



*Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*  
*Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería.*

---

---

*Área Académica de Matemáticas y Física*

---

---

Modos cuasi-normales de un agujero negro regular con  
carga.

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE :**

**LICENCIADO EN FÍSICA Y TECNOLOGÍA AVANZADA**

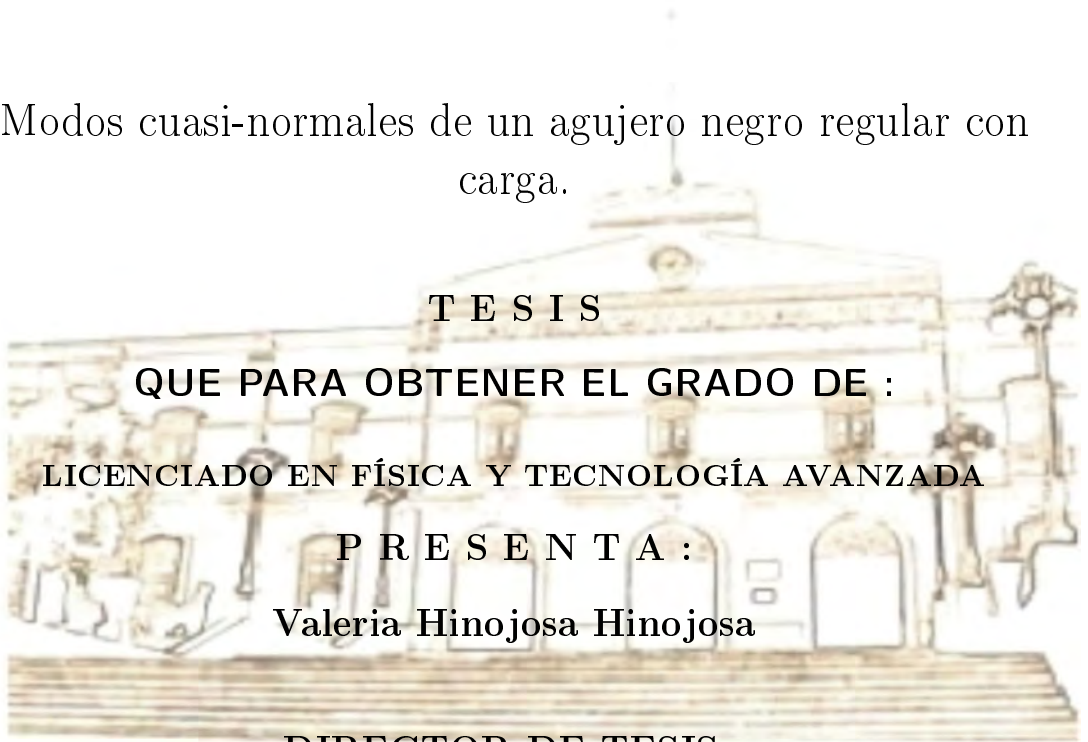
**P R E S E N T A :**

**Valeria Hinojosa Hinojosa**

**DIRECTOR DE TESIS :**

**Dr. Luis Alberto López Suárez**

Pachuca Hgo.  
Mayo 2018





**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO**  
**Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería**  
*Institute of Basic Sciences and Engineering*  
**Dirección**  
 Dean

Mineral de la Reforma, Hgo., a 3 de mayo de 2018  
**Número de control:** ICBI-D/392/2018  
**Asunto:** Autorización de impresión de tesis.

**MTRO. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO**  
**DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR**

Por este medio le comunico que el jurado asignado a la pasante de la Licenciatura en Física Y Tecnología Avanzada, Valeria Hinojosa Hinojosa quien presenta el trabajo de titulación "Modos cuasi-normales de un agujero regular con carga", después de revisar el trabajo ha decidido autorizar la impresión del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación se anotan las firmas de conformidad del jurado:

PRESIDENTE: Dr. Carlos Arturo Soto Campos

SECRETARIO: Dr. Omar Pedraza Ortega

PRIMER VOCAL: Dr. Luis Alberto López Suárez

SEGUNDO VOCAL: Dr. Arturo Criollo Pérez

TERCER VOCAL: Dr. Selim Gómez Ávila

PRIMER SUPLENTE: Dr. Roberto Noriega Papaqui

SEGUNDO SUPLENTE: M. en C. Marcos Campos Nava

Atentamente  
 "Amor, Orden y Progreso"

Dr. Oscar Rodolfo Suárez Castillo  
 Director del ICBI



ORSC/POJM

Ciudad del Conocimiento  
 Carretera Pachuca - Tulancingo km. 4.5  
 Colonia Carboneras  
 Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C.P. 42184  
 Tel. +52 771 7172000 exts 2231, Fax 2109  
 direccion\_icbi@uaeh.edu.mx



www.uaeh.edu.mx

# Índice general

<b>1. Ondas gravitacionales.</b>	<b>1</b>
1.1. Geodésicas y potenciales efectivos. . . . .	3
1.1.1. Geodésicas Nulas. . . . .	4
1.1.2. Geodésicas Espacialoides. . . . .	5
<b>2. Métrica de Sean A. Hayward.</b>	<b>7</b>
2.1. Agujero negro regular. . . . .	7
2.2. Agujero negro regular con carga. . . . .	7
2.3. Potenciales efectivos de agujeros negros con carga. . . . .	9
<b>3. Análisis de modos cuasi-normales.</b>	<b>11</b>
3.1. Parte real de la frecuencia de los modos cuasi-normales. . . . .	11
3.2. Parte imaginaria de la frecuencia de los modos cuasi-normales. . . . .	13
<b>A. Relatividad General.</b>	<b>19</b>
A.1. Geodésicas. . . . .	20
<b>B. Exponente de Lyapunov.</b>	<b>21</b>

# Índice de figuras

2.1. Comportamiento de $f(r) = \left(1 - \frac{(2Mr-Q^2)r^2}{r^4+(2Mr+Q^2)\hat{l}^2}\right)$ del espacio-tiempo de Hayward con carga (HM), con $\hat{l} = 0,5$ y $Q = 1$ , donde $M_*$ es la masa crítica. . . . .	8
2.2. La grafica HM describe el comportamiento del potencial efectivo para geodésicas nulas en la métrica del agujero negro Hayward con carga y la gráfica RN para la métrica de Reissner-Nordstöm, con $M = 1,3$ , $Q = 1$ , $L = 1$ y $E = 1$ , para el HN para la métrica de Hayward, se ocupo la contante cosmológica $\ell = 0,5$ . . . . .	9
3.1. Se muestra la parte real de la frecuencia de un modo cuasi-normal de las métricas de RN y HM, haciendo una variación la masa, con $Q = 1$ y $\hat{l} = 0,7$ . . . . .	12
3.2. Se muestra la parte real de la frecuencia de un modo cuasi-normal de las métricas de RN y HM, haciendo una variación la carga, con $M = 1$ y para $\hat{l} = 0,7, 0,3$ . . . .	12
3.3. Se muestra la parte imaginaria de frecuencia de los modos cuasi-normal de las métricas de RN y HM, haciendo una variación la masa, con $Q = 1$ y $\hat{l} = 0,7, 0,5$ . . . .	13
3.4. Se muestra la parte imaginaria de la frecuencia de un modo cuasi-normal de las métricas de RN y HM, haciendo una variación la masa, con $M = 1$ y $\hat{l} = 0,7, 0,5$ . . .	14

# Agradecimientos

Le agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias, salud y sobre todo felicidad.

