Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Sociales y Humanidades

Área Académica de Ciencias de la Educación
Doctorado en Ciencias de la Educación

Ambientes de aprendizaje y niveles de entendimiento matemático en estudiantes de bachillerato

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Doctor en Ciencias de la Educación

P R E S E N T A

Jesús Israel Monroy Muñoz

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Octaviano García Robelo

CO-DIRECTOR DE TESIS
Dra. Ana Belén Ramos Guajardo

COMITÉ TUTORIAL:
Dra. Coralia Pérez Maya
Dr. Carlos Rondero Guerrero
Dra. María Cruz Chong Barreiro

Pachuca de Soto, Hidalgo 2018

OF. NÚM. UAEH/ICSHU/DCE/32/18

MTRO. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR
P R E S E N T E

Estimado Maestro:

Sirva este medio para saludarlo, al tiempo que nos permitimos comunicarle que una vez leído y analizado el proyecto de investigación titulado **Ambientes de aprendizaje y niveles de entendimiento matemático en estudiantes de bachillerato** que para optar al grado de Doctor en Ciencias de la Educación presenta **Monroy Muñoz Jesús Israel,** matriculado en el Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación, (Generación 2015-2018), con número de cuenta 116389; consideramos que reúne las características e incluye los elementos necesarios de un trabajo de tesis, por lo que, en nuestra calidad de sinodales designados como jurado para el examen de grado, nos permitimos manifestar nuestra aprobación a dicho trabajo.

Por lo anterior, hacemos de su conocimiento que al alumno mencionado le otorgamos nuestra autorización para imprimir y empastar el trabajo de Tesis, así como continuar con los trámites correspondientes para sustentar el examen para obtener el grado.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"
Pachuca de Soto, Hgo. 21 de Mayo de 2018.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES

Dr. Alberto Severino Jaén Olivas
DIRECTOR

Dr. Octaviano García Robelo
DIRECTOR DE TESIS

Dra. Coralia Juana Pérez Maya
PROFESORA INVESTIGADORA

Dra. María Cruz Chong Barreiro
PROFESORA INVESTIGADORA

Dr. Carlos Rondero Guerrero
PROFESORA INVESTIGADORA

CCP. Archivo.

Dedicatorias

A Mis padres

Por ser el principal apoyo para lograr cada una de las metas planteadas en mi vida.

Agradecimientos

A la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo y al Instituto de Ciencias Sociales y Humanidades por abrirme las puertas para formarme.

Al programa académico del Doctorado en Ciencias de la Educación, por promover la formación de profesionales en distintos campos de la educación.

A todos los docentes del área académica de Ciencias de la Educación, por las enseñanzas y apoyo durante mi estancia académica.

Al Dr. Octaviano García Robelo y la Dra. Ana Belén Ramos Guajardo por dirigir el trabajo de investigación con compromiso y entrega.

A la Dra. Coralia Pérez Maya, a la Dra. María Cruz Chong Barreiro y al Dr. Carlos Rondero Guerrero por el tiempo, esfuerzo y dedicación durante todo el proceso de investigación.

Al Dr. Félix Montoya Flores por su apoyo en este trabajo.

Al Dr. José Luís San Fabián Maroto y a la Universidad de Oviedo, España; por albergarme tan amablemente durante el tiempo de estancia para terminar este trabajo de investigación.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por ser un sostén para los estudiantes de posgrado.

A mi esposa Atenea por acompañarme durante toda mi formación del Doctorado.

A todas las personas que colaboraron de forma extraordinaria en la construcción de esta tesis.

Resumen

El presente trabajo muestra el análisis del ambiente de aprendizaje que construye el profesor en la asignatura de álgebra en primer semestre de bachillerato, además de identificar los niveles de entendimiento que construyen los estudiantes con respecto a los conocimientos algebraicos, para finalmente realizar un análisis de la relación entre el ambiente de aprendizaje y los niveles de entendimiento desde el marco del modelo por competencias y el enfoque de aprendizaje con entendimiento.

El estudio se abordó bajo una perspectiva cualitativa retomando el estudio de casos. Se abordan elementos de los principales diseños metodológicos utilizados en este tipo de estudios que se resumen en un enfoque en contexto real, no manipulado por variables, así como una relación entre enseñanza y aprendizaje en pequeña escala.

En lo que respecta al ambiente de aprendizaje los resultados muestran la interacción dinámica en el aula entre las múltiples dimensiones siendo el profesor un eje fundamental de estas. Las carencias conceptuales, didácticas y de tipo evaluativas identificadas en los profesores, junto con la visión reduccionista del curriculum y un ambiente centrado en la evaluación por parte de la institución limitan en forma significativa el ejercicio de sus roles como docentes en el aula.

Por su parte, se encontraron bajos niveles de entendimiento matemático en los estudiantes en lo que respecta a los conceptos de variable, igualdad y fracciones algebraicas. Múltiples ausencias conceptuales parecen venir acumulándose desde los niveles primaria y secundaria.

Respecto a la relación entre el ambiente y los niveles de entendimiento puede afirmarse que el rol del profesor está caracterizado por la falta de implementación de problemas auténticos y la ausencia de explicitación en su discurso acerca de las conexiones entre los conceptos matemáticos por medio de distintas representaciones. Esto genera en el estudiante un conocimiento desarticulado y fragmentado que lo lleva a querer utilizar la memorización como único recurso.

Las carencias disciplinares, así como las de tipo didáctico, llevan a sustentar, entre otros elementos, la formación específica de profesores para bachillerato en elementos didácticos, disciplinares y epistemológicos no solo en relación con su nivel educativo, sino sus antecedentes y del subsiguiente, que permitan construir ambientes que favorezcan el desarrollo de entendimiento matemático caracterizado por los elementos del pensamiento matemático.

Abstract

The following work shows the analysis of the learning environment built by the teacher on the subject of algebra in the first semester of high school, also to identify the levels of understanding that the students build regarding the algebraic knowledge, and lastly do an analysis of the relationship between the learning environment and the levels of understanding from the model's framework by the competencies and the focus of learning with understanding.

The research was addressed under a qualitative perspective resuming the case study. The items addressed are from the main methodological designs used in this type of research that are summarized in an approach in a real context, not manipulated by variables, as well as a relation between teaching and learning on a small scale.

Regarding the learning environment, the results show the dynamic interaction in the classroom by multiple dimensions, being the teacher the fundamental axis. The conceptual, didactic and evaluative shortage identified in the teachers, along with the resume's reductionist view, and an environment focused on the evaluation from the institution, limits in a significant way the performance of their roles, as teachers in the classroom.

On the other hand, low levels of mathematical understanding were found among students regarding the variable concepts, equality, and algebraic fractions. Multiple conceptual absences seem to be accumulating since elementary and middle school.

Regarding the relationship between the environment and the levels of understanding, it can be asserted that the role of the teacher is characterized by the lack of implementation of authentic problems and the lack of explanation in their speech about the link between the mathematical concepts through different representations. This generates in the student a disarticulated and fragmented knowledge that leads to the use of memorization as the only resource.

The lack of disciplines such as the didactic type, lead to maintain, among other elements, the specific formation of high school teachers in didactic, disciplinary and epistemological elements, not only in relation to their education level but their background and what will follow, that will allow to build environments that favor the development of the mathematical understanding characterized by the elements of mathematical thought.

ÍNDICE GENERAL

Resumen **i**

Abstract **iii**

Introducción **11**

CAPÍTULO I. El problema sobre los ambientes de aprendizaje en el aula de matemáticas **13**

1.1 Origen del problema 13

1.2 Preguntas de investigación 18

1.3 Objetivos 18

1.4 Justificación 19

CAPÍTULO II. Estado actual sobre los ambientes de aprendizaje en el aula de matemáticas. **21**

2.1 Enfoque por competencias 21

2.1.1 La prueba de conocimientos de PISA 22

2.1.2 La prueba del ambiente en el aula de matemáticas por parte de 28

PISA 28

2.1.2.1 Actitudes de los estudiantes y estrategias de aprendizaje 28

2.1.2.2 Entorno de aprendizaje 32

2.1.2.3 Tiempo de aprendizaje y trabajo de curso 33

2.1.2.4 Clima de clase 35

2.1.2.5 Evaluaciones del estudiante y profesores 36

2.2 Aprendizaje con entendimiento 38

2.2.1.1 Tipo de tareas 38

2.2.1.2 Cultura social 43

2.2.1.3 Tipo de herramientas 44

2.2.1.4 Equidad y accesibilidad 46

2.2.5 La evaluación 48

2.2.6 Rol del profesor 50

2.2.7 Formación de profesores 52

2.3 Conclusiones del estado del conocimiento 53

CAPÍTULO III. Elementos teórico conceptuales sobre competencias y aprendizaje con entendimiento 60

3.1 La dimensión filosófica del entendimiento 61

3.1.1 El positivismo como filosofía subyacente en la educación en México 63

3.2 Entendimiento matemático 65

3.3 Los problemas en matemáticas y el desarrollo entendimiento 66

3.3.1 Distintos tipos de problemas generan distintos niveles de entendimiento 73

3.4 El aprendizaje por competencias y los problemas matemáticos 74

3.4.1 Qué son las competencias 74

3.4.2 Problemas matemáticos y desarrollo de competencias 77

3.4.3 Niveles de competencia matemática 80

3.5 El ambiente de aprendizaje desde el enfoque de aprendizaje con entendimiento 84

3.5.1 Cultura social 84

3.5.2 La naturaleza y tipo de las tareas de aprendizaje 85

3.5.3 Equidad y accesibilidad 85

3.5.4 Rol del profesor 85

3.5.4.1 Entendimiento de las matemáticas desde la perspectiva del profesor 85

3.5.5 Tipo de herramientas 89

3.5.6 Evaluación 89

3.5.6.1 Evaluación de los procesos cognitivos en la construcción de significados 91

3.6 Ambientes favorables para el aprendizaje en el aula de matemáticas en el enfoque por competencias. 92

3.6.1 Actitudes de los estudiantes y Estrategias de aprendizaje 94

3.6.2 Entorno de aprendizaje 95

3.6.3 Tiempo de aprendizaje y trabajo de curso 95

3.6.4 Clima del centro educativo y clase 95

3.6.5 Evaluaciones 95

3.6.5.1 Niveles de competencia matemática y evaluación del entendimiento 96

3.7 El tránsito entre la aritmética y el álgebra. Una perspectiva histórico - epistemológica 100

CAPÍTULO IV. Metodología 104

4.1 Tipo de estudio 106

4.2 Contexto de la investigación: escenario y participantes 108

4.3 Delimitación conceptual sobre los niveles de entendimiento y los ambientes de aprendizaje. 111

4.3.1 Entendimiento de los temas algebraicos 112

4.4 Estrategia metodológica e instrumentos 118

4.4.1 Observación participante 120

4.4.2 Entrevistas 121

4.4.3 Análisis de documentos 123

4.4.4 Análisis de la información 124

4.4.5 Estrategias de triangulación 126

CAPÍTULO V. Resultados de investigación acerca de los ambientes de aprendizaje y niveles de entendimiento en el aula de matemáticas 129

5.1 El ambiente de aprendizaje en el aula 129

5.1.1 El rol del profesor y su función durante la implementación de problemas de aprendizaje 130

5.1.2 Sobre la forma en que el plan de estudios de álgebra, a través del profesor, hace equitativos y accesibles los contenidos de la asignatura 139

5.2 Los niveles de entendimiento de los estudiantes de bachillerato 142

5.2.1 La construcción de herramientas cognitivas por parte de los estudiantes 142

5.2.2 El rol de la evaluación en la construcción de una cultura social en el aula 148

5.3 Conclusiones 157

5.3.1 Respecto al ambiente de aprendizaje que construye el profesor 158

5.3.1.1 El rol del profesor 158

5.3.1.2 El tipo de problemas implementados en el aula 160

5.3.2 Con respecto a los niveles de entendimiento que construyen los estudiantes 161

5.3.2.1 La construcción de herramientas cognitivas 162

5.3.2.2 La evaluación 163

5.3.2.3 Cultura social 164

5.3.3 Con respecto a la relación entre los ambientes de aprendizaje y los niveles de entendimiento 164

5.4 Recomendaciones 166

5.4.1 Respecto a los roles del profesor 166

5.4.2 El pensamiento crítico y su papel en la construcción de las herramientas cognitivas 167

5.4.3 Tipo de tareas de aprendizaje 170

5.4.4 La evaluación de los aprendizajes 174

5.4.5 Futuras investigaciones 174

Referencias **178**

Anexo 1. Guía de observación **188**

Anexo 2. Guía de Entrevista **196**

ÍNDICE DE IMÁGENES

Imagen 1 Desarrollo de un binomio al cuadrado 132

Imagen 2 Cálculo de área de un cuadrilátero 134

Imagen 3 Descomposición de la figura... 135

Imagen 4 Aplicación del binomio de Newton 136

Imagen 5 Binomio al cuadrado 153

Imagen 6 Binomio al cubo 154

Imagen 7 Cálculo del área sombreada 155

Imagen 8 Solución de un estudiante al problema del área sombreada 156

Imagen 9 Algunos problemas del examen parcial 160

Imagen 10 Error de cálculo en un Tweet 167

Imagen 11 Igualdad entre fracciones algebraicas 172

Imagen 12 Resta de fracciones 173

Imagen 13 Resta de fracciones algebraica 173

Imagen 14 Representación gráfica de una función 173

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Relación entre los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas 78

Tabla 2 Niveles de competencia matemática 80

Tabla 3 Tipos de problemas en aprendizaje con entendimiento y competencias . 81

Tabla 4 Categorías e indicadores del ambiente de aprendizaje de acuerdo con la OCDE (2012) 92

Tabla 5 Instituciones destacadas en cuanto a planteles y docentes en educación 108

Tabla 6 El programa de álgebra 112

Tabla 7 Obtención de información a partir de las dimensiones 113

Tabla 8 Actores, dimensiones, categorías e instrumentos desde el enfoque aprendizaje con entendimiento 118

Tabla 9 Actores, dimensiones, categorías e instrumentos desde el enfoque por competencias.. 119

ÍNDICE DE ESQUEMAS

Esquema 1 Instrumentos de obtención de información y dimensiones 115

Introducción

La realización del presente trabajo se llevó a cabo en distintas etapas articuladas entre sí. Estas son: el origen y planteamiento del problema, el estado actual sobre los ambientes de aprendizaje, los elementos teórico – conceptuales sobre competencias y aprendizaje con entendimiento la metodología y finalmente el análisis de resultados centrado en los ambientes de aprendizaje y niveles de entendimiento en el aula de matemáticas.

Estas etapas se conformaron en capítulos y son la estructura general de la tesis. El primer capítulo lo compone el origen y planteamiento del problema, e incluye las preguntas de investigación, los objetivos y la justificación.

En el segundo capítulo se hace una revisión de las principales tendencias en educación matemática por medio de organismos que han adquirido protagonismo a nivel mundial en este mismo tema. Se da cuenta, por un lado, de aquellas investigaciones sobre el modelo por competencias y por otro del enfoque de aprendizaje con entendimiento.

Por parte del modelo por competencias se desarrollan aquellos factores del ambiente que impactan en los resultados de las evaluaciones en matemáticas, siendo estas las actitudes de los estudiantes, el entorno de aprendizaje, el tiempo de aprendizaje, el clima de clase y las evaluaciones. Las investigaciones sobre aprendizaje con entendimiento se estructuran por las dimensiones que este modelo considera parte del ambiente de aprendizaje, estas son: el tipo de tareas de aprendizaje, la cultura social en el aula, el tipo de herramientas cognitivas que construye el estudiante, la equidad y accesibilidad con la que se implementan problemas de aprendizaje y la evaluación. Finalmente, en este segundo capítulo se obtienen una serie de conclusiones encaminadas a reforzar la importancia de investigar el objeto de estudio construido.

El tercer capítulo lo compone el marco teórico. Se comienza con un análisis filosófico del concepto de entendimiento, pasando a desarrollar el término de entendimiento matemático para llegar a exponer los principales elementos del modelo de aprendizaje con entendimiento. Posteriormente se analizan diferentes conceptos dentro del enfoque por competencias. Este tercer capítulo consiste esencialmente en la construcción de lazos y puntos de convergencia entre los dos enfoques concluyendo que el enfoque de aprendizaje con entendimiento subsume al modelo por competencias ya que el fin último de las competencias, de acuerdo con algunos teóricos, es adquirir entendimiento.

La metodología es el componente del cuarto capítulo. Se aborda el tipo de estudio, el contexto de la investigación. La delimitación conceptual y la estrategia metodológica que a su vez se integra de la observación participante, la entrevista, el análisis de documentos, el análisis de la información y las estrategias de triangulación.

El quinto capítulo lo integra el análisis de la relación entre los ambientes de aprendizaje y los niveles de entendimiento. El ambiente de aprendizaje en el aula se compone de dos elementos: el primero es el rol del profesor y su función en cuanto a la implementación de problemas de aprendizaje, y el segundo se centra en la forma en que el plan de estudios de álgebra, a través del profesor hace equitativos y accesibles los contenidos de la asignatura. Por su parte el análisis de los niveles de entendimiento de los estudiantes se compone de dos partes, la primera es la construcción de herramientas cognitivas por parte de los estudiantes y la segunda es el rol de la evaluación en la construcción de una cultura social en el aula. Finalmente se abordan las conclusiones en relación con cada una de las dimensiones del ambiente de aprendizaje y un apartado de recomendaciones y reflexiones finales.

CAPÍTULO I. El problema sobre los ambientes de aprendizaje en el aula de matemáticas

1.1 Origen del problema

Los cambios educativos en el mundo se encuentran en un gran dinamismo. La educación como parte fundamental de la economía de una nación se mueve en función de los procesos económicos de organismos internacionales. De ahí que un análisis estratégico de la economía mundial pueda ofrecer elementos para vislumbrar el rumbo de las políticas educativas en un país. Hoy más que nunca las instituciones internacionales están siendo protagónicas en cuanto a la asignación de directrices educativas para los países miembros, como es el caso más notorio de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE).

La OCDE tiene como finalidad afrontar los problemas educativos basados en diagnósticos. En caso de México mediante el acuerdo de cooperación México-OCDE (OCDE, 2010) se busca elevar la calidad de las escuelas mediante acciones como el establecimiento de un marco para la evaluación e incentivos para docentes.

En dicho acuerdo mencionado se desarrollan 15 recomendaciones que giran en torno a la conformación de un adecuado ambiente de enseñanza – aprendizaje. La OCDE menciona que "…para consolidar mejores escuelas proponen una estrategia para que las escuelas en México cuenten con los ambientes de enseñanza y aprendizaje adecuados para los estudiantes y los docentes" (OCDE, 2010, p. 6). El marco teórico implementado en PISA (OCDE, 2006) que sustenta las recomendaciones en el acuerdo México-PISA para lograr las metas mencionadas en dichos puntos se basa en las competencias.

Este marco referencial de la OCDE basado en competencias posee ciertas carencias conceptuales, procedimentales y en cuanto a identificar el desarrollo cognitivo de los estudiantes en función del ambiente de aprendizaje. Es por ello necesario la incorporación del término "entendimiento", que resulta más adecuado en cuanto a su riqueza, claridad y profundidad conceptual. Una investigación no solo debe estar sustentada en las normas científicas de la época; como es sin duda el caso de las pruebas PISA y otras evaluaciones nacionales e internacionales, sino también en principios filosóficos que perduran a través del tiempo. La ciencia nos da respuestas, la filosofía preguntas. El análisis del concepto de entendimiento plantea nuevos cuestionamientos a lo ya establecido y propicia un diálogo con los conceptos actuales, de manera que esta investigación pueda identificar posibles rutas para la mejora del proceso enseñanza aprendizaje en matemáticas.

En esta perspectiva, el profesor en el aula busca que sus estudiantes entiendan ideas, conceptos o principios fundamentales de la ciencia. Entender provoca satisfacción; cuando alguien entiende puede aplicarlo a otras situaciones con flexibilidad e ingenio. En el contexto de ciertas aulas de matemáticas suele existir un abuso del término entender, reduciéndolo a un acto de memorización.

Sin embargo, entender tiene un significado distinto al que le asignan comúnmente las aulas de matemáticas que trabajan bajo una perspectiva tradicionalista. El acto de entender guarda similitud con el proceso de aquellas investigaciones relatadas por Edgar Allan Poe o Arthur Conan Doyle, en donde los personajes principales bajo ciertas condiciones son capaces de resolver las incógnitas, el primero utilizando un método inductivo y el segundo uno deductivo. Ambos tipos de razonamiento en este tipo de historias muestran que entender algo no es cuestión de acumulación de información, lo mismo que no se aprende historia memorizando fechas y nombres. El acto de entender requiere de una actividad cognitiva muy distinta.

El caso quizá más conocido sobre el acto de entender sea el de Arquímedes de Siracusa (287 - 212 a.C.) cuando descubrió el método para determinar el volumen de un objeto. Se dice que el rey Hierón ordenó la fabricación de una corona y le pidió a Arquímedes determinar si la corona estaba hecha solo de oro puro o el orfebre había sido deshonesto y le había agregado plata. Arquímedes tenía que resolver el problema sin dañar la corona, así que no podía fundirla y convertirla en un cuerpo regular para calcular su masa y volumen y, a partir de ahí, su densidad. La solución a este problema la encontró Arquímedes al notar que el nivel de agua subía en la bañera cuando entraba, y así se dio cuenta de que ese efecto podría ser usado para determinar el volumen de la corona. Arquímedes según el relato, salió a la calle gritando “Eureka” que significa “Lo he encontrado”.

Con base en este ejemplo, Lonergan (2004) identifica cinco características en ese acto de entender o chispazo inteligente: a) llega como una liberación de la tensión del preguntar; b) llega repentina e inesperadamente; c) no está en función de circunstancias externas, sino de condiciones internas; d) tiene función de pivote entre lo concreto y lo abstracto, y e) pasa a formar parte de la textura habitual de la mente de uno mismo.

El acto de entender es una liberación posterior a un proceso de preguntas, de lo que se denomina el acto de inquirir. Arquímedes no lo descubrió en su laboratorio en pose de pensador, no siguió reglas preestablecidas, ya que estas no existen para llegar a entender algo, él creó nuevas; el acto de entender llegó como un relámpago. También este “chispazo” no está en función de condiciones externas, como cuando todos entraban a los baños de Siracusa desconociendo los principios de la hidrostática, aunque estuvieran expuestos a las mismas sensaciones externas, sino que fue Arquímedes el que lo propició con base a sus condiciones mentales internas. Además, el problema resuelto se centraba en un tema abstracto que sirvió para resolver uno concreto. Finalmente, aquel periodo difícil y problemático antes de llegar a la solución pasa a ser algo claro y que además una vez entendido algo se puede razonar sobre lo entendido y así potencializar otros “chispazos” inteligentes.

Sirva este ejemplo para mostrar que:

> …lo que es verdad del descubrimiento, también vale para la transmisión de los descubrimientos mediante la enseñanza. Porque un maestro no puede comprometerse a que un alumno entienda. Todo lo que puede hacer es presentarle los elementos sensibles sobre el tema, en un orden sugerente, y con el énfasis adecuado. De los alumnos mismos depende el que alcancen la intelección, y lo logran con facilidad y rapidez diferentes. Algunos pescan el asunto antes de que el maestro pueda

> terminar su explicación. Otros sólo alcanzan a mantener el paso. Otros ven la luz sólo cuando revisan la materia por sí mismos. Algunos, finalmente, nunca pescan nada (Lonergan, 2004, p. 22).

Si el profesor se encuentra limitado en el sentido de no poder actuar directamente en la mente de sus estudiantes y modificar a voluntad sus procesos cognitivos y así programar actos de entendimiento, ¿cuál es su papel en el proceso de enseñanza? Su papel se basa en la presentación de elementos sensibles con énfasis adecuado a los estudiantes, es decir, la construcción de ambientes de aprendizaje. Pero en este punto se podría objetar lo mencionado anteriormente acerca de que el entendimiento no depende de las condiciones externas. Ante esto tiene que tomarse en cuenta lo siguiente: lo fundamental en el descubrimiento de Arquímedes consistió en el tipo de problema que se le había planteado y el método inquisitivo que lo condujeron hasta encontrar un contexto determinado donde apareció el "chispazo". Estas condiciones sí pueden ser creadas por el profesor, tal como Hierón lo hizo con una pregunta desencadenante. A tener en cuenta es que en el caso de los baños de Siracusa estos no fueron construidos con intenciones pedagógicas. Sin embargo, en el aula sí pueden construirse situaciones didácticas para crear un ambiente favorable al aprendizaje acorde a las condiciones y características de los estudiantes.

Desde entonces, pasando por la academia de Platón, el Liceo de Aristóteles y otras corrientes filosóficas, han existido ciertos elementos que se consideran fundamentales para crear un ambiente favorable al aprendizaje. Con el desarrollo de la pedagogía, la didáctica, la psicología cognitiva y la matemática, diversas corrientes, enfoques y escuelas han identificado dimensiones del ambiente en el aula que son favorables para que los estudiantes entiendan. A fines del siglo XX y principios del XXI han destacado dos enfoques que aplican y evalúan el aprendizaje de los estudiantes en matemáticas con respecto al ambiente en el aula: estos son el enfoque por competencias y el de aprendizaje con entendimiento o comprensión.

En el estado del conocimiento se llevó a cabo una revisión de las principales tendencias en educación matemática a nivel mundial, partiendo de las directrices asignadas por organismos como la OCDE, la Unión Europea así como investigaciones sobre didáctica de la matemática en Estados Unidos y España principalmente, centradas en el ambiente de aprendizaje bajo el enfoque por competencias y de aprendizaje con entendimiento. En relación con el enfoque por competencias, los trabajos se abordan desde una perspectiva cuantitativa, mientras que los de aprendizaje con entendimiento se caracterizan por ser de una metodología cualitativa.

Los estudios de tipo cuantitativo ofrecen un panorama general sobre los elementos del ambiente en el aula que impactan en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de 15 años centrados en actitudes de los estudiantes y estrategias de aprendizaje, entorno de aprendizaje, tiempo de aprendizaje y trabajo de curso, clima del centro educativo y clase y evaluaciones del estudiante y profesores. Se establecen relaciones entre estas variables, así como con el rendimiento de los estudiantes. Sin embargo, estas relaciones no permiten comprender los procesos que suceden en el aula de forma más profunda.

Por su parte, las investigaciones de tipo cualitativo reportadas proporcionan una mirada comprensiva sobre el ambiente de aprendizaje, pero algunas de estas contribuciones parecen estar desarticuladas de lo que debiera considerarse como un cuerpo de dimensiones unificadas (Hiebert, 1997) con el objetivo de analizar una problemática compleja como lo es el aula de clases.

Debido a que una actividad que guía los roles del profesor de matemáticas es que sus estudiantes entiendan ideas y conceptos fundamentales, sería relevante realizar una investigación que integre los dos enfoques, con el objetivo de analizar la forma en que el profesor construye un ambiente que favorece la adquisición de entendimiento matemático por parte de sus estudiantes. Además, con base en que las dimensiones de ambos enfoques pertenecen al campo del curriculum, la tendencia es tener una comprensión más integral de lo que sucede en el aula de matemáticas (Lacasta & Wilhelmi, 2008).

1.2 Preguntas de investigación

En atención a la problemática planteada es importante incorporar modelos emergentes más cualitativos e integrales, para así buscar una mejor comprensión sobre el cómo se construyen ambientes de aprendizaje que lleven a desarrollar entendimiento matemático en los estudiantes. En este sentido los estudios de distintos enfoques de la didáctica de la matemática pueden ayudar a comprender el fenómeno y así plantear propuestas de mejora (Castañeda, 2010; D'Amore y Godino, 2007) que permitan orientar los procesos de reformas curriculares (Eudave, 2013). A partir de las consideraciones anteriores se establecen las siguientes preguntas de investigación.

¿Cómo el profesor de matemáticas construye un ambiente de aprendizaje para el desarrollo de entendimiento en la asignatura de álgebra en primer semestre de bachillerato?

¿Qué niveles de entendimiento construyen los estudiantes con respecto a los conocimientos algebraicos?

¿Cómo se relaciona el ambiente de aprendizaje propiciado por el profesor con el entendimiento construido por los estudiantes en la clase de álgebra en primer semestre de bachillerato?

1.3 Objetivos

Objetivo general

Analizar la forma en que se relaciona el ambiente de aprendizaje propiciado por el profesor con el entendimiento construido por los estudiantes en la clase de álgebra en primer semestre de bachillerato.

Objetivos específicos

Analizar el ambiente de aprendizaje que construye el profesor para el desarrollo de entendimiento en la asignatura de álgebra en primer semestre de bachillerato.

Identificar los niveles de entendimiento que construyen los estudiantes con respecto a los conocimientos algebraicos.

La pregunta general contempla a estudiantes de primer semestre de bachillerato debido a que los datos cuantitativos sobre su nivel de competencias y el contexto áulico donde se desenvuelven provienen de organismos internacionales que evalúan a estudiantes mexicanos de 15 años donde el 25% se encuentra en secundaria y el 75% en bachillerato. Este último constituye una muestra más representativa que equivale aproximadamente 25300 de los 33800 que fueron tomados como muestra para la evaluación en 2012. Teniendo en cuenta esta selección de los estudiantes de primer semestre de bachillerato, la asignatura que se considera es álgebra.

1.4 Justificación

Esta investigación se considera relevante porque pretende analizar la forma en que el profesor construye un ambiente de aprendizaje para favorecer el entendimiento matemático a los estudiantes. El estudio se sustenta en la integración de dos enfoques, por competencias y de aprendizaje con entendimiento, de los cuales carecen diversas investigaciones reportadas en el apartado del estado del conocimiento.

Las debilidades identificadas en estudios cuantitativos donde se busca la asociación entre factores del ambiente y rendimiento de matemáticas, especialmente en los estudios de países con menos niveles de desempeño, ponen de manifiesto la necesidad de realizar estudios cualitativos en el aula más integrales. Con el fin de tener bases para la búsqueda, construcción y medición de factores o variables que impactan en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes, el análisis debe basarse en estudios cualitativos llevado a cabo directamente en el aula. Se requiere mayor y mejor conocimiento acerca de la construcción de ambientes de aprendizaje en contextos determinados. Esta investigación pretende aportar elementos en este sentido.

De acuerdo al nivel educativo que curse un estudiante, aprender matemáticas contribuye a su desarrollo cognitivo en términos de adquirir mayores conocimientos y desarrollar habilidades propias de su pensamiento, como es el análisis, la reflexión, la toma de decisiones y la solución de problemas, ya sea de modo individual o colaborativo con sus compañeros y con el profesor.

La asignatura de álgebra es importante ya que tanto al finalizar secundaria como a inicios del bachillerato se adquieren las bases que posteriormente se articulan con trigonometría, geometría analítica y cálculo diferencial e integral. Las deficiencias en el aprendizaje de estas últimas han sido identificadas por las carencias en los conocimientos algebraicos. Como son el uso de variables, igualdad y ecuación, lenguaje algebraico, el tránsito entre la aritmética y el álgebra. De manera que analizar el ambiente de aprendizaje que favorezca entendimiento puede arrojar elementos conceptuales para una toma de decisiones por parte del profesor o la institución, encaminadas a mejorar el curriculum de matemáticas en sus diferentes fases.

CAPÍTULO II. Estado actual sobre los ambientes de aprendizaje en el aula de matemáticas.

Para dar sustento a este trabajo de investigación sobre los ambientes de aprendizaje en el aula de matemáticas desde el enfoque por competencias y de aprendizaje con entendimiento, en este apartado se hace una revisión de dos tendencias en educación matemática a nivel mundial. La primera surge de las directrices asignadas por organismos que han adquirido protagonismo y liderazgo en temas educativos como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) y la Unión Europea (UE) a través de la Red Europea de información sobre educación (Eurydice). Esta es denominada bajo el nombre de competencias. La segunda es un enfoque desde la didáctica de la matemática que tiene origen en la psicología cognitiva conocida como aprendizaje con entendimiento.

En estas dos tendencias asignadas como prioritarias se han identificado dimensiones relevantes en la construcción de un ambiente de aprendizaje de las matemáticas. Por parte de las competencias se reconoce que existen diversos factores interrelacionados que favorecen la construcción de conocimiento como son: actitudes de los estudiantes y estrategias de aprendizaje, entorno de aprendizaje, tiempo de aprendizaje y trabajo de curso, clima del centro educativo y clase y evaluaciones del estudiante y profesores (OCDE, 2004).

El ambiente en el aula desde el aprendizaje con entendimiento considera seis dimensiones fundamentales para el desarrollo de entendimiento matemático, este consta de la cultura social, los roles del profesor, el tipo de tareas de aprendizaje, la evaluación, el tipo de herramientas que construye el estudiante y la equidad y accesibilidad con que se diseñan e implementan las tareas (Hiebert, 1997; Usinsky, 2012)

2.1 Enfoque por competencias

La OCDE a través de PISA aplica dos tipos de pruebas: la de conocimientos y la que se centra en el contexto. Los documentos que conforman el estado del conocimiento son los resultados de estas dos pruebas. Respecto al ambiente en el aula de matemáticas desde el enfoque por competencias se fundamenta en todos aquellos informes, análisis o publicaciones oficiales de la OCDE que se han escrito sobre los elementos mencionados anteriormente. Además, se retoman informes sobre los resultados de la prueba de conocimiento de matemáticas de PISA, TIMSS y, en el caso de México, la prueba ENLACE.

Estos documentos acerca del ambiente en el aula bajo el enfoque por competencias, fueron obtenidos con base en un cuestionario aplicado por la OCDE que permite recabar información sobre el contexto del estudiante, las actitudes, el trabajo y clima en clase, el entorno de aprendizaje y las formas de evaluación. En el caso de México, este cuestionario de contexto se aplicó en el año 2012 a 32800 estudiantes de 15 años, donde el 75% pertenecía a nivel bachillerato y el 25% a secundaria. El cuestionario es de tipo Likert. Los datos de los documentos recabados para dar cuenta del ambiente bajo el enfoque por competencias son de tipo cuantitativo y se centran en una metodología de análisis de datos sustentada en herramientas estadísticas de correlación entre variables, aunque no se especifica qué tipo de herramientas se utilizaron.

2.1.1 La prueba de conocimientos de PISA

En gran parte de los países del mundo, los estudiantes son examinados en su rendimiento en matemáticas por medio de organismos internacionales, nacionales y regionales. El tema de la evaluación es reciente, como es el caso del Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (Programme for International Students Assesment PISA) y la prueba sobre Tendencias Internacionales en Matemáticas y el Estudio de las Ciencias (TIMSS).

Los estudiantes en México son evaluados en su conocimiento matemático, a nivel nacional, con pruebas como la Evaluación Nacional de Logro Académico en los centros Escolares (ENLACE), Exámenes de Calidad y el Logro Educativo (EXALE) y, a nivel internacional, por medio del Programa Internacional de

Evaluación de Estudiantes (PISA) y la prueba sobre Tendencias Internacionales en Matemáticas y el Estudio de las Ciencias (TIMSS).

La prueba PISA (Programme for International Students Assesment) es una prueba estandarizada que depende de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE) y tiene por objeto evaluar hasta qué punto los alumnos cercanos al final de la educación obligatoria han adquirido algunos de los conocimientos y habilidades necesarios para la participación plena en la sociedad.

Las pruebas de PISA son aplicadas cada tres años. Examinan el rendimiento de alumnos de 15 años en áreas temáticas clave y estudian igualmente una gama amplia de resultados educativos, entre los que se encuentran la motivación de los alumnos por aprender, la concepción que éstos tienen sobre sí mismos y sus estrategias de aprendizaje. Cada una de las tres evaluaciones pasadas de PISA se centraron en un área temática concreta: la lectura (en 2000), las matemáticas (en 2003) y las ciencias (en 2006), siendo la resolución de problemas un área temática especial en PISA 2003.

