p tipo II y probemos que X es suave en p tipo I. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria que converge a $x \in X$ y como X es suave en p tipo II, $\lim_{n\to\infty} I(p, x_n) = I(p, x)$. Sin embargo, como X es un dendroide, por hipótesis, entonces se cumple que $I(p, x) = px$ y $I(p, x_n) = px_n$. Luego, se concluye que $\lim_{n\to\infty} px_n = px$ y por lo tanto, X es suave en p tipo I. □

Veamos ahora la siguiente proposición.

Proposición 3.1.2. *Sean X un dendroide y $p \in X$. X es ultrasuave en p tipo I si y solo si X es ultrasuave en p tipo II.*

Demostración. Sean X y $p \in X$ punto de ultrasuavidad tipo I de X, probemos que X es ultrasuave en p tipo II. Considere $x, y \in X$ puntos arbitrarios y $r : X \to px \cup py$ una $\leq_p$ −retracción. Como X es un dendroide, es hereditariamente unicoherente. Entonces, nuevamente por [3, Teorema 1.3 (Gordh), pág. 402] existe un único continuo irreducible $I(p, x)$. Además, $I(p, x) = px$ y de igual manera se tiene que $I(p, y) = py$. Por lo tanto, r es una retracción que va de X en $I(p, x) \cup I(p, y)$, es decir, $r : X \to I(p, x) \cup I(p, y)$. Luego, como r es una retracción que preserva el orden $\leq_p$ tipo II, para cualquier $b \in X$ y cada $a \in pb$ se tiene que $r(a) \in pr(b)$, esto implica que si $a \in I(p, b)$ entonces $r(a) \in I(p, r(b))$.

Ahora supongamos que X es un dendroide y que X es ultrasuave en p tipo II. Probemos que p es un punto de ultrasuavidad tipo I de X. Sean $x, y \in X$ puntos arbitrarios y $r : X \to I(p, x) \cup I(p, y)$ una retracción que preserva el orden $\leq_p$ tipo II. Luego, como X es un dendroide, entonces se tiene que $I(p, y) = py$ y $I(p, x) = px$. Por lo tanto, $r : X \to I(p, x) \cup I(p, y)$ es una retracción. Ahora, como para cada $a \in I(p, b)$ se tiene que $r(a) \in I(p, r(b))$ y X es un dendroide, entonces para cualquier $a \in pb$ se tiene que $r(a) \in pr(b)$. Por lo tanto, X es ultrasuave en p tipo I. □

Remarquemos que si X no es dendroide, entonces el recíproco de la proposición 3.1.1 y el recíproco de la proposición 3.1.2, no son ciertos. El ejemplo 2.2.6 es un continuo suave tipo II y no es suave tipo I, por no ser dendroide, el ejemplo 2.2.10 es un continuo ultrasuave tipo II y no es ultrasuave tipo I, nuevamente por no ser dendroide.

3.2. Suavidad tipo III

Definición 3.2.1. *Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que X es* **suave en** p **tipo III** *si para cada $x \in X$ y cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X que converge a x y cada subcontinuo convergente K de X tal que $p, x \in K$, existe una sucesión de subcontinuos K_n de X tal que $p, x_n \in K_n$ y $\lim_{n\to\infty} K_n = K$. En este caso a p le llamaremos* **punto de suavidad tipo III**. *Y diremos que X es* **suave tipo III** *si X tiene al menos un punto de suavidad tipo III.*

Ejemplo 3.2.2. *S^1 es un continuo suave tipo III en todo punto $p \in S^1$ que no es suave tipo II o suave tipo I, pues S^1 no es un continuo hereditariamente unicoherente.*

Veamos por qué es suave tipo III. Sea $p \in S^1$ un punto arbitrario y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de S^1 que convergen a un punto $x \in S^1$. Considere K un subcontinuo de S^1 tal que $p, x \in K$. Si $K = S^1$ entonces $K_n = S^1$ satisface que p y x_n están en K_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Además $\lim_{n\to\infty} K_n = K$.

Por otro lado, si K es un subcontinuo propio de X, entonces, dado que S^1 es un continuo arco conexo, existen arcos xx_n que satisfacen que $\lim_{n\to\infty} xx_n = \{x\}$. Luego, $K_n = K \cup xx_n$ es un subcontinuo de S^1 pues K_n es unión de dos continuos con al menos un punto en común y $p, x_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, $\lim_{n\to\infty} xx_n = \{x\}$, por lo tanto $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a K (ver figura 3.1).