Le doy gracias a mis padres por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado con su ejemplo y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. A mis hermanos y abuelos por ser parte importante de mi vida y por su apoyo incondicional.

De igual manera deseo expresar mi agradecimiento a mi asesor de tesis Dr. Luis Alberto López Suárez, por la dedicación y apoyo que ha brindado a la realización de este trabajo. Así mismo a mis catedráticos y compañeros que me acompañaron y apoyaron durante este camino.

# Resumen.

En este trabajo se analizan las frecuencias de los modos cuasi-normales de un agujero negro tipo Hayward con carga, por medio del estudio de geodésicas descritas por una partícula de prueba sujeta a la presencia de éste agujero negro, considerando un límite eikonal y se usa el método del exponente de Lyapunov. Una vez desarrollado el cálculo, se obtuvo que, al hacer una variación del parámetro de masa: La parte real de los modos cuasi-normales decrece, la parte imaginaria de los modos cuasi-normales, se tiene que dicho agujero negro oscila y decae a su estado base. Se observa que, al hacer la variación del parámetro de carga: La parte real de los modos cuasi-normales va creciendo hasta llegar a un máximo y decae hasta llegar a su estado base, la parte imaginaria de los modos cuasi-normales hay regiones donde el agujero negro es inestable y regiones donde es estable. Todo el análisis desarrollado es comparado con un agujero negro tipo Reissner Nordström.

# Introducción

En la teoría general de la relatividad, Albert Einstein en 1915 propone cómo se comporta el campo gravitacional. Entre otras cosas, considera que el espacio-tiempo es curvo y que dicha curvatura está relacionada con la materia que contiene. Las ecuaciones propuestas por Einstein no son sencillas de resolver dado que son diez ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden acopladas no-lineales. Una de las soluciones a estas ecuaciones de Einstein se encuentran las soluciones de tipo agujero negro, los cuales representan objetos masivos donde la curvatura del espacio-tiempo es tan intensa que ni siquiera la luz puede escapar, es por ello el interés en su estudio.

La detección de un agujero negro de manera directa es difícil, así que existen distintas formas de medir sus efectos secundarios a través de mediciones indirectas, como son las lentes gravitacionales, que describen la desviación de la luz ante un objeto masivo, otro fenómeno es la descripción de las órbitas de estrellas, en este fenómeno por ejemplo algunos autores [10] han propuesto modelos que describen las trayectorias de estrellas considerando un agujero negro el causante de dichas trayectorias, otro fenómeno más que se puede mencionar es la detección de ondas gravitacionales [3], siendo este último fenómeno actualmente el de mayor interés. El anuncio de que el detector LIGO (2015) había encontrado, por fin, ondas gravitacionales, provenientes de la fusión de dos agujeros negros supermasivos, les ha vuelto a dar una mayor popularidad, sobre todo a la hora de explicar qué son y por qué resultan ser tan importantes.

Un agujero negro al ser perturbado emite una señal de ondas gravitacionales, una manera de perturbarse es cuando materia cae en él, esto hace que aumente ligeramente de masa, oscilará hasta alcanzar de nuevo un estado estacionario. Una forma de estudiar las ondas gravitacionales es a través de los modos cuasi-normales, los cuales están relacionados con la frecuencia de oscilación del agujero negro, sin embargo es difícil calcularlos de manera directa, es por ello que se puede estudiar el comportamiento de geodésicas cerradas de partículas de prueba, el estudio de geodésicas es utilizado para analizar potenciales efectivos de agujeros negros [1].

Por tal motivo en este trabajo se hablará de cómo medir los modos cuasi-normales de un agujero negro en un límite eikonal, es decir, donde podemos tratar al frente de onda como un frente de onda plano. Así como obtener información acerca de sus propiedades. Dicho estudio se realizará considerando un agujero negro regular con carga (Hayward con carga).

El trabajo está estructurado de la siguiente manera, en el capítulo uno se aborda una breve introducción sobre las ondas gravitacionales, la forma en que se relacionan estas en un límite eikonal con los modos cuasi-normales de una geodésica de una partícula de prueba por medio del exponente de Lyapunov, de igual manera se aborda un poco de qué son las geodésicas y los potenciales efectivos. En el capítulo dos se habla sobre la métrica y algunas propiedades de un agujero negro regular (Hayward) y del agujero negro regular con carga, así como los potenciales efectivos y su respectivo análisis. En el capítulo tres se muestran y analizan las gráficas obtenidas de los modos cuasi-normales del agujero negro regular con carga y se hace una comparación con un agujero negro tipo Reissner-Nordström.

# Capítulo 1

## Ondas gravitacionales.

En 1916, Einstein fundamentó la teoría de las ondas gravitacionales (OG), una predicción de la Teoría de la Relatividad General (1915), para ello, restringió su teoría a ondas débiles (linealizadas) emitidas por cuerpos con auto gravedad casi nula, y propagación a través de espacio-tiempo (podemos imaginarlas como superficies) vacío.

La teoría de la relatividad comprende de un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden acopladas no-lineales (ver apéndice A), lo cual hace muy difícil su comprensión e interpretación física, por lo que para aproximarse a las oscilaciones en el campo gravitacional, es considerar el límite de un campo gravitacional débil, desde un punto de vista físico es considerar en un lugar muy alejado un objeto masivo, la curvatura es muy pequeña. Así que el límite del campo débil significa que consideramos al espacio-tiempo plano con una pequeña perturbación.[2]

Existen diferentes maneras de estudiar el comportamiento de las perturbaciones de un agujero negro, una técnica consiste en buscar algún tipo de soluciones características, del tipo de los modos normales de oscilación de una cuerda por ejemplo. Los sistemas oscilatorios típicamente poseen estados de oscilación característicos que se conocen como modos normales de oscilación. En general, existe un número infinito de dichos modos, y la solución general se puede expresar como una superposición de ellos, es decir, los modos normales son completos.

Este comportamiento simple cambia considerablemente cuando se consideran sistemas abiertos que pierden energía al infinito. En este caso, las soluciones análogas a los modos normales decaen en el tiempo, y ya no forman un conjunto completo. A soluciones de este tipo se les conoce como modos quasi-normales [7].

El elemento de línea que describe un espacio-tiempo se puede escribir de la siguiente manera:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^0 dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

donde  $g_{\mu\nu}^0$  es la métrica del espacio-tiempo, donde los subíndices  $\mu$  y  $\nu$  toman los valores enteros de 0 a 3.

La teoría de perturbaciones parte de considerar una pequeña perturbación  $h_{\mu\nu} \ll 1$  a una métrica (ver para más detalle [6]), entonces la métrica perturbada es:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

que conduce a una variación de las ecuaciones de Einstein de la forma:

$$\delta G_{\mu\nu} = 4\pi\delta T_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$



## CAPÍTULO 1. ONDAS GRAVITACIONALES.

Siendo  $T_{\mu\nu}$  el tensor momento energía, y  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  el tensor de Einstein, donde  $R_{\mu\nu}$  el tensor de Ricci,  $R$  es el escalar de curvatura y  $g_{\mu\nu}$  es la métrica.

Se considerará al espacio-tiempo vacío y con simetría esférica, por lo que la ecuación a resolver es la siguiente:

$$\square^2 \chi(t, r, \theta, \phi) = 0, \quad (1.4)$$

donde  $\square^2$  es el *D' Alembertiano*.