PISA define la competencia matemática como "la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido yreflexivo" (2004, p. 28). PISA (2004) centra su marco teórico en las competencias descritas en el trabajo del matemático Danés Mogen Niss y la matemática realista del Holandés Hans Freudenthal, además de la estructura y uso del lenguaje en estudios sobre la competencia sociocultural reflejados en el trabajo de James Gee.

Según PISA:

> La capacidad de leer, escribir, escuchar y hablar una lengua constituye la herramienta más importante de entre las que median en la actividad social humana. De hecho, cada lengua y cada utilización de la lengua posee un intrincado diseño que está vinculado de manera compleja a diferentes funciones. Que una persona sea competente en una lengua

> implica que conoce muchos de los recursos de diseño de la lengua y que sabe utilizar dichos recursos en muchas y variadas funciones sociales. De manera análoga, el considerar las matemáticas como un lenguaje implica que los estudiantes deben aprender los elementos característicos del discurso matemático (términos, hechos, signos, símbolos, procedimientos y destrezas para realizar ciertas operaciones de subáreas matemáticas específicas, además de la estructura de tales ideas en cada subárea) y también que deben aprender a utilizar tales ideas para resolver problemas no rutinarios en una variedad de situaciones definidas en términos de funciones sociales (PISA, 2004, p.29).

Las ocho competencias del proyecto PISA son las siguientes: pensar y razonar, argumentación, comunicación, construcción de modelos, formulación de problemas, representación, empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico y empleo de soportes y herramientas.

La OCDE a través de PISA intenta conocer en cierta medida cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones de la vida cotidiana y no sólo que contenidos del currículo han aprendido. Para este propósito, PISA describe tres grupos de competencia matemática de acuerdo a las acciones cognitivas que genera: el reproductivo, el de conexión y el de reflexión.

En el grupo de reproducción se abordan problemas como, por ejemplo, “2/4 + 5/3 =” o “¿cuál es el promedio de 45, 48, 41, 39, 59, 44, 30, 60?”. En el grupo de conexión se abordan problemas como el siguiente: “En un supermercado existen dos presentaciones de una marca de cereal, el primero es una caja de 1.5 Kg que cuesta $118.00 pesos, la segunda opción es un paquete con 7 cajas de cereal con 180 gr. cada una con un precio de $119.00 pesos, ¿cuál es la mejor opción en relación al costo? Explique su razonamiento.” Y finalmente en el tercer grupo, el de reflexión, un problema sería:

> En un determinado país, el presupuesto nacional de defensa fue de 30 millones (en la moneda del país) en 1980. El presupuesto total de ese año fue de 500 millones. Al año siguiente, el presupuesto de defensa pasó a 35 millones, mientras que el presupuesto total fue de 605 millones. La inflación del período comprendido entre los dos presupuestos alcanzó el 10 por ciento.
>
> a) Te invitan a dar una conferencia en una asociación pacifista. Intentas explicar que el presupuesto de defensa ha disminuido en este período. Explica cómo lo harías.
>
> b) Te invitan a dar una conferencia en una academia militar. Intentas explicar que el presupuesto de defensa ha aumentado en este período. Explica cómo lo harías. (De Lange y Verhage, 1992 en PISA, 2004).

Cada uno de los problemas anteriores genera un tipo de acción cognitiva en los estudiantes y da como resultado uno de los tres niveles o grupos de competencia que construye PISA. A través de los niveles de competencia se genera una escala numérica mediante la cual son presentados los resultados de las evaluaciones. Aquí, el desempeño de los estudiantes se evalúa considerando una escala total de 700 puntos y 6 niveles de desempeño. El nivel 6 se obtiene con más de 669.3 puntos, el nivel 5 entre 606.99 y 669.3 puntos, el nivel 4 está entre 544.68 y 606.99 puntos, el nivel 3 entre 482.38 y 544.68 puntos, el nivel 2 entre 420.07 y 482.38 puntos y el nivel 1 entre 357.77 y 420.07 puntos.

En 2003 el puntaje promedio de los estudiantes en México fue de 385 puntos, lo que equivale a un nivel 1, en este se situó el 28.9% de los alumnos, en un grupo de competencia de donde se favorecen acciones cognitivas de repetición. Esto quiere decir que los estudiantes son capaces de responder a preguntas sencillas relacionadas con contextos familiares, en los que está presente toda la información relevante y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas, además de poder realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

Un 21.7% de los estudiantes no alcanzó el nivel 1, y solo el 0.1% obtuvo un nivel 6 (PISA, 2014). En resumen, el 55% de los estudiantes no alcanza un nivel 2 de desempeño, que es el mínimo adecuado, de acuerdo con PISA, para que un individuo pueda desenvolverse en la sociedad contemporánea.

Bajo el mismo criterio anterior, en 2012 países como Corea tienen un 9.1% de estudiantes por debajo del nivel 2, Japón 11.1%, Suiza 12.4%, Holanda 14.8%, Finlandia 12.3%, Alemania 17.7%, y por debajo de la media se encuentra España con 23.6% y Estados Unidos con 25.8% entre otros.

Por ejemplo, Finlandia, que a pesar de que en la evaluación de 2012 cedió algunos lugares, se mantiene entre los primeros, ocupando en 2003 y 2006 el primer lugar en matemáticas.

Otro caso destacado es Alemania que, encontrándose por encima de la media, es el país que más posiciones ha escalado en los resultados de matemáticas, desde el lugar 20 en el año 2000, el 16 en 2003, el 14 en 2006, el 13 en 2009 y el 12 en 2012.

En el caso de México, en la prueba PISA de 2012 hubo una mejoría, ya que pasó de 385 puntos en 2003 a 413 puntos en promedio; sin embargo, el 55% de los alumnos no alcanzaron un nivel de competencia básico.

De acuerdo con el INEE:

> La competencia matemática que poseen los estudiantes que pertenecen a estos niveles es insuficiente para que se integren a estudios superiores, ya que el nivel 2 representa el mínimo necesario para que una persona se desenvuelva de forma apropiada en una sociedad del conocimiento, por lo que si en un país una porción importante de los estudiantes no alcanza el nivel 2 de desempeño, se considera que la sociedad está

> fallando en preparar adecuadamente a sus futuros ciudadanos (2010, p.17).

Otra prueba estandarizada es TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study). Esta es una prueba avalada por la IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement), que tiene el objetivo de medir las tendencias en el logro en matemáticas y ciencias en los grados cuarto y octavo (cuarto de primaria y segundo de secundaria). Esta prueba se ha llevado a cabo desde 1995 cada cuatro años; en 2011 se llevó a cabo la quinta evaluación de este tipo. México participó únicamente en la evaluación de 1995, pero, debido al bajo rendimiento de los estudiantes, se decidió no dar a conocer los resultados en los reportes internacionales (Beaton, 1996 en Barrera y Reyes, 2013, p. 15).

La prueba ENLACE, en la modalidad de educación básica, examina a estudiantes de tercero a sexto de primaria, así como a todos los grados de secundaria en las asignaturas de español y matemáticas, además de una asignatura adicional. En 2007 el 94.4% de los estudiantes obtuvieron un nivel insuficiente (Avilés, 2007, citado en Barrera y Reyes, 2013) mientras que en 2009 y 2010 los porcentajes de insuficiencia fueron de 90.6 y 52.6 respectivamente.

Por otra parte, EXCALE evalúa contenidos curriculares con el objetivo de obtener resultados educativos de grandes grupos de estudiantes, por modalidad, entidad, sexo y edad. Esta prueba que evalúa español, matemáticas, ciencias naturales y ciencias sociales, se aplica desde tercero de preescolar hasta tercero de primaria, a sexto de primaria y a tercero de secundaria. Las puntuaciones van de 200 a 800 puntos distribuidos en 4 niveles de logro educativo (avanzado, medio, básico y debajo del básico). En 2008 se señala que el 52 % de los estudiantes de tercero de secundaria se ubican en el nivel por debajo del básico en el área de matemáticas.

2.1.2 La prueba del ambiente en el aula de matemáticas por parte de PISA

Respecto a los factores, que interrelacionados favorecen el desarrollo de competencias o lo que también se denomina contexto, PISA (2003) evalúa cuatro categorías, basadas en cuatro elementos que influyen en el aprendizaje del estudiante y que son el sistema, la escuela, las clases y el estudiante. En el caso del sistema se reportan los rasgos del país, las instituciones y políticas, así como los resultados escolares esperados. Del contexto escolar se obtiene información de las características de la comunidad y la escuela, las condiciones de procesos escolares y el currículum implementado. En el contexto del aula se obtienen algunas características de los profesores, las condiciones y procesos de las clases y el curriculum implementado. Finalmente, de la categoría de estudiante se obtiene información sobre las características de los estudiantes, las conductas de los estudiantes en el salón de clases y los logros escolares. En la presente investigación centrada en el modelo por competencias se delimita el estudio al contexto o ambiente de aprendizaje en clase en el caso de la asignatura de matemáticas el cual se compone de las dimensiones: actitudes de los estudiantes y estrategias de aprendizaje, entorno de aprendizaje, tiempo de aprendizaje y trabajo de curso, clima de clase y evaluaciones del estudiante y profesores.

2.1.2.1 Actitudes de los estudiantes y estrategias de aprendizaje

Dentro de la categoría de “actitudes de los estudiantes y estrategias de aprendizaje” se encuentra la subcategoría “experiencias de educación en matemáticas”, donde se contempla, desde la perspectiva del estudiante, el comportamiento o el rol de los maestros y el grado de activación cognitiva como acciones que van formando las actitudes y estrategias de aprendizaje de los estudiantes.

Las actitudes hacia las matemáticas se refieren a la valoración y al aprecio de esta disciplina y al interés por esta materia y por su aprendizaje (Hidalgo, Maroto y Palacios, 2004). Estos estudios consideran que son factores de naturaleza cognitiva y emocional los que llevan al estudiante al rechazo de las matemáticas, aumentando dicho rechazo en cada ciclo escolar.

Dentro de este rubro, uno de los elementos que evalúa PISA es la autoeficacia de los estudiantes, esto es “la creencia que tiene un alumno de que, a través de sus acciones, puede producir los efectos deseados. Esta creencia alimenta su motivación para actuar o perseverar ante las dificultades” (OCDE, 2015, p.1). En el caso de autoeficacia en la resolución de problemas PISA (2015) muestra una fuerte asociación con el rendimiento en dicha materia. En dicho estudio aquellos países donde los alumnos refieren estar seguros de poder resolver una serie de problemas de matemáticas puras y aplicadas obtienen un rendimiento más alto que aquellos con una menor autoeficacia.

Es importante señalar que una menor autoeficacia en matemáticas es independiente de las capacidades reales del estudiante, pero si este posee menor autoeficacia tiene mayor riesgo de rendir por debajo de lo esperado en esta materia.

Buscando algunas causas a esta relación, Rouquette y Ariza (2002) señalan, bajo un enfoque cuantitativo, que es a temprana edad cuando los estudiantes comienzan a manifestar un rechazo hacia las matemáticas. Otros estudios muestran que el 80% de los que rechazan las matemáticas en bachillerato señala comenzar a tener antipatía por esta ciencia en la secundaria. Otra causa es estudiada por Caballero y Blanco (2007), quienes sostienen que son los factores afectivos del profesorado los que tienen una gran influencia en los de los alumnos así como en los logros de éstos, y de ahí se explica gran parte de la atracción o rechazo hacia las matemáticas en etapas futuras.

De entre estudios cuantitativos que señalan en el profesor y en la escuela secundaria están orígenes del rechazo hacia las matemáticas, cabe destacar un aspecto esencial señalado por la OCDE (2015) que es que la confianza de los estudiantes a la hora de resolver un problema está relacionada con la frecuencia con la que los alumnos se han enfrentado a problemas similares. Por ejemplo, menos del 50% de estudiantes de los países miembros de la OCDE manifiesta sentirse seguro al realizar una ecuación lineal (3x+5=17) dado que nunca había visto un problema como este. Estos estudios muestran que la escuela y directamente el profesor pueden generar auto eficiencia en los estudiantes por medio del diseño y rediseño de una amplia gama de problemas.

Por otra parte, la escuela y el profesor no son los únicos factores medidos por la OCDE que inciden en las actitudes de los estudiantes. Se encuentran también las familias y el nivel socioeconómico. Como indica la OCDE “las familias pueden ayudar a los alumnos a convertirse en aprendices seguros de sí mismos, brindándoles su apoyo y aliento” (2015, p.3). Aquellos padres que esperan que sus hijos acudan a la universidad tienen mayor autoeficacia en matemáticas a diferencia aquellos estudiantes que no tienen expectativas altas sobre ellos. En general se muestra que el nivel socioeconómico afecta principalmente sobre la autoeficacia, la exposición a tareas similares y las expectativas de los padres. Al respecto la OCDE afirma que “Entre los alumnos con un rendimiento parecido en matemáticas, los desfavorecidos tienen menos probabilidades que los favorecidos de estar expuestos a diferentes problemas de matemáticas puras y aplicadas y es menos probable que sus padres esperen de ellos la obtención de un título universitario” (2015, p. 4).

Dentro de esta dimensión sobre las actitudes de los estudiantes se miden también las estrategias cognitivas por parte del profesor. Estas estrategias pueden contribuir al estímulo y motivación de los estudiantes y así desarrollar su potencial. Sin embargo, los estudios muestran que en los países miembros de la OCDE, solo un 33% dice gustarles resolver problemas complejos y casi el 50% de estudiantes dicen rendirse fácilmente ante un problema.

La OCDE reporta que:

> …los estudiantes que informaron que sus profesores de matemáticas usan una instrucción directa (como cuando los profesores fijan objetivos claros para el aprendizaje) y evaluaciones formativas (cuando los profesores comentan a sus estudiantes sobre sus fortalezas y debilidades en matemáticas) también reportaron niveles particularmente

altos de perseverancia y apertura a la resolución de problemas (OCDE, 2014, p. 2).

Los resultados de PISA (2014) muestran que los profesores que establecen objetivos claros para el aprendizaje tienden a reportar altos niveles de perseverancia y apertura en la resolución de problemas por parte de sus estudiantes. El 70% de estudiantes de Kazajistán, Polonia y Rusia afirmaron no rendirse fácilmente ante los problemas. Además, países como Albania o Kazajistán informan que continúan trabajando en las tareas hasta que queden perfectas. En estos países, en los que se considera el esfuerzo y el trabajo como elementos fundamentales en la resolución de problemas los estudiantes tienen una puntuación más alta que en aquellos que no creen tanto en el esfuerzo como capacidad innata. La OCDE (2014) reporta que hay 25 países en los que los estudiantes que tienen mayor perseverancia obtienen por lo menos 20 puntos más en matemáticas que los estudiantes que tienen menor perseverancia. En naciones como China, Islandia, Corea y Noruega esta diferencia es de más de 30 puntos. En esta misma dimensión México muestra a un 66% de estudiantes que considera la perseverancia como factor de éxito en matemáticas.

Como reportan los estudios, la resolución de problemas en matemáticas es un punto esencial para la OCDE, de tal manera que reconoce la existencia de múltiples perspectivas teóricas y metodológicas de abordar y concebir a las matemáticas y la educación matemática, pero una tendencia generalizada por el enfoque de resolución de problemas (EURYDICE, 2011). Nuevamente estos resultados muestran al profesor como parte esencial del aprendizaje del estudiante al mostrarse relacionados los resultados obtenidos con el tipo de problemas diseñados por el profesor, los objetivos claros, las estrategias cognitivas, y estos a su vez relacionados con factores como motivación, perseverancia y auto eficiencia.

A las mediciones de las relaciones mostradas por la OCDE sobre actitudes de los estudiantes y estrategias de aprendizaje se debe considerar la forma de respuesta de los estudiantes. Por ejemplo, a pesar de que la OCDE mide la relación entre la motivación y el rendimiento en matemáticas y dicha relación resulta ser positiva, ésta tendría que interpretarse con precaución, debido a que en la tabla de respuestas de los estudiantes (PISA, 2012) suelen identificarse patrones de respuesta que indican que el cuestionario pudo contestarse sin reflexión ni conciencia, tal como lo acepta el INEE (2015) en sus reportes más recientes, designando este fenómeno de respuestas como una tendencia a responder positivamente. Esto se muestra no solamente en el presente factor sobre actitudes sino en todos los demás que aquí se describen.

2.1.2.2 Entorno de aprendizaje

El entorno de aprendizaje es otra dimensión considerada dentro del ambiente de aprendizaje en el aula de acuerdo con la OCDE (2014) debido a que los estudiantes pasan aproximadamente un tercio del día en la escuela durante el periodo escolar. Para esta categoría la escuela tiene un impacto significativo en la vida del estudiante en lo referente a las relaciones con el profesor y sus compañeros. Por tanto, PISA mide la percepción del estudiante sobre el apoyo que le brinda el profesor y de los compañeros para aprender matemáticas.

Un primer elemento a destacar es la valoración de la felicidad en la escuela por parte de los alumnos. Los estudiantes del 80% de los países miembros de la OCDE estuvo totalmente de acuerdo o de acuerdo y 20% en desacuerdo o totalmente en desacuerdo con la afirmación “Me siento feliz en la escuela”. Los porcentajes más elevados de este mismo indicador provienen de Albania, Indonesia y Perú, los tres por debajo de la media en el examen de competencias matemáticas, además de que Perú e Indonesia ocupan el último y penúltimo lugar respectivamente en dicha prueba.

El caso contrario lo presentan Corea y República Checa, los cuales tienen porcentajes más bajos de percepción de la felicidad en la escuela mientras que obtienen puntajes de competencia superiores a la media. Corea, por ejemplo, tiene el tercer lugar en matemáticas en la prueba 2012. México por su parte se encuentra dentro de los 9 países con más alto índice de felicidad (91%) y con los más bajos puntajes en matemáticas.

PISA (2015) también muestra una correlación significativa entre las buenas relaciones entre el profesor y el estudiante con un mejor rendimiento en matemáticas, al respecto:

> En promedio, en los países de la OCDE, cuando se compara a alumnos de entornos socioeconómicos y rendimiento en matemáticas similares, lo más probable es que aquellos que afirman disfrutar de buenas relaciones con sus profesores (p. ej., se llevan bien con casi todos ellos, la mayoría de los docentes se interesan por su bienestar, realmente escuchan lo que tienen que decir, les brindan ayuda extra si la necesitan y los tratan de forma justa) señalen estar contentos en la escuela, hacer en ella amigos con facilidad, sentirse integrados y estar satisfechos con su centro. Igualmente, es menos probable que refieran sentirse solos, como extraños o incómodos y fuera de lugar en la escuela" (OCDE, 2015, p. 2).

2.1.2.3 Tiempo de aprendizaje y trabajo de curso

El tiempo de aprendizaje y trabajo de curso es un factor considerado por la OCDE. Este organismo establece relación entre el tiempo de clase con el rendimiento de los estudiantes. De acuerdo con el INEE:

> Asignar un tiempo efectivo para realizar una tarea implica que el docente tenga claros los diversos momentos didácticos de acuerdo con el número de alumnos a atender: manejo de contenido, métodos y técnicas, características de los materiales, tipo de actividades, tiempo y propósitos del aprendizaje. La articulación de estos elementos permite hacer un uso adecuado del tiempo para favorecer el aprendizaje de los estudiantes (INEE, 2015, p. 21)

El tiempo promedio que los países miembros de la OCDE destinan a matemáticas varía en más del doble, pero esto no asegura el alto o bajo rendimiento de los estudiantes. En promedio los estudiantes tienen 3 horas y 38 minutos a la semana de clase de matemáticas, pero existen grandes diferencias entre los países.

Por ejemplo, Chile tiene 6 horas y 40 minutos a la semana (423 puntos en PISA 2012), y por otro lado, Bulgaria (439 puntos en PISA 2012) y Croacia (471 puntos en PISA 2012) tienen menos de 2 horas y media. Solamente en 15 países existe una relación positiva entre el número de horas dedicadas a matemáticas en los centros educativos y el rendimiento en la prueba PISA (OCDE, 2016).

La OCDE (2016) por su parte da a conocer que los alumnos con bajos resultados dedican el mismo tiempo a las clases de matemáticas que sus compañeros con altos puntajes; sin embargo, en el aula no tienen experiencias con problemas fundamentales como ecuaciones, funciones lineales, congruencia de figuras, los conceptos de coseno o polígono los cuales están asociados a mejores resultados.

Los tipos de problemas son esenciales en los resultados de los estudiantes. En aquellos problemas que PISA llama complejos a diferencia de los problemas sencillos existe una diferencia del 30% entre los alumnos de alto puntaje y los de bajo puntaje entre aquellos que dijeron conocer bien la función cuadrática. Esto muestra que “una mayor exposición a contenidos complejos de matemáticas es un fuerte indicador de resultados más elevados” (OCDE, 2016, p.3).

La OCDE realiza análisis casi siempre con base a la clasificación de favorecidos y desfavorecidos socioeconómicamente. Por ejemplo, señala que el 65% del alumnado favorecido afirma conocer bien o ha oído a menudo el concepto de función cuadrática mientras que solo dice lo mismo el 43% de alumnos desfavorecidos.

Un resultado contrastante en esta misma prueba de la OCDE en 2012 es la poca relación que tienen los problemas rutinarios y repetitivos de memorización con la capacidad de resolver problemas de la prueba PISA. Sin embargo, utilizar contextos reales en los problemas sí está relacionado con una mayor autoestima de los estudiantes en relación con su habilidad matemática. Destaca que los alumnos socioeconómicamente favorecidos no reciben la misma experiencia en desarrollar problemas que los desfavorecidos, de manera que es necesario ampliar el acceso al contenido matemático, pero también adquirir estrategias de resolución de problemas.

En cuanto a las estrategias de resolución de problemas la OCDE concluye, a partir de los resultados obtenidos aplicando herramientas estadísticas, que la memorización es una estrategia de aprendizaje que funciona en aquellos casos de problemas fáciles, pero no así con los difíciles si es la única estrategia empleada. Memorizar fórmulas o teoremas y después aplicarlos a una gran cantidad de ejercicios sin comprender su verdadero significado ni realizar conexiones con otros conceptos parece ser una práctica común en el aula. Por tanto "los alumnos que eviten hacer un esfuerzo por entender los conceptos matemáticos pueden tener éxito en algunos entornos escolares; pero la falta de pensamiento profundo, crítico y creativo puede perjudicarles seriamente más adelante en la vida cuando se enfrenten a problemas reales y no rutinarios" (OCDE, 2016, p.2).

Los estudios de la OCDE en general concluyen en relación con tiempo de aprendizaje y trabajo de curso que la eficacia es más importante en la cuestión del manejo del tiempo para la introducción de estrategias curriculares como problemas complejos o verdaderos problemas a diferencia de aquellos que requieren procesos básicos de memorización o algorítmicos, para ello es necesario un curriculum sólido, maestros capacitados en la disciplina y la didáctica, así como entornos de aprendizaje positivos.

2.1.2.4 Clima de clase

La OCDE mide el clima en el aula de matemáticas con respecto a la percepción de los estudiantes y profesores acerca de la disciplina y las relaciones profesor estudiante, con índices como el ruido, el orden, el tiempo de espera para empezar a trabajar, las interrupciones de otros estudiantes, el apoyo del profesor y una buena relación con él.

En las dimensiones anteriores que comprenden el ambiente de aprendizaje de acuerdo con la OCDE, se puede identificar que los estudiantes necesitan voluntad, desarrollo del autoconcepto, familiaridad con los conceptos matemáticos y destrezas para la solución de problemas. Esto puede desarrollarse en un inicio con el establecimiento de relaciones de apoyo y confianza con los profesores (INEE, 2015). Se requiere que el estudiante esté comprometido con el desarrollo de tareas de aprendizaje, pero esto no puede ocurrir sin disciplina en el aula. La OCDE (2012) muestra una relación entre aulas poco disciplinadas con el bajo rendimiento de los alumnos, esto se debe a que el profesor tiene que invertir tiempo para ordenar su clase, con el fin de que no existan interrupciones, ruido, entre otros factores, para poder iniciar su clase.

La OCDE afirma que “la mayoría de los alumnos de los países de la OCDE disfrutan de clases en las que reina la disciplina, y entre 2000 y 2009 la disciplina en los centros no se deterioró; de hecho, en la mayoría de los países ha mejorado” (2011, p. 2). Por ejemplo, de acuerdo con los resultados observados en Corea menos del 10% de los estudiantes afirma que no puede estudiar debido a las interrupciones en clase. Países como Japón, Kazajistán y Shanghái-China informan que menos del 10% de los profesores tiene que esperar largo tiempo para que el profesor empiece la clase.

Quizá la relación más significativa analizada por PISA sea que un buen clima disciplinario en el aula puede contrarrestar los efectos que tiene el estatus socioeconómico sobre el rendimiento. “El clima disciplinario es una de las pocas características a nivel de escuela que muestra una relación positiva significativa con el rendimiento consistentemente entre países, incluso luego de tener en cuenta otras características de las escuelas y contexto de los estudiantes” (OCDE, 2013, p.4).

2.1.2.5 Evaluaciones del estudiante y profesores

La evaluación de los aprendizajes es un tema complejo. La forma de abordarlo por la OCDE consiste en medir qué tanto los profesores realizan una evaluación formativa en el aula, qué tan frecuentemente el profesor realiza comentarios sobre el trabajo de los alumnos, qué deben de reforzar, cómo progresar, si utilizan el portafolio de evidencias como evaluación, una prueba estandarizada y cuántas veces al año. En el análisis de 2009 y 2012, PISA suministra un análisis limitado respecto a los elementos que componen la evaluación en el aula por parte del profesor, en donde se afirma que:

> Las calificaciones tienen el propósito principal de promover el aprendizaje de los estudiantes informándoles sobre sus progresos, alertando a los profesores sobre las necesidades de los estudiantes, y verificando el grado en que los estudiantes han dominado las tareas y competencias evaluadas por profesores y escuelas (OCDE, 2013, p.1).

Sin embargo, la OCDE (2013) concluye que los profesores califican mejor a estudiantes socioeconómicamente favorecidos, aunque no hayan desarrollado suficientemente sus habilidades. Esto puede tener un impacto en estudios superiores porque sus expectativas están basadas en las calificaciones que reciben en la escuela. En 2009 más del 95% de las calificaciones se obtenían por parte de evaluaciones del profesor, como exámenes, proyectos o trabajos.

En base a los resultados de la prueba 2009 y 2012, la OCDE (2013) ha concluido los siguientes puntos en relación con las prácticas de evaluación efectivas en el aula:

a) Las calificaciones deben comunicar información clara y útil con el propósito de promover el aprendizaje.
b) Las calificaciones deben basarse en criterios claros y específicos, midiendo los logros respecto de objetivos preestablecidos.
c) Las calificaciones no deben usarse para indicar expectativas o juzgar comportamientos. Si es necesario, se deben separar las calificaciones relacionados con el comportamiento de aquellas relacionadas con el rendimiento escolar.
d) Las calificaciones no deben utilizarse para castigar a estudiantes que entregan un trabajo fuera del plazo o bien incompletos.
e) Las calificaciones muy por debajo del mínimo requerido pueden ser desmoralizantes para los estudiantes y desincentivar esfuerzos posteriores.

f) Las calificaciones no deben basarse en una curva, dado que crean una competencia poco saludable y reducen la motivación.
g) No todos los ejercicios de evaluación deben ser devueltos a los estudiantes con calificaciones.
h) En ciertos contextos, se prefieren las evaluaciones personales de índole cualitativa no asociadas a calificaciones numéricas.

2.2 Aprendizaje con entendimiento

Los documentos que conforman el estado del conocimiento del ambiente de aprendizaje en el aula de matemáticas desde la perspectiva de aprendizaje con entendimiento fueron seleccionados en base a dos criterios fundamentales. El primero es que los documentos elegidos recogerán algunos elementos relacionados con el ambiente de aprendizaje en el aula de matemáticas. El segundo es que los documentos elegidos necesariamente deberán ser congruentes con las definiciones que proporciona esta teoría para cada una de las seis dimensiones sobre el ambiente citadas anteriormente.

La totalidad de los documentos incluidos proporcionan resultados de tipo cualitativo y se pueden caracterizar dentro de las investigaciones sobre aprendizaje con entendimiento de enfoque directo. Estos contemplan “la comprensión del conocimiento matemático desde una perspectiva amplia y profunda, centrándose el interés en el estudio de aspectos como su naturaleza, funcionamiento, evolución o valoración” (Gallardo y González, 2010, p. 23). Además, estos trabajos se centran por lo general en algún concepto o tema relacionado con un estudiante o grupo pequeño de estudiantes y en ellos se diseñan y rediseñan problemas y se analizan a fondo los procesos de pensamiento para tratar de caracterizar niveles de entendimiento de los estudiantes.

2.2.1 Tipo de tareas

Un primer elemento a considerar con base en el aprendizaje con entendimiento es el tipo de tareas de aprendizaje. En matemáticas estas conforman un apartado al que se le han dedicado importantes investigaciones a nivel internacional. A pesar de ello, algunos autores (Santos, 1997; Estrada, 2003; Zacaryan, 2011; Santos, 2007) sugieren que se continúe investigando en esta dirección, dado que el tipo de tareas o problemas que se abordan en el aula van a determinar el tipo de conocimiento que van a construir los estudiantes (Stein y Smith, 1998). De esta manera resulta trascendente para el profesor no solo el qué conocen los estudiantes sino el cómo lo conocen, al respecto:

> Para que un sistema de instrucción favorezca la reflexión, la comunicación y, en consecuencia, el entendimiento, debe incluir tareas que sean verdaderos problemas, es decir actividades que permitan a los estudiantes diseñar sus propios procedimientos de solución, con base en los recursos o conocimientos previos que poseen. Las tareas deben ser problemáticas en el sentido de que representen un reto intelectual, más que solo dificultades a nivel operacional o de cálculo; deben ser tareas interesantes y tener sentido para los estudiantes (Barrera y Reyes, 2013, p. 5).

El análisis del tipo de tareas debe ser utilizado por el profesor para transformar el aula de matemáticas (Stein, Grover & Henningsen, 1996), donde los estudiantes, más que memorizar procedimientos de forma rutinaria, sean capaces de aprovechar distintas oportunidades que les ayuden a desarrollar conceptos y a establecer relaciones entre éstos.

El diseño de tareas o problemas en matemáticas requiere del conocimiento de los procesos cognitivos de los estudiantes. En este sentido, Estrada (2003) se cuestiona cuál es el tipo de actividades que ayudan a los alumnos a promover aprendizajes que son compatibles con las prácticas matemáticas. Bajo este cuestionamiento se expuso a un grupo de estudiantes a distintas situaciones con el fin de que a partir de éstas se formularan y resolvieran problemas o preguntas. El objetivo consistía en que los estudiantes no solo asimilaran contenidos, sino que tuvieran una experiencia que significara el desarrollo de un ambiente donde se desarrollen los elementos del pensamiento matemático.

En este proceso se deja entrever un hecho que Estrada (2003) reconoce como una separación entre la forma de aprender las matemáticas en el aula y los procesos de pensamiento para generar matemáticas. La intención del profesor debería ser crear tareas para que en el aula se lleven a cabo los procesos del pensamiento matemático como lo son identificar información relevante del problema, realizar representaciones, formular conjeturas y justificar resultados.

Santos (1997) también muestra evidencias acerca del tipo de actividades de aprendizaje que ayudan a los estudiantes a desarrollar su disposición hacia el estudio de las matemáticas y mostrar sus recursos matemáticos no solo en un contexto escolar sino también fuera de éste. El hecho de presentar tareas o problemas que constituyan un reto para el estudiante junto con un diálogo adecuado entre todos los participantes en el aula de matemáticas, hace posible que éstos hagan explícitos los procesos de pensamiento, ya sea en forma verbal o escrita, y que más adelante constituyan un referente para la reelaboración de tareas o problemas.

Este tipo de investigaciones (Estrada, 2003; Santos, 2011) desde la resolución de problemas, donde los estudiantes discutan el valor de los argumentos presentados, se cambien las condiciones de los problemas, se formulen nuevas preguntas una vez resuelto el problema, o se apliquen estrategias en otros contextos, resulta novedoso para los estudiantes. Por ello, Santos (1997) afirma que "una actividad importante, con frecuencia ignorada en la enseñanza de las matemáticas, es el proceso de formular o rediseñar problemas por parte de los estudiantes" (1997, p. 14). Llegar a la solución de un problema es el primer paso para que posteriormente busquen nuevas formas de resolverlo, así como de establecer conexiones entre las soluciones.

Es importante valorar las actividades de diseño de tareas y problemas por parte del profesor donde los estudiantes tengan oportunidad de explicar y justificar el uso de recursos y estrategias en forma oral o escrita. Al respecto, "parece que la actividad de reformular o diseñar problemas puede ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades y estrategias que les permitan cuestionar la información desde diversos ángulos y, como consecuencia, ubicar los procesos de solución en marcos matemáticos más generales" (Santos, 1997, p. 23).

Un trabajo en esta orientación es el de Usinski (2012), quien delinea conceptualmente la multiplicación de fracciones y la congruencia en geometría con el objetivo de diseñar actividades encaminadas al desarrollo de niveles de entendimiento, tomando en consideración las conexiones entre las dimensiones habilidad algorítmica, justificación por medio de propiedades, modelado o aplicación, representación metafórica y la dimensión histórico- cultural. Cualquier concepto o idea matemática, desde el aprendizaje con entendimiento, tiene que establecer y robustecer las conexiones entre estas dimensiones, para posteriormente conectarse con otros conceptos.

Un actor fundamental en el diseño de actividades y problemas que lleven a establecer más y mejores conexiones es el profesor. El profesor en su actuar en el aula transmite en gran medida la imagen que él tiene de las matemáticas. Kline (2014) señala que la enseñanza de las matemáticas no está preparada para enseñar a los estudiantes a pensar, sino a seguir a un guía, el profesor. Si él posee una perspectiva algorítmica de esta ciencia, posiblemente la orientación que le dé al modelo de resolución de problemas estará guiada en ese sentido (Thompson, Philpp, Thompson y Boyd, 1994). La formación que el profesor desarrolló acerca de lo que son las matemáticas está relacionada con el significado que le da al entendimiento de las matemáticas, lo cual lleva a proponer determinados tipos de problemas que generan tipos de actividades cognitivas en los estudiantes.

Por ello, la formación del docente es esencial para el diseño y análisis profundo de las tareas o problemas para desarrollar conocimiento matemático en los estudiantes y transformar las prácticas tradicionales en un conocimiento matemático acorde con la disciplina.

Analizar en profundidad la naturaleza de los problemas o tareas de aprendizaje constituyen un camino para el desarrollo del pensamiento matemático.

En este sentido el tipo de tareas puede transformar la forma en que tanto el profesor como el estudiante conciben las matemáticas.

Un tipo específico de tarea que ha sido investigado consiste en presentar problemas sin solución (Santos, 2010). Esto constituye un parteaguas en la cultura social del aula tradicional de matemáticas en donde se han favorecido únicamente procesos de memorización y algorítmicos. Una de las características de los problemas sin solución es que, con ayuda del profesor, el estudiante tiene la necesidad de presentar conjeturas, argumentos, así como de analizar su propio pensamiento. Este tipo de tareas tiene la cualidad de capturar la atención del estudiante porque presenta algo que no cuadra en la estructura del problema y no pueden ser resueltas mediante el empleo de métodos tradicionales.

Este tipo de problemas o tareas tiene otra implicación que es el diálogo constante entre el profesor y el estudiante (Santos, 2010) y que esencialmente tiene la característica de ser un diálogo de tipo socrático (Rigo, 2011), se basa en un método de preguntas y respuestas, conjeturas y refutaciones, encaminadas al análisis de los principios axiomáticos que sustentan el tema sobre el cual se dialoga. A pesar de su importancia para con la resolución de problemas, el diálogo con estas características aparece escasamente en el aula de matemáticas.