Observación 3.2.3. *Observe que S^1 no puede ser suave tipo I, ni suave tipo II, pues no es un continuo hereditariamente unicoherente.*

3.3. Ultrasuavidad tipo III

Definición 3.3.1. *Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que X es* **ultrasuave en** p **tipo III** *si para cada par de puntos $x, y \in X$ existen irreducibles $I(p, x), I(p, y)$ y una retracción $r : X \to I(p, x) \cup I(p, y)$ tal que si $z \in X$ y $a \in I(p, z)$ son tales que cumplen que $x, y \notin I(p, z)$, entonces*

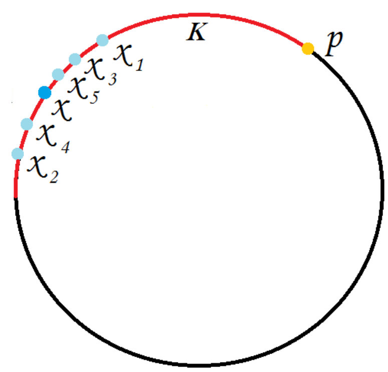

Figura 3.1: Ejemplo de un continuo que es suave tipo III. El arco marcado en color rojo ilustra un continuo K y los puntos x_i representan puntos de alguna sucesión que converge a x.

$r(a) \in I(p, r(z))$. *En este caso al punto p le llamaremos* **punto de ultrasuavidad tipo III**. *Y diremos que X es* **ultrasuave tipo III** *si X tiene al menos un punto de ultrasuavidad tipo III.*

Un ejemplo de un continuo ultrasuave tipo III es el intervalo, pero como ya mencionamos, también es ultrasuave tipo I y ultrasuave tipo II, por lo que daremos otro ejemplo de un continuo ultrasuave tipo III que no sea ultrasuave tipo I ni tipo II.

Ejemplo 3.3.2. *S^1 es un continuo ultrasuave tipo III en todo punto $p \in S^1$.*

La justificación de este hecho es la siguiente. Sean $p, x, y \in S^1$. Toma los irreducibles tales que $y \in I(p, x)$ y $x \in I(p, y)$, entonces se cumple que $I(p, x) \cup I(p, y) = S^1$. Considere $r : X \to I(p, x) \cup I(p, y)$ la función identidad. Luego, r es una función continua y además cumple que para todo $z \in I(p, x) \cup I(p, y)$ se tiene $r(z) = z$, se sigue que r es una retracción. Ahora, para cualquier $b \in S^1$ y $a \in I(p, b)$ se tiene que $r(a) \in I(p, r(b))$, pues $r(a) = a$ y $r(b) = b$. Por lo tanto S^1 es ultrasuave en p tipo III.

3.4. Relaciones entre propiedades tipo II y tipo III

Veamos ahora cuáles son las relaciones entre suavidad tipo II y suavidad tipo III, y también entre ultrasuavidad tipo II y ultrasuavidad tipo III.

Proposición 3.4.1. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si X es suave en p tipo II, entonces X es suave en p tipo III.*

Demostración. Considere $p \in X$ y X un continuo suave en p tipo II. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de X que convergen a $x \in X$ y K un subcontinuo de X tal que $x, p \in K$. Luego, como X es suave en p tipo II, entonces X es hereditariamente unicoherente, por lo tanto, para cada conjunto $x \in X$ existe un único continuo irreducible $I(p, x)$, se sigue que $I(x, p) \subset K$. Considere $K_n = K \cup I(p, x_n)$ para cada $\in \mathbb{N}$, entonces K_n es un continuo, por ser unión de dos continuos con un punto en común, y también $x_n, p \in K_n$. Además, como X es suave en p tipo II, entonces $\lim_{n\to\infty} I(p, x_n) = I(p, x)$. Se sigue que, dado que $I(p, x) \subset K$, que $\lim_{n\to\infty} I(p, x_n) \subset K$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} K_n = K$ y se tiene que X es suave en p tipo III. □

Corolario 3.4.2. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si X es suave en p tipo I, entonces X es suave en p tipo III.*

Proposición 3.4.3. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si X es ultrasuave en p tipo II, entonces X es ultrasuave en p tipo III.*