Considerando la solución para un agujero negro con simetría esférica, podemos obtener una solución en términos de armónicos esféricos de la siguiente manera:

$$\chi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} \frac{\chi_{lm}(r, t)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (1.5)$$

donde  $\chi_{lm}(r, t)$  es una combinación de las distintas componentes de  $h_{\mu\nu}$ . Substituyendo esta expansión en la perturbación a las ecuaciones de Einstein es posible mostrar que las funciones  $\chi_{lm}(r, t)$  obedecen una simple ecuación de onda con un potencial distinto de cero. De la expansión (1.5) es válida solo para cantidades que se transforman como funciones escalares bajo una rotación. De las 10 componentes independientes de  $h_{\mu\nu}$ , solo  $h_{tt}$ ,  $h_{rr}$  y  $h_{rt}$  tienen esta propiedad.

Si se considera que el espacio-tiempo es también asintóticamente plano y considerando únicamente una perturbación radial, se puede obtener a partir de ecuación (1.4) la siguiente expresión:

$$\partial_t^2 \chi_l + (-\partial_{r^*}^2 + V(r)_l) \chi_l = 0, \quad (1.6)$$

donde  $\chi_l = \phi(r)e^{-i\omega t}$ ,  $V(r)_l$  es un potencial que depende de los modos cuasi-normales, y  $r^*$  son coordenadas radiales tortuga apropiadas, cuando  $r^* \rightarrow -\infty$ ,  $V(r)_l$  decae como  $1/r^*$ , utilizando la aproximación WKB, en un límite eikonal, es decir, cuando el frente de onda esférica se puede ver como un frente de onda plana, se puede modificar la ecuación de onda (1.6) de la siguiente manera:

$$\partial_{r^*}^2 \phi(r) + [\omega^2 - V(r)] \phi(r) = 0. \quad (1.7)$$

Así que la frecuencia de los modos cuasi-normales (1.7) puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\omega = Re(\omega) + iIm(\omega) = \omega_r + i\omega_i, \quad (1.8)$$

donde  $\omega_r$  determina la velocidad angular de una geodésica nula inestable y  $\omega_i$  describe la estabilidad de la órbita.

Cardoso [9] menciona que al hacer estas aproximaciones se pueden relacionar  $\omega$  con la geodésica que describa una partícula de prueba por medio del exponente de Lyapunov (ver apéndice B). Por tal motivo se pueden escribir los modos cuasi-normales (1.8) de un agujero negro esféricamente simétrico, asintóticamente plano y perturbado radialmente de la siguiente manera:

$$\omega_{QNM} = \Omega l - i \left( n + \frac{1}{2} \right) \lambda, \quad (1.9)$$

donde:

- $l$  es el número del armónico
- $\Omega$  es la velocidad angular evaluada en  $r_c$ .
- $n$  es el modo cuasi-normal, en el que estas.
- $\lambda$  es el exponente de Lyapunov, el cuál es una forma de caracterizar de manera cuantitativa los atractores extraños, los cuales son una medida de la tasa promedio de divergencia entre las trayectorias.

**CAPÍTULO 1. ONDAS GRAVITACIONALES.**  
**1.1. GEODÉSICAS Y POTENCIALES EFECTIVOS.**

---

Para trayectorias circulares e inestables el exponente de Lyapunov puede escribirse en términos de la segunda derivada del potencial efectivo como:

$$\lambda = \sqrt{\frac{V_{ef}''(r_c)}{2\dot{t}}}, \quad (1.10)$$

donde  $r_c$  es el radio de la órbita circular inestable, la comilla corresponde a derivadas con respecto a la coordenada radial y el punto son derivadas con respecto al tiempo propio.

### 1.1. Geodésicas y potenciales efectivos.

Una forma general de escribir la métrica para un espacio-tiempo esféricamente simétrico es la siguiente:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{g(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (1.11)$$

donde  $f(r)$  y  $g(r)$  son funciones determinadas de acuerdo al tipo de solución de las ecuaciones de Einstein y tomando la signatura  $(-, +, +, +)$ .

Se sabe que la geodésica es la trayectoria mas corta de un punto a otro punto sobre el espacio-tiempo, en especial se pueden obtener para soluciones que representen agujeros negros, una manera alternativa del estudio de geodésicas es por medio de la obtención de potenciales efectivos a los cuales estará sujeta la partícula de prueba.

Para obtener información de la geodésica (ver apéndice A), se considera el siguiente lagrangiano, :

$$L = -f(r)\dot{t}^2 + \frac{1}{g(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = \delta_1, \quad (1.12)$$

donde se tienen dos posibles casos:

- $\delta_1 = 0$  para geodésicas nulas.
- $\delta_1 = 1$  para geodésicas espacialoides.

Al resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\phi} = \frac{\ell}{r^2} \quad (1.13)$$

$$\dot{t} = \frac{E}{f(r)} \quad (1.14)$$

$$\dot{r} = \frac{g(r)}{2}, \quad (1.15)$$

donde:

- $E$  es la energía con la que se mueve la partícula de prueba.
- $\ell$  es el momento de la partícula de prueba.

Para una geodésica en general se tiene la siguiente ecuación:

$$-f(r)\dot{t}^2 + \frac{1}{g(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 - \delta_1 = 0. \quad (1.16)$$

**CAPÍTULO 1. ONDAS GRAVITACIONALES.**  
**1.1. GEODÉSICAS Y POTENCIALES EFECTIVOS.**

---

Sustituyendo (1.13) y (1.14) en (1.16) se tiene:

$$\dot{r}^2 + V_{ef} = 0, \quad (1.17)$$

donde el  $V_{ef}$  es el potencial efectivo que está dado de la siguiente manera:

$$V_{ef} = g(r) \left[ -\frac{E^2}{f(r)} + \frac{\ell^2}{r^2} - \delta_1 \right]. \quad (1.18)$$

Se obtiene la primera y segunda derivada con respecto a  $r$  del potencial efectivo.

$$V'_{ef} = g(r) \left[ -\frac{2\ell^2}{r^3} + \frac{E^2}{f(r)^2} f'(r) \right] + g'(r) \left[ \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{E^2}{f(r)} - \delta_1 \right] \quad (1.19)$$

$$V''_{ef} = g(r) \left[ \frac{6\ell^2}{r^4} - \frac{2E^2}{f^3(r)} f'^2(r) + \frac{E^2}{f^2(r)} f''(r) \right] + 2g'(r) \left[ -\frac{2\ell^2}{r^3} + \frac{E^2}{f^2(r)} f'(r) \right] + g''(r) \left[ \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{E^2}{f(r)} - \delta_1 \right]. \quad (1.20)$$

Para órbitas circulares inestables donde  $r = r_c$ , si se sustituye  $r_c$  en (1.17), se observa que  $V_{ef(r_c)} = 0$  y  $V'_{ef(r_c)} = 0$ , esto para obtener los radios  $c$ , es decir, órbitas circulares inestables.