Conforme transcurren los niveles educativos se vuelve más complicado implementar tareas y con ello desarrollar pensamiento matemático en el aula (Santos, 2011; Sepúlveda, 2006). Algunas investigaciones explican que una de las causas es que los estudiantes en niveles anteriores nunca tuvieron experiencias bajo esta perspectiva. Se tiene tan arraigada la idea de obtener conocimientos en matemáticas que los procesos de razonamiento, la evaluación del método utilizado, las técnicas y las distintas perspectivas con las se puede abordar un problema quedan de lado (Santos, 2011). Desde este enfoque la enseñanza tendría que estar orientada no hacia el aprendizaje o conocimientos finales del estudiante, sino hacia los procesos cognitivos, los cuales a su vez influyen en el aprendizaje (Carpenter y Fennema, 1988).

Existe un elemento fundamental a considerar en el diseño de tareas o problemas que ha sido investigado por Stanic y Kilpatrick (2009) y es que, aunque los problemas han ocupado un rol crucial en el curriculum de matemáticas desde hace tiempo, no es así en la resolución de problemas como metodología. Cada institución, profesor, estudiante, diseñador de políticas o sistema educativo han interpretado de forma diferente lo que significa aprender matemáticas por resolución de problemas y con entendimiento, debido a que, no existe claridad en los términos “problema” y “entendimiento”. Su esclarecimiento conceptual posibilita un diálogo encaminado al establecimiento de metas sensatas en el aprendizaje de las matemáticas.

2.2.2 Cultura social

En cuanto a la cultura social, esta constituye una comunidad de aprendizaje en la que los estudiantes tienen oportunidades para pensar y razonar acerca de conceptos o ideas matemáticas relevantes, comunicar resultados y justificarlos con base en argumentos matemáticos (Barrera y Reyes, 2013). En esta comunidad la interacción y comunicación entre sus miembros no es opcional, es esencial para construir aprendizaje con entendimiento.

El papel de la cultura social en el aula de matemáticas está relacionado directamente con el tipo de tareas o problemas diseñadas por el profesor. Así lo muestran investigaciones de Santos (1997), quien ha planteado escenarios distintos al tradicional donde se promueven el trabajo individual y un pensamiento algorítmico; en cambio, se trabaja en parejas o grupos buscando en todo momento la comunicación y reflexión. Los resultados también ponen en evidencia la cultura tradicional, como lo es el aprendizaje por memorización y el pensamiento algorítmico de muchas aulas de matemáticas de México en nivel básico, donde los estudiantes están formados en esta orientación desde los primeros años escolares.

Un elemento que sobresale en la cultura social del aula de matemáticas es que los estudiantes están acostumbrados a exhibir una sola solución (Santos, 2004; BID, 2012), que en gran medida se debe a que esperan un algoritmo para enfrentar el problema. El algoritmo constituye un generador fundamental de respuestas, al mismo tiempo que es un obstáculo en la exploración de distintas formas de pensar el problema y con ello distintas maneras potenciales de crear rutas de solución para una tarea. En un estudio del BID (2012) se destaca que en promedio un 94% de las aulas en México, Paraguay y Republica Dominicana, tanto alumnos como profesores no presentan alternativas de solución a los problemas.

Si un algoritmo resulta exitoso para un problema, los estudiantes tienden a aplicarlo a otra situación sin analizar el problema e incluso existe una tendencia a operacionalizar los datos en situaciones completamente absurdas (Santos, 2004) o la mala costumbre de abordar los detalles antes de haber comprendido el problema en su totalidad (Polya, 2013). Esta situación crea la cultura en al aula centrada en que el profesor es la autoridad que posee el conocimiento absoluto sobre los algoritmos, los cuales tienen que memorizarse para el examen. Esta perspectiva genera la concepción de las matemáticas como memorísticas y algorítmicas, donde no hay espacio para la creatividad, a la vez que fomenta la idea de quien más algoritmos conozca y quien más rápido los ejecute es mejor que quienes no desarrollen esta habilidad.

Se ha documentado que el plantear y rediseñar problemas, al igual que el presentar problemas sin solución, explicita y rompe con esquemas del aula tradicional, y con el tiempo, transforma la cultura social del aula en una más participativa y reflexiva (Santos, 2010). Esta capacidad se va adquiriendo con la experiencia, además de requerir una profunda preparación por parte del profesor en conocimientos disciplinares y didácticos y demanda una estrecha vinculación con la institución.

2.2.3 Tipo de herramientas

El tipo de herramientas que construyen los estudiantes resulta fundamental en la construcción del pensamiento matemático, son el medio a través del cual los estudiantes pueden pensar y reflexionar acerca de los objetos o ideas relevantes en la disciplina (Barrera y Reyes, 2013). Las herramientas no se limitan a objetos físicos, sino que son también un elemento cognitivo. Además, el tipo de estrategias, así como las formas de pensamiento que se desarrolla al enfrentar un problema o tarea depende de las herramientas que se utilicen. Las herramientas matemáticas pueden ser el lenguaje oral, el lenguaje escrito, las representaciones simbólicas, y el software, entre otras. En este sentido las herramientas:

> son medios que apoyan el aprendizaje, pero para usar las herramientas como apoyo, los estudiantes tienen que construirles un significado, lo cual requiere de un trabajo sistemático con éstas y un proceso de reflexión sobre cómo funcionan. Es decir, el significado no reside en las herramientas sino que constituye una construcción que llevan a cabo los estudiantes al utilizarlas para resolver problemas (Barrera y Reyes, 2013, p. 7).

De acuerdo al COMIE (2012) los estudios sobre los procesos cognitivos de los estudiantes se centran en la comprensión y el desarrollo de nociones básicas, siendo el álgebra el área más estudiada.

La construcción y significado de herramientas cognitivas puede ser auxiliado con el uso de la tecnología como la calculadora y algunos software dinámicos, que han potencializado los elementos del pensamiento matemático a la hora de identificar elementos importantes del problema, plantear conjeturas, identificar patrones y establecer relación entre la pregunta y los elementos del problema (Santos, Espinoza y Reyes, 2008). Sin embargo, es en bachillerato donde se presentan la mayoría de las investigaciones sobre el uso de software dinámico y los procesos cognitivos de los estudiantes.

Un ejemplo de una herramienta que ha sido investigada en relación con la aritmética es la calculadora, que ha permitido el desarrollo de ciertas formas matemáticas de pensar con el fin de explorar problemas y plantear conjeturas (Guzmán, Kieran & Squalli, 2003).

En general, sobre el uso de herramientas tanto físicas como cognitivas se recomienda mejorar las prácticas de enseñanza (Mochón & Tlachy, 2003; Sánchez, Hoyos & López, 2011; Guzmán et al. 2003). Un punto que ha destacado en cada uno de los ejes es la formación de profesores en sólidos conocimientos disciplinares y didácticos.

Otra herramienta cognitiva que ha sido objeto de investigación es el algoritmo. Algunos profesores consideran que sus estudiantes entienden la relación algoritmo-problema con presentar solo el algoritmo. Algunas investigaciones han creado situaciones para que los estudiantes construyan significados a sus herramientas y no que las utilicen ciegamente. Flores (2005) analiza el entendimiento de la relación algoritmo-problema, donde no es suficiente que la tarea problemática se enseñe en contexto con la vida real, sino que también interviene significativamente la construcción de significado del estudiante.

En diversos estudios se observa que los estudiantes comienzan a realizar operaciones sin siquiera haber leído por completo el problema; ellos se enfocan en los datos cuantitativos y, de manera ciega, realizan operaciones sin tomar en cuenta la parte cualitativa del problema. Una parte del problema identificado se encuentra en los libros de texto de matemáticas de educación básica (Santos, 2010), donde se entrena a los alumnos en un mismo tipo de problema y método de solución, haciendo que los estudiantes identifiquen mecánicamente el proceso de solución (no la construcción de la herramienta) y luego este mismo tipo de razonamiento se aplica a cualquier situación de la vida cotidiana.

La construcción de significado a las herramientas matemáticas por parte de los estudiantes es una actividad poco promovida por el profesor en el aula de matemáticas (Cortes, Blackhorff, & Organista, 2004); los alumnos difícilmente tienen experiencias distintas que no sean las de memorizar y aplicar un solo procedimiento, y llegan a niveles superiores mostrando escasas estrategias para resolver problemas.

2.2.4 Equidad y accesibilidad

La dimensión de la equidad y accesibilidad considera el hecho de que cada persona es única y tiene el derecho y la capacidad para entender conceptos matemáticos y, por ello, los problemas o tareas deben de ser accesibles para todos los estudiantes (Barrera & Reyes, 2013). El profesor debe crear oportunidades de aprendizaje para sus estudiantes, que sea atento y analice las ideas expresadas en el aula.

Los estudios sobre equidad en matemáticas abarcan temáticas como las actitudes, estudios de género, clase social y multiculturalismo. Las investigaciones sobre las actitudes y su impacto en el aprendizaje de las matemáticas han sido desarrolladas desde la década de 1960.

A pesar de ser un tema escasamente investigado, existe un debate en cuanto a que esta ciencia es preferida y desarrollada mejor por hombres que por mujeres, pero otras investigaciones (Carrell, Page & West, 2009; González, Fernández, García, Suárez, Fernández, Tuero-Herrero, da Silva, 2012) muestran que es más una cuestión de equidad y cultura social en el aula de matemáticas que por razones biológicas.

Una de las creencias que tienen los estudiantes es que los hombres, más que las mujeres, necesitan las matemáticas para su vida adulta y para obtener mejores trabajos. A pesar de que en 2004 los índices de titulación universitaria de las mujeres igualaban o superaban a los de los hombres en 21 de los 27 países de la OCDE (2004), en 2006 aún las diferencias en puntuaciones eran altas en matemáticas (OCDE, 2006). Por ejemplo, existen propuestas del derecho a la mujer a la educación al igual que los hombres desde el siglo IV a.C. donde la sociedad griega, entre ellos Aristóteles, consideraban a la mujer como algo no muy distinto a un animal. Fue Platón quien planteó el derecho a todos por igual a la educación en su libro “La república”.

González y otros (2012) defienden la postura de que las matemáticas no son exclusivas del género masculino, pero que sí existe una tendencia a su estudio por parte de los hombres. Se muestra que este hecho viene a indicar que no es posible considerar el efecto del género sobre las actitudes ante las matemáticas sin pensar en el efecto de otras variables fundamentales como son el tipo de curso, el profesor y el tipo de tareas entre otras variables. Carrell, Page y West (2009) han dado a conocer que los resultados en matemáticas son mejores para las mujeres cuando se tiene a un profesor de su mismo género. Argumentan que el hecho de que no existan más mujeres dedicadas a la ciencia es porque en algunas ciencias como las matemáticas predomina el género masculino en la planta docente de las instituciones de nivel básico.

Fennema, Carpenter y Lubisnski (1990), sostienen que una clase es más equitativa entre hombres y mujeres debido al rol del profesor y al tipo de preguntas que favorecen la comunicación y reflexión. Es importante no presuponer que las niñas tienen las mismas experiencias extraescolares que los niños en relación con matemáticas, en este caso los profesores, en el aula, deben centrarse en realizar preguntas que permitan explorar los procesos de pensamiento de los estudiantes.

Más allá del género en sí, se encuentra el tipo de curso que reciben los estudiantes, que engloba el tipo de tareas, la motivación, el profesor y el tipo de cultura social que sea promovido en el aula (González y otros, 2012).

2.2.5 La evaluación

Junto a las dimensiones ya identificadas en el aula se encuentra la evaluación. La evaluación constituye una dimensión esencial del curriculum en la construcción de un ambiente que favorezca el entendimiento en el aula de matemáticas. Ésta abarca desde las evaluaciones externas que realizan organismos nacionales e internacionales sobre el conocimiento y contexto de los estudiantes de nivel básico, hasta las evaluaciones internas que realiza el profesor en su aula.

Barrera (2013) afirma que algunos de los resultados arrojados por PISA o TIMSS pueden ser indicadores de algunas deficiencias, pero deben de analizarse con cuidado, ya que las pruebas tienen sus limitaciones. Por ejemplo, todas estas pruebas son escritas y, por tanto, aportan información limitada acerca del desempeño del estudiante, ya que las preguntas contenidas no dan cuenta de los procesos y cualidades de pensamiento que los estudiantes pueden exhibir en el proceso de solución de problemas (Santos y Vargas, 2003).

Regularmente, los exámenes de matemáticas en el aula requieren hacer uso de información aprendida previamente y que en el examen se reproduce. La acción cognitiva que miden los exámenes es la capacidad para aprender por memorización. Por el contrario "un salón de clase de matemáticas debería enseñar a los estudiantes a plantearse problemas, a encontrar los resultados por ellos mismos y a comprender los conceptos y demostraciones que han aprendido. Realmente los exámenes no valoran esto, y en gran medida no pueden hacerlo" (Kline, 2014, p. 122).

En este sentido, Santos (2013), Barrera y Reyes, (2013) muestran cómo estudiantes con buenas calificaciones en matemáticas tienen dificultades en resolver problemas no rutinarios, es decir, aquellos para los cuales no se les ha enseñado un algoritmo o procedimiento que permita obtener la respuesta inmediatamente. Los exámenes o pruebas escritas solo requieren que los estudiantes reproduzcan información o procedimientos aprendidos previamente, así solo se está evaluando la memoria y un razonamiento imitativo (Bergqvits, 2007). Ante este hecho, Kline (2014) cuestiona el motivo por el que se escandaliza el profesor ante el hecho de que los estudiantes usen el libro de texto en los exámenes. Esto es así porque si se estuviera enseñando a pensar realmente y no a memorizar, ¿de qué les iban a servir los libros a los estudiantes?

También Santos (2013) muestra a estudiantes coreanos de sexto año que han obtenido buenos resultados en pruebas estandarizadas, pero que tienen dificultades para razonar matemáticamente, es decir, que no son capaces de llevar a cabo procesos centrales de pensamiento matemático tales como explorar relaciones entre objetos matemáticos, identificar patrones, formular y justificar conjeturas, proponer nuevos problemas, comunicar resultados, construir significados o elaborar modelos matemáticos.

La necesidad de evaluar los puntos señalados anteriormente conlleva a replantear la forma en que se hace evaluación y considerar otros modelos acordes al contexto nacional y local.

2.2.6 Rol del profesor

El profesor es un actor fundamental en la construcción de un ambiente que desarrolle entendimiento matemático en los estudiantes. Una de las principales actividades es el diseñar, rediseñar y seleccionar problemas que den sentido al saber matemático, creando condiciones para que se involucren, grupal o individualmente, en actividades matemáticas de resolución, comunicación, reflexión y validación de soluciones. Por ello:

> El objetivo central del profesor es diseñar un ambiente que favorezca el entendimiento conceptual. Lo anterior incluye conocer cómo piensan sus estudiantes, identificar las diferentes formas o estilos de aprendizaje y buscar, modificar o diseñar secuencias de tareas que sean verdaderos problemas, es decir tareas que permitan a los estudiantes reflexionar sobre ideas matemáticas importantes y comunicar el producto de su reflexión (Barrera y Reyes, 2010, p. 6).

La reflexión y la comunicación debe estar encaminada hacia promover un mayor número de conexiones entre los conceptos matemáticos y con ello un mayor nivel de entendimiento. Kyriacou e Issit (2008) han documentado la relación existente entre un adecuado diálogo entre profesor y estudiante y el entendimiento de conceptos matemáticos por parte de este último.

De acuerdo con INEE (2007), el bajo desempeño de los estudiantes se debe a la naturaleza tradicional y rutinaria de las prácticas docentes de muchos maestros mexicanos, así como las deficiencias de muchas de las instituciones en las que reciben su formación inicial, y la insuficiencia de los esfuerzos de actualización dirigidos a los que están en servicio. Por ejemplo, Hiebert (1997) menciona que al cuestionar a un estudiante de sexto de primaria si la afirmación “si una niña tiene tres hermanos, entonces dos niñas tienen seis hermanos” tenía sentido, el estudiante contestó que no tenía sentido en la vida cotidiana, pero como la pregunta era de la clase de matemáticas seguramente ahí sí tenía sentido. Esto refuerza las afirmaciones de Kline (2014) en el sentido de que el profesor es para los estudiantes la fuente de verdad en matemáticas y no los argumentos presentados.

Flores (2005) muestra que el conocer cómo están entendiendo los alumnos algún problema es esencial para generar experiencias de aprendizaje significativas. Se ha constatado que el hecho de que aquellos estudiantes que han tenido dificultades al resolver problemas y han pasado a crear estrategias se debe a la interacción y acompañamiento de un profesor con sólidos conocimientos disciplinares y didácticos.

De acuerdo al COMIE (2012) en nivel primaria en México en la década del 2000 al 2010 existe un reducido interés por las investigaciones sobre creencias, conocimientos y pensamientos de los profesores. Sin embargo, en general prevalece la pregunta sobre cómo fortalecer los conocimientos matemáticos de los profesores, ya que son éstos los que se ponen en juego en el aula. Más allá de que las matemáticas forman parte del plan de estudios desde preescolar, está el hecho de que desarrollar habilidades cognitivas en matemáticas en ese nivel asegura un mejor tránsito en primaria (Guevara, Rugeiro, Delgado y Hermosillo, 2010) y así también en los siguientes niveles.

Otro tema que ha sido investigado con respecto al rol del profesor es su relación con el curriculum oficial. Para Ávila (2006) el trabajo que realizan los profesores en el aula dista de lo que se esperaba de ellos desde el curriculum oficial, así como también prácticas que promueven aprendizajes significativos bajo estrategias que suelen ser catalogadas como tradicionales. García (2007) muestra, mediante observaciones y desde una perspectiva del contrato didáctico, que las concepciones de los docentes son de sentido común en la enseñanza de la suma y la resta, además de promover escasamente el razonamiento y conocimiento conceptual matemático. En este tenor es una solución simplista pretender que una mejora en educación matemática va a lograrse solo por medio de cambios en el curriculum oficial, que en muchos casos ni siquiera están fundamentados (Barrera y Reyes, 2013). Estos autores consideran de gran importancia centrar la atención en la formación y actualización del profesorado en su conjunto.

2.2.7 Formación de profesores

En el marco de las reformas educativas, la formación del profesorado constituye un tema de interés a nivel mundial. En México, de acuerdo con Backhoff y Pérez (2015) los porcentajes de profesores de nivel básico que han completado un programa de formación previo a su labor docente son, en el caso de nivel primaria un 82%, seguidos por los de secundaria con un 64% y los de educación media superior con un 26%. El 60% de los profesores reporta haber recibido en su formación enseñanza sobre el contenido, la didáctica y la práctica en el salón de clases. Por otro lado un 30% de los profesores de educación media superior declara no sentirse bien preparados en didáctica, contenidos y prácticas en clase.

Resulta relevante que un 75% de los profesores de nivel medio superior y un 52% de secundaria señala que fue formado en lectura, escritura y literatura, pero que actualmente no imparte dicha asignatura. Con respecto a aquellos profesores que recibieron formación en matemáticas pero que actualmente no la imparten se sitúa el 69% en media superior seguido de un 56% en secundaria.

Estos datos son congruentes con estudios como los de Barrera y Reyes (2014) o Rondero (2013) quienes señalan ciertas deficiencias disciplinares y didácticas de formación de la mayoría de los profesores de educación básica y de bachillerato, la mayoría provenientes de escuelas normales, licenciaturas y algunas ingenierías.

Arredondo y Juárez (2014), con base en un estudio comparativo entre Francia y México, señalan que en este último existe una fuerte descompensación en la formación inicial disciplinar de profesores de matemáticas, así como debilidad en la preparación para enseñar los contenidos. Esta situación influye significativamente en la construcción de entendimiento matemático en los estudiantes, debido a que es el profesor quien, con base en su pedagogía y conocimientos disciplinares, puede crear una cultura en el aula para generar experiencias de reflexión y comunicación a través del diseño de tareas.

Un elemento a incluir en la formación de profesores de secundaria y bachillerato desde el enfoque por competencias, es la articulación conceptual de saberes matemáticos (Rondero, 2013). Otro elemento es la vinculación que debe darse entre profesores de distintos niveles y con investigadores. Por ejemplo Rondero, Criollo y otros (2013) proponen que, a través de la elaboración de proyectos de investigación, elaboración de materiales didácticos, eventos académicos con el fin de que se hagan contribuciones para entender el problema de la educación matemática y encontrar soluciones que impacten en el sistema educativo del país.

Algunas acciones emprendidas con el fin de solucionar esta problemática se centran el hecho de que algunas universidades, institutos superiores y de investigación tengan programas de formación de profesores. Específicamente, bajo el enfoque de resolución de problemas y aprendizaje con entendimiento destacan la Universidad Autónoma de Guerrero, la Universidad Autónoma del estado de Hidalgo, el Centro de Investigación y de estudios avanzados del IPN y la Universidad Veracruzana, los cuales poseen dentro de sus líneas de aplicación y generación del conocimiento los enfoques antes mencionados.

2.3 Conclusiones del estado del conocimiento

Si bien, este panorama descrito a través de las evaluaciones de organismos nacionales e internacionales para México y otros países en la asignatura de matemáticas pareciera determinante en cuanto a la descripción de la realidad en las aulas, así como suficiente para realizar ciertas recomendaciones de carácter práctico para cada una de las dimensiones del ambiente de aprendizaje, es importante señalar que lo que PISA está mostrando es una perspectiva desde ciertos marcos teóricos mostrando los distintos niveles de competencia.

En la búsqueda de indicadores cada vez más precisos, válidos y universales, la adopción de las competencias ha resultado ser una pócima mágica para los políticos y un dolor de cabeza para diseñadores curriculares y profesores. Por ejemplo, en relación con el uso del término competencia, mientras la OCDE (2005) define competencia matemática como la capacidad de un individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas, por otra parte, la UE se refiere a competencia matemática en términos de competir entre economías (Eurydice, 2012, p.3). Como indica Vassiliou:

> Asimismo, el informe aboga por políticas integrales de apoyo al profesorado, por un interés renovado en las diversas aplicaciones del conocimiento matemático y de las habilidades para la resolución de problemas, […] Es urgente abordar este problema, ya que la escasez de especialistas en matemáticas y en otras áreas afines puede afectar a la competitividad de nuestras economías y a nuestros esfuerzos por superar la crisis económica y financiera (2011, p.3).

Esta definición no es suficiente para dar cuenta del entendimiento de conceptos e ideas matemáticas de los estudiantes que, de acuerdo con las investigaciones revisadas, tienen que ver más con los procesos de reflexión y comunicación para resolver problemas por parte de los mismos, las herramientas que construyen para entender los conceptos y la cultura social en el aula. El aprendizaje con entendimiento pretende una mirada más integral de la construcción de pensamiento matemático. De esta manera, un examen escrito no es suficiente para dar cuenta de los elementos anteriores (Eisner, 2002).

Existen además cuestionamientos al marco teórico que sustenta a la prueba PISA (matemáticas realistas de la escuela holandesa) en cuanto a que los países de donde se tomó el modelo de PISA como Holanda han obtenido resultados satisfactorios, a diferencia de los que no lo aplican. Sin embargo, al trabajar con resolución de problemas bajo la perspectiva de Polya, Schoenfeld o aprendizaje con entendimiento, aquellos países con alto rendimiento en competencias tienen dificultades para representar y analizar distintas formas de resolver el problema (Santos, 2008) exhibiendo así una diferencia sustancial en cuanto a considerar niveles de pensamiento matemático, a través del modelo de competencias de PISA por un lado, y la resolución de problemas y aprendizaje con entendimiento por el otro.

Para buscar comprender y mejorar la educación matemática en los distintos países tal vez no baste realizar comparaciones sobre ciertos estándares universales como las competencias. Estos informes de corte cuantitativo que generan los organismos internacionales como PISA, han arrojado resultados interesantes y sin duda útiles para ciertos propósitos. Incluso mediante herramientas de corte cuantitativo dan cuenta de la relación de los resultados en matemáticas de los estudiantes con algunas variables contextuales como la pobreza. Pero este tipo de pruebas no miden las competencias de pensamiento y comunicación complejas, ni las capacidades para solucionar problemas globales (Hayes, 2014).

Con la presentación de algunos resultados de investigaciones de los ambientes de aprendizaje desde el enfoque por competencias y de aprendizaje con entendimiento pueden identificarse semejanzas y diferencias. La OCDE da cuenta de las mediciones de los elementos que interrelacionados se consideran relevantes en el desarrollo de competencias matemáticas en los alumnos, que incluyen habilidades, valores y actitudes. Los trabajos sobre aprendizaje con entendimiento están enfocados en conocer las características de los problemas implementados por el profesor, cómo piensan los estudiantes al resolver problemas, cómo es el proceso de comunicación y cómo se pueden rediseñar dichos problemas para establecer conexiones profundas entre conceptos matemáticos.

Ambos enfoques reconocen el papel que juegan las matemáticas en el mundo, el papel fundamental del profesor en crear un ambiente adecuado en el aula que incluya el diseño de problemas complejos, así como la correcta forma de guiar a los estudiantes para resolverlos. Tanto en el enfoque de aprendizaje con entendimiento como en el de competencias el tipo de problemas es fundamental para el aprendizaje en matemáticas, ya que son aquellos problemas complejos o los que impliquen un reto para el estudiante los que mayor impacto tienen.

Un elemento que es de interés en ambos enfoques es la evaluación. Como parte del curriculum es un eje fundamental y de interés a nivel mundial. A nivel internacional se muestran los resultados finales, pero no existe una mejor comprensión del proceso, debido a los resultados de aquellas investigaciones en las que se muestra a estudiantes con buenas calificaciones en matemáticas según PISA, pero tienen dificultades en resolver problemas no rutinarios. En este sentido se cuestiona sobre qué tanto las pruebas masivas pueden evaluar el entendimiento matemático de los estudiantes.

Las evaluaciones en matemáticas a nivel internacional y nacional son un intento de medir las relaciones de dependencia entre los resultados con factores asociados al contexto de los estudiantes, pero falta profundizar en los procesos de pensamiento asociados con determinados tipos de problemas bajo la guía del profesor (Santos, 2010).

La evaluación también involucra un papel activo del profesor. En este sentido, las evaluaciones masivas y cuantitativas por parte de organismos internacionales ¿realmente miden el entendimiento matemático en los estudiantes que pueda ser utilizado por el profesor? ¿Cómo pueden evaluar la comunicación y reflexión en el aula, entre el profesor y los estudiantes y entre los propios estudiantes? ¿Cómo pueden evaluar los tipos de representaciones usados por los estudiantes en los diferentes problemas diseñados por el profesor para un grupo o grupos de estudiantes con ciertas características específicas de aprendizaje? ¿Cómo evalúan el tipo de conexiones que establecen entre ideas y conceptos matemáticos?

Esto es algo que las evaluaciones internacionales y nacionales no han podido constatar, como lo muestran investigaciones que destacan las dificultades para resolver problemas no rutinarios por parte de estudiantes con altos resultados en pruebas como PISA.

Por otra parte, la OCDE desde un enfoque cuantitativo busca relaciones estadísticamente significativas entre las variables que componen el ambiente de aprendizaje en el aula. Muestra los resultados de la prueba de conocimientos en una lista de países del más alto al de menor desempeño y se intenta relacionar algunas variables causantes del puntaje obtenido con el fin de hacer recomendaciones a los gobiernos sobre la importancia de mejorar las políticas educativas.

Los resultados de las relaciones estadísticamente significativas que realiza PISA entre los elementos de un ambiente de aprendizaje adecuado para el desarrollo de competencias parecieran ser definitivos a la hora de buscar algunas de las causas del bajo rendimiento de los estudiantes. En este sentido sería un error que el profesor solo se enfocara en estos elementos evaluados por organizaciones internacionales y descuidaran aspectos esenciales del desarrollo del pensamiento matemático que contemplan dimensiones cualitativas del proceso como aquellas investigaciones reportadas desde el aprendizaje con entendimiento.

Contrastan también los resultados de la OCDE que se caracterizan por ser masivos y que pueden predecirse y generalizarse con cierto grado de confiabilidad a todo un país. Esto no sucede así con el enfoque de aprendizaje con entendimiento, centrado en un estudiante o un grupo de estudiantes en una aula. Además, debido a la amplitud de conceptos matemáticos, así como a los distintos niveles educativos, los estudios sobre entendimiento matemático son aislados y están poco relacionados entre sí. Por su parte, los datos arrojados por la OCDE se puede deducir, por ejemplo, qué tan frecuentemente un estudiante ha escuchado o ha resuelto problemas usando el concepto de proporcionalidad. Sin embargo, PISA no habla sobre la forma en que el profesor diseña el problema, cómo guía a sus estudiantes, cómo interactúan, qué dificultades enfrentaron en el proceso, qué alternativas de solución mostraron o cómo el profesor evaluó dicho concepto. Por ello, las estadísticas que presenta la OCDE no pueden tomarse como una radiografía cien por ciento certera de la calidad de un sistema tan complejo como lo es el educativo (Torres, 2010).

De acuerdo con Torres (2010),

> cualquier analista de PISA sabe que en esa prueba se nos ofrecen abundantes datos, pero que es preciso contextualizarlos mucho más con otras variables, otros focos de atención y, así mismo, con otras informaciones recogidas en momentos diferentes, y mediante otros procedimientos más intensivos y otras técnicas más cualitativas (p. 193).

Es quizá, a raíz del fenómeno que ocurre con los estudiantes al contestar el cuestionario de contexto en el aula, a partir del cual la OCDE intenta medir las relaciones estadísticamente significativas mencionadas anteriormente, donde surge la crítica más puntual a estos estudios. Son los patrones de respuesta identificados en la tabla de resultados (OCDE, 2012) los que advierten a la hora de interpretar resultados acerca del ambiente en el aula que impacta el desempeño en matemáticas. El INEE (2015) ya reconoce e identifica este patrón de respuesta como una tendencia a responder positivamente (ARS, por sus siglas en ingles), siendo esto más común particularmente en México y en países con más bajo nivel de desarrollo. Cabe señalar que Pisa no ha mencionado al respecto este tipo de acciones.

Los puntos señalados sobre la falta de confiabilidad de los resultados cuantitativos especialmente en países con menor desempeño, entre ellos México, hace posible realizar una investigación de corte cualitativo sobre el curriculum, basada en un estudio integrador del ambiente de aprendizaje desde los dos enfoques, las competencias y aprendizaje con entendimiento, ambos contextuados en un sistema educativo determinado. Bajo este mismo argumento se hace necesario lo que Gallardo y González (2010) identifican como estudios de enfoque indirecto en aprendizaje con entendimiento donde:

> …se sitúan aquellos trabajos preocupados por el desarrollo de la comprensión matemática y por la gestión externa de los efectos que produce. En él se incluyen los estudios curriculares o propuestas de carácter reformista, preocupados por defender argumentos y aportar

sugerencias acerca de cómo enseñar y aprender matemáticas con comprensión (p, 23).

Ante estos elementos presentados en el estado del conocimiento, la presente investigación se centrará en analizar la relación entre un ambiente construido por el profesor en el aula y los niveles de entendimiento de los estudiantes. Además, los detalles de cómo se llevará a cabo se muestran en la metodología, que se desarrolla en los próximos capítulos.

Ante el desarrollo de una sociedad con cada vez mayores exigencias, la escuela ya no solo busca aportar conocimientos sino desarrollar habilidades, valores y actitudes. Para ello es necesario considerar la existencia de factores que influyen en el desarrollo de los estudiantes (INEE, 2015) considerando que ambos enfoques pueden aportan una visión más amplia de lo que sucede en el aula de matemáticas respecto a los ambientes de aprendizaje y así tener una mejor comprensión que pueda ser sustento para la toma de decisiones de un salón de clases de una escuela o de un sistema educativo.

A pesar de que ya se puedan prever ciertos resultados de la investigación, como bajo aprovechamiento en matemáticas, existen condiciones, así como recomendaciones acerca de la idea de investigar en escenarios naturales. Especialmente son recomendados los estudios cualitativos en pequeña escala. Estos pueden proporcionar con mayor detalle ciertas relaciones entre las características de enseñanza y las de aprendizaje que pueden arrojar un análisis más contextuado acerca del ambiente de aprendizaje y su relación con los niveles de entendimiento.

CAPÍTULO III. Elementos teórico conceptuales sobre competencias y aprendizaje con entendimiento

En el presente apartado se discuten los elementos teóricos y conceptuales que sustentan los dos enfoques de la matemática, por competencias y de aprendizaje con entendimiento, además de abordar histórica y epistemológicamente el álgebra. El objetivo se centra en construir una estructura coherente que permita la interpretación de la realidad con respecto a la forma en que el profesor construye ambientes de aprendizaje en el aula de álgebra de primer semestre de bachillerato. Asimismo se analiza la forma en que los estudiantes adquieren entendimiento.

Dado que gran parte de la actividad del profesor de matemáticas en el aula está guiada bajo el principio de que los estudiantes entiendan ideas y conceptos fundamentales, el entendimiento no aparece en función de aquellas incorporaciones irreflexivas de las novedades educativas del momento, como puede ser el caso de las competencias o el mismo enfoque de aprendizaje con entendimiento, sino con la ayuda de los distintos enfoques de la didáctica de la matemática que, bajo guía del profesor, puedan ser incorporados al aula, en un contexto determinado y cuyas actividades didácticas estén encaminadas a que los alumnos entiendan. Estos dos modelos no son un fin en sí mismos sino instrumentos puestos al servicio del profesor, al servicio del entendimiento.

El estudio del acto de entender incluye la discusión de dos áreas, las ciencias de la educación y la didáctica de la matemática. Por una parte, el enfoque por competencias permite la interpretación de elementos educativos como las políticas de organismos internacionales que inciden en la elaboración del curriculum en países como México. Sin embargo, esta perspectiva no es suficiente para la comprensión más profunda de los procesos cognitivos de los estudiantes. El entendimiento, como un fenómeno complejo hace que se circunscriba un análisis didáctico (Duffin y Simpson, 1997), por ello es necesario la incorporación de un marco más adecuado que corresponde a la didáctica de la matemática como lo es el enfoque de aprendizaje con entendimiento con orígenes en la psicología cognitiva y los procesos de pensamiento matemático.

Con esta intención el marco teórico se compone, además, del elemento filosófico. Estos elementos componen esta perspectiva teórico – conceptual y pretende una innovación mediante la articulación entre algunas ciencias de la educación, como la filosofía educativa, la psicología cognitiva y la didáctica de la matemática.

3.1 La dimensión filosófica del entendimiento

El estudio sobre el entendimiento se remonta a las obras de Platón, como “Parménides” y “Menón”. En estos se discute que el entender es aquel conocimiento de las cosas en su esencia, es algo que sobreviene a múltiples cuestionamientos sobre algún problema o situación. El acto de entender se da por medio de diálogo en lo más profundo y esencial del ser humano, el alma, llamado por Platón *anamnesis* (“el saber como un recordar” o “diálogo del alma consigo misma”); es una obediencia de la conciencia, obediencia por la verdad donde no influye la opinión popular, el consenso o los gustos personales.

La anamnesis dentro de nosotros necesita ayuda del exterior para percatarse de sí misma pero, según indica Ratzinger (2012) “la ayuda exterior no está enfrentada, sino coordinada, con ella: cumple una función mayéutica, no le impone nada extraño, sino que la consuma y consuma su constitutiva apertura a la verdad” (p.69). El caso del Menón es ilustrativo del método mayéutico, ya que muestra la figura del guía o maestro que por medio de preguntas hace que un esclavo descubra por sí mismo la solución a un problema geométrico. Las condiciones son propuestas por el maestro, así como las preguntas y las pistas, pero es el alumno quien entiende, dado que el entendimiento es una condición interna. El maestro es un experto en el tema, sabe ofrecer las preguntas esenciales, sin dar demasiado ni muy poco. Caso contrario al de enseñar para que otro entienda es el de enseñar con la sola intención de convencer o persuadir a otros por medio de la autoridad y habilidad de palabra y no por argumentos. La persona que enseña de este modo era conocida como sofista. Aquí el maestro muestra una confianza plena en la capacidad de verdad del hombre.

En el diálogo “Parménides o de las ideas” pueden obtenerse elementos de discusión acerca de la naturaleza del entendimiento. En este libro Platón reflexiona sobre la esencia de los procesos mentales por medio de la paradoja de lo uno y lo múltiple. En la mente ingresan múltiples ideas individuales e indivisibles que son transformadas de múltiples a un solo concepto nuevo, combinado pero único; no existe nada de la nueva idea en ninguna parte de todas las múltiples. No existe camino deductivo que conduzca de los muchos a este uno indivisible, esta transformación es obra del proceso creativo de la mente humana individual (LaRouche, 1991).