Demostración. Sean X un continuo ultrasuave en p tipo II y $x, y \in X$ puntos arbitrarios. Como X es ultrasuave en p tipo II, se tiene que existe una retracción
$r : X \to I(p, x) \cup I(p, y)$ que cumple que para cada $a, b \in X$, si $a \in I(p, b)$, entonces $r(a) \in I(p, r(b))$. Ahora, notemos que si además $x, y \notin I(p, b)$, entonces se sigue cumpliendo que $r(a) \in I(p, r(b))$. Se sigue que r es una retracción que satisface las condiciones que necesitamos, por lo tanto, X es ultrasuave en p tipo III. □

Corolario 3.4.4. *Sean X un continuo y $p \in X$. Si X es ultrasuave en p tipo I, entonces X es ultrasuave en p tipo III.*

Remarquemos que suavidad tipo III y ultrasuavidad tipo III están dadas para continuos y no sólo para cierta clase de continuos, como suavidad tipo I y tipo II y ultrasuavidad tipo I y tipo II, por lo que estas definiciones de suavidad tipo III y ultrasuavidad tipo III generalizan suavidad tipo I y tipo II y ultrasuavidad tipo I y tipo II, respectivamente.

3.5. Conclusiones

Como bien hemos visto a lo largo de este trabajo, hay varios continuos que tienen las propiedades de suavidad tipo I, tipo II y tipo III y ultrasuavidad tipo I, tipo II y tipo III. Hemos visto ejemplos de continuos que son suaves y no ultrasuaves, hablando en cualquier tipo de estas propiedades (tipo I, tipo II y tipo III). También observamos ejemplos de continuos que son suaves tipo II, pero no son suaves tipo I, o ultrasuaves tipo II que no son ultrasuaves tipo I.

En este trabajo, pudimos saber algunos datos interesantes, por ejemplo:

- Suavidad tipo II no implica suavidad tipo I, el ejemplo es el continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ (ver ejemplo 2.2.6).
- Ultrasuavidad tipo II no implica ultrasuavidad tipo I, el ejemplo es el continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Suavidad tipo III no implica suavidad tipo I, ni suavidad tipo II y el ejemplo es S^1 (ver ejemplo 3.2.2).
- Ultrasuavidad tipo III no implica ultrasuavidad tipo I, ni ultrasuavidad tipo II. Como ejemplo se tiene a S^1.

La relación que encontramos entre los distintos tipos de suavidad y ultrasuavidad se muestra en la figura 3.2. Destacando que, en base a los ejemplos 2.2.6 y 3.2.2, las contenciones de estos conjuntos, son propias.

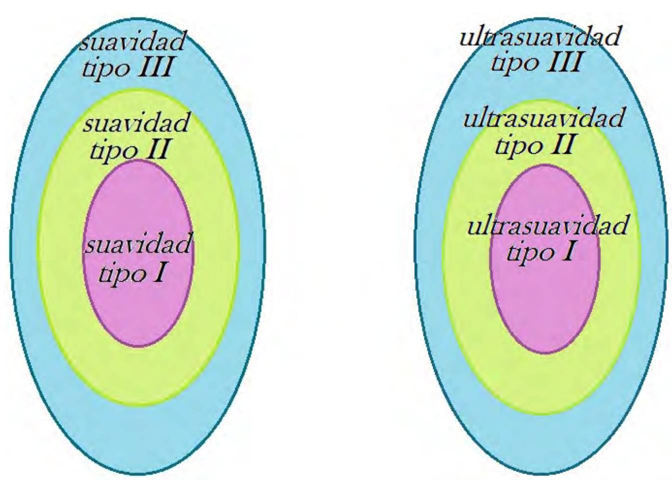

Figura 3.2: Relaciones entre los distintos tipos de suavidad y distintos tipos de ultrasuavidad.

La relación entre los distintos tipos de suavidad y ultrasuavidad la podemos ver en la figura 3.3 que ilustra con un esquema esta relación.