Una vez obtenido el potencial efectivo y sus derivadas, otra cantidad a encontrar es la velocidad angular, la cual se escribe como:

$$\Omega = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}}. \quad (1.21)$$

### 1.1.1. Geodésicas Nulas.

Para una geodésica nula se tiene que  $\delta_1 = 0$ , sustituyendo en la ecuación (1.18), por lo tanto el potencial efectivo esta dado por:

$$V_{ef} = g(r) \left[ -\frac{E^2}{f(r)} + \frac{l^2}{r^2} \right]. \quad (1.22)$$

Cumpliendo la condición para órbitas circulares se tiene:

$$g(r) \left[ -\frac{E^2}{f(r)} + \frac{l^2}{r^2} \right] = 0. \quad (1.23)$$

De aquí se obtiene una relación entre  $l$  y  $E$  como:

$$\frac{E}{l} = \pm \sqrt{\frac{f_c}{r_c^2}}. \quad (1.24)$$

De la primera derivada se obtiene:

$$V'_{ef} = g(r) \left[ -\frac{2l^2}{r^3} + \frac{E^2}{f(r)^2} f'(r) \right] + g'(r) \left[ \frac{l^2}{r^2} - \frac{E^2}{f(r)} \right]. \quad (1.25)$$

Evaluando en  $r = r_c$  se obtiene:

$$V'_{ef} = g(r) \left[ -\frac{2l^2}{r^3} + \frac{E^2}{f(r)^2} f'(r) \right]_{r_c} + g'(r) \left[ \frac{l^2}{r^2} - \frac{E^2}{f(r)} \right]_{r_c} = 0, \quad (1.26)$$

**CAPÍTULO 1. ONDAS GRAVITACIONALES.**  
**1.1. GEODÉSICAS Y POTENCIALES EFECTIVOS.**

---

sustituyendo (1.24) en (1.26) se tiene:

$$V'_{ef} = \frac{r f'_c - 2f_c}{r^3 f_c} = 0. \quad (1.27)$$

De la ecuación (1.27) se tiene la siguiente condición:

$$r_c f'_c = 2f_c. \quad (1.28)$$

Resolviendo la ecuación (1.28) se obtiene el valor del radio máximo, ya que es el radio que se puede observar. Ahora se obtendrá la segunda derivada del potencial efectivo, entonces sustituyendo (1.24) y usando la condición (1.28) en (1.20) se tiene que la segunda derivada del potencial está dada por:

$$V''_{ef} = \frac{l^2 g(r)}{r^4 f(r)} [r^2 f''(r) - 2f(r)]. \quad (1.29)$$

Y por último sustituyendo en (1.21) la velocidad angular para este tipo de geodésicas es:

$$\Omega = \frac{\sqrt{f(r)}}{r} \quad (1.30)$$

las ecuaciones (1.29) y (1.30) serán evaluadas en  $r_c$

### 1.1.2. Geodésicas Espacialoides.

Para una geodésica espacialoide se tiene que  $\delta_1 = 1$  y si se sustituye en la ecuación (1.18), se obtiene que el potencial efectivo está dado por:

$$V_{ef} = g(r) \left[ -\frac{E^2}{f(r)} + \frac{l^2}{r^2} - 1 \right]. \quad (1.31)$$

Cumpliendo la condición para órbitas circulares se tiene:

$$V_{ef} = \left[ -\frac{E^2}{f(r)} + \frac{l^2}{r^2} - 1 \right] = 0. \quad (1.32)$$

De aquí se obtiene una relación entre  $l$  y  $E$  como:

$$l^2 = \frac{r^2}{f(r)} [E^2 + f(r)] \quad (1.33)$$

de la primera derivada se obtiene:

$$V'_{ef} = g(r) \left[ -\frac{2l^2}{r^3} + \frac{E^2}{f(r)^2} f'(r) \right] + g'(r) \left[ \frac{l^2}{r^2} - \frac{E^2}{f(r)} - 1 \right] \quad (1.34)$$

$$g(r) \left[ -\frac{2l^2}{r^3} + \frac{E^2}{f(r)^2} f'(r) \right] + g'(r) \left[ \frac{l^2}{r^2} - \frac{E^2}{f(r)} \right] = 0 \quad (1.35)$$

si sustituimos (1.33) en (1.35) se tiene:

$$-\frac{2E^2}{r f(r)} - \frac{2f(r)}{r} + \frac{E^2 f'(r)}{f^2(r)} = 0 \quad (1.36)$$

Resolviendo la ecuación (1.36) para  $E^2$  se tiene la siguiente ecuación:

$$E^2 = \frac{2f^2(r)}{r f'(r) - 2f(r)} \quad (1.37)$$

**CAPÍTULO 1. ONDAS GRAVITACIONALES.**  
**1.1. GEODÉSICAS Y POTENCIALES EFECTIVOS.**

---

sustituyendo (1.37) en (1.33) se tiene que el momento angular está dado por:

$$l^2 = \frac{r^3 f'(r)}{r f'(r) - 2f(r)} \quad (1.38)$$

como se quiere que  $E^2$  sea positiva se tiene la siguiente condición:

$$r f'(r) - 2f(r) > 0 \quad (1.39)$$

vamos a tener condiciones para  $r$  al resolver la desigualdad (1.39), las condiciones que se tomarán en cuenta son de acuerdo a la métrica en la que se esta trabajando.

Ahora se obtendrá la segunda derivada del potencial efectivo, entonces sustituyendo (1.37) y (1.38) en (1.20) se tiene que la segunda derivada del potencial está dada por:

$$V_{ef}'' = \frac{2g(r)}{f(r)} \left[ \frac{\frac{3f(r)f'(r)}{r} - 2[f'(r)]^2 + f(r)f''(r)}{r f'(r) f(r)} \right], \quad (1.40)$$

y por último sustituyendo en (1.21) la velocidad angular para este tipo de geodésicas es:

$$\Omega = \sqrt{\frac{f(r)}{2r^2}}. \quad (1.41)$$

Donde (1.40) y (1.41) serán evaluadas en  $r_c$ .

## Capítulo 2

# Métrica de Sean A. Hayward.

El espacio-tiempo regular (sin singularidad) está dado desde la descripción de la formación de un agujero negro en una región de vacío localmente definida, como una región estática, y subsecuente evaporación hacia una región de vacío [5].

### 2.1. Agujero negro regular.

El elemento de línea de una esfera simétrica esta descrito en la ecuación (1.11), para el espacio-tiempo Hayward [5]  $f(r)$  es igual a  $g(r)$  y tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2\hat{l}^2 m} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2mr^2}{r^3 + 2\hat{l}^2 m} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.1)$$

con  $m$  que corresponde a la masa del agujero negro y  $\hat{l}$  es la constante cosmológica, la ecuación (2.1) describe un agujero negro regular, es decir no tiene singularidad cuando  $r = 0$ , con simetría esférica, asintóticamente plano, el cual puede tener uno o dos horizontes de eventos dependiendo de la relación entre la masa y la constante cosmológica, cuando  $\hat{l} = 0$  la métrica se reduce a un espacio de Schwarzschild el cual esta descrito por el siguiente elemento de línea:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.2)$$

como se puede mostrar es una solución con simetría esférica y asintóticamente plana.

Entonces de (2.2) tenemos que el término  $f(r)$  diverge en  $r = 0$  entonces el elemento de línea no se puede medir, por lo que se puede decir que en  $r = 0$  existe una singularidad, además  $f(r)$  es cero en  $r = 2m$  por lo que diverge en este valor, entonces el valor  $r = 2m$  crea una superficie conocida como el horizonte de eventos.

Lo interesante de estudiar un agujero negro regular, es que describe el comportamiento de un agujero negro que esta colapsando o que se esta evaporando.