Entonces, en Platón por medio de la anamnesis se encuentra que el entendimiento es una cualidad de la naturaleza humana y entre más actos de entendimiento la mente avanza a niveles superiores para resolver problemas que hagan progresar a la sociedad.

Bajo la misma línea filosófica que Platón, en el siglo XVIII, el filósofo Leibniz en respuesta a una obra del inglés John Locke, escribe “Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano”. Para Leibniz el entendimiento es un principio innato en el espíritu humano, ya que “las enseñanzas exteriores no hacen más que despertar lo que ya está en nosotros” (Leibniz, 1992, p. 73) pero también las malas enseñanzas lo opacan, como creer en la autoridad del maestro, más en la fuerza de las palabras que en la de los argumentos.

El espíritu del hombre posee una disposición natural para sacar las verdades de sí mismo; dado que los sentidos son auxiliares, estos proveen el interés y la ocasión para hacerlo. Existen verdades que provienen del entendimiento y verdades provenientes de la experiencia. El espíritu humano puede conocer los dos tipos, pero por muchas experiencias que puedan tenerse en relación con una verdad universal sin conocerla por medio de la razón nunca se comprenderá de verdad (Leibniz, 1992). Leibniz ponía en claro que la acumulación de información no es entender.

Lonergan (2004) por su parte conceptualiza el acto de entender como un chispazo inteligente, y recurre a la siguiente analogía:

> En una novela detectivesca ideal al lector se le dan todas las pistas y, sin embargo, no puede descubrir al criminal. Puede notar cada pista conforme aparece. No necesita más pistas para resolver el misterio. Pero él puede quedar en tinieblas por la simple razón de que alcanzar la solución no es la mera aprehensión de ninguna pista, ni el mero recuerdo de todas, sino una muy distinta actividad de la inteligencia organizadora que coloca todo el grupo de pistas en una única perspectiva explicativa. (Lonergan, 2004, p.2).

El entendimiento es un acto que resuelve algún problema. Para Lonergan, llega como un relámpago, no se alcanza aprendiendo reglas, tampoco siguiendo mandatos, ni estudiando ninguna metodología. Esto es cierto tanto para el descubrimiento como para la enseñanza debido a que un profesor no puede actuar directamente en los procesos mentales de sus estudiantes para desarrollar entendimiento. Puede guiarlos bajo un cierto ambiente de aprendizaje adecuado, con preguntas guía, pero como en el caso del diálogo “el Menón”, es el estudiante quien llega al acto de comprensión.

El chispazo inteligente para Lonergan es una capacidad innata donde las condiciones internas son más importantes que las externas. Esto está en congruencia con la filosofía de Platón y Leibniz. Al respecto, el entendimiento es una condición interna y el maestro tiene la posibilidad de crear un ambiente pedagógicamente propicio para que los estudiantes entiendan conceptos e ideas fundamentales. Para Leibniz y Lonergan debe captarse la atención de los sentidos por medio de una situación interesante y en una ocasión adecuada.

3.1.1 El positivismo como filosofía subyacente en la educación en México

Considerar problemas matemáticos que pongan a prueba el conocimiento de conceptos, así como generar diversas estrategias para la solución de algo concreto como el caso de Arquímedes o Platón no es tarea fácil, este método requiere sostenerse sobre principios filosóficos del curriculum distintos a los que prevalecen actualmente. Para entender un principio filosófico sobre el que está sostenida la educación en México es necesario introducirse al campo cultural e histórico (Ramos, 2012) y es importante realizar comentarios al respecto.

El positivismo importado de Francia en el siglo XIX como principio de la educación en México, fue incluido en los planes educativos con una intención antirreligiosa (Ramos, 2012), llevándose consigo todo tratamiento metafísico o esencia de las cosas. Esto constituyó un rechazo a las filosofías de Platón, Leibniz y cualquier otra corriente que tratara de explicar el conocimiento más allá de la percepción sensorial.

Mientras que el entendimiento como se ha construido anteriormente bajo los conceptos de Platón, Leibniz, la Gestalt, Hiebert y otros, es una cualidad cognitiva muy distinta a la de acumular información, es una capacidad innata que se ha mostrado históricamente a través de acciones como la resolución de problemas. Por otra parte, bajo la perspectiva positivista, el entendimiento no existe (Cusa, 2001), no es más que la suma de actos de razonamientos a través de la acumulación de experiencias sensibles. Estas verdades por experiencia, como observan Leibniz y Cusa, obtenidas por medio de los sentidos, son necesarias para el ser humano, pero no se llegan a comprender si no son sometidas a juicio por aquella capacidad innata del ser humano que es el entendimiento.

El positivismo sí hace una diferencia entre lo abstracto y lo concreto para llegar a un acto de comprensión. Según Ramos (2012), consiste en "creer que la ciencia se obtiene con sólo abrir los cinco sentidos a la realidad. La función intelectual parece una cosa secundaria en el proceso científico. Tal parece que la experiencia, por su propia virtud, tiene una eficacia mágica para convertirse en ideas. La investigación científica queda reducida a la recolección de documentos, como si fuera bastante amontonarlos para que, al llegar a cierto volumen, brotara la luz del conocimiento científico" (2012, p.118).

Algunas de las ideas del positivismo en México han llegado a tener eco en una concepción de las competencias como un saber inmediatamente aplicable a la vida, sin tener como base un conocimiento conceptual, un pragmatismo con fines y resultados inmediatos que ha sido un denominador común en las reformas educativas en México (Ramos, 2012).

En el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas esto significa desarrollar primeramente la parte conceptual antes que la procedimental. La acumulación de experiencias por medio de la repetición de un procedimiento fue un hecho criticado por Carl Gauss en su tesis doctoral de 1799 acerca del teorema fundamental del álgebra, en el cual muestra que no es admisible el uso de cantidades mientras no se demuestre su origen. Esto sucedió con el caso de números imaginarios para resolver ciertas ecuaciones de segundo grado. Este es un hecho que puede encontrarse comúnmente en las aulas de matemáticas en todos los niveles educativos cuando se cuestiona a los estudiantes la forma en que funciona algún procedimiento como la suma de fracciones, despejar alguna incógnita en una ecuación o calcular alguna derivada. Los estudiantes responden que solo obedecen el algoritmo mostrado por el profesor (Wertheimer, 1991).

La capacidad de analizar las herramientas cognitivas como lo es el algoritmo va menguando y finalmente un deseo natural de adquirir un conocimiento conceptual se sustituye por un pensamiento de tipo práctico. La indagación potencial de una búsqueda por la verdad última sobre cómo funcionan las cosas es sustituida por la practicidad, despreciando e incluso mitificando la acción de *anamnesis* por ser subjetiva.

3.2 Entendimiento matemático

En décadas más recientes, desde el campo de la matemática, Hiebert (1997) sostiene que definir el entendimiento es algo complejo, no es algo que se tenga o no se tenga, sino algo que siempre cambia y crece, además de existir distintos niveles. El entendimiento es concebido como un acto, una experiencia emocional, un proceso intelectual y una forma de conocimiento. La construcción o desarrollo de las conexiones de ideas y conceptos es un proceso; la robustez de las conexiones que se tienen es un estado actual, y el uso de conexiones ante algún problema es considerado un acto. Esto lleva a Hiebert a definir que entender algo significa poder conectarlo con otras cosas. De esta forma cuanto mayor es el número de conexiones existirá un mayor nivel de entendimiento, dado que estas permiten la creación de una especie de redes que se van profundizando en una especie de articulación conceptual.

3.3 Los problemas en matemáticas y el desarrollo entendimiento

Hasta este punto se sabe que existe una relación entre adquirir entendimiento y el tipo de problemas que se ejecutan bajo guía del docente. Desde esta perspectiva podría afirmarse que un profesor sabe si un estudiante entendió un concepto o idea matemática cuando es capaz de resolver problemas, pero las características que deba poseer un problema para ser considerado como tal también dependen de la concepción que se tenga sobre las matemáticas.

Existen diversas perspectivas de lo que significan las matemáticas y que han venido cambiando a través del tiempo. Estas distintas definiciones han tenido impacto en la forma en cómo se enseñan. Entre estas perspectivas, actualmente se encuentra una muy difundida basada en que las matemáticas son una disciplina cerrada y poco flexible, y que solo da lugar para cálculos rápidos y precisos en donde solo los más inteligentes pueden entenderlas. Esto en gran parte se debe a una influencia cultural que se ve reforzada en el salón de clases (Santos 2010).

También la práctica de la matemática se identifica con aplicar reglas correctamente y respuestas correctas por parte de los estudiantes. Esto también ha sido causa de la influencia que tuvo, y sigue teniendo, el movimiento de la “matemática moderna” (Kline, 2014) desde el siglo pasado. Como mencionan Barrera y Reyes (2013), “por el contrario cuando las actividades que los estudiantes llevan a cabo incluyen problemas que constituyen un reto, problemas que los estudiantes pueden resolver utilizando los recursos de los que disponen, y en algunos casos, mediante el apoyo de preguntas y sugerencias elaboradas por el profesor, se puede despertar su curiosidad y el gusto por el pensamiento independiente" (p. 62), de manera que gran parte de los estudiantes tienen una concepción de matemáticas acorde a los tipos de problemas que han abordado en clase.

En este sentido existen esfuerzos para concientizar y cambiar esta equivocada concepción de aquellas. Por ejemplo, el NCTM (Nacional Council of Teachers of Mathematics /Asociación Norteamericana de Profesores de Matemáticas) hace énfasis en desarrollar un ambiente matemático en el aula con las siguientes características:

a) Hacia la aceptación de un salón de clases como una comunidad matemática.
b) Hacia el uso de la lógica y la evidencia matemática como un medio de verificación, contrapuesto a ver al maestro como la única autoridad para dar las respuestas correctas.
c) Hacia el desarrollo del razonamiento matemático; es decir, no ubicar las matemáticas como un conjunto de fórmulas o reglas para memorizar.
d) Hacia la resolución de problemas y no sólo dar énfasis a las actividades de encontrar respuestas mecánicamente.
e) Hacia la conexión y aplicación de las matemáticas, es decir, no concebirlas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.

Además, la OCDE junto con el departamento de educación de la Unión Europea (2012) reconocen la multiplicidad de perspectivas acerca de qué son las matemáticas, pero hacen énfasis en que la resolución de problemas es la esencia de esta ciencia.

Por tanto, la concepción de matemáticas está relacionada con los tipos de problemas. Sin embargo, existen múltiples perspectivas de lo que significa resolución de problemas. Algunos autores consideran que la resolución de problemas es la esencia del aprendizaje de las matemáticas. Por su parte, Schoenfeld (1992) sugiere que cada trabajo sobre resolución de problemas vaya acompañado de una definición del término así como de ejemplos, dado que en ocasiones los términos son confusos e incluso contradictorios. La respuesta a esta pregunta no es única ni fácil de responder, pero se puede aproximar a partir de la siguiente teoría.

A principios del siglo XX, Wolfang Köhler y Max Wertheimer, bajo la asesoría del físico Max Planck desarrollan la psicología de la Gestalt, donde influyeron los principios filosóficos expuestos por Platón y Leibniz acerca del funcionamiento de la mente humana, así como los conceptos de entendimiento, alma o monada.

Fue en la psicología de la Gestalt donde se llevaron a cabo esfuerzos por obtener pruebas acerca de cómo la mente llega a comprender algo a partir de la resolución de problemas. El tipo de problemas seleccionados para su experimentación fueron matemáticos (Wertheimer, 1991).

Para Wertheimer (1991) el entendimiento es un proceso dinámico, donde las cualidades estructurales globales de alguna situación problemática actúan como factores determinantes del proceso de solución, es una especie de visualización que procede "desde arriba" o del todo a las partes involucradas. Esta perspectiva es reveladora en el sentido de que tanto el curriculum de matemáticas actualmente en educación básica como también los niveles de competencia matemática de PISA están determinados por niveles de dificultad. Por ejemplo, primero aparece el algoritmo para alguna operación y después aparece la aplicación. Según la Gestalt, la visualización es en sentido opuesto: el algoritmo es un nivel de entendimiento superior, un punto de llegada, no de partida.

Un problema abordado por Wertheimer consistió en hallar el área del paralelogramo. En sus múltiples observaciones en aulas registró la forma dócil en que los estudiantes obedecen los pasos de la demostración del área. En este caso el maestro enseña el método correcto y los alumnos pueden aplicarlo a casos rutinarios. Esta es, dice Wertheimer la forma que la mayoría de las personas aprenden en su vida escolar, sobre todo conceptos matemáticos dentro del cálculo diferencial e integral o geometría plana y del espacio, entre otras. A los estudiantes difícilmente se les enseña bajo otro método que no sea observar la demostración proporcionada por el maestro y someterse a ella paso a paso, sin la posibilidad de algún otro tipo de aprendizaje bajo problemas que requieran comprensión y procesos productivos genuinos.

Los procesos de mecanización ocurridos en diversas aulas tienden a cegar a los estudiantes en relación con el significado de aquello que se hace. Así aparecen casos en los que los estudiantes pueden sumar, restar, dividir y multiplicar rápido y sin errores, pero a menudo no saben cuál de estas usar ante algún problema. La enseñanza no debe hacer hincapié principalmente en el aprendizaje y la ejercitación repetitivos, sino dejar que el alumno descubra las características y requerimientos estructurales de situaciones dadas (Wertheimer, 1991).

Los hábitos de un pensamiento mecanizado provocan un efecto cegador en los estudiantes donde en ocasiones la aplicación posterior de problemas auténticos por parte del profesor no es suficiente para la transformación de un tipo de pensamiento mecanizado a un pensamiento de tipo productivo. Se necesita, además, una cierta atmosfera en las escuelas que impacte en el aprendizaje de los estudiantes (Wettheimer, 1991). De esta forma Wertheimer identificó la importancia del ambiente de aprendizaje en el aula como un conjunto de dimensiones inseparables.

La naturaleza y tipo de problemas de aprendizaje, de acuerdo con Hiebert y otros (1997), deben permitir a los estudiantes diseñar sus propios procedimientos de solución, con base en los recursos o conocimientos previos que posean. Los problemas deben ser auténticos en el sentido de que deben representar un reto intelectual, más que solo a nivel memorístico o algorítmico. De acuerdo con Schoenfeld (1985, citado en Santos 2010) un problema se refiere a una tarea difícil para el individuo que está tratando de hacerla. La dificultad a la hora de resolver dicho problema debe de involucrar un crecimiento intelectual y no solo en cuanto a rapidez de cálculos. En los libros de texto y las clases en el aula, principalmente en matemáticas de educación básica, se adiestra a los estudiantes a través de los libros de texto y exámenes a que un problema se resuelva en 5 o 10 minutos, además de solo poner atención a los datos cuantitativos. Al respecto, Schoenfeld (1985) afirma que:

> Raramente la presentación de la solución de un problema por parte del maestro dura más de cinco o diez minutos. A los estudiantes nunca les queda la impresión de que uno puede dedicar horas (mucho menos días, semanas o meses) trabajando en un problema. Se les priva la oportunidad de mostrar algún progreso en la resolución de problemas complicados y como consecuencia, se les reprime de la enseñanza de atacarlos a aquellos que son capaces de trabajar estos problemas. (en Santos, 2010, p. 49).

Polya (2013) continuó en cierta medida el trabajo dejado por Wertheimer y Köhler en el campo de resolución de problemas. Sus trabajos estuvieron relacionados con la teoría de la Gestalt. Propone una serie de pasos generales que son: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar del plan y tener una visión retrospectiva.

Para Polya (2013), las matemáticas son la ciencia rigurosa de Euclides, pero también son algo más, afirma que:

> Las matemáticas presentadas a la manera euclidiana, aparecen como una ciencia sistemática, deductiva; pero las matemáticas en vía de formación aparecen como una ciencia experimental, inductiva. Ambos aspectos son tan viejos como las matemáticas mismas. Pero el segundo es nuevo en cierto aspecto; en efecto, las matemáticas in statu nascendi, en el proceso de ser inventadas, nunca han sido presentadas al estudiante, ni incluso al maestro, ni al público en general (p.3).

Además, Polya señala que los estudiantes suelen perder interés en un aula debido a que su único objetivo pasa a ser aprender matemáticas solo para pasar un examen.

De manera que no se sabe qué definiciones sobre la matemática se van a adoptar en un futuro, pero algo es seguro: los problemas han existido en la matemática y seguirán existiendo.

Al respecto, “la educación tiene el propósito de ayudar a quienes aprenden para que se conviertan en estudiantes capaces de resolver mejor los problemas” (Orton, 2003, p. 120). Por otra parte, Gagne (1970) clasificó la resolución de problemas como la forma más elevada de aprendizaje. Por su parte Wertheimer (1990) consideraba que visualizar y plantear el problema correcto suele ser un logro mucho más importante que resolver una tarea predeterminada.

Polya afirmaba que las operaciones rutinarias en el salón de clase impiden el desarrollo intelectual, dado que,

> A través de la resolución de problemas relevantes, que requieren de cierto grado de independencia, originalidad y creatividad, los estudiantes podrán dar sentido a las ideas matemáticas, entender cómo se descubren lo hechos o resultados matemáticos, cómo ellos mismos pueden descubrir o inventar esos resultados y comprender los mecanismos mediante los que esos hechos se justifican, organizan y sistematizan (citado en Barrera & Reyes, 2013, p. 62).

Al respecto, es el profesor el que debe brindar la asistencia en el proceso de solución de problemas, en donde los estudiantes asuman una parte razonable del trabajo.

De acuerdo a Barrera y Reyes (2013) una de las contribuciones más importantes del trabajo de Polya al marco de resolución de problemas es el concepto de heurística, una estrategia de carácter general que puede permitir avanzar en el proceso de solución, pero que no asegura la obtención de una respuesta al problema. Las heurísticas tienen el objetivo de promover procesos mentales que típicamente resultan útiles a la hora de resolver problemas. Algunos ejemplos de heurísticas son: encontrar un problema más simple relacionado con el problema original, relajar una o más condiciones del problema, considerar el problema como resuelto, trabajar hacia atrás, dibujar una figura, trazar elementos auxiliares, analizar casos particulares, o utilizar analogías, entre otras.

Más adelante Schoenfeld continuó y desarrolló la propuesta de Polya e identificó que dentro de las heurísticas que propone, existen otras subtareas, es decir, que puede que un problema no se resuelva solo con una sola heurística, sino que pueden ser varias, de acuerdo con Barrera y Reyes (2013) estas son:

a) Recursos básicos o conocimiento base que involucran definiciones básicas, hechos, notaciones, fórmulas, algoritmos y conceptos fundamentales asociados con un área particular o tema, incluyendo formas de acceder a ese conocimiento.

b) Estrategias de resolución de problemas que incluyen formas de representar y analizar los problemas para entender y resolverlos (algunos ejemplos de esas estrategias se centran en explorar sub-metas: encontrar un problema más sencillo o un problema análogo, descomponer el problema, visualizar el problema mediante el uso de un diagrama, trabajar hacia atrás, etc.)

c) Estrategias metacognitivas que involucran el conocimiento sobre las propias funciones cognitivas (¿qué necesito y cómo uso ese conocimiento?) y estrategias para monitorear y controlar los procesos cognitivos propios (¿qué estoy haciendo?, ¿por qué lo estoy haciendo?, ¿hacia dónde voy?).

d) Creencias y componentes afectivos que incluyen la forma en que los estudiantes conceptualizan a las matemáticas y a la resolución de problemas, así como la disposición y actitudes de los estudiantes para involucrarse en actividades matemáticas.

De manera general las características de un problema son: la existencia de un interés, la no existencia de una solución inmediata y la presencia de diversos caminos o métodos de solución.

Esta postura es congruente con lo expuesto por Isoda y Olfos (2009) cuando argumentan que un verdadero problema es aquel que pone al alumno en una situación nueva, ante la cual no dispone de un procedimiento inmediato para su resolución. Como indican Isoda y Olfos (2009), "en el ámbito de la matemática escolar se dice que un problema es abierto para un estudiante si éste no dispone de procedimientos estándares para solucionarlo, o bien, el problema tiene varias soluciones" (p. 99). En el aula de matemáticas un problema debe ser accesible para la mayoría de los estudiantes y este puede tener diferentes enfoques para su resolución; además, un problema es tal hasta que existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo.

3.3.1 Distintos tipos de problemas generan distintos niveles de entendimiento

Una vez consideradas algunas características esenciales de los problemas es importante valorar el hecho de que distintos tipos de problemas generan cierto tipo de procesos cognitivos encaminados a desarrollar niveles de entendimiento. Usinski (2012) considera al menos cinco niveles de entendimiento, el desarrollo de algoritmos, la justificación por medio de la aplicación de las propiedades, el modelado, la representación metafórica y el desarrollo histórico – cultural. Todas estas dimensiones son fundamentales en la construcción de un concepto matemático, a diferencia de obtener solo una habilidad mecánica.

El tipo de problemas en matemáticas es esencial para construir entendimiento ya que van realizándose conexiones cada vez más profundas entre conceptos e ideas matemáticas, pero también en esencial analizar cómo por medio de los problemas se crean dichas conexiones y cuál es el papel del profesor para fomentarlas. En el proceso de construcción de conexiones en matemáticas intervienen dos procesos fundamentales: la reflexión y la comunicación. La reflexión ocurre cuando se piensa conscientemente en las propias experiencias o actos de pensamiento. Esto puede ocurrir por medio de dos preguntas fundamentales, el qué se está haciendo y por qué se está haciendo. En el diálogo de Menón, Sócrates utiliza constantemente estas preguntas para el esclavo, propicia una reflexión y comunicación interna continua hasta que, sin darle la respuesta, el esclavo llega a ella.

La comunicación también implica hablar, escuchar, leer, escribir, demostrar, observar, participar, reflexionar, además de la interacción social, intercambiar puntos de vista y algo fundamental, es también comunicarse con uno mismo (Hiebert, 1997, p. 5). “Este proceso de reflexión permite establecer nuevas conexiones y revisar las conexiones ya establecidas lo cual se traducirá en un incremento en el nivel de entendimiento” (Barrera y Reyes 2013).

3.4 El aprendizaje por competencias y los problemas matemáticos

Una vez revisados los elementos sobre el entendimiento, la relevancia de los problemas y el rol del profesor, toca turno a la exposición crítica del modelo por competencias de acuerdo con la OCDE y la forma de concebir los problemas matemáticos.

3.4.1 Qué son las competencias

Algunas de las críticas al aprendizaje por competencias señalan lo complejo que es definir el concepto de competencia, no es un concepto preciso dado que en este modelo se identifica una debilidad teórica por el hecho de que este modelo fue creado e impulsado por organismos económicos y políticos (Gimeno, 2011). Las competencias, en especial las competencia matemáticas, para la OCDE y la Unión Europea tienen una importancia vital en el desarrollo de la economía (Vassiliou, 2011) ya que reconocen la competencia matemática como clave para formar individuos que sean consumidores inteligentes (OCDE, 2006).

Para tratar de subsanar algunas deficiencias conceptuales identificadas en el modelo por competencias, en este constructo teórico no se abordarán solo las competencias en sí mismas, sino que se abordarán también a través de un principio superior que es el entendimiento. Como ya se ha venido desarrollando, el entendimiento es el eje central del presente apartado teórico y con este se articulan elementos del aprendizaje con entendimiento o comprensión y las competencias.

De acuerdo con el INEE (2015) el modelo de evaluación de PISA está centrado en el concepto de *literacy* (aptitud o competencia, aunque en diferentes países ha sido traducido como cultura, formación, alfabetización o habilidad). En México, este concepto se ha manejado como competencia y definido como “un sistema de acción complejo que abarca las habilidades intelectuales, las actitudes y otros elementos no cognitivos, como motivación y valores, que son adquiridos y desarrollados por los individuos a lo largo de su vida y son indispensables para participar eficazmente en diversos contextos sociales” (INEE, 2005, p. 16).

En el proyecto DeSeCo (Definición y Selección de Competencias) la OCDE define competencia como:

> “la habilidad de cumplir con éxito las exigencias complejas, mediante la movilización de los prerrequisitos psicosociales. De este modo se enfatizan los resultados que el individuo consigue a través de la acción, selección o forma de comportarse según las exigencias… cada competencia es la combinación de habilidades prácticas, conocimientos (incluidos conocimientos tácitos), motivación, valores éticos, actitudes, emociones y otros componentes sociales y de comportamiento que pueden movilizarse conjuntamente para que la acción realizada en una situación determinada pueda ser eficaz” (Zabala y Arnau, 2007, p. 39).

Por su parte, la competencia matemática es definida como:

> “la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las Matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Esta competencia le ayuda al individuo a reconocer la función que desempeñan las Matemáticas en el mundo, así como emitir juicios bien fundados y tomar decisiones necesarias en su vida diaria como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo” (OCDE, 2012).

Dentro de la competencia matemática se pretende que el estudiante realice procesos como formular situaciones matemáticas, emplear conceptos, hechos, procedimientos y razonamiento matemático, interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos. Los temas considerados por la OCDE de relevancia en matemáticas son los números, el álgebra y la geometría, que incluyen cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones y probabilidad. Estos deben ser desarrollados en contextos como el personal, el educativo, el social y el científico.

En estas definiciones sobre competencia se identifica que el común denominador es un conjunto de conocimientos, valores y actitudes que puedan ser aplicados durante la vida en distintos contextos a resolver situaciones nuevas. En este sentido a una competencia no puede dársele un sentido utilitarista (solo de capacitación y desarrollo de habilidades específicas para un momento determinado), sino que debe preparar para resolver problemas presentes y futuros.

De acuerdo con Hiebert (1997) no se sabe cuáles son los cambios educativos, modelos, concepciones de las matemáticas o reformas que van a existir en un futuro. Sin embargo, lo que sí es cierto es que existirán problemas que demanden ser resueltos y que difícilmente se presentan en los exámenes. Pérez Gómez (2007) expresa que el hecho de preparar al alumnado para afrontar situaciones de incertidumbre y en procesos permanentes de cambio es una condición necesaria para el desarrollo de las competencias y para aprender a aprender. Por ello, el desarrollo de una competencia con orientación hacia el entendimiento matemático no se reduce al desarrollo de una habilidad, más bien "la instrucción matemática debe desarrollar la comprensión de los estudiantes sobre conceptos importantes […]. La instrucción debe estar orientada a la comprensión conceptual, más que a las meras habilidades mecánicas, y a desarrollar en los estudiantes la capacidad de aplicar los contenidos que han estudiado con flexibilidad e ingenio" (Schoenfeld, 1992, p. 344).

La aplicación de los contenidos con flexibilidad e ingenio en situaciones nuevas es fundamental en el aprendizaje por competencias y en el desarrollo de aprendizaje con entendimiento. Para algunos autores, ambas perspectivas coinciden en que para lograr comprensión matemática no debe existir separación entre lo abstracto y lo concreto, y en que los problemas diseñados deben de considerar este principio.

Es importante tener en cuenta que el uso del término competencias es una consecuencia de haber superado una enseñanza que promueve el aprendizaje memorístico de conocimientos (Zabala y Arnau, 2007). Para Cano (2008), el estudiante es quien construye la competencia a partir de la secuencia de las actividades de aprendizaje que movilizan múltiples conocimientos especializados. El profesor sólo crea condiciones favorables para la construcción personal de las competencias.

3.4.2 Problemas matemáticos y desarrollo de competencias

Al respecto, PISA (2006) identifica cinco pasos fundamentales en la resolución de problemas (proceso también llamado matematización, que es la estrategia que suelen emplear los matemáticos). Estos son los siguientes:

a) El proceso matematizador o de matematización se inicia con un problema presente en la realidad.
b) En el segundo paso, la persona que desea resolver el problema trata de identificar las matemáticas pertinentes al caso y reorganiza el problema según los conceptos matemáticos que han sido identificados. Por ejemplo, relacionar las fórmulas matemáticas con dimensiones como la edad, frecuencia cardiaca, años, entre otros.
c) El tercer paso implica una progresiva abstracción de la realidad. Existen diferentes modos de abstraer la realidad, esto es, de formular el problema en términos estrictamente matemáticos. Uno de ellos consiste en traducir las fórmulas lingüísticas a una expresión algebraica más formalizada, por ejemplo: $y = 220 - x$ ó $y = 208 - 0{,}7x$ donde y podría representar la máxima frecuencia cardíaca, expresada en latidos por minuto, y x representa la edad, expresada en años. Otra forma de acceder a un universo estrictamente matemático consistiría en dibujar directamente los gráficos

partiendo de las fórmulas lingüísticas. Estos tres pasos nos llevan desde el problema del mundo real al problema matemático.

d) El cuarto paso consiste en resolver el problema matemático. Por ejemplo, resolver la ecuación: $220 - x = 208 - 0{,}7x$. Esto nos da $x = 40$, mientras que el valor correspondiente de y sería 180.

e) El quinto paso supone responder a la pregunta: ¿qué significado adquiere la solución estrictamente matemática al transponerla al mundo real?

En el estudio de PISA (2012) se integraron una serie de categorías complementando el modelo matematizador anterior, que incluye procesos y capacidades matemáticas fundamentales para la evaluación y que a continuación se muestran en la tabla.

Tabla 1 Relación entre los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales.

	Formulación matemática de las situaciones	*Empleo* de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos	*Interpretación*, aplicación y valoración de los resultados matemáticos
Comunicación	Leer, descodificar e interpretar enunciados, preguntas, tareas, objetos, imágenes o animaciones (en la evaluación electrónica) para crear un modelo mental de la situación	Articular una solución, mostrar el trabajo asociado a la obtención de la misma y/o resumir y presentar los resultados matemáticos intermedios	Elaborar y presentar explicaciones y argumentos en el contexto del problema
Matematización	Identificar las variables y estructuras matemáticas subyacentes al problema del mundo real y formular supuestos de modo que puedan utilizarse	Utilizar la comprensión del contexto para guiar o acelerar el proceso de resolución matemático, p. ej., trabajando a un nivel de precisión apropiado al contexto	Comprender el alcance y los límites de una solución matemática que son el resultado del modelo matemático empleado
Representación	Crear una representación matemática de información del mundo real	Interpretar, relacionar y utilizar distintas representaciones cuando se interactúa con un problema	Interpretar los resultados matemáticos en distintos formatos con relación a una situación o uso; comparar o valorar dos o más representaciones con

	Formulación matemática de las situaciones	*Empleo* de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos	*Interpretación*, aplicación y valoración de los resultados matemáticos
			relación a una situación
Razonamiento y argumentación	Explicar, defender o facilitar una justificación de la representación identificada o elaborada de una situación del mundo real	Explicar, defender o facilitar una justificación de los procesos y procedimientos utilizados para determinar un resultado o solución matemática. Relacionar datos para llegar a una solución matemática, hacer generalizaciones o elaborar un argumento de varios pasos	Reflexionar sobre las soluciones matemáticas y elaborar explicaciones y argumentos que apoyen, refuten o proporcionen una solución matemática a un problema contextualizado
Diseño de estrategias para resolver problemas	Seleccionar o diseñar un plan o estrategia para reformular matemáticamente problemas contextualizados	Activar mecanismos de control eficaces y sostenidos en un procedimiento con múltiples pasos conducente a una solución, conclusión o generalización matemática	Diseñar e implementar una estrategia para interpretar, valorar y validar una solución matemática a un problema contextualizado
Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico	Utilizar variables, símbolos, diagramas y modelos estándar apropiados para representar un problema del mundo real empleando un lenguaje simbólico/formal	Comprender y utilizar constructos formales basándose en definiciones, reglas y sistemas formales, así como mediante el empleo de algoritmos	Comprender la relación entre el contexto del problema y la representación de la solución matemática. Utilizar esta comprensión para favorecer la interpretación de la solución en su contexto y valorar la viabilidad y posibles limitaciones de la misma
Utilización de herramientas matemáticas	Utilizar herramientas matemáticas para reconocer estructuras matemáticas o describir relaciones matemáticas	Conocer y ser capaz de utilizar adecuadamente distintas herramientas que puedan favorecer la implementación de procesos y procedimientos para	Utilizar herramientas matemáticas para determinar la razonabilidad de una solución matemática y los límites y restricciones de la

	Formulación matemática de las situaciones	*Empleo* de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos	*Interpretación*, aplicación y valoración de los resultados matemáticos
		determinar soluciones matemáticas	misma, dado el contexto del problema

Fuente. OCDE 2012.

3.4.3 Niveles de competencia matemática

A partir de esta serie de pasos identificados en la resolución de un problema, PISA identifica distintos niveles de competencia que un estudiante puede alcanzar dependiendo del tipo de preguntas que pueda responder. Estos niveles se describen a continuación en la Tabla 2.

Tabla 2 Niveles de competencia matemática.

Nivel 6	Los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de manera flexible. Los estudiantes de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Estos alumnos pueden aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, interpretaciones, argumentos y su adecuación a las situaciones originales.
Nivel 5	En el nivel 5, los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
Nivel 4	En el nivel 4, los alumnos pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la

	formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluidas las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.
Nivel 3	En el nivel 3, los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Los alumnos de este nivel saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Son también capaces de elaborar breves escritos exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
Nivel 2	En el nivel 2, los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional. Los alumnos de este nivel pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
Nivel 1	En el nivel 1, los alumnos saben responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

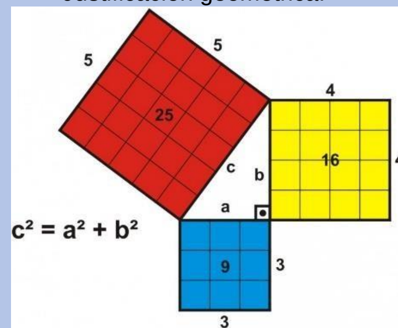
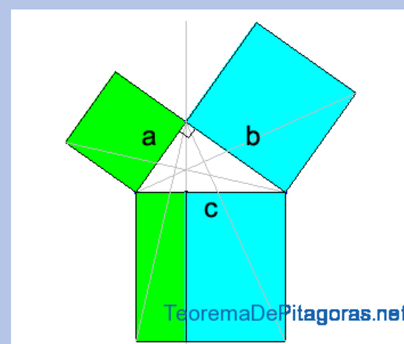
Fuente: OCDE, 2013

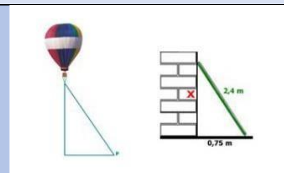
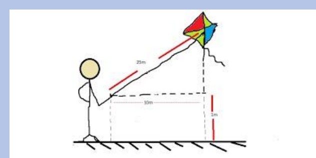
Para ejemplificar los distintos ejemplos de problemas desde los enfoques de aprendizaje por competencias y aprendizaje con entendimiento se muestra la Tabla 3.