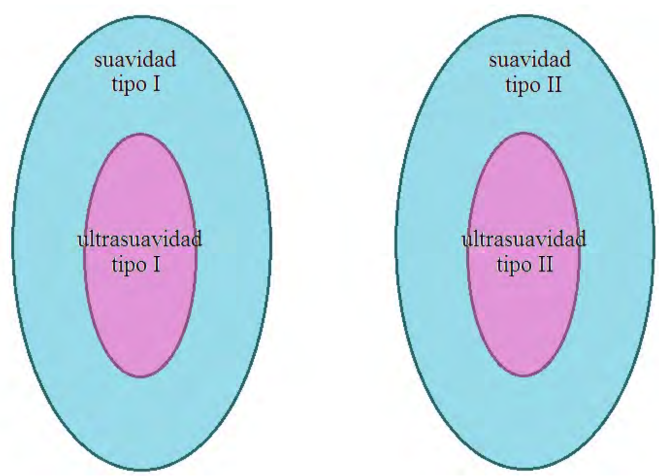

Figura 3.3: Relaciones entre suavidad y ultrasuavidad.

También hay que destacar que suavidad tipo I y suavidad tipo II, así como ultrasuavidad tipo I y ultrasuavidad tipo II, son propiedades que están definidas sólo para dendroides o continuos hereditariamente unicoherentes. Sin embargo, como bien vimos en la tesis, existen continuos que no son hereditariamente unicoherentes y por tanto, tampoco son dendroides, tal es el caso de S^1. Basándonos en este hecho, las dos definiciones nuevas, suavidad tipo III y ultrasuavidad tipo III, generalizan todas las anteriores.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Sean X un dendroide y $p \in X$. X es suave en p tipo I si y solo si X es suave en p tipo II (**Proposición 3.1.1**).

Sean X un dendroide y $p \in X$. X es ultrasuave en p tipo I si y solo si X es ultrasuave en p tipo II (**Proposición 3.1.2**).

Sean X un continuo y $p \in X$. Si X es suave en p tipo II, entonces X es suave en p tipo III (**Proposición 3.4.1**).

Sean X un continuo y $p \in X$. Si X es ultrasuave en p tipo II, entonces X es ultrasuave en p

tipo III (**Proposición 3.4.3**).

Cabe mencionar, que en las primeras dos proposiciones no se puede omitir que X sea dendroide, pues si esto sucede las proposiciones no son ciertas. El ejemplo es el ya tan mencionado $sen\left(\frac{1}{x}\right)$. Probamos que S^1 es un continuo que es suave tipo III y también es ultrasuave tipo III, sin embargo no cumple estas propiedades de tipo I ni de tipo II.

Bibliografía

[1] G. Andablo y E. Castañeda, *Un breve espacio para el mundo de los hiperespacios*, Ciencia Ergo Sum, Vol. 15, núm. 3, Noviembre-Febrero 2008, pág. 317-324.

[2] M. Castro Sánchez, *Introducción a las Funciones de Whitney*, Tesis para obtener título de licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (2013).

[3] J. J. Charatonik, *Ultra smooth continua are smooth*, Rendiconti del circolo matematico di palermo, Serie II, Tomo XLVIII (1999), pág. 401-418.

[4] J. J. Charatonik and C. Eberhart, *On smooth dendroids*, Fundamenta Mathematicae Vol. 67 (1970).

[5] R. E. Conde, C. A. Robles, y E. Rodríguez, *La topolgía de los continuos*, Mosaicos Matemáticos No. 20, Departamento de matemáticas, Universidad de Sonora (Agosto, 2007), pág. 59-74.

[6] G. R. Gord Jr, *Monotone descomposition of irreducible Hausdorff continua*, Pacific Journal of Mathematics Vol. 36 (1971).

[7] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[8] K. Kuratowski, *Theorié des continus irréductibles entre deux points II*, Fundamenta Mathematicae Vol. 10 (1927).

[9] K. Kuratowski, *Topology II*, Academic Press, New York, PWN, Warszawa 1968.

[10] L. Lum, *A quasi order characterization of smooth continua*, Pacific Journal of Mathematics Vol. 53 No. 2 (1974).

[11] V. Martínez de la Vega and J. M. Martínez, *Open problems in Topology II*, Elliott M. Pearl, ed., Elsevier B. V., Amsterdam (2007).

[12] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York (1992).

[13] I. Puga y M. Torres, *Ultrasmoothness in dendroids*, Colloquium Mathematicae 113.2 (2008), pág. 319-331.

[14] M. Torres, *Caracterizaciones de dendritas*, Tesis para obtener título de matemática, Universidad Nacional Autónoma de México (2001).

[15] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley publishing company, Reading, Massachusetts (1970).