### 2.2. Agujero negro regular con carga.

Se toma la métrica de Hayward con carga (HM), el elemento de línea se expresa de la siguiente manera [4]:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{(2Mr - Q^2)r^2}{r^4 + (2Mr + Q^2)\hat{l}^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{(2Mr - Q^2)r^2}{r^4 + (2Mr + Q^2)\hat{l}^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.3)$$

**CAPÍTULO 2. MÉTRICA DE SEAN A. HAYWARD.**  
**2.2. AGUJERO NEGRO REGULAR CON CARGA.**

se sigue cumpliendo que  $f(r) = g(r)$ , donde  $\hat{l}$  es un parámetro directamente relacionado a la constante cosmológica,  $M$  corresponde a la masa del agujero negro regular y  $Q$  a su vez es la carga. Si  $\hat{l} \rightarrow 0$  la métrica (2.3) se reduce a un agujero negro tipo de Reissner-Nordström (RM), el cual se basa en la deformación del espacio-tiempo por un cuerpo masivo, estático, con simetría esférica, con carga eléctrica ( $Q$ ) y masa ( $M$ ), es asintóticamente plano y su elemento de línea esta dado por:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.4)$$

Algunas propiedades del agujero negro de Reissner-Nordström son las siguientes:

- Cuando  $r \rightarrow 0$  existe una singularidad, que se comporta como un espacio plano cuando  $r \rightarrow \infty$ .
- Si  $M > Q$  se tiene un agujero negro con dos horizontes de eventos, que se les conoce como interno y externo.
- Si  $M = Q$  se tiene un agujero negro con un solo horizonte de eventos, es decir, el horizonte interno es igual al horizonte externo, a este caso se le conoce como caso extremo.
- Si  $M < Q$  no existe agujero negro.
- Si  $M = 0$  es un espacio plano.

Una de las características que hace diferencia entre espacio de Hayward con carga con respecto al de Reissner-Nordström es que en el primero no existe una singularidad, es por ello la importancia de conocer mejor su comportamiento, por lo que se hará un análisis de la  $f(r)$  del elemento de línea (2.3).

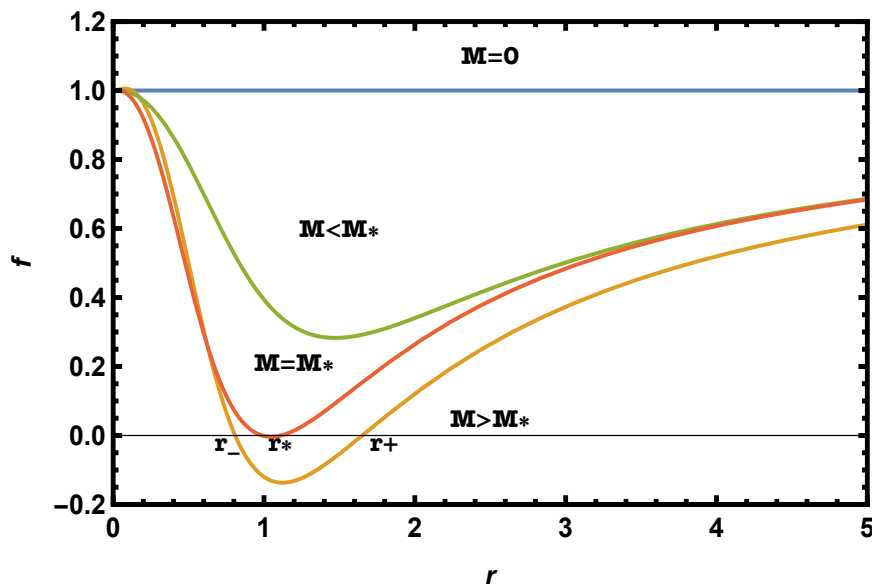


Figura 2.1: Comportamiento de  $f(r) = \left(1 - \frac{(2Mr-Q^2)r^2}{r^4+(2Mr+Q^2)\hat{l}^2}\right)$  del espacio-tiempo de Hayward con carga (HM), con  $\hat{l} = 0,5$  y  $Q = 1$ , donde  $M_*$  es la masa crítica.

Si se analiza la figura 2.1, si  $M = 0$  entonces se tiene un espacio-tiempo plano ya que no hay objeto, si  $M < M_*$  donde  $M_*$  es la masa crítica, entonces no existe un agujero negro, si  $M = M_*$

entonces existe un agujero negro donde los horizontes de eventos coinciden en un punto, a este caso se le conoce como extremo y si  $M > M_*$  existe un agujero negro con un horizonte de eventos interno y externo. Donde  $M_* = \left( \frac{16(\ell^2+1)^3}{27(\ell^2-1)^4} Q^6 \right)^{\frac{1}{4}}$  es conocida como la masa crítica. Entonces con la figura 2.1 podemos ver que Hayward con carga tiene características similares que un agujero de Reissner-Nordström.

### 2.3. Potenciales efectivos de agujeros negros con carga.

El potencial efectivo es importante ya que nos describirá la dinámica de la partícula de prueba en un espacio tiempo deformado por un agujero negro, si se sustituye la métrica de Hayward cargado (2.3) en (1.22), se tiene:

$$V_{ef} = \left( 1 - \frac{(2Mr - Q^2)r^2}{(r^4 + (2Mr + Q^2)\ell^2)} \right) \left( \frac{L^2}{r^2} - \frac{E^2}{\left( 1 - \frac{(2Mr - Q^2)r^2}{r^4 + (2Mr + Q^2)\ell^2} \right)} \right). \quad (2.5)$$

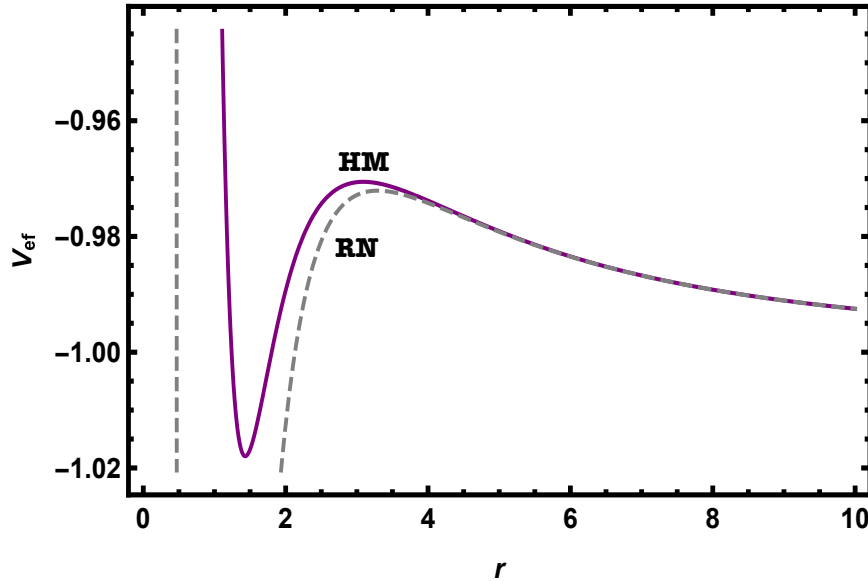


Figura 2.2: La grafica HM describe el comportamiento del potencial efectivo para geodésicas nulas en la métrica del agujero negro Hayward con carga y la gráfica RN para la métrica de Reissner-Nordstöm, con  $M = 1,3$ ,  $Q = 1$ ,  $L = 1$  y  $E = 1$ , para el HN para la métrica de Hayward, se ocupo la contante cosmológica  $\ell = 0,5$ .

En la figura (2.2) se muestra el comportamiento del potencial efectivo con respecto a distancia radial, en esta figura se puede observar que el punto mínimo para el agujero negro de Reissner-Nordstöm (RN) es mayor que el punto mínimo del agujero negro de Hayward con carga (HM), por lo que RN es más atractivo gravitacionalmente que HM, de igual manera estos puntos mínimos describen el radio de geodésicas nulas estables.