Tabla 3 Tipos de problemas en aprendizaje con entendimiento y competencias

	Nivel	Tipo de problemas	Puntaje
Niveles de competencia matemática de acuerdo a PISA	Reproductivo	2/4 + 5/3 =" o "¿cuál es el promedio de 45, 48, 41, 39, 59, 44, 30, 60?"	357.77 – 482.38 (niveles 1 y 2)
	De conexión	En un supermercado existen dos presentaciones de una marca de cereal, el	482.38 – 606.99

	Nivel	Tipo de problemas	Puntaje
		primero es una caja de 1.5 Kg que cuesta \$118.00 pesos, la segunda opción es un paquete con 7 cajas de cereal con 180 gr. cada una con un precio de \$119.00 pesos, ¿cuál es la mejor opción en relación al costo? Explique su razonamiento	(niveles 3 y 4)
	De reflexión	En un determinado país, el presupuesto nacional de defensa fue de 30 millones (en la moneda del país) en 1980. El presupuesto total de ese año fue de 500 millones. Al año siguiente, el presupuesto de defensa pasó a 35 millones, mientras que el presupuesto total fue de 605 millones. La inflación del período comprendido entre los dos presupuestos alcanzó el 10 por ciento. a) Te invitan a dar una conferencia en una asociación pacifista. Intentas explicar que el presupuesto de defensa ha disminuido en este período. Explica cómo lo harías. b) Te invitan a dar una conferencia en una academia militar. Intentas explicar que el presupuesto de defensa ha aumentado en este período. Explica cómo lo harías." (De Lange y Verhage, 1992 en PISA, 2004).	606.99 – 700 (niveles 5 y 6)
Niveles de entendimiento matemático (Usinski, 2012)	Memorización Algorítmico Imitativo	Puede utilizarse un concepto o idea y llevarlo a distintos niveles de entendimiento, en profundidad y extensión de acuerdo a los niveles o grados escolares. **Teorema de Pitágoras:** En un triángulo rectángulo, la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. En este caso puede aplicarse para resolver problemas en los que hay que encontrar el valor desconocido de un lado si se conocen los valores de los otros dos lados del triángulo rectángulo.	No aplica

	Nivel	Tipo de problemas	Puntaje
	Justificación por medio de la aplicación de las propiedades (acorde al nivel educativo)	Justificación geométrica:   Capacidad para extender el resultado, esto es, para justificar que la suma de las áreas de semicircunferencias, triángulos, pentágonos, o cualquier otra figura construida sobre los catetos de un triángulo rectángulo, es igual al área de la figura construida sobre la hipotenusa siempre que todas estas figuras sean semejantes.	No aplica
	Modelado o aplicación	Hallar la altura de un árbol conociendo la distancia desde el punto hasta el que llega su sombra a la copa y desde ese punto a la propia base del árbol. Calcular la altura de una cometa (o papalote) sabiendo la distancia de la cuerda que la sostiene y la distancia desde la persona que sujeta la cuerda hasta la vertical de la cometa. Encontrar la distancia entre los puntos en el plano coordenado (2, 4) y (-10, 20) Caracterizar a todos los números enteros x, y y z que satisfacen la ecuación $x^2+y^2=z^2$ La ecuación $x^2+y^2=z^2$ se relaciona con determinar qué características poseen las matrices que satisfacen tal ecuación.	No aplica

	Nivel	Tipo de problemas	Puntaje
	Representación metafórica	 	
	Histórico cultural.	Desarrollo histórico epistemológico. Contexto en el que se desarrolla el teorema, otros aportes de Pitágoras, qué problemáticas solucionó Pitágoras con su descubrimiento. Influencia de Pitágoras en el pensamiento griego.	

Fuente: Elaboración propia con base en Usinski (2012) y OCDE (2012)

3.5 El ambiente de aprendizaje desde el enfoque de aprendizaje con entendimiento

Los problemas y el papel del profesor en el aula son dimensiones que, conectadas, favorecen el desarrollo de entendimiento. Además de estos elementos, Hiebert sostiene que el salón de clases es un sistema, compuesto de elementos individuales trabajando en conjunto. Esto significa que la instrucción es algo más que la suma de las partes. Los elementos interactúan unos con otros. Estos son a) la cultura social, b) la naturaleza y tipo de las tareas de aprendizaje, c) la equidad y accesibilidad de las matemáticas para cada estudiante, d) los roles del profesor, e) el tipo de herramientas matemáticas y f) la evaluación.

3.5.1 Cultura social

La cultura social del aula constituye una comunidad de aprendizaje en la que los estudiantes tienen oportunidades para pensar y razonar acerca de conceptos o ideas matemáticas relevantes, comunicar resultados y justificarlos con base en argumentos matemáticos (Barrera y Reyes, 2013). En esta comunidad la interacción y comunicación entre sus miembros no es opcional, es esencial para construir aprendizaje con entendimiento.

3.5.2 La naturaleza y tipo de las tareas de aprendizaje

De acuerdo con Hiebert et al. (1997) son actividades que permiten a los estudiantes diseñar sus propios procedimientos de solución, en base a los recursos o conocimientos previos que poseen. Los problemas deben ser auténticos en el sentido de que tienen que representar un reto intelectual, más que solo a nivel memorístico o algorítmico.

3.5.3 Equidad y accesibilidad

La dimensión de la equidad y accesibilidad considera el hecho de que cada persona es única y tiene el derecho y la capacidad para entender conceptos matemáticos. Por ello, los problemas o tareas deben de ser accesibles para todos los estudiantes (Barrera y Reyes, 2013). El profesor debe crear oportunidades de aprendizaje para sus estudiantes, debe ser atento y analizar las ideas expresadas en el aula.

3.5.4 Rol del profesor

En cuanto al rol del profesor, su desempeño es esencial para desarrollar conocimiento matemático en los estudiantes. Una de las principales actividades es el diseñar, rediseñar y seleccionar problemas que den sentido al saber matemático, creando condiciones para que se involucren, grupal o individualmente, en actividades matemáticas de resolución, comunicación, reflexión y validación de soluciones.

3.5.4.1 Entendimiento de las matemáticas desde la perspectiva del profesor

Finalmente es importante considerar las cualidades del profesor de matemáticas en cuanto a la propiciación del desarrollo de entendimiento en sus estudiantes. Para Usinski (2012), un profesor de matemáticas debe ser un “matemático aplicado” en el sentido de que tiene que tener mayor comprensión de las matemáticas de lo que sus estudiantes necesitan. Un profesor tiene que tener en cuenta a los estudiantes, las aulas, los materiales didácticos y las necesidades de explicar, motivar y reaccionar.

En el caso del bachillerato en México, un profesor debe cumplir con un perfil para el ingreso a las funciones docentes (SEP, 2014). Las cinco dimensiones que evalúan son:

a) Domina y estructura los saberes para facilitar experiencias de aprendizaje significativo.
b) Planifica los procesos de enseñanza y de aprendizaje atendiendo al enfoque por competencias, y los ubica en contextos disciplinares, curriculares y sociales amplios.
c) Evalúa los procesos de enseñanza y aprendizaje con un enfoque formativo.
d) Organiza su formación continua a lo largo de su trayectoria profesional.
e) Lleva a la práctica procesos de enseñanza y aprendizaje de manera efectiva, creativa e innovadora a su contexto institucional.

Para el ingreso al ciclo escolar 2014 – 2015 la subsecretaria de educación media superior establece que en total las 5 dimensiones contienen 36 indicadores, de los cuales 29 se miden por medio de exámenes, 2 por medio de rúbricas y 5 no son calificadas. En el periodo actual 2016 – 2017 ya no se especifica que las dimensiones mencionadas deban evaluarse por medio de un examen, sino que el documento "tiene por objeto establecer un referente para la evaluación de las habilidades que deberán presentar los aspirantes a ingresar al servicio público educativo en las instituciones que imparten educación de tipo medio superior y operan en el Sistema Nacional de Bachillerato" (SEP, 2016, p. 4).

Para el caso de docentes de matemáticas, en el perfil disciplinar de ingreso en el periodo 2016 - 2017 se establece que el docente debe conocer el uso de los lenguajes algebraicos y variables en el planteamiento y la resolución de ecuaciones en diferentes contextos. También debe reconocer los elementos de las figuras geométricas, las funciones trigonométricas y su aplicación en diferentes contextos así como la importancia del sistema coordenado en la interpretación de lugares geométricos a través de métodos analíticos y gráficos. Asimismo debe tener conocimientos de precálculo y los conceptos de función, límites y derivadas y conocimientos de estadística descriptiva contextualizándolos en diversas situaciones del entorno social. Finalmente, debe poseer conocimientos en la aplicación de funciones trascendentes en diferentes contextos.

Desde el aprendizaje con entendimiento y el modelo por competencias aquí definido en el presente marco teórico algunas tareas o cualidades identificadas por Ball y Bass (2005 en Usinsky, 2012) del Instituto de investigación en Ciencias en Matemáticas en Berkeley que debe poseer un profesor para desarrollar entendimiento en sus estudiantes son las siguientes:

a) Conocimiento de contenidos pedagógicos:
    - Diseñar y preparar una lección
    - Analizar los errores de los estudiantes
    - Explicar y representar nuevas ideas a los estudiantes
    - Responder a las preguntas que los estudiantes tienen acerca de lo que están aprendiendo
b) Aplicación de la comprensión de los conceptos matemáticos.

    Análisis de conceptos:

    - Involucrar a los estudiantes en distintas pruebas
    - Elegir y comparar diferentes representaciones para una determinada procedimiento o concepto matemático
    - Elegir y usar definiciones matemáticas
    - Explicar por qué surgieron conceptos y cómo han cambiado con el tiempo
    - Trabajar con la amplia gama de aplicaciones de las ideas matemáticas que se enseñan
c) Entendimiento de los problemas y la resolución de problemas

    Análisis del problema:

- Examinando los diferentes métodos de solución de los estudiantes
- Comprometer a los estudiantes en la resolución de problemas
- Discutir maneras alternativas de abordar problemas con y sin calculadora y tecnología computacional
- Ofrecer extensiones y generalizaciones de problemas.

d) La integración de las tres dimensiones anteriores

Conexiones y generalizaciones a otras áreas de la matemática:

- Comparar diferentes tratamientos que ofrecen los libros de texto de un procedimiento matemático o tema extendiendo y generalizando propiedades y argumentos matemáticos.
- Explicar cómo las ideas estudiadas en la escuela se relacionan con las ideas que los estudiantes pueden encontrar o han encontrado estudiando en otras áreas de la matemática.
- Darse cuenta de las implicaciones para el aprendizaje de los estudiantes el pasar demasiado poco o demasiado tiempo sobre un tema dado.
- Está claro que los maestros necesitan entendimientos que van mucho más allá de los de los estudiantes.

Estas características sitúan el rol del profesor, tanto en el enfoque por competencias como en el de aprendizaje con entendimiento, como fundamental en el desarrollo de una variedad de capacidades relacionadas con la pedagogía, como son la adquisición de conceptos, el diseño de problemas y la creación de conexiones y generalizaciones de lo que se hace en el aula para que sus estudiantes desarrollen entendimiento matemático.

En lo que se refiere al modelo por competencias, su evaluación ha tenido poca claridad en el sistema educativo mexicano (Moreno, 2016) y, con ello, dificultades para aplicar en el salón de clases. Sin embargo, se considera que, siendo el profesor fundamental en este proceso son múltiples las competencias que un profesor debe desarrollar durante su formación.

Para Hiebert, Morris y Glass (2003) la intención de un programa de formación de profesores de matemáticas es ser matemáticamente proeficiente, esto es, conseguir integrar y adquirir de manera simultánea cinco tipos de competencias matemáticas: el entendimiento conceptual (comprensión matemática de conceptos, operaciones y relaciones), la fluidez procedimental (habilidad adaptar procedimientos en forma flexible, apropiada y eficientemente), la competencia estratégica (habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos), el razonamiento adaptativo (capacidad para el pensamiento lógico, reflexivo, expresar ideas y justificar) y la disposición productiva (inclinación para ver a las matemáticas como útiles, con valor.

Finalmente, teniendo en cuenta el objetivo de analizar cómo el profesor construye un ambiente de aprendizaje en el aula, se pretende recalcar que si un examen, como el de las pruebas masivas, no es suficiente para dar a conocer el entendimiento de los estudiantes y el nivel de competencias, tampoco lo es para evaluar a los profesores en sus conocimientos disciplinares y su actuar en el aula, para su ingreso, permanencia y promoción.

3.5.5 Tipo de herramientas

El tipo de herramientas matemáticas son el medio a través del cual los estudiantes pueden pensar y reflexionar acerca de los objetos o ideas relevantes en la disciplina (Barrera y Reyes, 2013). Las herramientas no se limitan a objetos físicos sino que son también cognitivas. El tipo de estrategias y formas de pensamiento que se desarrolla al enfrentar un problema o tarea depende de las herramientas que se utilicen.

3.5.6 Evaluación

Si los problemas junto con las demás dimensiones del ambiente de aprendizaje son los medios por los cuales el profesor va a tener cierto grado de certeza acerca de si los estudiantes entienden, entonces, ¿qué características de los problemas o tareas de aprendizaje deben considerarse para la evaluación? El modelo de aprendizaje con entendimiento considera los siguientes elementos de acuerdo con Eisner (2002):

a) Las tareas para evaluar qué saben y pueden hacer los estudiantes deben reflejar las tareas con que se encontrarán en un futuro fuera de las escuelas y no solo las limitadas al ámbito escolar.
b) Las tareas para evaluar a los alumnos deben revelar cómo proceden a resolver un problema, y no solo a las soluciones que plantean.
c) Las tareas deben reflejar los valores de la comunidad intelectual de la que provienen. Es decir, se deben crear tareas que den a los alumnos la oportunidad de demostrar su comprensión de aspectos esenciales y conectados de las ideas que poseen.
d) Las tareas no deben limitarse al trabajo individual.
e) Se debe permitir que algunas de las tareas tengan más de una solución con el fin de que los alumnos reconozcan modos alternativos de respuesta.
f) Las tareas deben permitir la construcción y uso flexible de herramientas. Además de conocer la adaptación creativa de herramientas en otros contextos o tipos de problemas.
g) Las tareas deben requerir que los estudiantes perciban totalidades y no elementos aislados.
h) A diferencia de lo que se pretende lograr con el aprendizaje por medio de las competencias, el estudiante selecciona una forma de representación que quiera utilizar como demostración de lo que ha aprendido. Aquí ya no se impone "el alumno es capaz de" sino "el alumno determina de qué es capaz y por medio de qué".

Por lo mencionado anteriormente "el objetivo de la instrucción matemática es que los estudiantes sean capaces de plantear problemas nuevos y resolverlos mediante la aplicación de conocimientos previos, que den significado a los conceptos, que encuentren sentido a las justificaciones y comuniquen resultados, pero todo lo anterior no puede valorarse mediante una prueba escrita" (Grimison, 1992; Watt, 2005 en Barrera y Reyes 2013).

Ninguna de las anteriores dimensiones por sí mismas puede mejorar la construcción de entendimiento por parte de los estudiantes. Todas trabajan juntas, como una sola e indivisible, de manera que todo salón de clases debe analizarse desde estas dimensiones (Hiebert, 1997).

3.5.6.1 Evaluación de los procesos cognitivos en la construcción de significados

Otro elemento esencial consiste en considerar las herramientas cognitivas que construyen los estudiantes a la hora de resolver problemas. Esto es algo de lo que hasta el momento las pruebas masivas no han podido dar cuenta, de dichos procesos de pensamiento de los estudiantes. Este hecho puede mostrarse cuando se afirma que el diseño de problemas debe de estar contextuado, a lo que Flores (2005) señala que el entendimiento, en la relación algoritmo- problema, no es suficiente que la tarea problemática se enseñe en contexto con la vida real, sino que también interviene significativamente la construcción de significado del estudiante.

La construcción de significado a las herramientas matemáticas por parte de los estudiantes es una actividad poco promovida por el profesor en el aula de matemáticas (Cortes, Blackhorff, y Organista, 2004) Los alumnos difícilmente tienen experiencias distintas que no sean las de memorizar y aplicar un solo procedimiento, llegando a niveles superiores mostrando escasas estrategias para resolver problemas.

El entendimiento y las competencias poseen relación en cuanto a considerar las conexiones entre conceptos para desarrollar niveles superiores de competencia o entendimiento. Ambos enfoques consideran la importancia de los problemas en el desarrollo de los estudiantes, pero sigue siendo cuestionable en qué medida una prueba masiva puede evaluar entendimiento matemático de los estudiantes o su capacidad de resolver problemas no rutinarios.

3.6 Ambientes favorables para el aprendizaje en el aula de matemáticas en el enfoque por competencias.

El ambiente de aprendizaje de acuerdo con PISA mide cuatro categorías, el sistema, la escuela, las clases y el estudiante (Baker & Brown, 1984, en Richards, 2005), Travers y Westbury (1989 en Vidal, Díaz y Noyola, 2012).

A través del cuestionario de contexto se intenta obtener información acerca de:

a) Las prácticas del personal docente.
b) El contexto del aprendizaje, el tamaño de las clases.
c) Las estrategias de aprendizaje autorregulado, las preferencias motivacionales y la orientación hacia la consecución de los propios fines, los mecanismos cognitivos del yo, las estrategias de control de la acción, las preferencias por determinados tipos de situaciones de aprendizaje, los métodos de aprendizaje.

Desde la perspectiva de las pruebas a gran escala por parte de PISA (2012), el ambiente en el aula que influye en el desarrollo de competencias matemáticas es diseñado y valorado en términos cuantitativos a través de preguntas a los estudiantes acerca de sus percepciones. Como se ha mencionado previamente, las categorías sobre el ambiente en el aula consideradas por PISA son seis: actitudes de los estudiantes y estrategias de aprendizaje, el entorno de aprendizaje, el tiempo de aprendizaje y trabajo en curso, el clima de clase y la evaluación por parte de los profesores. Sin embargo, para México no existen datos acerca del tiempo de aprendizaje y trabajo en curso, de manera que solo se tienen datos sobre 5 categorías del ambiente, las cuales se detallan a continuación en la Tabla 4, describiendo la subcategoría y el indicador por medio del cual se intenta medir.

Tabla 4 Categorías e indicadores del ambiente de aprendizaje de acuerdo con la OCDE (2012)

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍA	INDICADOR
1. Actitudes de los estudiantes y		Comportamiento de los maestros: enseñanza dirigida por el maestro

Estrategias de aprendizaje	Experiencias de educación en matemáticas	
		Comportamiento de los maestros: perspectiva del estudiante
		Índice de activación cognitiva en las lecciones de matemáticas
2. Entorno de aprendizaje	Apoyo del maestro para aprender matemáticas	Apoyo que dan los maestros
		Índice del apoyo de los maestros al aprendizaje de matemáticas
3. Tiempo de Aprendizaje y Trabajo de Curso	Tiempo de aprendizaje EN centro educativo - Matemáticas	Tiempo de enseñanza: Cursos de matemáticas
		Min en [periodo de clase] para [matemáticas]
		Número periodos de clase en matemáticas
	Comportamiento de Matemáticas y Resolución de Problemas	Índice de comportamiento matemático.
	La Familiaridad con Conceptos Matemáticos	Índice de la experiencia con los ejercicios de la matemática aplicada y matemática pura en la escuela.
		Índice de la familiaridad con los conceptos matemáticos
4. Clima del centro educativo y clase	Relaciones estudiante-profesor (según informe de estudiantes)	Índice relaciones profesor-alumno
	Clima de la clase (según informe de estudiantes)	Índice del manejo de la clase de los maestros de matemáticas.
		Índice de clima disciplinario en lecciones de matemática
5. Evaluaciones del estudiante	Evaluación de estudiantes	Evaluación formativa: Hace comentarios
		Evaluación formativa: Hace comentarios sobre los puntos buenos y los que necesitan reforzarse.
		Evaluación formativa: Habla sobre las expectativas de la clase
		Evaluación formativa: Comenta sobre como progresar
		Prueba estandarizada
		Prueba del profesor
		Calificaciones del profesor
		Portafolios de estudiantes
		Asignaciones de estudiantes

Fuente: OCDE (2012)

Con respecto a los factores del ambiente de aprendizaje que contempla PISA, Edmonds (1982, en INEE, 2008) identifica los factores en el aula, que interrelacionados influyen en el aprendizaje de los estudiantes. Estos son: las altas expectativas de los docentes sobre el logro académico de sus alumnos, la creación de un ambiente socialmente propicio para el aprendizaje, la existencia de un sistema de evaluación y un control del rendimiento, el uso adecuado del tiempo por parte de los docentes y la enseñanza efectiva.

3.6.1 Actitudes de los estudiantes y Estrategias de aprendizaje

De acuerdo con la OCDE (2006),

> las actitudes y los sentimientos que suscitan las matemáticas, como la seguridad en uno mismo, la curiosidad, los sentimientos de interés y relevancia o el deseo de hacer o comprender ciertas cosas, no forman parte de la definición de competencia matemática, aunque ciertamente contribuyen a ella de una forma nada desdeñable. En teoría se puede ser competente en matemáticas sin poseer esas actitudes y sentimientos, pero en la práctica es poco probable que dicha competencia se ejerza o se ponga en práctica si el individuo no posee un cierto grado de seguridad en sí mismo, curiosidad, sentimientos de interés y relevancia o el deseo de realizar y comprender temas de contenido matemático. Aunque estas actitudes y sentimientos no formen parte de la evaluación de la competencia matemática, PISA reconoce la importancia que tienen como correlato de la competencia matemática y, en consecuencia, se abordarán en una parte del estudio PISA (p. 75).

En este apartado se incluyen las expectativas que tiene el profesor de sus estudiantes como un factor que incide en los resultados de aprendizaje (INEE, 2008). La forma de dirigirse hacia ellos, así como su práctica influye en su autoconcepto, su motivación, la interacción con el profesor y sus niveles de aspiración. Estas expectativas se pueden favorecer por medio de políticas que enfaticen la importancia del desempeño de los estudiantes, el establecimiento de metas, la formación de grupos heterogéneos, el monitoreo del aprendizaje, la retroalimentación y el apoyo especial a estudiantes que muestren dificultades en su aprendizaje.

3.6.2 Entorno de aprendizaje

En cuanto a la creación de un ambiente socialmente propicio para el aprendizaje, éste se puede desarrollar siempre que el profesor establezca vínculos de confianza y apoyo o muestre disposición de ayuda debido a que los estudiantes pasan aproximadamente un tercio del día en la escuela durante el periodo escolar. El ambiente de confianza es fundamental para que los estudiantes se comprometan con su propio aprendizaje. El profesor puede crear situaciones interesantes que permitan la reflexión, la experimentación, la identificación y la conexión entre los contenidos y se hagan significativos para ellos. Por tanto, PISA mide la percepción del estudiante sobre el apoyo que le brindan el profesor y los compañeros a la hora de aprender matemáticas.

3.6.3 Tiempo de aprendizaje y trabajo de curso

El tiempo de aprendizaje y trabajo de curso engloba el tiempo que se trabaja matemáticas en clase, la familiaridad con los conceptos matemáticos y el comportamiento en matemáticas y en la resolución de problemas. En esta dimensión la OCDE relaciona la amplia falta de acceso a los conceptos matemáticos con el bajo rendimiento, el que un profesor no ofrezca variedad de problemas o conceptos matemáticos propicia perdida de talento y de oportunidades para los estudiantes. En esta categoría también se incluye la gestión de tiempo en los procesos de enseñanza aprendizaje por parte del profesor.

3.6.4 Clima del centro educativo y clase

La OCDE mide el clima en el aula de matemáticas con índices como el ruido, orden, el tiempo de espera para empezar a trabajar, interrupciones de otros estudiantes, el apoyo del profesor y una buena relación con él.

3.6.5 Evaluaciones

La OCDE mide qué tan frecuentemente los profesores aplican una evaluación formativa en el aula, qué cuántas veces el profesor realiza comentaros sobre el trabajo de los alumnos. En el análisis de 2009 y 2012 PISA suministra un análisis limitado respecto a los elementos que componen la evaluación en el aula por parte del profesor.

3.6.5.1 Niveles de competencia matemática y evaluación del entendimiento

Un elemento del ambiente de aprendizaje afín entre los enfoques por competencias y de aprendizaje con entendimiento es la evaluación. Diversos autores consideran a que esta podría ser la palanca que impulse la transformación de la educación y específicamente de la educación matemática en el aula. Debido a que el tipo de tareas como la guía del profesor son fundamentales en la generación del ambiente de aprendizaje en el aula, a continuación, se desarrollan aspectos que pueden considerarse en la evaluación en el aula de matemáticas.

Actualmente en las aulas se practica una evaluación desde el positivismo, donde para aprender un concepto en matemáticas se tengan que repetir problemas rutinarios decenas de veces aplicando un algoritmo memorizado (Kline, 2014) y aceptado por autoridad del profesor. Posteriormente un examen intenta medir el grado de memorización y capacidad para reproducir dicho algoritmo. Además una evaluación positivista restringe las alternativas de solución o algoritmos a los aceptados por el profesor, porque el método estructurado para la solución del algún problema en la corriente positivista pareciera único.

El positivismo penetró diversas esferas de la sociedad mexicana y fue en la política donde arraigo su filosofía (Zea, 2002). Los pilares filosóficos del curriculum en México han estado construidos principalmente bajo la filosofía positivista, que ha rechazado los principios sobre los que ahora se hace necesario sustentar el aprendizaje por competencias o el aprendizaje con entendimiento. Sin esa base, el modelo por competencias y cualquier otra reforma implementada no tendrá una crítica adecuada por parte de la sociedad para su rechazo, adaptación o implementación en México.

Desde esta perspectiva del entendimiento, más allá de la mirada del positivismo, los problemas que se abordan en clase son fundamentales para desarrollar el pensamiento matemático.

Para PISA el entendimiento se queda en un nivel abstracto, como un conocimiento que hace falta aplicar, mientras que desde los teóricos del entendimiento éste posee ya una relación inseparable con lo práctico. Además, según PISA la adquisición de una competencia equivale a un entendimiento o comprensión aplicado. Este hecho lo corroboran algunas pruebas liberadas de PISA recogidas en exámenes anteriores donde puede encontrarse que la intencionalidad de algunas preguntas sobre situaciones problemáticas básicas es “demostrar la comprensión de conceptos sobre…” (PISA, 2012, p.12), mientras que, para preguntas más complejas, la intención es aplicar los conceptos que se han comprendido.

Otros autores han construido un enfoque distinto al de la evaluación por competencias de PISA, y muestran que la comprensión o entendimiento es el fin último del modelo por competencias y no al contrario, donde los conceptos son construidos en un ambiente favorable con relación a situaciones problemáticas reales sin separar lo abstracto de lo concreto, lo conceptual de lo práctico. Moreno (2016) identifica que “una enseñanza que se sustenta en el enfoque por competencias necesariamente será una enseñanza para la comprensión” (p. 250). En este sentido Pérez Gómez (2007) identifica una serie de principios pedagógicos que sustentan el aprendizaje por competencias, y dado que la comprensión dependerá de conocer previamente aspectos tales como los siguientes:

a) La pretensión central del dispositivo escolar no es transmitir informaciones y conocimientos, sino provocar el desarrollo de competencias.
b) El objetivo de los procesos de enseñanza no ha de ser que los alumnos aprendan las disciplinas, sino que reconstruyan sus esquemas de pensamiento.
c) Generar aprendizaje relevante de las competencias requiere implicar activamente al alumno en procesos de búsqueda, estudio, experimentación, reflexión, aplicación y comunicación del conocimiento.
d) El desarrollo de las competencias requiere enfocarse en situaciones reales y proponer actividades auténticas. Vincular el conocimiento a los problemas importantes de la vida cotidiana.

e) La organización espacial y temporal de los contextos escolares ha de contemplar la flexibilidad y creatividad requerida por la naturaleza de las tareas auténticas y por las exigencias de vinculación con el entorno social.
f) Aprender en situaciones de incertidumbre y en procesos permanentes de cambio es una condición para el desarrollo de competencias básicas y para aprender a aprender.
g) La estrategia didáctica más relevante consiste en la preparación de entornos de aprendizaje caracterizados por el intercambio y vivencia de la cultura más viva y elaborada.
h) El aprendizaje relevante demanda estimular la metacognición de cada alumno, su capacidad para comprender y gobernar su propio y singular proceso de aprender y de aprender a aprender.
i) La cooperación entre iguales es una estrategia didáctica fundamental. La cooperación requiere el diálogo, el debate y la discrepancia, el respeto a las diferencias, saber escuchar, enriquecerse con las aportaciones ajenas y tener la generosidad suficiente para ofrecer lo mejor de sí mismo.
j) El desarrollo de las competencias exige proporcionar un entorno seguro y cálido en el que el aprendiz se sienta libre y confiado para probar, equivocarse, realimentar, y volver a probar
k) La evaluación educativa del rendimiento de los alumnos ha de entenderse básicamente como evaluación formativa, para facilitar el desarrollo en cada individuo de sus competencias de comprensión y actuación.
l) La función del docente para el desarrollo de competencias puede concebirse como la tutorización del aprendizaje de los alumnos, lo que implica diseñar, evaluar y reconducir sus procesos de aprendizaje.

Para la OCDE es relevante conocer la forma en que el profesor evalúa en clase. La existencia de un sistema de evaluación y un control del rendimiento también es un factor importante, con el fin de conocer el avance individual con respecto a los objetivos y el modelo educativo del centro escolar y de esta forma identificar puntos de mejora, así como prácticas exitosas en el cumplimiento de objetivos. Para ello se requiere ir más allá de lo realizado por PISA. Si la enseñanza por competencias es una enseñanza para la comprensión o entendimiento, la evaluación tiene que ser congruente con los principios expresados anteriormente por Pérez Gómez (2007) donde se pasaría de evaluar el aprendizaje a evaluar para el aprendizaje, dado que un proyecto que sea más abierto, flexible, comprensivo e integral "conduce a pensar en un paradigma de evaluación cualitativo antes que cuantitativo, lo cual no significa que no pueda recurrir a técnicas e instrumentos que aporten datos cuantitativos para la integración de los datos" (Moreno, 2016, p. 250).

Esto lleva a cuestionarse cuáles serían los instrumentos o métodos más adecuados acordes a esta perspectiva de las competencias. Moreno (2016) recopila y analiza una serie de instrumentos y métodos que, contextualizados adecuadamente, podrían ayudar a tomar decisiones orientadas hacia el cómo evaluar para el aprendizaje.

De esta manera el primer elemento a considerar es el que corresponde a las notas de clase o apuntes del alumno, con la intención de que el estudiante organice la información del contenido temático de acuerdo con su estructura cognitiva y que no solo repita el orden establecido por el profesor. El orden puede estructurarse conforme el alumno crea adecuado para explicar el contenido a otros. Además, los apuntes no deben recoger únicamente el contenido establecido en el programa, sino que pueden ampliarse con información complementaria para finalmente ser analizada y trabajada con preguntas o argumentos.

Otro elemento sería la formulación de preguntas o reflexiones de los alumnos. En un primer nivel el alumno puede responder preguntas cuya respuesta solo requiera tener acceso a la información. En otro nivel puede considerarse el uso de inferencias que los alumnos formulen a partir de dicha información. En un nivel superior los alumnos dan muestra de tener un conocimiento profundo, realizando inferencias y estableciendo conexiones con otras situaciones, conocimientos y experiencias.

La resolución de problemas constituye otra fuente rica para la evaluación. Se trata de que el alumno se inserte en una situación que éste identifique como problemática, que signifique un reto para él y que llame su atención. Se debe permitir la búsqueda de información en diversos medios para así disponer de diversos criterios de solución y finalmente valorar el proceso de solución.

El profesor puede utilizar la escritura como herramienta para el aprendizaje y de evaluación en casi cualquier actividad, como problematizar, defender alguna postura, iniciarse en algún tema, entre otras. Estos escritos pueden ser revisados y enriquecidos por los estudiantes.

3.7 El tránsito entre la aritmética y el álgebra. Una perspectiva histórico - epistemológica

En lo que respecta a la historia de la matemática, ésta permite conocer el surgimiento y evolución de los conceptos, ideas y bajo qué contextos, espacios y tiempos se originaron, además de las dificultades, los métodos y técnicas que se utilizaban para resolver los problemas. Es decir, la historia permite aproximarse a la matemática no como procesos ya terminados sino como procesos históricamente gestados (Cañón, 1993). De manera que, debido a la complejidad que implica realizar una investigación de tipo histórica, se retoman algunos elementos esenciales del álgebra en la historia de las ideas matemáticas. En este sentido, la historia de la matemática puede guiar en la tarea de revivir aproximadamente las mismas dificultades que enfrenta una persona en un contexto escolar (Kline, 2014). En este caso se aborda el surgimiento del álgebra como un proceso esencial en el desarrollo cognitivo de un estudiante, es el tránsito entre lo concreto y lo abstracto.

Con respecto a la epistemología, es una disciplina que pretende el análisis de los fundamentos de la ciencia (Gutiérrez, 2006), estudia críticamente los principios del algún conocimiento científico para determinar su origen y estructura. De manera que no sólo se realiza una revisión del desarrollo del álgebra en la historia de la matemática, sino además se realiza un análisis de algunos aportes conceptuales que fueron conformando al álgebra como un área fundamental en el plan de estudios de educación básica.

Algunos estudios (Cañón, 1993; González, 2004; Kline, 2014) han señalado la importancia que posee la historia y la epistemología en la enseñanza de la matemática. Por ejemplo, a través de los distintos niveles escolares los estudiantes van enfrentando ciertas dificultades en el aprendizaje de los conceptos en matemáticas. Dichas dificultades se asemejan a las etapas que la humanidad enfrentó, a través de los siglos, para superar los obstáculos que impedían comprenderlos. "…cada persona debe pasar aproximadamente por las mismas experiencias por las que pasaron sus antepasados si se quiere alcanzar el nivel de pensamiento que muchas generaciones han alcanzado,… No se puede dudar de que las dificultades que los grandes matemáticos encontraron son también los obstáculos en los que tropiezan los estudiantes…" (Kline, 2014, p.48-49).

Un ejemplo de la afirmación anterior es cuando, a través de los distintos grados escolares se estudia el concepto de número, primeramente los naturales, pasando por los enteros, racionales e irracionales. Durante este proceso el estudiante se va enfrentando a obstáculos como es el aplicar ciertas formas de pensar que son válidas para las operaciones con determinados tipos de números hacia otros contextos. Por ejemplo, en los números naturales un estudiante puede pensar que el resultado de multiplicar dos números da como resultado un número más grande, pero en los números racionales el razonamiento anterior no puede aplicarse para las fracciones propias. Es importante señalar que para que fueran aceptados los números negativos o los irracionales como parte de los números tuvieron que pasar varios siglos.

En lo que respecta al álgebra, ésta constituye un tránsito complicado para los estudiantes que pasan a nivel secundaria. Por ejemplo, en el curriculum de secundaria, para referirse a la función lineal no se hace un rescate de saberes previos como semejanza o factor constante (Ramírez, Block, 2009), que son necesarios para su comprensión. El curriculum en secundaria podría articular los conocimientos de nivel primaria en temas de álgebra, lo mismo que para bachillerato.

Lo anterior pone a discusión si el estudiante puede reproducir en su mente aquellos procesos mentales que llevaron a cabo quienes aportaron conocimiento al desarrollo de la matemática, todo esto en un periodo de tiempo acorde con su trayectoria escolar. Estas dificultades de los estudiantes deben ser no sólo conocidas por el profesor, sino que éste debe poseer sólidos conocimientos disciplinares y didácticos para poder enfrentarlos. De esta forma, el curriculum y la formación de profesores son problemáticas que están presentes en la enseñanza del álgebra y en general de las matemáticas.

Los primeros indicios del álgebra con Herón y Diofanto en Grecia muestran que esta área era independiente de la geometría, y que resolvían problemas algebraicos con procedimientos aritméticos. Más adelante, alrededor del año 1300, el álgebra fue relacionándose cada vez más a la geometría, principalmente por el hecho de aceptar como número a los irracionales y por el trabajo de la resolución de ecuaciones que fue justificando la necesidad de una representación geométrica. Esta unión entre álgebra y geometría se consolidó más adelante en la geometría analítica (Kline, 1972).

Entre los siglos IX y XII, Bagdad era el centro intelectual más importante de la época, los árabes no sólo tenían una gran admiración por la matemática griega, sino que poseían muchos de sus trabajos (Boyer, 2011). Por una parte, tras el cierre de la academia de Platón en el siglo VI la mayoría de sus estudiantes se trasladaron a Persia. Por otra parte, la conquista de Egipto por parte de los árabes en el siglo VII y el control de monasterios cristianos en donde sobrevivieron manuscritos después de la destrucción de Alejandría, estos hechos pusieron a los árabes en control de la ciencia y el arte de la época (Kline, 1972).