Ambos agujeros negros presentan un punto máximo, el cual describe que ese punto corresponde al radio de una geodésica nula e inestable, así que es de interés para el estudio de modos cuasi-normales del agujero negro, a este radio se le nombra  $r_c$ .

Como se mostró en el Capítulo 1 el exponente de Lyapunov esta directamente relacionado con la segunda derivada de potencial efectivo de la geodésica nula e inestable descrita por una partícula



**CAPÍTULO 2. MÉTRICA DE SEAN A. HAYWARD.**  
**2.3. POTENCIALES EFECTIVOS DE AGUJEROS NEGROS CON CARGA.**

---

de prueba a un radio  $r_c$ . Por lo que se obtiene la segunda derivada de (2.5) evaluado en  $r_c$  la cual está descrita de la siguiente manera:

$$V''_{ef} = - \left[ \frac{2L^2(\hat{l}^4(Q^2 + 2Mr)^2 + r^6(2Q^2 + r(-3M + r)) + 2\hat{l}^2 r^3(Q^2 r + M(Q^2 + 2r^2)))}{r^3(r^4 + \hat{l}^2(Q^2 + 2Mr))^2} \right]_{r_c}. \quad (2.6)$$

## Capítulo 3

# Análisis de modos cuasi-normales.

Como vimos en el Capítulo 1 se tienen los modos cuasi-normales de la forma (1.9), en este capítulo se realiza el estudio de estos modos para un agujero negro regular con carga, mediante el método del exponente de Lyapunov, tomando un límite eikonal a partir de una geodésica nula e inestable descrita por una partícula de prueba.

### 3.1. Parte real de la frecuencia de los modos cuasi-normales.

Comparando (1.9) y (1.8), se puede observar que la parte real de un modo cuasi-normal depende de la velocidad angular descrita por la partícula de prueba, utilizando (1.30) y la  $f(r)$  de la métrica de Hayward con carga (2.3) se tiene:

$$\Omega = \frac{\sqrt{1 - \frac{(2Mr - Q^2)r^2}{r^4 + (2Mr + Q^2)l}}}{r} \quad (3.1)$$

evaluada en  $r_c$ , este radio debe de cumplir la ecuación (1.28), la cual es difícil de calcular de manera analítica, por lo tanto se realizó punto a punto. Los resultados mostrados en las gráficas son los modos cuasi-normales reales entre el número del armónico ( $l$ ), como se sabe la parte real de la frecuencia del modo-cuasi normal de la señal emitida por un agujero negro lo que describe es la frecuencia de oscilación de este.

En la figura (3.1) se hace una variación del parámetro masa del agujero negro, este parámetro no está limitado matemáticamente, así que como se puede observar en el gráfico mientras este vaya aumentando la frecuencia de vibración va disminuyendo, hasta llegar a un límite de que por más masa que se le aumente la vibración será casi nula, es decir, que en cierto momento el agujero negro se encuentra en un estado base nuevamente. Comparando el agujero negro regular cargado con el agujero negro de Reisner Nordström, se puede observar que es más fácil que oscile el agujero negro regular con carga en comparación al de Reisner Nordström, ya que el primero es un poco más inestable que el de Reissner-Nordstöm, también se puede ver que el comportamiento es similar para ambos.

En la figura (3.2) se hace una variación del parámetro carga del agujero negro, este parámetro sí está limitado por la masa, entonces como se puede observar las frecuencias de vibración del agujero negro van aumentando cuando la carga aumenta, aquí va a haber un máximo de vibración, también se puede observar que el agujero de Reisner Nordström puede vibrar más, aunque básicamente el comportamiento es el mismo sin importar la constante cosmológica ( $l$ ).

**CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE MODOS CUASI-NORMALES.**  
**3.1. PARTE REAL DE LA FRECUENCIA DE LOS MODOS CUASI-NORMALES.**

---

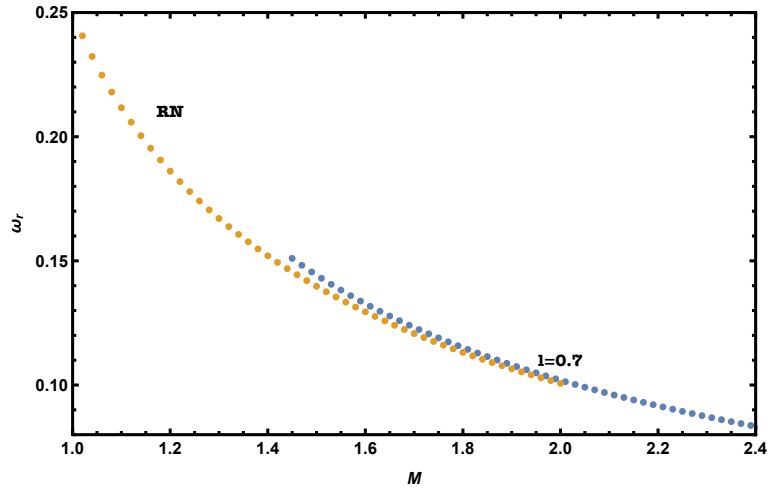


Figura 3.1: Se muestra la parte real de la frecuencia de un modo cuasi-normal de las métricas de RN y HM, haciendo una variación la masa, con  $Q = 1$  y  $\hat{l} = 0,7$ .

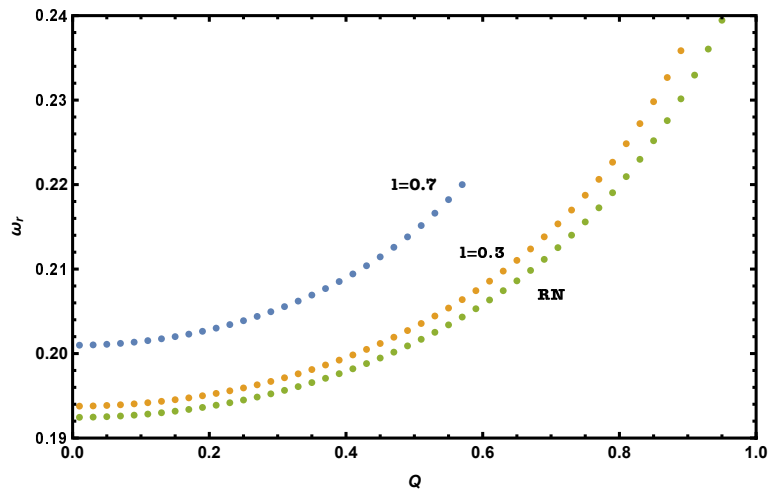


Figura 3.2: Se muestra la parte real de la frecuencia de un modo cuasi-normal de las métricas de RN y HM, haciendo una variación la carga, con  $M = 1$  y para  $\hat{l} = 0,7, 0,3$ .

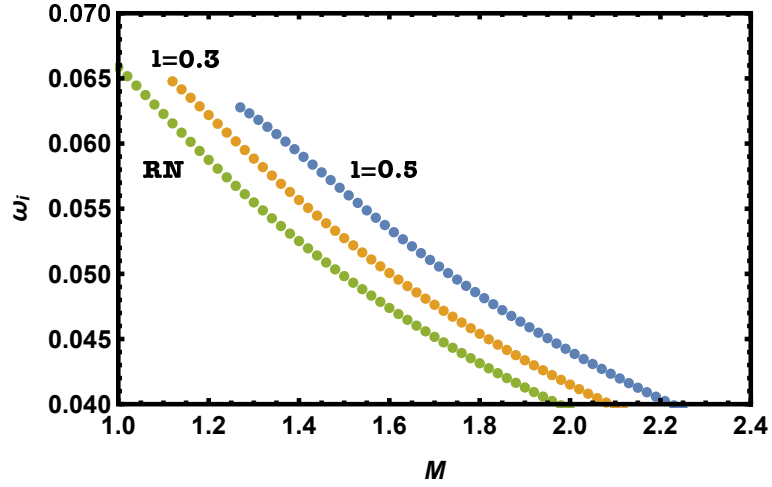


Figura 3.3: Se muestra la parte imaginaria de frecuencia de los modos cuasi-normal de las métricas de RN y HM, haciendo una variación la masa, con  $Q = 1$  y  $\hat{l} = 0,7,0,5$ .