De esta manera se empezó a dar un tratamiento algebraico a la obra aritmética y geométrica de los griegos como la teoría de proporciones de Euclides por parte de Omar Khayyam (1050 - 1123) y Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi (780 – 850) quienes además comenzaron a trabajar con las ecuaciones lineales (Boyer, 2011). Los árabes definieron el termino álgebra, que etimológicamente quiere decir restaurar. Aplicaron este término como “restaurar el equilibrio” a una ecuación algebraica, por ejemplo, se trataba de equilibrar $x^2 - 9 = 7$, es decir, encontrar el valor de x de manera que se equilibre la ecuación. Se hablaba también de simplificación, por ejemplo, $7x + 2x$ se podía expresar como $9x$.

Un elemento que al que se enfrentaron los árabes fueron las soluciones incompletas a ciertos tipos de ecuaciones de segundo grado que resultaban en la raíz cuadrada de un numero negativo. Se decía que no tenían solución ya que no podía existir un cuadrado con área negativa. Esto fue contestado varios siglos después y se conoció como el teorema fundamental del álgebra.

De acuerdo con el desarrollo conceptual del entendimiento, epistemología y reconstrucción histórica, el teorema fundamental del álgebra debe de resinificarse en la mente de los estudiantes. En tal caso, la primera prueba que ofreció Gauss en 1799 a los 21 años de edad es prácticamente desconocida para los estudiantes y profesores de bachillerato. Este trabajo constituye un pilar conceptual fundamental en el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

CAPÍTULO IV. Metodología

De acuerdo con el planteamiento del problema, el ambiente que construye el profesor en el aula no puede considerarse desde una sola dimensión. Por su parte, considerar solamente el entendimiento de los estudiantes desde la perspectiva de los resultados de un examen estandarizado puede limitar el desempeño del profesor para diseñar, rediseñar y seleccionar problemas que den sentido al saber matemático. En el presente apartado se define una estrategia metodológica para el análisis del ambiente que construye el profesor en el aula de matemáticas, la identificación de los niveles de entendimiento que adquieren los estudiantes con respecto a algunos conocimientos algebraicos, así como el análisis de la relación entre ambos. Para tal propósito se realiza un análisis contextual de los principales diseños metodológicos utilizados en investigaciones sobre entendimiento matemático y ambientes de aprendizaje y que marcan tendencia en la actualidad. A partir de estos se diseña una metodología apropiada para la presente investigación.

Son tres diseños de investigación e interpretación de datos en aprendizaje con entendimiento que han destacado por su aportación al campo de la matemática educativa (Hiebert y Grouws, 2007). El primero es la comparación entre los efectos de diferentes tipos de instrucción. Estos tienen la característica de ser cuasi experimentales, donde se controlan algunas variables y se estudian las diferencias de los efectos que esas variables inciden entre uno y otro grupo. Una de las ventajas de estos estudios comparativos es que se llevan a cabo en aulas en estado natural con las complejidades cotidianas. Entre las desventajas cabe destacar que los diseños son difíciles de controlar, además de que a pesar de estar en un ambiente realista el método no puede ser replicable en todos los entornos de igual forma, dado que las condiciones en el aula son diversas, al igual que los estudiantes, que influyen en la manera en que se implementan los métodos y como consecuencia, en los resultados del aprendizaje.

El segundo diseño se centra en la correlación de las características de la enseñanza con el aprendizaje de los estudiantes (Hiebert y Grouws, 2007). Este enfoque cuantitativo es habitual para relacionar enseñanza y aprendizaje. Se miden características específicas de la enseñanza, por un lado, y por otro se cuentan las frecuencias de comportamientos de los profesores con la finalidad de establecer correlaciones entre estas dos variables. Entre las ventajas de este diseño están la capacidad de clasificar las características de la enseñanza que puedan ser facilitadores clave del aprendizaje, además de que son útiles en la creación de mapas iniciales del terreno cuando existen pocas hipótesis acerca de las características de enseñanza que puedan facilitar determinados tipos de aprendizaje. Su principal desventaja es el supuesto de que la enseñanza es una colección de características individuales que pueden medirse independientemente de su relación con el contexto. Esta suposición puede llevar a realizar recomendaciones simplistas enfocadas en el número de veces que un profesor hace o deja de hacer en su práctica educativa como, por ejemplo, la recomendación de que “el profesor debe diseñar más problemas para sus estudiantes”.

La tercera perspectiva metodológica es el equilibrio de los beneficios de estudios cualitativos a pequeña escala y estudios cuantitativos a gran escala. Ante la actual tendencia por parte de organismos internacionales como la OCDE a través de PISA de medir causas y efectos entre la enseñanza y aprendizaje, Hiebert y Grouws (2007) defienden la postura de que los métodos cualitativos también proporcionan evidencia científica en educación matemática y defienden un diseño que combine los estudios cuantitativos a gran escala con los estudios cualitativos a pequeña escala, ya que ambos pueden hacer avanzar en la comprensión de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. Al respecto “los estudios cualitativos a menor escala pueden proporcionar datos que profundicen nuestra comprensión de cómo los sistemas de enseñanza funcionan para facilitar el aprendizaje” (Maxwell, 2004, en Hiebert y Grouws, 2007).

Los estudios cualitativos en pequeña escala pueden identificar efectos específicos de la enseñanza, así como detectar características de enseñanza que facilitan determinados aprendizajes. Proporcionan información más amplia sobre las relaciones enseñanza -aprendizaje.

En la presente investigación se destaca el trabajo en un aula desarrollado de forma natural con las complejidades habituales. Esto se corresponde con el primer diseño metodológico, pero sin incorporar la manipulación de variables ya que se requeriría más tiempo del destinado a esta investigación para la capacitación del profesor, además de que no forma parte del objetivo que se pretende. Del segundo enfoque se retoma el análisis de la relación entre ciertos elementos de la enseñanza como el ambiente de aprendizaje con los niveles de entendimiento de los estudiantes. Sin embargo, esta relación no pretende analizarse de forma cuantitativa sino cualitativa. Del tercer enfoque metodológico se toma el estudio cualitativo a pequeña escala, con el fin de analizar más detalladamente características específicas de la enseñanza que son esenciales para desarrollar ciertos aprendizajes. En resumen, las necesidades de la investigación se centran en un contexto real, no manipulado por variables, así como en una relación cualitativa entre enseñanza y aprendizaje en pequeña escala.

También es importante destacar que un requisito indispensable en investigaciones sobre la comprensión matemática es proporcionar conocimiento que permita el avance del área de forma significativa mediante la descripción de la realidad comprensiva de los sujetos, es decir, investigaciones que incluyan desarrollos teóricos sólidos conectados con estudios empíricos. Un modelo de entendimiento matemático debe contener tanto características descriptivas como prescriptivas para garantizar su utilidad y efectividad en educación matemática (Koyama, 1993). Cabe agregar que, de acuerdo con Gallardo y González (2007), "toda aproximación en torno a la comprensión del conocimiento matemático resultante de una investigación de calidad tendría que ser, en lo posible, integradora" (p.4).

4.1 Tipo de estudio

El proceso de análisis sobre la forma en que se relaciona el ambiente de aprendizaje propiciado por el profesor con el entendimiento construido por los estudiantes en la clase de álgebra en primer semestre de bachillerato requiere de una aproximación metodológica cualitativa. La presente investigación es de enfoque indirecto, que a diferencia de los estudios de enfoque directo no pretende buscar la comprensión del conocimiento matemático desde una perspectiva amplia y profunda de un solo concepto matemático, centrándose el interés en el estudio de aspectos como su naturaleza, funcionamiento, evolución o valoración en un estudiante. Sin embargo, como identifican Gallardo y González, en los estudios de enfoque indirecto en aprendizaje con entendimiento "se sitúan aquellos trabajos preocupados por el desarrollo de la comprensión matemática y por la gestión externa de los efectos que produce. En él se incluyen los estudios curriculares o propuestas de carácter reformista, preocupados por defender argumentos y aportar sugerencias acerca de cómo enseñar y aprender matemáticas con comprensión" (2010, p, 23).

Por tanto, se caracterizará la comprensión matemática de distintos temas algebraicos en un grupo de estudiantes de primer semestre de bachillerato y su relación con aquellas posibles dimensiones del ambiente generado por el profesor, para finalmente poder aportar sugerencias o propuestas de cómo aprender matemáticas con entendimiento.

Se plantea un estudio instrumental de caso. Esto viene dado por la necesidad de una comprensión más general, teniendo en cuenta que es posible entender la cuestión mediante el estudio de casos particulares. Se considera que, dados los resultados de distintas pruebas nacionales e internacionales en matemáticas para estudiantes de alrededor de 15 años en México, existen características semejantes tanto en el ambiente de aprendizaje construido por el profesor como en los niveles de entendimiento de los estudiantes, a su vez que se reconocen sus diferencias individuales, contextuales y características únicas como grupo. El resultado del estudio de estos casos seleccionados permitirá, con sus reservas, realizar conjeturas, y a la vez establecer propuestas que podrán adaptarse a su contexto y características específicas.

El estudio de caso "es una metodología especialmente apropiada para analizar problemas de práctica educativa. Los practicantes profesionales emiten juicios en circunstancias concretas y estudian 'de forma natural' los sucesos en acción" (Simons, 2011, p.22). Para tal objetivo es conveniente la elección de dos profesores con sus respectivos grupos de alumnos de primer semestre; así cada estudio de casos es un instrumento para analizar la relación entre el ambiente de aprendizaje y el entendimiento de los estudiantes.

Con respecto a la metodología cualitativa, esta debe estar enfocada al análisis de la forma en que el profesor genera un ambiente que desarrolla ciertos niveles de entendimiento. Esto exige una relación articulada entre las distintas técnicas. Con este propósito se ha seleccionado la observación, la entrevista y análisis documental, dado que estos son tres de los principales instrumentos utilizados en la investigación con estudio de caso cualitativo (Simons, 2011).

4.2 Contexto de la investigación: escenario y participantes

La educación media superior en México se distingue por tener tres modalidades de atención educativa: escolarizada, no escolarizada y mixta. Existen 13 instituciones en el país que imparten educación media superior, y estas a su vez se dividen en 43 tipos de planteles. Existe un total de 16162 planteles y un aproximado de 286955 docentes. Algunas instituciones destacadas en cuanto al porcentaje de planteles y docentes de educación media superior en México se muestra en la Tabla 5.

Tabla 5 Instituciones destacadas en cuanto a planteles y docentes en educación media superior en México.

Institución	Tipo de plantel	Planteles	Docentes
Universidades autónomas	Bachillerato	3.09%	7.9%
Organismos centralizados de los estados	Bachilleratos estatales	11.5%	10.9%
	Telebachilleratos	12.1%	2.9%
Organismos descentralizados de los estados	CoBach	7.2%	9.4%
Coordinadas por la SEMS	DGETI-CBTIS	1.7%	5.3%
	DGETI-CETIS	1%	3.3%

Instituciones particulares	Bachilleratos particulares	30%	29.6%
Otros	Otros (36)	33.5%	30.7%

Elaboración propia con base en datos del INEE 2016.

Los bachilleratos de las universidades autónomas ocupan el octavo lugar en cuanto a número de planteles y el cuarto en cuanto a número de plazas docentes de 43 tipos de planteles en el sistema de Educación Media Superior (EMS) en México. Para el ciclo escolar 2014 – 2015, que son los datos más recientes hasta el año 2017, solo el 18% de docentes de bachillerato en México tenía una dedicación de tiempo completo. El resto tiene tres cuartos de tiempo, medio tiempo y por horas. Por su parte, los docentes de tiempo completo de bachilleratos de las universidades autónomas ocupa el 23%, los de tres cuartos de tiempo 0.5%, de medio tiempo 1.4% y 75.2% está contratado por horas.

El INEE (2015) señala que el 23% de docentes de planteles autónomos son de recién ingreso, mientras que 28 de cada 100 llevan entre 10 y 14 años trabajando en esos sitios. Estas cifras muestran un incremento del número de docentes en los últimos años, al respecto el INEE indica que “los patrones de antigüedad en la educación media superior señalan el ingreso reciente de docentes en todos los subsistemas, probablemente en respuesta a la obligatoriedad de este nivel de estudios, que inició en el ciclo 2012-2013. Lo anterior rompe con el reducido crecimiento del número de docentes en los planteles federales observado en los últimos años, y parece acentuar el crecimiento registrado en los bachilleratos autónomos y privados” (INEE; 2016, p. 45).

La elección de los profesores con sus respectivos grupos de álgebra fue intencional acorde a las necesidades de la investigación. Los datos anteriores constituyeron un criterio para la selección del tipo de institución y profesor. En el caso de la institución se seleccionó el sistema de bachillerato de Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH); esta modalidad ocupa un porcentaje considerable tanto en planteles como en profesores en el sistema de EMS.

Otro de los criterios de selección de los participantes fue el sexo de los docentes. Se seleccionó un hombre y una mujer, debido a que en el sistema de EMS el 52.4% son hombres y el 47.6 %mujeres, en el sistema de bachillerato de universidades autónomas el 56.7% son hombres y 45.3% mujeres (INEE, 2016). Los dos profesores están contratados por horas. A pesar de la falta de datos sobre las características más específicas de los bachilleratos y profesores (INEE, 2013; 2016) como, por ejemplo, datos sobre el perfil profesional de los docentes por asignaturas, entre otras, se ha elegido un ingeniero y un matemático. Este criterio concuerda con fuentes de la institución, que refieren a que los profesores de matemáticas son en su mayoría ingenieros, además de ser los de mayor antigüedad. El licenciado en matemáticas constituye una generación de recién ingreso debido a las reformas de 2012 en EMS que se incluye dentro de la educación básica y la rigurosidad de selección de profesores cada vez más capacitados en la disciplina que imparten, así como el interés de matemáticos por impartir clase en educación básica.

El caso uno (C1) se centra en una profesora con formación en ingeniería Química por el Instituto Tecnológico de Pachuca y maestra en ciencias en matemáticas y su didáctica por la UAEH. Tiene 37 años de edad y 10 años como profesora de matemáticas y química en una escuela preparatoria de la UAEH distinta a donde imparte el profesor del caso 2. Hasta el año anterior impartió clase durante 6 años en un colegio particular en Pachuca en nivel secundaria; impartía física y matemáticas. Su grupo del semestre enero -julio 2017 cuenta con 37 alumnos.

El segundo caso (C2) lo constituye un profesor de recién ingreso a una de las cuatro preparatorias de la UAEH (1 año). Es licenciado en matemáticas aplicadas por la UAEH, tiene 24 años, egresó hace 2 años, cuenta con un año de experiencia en la Universidad Tecnológica Tula Tepeji unidad académica de Chapulhuacán Hidalgo. Ingresó hace un año a una escuela preparatoria de la UAEH en Pachuca Hgo. como profesor de matemáticas. Ha impartido asignaturas de álgebra, trigonometría, cálculo diferencial e integral y geometría analítica. Su grupo de álgebra del semestre enero -julio 2017 cuenta también con 37 alumnos.

4.3 Delimitación conceptual sobre los niveles de entendimiento y los ambientes de aprendizaje.

El aprendizaje con entendimiento y los objetivos por competencias consideran que la comprensión matemática de un estudiante está relacionada con las conexiones que se realizan con conocimientos previos y otros conceptos e ideas matemáticas, el número de conexiones y la robustez de estas dan lugar hacia un conocimiento más profundo. Por su parte su enseñanza está relacionada con el ambiente de aprendizaje enfocado a una comprensión conceptual.

Siguiendo esta línea metodológica, no se identificaron los niveles de entendimiento de los estudiantes con respecto a todo el contenido del programa de algebra, sino que se seleccionaron determinados contenidos que resultaron significativos para su análisis. En otras palabras, un contenido o tema del programa de álgebra está relacionado con distintos conceptos matemáticos. El contenido seleccionado constituyó un caso de análisis para identificar el nivel de comprensión matemática del estudiante mediante el análisis de las conexiones con otros conceptos. Por ejemplo, se incluye el análisis de los siguientes conceptos:

- Igualdad
- Fracciones algebraicas
- Área y perímetro
- Factorización

El análisis de conexiones comprendió las relaciones con conceptos previos y relaciones con otros conceptos matemáticos (álgebra, geometría y aritmética) a partir de tres categorías de análisis en torno a conexiones: entre representaciones, entre conceptos matemáticos y entre aspectos didácticos (Barrera y Reyes, 2017)

4.3.1 Entendimiento de los temas algebraicos

Oficialmente, los temas que se deben abarcar en primer semestre de bachillerato en la asignatura de álgebra son los mostrados en la Tabla 6.

Tabla 6 El programa de álgebra

Unidades	Subtemas
Unidad I. operación con exponentes, monomios y polinomios	1. Álgebra (conceptos básicos) 2. Leyes de exponentes para exponentes enteros 3. Exponentes fraccionarios y racionalización 4. Sumar y restar y polinomios, suma y resta de varios polinomios con coeficientes enteros y fraccionarios 5. Multiplicación de monomios y polinomios 6. División de monomios y polinomios (División sintética) 7. Valor numérico de una expresión algebraica
Unidad II Productos notables	1. Definición de producto notable 2. Clasificación de productos notables 3. Cuadrado de un binomio 4. Producto de binomios conjugados 5. Producto de dos binomios con un término común 6. Teorema del binomio
Unidad III factorización	1. Concepto de factorización 2. Casos de factorización 3. Máximo común divisor aritmético 4. Factorización de polinomios con factor común 5. Factorización de polinomios por agrupación de términos 6. Factorización de binomios de la forma xx+bx+c 7. Factorización del trinomio as de la forma axx+bx+c 8. Factorización de una diferencia de cuadrados 9. Factorización de un trinomio cuadrado perfecto 10. Factorización de una suma y diferencias de cubos
Unidad IV Operaciones con fracciones algebraicas	1. Operaciones con fracciones algebraicas (Conceptos) 2. Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas 3. Simplificación de fracciones algebraicas 4. Suma y resta de fracciones algebraica
Unidad V Igualdades	1. Logaritmos y sus propiedades 2. Propiedades de las igualdades y despeje de fórmulas 3. Solución de ecuaciones enteras de primer grado 4. Solución de ecuaciones fraccionarias de primer grado 5. Resolución de problemas sobre ecuaciones de primer grado (modelo matemático) 6. Solución de ecuaciones simultáneas, por los métodos de reducción, sustitución y gráfico 7. Solución de ecuaciones de segundo grado, completas e incompletas; por los métodos de factorización, fórmula General y, completando un trinomio cuadrado perfecto y gráfico. 8. Resolución de problemas

Al tratarse de una investigación de enfoque indirecto sobre el aprendizaje con entendimiento, el objetivo de identificar los niveles de entendimiento de los estudiantes en temas algebraicos se centra en construir relaciones con el ambiente de aprendizaje propiciado por el profesor por medio de la aplicación de tareas. Para ello se considera relevante el hecho de identificar aquellas conexiones que los estudiantes están estableciendo con temas o conceptos previos, así como el tipo de comunicación utilizada para resolverlos. Con este objetivo, se muestra la Tabla 7 que sintetiza:

a) Los elementos del ambiente de aprendizaje, centrados en el profesor y el diseño de tareas.

b) Las dimensiones con las que está conectado dicho ambiente.

c) El hecho empírico donde se expresa la dimensión mencionada.

d) Lo que debe indagarse para identificar el nivel de entendimiento de los estudiantes así como las conexiones con otras dimensiones del ambiente.

e) Los resultados del análisis de tareas de aprendizaje y los resultados de la caracterización de los niveles de entendimiento que permitirán establecer las conexiones entre el ambiente propiciado por el profesor y los niveles de entendimiento de los estudiantes.

Tabla 7 Obtención de información a partir de las dimensiones

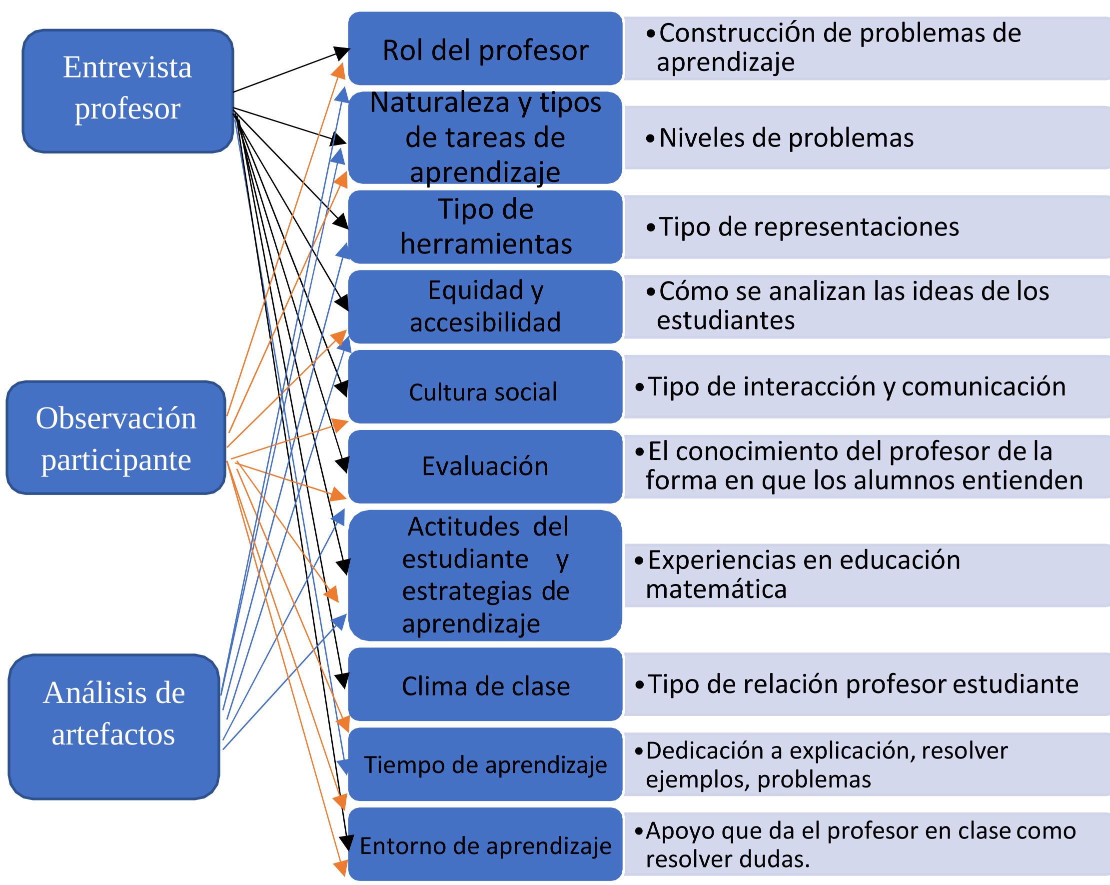
	A través de	**Dimensiones del ambiente de aprendizaje**	**Hecho empírico**	**Preguntas guía**
Rol del profesor	Naturaleza y tipos de tareas de aprendizaje	Tipo de herramientas	Tipo de representaciones	Qué hacen y por qué lo hacen.
Rol del profesor	Naturaleza y tipos de tareas de aprendizaje	Cultura social	Tipo de interacción y comunicación	Cómo se organiza el grupo. Cómo se comunican

	A través de	Dimensiones del ambiente de aprendizaje	Hecho empírico	Preguntas guía
Rol del profesor	Naturaleza y tipos de tareas de aprendizaje	Equidad y accesibilidad	Derecho y capacidad de entender conceptos matemáticos. Oportunidades de aprendizaje.	Características de los problemas y de los estudiantes. Cómo se analizan las ideas de los estudiantes
Rol del profesor	Naturaleza y tipos de tareas de aprendizaje	Evaluación	El conocimiento del profesor de la forma en que los alumnos entienden	Qué acciones se realizan para conocer si los alumnos entendieron, qué comentarios, reflexiones del proceso y de resultados. Qué procesos de comunicación promueve.
Rol del profesor	Naturaleza y tipos de tareas de aprendizaje	Actitudes del estudiante y estrategias de aprendizaje	Actitudes de los estudiantes en clase hacia las matemáticas.	Cuáles son y han sido sus experiencias en educación matemática
Rol del profesor	Naturaleza y tipos de tareas de aprendizaje	Clima de clase	Tipo de relación profesor estudiante	Cómo se relaciona el profesor con sus estudiantes en clase
Rol del profesor	Naturaleza y tipos de tareas de aprendizaje	Tiempo de aprendizaje	Tiempo de dedicación a explicación, resolver ejemplos, problemas.	Tiempo en clase, en resolver problemas, en explicación.
Rol del profesor	Naturaleza y tipos de tareas de aprendizaje	Entorno de aprendizaje	Apoyo que da el profesor en clase como resolver dudas.	Cómo apoya el profesor a sus estudiantes para aprender matemáticas
Resultados	Niveles de problemas y tipos de pensamiento	Nivel de comprensión de variables (Godino y Font, 2003) Tipo de pensamiento desarrollado en los estudiantes. (Usinski, 2012; OCDE, 2012)		

	A través de	Dimensiones del ambiente de aprendizaje	Hecho empírico	Preguntas guía
	que promueven. (Usinski, 2012) Nivel reproductivo, de conexión y de reflexión (OCDE, 2012)			

Asimismo, se muestra el esquema 1 donde se articulan los instrumentos para la obtención de información con las dimensiones del ambiente en el aula.

Esquema 1 Instrumentos de obtención de información y dimensiones



Los problemas y el rol del profesor en el aula son dimensiones que, conectadas, favorecen el desarrollo de entendimiento (Barrera y Reyes, 2015). El papel más importante del profesor es que convierta a la clase un espacio donde se comuniquen pensamientos e ideas entre sus estudiantes, más que explicar conceptos con claridad y demostrar procedimientos (Hiebert, 1997). Para ello deben de tomarse dos responsabilidades centrales: proveer de una dirección a las actividades matemáticas y guiar el desarrollo de la cultura social en el aula. Durante el periodo de observación, entrevista y análisis de artefactos se registrarán aquellas actividades del profesor para enseñar conceptos matemáticos, como las tareas de aprendizaje y el tipo de comunicación entre los estudiantes que estas promueven y que conforman una determinada cultura en el aula.

Al analizar los problemas y los tipos de pensamiento se busca caracterizar qué nivel corresponde a cada uno de ellos. En el modelo por competencias los problemas son clasificados en: nivel reproductivo, de conexión y de reflexión (OCDE, 2012). En el caso del modelo de aprendizaje con entendimiento se caracterizarán los problemas y tipos de pensamiento como memorización, justificación por medio de la aplicación de las propiedades, modelado, de representación metafórica o histórico cultural (Usinski, 2012) para posteriormente analizar la relación entre las tareas del profesor y el tipo de pensamiento que desarrollan los estudiantes.

En la identificación de los tipos de pensamiento, un elemento a indagar en los estudiantes es el nivel de comprensión de variables (letra evaluada, letra ignorada, letra usada como objeto, letra usada como incógnita específica, letra usada como un número generalizado y letra usada como variable). Este es un concepto esencial que ha sido identificado como una de las dificultades en el aprendizaje y enseñanza del álgebra (Godino y Font, 2003).

La conexión entre conceptos que realizan los estudiantes a través de la construcción de herramientas puede reflejarse al ser interrogados sobre los qué hacen, cómo lo hacen y por qué lo hacen. También puede identificarse a través del tipo de representaciones utilizadas; esto puede verificarse en su libreta o en el pizarrón si es el caso. Por parte del profesor, la construcción de herramientas por parte de los estudiantes puede reflejarse en el tipo de problemas o ejercicios que aplica.

La cultura social es el modo en que interactúan los estudiantes con base en ciertos tipos de problemas, ejercicios o actividades que promueve el profesor. En esta dimensión se tomaron datos acerca de cómo se da la comunicación entre los estudiantes y con el profesor.

Otro elemento del ambiente de aprendizaje es la forma en que el profesor hace equitativas y accesibles las tareas en álgebra. Se analizará la forma de crear oportunidades de aprendizaje para los estudiantes.

En la dimensión de evaluación se considera analizar qué entiende el profesor por evaluar y cómo lo está llevando a cabo en el aula. Esto puede explorarse identificando cómo el profesor sabe, con cierto grado de certeza si los estudiantes ya entendieron algún concepto o tema.

Respecto a las actitudes del estudiante y estrategias de aprendizaje se tiene interés en aquellas actitudes y sentimientos que suscitan las matemáticas como la seguridad en uno mismo, la curiosidad, el interés y relevancia o el deseo de hacer o comprender ciertas cosas (OCDE, 2006). También se incluyen las expectativas que tiene el profesor de sus estudiantes como un factor que incide en los resultados de aprendizaje (INEE, 2008). La forma de dirigirse hacia ellos, así como su práctica influye en su autoconcepto, su motivación, la interacción con el profesor y sus niveles de aspiración.

En lo referente al clima en el aula, la OCDE mide este factor con respecto a la percepción de los estudiantes y profesores acerca de la disciplina y las relaciones profesor estudiante, con índices como el ruido, orden, el tiempo de espera para empezar a trabajar, interrupciones de otros estudiantes, el apoyo del profesor y una buena relación con él.

En lo que se refiere al tiempo de aprendizaje y trabajo de curso los instrumentos de recolección de datos estarán enfocados en características como, por ejemplo, el hecho de que la variedad de problemas o conceptos matemáticos propicia oportunidades para los estudiantes, así como la gestión de tiempo en los procesos de enseñanza aprendizaje por parte del profesor.

En cuanto a la creación de un ambiente socialmente propicio para el aprendizaje los instrumentos se enfocaron en la forma en que el profesor construyó situaciones que posibiliten la reflexión, experimentación, identificación y conexión entre los distintos contenidos.

4.4 Estrategia metodológica e instrumentos

Dado que en la presente investigación define al entendimiento en términos de conexiones (Hiebert, 1997), la estrategia metodológica se centra en recoger y analizar, por medio de los distintos instrumentos, la información que refleje algún impacto sobre el conocimiento de los estudiantes, a partir de tres categorías de análisis en torno a conexiones: entre representaciones, entre conceptos matemáticos y entre aspectos didácticos (Barrera y Reyes, 2017).

Los instrumentos con los que se recogerá la información con respecto a las dimensiones del ambiente de aprendizaje en el aula de álgebra de primer semestre de bachillerato se muestran las tablas 8 y 9. Estas contienen en forma sintética los actores, dimensiones e instrumentos que se contemplan para la investigación. Se añaden los autores básicos en los que se sustenta la construcción de las dimensiones e instrumentos.

Tabla 8 Actores, dimensiones, categorías e instrumentos desde el enfoque aprendizaje con entendimiento

	Enfoque	Dimensiones	Instrumentos
Ambiente de aprendizaje	Aprendizaje con entendimiento (Hiebert et al. 1997)	Rol del profesor	Observación participante (Stake, 1999; Simons, 2011; Goetz y Le Compte, 1984) Entrevista al profesor (formación, concepciones) (Stake, 1999; Simons, 2011)

		Tipo de problemas	Observación participante Revisión de documentos (cuadernos, trabajos, experimentos)
		Tipo de herramientas	Observación participante Revisión de documentos
		Cultura social	Observación participante Revisión de documentos
		Equidad y accesibilidad	Observación participante Revisión de documentos
		Evaluación	Observación participante Revisión de documentos

Tabla 9 Actores, dimensiones, categorías e instrumentos desde el enfoque por competencias

	Enfoque	Dimensiones	Instrumentos
Ambiente de aprendizaje	Por competencias (OCDE 2003)	Actitudes de los estudiantes y Estrategias de aprendizaje	Observación participante Revisión de documentos (cuadernos, trabajos, experimentos)
		El entorno de aprendizaje	Observación participante Revisión de documentos
		El trabajo de curso	Observación participante Revisión de documentos
		El clima de clase	Observación participante Revisión de documentos
		La evaluación por parte de los profesores.	Observación participante Revisión de documentos

4.4.1 Observación participante

La observación participante es un instrumento adecuado para comprender la forma en que el profesor genera un ambiente adecuado en el aula. Mediante la observación se tendrán en cuenta las seis dimensiones que forman parte del ambiente para su análisis posterior (Stake, 1999). Es indispensable valorar la comprensión del conocimiento matemático en función de su contexto (Sierpinska,1994). Mediante la observación se pretende conocer el escenario que no puede conseguirse solo mediante el diálogo con las personas (Simons, 2011). Teniendo en cuenta que es fundamental que el concepto de ambiente en el aula es una totalidad que está formada por seis dimensiones (Hiebert, 1996), la observación se hace indispensable para alcanzar los objetivos. A través de la observación participante

> el investigador pasa todo el tiempo posible con los individuos que estudia y vive del mismo modo que ellos. Toma parte en su existencia cotidiana y refleja sus interacciones y actividades en notas de campo que toma en el momento o inmediatamente después de producirse. En las notas de campo, el investigador incluye comentarios interpretativos basados en sus percepciones; dichas interpretaciones están influidas por el rol social que asume en el grupo y por las reacciones correspondientes de los participantes (Goetz y LeCompte, p. 126, 1984).

Estar en un ambiente donde se desarrollen ideas o conceptos matemáticos es una manera en la que pueden llevarse a acabo interpretaciones que conduzcan a una mejor comprensión de forma de desarrollar entendimiento matemático en el aula. Como indican Goetz y LeCompte (1984), “la observación participante sirve para obtener de los individuos sus definiciones de la realidad y los constructos que organizan su mundo” (p. 126).

La observación no participante no es adecuada para esta investigación debido a que no solo se pretende “contemplar lo que está aconteciendo y registrar los hechos sobre el terreno. Como categoría pura, la observación no participante sólo existe cuando la interacción se observa mediante cámaras y grabadoras ocultas o a través de falsos espejos” (Goetz y LeCompte, p. 126, 1984). En este caso, se considera necesario estar en el aula para interpretar cómo están entendiendo los estudiantes, qué tipo de herramientas construyen, cómo se relacionan con los demás compañeros, qué reflexionan, qué comunican o cómo están entendiendo el problema, todo esto girando en torno del profesor. Será necesario revisar algunas anotaciones de los estudiantes, así como ver sus cuadernos, y todo esto no se puede hacer con la observación no participante.

En cuanto a la guía de observación esta contendrá las dimensiones del aprendizaje con entendimiento. Entre lo que se considerará para el registro de observación está el buscar las relaciones entre problemas y la forma en que se configuran las dimensiones de aprendizaje con entendimiento, el ¿cómo se comunican?, ¿qué reflexionan?, ¿qué postura asumen ante la evaluación?, ¿qué herramientas construyen? Es decir, se trata “de registrar los fenómenos más relevantes para los aspectos principales del tema que han definido” (Goetz y LeCompte, p. 128, 1984).

4.4.2 Entrevistas

La entrevista al profesor va a permitir mayor profundidad, develando lo que no pudo ser detectado en la observación participante (Simons, 2011). La entrevista pretende obtener información sobre su formación y experiencia. Con el propósito de comprender las concepciones del profesor acerca de las matemáticas, entendimiento y problema como parte de su formación y experiencias, se plantea realizar una entrevista cualitativa. “La mayoría de lo que se llega a saber y comprender del caso se consigue mediante el análisis y la interpretación de cómo piensan, sienten y actúan las personas” (Simons, 2011, p.21).

De acuerdo con Sierra (1998) una entrevista es una conversación verbal que establecen un interrogador y un interrogado, orientada a la obtención de información sobre un determinado objetivo definido a través de un acuerdo mutuo. Una entrevista cualitativa es una “conversación con alto grado de institucionalización y artificiosidad, debido a que su fin o intencionalidad planeada determina el curso de la intención en términos de un objetivo externamente prefijado" (Sierra, 1998, p. 297). Sin embargo, mediante el otorgamiento de la palabra, también permite que los sujetos se expresen y desenvuelvan naturalmente como en una conversación cotidiana.

La entrevista es fundamental para esta investigación en cuanto a complementar y profundizar la observación participante, ya que mientras ésta se realizará en el escenario natural, la técnica de la entrevista se hará en un escenario construido por el investigador. En este sentido es importante cuidar los elementos cognoscitivos (Sierra, 1998) como la relación entre las respuestas finales con las iniciales para formular nuevas preguntas, cuidando en todo momento el tipo de relación, los códigos de comunicación y favoreciendo la empatía.