### 3.2. Parte imaginaria de la frecuencia de los modos cuasi-normales.

Comparando (1.9) y (1.8), se puede observar que la parte imaginaria de la frecuencia del modo cuasi-normal depende del exponente de Lyapunov que esta descrito por la ecuación (1.10) y depende de la segunda derivada radial del potencial efectivo de la geodesica nula circular inestable descrito en la ecuación (2.6), el cual está evaluado en  $r_c$ , por lo que se utiliza el mismo método de calcularlos punto a punto.

Los resultados mostrados en las figuras (3.3) y (3.4) son los modos cuasi-normales imaginarios calculados en el nodo base, es decir  $n = 0$ , como se sabe el modo-cuasi normal imaginario de un agujero negro describe qué tan estable es éste.

En la figura (3.3) se puede observar que cuando el parámetro masa va aumentando los agujeros negros son mas estables, también se puede observar que el agujero negro de Reisner Nordström es más estable que el agujero negro de Hayward cargado, comparando este resultado con el de la parte real nos damos cuenta que eso es posible ya que que conforme la masa va aumentando el agujero vibrará menos por lo tanto el agujero negro será más estable.

En la figura (3.4) como se puede observar que la parte imaginaria de los modos cuasi-normales van creciendo conforme al aumento del parámetro carga, hasta llegar a un máximo y después decaen, esto quiere decir que al inicio no son estables hasta cierto parámetro de carga y posteriormente se empiezan a estabilizar, esto se debe a que el parámetro carga está limitado por el parámetro masa, entonces comparando este resultado con la parte real de frecuencia con el resultado de la parte imaginaria de la frecuencia nos podemos dar cuenta de que en ambos casos se va a obtener un máximo y que a partir de ahí el agujero ya no vibra, entonces el agujero negro se va volviendo estable hasta llegar a un nuevo estado base.

**CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE MODOS CUASI-NORMALES.**  
**3.2. PARTE IMAGINARIA DE LA FRECUENCIA DE LOS MODOS CUASI-NORMALES.**

---

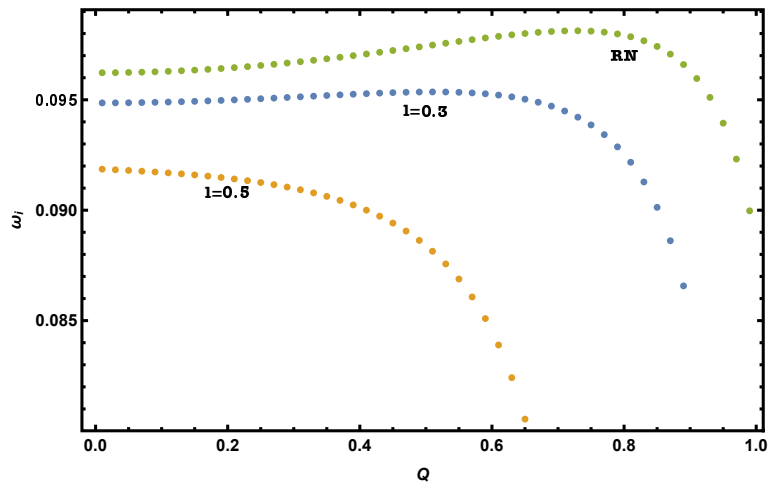


Figura 3.4: Se muestra la parte imaginaria de la frecuencia de un modo cuasi-normal de las métricas de RN y HM, haciendo una variación la masa, con  $M = 1$  y  $\hat{l} = 0,7, 0,5$ .

# Conclusión.

En este trabajo se analizan las frecuencias de los modos cuasi-normales de un agujero negro tipo Hayward con carga, por medio del estudio de geodésicas descritas por una partícula de prueba sujeta a la presencia de éste agujero negro, considerando un límite eikonal y se usa el método del exponente de Lyapunov, en particular se analizan la parte real y la parte imaginaria de la frecuencia de los modos cuasinormales, en dos escenarios, el primero corresponde a una variación del parámetro de masa, dejando los demás parámetros fijos, el segundo corresponde a una variación del parámetro de carga, dejando los demás parámetros fijos.

Se puede observar que, en el primer escenario, la parte real de los modos cuasi-normales decrece, es decir, que la velocidad angular de la partícula de prueba decrece (Ver Figura 3.1). Al analizar la parte imaginaria de los modos cuasi-normales, se tiene que dicho agujero negro oscila y decae a su estado base como se muestra en la Figura 3.3. Al comparar los resultados del agujero negro tipo Hayward con carga con el agujero negro tipo Reissner-Nordström se concluye que tienen el mismo comportamiento.

Para el segundo escenario, la parte real de los modos cuasi-normales crece, es decir, que la velocidad angular de la partícula de prueba va aumentando, visto desde el agujero negro, representa que, conforme aumentemos el parámetro de carga la frecuencia de oscilación crecerá, hasta llegar al límite del parámetro carga (Ver Figura 3.3). Al analizar la parte imaginaria de los modos cuasi-normales, se observa que la gráfica (Figura 3.4) crece hasta llegar a un punto máximo y decae para luego permanecer constante, es decir, que el agujero negro antes de ese punto nos describe regiones inestables y después de este punto el agujero negro describe regiones estables. Al comparar los resultados del agujero negro tipo Hayward con carga con el agujero negro tipo Reissner-Nordström se concluye que tienen el mismo comportamiento.

# Perspectivas.

Realizar el estudio de los modos cuasi-normales para el caso extremo del agujero negro regular tipo Hayward con carga.

Considerar otros métodos análisis para la obtención de los modos cuasi-normales del agujero negro tipo Hayward con carga y así comparar los resultados.

Usar el mismo método de estudio para otro tipo de agujero negro regular.

# Apéndice A

## Relatividad General.

La teoría de la relatividad general fue postulada por Albert Einstein en 1915 [7], se puede ver como la curvatura del espacio-tiempo que produce un objeto masivo, como puede ser el caso de la deformación producida por un agujero negro. El espacio-tiempo distorsionado afecta de igual forma el movimiento de objetos que se encuentren inmersos en este espacio-tiempo.

Al ser postulada esta teoría como consecuencia la teoría de la gravitación de Newton tenía que ser modificada, una de las principales razones fue que para Newton implicaba que la fuerza de gravedad se propagaba entre distintos objetos a velocidad infinita, lo que contradice al principio fundamental de la relatividad especial, que dice que ninguna interacción puede viajar a velocidad mas grande que la velocidad de la luz. La forma de medir la deformación del espacio-tiempo es a través de la métrica del espacio tiempo con la cual podemos obtener el elemento de línea que mide la distancia entre dos puntos en dicho espacio la forma del elemento de línea es:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.1})$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es la métrica y los índices  $\mu$  y  $\nu$  van desde cero hasta el número de dimensiones que tenga el espacio tiempo. Para poder obtener la forma de la métrica se tienen que resolver las ecuaciones de campo de Einstein que son de la forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci dado por:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho}^\rho \quad (\text{A.3})$$

y  $R_{\mu\nu\rho}^\rho$  es el tensor de curvatura, el cual mide la curvatura local del espacio-tiempo, por lo que el tensor de Ricci es una contracción del tensor de curvatura el cual esta dado por:

$$R_{\mu\nu\sigma}^\beta = \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\beta - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^\beta + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta \quad (\text{A.4})$$

los símbolos de Christoffel obtenidos a través de:

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\mu}). \quad (\text{A.5})$$

Por otro lado,  $R$  es el escalar de curvatura que es una contracción del tensor de Ricci, el cual describe la curvatura promedio del espacio-tiempo.

$$g^{\nu\rho} R_{\nu\rho} = R_\nu^\nu = R. \quad (\text{A.6})$$

$T_{\mu\nu}$  es el tensor de momento y energía, el cual contiene información de materia y energía contenida en el espacio-tiempo, si el espacio es vacío este tensor es 0. Con lo anterior se puede



apreciar que las ecuaciones de Einstein son acopladas y son complejas en resolver, por lo que algunas técnicas de resolverlas son a través de proponer la forma de la métrica y sus simetrías.

## A.1. Geodésicas.

La geodésica es la trayectoria mas corta que te lleva de un punto a otro punto por medio del desplazamiento paralelo sobre el espacio-tiempo. La expresión de una geodésica esta dada en general por :

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (\text{A.7})$$

donde  $x^\nu$  son las coordenadas y  $\tau$  un parámetro afin (tiempo propio de la partícula), y las cantidades  $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$  son los símbolos de Christoffel (1.5).

Hay tres tipos de geodésicas:

1. **Nula:** que son los rayos de luz, lo cual cumple

$$g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu = 0. \quad (\text{A.8})$$

2. **Temporaloide:** Si la signatura de la métrica es  $(-, +, +, +)$ , se tiene que cumplir :

$$g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu > 0. \quad (\text{A.9})$$

Las cuales son para partículas que viajan a velocidades mas grandes que la de la luz, por lo que no tienen interpretación física.

3. **Espacialoide:** Para la misma signatura que en las temporaloides entonces tenemos que :

$$g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu < 0. \quad (\text{A.10})$$

Representa partículas que viajan a velocidades menores que la de la luz.

Donde se ha tomado  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ .

## Apéndice B

# Exponente de Lyapunov.

Un método para cuantificar la dependencia sensible de la condición inicial para el comportamiento caótico es el exponente de Lyapunov [8]. Hay tantos exponentes de Lyapunov para un sistema particular como variables. Al principio nos limitaremos a considerar solo una variable y, por lo tanto, un exponente. Considere un sistema con dos estados iniciales que difieren en una pequeña cantidad; llamamos a los estados iniciales  $x_0$  y  $x_0 + \epsilon$ . Queremos investigar los valores eventuales de  $x_n$  después de  $n$  interacciones de los dos valores iniciales. El exponente de Lyapunov  $\lambda$  representa el coeficiente del crecimiento exponencial promedio por unidad de tiempo entre los dos estados. Después de  $n$  interacciones, la diferencia  $d_n$  entre los dos valores  $x_n$  es aproximadamente

$$d_n = \epsilon e^{n\lambda}. \quad (\text{B.1})$$

A partir de esta ecuación, podemos ver que si  $\lambda$  es negativo, las dos órbitas finalmente convergerán, pero si son positivas, las trayectorias cercanas divergirán y el caos resulta.

Veamos un mapa unidimensional descrito por  $x_{n+1} = f(x_n)$ . La diferencia inicial entre los estados es  $d_0 = \epsilon$ , y después de una interacción, la diferencia  $d_1$  es

$$d_1 = f(x_0 + \epsilon) - f(x_0) \simeq \epsilon \frac{df}{dx} \Big|_{x_0}, \quad (\text{B.2})$$

donde el último resultado se produce el lado derecho porque  $\epsilon$  es muy pequeño. Después de  $n$  interacciones, la diferencia  $d_n$  entre los dos estados inicialmente cercanos está dada por

$$d_n = f^n(x + \epsilon) - f^n(x_0) = \epsilon e^{n\lambda}, \quad (\text{B.3})$$

donde hemos indicado la  $n$ -ésima iteración de  $f(x)$  por el superíndice  $n$ . Si dividimos por  $\epsilon$  y tomamos el logaritmo de ambos lados, tenemos

$$\ln \left( \frac{f^n(x + \epsilon) - f^n(x_0)}{\epsilon} \right) = \ln(e^{n\lambda}) = n\lambda, \quad (\text{B.4})$$

y porque  $\epsilon$  es muy pequeño, tenemos para  $\lambda$ ,

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{f^n(x + \epsilon) - f^n(x_0)}{\epsilon} \right) = \frac{1}{n} \ln \frac{df^n(x)}{dx} \Big|_{x_0}. \quad (\text{B.5})$$

El valor de  $f^n(x_0)$  se obtiene al iterar la función  $f(x_0)$   $n$  veces

$$f^n(x_0) = f(f(\dots(f(x_0))\dots)). \quad (\text{B.6})$$

## APÉNDICE B. EXPONENTE DE LYAPUNOV.

---

Usamos la regla de la cadena en la  $n$ -ésima iteración para obtener.

$$\frac{df^n(x)}{dx} \Big|_{x_0} = \frac{df^n}{dx} \Big|_{x_{n-1}} \frac{df^n}{dx} \Big|_{x_{n-2}} \cdots \frac{df^n}{dx} \Big|_{x_0}. \quad (\text{B.7})$$

Tomamos el límite como  $n \rightarrow \infty$  y finalmente obtenemos

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{df^n(x_i)}{dx}. \quad (\text{B.8})$$

# Bibliografía

- [1] G. Abbas and U. Sabiullah. Geodesic study of regular hayward black hole. *strophys Space Sci*, 352:769–774, 2014.
- [2] Arturo Lara Jaime Ramírez Claudia Moreno, R.Garcia-Salcedo. Introducción a las ondas gravitacionales. *Lat.Am.J.Phys.Educ*, 2(3), Septiembre 2008.
- [3] B.P. Abbott et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys.Rev.Lett*, 116(061102), 2016.
- [4] Valeri P. Frolov. Notes on non-singular models of black holes. *arXiv:1609.0758v2*, 2(1):1, November 2016.
- [5] Sean A. Hayward. Formation and evaporation of nonsingular black holes. *Phys.Rev.Lett*, 96(031103), January 2006.
- [6] Bernd G. Schmidt. Kostas D. Kokkotas. Quasi-normal modes of stars and black holes. *Living Reviews in Relativity*, 2, September 1999.
- [7] Miguel Alcubierre y Tomás Ortín Nuria Calvet. *La Hechicera*. Universidad de los Andes, Merida, Venezuela, first edition, 2001.
- [8] Stephen T. Thornton and J. B. Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. Thomson, fifth edition, 2001.
- [9] Helvi Wittek Vilson T. Zanchin Victor Cardoso, Alex S. Miranda. Geodesic stability, lyapunov exponents, and quasinormal modes. *Phys.Rev.D*, 79(064016), March 2009.
- [10] Alfredo Herrera-Aguilar y Ulises Nucamendi. Kerr black hole parameters in terms of the redshift/blueshift of photons emitted by geodesic particles. *Phys.Rev.D*, 92(045024), 2015.