Debido a que la investigación que se pretende realizar se centra en temas específicos referidos al ambiente de aprendizaje desde dos enfoques de la didáctica de la matemática, se utilizará la técnica de entrevista enfocada. De acuerdo con Sierra (1998) "en la entrevista enfocada, en cambio, existe predeterminado de antemano un tema o foco de interés, hacia el que se orienta la conversación y mediante el cual hemos seleccionado a la persona objeto de la entrevista" (p. 299). La entrevista enfocada es más estructurada que la entrevista en profundidad; es también abierta, pero está definida conceptualmente. Así también lo expresa Vela (2008) cuando afirma que en este tipo de entrevista "se asume una posición directiva conduciéndola a un área limitada o materia de interés" (p. 77).

La entrevista en profundidad es más holística, "pretende hacer un holograma dinámico de la configuración vivencial y cognitiva de un individuo en cuanto a tal, es decir, independientemente de su participación como actor social en una experiencia significativa o de su posible relación con un tema particular determinado" (Sierra, 1998, p. 299). Es por esta razón que la entrevista no puede ser de tipo "a profundidad" ya que de acuerdo al objeto de investigación, el profesor debe poseer conocimiento sobre el tema del modelo de aprendizaje con entendimiento.

Bajo la entrevista enfocada, el sujeto seleccionado para la entrevista se basó en un procedimiento de muestreo intencional o no probabilístico en donde el sujeto cubría los aspectos sobre los cuales se centró la entrevista (Vela, 2008). Los criterios de selección que se tomaron en cuenta se basaron en que el sujeto fuese un profesor de bachillerato, egresado de la maestría en didáctica de la matemática.

Desde el eje de evaluación, como parte del curriculum, la entrevista estará sustentada también en los conceptos de evaluación por parte de Álvarez (2008) y de diagnóstico de Eisner (2002), intentando comprender las concepciones del profesor acerca de evaluación.

4.4.3 Análisis de documentos

En un estudio de caso es importante revisar no solamente lo que las personas dicen, sino también lo que producen; a esto se le llama recogida de artefactos. Esta es la técnica junto a la observación participante y las preguntas a los estudiantes mediante la cual se conocieron los niveles de entendimiento.

Para esta investigación es fundamental el análisis de documentos como el cuaderno de los estudiantes y el libro de texto. En otras investigaciones reportadas en el estado del conocimiento, desde la perspectiva de resolución de problemas, es de suma importancia el conocer cómo están pensando los estudiantes. Las técnicas más usadas para este propósito son la entrevista y el análisis de documentos, como el cuaderno o las hojas donde los estudiantes se apoyan para hacer cálculos y diversas anotaciones para el examen.

De esta forma los cuadernos pueden mostrar información valiosa sobre las características de los problemas que aborda el profesor y la forma en que los aborda, analizar si es un mismo tipo de problemas para todos, si todos los estudiantes tienen exactamente el mismo apunte de resolución del problema, si tienen distintas estrategias de solución, si son los mismos problemas que plantea el libro de texto, si contiene explicaciones de su procedimiento, cómo relacionan el problema con las ideas o conceptos matemáticos, si es el mismo problema o variante del problema en determinado número de sesiones, entre otras cuestiones que pueden abordarse para el análisis.

Mediante los escritos de los estudiantes puede verificarse algún impacto de aprendizaje sobre el conocimiento disciplinar mediante tres categorías de análisis mediante las conexiones entre representaciones, entre conceptos matemáticos y entre aspectos didácticos.

Para determinar qué otros artefactos son importantes es necesario permanecer algún tiempo en el aula, como indica Goetze y LeCompte (1998), ya que "cuanto más familiarizados están los investigadores con los grupos y escenarios, más fácil les resulta determinar qué artefactos deben buscar. Sin embargo, gran parte del material relevante sólo es descubierto una vez iniciada la estancia en el campo" (p. 164).

Desde el eje de la evaluación, el termino de diagnóstico (Eisner, 2002) sustenta la selección y análisis de documentos. Como se muestra en el marco teórico, el diagnóstico en evaluación es compatible con la forma de evaluar desde el aprendizaje con entendimiento además de que lo complementa y lo desarrolla aún más. El diagnostico permitirá analizar los errores de los estudiantes, las anotaciones del profesor en sus cuadernos, la forma en que son abordados por los estudiantes, las formas de representaciones y las conexiones con otros problemas, ideas y conceptos matemáticos. La evaluación es fundamental para la comprensión de los niveles de entendimiento que se desarrollan en el aula de matemáticas.

4.4.4 Análisis de la información

La presente investigación busca analizar la relación entre el ambiente de aprendizaje propiciado por el profesor con el entendimiento construido por los estudiantes de primer semestre en la asignatura de álgebra. Para el cumplimiento de este propósito se tienen dos objetivos particulares, analizar la forma en que el profesor construye un ambiente de aprendizaje y caracterizar los niveles de entendimiento de los estudiantes.

Estos dos objetivos particulares no son procesos aislados e independientes. Por ello se requiere de dos procesos esenciales presentes en las distintas fases de la investigación, el análisis y la interpretación. Se entiende análisis de la información como “aquellos procedimientos — como la codificación, la clasificación, el mapeo conceptual, la generación de temas— que nos permiten organizar los datos y entenderlos para producir conclusiones y una comprensión (o una teoría) general del caso. Suele ser un proceso inductivo formal de descomponer los datos en segmentos o conjuntos de datos que después se puedan clasificar, ordenar y examinar para encontrar conexiones, patrones y proposiciones que puedan explicar el caso” (Simons, 2011, p. 165).

El análisis de la información se utilizará en la codificación y clasificación de los datos. La interpretación por su parte se empleará en el proceso de identificación de relaciones o patrones en el ambiente de aprendizaje en el aula. En el análisis se dan una serie de procedimientos que permiten la organización de los datos y su entendimiento para producir una comprensión general del caso. Esta perspectiva holística del análisis e interpretación viene dada por la ya expresada necesidad de una comprensión más integral de las dimensiones del ambiente de aprendizaje. Al respecto, Simons (2011) afirma:

> El proceso de interpretación es la percepción y comprensión de un tratamiento más holístico e intuitivo de los datos y las ideas que revelan. La interpretación es un proceso cognitivo e intuitivo altamente especializado, y suele requerir una completa inmersión en los datos, la relectura de transcripciones, notas de campo, observaciones y otras formas de datos en el conjunto de éstos, como poemas, viñetas, cameos o relatos (p. 166).

Para la codificación, agrupación, mapeo conceptual e identificación de posibles nuevas dimensiones del ambiente de aprendizaje se apoyó en el programa de análisis de datos cualitativo Atlas.ti. Este es un programa computacional para el apoyo en la organización, manejo e interpretación de los datos cualitativos.

La codificación en el programa mencionado se llevó a cabo ingresando los documentos primarios como las observaciones participantes, entrevistas transcritas y fotografías de artefactos. Todo esto se recoge en un proyecto o archivo denominado unidad hermenéutica. Los documentos primarios se introdujeron con una clave por hoja para su posterior utilización en el análisis de resultados. La codificación es un proceso de identificación de segmentos relevantes de los documentos primarios; se da en un ambiente de inmersión en los datos, con la relectura de transcripciones de entrevistas, notas de campo y observaciones en clase.

La información se codificó teniendo como base las dimensiones del ambiente de aprendizaje contempladas en esta investigación, pero también se tomaron en cuenta aquellos hechos, expresiones o actitudes de los sujetos de estudio. Es decir, no se ajustaron a la fuerza las dimensiones preestablecidas, así como tampoco se ocultaron hechos relevantes o la voz de los sujetos.

Tras la codificación se continuó con el proceso de creación de familias, relacionando los códigos se generaron conjuntos y conformaron lo que se denomina "familias". Posteriormente se generaron las redes o networks, que son representaciones gráficas de las relaciones entre familias. Las familias constituyeron la base para la organización de los capítulos del trabajo de tesis.

4.4.5 Estrategias de triangulación

De acuerdo con Simons (2011), "la triangulación es un medio para el análisis cruzado de la relevancia e importancia de los temas, o para analizar nuestros argumentos y opiniones desde diferentes ángulos para generar y reforzar pruebas en las que poder apoyar las afirmaciones más importantes" (p. 185).

Con la finalidad de tener mejor confianza en la interpretación, se realizó una triangulación metodológica (Stake, 1999) mediante las entrevistas a profesores, la observación participante y el análisis de artefactos. Campbell y Fiske (1959) indican que "para conseguir constructos útiles e hipotéticamente realistas en una ciencia se requieren métodos múltiples que se centren en el diagnóstico del mismo constructo desde puntos de observación independientes, mediante una especie de triangulación” (p. 81 en Stake, 1999, p.99). Junto con la triangulación metodológica se llevó a cabo una triangulación de los datos obtenidos de las tres fuentes distintas para una mejor comprensión del tema.

Para la observación participante se recogieron datos sobre lo acontecido en el aula de primer semestre respecto a los ambientes de aprendizaje y niveles de entendimiento en el periodo enero - julio 2017, todo ello mediante una guía de observación construida previamente con base en base al marco teórico. Al encontrar regularidades o saturación de los datos dio finalizado este proceso. Aproximadamente el semestre cuenta con 80 horas de clase de matemáticas, 5 por semana. Cuenta además con 3 periodos de evaluación.

En cuanto a la revisión de documentos es importante saber lo que los estudiantes producen. Se analizó el cuaderno de los estudiantes, el programa de la asignatura, los exámenes y algún otro tipo de material utilizado por el profesor o los estudiantes como puede ser un libro de texto. En el caso de los cuadernos y exámenes estos mostraron información valiosa sobre las características de los problemas que aborda el profesor y la forma en que los aborda. Se analizó si es un mismo tipo de problemas para todos, si todos los estudiantes tienen exactamente el mismo apunte de resolución del problema, si tienen distintas estrategias de solución, si son los mismos problemas que plantea el libro de texto, si contiene explicaciones de su procedimiento, cómo relacionan el problema con las ideas o conceptos matemáticos, si es el mismo problema o variante del problema en determinado número de sesiones, entre otras preguntas que pueden abordarse para el análisis. Para determinar qué otros artefactos son importantes es necesario permanecer algún tiempo en el aula.

Finalmente, las entrevistas fueron de tipo semi estructuradas y la guía fue elaborada en base en el marco teórico. Se aplicaron dos entrevistas: una al inicio del semestre y la otra al final. Se fueron incluyendo preguntas conforme al avance en las observaciones. Posteriormente se transcribieron, codificaron y clasificaron en Atlas.ti con los demás documentos primarios (análisis de artefactos y observación participante) seleccionando los segmentos relevantes acorde a las dimensiones de aprendizaje con entendimiento y por competencias.

Los resultados encontrados con los tres instrumentos mencionados se contrastaron con lo planteado en el programa para educación media superior de la SEP, el modelo educativo para bachillerato, así como otros resultados de investigaciones sobre ambientes de aprendizaje, entendimiento matemático y competencias en el campo del álgebra.

CAPÍTULO V. Resultados de investigación acerca de los ambientes de aprendizaje y niveles de entendimiento en el aula de matemáticas

En el presente capítulo se expondrá el análisis de la relación entre el ambiente propiciado por el profesor y los niveles de entendimiento identificados en los estudiantes en la asignatura de álgebra, como indica el objetivo principal. Las distintas dimensiones del ambiente consideradas en la perspectiva del aprendizaje con entendimiento son el rol del profesor, la cultura social, la equidad y la accesibilidad, las herramientas cognitivas y el tipo de problemas de aprendizaje.

5.1 El ambiente de aprendizaje en el aula

Los factores del ambiente considerados por la OCDE son: las actitudes de los estudiantes y estrategias de aprendizaje, el entorno de aprendizaje, el tiempo de aprendizaje y trabajo de curso, el clima de clase y las evaluaciones del estudiante y de los profesores. Durante la fase de análisis de información con la herramienta de Atlas.ti, estos factores fueron subsumidos por las dimensiones del aprendizaje con entendimiento, es decir, la realidad observada en los escenarios estudiados tanto en la preparatoria 3 como en la 4 lleva a conjeturar que aquellos factores que la OCDE considera esenciales no resultaron ser relevantes sino en relación con un marco más amplio; estos resultaron elementos aislados. Por ejemplo, el caso del tiempo de aprendizaje parecía fragmentado y sin sentido. Captar la realidad en el aula de forma más integral llevó a considerar el tiempo como parte del tipo de problemas de aprendizaje. Lo mismo sucedió en el caso de las cuatro variables restantes.

El punto de vista que se sostiene en la presente investigación se basa en que los alumnos aprenden a través de una comprensión del mundo donde se descubren las relaciones conceptuales a través de la interacción en un ambiente adecuado. Orton (2003) señala que es posible concebir actividades que permitan la exploración de la estructura de la situación problemática. Además, incide en que el acompañamiento del profesor es esencial de modo que la comprensión surja desde dentro. Así, “todo intento de acuciar al niño, inyectándole métodos memorísticos, no solo puede resultar ineficaz, sino que, además, es posible que le convenza de que las matemáticas carecen de significado y solo merecen su rechazo" (Orton, 2003, p. 13).

5.1.1 El rol del profesor y su función durante la implementación de problemas de aprendizaje

El profesor juega un papel fundamental en la construcción de ambientes de aprendizaje que favorezcan el entendimiento conceptual. Él mismo es un elemento constitutivo de este ambiente. Sus objetivos principales son seleccionar, diseñar y rediseñar problemas de aprendizaje con metas bien definidas, ofrecer información esencial para su resolución, así como establecer una cultura en el salón de clase de reflexión y comunicación mediante el trabajo individual y colectivo.

La mayor parte de los profesores de matemáticas piensa que el papel a desempeñar más importante se centra en explicar las ideas con claridad, demostrar procedimientos con el fin de que los estudiantes puedan reproducirlos y fomentar diversidad de ejercicios rutinarios para que puedan llevar a cabo esos procedimientos con rapidez y precisión (Hiebert, 1997).

Esta idea fue desempeñada por el profesor del caso 2 (C2), aunque su intención fue que los estudiantes razonaran antes de hacer el ejercicio, su ritmo de trabajo era percibido por los discentes como demasiado rápido, lo cual no dejaba tiempo para la reflexión. En esta aula se pudo identificar lo que Pérez (1992) llama un modelo mediacional centrado en el profesor. Mediante este modelo su actuar en el aula, así como su concepción sobre su enseñanza, teorías implícitas y hábitos de comportamiento están determinados por un proceso donde intervienen experiencias como su trayectoria escolar, sus primeros acercamientos a la docencia, presiones administrativas y en algunos casos los cursos de formación.

Respecto a la profesora del caso 1 (C1), la idea de un profesor que no permita la participación de estudiantes en procesos esenciales del pensamiento matemático no era compartida por parte del docente, en su práctica en el aula asumía un rol cuya importancia residía en que los estudiantes pudieran expresar sus pensamientos y comunicar ideas matemáticas. Aunque ambos profesores estaban de acuerdo en que un estudiante tiene que razonar y analizar lo que pide el problema para llegar a un nivel de entendimiento, la diferencia consistió en que para el C1 esto pretendía lograrse a través de problemas, mientras que en el C2 se utilizaban ejercicios.

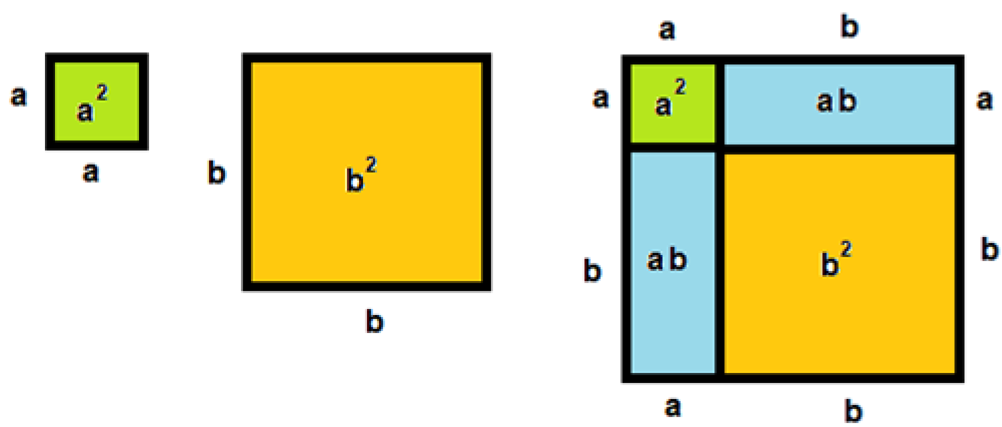
Se puede apreciar que los profesores mostraban una concepción distinta de lo que es un problema en matemáticas; concretamente en el C2 la diferencia entre un ejercicio y un problema no es clara. Además, este último no parece relacionar el tipo de tareas de aprendizaje con el nivel de entendimiento del estudiante. En este caso el profesor reconoce que los estudiantes desarrollan más la parte mecánica y afirma que "los alumnos no están acostumbrados a pensar, no quieren analizar o relacionar lo que ven con otros temas" (AAP4EP1FHG170317JIMM007), de manera que un ejercicio es, de acuerdo con el profesor, la aplicación de algo reciente, que se acaba de ver y simplemente se está reproduciendo, como el cambiar coeficientes o alguna variable, pero sin variar la estructura del mismo. Según su criterio, un problema debería aparecer al final de una unidad o unidades, pero es responsabilidad del alumno el relacionarlo con los temas anteriores.

Las afirmaciones anteriores merecen un análisis. Desde el aprendizaje con entendimiento se sabe que un profesor no puede entrar a la mente de sus estudiantes y programar actos de comprensión. El profesor tiene razón al afirmar que es responsabilidad del estudiante el relacionar los temas y conceptos. De hecho, este es el objetivo fundamental de la enseñanza de la matemática, hacer que en algún momento el alumno tome control de su propio aprendizaje (Santos, 2010), pero para ello primeramente el estudiante requiere de un acompañamiento. En situaciones donde el acompañamiento a través de problemas propiciando la articulación de conceptos nunca ha estado presente, la conexión de conceptos e ideas matemáticas es difícil que se desarrolle en los estudiantes.

Durante este proceso de acompañamiento, de acuerdo con Ball y Bass "la enseñanza implica establecer conexiones a través de los dominios matemáticos, ayudando a los estudiantes a construir vínculos y coherencia en sus conocimientos" (2003, p.12). Estas conexiones llevan en algún momento a relacionarse con el algoritmo. La asignación de significado en conexión con el desarrollo procedimental posibilita un aprendizaje con entendimiento. En este sentido, tanto la asignación de problemas sin un objetivo, como la aplicación ciega de algoritmos para resolver ejercicios rutinarios, sin una adecuada intervención del profesor en el desarrollo de actividades que lleven a la conexión de la herramienta con el significado, puede dificultar en el desarrollo de aprendizaje con entendimiento en los estudiantes.

No basta el hecho de asignar ejercicios sin formular preguntas que lo orienten en una ruta de aprendizaje. Una forma de establecer conexiones es mediante la asignación de valores o el uso de figuras. Este tipo de actividades podría ayudar a responder algunas preguntas de los estudiantes con respecto a la cuestión ¿por que $(a + b)^2$ no es igual a $a^2 + b^2$? Primeramente, es posible mostrar la relación con lo numérico dando valores a cada caso y mostrar que $(4 + 5)^2 \neq 4^2 + 5^2$ o $81 \neq 41$.Tambien el profesor puede hacer uso de figuras como se muestra en la siguiente Imagen 1.

Imagen 1 Desarrollo de un binomio al cuadrado



Fuente: Elaboración propia

En esta figura se muestra la desigualdad como la suma de los cuadrados $a^2 + b^2 \neq (a + b)^2$ dado que faltan dos cuadriláteros de área ab para que se dé la igualdad. Este ejercicio propicia la relación entre aritmética, álgebra y geometría. En un tema donde comúnmente los estudiantes de bachillerato no encuentran relación limitando de esta forma el desarrollo de entendimiento.

Es esencial “hacer explicitas las conexiones entre los diversos elementos que intervienen durante la resolución de un problema o la ejecución de una actividad” (Barrera y Reyes, 2013, p. 30) como es el caso cuando se propicia la conexión de representaciones gráficas y numéricas ejemplificada en la figura 1. Utilizar estos elementos posibilita el entendimiento conceptual y no solo procedimental de los contenidos matemáticos.

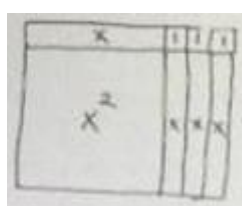
Otro ejemplo que muestra la necesidad de crear mejores oportunidades de aprendizaje mediante el diseño de tareas y escenarios de instrucción se refleja en el C2, donde se pudo identificar que un 98% de las tareas de aprendizaje fueron ejercicios de tipo reproductivo (De Lange y Verhage, 1992 en PISA, 2004), como por ejemplo, factorizar $x^2 - 16x - 80$. Además, cuando se abordó el tema de valor numérico, se pedía calcular el valor de la expresión algebraica $x^2y - x^2 - y^2 + 3(x - y)^2$, cuando se evalúa en $x = -2$; $y = -1$. Aunque los problemas propuestos por el profesor podían conectarse con diversos conceptos, con aprendizajes previos de los estudiantes, con otros tipos de representaciones y con temas anteriores, solo en algunos de estos ejercicios se llevó a cabo dicha conexión (PISA, 2004). En estos casos el profesor comenzaba explicando la forma correcta de resolver los ejercicios, y después de mostrar el procedimiento correcto de 4 ó 5 dejaba a los estudiantes resolver algunos más, en ocasiones llegándose a resolver 30 en una sesión de dos horas. La participación del alumno en la resolución del ejercicio se reducía a preguntarle que éste resolviera operaciones simples que involucraran números o variables con distinto signo y potencia como, por ejemplo, $-4 + 6$, $6\,(-7)$ ó 2^5.

Cuando correspondía a los estudiantes resolver ejercicios podía identificarse que ellos preferían el método más rápido; incluso aunque pudieran trabajarlo por una vía más larga decidían no resolverlo si no recordaban la forma rápida. Algunos de ellos se dedicaban a competir por ser el primero en terminar.

Con el C2 se reafirma un sistema de creencias en el aula relacionado con la resolución de problemas, por ejemplo, que estos se pueden resolver en 10 minutos o incluso menos tiempo. Los estudiantes abandonan el problema si no pueden resolverlo en ese periodo (Schoenfeld, 1992). En este sentido el tiempo de aprendizaje resultó ser un elemento relacionado con el tipo de problemas y el rol del profesor más allá del tiempo efectivo de clase considerado por PISA (2006), que únicamente toma en cuenta el tiempo como un factor aislado, desde que el profesor comienza el tema hasta que termina, o el tiempo dedicado al estudio fuera de clase por parte del estudiante. En el ejemplo anterior de la figura 1 se muestra la forma en que un problema puede abordarse simultáneamente desde tres áreas articuladas de la matemática: aritmética, álgebra y geometría.

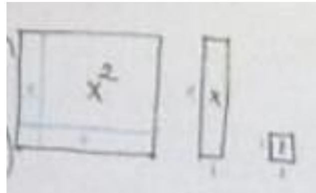
El tiempo jugó un papel distinto en el C1, donde el profesor expresa que los estudiantes "se dan cuenta que con un solo problema yo podía abarcar todos los contenidos de una unidad, ellos finalmente percibieron que no tenía yo que ir tema por tema" (AAP3E01LGC090217JIMM002). Además, el profesor intentaba que los estudiantes dedicaran un tiempo considerable a resolver un problema. Aunque aún faltan elementos para el trabajo bajo la resolución de problemas, como indagar en las distintas rutas de solución, cabe destacar el interés mostrado por algunos estudiantes. Una actividad que ejemplifica lo afirmado por el profesor se muestra en la siguiente Imagen 2.

Imagen 2 Cálculo de área de un cuadrilátero



En esta Imagen 1 el profesor pide a sus estudiantes que calculen el área y perímetro. Esta actividad propicia una discusión entre los estudiantes acerca de si se trata de un cuadrado o rectángulo. Algunos descomponen la figura para tratar de encontrar una solución como se muestra en la Imagen 3.

Imagen 3 Descomposición de la figura

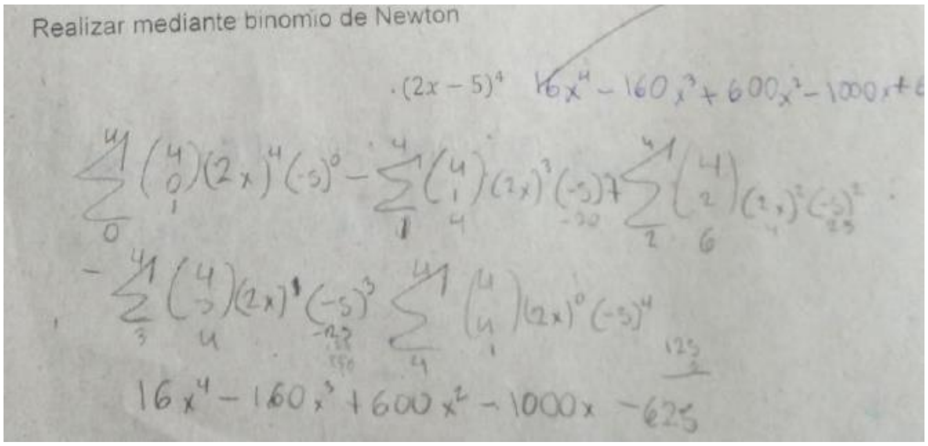


En esta actividad la profesora hace que sus estudiantes enlisten los temas relacionados con este ejercicio, y ellos escriben cual es la variable con la que se trabaja, el producto de binomios, la factorización y multiplicación de polinomios.

En ambos casos se pudo identificar un vínculo entre el rol del profesor y la creencia que los estudiantes tienen del profesor como fuente única de validación y verificación de resultados. Por su parte, el profesor del C2 siempre explicaba la forma correcta de resolver los ejercicios y después los estudiantes, imitando el procedimiento, realizaban varios más. Durante la práctica con los ejercicios las preguntas que los estudiantes formulaban al profesor eran de dos tipos: o bien para validar el resultado o para verificar procedimientos. Esto pudo contrastarse también en la entrevista al profesor, cuando éste afirmó que “a los estudiantes no se les debe forzar a ver un solo procedimiento, sino darles una serie de procedimientos y que el alumno escoja cuál es el que más le sirve” (AAP4EP1FHG170317JIMM004). En algunos casos esta manera de proceder puede resultar adecuada como cuando el profesor presenta el tema de productos notables. En este caso un binomio al cuadrado se abordó desde tres perspectivas: el binomio de Newton, que debiera verse como algo más general, el triángulo de Pascal y como una multiplicación entre términos. Es importante que estas herramientas sean razonadas en su estructura y funcionamiento, sin embargo, la inercia de un pensamiento imitativo y memorístico exclusivamente llevó a los alumnos a querer memorizar el triángulo de Pascal. Todo proceso y herramienta se intentaba memorizar, no razonar. Según indica Santos (2010) el propósito no es equipar al estudiante con un bagaje de estrategias y habilidades sin permitirles que piensen por sí mismos.

En el C2 existió el caso de dos estudiantes que resolvieron correctamente un binomio a la potencia 4 mediante el binomio de Newton. Se puede analizar que los estudiantes aplicaron conceptos como factorial, combinaciones y suma. Esto muestra un cierto nivel de entendimiento a nivel operacional y se destaca la explicación del profesor relacionando dichos conceptos como se muestra en la Imagen 4.

Imagen 4 Aplicación del binomio de Newton



En ciertos momentos todos los estudiantes, incluyendo aquellos que establecían cierto tipo de conexiones con otros conceptos y podían resolver ejercicios como el binomio de Newton, concebían a profesor como fuente del conocimiento. Otra evidencia del profesor como sujeto único de validación y verificación de resultados se observó en los dos casos cuando algunos alumnos expresaban su satisfacción de que ese profesor les impartiese clases ese semestre, lo expresaban con frases como “a este profesor le entendemos mejor”. Esto pone en evidencia los siguientes hechos: por un lado, la creencia que tiene el estudiante acerca de su aprendizaje depende única y exclusivamente de la responsabilidad, habilidad y conocimientos del profesor; por otro, que el conocimiento es transmisible directamente de la mente del profesor sin intermediarios. El profesor refuerza esta creencia al pensar que su papel a desempeñar más importante es explicar los procedimientos correctamente y hacer que los reproduzcan sus estudiantes, pero se debe tomar en cuenta que presentar conceptos o ideas matemáticas a los estudiantes como un producto terminado en realidad opacan el proceso que lo conduce hasta la solución y da la impresión de que se resuelve fácilmente (Santos, 2010).

La perspectiva de las matemáticas y su enseñanza quizá sea distinta en ambos profesores por su formación inicial y continua; aunque la perspectiva de esta ciencia en ambos al concluir el nivel superior era similar, la perspectiva de la matemática cambió en el profesor 1 cuando cursó la maestría. Según comenta dicho profesor

> "sí cambió demasiado, cuando yo era estudiante para mí las matemáticas eran lo más tedioso que pudo existir en mi vida, sin embargo, me gustaban y trataba de dedicar el mayor tiempo posible. Cuando yo me inclino a estudiar este posgrado te puedo decir que para mí las matemáticas es lo que aplico, lo que hago todos los días, es parte de mi vida. Mi visión cambió rotundamente y eso es lo que trato de inculcarles a mis alumnos. De alguna manera mi intención es que ellos se den cuenta que las matemáticas no son tediosas, porque de alguna manera las ven aburridas, entonces cambiarles esa idea como yo lo logré en mí. Como estudiante piensas así, como te enseñaron es cómo ves las matemáticas. Desgraciadamente me di cuenta de eso, porque para mí era memorizar, era aprender algoritmos de alguna manera memorística. Yo no quiero decir que no tengamos que memorizar en algunos momentos pero, no va por ahí; siento que es una parte de aplicación donde está en mi vida cotidiana y tratar de darle sentido a lo que se está haciendo" (AAP3E01LGC090217JIMM004)

En el C2 el profesor se ha formado en licenciatura en matemáticas y tiene planes para especializarse en estadística; su formación en didáctica de la matemática no está contemplada. En México al no existir programas específicos de formación de profesores en nivel medio superior y superior hacen que el bachillerato sea un nivel donde se acentúan las dificultades.

En síntesis, en relación con el rol del profesor en el C1 cabe destacar el intento por diseñar problemas de aprendizaje más auténticos, donde se relacionen múltiples conceptos matemáticos. Por su parte, los estudiantes no están acostumbrados a tratar con problemas que no tienen solución, a corregir al profesor o a presentar argumentos que justifiquen su afirmación.

Por su parte, el profesor del C2 posee un dominio disciplinar profundo, pero no se encontraron elementos para suponer que conoce o pone en práctica el conocimiento didáctico del contenido matemático (Shulman, 2005). Como afirman Ball y Bass (2003), esto consiste en entender cómo necesitan los maestros entender esas matemáticas, qué más necesitan saber sobre matemáticas y cómo y dónde podrían utilizar tales conocimientos matemáticos en la práctica.

Estas diferencias entre los dos profesores quizá puedan explicarse por su formación inicial y continua, como el estudio de una maestría en didáctica de la matemática por parte de uno de ellos. Este tipo de formación le permitió reflexionar acerca de que no bastaba con que el profesor lo explicara todo bien, sino que los estudiantes debían de participar activamente. Se puede decir que, en el C2, el profesor tiene la perspectiva de las matemáticas como la ciencia rigurosa de Euclides, sistemática y deductiva. Por su parte otro profesor concibe a las matemáticas como una ciencia experimental e inductiva (Polya, 2013). Ambas son correctas y complementarias. Para nivel un básico, la intención es que la primera es un punto de llegada, no de partida (Wertheimer, 1991); la segunda es una perspectiva más nueva, se trata de presentar a la matemática en proceso de ser inventada, y esta es una actividad que pocas veces es presentada a los estudiantes.

Esta forma de hacer matemáticas conlleva a diseñar problemas que sean accesibles y equitativos a todos los estudiantes, reconociendo que cada uno es capaz y tiene el derecho de aprender a pensar matemáticamente y no solo unos cuantos. Con este propósito se ha identificado que, en ambos casos, el programa de estudio, así como el trabajo de la academia de profesores de matemáticas son recursos que impactan en la enseñanza del profesor en el aula.

5.1.2 Sobre la forma en que el plan de estudios de álgebra, a través del profesor, hace equitativos y accesibles los contenidos de la asignatura

El profesor en su labor de crear un ambiente propicio para el aprendizaje utiliza distintos medios a su alcance como apoyo a su enseñanza en el aula. Una dimensión esencial es el diseñar problemas donde todos tengan la oportunidad de contribuir. Con el estudio de los dos casos considerados se ha identificado que el plan de estudios y otras decisiones del grupo de profesores de matemáticas tienen influencia en cómo el profesor hace accesibles y equitativos los contenidos de la asignatura.

Uno de los fines del bachillerato es el desarrollo de capacidades intelectuales para analizar, reflexionar, generar y aplicar de manera creativa el conocimiento (UAEH, 2017). A uno de los profesores se le ha limitado la enseñanza de los temas finales de álgebra de primer semestre donde están contemplados algunos problemas de aplicación, específicamente de la función lineal, con el argumento de que los alumnos no van a entender tales problemas. Al finalizar una de las clases le pregunto a profesor más detalles sobre la orden que le dieron de no avanzar más en el programa y regresarse a los primeros temas. Me dice que "lo ha propuesto el secretario de la academia de matemáticas. Me dijo que no tocara los últimos temas ya que según su criterio los alumnos no me iban a entender. Comentó que cuando los estudiantes comiencen los estudios de cálculo con él, ya van a ver esos temas" (AAP4OB12FHG290317JIMM060).

En este contexto cabe mencionar lo siguiente, de acuerdo con Gimeno (1998) en la transformación procesual del curriculum existen seis niveles,

1) El curriculum prescrito
2) El curriculum presentado a los profesores
3) El curriculum moldeado a los profesores
4) El curriculum en acción
5) El curriculum realizado
6) El curriculum evaluado

La perspectiva del profesor y la institución acerca de este se encuentra en un primer nivel; el curriculum prescrito. En este estadio lo importante es el cuerpo de temas o asignaturas y no si el alumno entendió y aplicó el conocimiento, desde esta perspectiva ¿de qué sirven las evaluaciones? Si el alumno obtiene en un parcial 10 avanza a los siguientes temas, si obtiene 8 avanza, si obtiene 5 avanza y si obtiene 0 también avanza. Esta es una contradicción importante en la evaluación (Villegas, 2008), dado que en múltiples instituciones educativas, si la evaluación se utiliza para medir la aptitud, conocimiento o aprendizaje de un tema, independientemente de las calificaciones parciales de los estudiantes ¿por qué se continúa avanzando al siguiente nivel? Y aún más importante, ¿qué medidas se llevan a cabo para apoyar a los estudiantes?

La decisión de no avanzar y regresar a temas anteriores podría ser adecuada para algunos estudiantes, pero si el método y el tipo de problemas continúan siendo los mismos, entonces no servirá de mucho. Por otra parte, aquellos alumnos que aprueban los temas aparentemente sin dificultades pueden sentirse inconformes de revisar nuevamente los temas con los mismos métodos como sucedió en el C2. Generalmente en el aula existen estudiantes que requieren orientación en procesos como, por ejemplo, identificar elementos relevantes en el problema; otros necesitan apoyo en plantear conjeturas, aspectos de visualización o representación, entre otros. Por tanto, no pueden tomarse decisiones unilaterales y hay que tener en cuenta que no todos los estudiantes aprenden igual.

Al respecto el profesor opina,

> “los estudiantes aprenden matemáticas solo cuando ellos mismos construyen sus propias ideas matemáticas. Además, las ideas matemáticas se aprenden por medio de un proceso de comunicación. Los estudiantes necesitan oportunidades no solo para escuchar, sino para comunicar sus ideas matemáticas. Es decir, necesitan discutir lo que observan, explicar por qué ciertos procedimientos funcionan y por qué piensan que la solución de un problema es correcta. Cuando el aprendizaje es visto como una construcción y reorganización de conocimientos, entonces el maestro

> puede identificar las diferentes formas en las que cada estudiante aprende. Es importante que el profesor reconozca los diversos estilos de aprender entre sus estudiantes y así promueva actividades de aprendizaje compatibles con tales formas de aprender o interactuar con el contenido matemático" (Santos, 2010, p. 96).

El programa de matemáticas de bachillerato está organizado de tal manera que se centra básicamente en el desarrollo de habilidades individuales. Separan procesos como memorizar algoritmos con su aplicación, mientras que el sistema de evaluación por competencias (PISA, 2012) señala que esto no es lo más adecuado. Por ejemplo, el último subtema de la última unidad es "resolución de problemas". Para cada unidad está planeada una dedicación de 20 horas teóricas y 10 horas prácticas, en promedio a resolución de problemas se le destinará 3.5 horas.

Esta perspectiva de abordar la resolución de problemas en el curriculum de educación media superior es una de las más comunes, no solo en México sino también en otros países. El hecho de que la resolución de problemas aparezca como un apartado al final de la unidad, o de todas las unidades como una serie de actividades de aplicación práctica, muestra la falta de información acerca de lo que significa resolver problemas (Santos, 2010).

Esta perspectiva de lo "objetivo" proporciona una mirada especializada pero parcial de los contenidos en el programa de álgebra, impidiendo una visión unitaria y articulada entre contenidos y entre los conceptos y sus aplicaciones.

Con respecto a las dictaminaciones de la academia, estas pueden ser un limitante para generar un ambiente propicio de aprendizaje, como en este caso lo es en equidad y accesibilidad. Sin un conocimiento de la forma en que el profesor trabaja en el aula, la cultura social, así como características de la forma de pensar de los estudiantes, pueden tomarse decisiones equivocadas con respecto a la forma de implementar los contenidos del programa.

Por ejemplo, algunos estudiantes terminaron por ausentarse al saber que se iban a repetir los mismos temas. A pesar de ello, el dominio de los temas y el conocimiento que el profesor tiene de sus alumnos permitió generar ejercicios accesibles a un grupo de estudiantes, que se insertaron en una situación que identificaron como problemática y que significó un reto para ellos. En esta misma actividad a los estudiantes se les permitió la búsqueda de información en diversos medios y disposición de criterios de solución. A pesar de ello, el profesor no aprovechó la oportunidad de continuar trabajando bajo este ambiente de aprendizaje ya que se debía continuar con el temario. Aquí existió la posibilidad de valorar el proceso de solución, pero esto no sucedió a pesar de que la resolución de problemas constituye otra fuente rica para la evaluación.

En síntesis, el profesor, con base en un programa centrado en contenidos diseña problemas o ejercicios de aprendizaje. Estos elementos resultan ser cruciales en la conformación de un ambiente de aprendizaje. A pesar de que este ambiente en algunos aspectos ha sido distinto en cada caso, queda ahora realizar a continuación un análisis sobre la forma en que dicho ambiente está construyendo ciertos niveles de entendimiento en los estudiantes.

5.2 Los niveles de entendimiento de los estudiantes de bachillerato

En este apartado se abordan algunas características identificadas sobre los niveles de entendimiento mostrados por los estudiantes en relación al ambiente de aprendizaje construido por el profesor mediante la implementación de problemas de aprendizaje.

5.2.1 La construcción de herramientas cognitivas por parte de los estudiantes

El entendimiento se va adquiriendo por medio de la resolución de problemas, no se enseña directamente. Las herramientas son las conexiones entre el pensamiento y el objeto matemático, son los medios a través de los cuales se puede pensar y reflexionar sobre los conceptos. Éstas carecerán de sentido si el alumno no les construye un significado, de manera que es esencial un trabajo extenso con dichas herramientas y un proceso de reflexión profundo sobre cómo funcionan (Hiebert et al, 1997). La construcción de significado de las herramientas está acompañada de la participación del estudiante en experiencias donde se pongan en juego los conceptos, definiciones y las ideas matemáticas.

En el C2 existe la creencia de que el conocimiento es transmisible directamente de la mente del profesor al alumnado, sin intermediarios. Esto limita la construcción de herramientas cognitivas por parte del estudiante, por ejemplo, el lenguaje oral, el lenguaje escrito y las representaciones simbólicas.

La escasa identificación de algún intento de construir herramientas en el C2 se relacionó con el tipo de ejercicios que se realizaban y con la forma en que el profesor los abordaba. Al iniciar un tema la rutina consistía en que el profesor explicaba la forma correcta de resolverlos, y luego realizaba 3 o 4 ejercicios. Posteriormente los estudiantes resolvían más ejercicios similares imitando el procedimiento del profesor. En general el grupo opinaba que el profesor "iba muy rápido" en sus explicaciones.

Los problemas presentados no permitían la examinación de métodos para su resolución. Los estudiantes primeramente escuchaban las explicaciones claras del profesor y después la forma correcta de resolver los ejercicios. Para el profesor, un estudiante ha comprendido un tema cuando, ante una situación problemática, puede recurrir a varios métodos y seleccionar el más adecuado, "uno puede percibir cuando un alumno ha comprendido un tema cuando se le pone una cantidad de ejercicios de diferentes aspectos y el alumno es capaz de identificar el modo en el que puede llevar a cabo ese ejercicio" (AAP4EP1FHG170317JIMM011). Pero si los estudiantes no han recorrido ningún camino hasta llegar a la solución y el profesor solo les explica los que son correctos ¿cómo van a saber en qué momento aplicar el adecuado?

Esta opinión del profesor puede relacionarse con los cuestionamientos de los estudiantes acerca de la relación del tema o concepto con la vida real, aunque tal relación no siempre se hacía explicita. Se recogieron algunas expresiones como, por ejemplo, "las matemáticas son importantes, pero no le encuentro sentido porque no puedo aplicar, por ejemplo, si soy madre y necesito una suma de fracciones para darle de comer a mis hijos entonces sí aprendería, pero sé que esto no es así. Las matemáticas es aprender procedimientos, pero puedo aprender a hacer mil ejercicios hoy y mañana olvido el procedimiento”. Esta suposición viene reforzada por años de práctica bajo un ambiente de aprendizaje en donde se enseña que entender matemáticas es resolver ejercicios.

Aunque los estudiantes memorizaran y tuvieran siempre presentes las herramientas o los distintos métodos de solución y se les hiciera saber explícitamente la aplicación de algunos conceptos matemáticos en la vida real y cotidiana, aún existiría el cuestionamiento acerca de que el significado no reside en la herramienta en sí, sino en la mente de los estudiantes. En este caso no existe una relación entre una situación problemática y la herramienta matemática por el hecho de que ellos no se han involucrado en la construcción del significado. Desde la perspectiva de las competencias esto equivale a decir que es el estudiante quien construye la competencia a partir de la secuencia de las actividades de aprendizaje que movilizan múltiples conocimientos especializados. El profesor sólo crea condiciones favorables para la construcción personal de las competencias (Cano, 2008). Dichas relaciones se establecen mediante la construcción o reconstrucción de herramientas o métodos, el trabajo por un largo periodo de tiempo con éstas y mediante un proceso de reflexión sobre el cómo funcionan; este hecho no fue vivido durante el periodo de observación.

Un ejemplo en el aula que puede ilustrar la falta de relación entre los conceptos y el significado en la vida real, fue una actividad que consistía en crear un problema por parte de los estudiantes a partir de unos datos proporcionados por la profesora. A un equipo de le dieron las siguientes expresiones algebraicas: $a^2 + 2a - 3$ y $a + 3$. La respuesta de los integrantes del equipo después de 15 minutos fue

- “En una tienda de regalos las ganancias al día son $a^2 + 2a - 3$ y tienen que dividir entre dos personas que son $a + 3$. ¿Cuánta ganancia equivale cada uno?”

Al preguntar cuál había sido su procedimiento para llegar a tal planteamiento, un estudiante respondió "$a^2 + 2a - 3$ es una cantidad y $a + 3$ son dos personas. Se trata de una división de polinomios porque se parece a los ejercicios del tema anterior". Este desarrollo por parte de los estudiantes ejemplifica que se intenta aplicar una herramienta a un ejercicio similar a otros, pero sin un sentido y significado en un contexto real.

Este ejemplo también muestra que un problema puede no tener sentido en la vida real, pero al tratarse de la clase de matemáticas ahí si debe tener sentido, ya que los problemas en el aula deben tener sentido para los estudiantes (Hiebert, 1997; Barrera y Reyes, 2013; Kline, 2014; Santos, 2013 y Estrada, 2003). El desarrollo de las competencias requiere enfocarse en situaciones reales y proponer actividades auténticas, vincular el conocimiento a los problemas importantes de la vida cotidiana (Pérez Gómez, 2007).

Ante la carencia de estrategias de solución por parte de los estudiantes en ambos casos, que solo están imitando el procedimiento del profesor, puede afirmarse que los estudiantes tampoco han enfrentado situaciones problemáticas auténticas en grados o niveles anteriores como lo muestra García (2012) en una investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas básicas en México, donde el profesor en primaria trabaja con ejercicios y no con problemas y favorece procesos de memorización y aprendizaje mecánico de algoritmos. Esto también se verificó cuando en ambos casos se les preguntó a los estudiantes si habían trabajado alguna vez en problemas similares a los propuestos en clase, a lo que respondieron que no. Por el contrario, en aquellos grupos donde se ha trabajado en técnicas de resolución de problemas con prácticas de autoevaluación y aplicaciones a una variedad de contextos muestran que los estudiantes pueden transferir estrategias. Otras investigaciones muestran avances en cuanto al uso de habilidades durante el curso y en otros contextos fuera del aula, logrando así la transferencia (Santos, 2010).

Lo vivido en el C2 refuerza lo ya identificado en otras investigaciones donde las matemáticas que se enseñan en las aulas están desconectadas de las experiencias de los estudiantes y alejadas de sus intereses, en la mayoría de los casos (Gairín y Fernández, 2010). Al respecto, Kline (2014) señala que la enseñanza de las matemáticas no está preparada para enseñar a los estudiantes a pensar, sino a seguir a un guía, el profesor. Posiblemente él posea una perspectiva algorítmica de esta ciencia, y la orientación que le dé al modelo de resolución de problemas será guiada en ese sentido (Thompson, Philpp, Thompson y Boyd, 1994). Esta perspectiva ha sido adoptada en todo momento por el profesor del C2 al momento de explicar cada uno de los temas, ya que mostraba los pasos que los estudiantes deben de realizar y no daba oportunidad a los estudiantes de mostrar sus estrategias.

Otro concepto que se indagó en los estudiantes fue el nivel de comprensión de variables. De acuerdo con (Godino y Font, 2003), las dificultades mostradas por los alumnos en el uso de las variables en la resolución de las ecuaciones tienen origen en las interpretaciones que hacen de la igualdad. El profesor escribe en el pizarrón lo siguiente: $\frac{3x-8}{6} - 3x = \frac{4-3x}{9}$ y da la instrucción de encontrar el valor de "x" para que se cumpla la igualdad. Se aprovechó este ejercicio para preguntar a los estudiantes el significado del signo "=". Estas fueron algunas de las respuestas de los estudiantes.

- El signo "=" indica el resultado de un procedimiento, es la respuesta de algo.
- Indica una igualdad, que lo mismo es de un lado que del otro, pero en este caso no son iguales.
- Es una comparación de dos cosas
- Es para separar dos cosas que no son iguales

Estas interpretaciones muestran un nivel aún básico, que no permite comprender el tema de ecuaciones. Se piensa, por ejemplo, que la función central del signo "=" es separar el problema de su respuesta, como 5+2=7 se interpreta como "5+2" da como resultado "7" y no como una igualdad entre dos expresiones "5+2" y "7".

Estas interpretaciones hechas por los estudiantes son desconocidas para el profesor, él solamente tiene el objetivo de encontrar el valor de “x” y no se les pregunta por qué piensan eso del signo “=”.

Algunos otros errores comúnmente identificados en los estudiantes durante el proceso de observación fueron los siguientes:

- $8 - 7 = -1$
- $(3 - 2) = -6$. Porque de acuerdo con el estudiante lo que está entre paréntesis se multiplica.

Además del signo de la igualdad, en el tema de fracciones algebraicas se experimentó otro tipo de dificultad como la simplificación. Por ejemplo, de $\frac{x+3x^4}{x+2x^2}$ donde es común que los estudiantes procedan eliminado $x, \frac{\cancel{x}+3x^4}{\cancel{x}+2x^2}$. Esto muestra que los estudiantes no han comprendido el concepto de factor común. Si se le pregunta a una persona cuánto es dos naranjas más tres naranjas, respondería que son cinco naranjas, se suma dos más tres y el factor común es naranja. Algebraicamente esto se expresa como $2\ naranjas + 3\ naranjas = (2 + 3)\ naranjas$. Más que simplificar los estudiantes desean eliminar o tachar. Al respecto EDITEC (2014, p.76) señala lo siguiente:

> Cuando se habla de factores comunes, el termino factor es matemático y hace referencia a un divisor de un número o fracción, no a un factor o signo tipográfico presente en una expresión. Por ejemplo, 4 no es un factor de la expresión $x + 4$ aunque en ella aparezca el número y el símbolo 4. Por tanto, uno de los problemas es la interpretación del término factor. Y de que los factores se identifiquen en el proceso de descomposición de un número o una expresión algebraica como producto de factores. Es entonces cuando los factores comunes quedan aislados y podemos realizar una o varias divisiones cuyo resultado es la unidad. A este proceso se le llama simplificación. Y si se realiza es para obtener expresiones más claras y sencillas que las originales. Mientras el estudiante

no haya incorporado a su patrimonio cognoscitivo esas ideas, seguirá cometiendo esos mismos errores.

Siguiendo este procedimiento la expresión algebraica quedaría como

$$\frac{x+3x^4}{x+2x^2}=\frac{(1+3x^3)}{(1+2x)}=\frac{x}{x}\,\frac{1+3x^3}{1+2x}=1\,\frac{1+3x^3}{1+2x}=\frac{1+3x^3}{1+2x}$$

En síntesis, los niveles de entendimiento mostrados por los estudiantes de ambos casos seleccionados se encuentran en niveles básicos. De acuerdo a la OCDE (2006) y Usinsky (2012) aún no es posible superar el nivel más elemental que es el de reproducción o memorización, salvo en algunos estudiantes. En el C2 no fue posible un análisis del proceso de matematización (PISA, 2006) ya que no se identificaron problemas auténticos de aprendizaje. Sin embargo, se identificaron niveles de entendimiento que daban cuenta de la relación entre diversos conceptos mediante la resolución de ejercicios. En el C1 se pudieron identificar otros niveles de entendimiento referentes a los procesos de comunicación: cómo elaborar y representar explicaciones y argumentos en el contexto del problema, de representación; cómo crear, relacionar distintas representaciones en la interacción con algún problema, de razonamiento y argumentación; como reflexionar sobre las soluciones matemáticas y elaborar explicaciones y argumentos que apoyen, refuten o proporcionen una solución a un problema y finalmente en el diseño de estrategias para resolver problemas; como implementar y diseñar estrategias para interpretar y validar una solución.

A continuación se presenta el análisis de los niveles de los estudiantes en su relación con la evaluación y la cultura social en el aula, el cual muestra otra perspectiva para su comprensión.

5.2.2 El rol de la evaluación en la construcción de una cultura social en el aula

Desde el punto de vista de la resolución de problemas y aprendizaje con entendimiento, quien aprende matemáticas hace matemáticas. Se busca que un estudiante al resolver un problema ponga en juego conocimientos previos, destrezas, creatividad, reglas, técnicas, entre otras habilidades. Se requiere de un pensamiento productivo (Wertheimer, 1991), de nuevas construcciones y robustecimiento de relaciones conceptuales que antes no se tenían (Santos, 2010; Barrera y Reyes, 2015). Las matemáticas son, por tanto, un proceso como un producto; el resultado de un examen no puede convertirse en la única fuente de asignación de una calificación, un examen tiene mirarse desde la perspectiva de una evaluación.

El desarrollo de competencias y de entendimiento requiere de una aproximación cualitativa de la evaluación. México posee una extensa tradición positivista desde los inicios del sistema educativo que es la filosofía que sustenta a un tipo de evaluación contraria a la que se requiere en el aula, el conductismo. En esta corriente el sujeto es pasivo, una tabula rasa, el conocimiento de lo externo se da a través de las sensaciones e impresiones. La relación entre el sujeto y el objeto es a través de estímulo- respuesta. La experiencia del sujeto se da por el impacto de la actividad con el objeto produciendo algún tipo de respuesta.

Para el conductismo, el método científico es el método experimental, donde se busca anular la subjetividad del que experimenta para lograr así la máxima objetividad. Con la experimentación se pretende obtener una copia fiel de la realidad fragmentándola en variables manipulables y buscando relaciones entre estas. Un ejemplo de esto es el diseño de exámenes que solo miden la capacidad de memorización o retención de algoritmos.

Por su parte, “el objetivo de la instrucción matemática es que los estudiantes sean capaces de plantear problemas nuevos y resolverlos mediante la aplicación de conocimientos previos, que den significado a los conceptos, que encuentren sentido a los justificaciones y comuniquen resultados, pero todo lo anterior no puede valorarse mediante una prueba escrita” (Grimison, 1992; Watt, 2005 en Barrera y Reyes 2013).

De esta manera los exámenes o pruebas escritas solo requieren que los estudiantes reproduzcan información o procedimientos aprendidos previamente, así solo se está evaluando la memoria y un razonamiento imitativo (Bergqvits, 2007). Ante este hecho, Kline (2014) cuestiona, ¿Por qué se escandaliza el profesor ante el hecho de que los estudiantes usen el libro de texto en los exámenes? Esto es así porque si se estuviera enseñando a pensar realmente y no a memorizar, ¿de qué les iban a servir los libros a los estudiantes?

En cada uno de los casos, el tipo de evaluación determinó una cierta cultura social en el aula. En aquella aula donde se promovía el trabajo individual y después en equipos para discutir distintas soluciones al problema, los estudiantes se involucraban y comprometían más que en aquella aula donde todo lo explicaba el profesor y los estudiantes solamente escuchaban y reproducían procedimientos.

En ambos casos, los profesores sabían que era importante la evaluación de la participación del estudiante, pero en el C1 el profesor promovía la participación mediante una aproximación al diseño de problemas y estos le servían al profesor para evaluar el proceso de solución y la forma de pensar de sus estudiantes. Por su parte, mediante los ejercicios del profesor 2 se podían analizar errores operacionales y errores procedimentales.

En las 17 sesiones de observación del C2, se registraron entre 3 y 4 preguntas por sesión de los estudiantes con respecto a si el ejercicio que escribía el profesor en el pizarrón aparecería en el examen, además de preguntas sobre las fechas, el valor de este y otras dudas sobre su proceso de acreditación. De manera que en 34 horas de clase se preguntó sobre la evaluación unas 70 veces aproximadamente. De esta forma se generó una cultura social de tensión permanente al tipo de evaluación llevado a cabo. Ya en la década de 1970 se habían realizado investigaciones como las de Good y Grouws (1977) que mostraban la fuerte asociación entre ciertos elementos del ambiente en el aula con el aprendizaje y la enseñanza; uno de ellos fue la evaluación. La efectividad de la enseñanza y el alto desempeño de los estudiantes era promovida por un ambiente no evaluativo, sino centrado en las tareas de aprendizaje en el aula.

En el C1 se encontró que los estudiantes se centraban en la resolución de algunos problemas, desarrollando ciertos niveles de entendimiento como de conexión, reflexión (PISA, 2006), modelación y representación metafórica (Usinski, 2012). Algunos alumnos construían un proceso activo de comunicación de ideas. Con base en este trabajo, el profesor diseñó en clase una prueba en consonancia con las actividades realizadas en clase con sus estudiantes, donde el promedio de calificaciones fue de 9. Días más tarde, cuando se aplicaron los exámenes parciales de la academia los resultados fueron bajos, en promedio 4.5 en una escala de 10.

Esta diferencia de las calificaciones entre un examen diseñado por la academia de matemáticas y una prueba diseñada por el profesor, expone una incompatibilidad de los supuestos conceptuales con los que son elaborados ambos. Por un lado el profesor intenta seguir el principio de evaluar los procesos de enseñanza y de aprendizaje con un enfoque formativo, congruente con el programa académico de bachillerato de la UAEH basado en competencias. Por su parte el cuerpo académico de matemáticas diseña un examen basado en habilidades como la memorización así como el aprendizaje y la aplicación de algoritmos.

Al respecto, Barrera y Reyes (2013) señalan que si en el proceso de instrucción se están desarrollando procesos auténticos de resolución de problemas y de pensamiento matemático es fundamental que en el proceso de evaluación se utilicen actividades similares a las empleadas durante el proceso de enseñanza. En este caso los exámenes parciales no se correspondían con las actividades desarrolladas en clase, y tampoco a una evaluación por competencias, ni de aprendizaje con entendimiento.

Estas pruebas no evalúan competencias, principalmente por que los problemas no están contextualizados, además de desvincular contenidos. Los ejercicios no dan cuenta de los procesos de pensamientos de los estudiantes.

El desarrollo de competencias matemáticas, que incluye el empleo del lenguaje matemático, la creación de modelos y las habilidades relacionadas con la solución de problemas, tal como se propone el programa de álgebra de bachillerato, no está desvinculado de su evaluación o medición. PISA (2006) recomienda que las competencias no estén separadas de los ejercicios o problemas del examen; de esta forma se asume que la ejecución de cualquier tarea matemática requiere la aplicación de varias competencias. Con esta intención, un examen basado en el desarrollo de competencias, vinculado con la planeación y el desarrollo de los temas en clase debe organizarse en función de unos «grupos de competencias concretas» que definen el tipo de habilidad mental requerido" (OCDE, 2006, p. 14).

Respecto al C1, el profesor diseñaba problemas desde la unidad I, si bien no eran problemas relacionados con la vida real se buscaba interesar al estudiante y que expusiera sus ideas. En el C2, el profesor afirmaba que es muy difícil buscar aplicaciones de la vida real para los temas iniciales de álgebra.

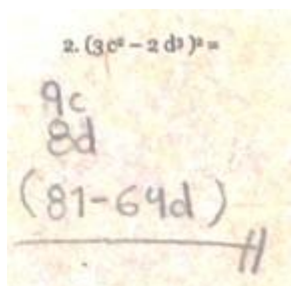
Por su parte los exámenes de álgebra tampoco corresponden a una evaluación por resolución de problemas o aprendizaje con entendimiento debido a que la resolución de problemas no puede estar contenida al final del programa (Santos,2010), es decir, la resolución de problemas no es un contenido, sino una metodología de trabajo constante. La resolución de problemas es un eje trasversal del programa de estudios.

Mediante estos hechos se puede afirmar que, en el C1, existen diferencias entre el papel del profesor en la implementación y evaluación de problemas de aprendizaje con la forma de calificar de la institución por medio de un examen, esto conlleva a una implicación más profunda. Santos Guerra (2003), Monereo (2014) y Villegas (2008) se refieren a que la evaluación dirige o condiciona a todo el proceso de enseñanza aprendizaje. Afirma Villegas: "dime cómo evalúas y te diré como enseñas y qué aprenden tus estudiantes" (2008, p. 159). Esto no solo es para conocer al profesor sino a quienes aplican la evaluación, ya que en este caso es la institución quien tiene el control de una parte de la evaluación.

Los estudiantes del C1 comenzaban a trabajar en un ambiente más propicio para el desarrollo del pensamiento matemático, se interesaban por el problema, exponía sus conjeturas, las discutían, presentaban contraejemplos y argumentos, relacionaba conceptos previos y creaban alternativas de solución para algunos problemas, pero, después de la evaluación parcial creían que su esfuerzo no había rendido frutos. En el C2, los estudiantes reforzaron aún más la idea de su compromiso por identificar qué tipo de herramienta utilizar y memorizar los procedimientos para aplicarlos adecuadamente. Creían que esto podría lograrse realizando aún más ejercicios en clase para estar mejor preparados en el examen.

Esta situación pone a los profesores en un dilema, en el C1 el profesor, ante el hecho de que sus alumnos obtuvieron bajos resultados en el examen parcial (60%) y altos resultados en su sistema de evaluación en clase, decide hacer una prueba que llama “proyecto” con ejercicios similares a los que trabajaba con sus estudiantes en clase y promediarlos con los resultados del examen. Resultó que, algunos estudiantes pudieron resolver problemas aparentemente distintos que los del examen y que involucraban casi las mismas operaciones. Para ilustrar lo anterior se muestra el resultado en el examen de un estudiante (Imagen 5) ante el desarrollo de un binomio al cuadrado, en donde llegó a una respuesta incorrecta.

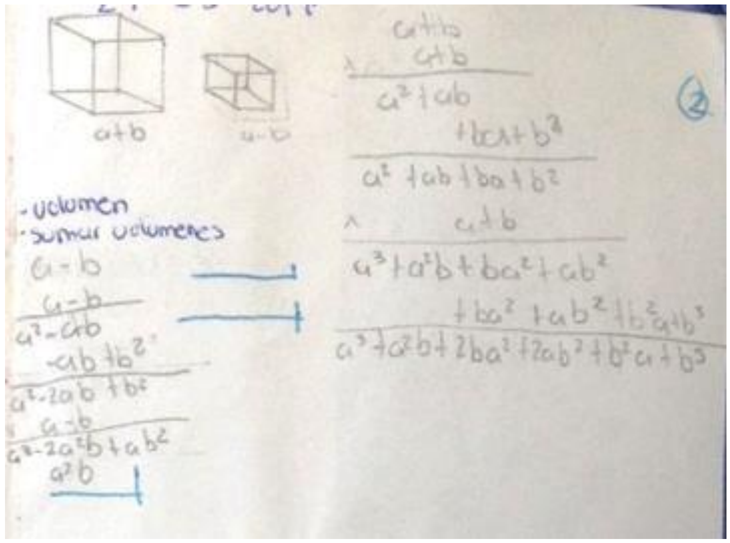
Imagen 5 Binomio al cuadrado



En la siguiente Imagen 6 se muestra la respuesta de la misma estudiante una semana después en el proyecto, aquí se puede observar cómo desarrolla un binomio al cubo, para ello multiplica tres veces a-b. Su estrategia es adecuada y su resultado correcto. Al ser cuestionada sobre su forma de pensar en el ejercicio en el examen y en el proyecto que la llevó por un lado a utilizar una estrategia correcta y en el examen no, respondió que en los exámenes se pone nerviosa y se bloquea, no sabe qué hacer, pero como en la segunda prueba la maestra les dijo que se trataba de un proyecto y no de un examen puedo contestar con más tranquilidad.

Aun así, no pudo expresar su forma de pensar en el proyecto, pareciera como si ella, al igual que otros estudiantes no pudieran reconocer sus procesos mentales, tanto correctos como incorrectos.

Imagen 6 Binomio al cubo



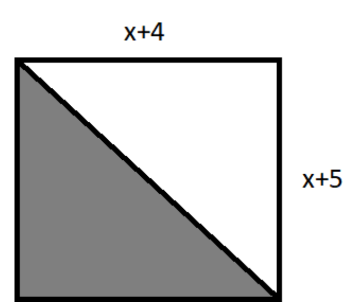
Desde la perspectiva del entendimiento y resolución de problemas, ¿podrían los estudiantes acostumbrarse a un tipo de problemas y aprender a resolver otros más complicados, pero ante unos más simples, como los del examen, no razonarlos? Al respecto,

> al finalizar la clase platico con el profesor sobre los resultados de los exámenes, y me comenta el caso de una buena estudiante en clase que obtuvo baja calificación en su examen. Después le pregunto a la alumna sobre lo sucedido, y dice que se puso nerviosa, además de que el ritmo de trabajo en clase es de competencia por ver quien termina primero entre ella y otro de sus compañeros, memorizó los procedimientos con rapidez, y ante un pequeño cambio en el examen no lo razonó y lo hizo muy rápido. Dice que no se percató de su error, que llevaba la inercia de la clase al examen. No se detuvo a razonar detenidamente.” (AAP4OB16FHG200417JIMM071)

El nerviosismo y el aprendizaje por memorización puede estar relacionado con la inhabilitación de procesos cognitivos superiores, de acuerdo con Skempf (1999), quien ha experimentado y reconocido que las actividades mentales más elevadas como la reflexiva de la inteligencia es la más fácilmente inhibida por la ansiedad y el estrés. Este puede provocar un círculo vicioso en el aprendizaje matemático. Puede ocurrir por varias causas, una de ellas es el estar acostumbrado a un tipo de aprendizaje memorístico, que en un inicio es difícil diferenciar del aprendizaje con comprensión, y posteriormente cuando las matemáticas se hacen más avanzadas y complejas este procedimiento memorístico queda limitado.

En algunos casos en las aulas observadas se llegaron a identificar procesos memorísticos como el que se describe a continuación. En el C2 pudo detectarse cómo, ante una situación problemática más compleja que requería algo más que buena memoria, los estudiantes con mejores calificaciones en el examen no pudieron encontrarle sentido al problema, relacionar conceptos o solucionarlo. Se muestra cómo los estudiantes trabajan bajo la inercia de pensamiento, una lógica de la clase en donde el ejercicio propuesto se resuelve bajo el método explicado en el tema inmediato anterior. Este fue el caso de un problema propuesto al grupo. Fue dado un cuadrilátero de lados (x+4) y (x+5), se pidió calcular el área del triángulo sombreado formado por la diagonal de dicho cuadrilátero como se observa en la Imagen 7.

Imagen 7 Cálculo del área sombreada

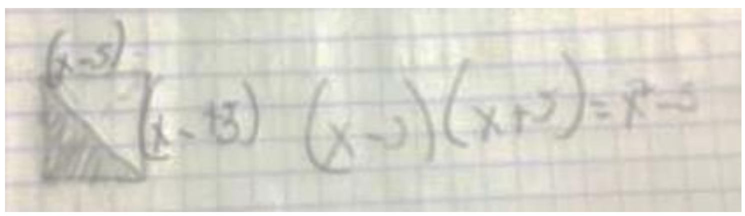


En un principio la mayoría de los estudiantes comienzan a hacer operaciones antes de entender el problema. Algunas afirmaciones se empezaron a hacer por parte de los estudiantes más destacados en calificaciones como fueron las siguientes:

- Todos los lados de un triángulo deben ser iguales
- La fórmula del triángulo es base por altura
- La altura del triángulo es la distancia entre el punto medio de la diagonal al vértice inferior izquierdo del cuadrilátero.
- La figura es un cuadrado

Un estudiante que obtuvo en el primer examen parcial 9.5, hizo lo siguiente (imagen 8):

Imagen 8 Solución de un estudiante al problema del área sombreada



Los datos que él escribe no corresponden al problema (x-+3)(x-5). al cuestionarle por qué realizaba dicha multiplicación respondió que como estaban viendo el tema de binomios conjugados este problema debía de resolverse por el método correspondiente a dichos ejercicios, por tanto, cambia el signo de uno de los lados. En este C2 se había construido una cultura social en donde la naturaleza del ejercicio estaba determinada por el tema que se estudiaba en el momento. Esta inercia de trabajo llegaba al último tema del programa dedicado a la resolución de problemas donde el estudiante esperaba que el profesor mostrara la forma correcta de resolver algunos de estos para posteriormente ellos hacer los propios, además de especificarles de qué tema se trataba el problema, así ellos podían revisar su cuaderno y aplicar el algoritmo que corresponde.

Este problema propuesto, si bien hizo falta discutirlo más ampliamente, cumplió el cometido de presentar una situación fuera de la rutina como poner en práctica la definición etimológica del término “problema”, que se refiere a algo que se presenta o se arroja a alguien. Estas situaciones inesperadas y novedosas pero intencionadas pueden convertirse en instrumentos para la evaluación. Como afirma Eisner (2002) las tareas para evaluar qué saben y pueden hacer los estudiantes deben reflejar las tareas con las que se encontrarán en un futuro fuera de las escuelas y no solo limitadas al trabajo escolar. De acuerdo con Hiebert (1997) se debe preparar para la incertidumbre ya que no se sabe qué problemas puedan surgir en un futuro. Esto pone a discusión la idea de si el curriculum debe centrarse en contenidos o en habilidades.

Bajo un curriculum centrado en contenidos pareciera que los conocimientos del profesor son fundamentales en su proceso de contratación. En un curriculum centrado en el desarrollo de habilidad del estudiante el conocimiento disciplinar que posee el profesor no es suficiente sin un conocimiento didáctico y epistemológico de la matemática, como lo puede ser el conocimiento de teorías de enseñanza y aprendizaje. Esta formación es importante porque un estudiante aprende matemáticas, y tanto su gusto o rechazo por medio de las experiencias que los profesores le proporcionan, como su capacidad en matemáticas están moldeados por las formas de enseñanza en el aula (Barrera y Reyes, 2013). Una experiencia importante acontecida en ambos casos fue la evaluación, que parece desarticulada de entre las distintas dimensiones del ambiente de aprendizaje.

5.3 Conclusiones

En base a los objetivos de investigación, en el apartado del análisis se discutieron elementos sobresalientes de las distintas dimensiones del ambiente de aprendizaje en el aula. Estas fueron consideradas para construir relaciones con los niveles de entendimiento identificados en los estudiantes. A continuación, se presentan conclusiones que intentan dar respuesta a los objetivos planteados. Una respecto al ambiente de aprendizaje que construye el profesor, otra dirigida a los niveles de entendimiento que construyen los estudiantes y finalmente una conclusión que aborda la relación entre las dos anteriores.

5.3.1 Respecto al ambiente de aprendizaje que construye el profesor

Esta primera conclusión hace referencia a los roles del profesor en el aula, así como el tipo de tareas que implementa. Estas dimensiones estrechamente relacionadas son sensibles al impacto que tienen las decisiones administrativas. Dicha vinculación se comprende bajo la perspectiva de otras relaciones que van más allá de trabajo en el aula pero que inciden directamente en esta, como pueden ser los procesos de evaluación que implementa la institución y que se describe a continuación.

5.3.1.1 El rol del profesor

El profesor resultó ser fundamental en la construcción de un ambiente de aprendizaje en el aula, pero no el único. En referencia a los dos profesores que han sido parte de esta investigación se identificaron dos elementos que tuvieron influencia directa en sus decisiones. En primer lugar, están los aspectos de carácter institucional como las decisiones de academia, particularmente en cuanto a la interpretación limitada acerca del plan de estudios, así como adecuaciones y sugerencias que se hacen sobre la marcha. Dichas interpretaciones tienen la finalidad de asegurar un mínimo de aprendizajes en los estudiantes que posibiliten la aprobación de la asignatura y con ello reducir los índices de deserción.

Un hecho que muestra la afirmación anterior es el significado que se le asigna al término “resolución de problemas” por parte de algunos profesores y de la academia, como un apartado al final del programa de estudios y no como metodología que debiera guiar parte de la práctica del profesor. Limitar las estrategias didácticas del profesor y promover la repetición de contenidos para asegurar un mínimo de conocimientos en los estudiantes fue una acción llevada a cabo bajo esta interpretación reduccionista del curriculum.

El segundo elemento fue la evaluación a los estudiantes como un elemento de control por parte del sistema *syllabus* y las evaluaciones parciales organizadas por la academia de matemáticas. Mediante el sistema *syllabus* el profesor sube calificaciones de exámenes y competencias por estudiante, pero no puede consultar los promedios parciales o globales. Un profesor con diez grupos y un promedio de 35 alumnos por grupo tiene que ingresar al sistema de evaluación diez competencias por estudiante y tres evaluaciones: dos parciales y una ordinaria. Esto da como resultado un aproximado de 10,500 calificaciones por semestre, dejando menos tiempo para la planeación de clase, además de su autoformación en la parte disciplinar y didáctica. Es importante tomar en cuenta que el alto desempeño de los estudiantes es promovido por un adecuado diseño, implementación y evaluación de problemas de aprendizaje en el aula y no tanto en un ambiente centrado en la medición cuantitativa (Good y Grouws, 1977) lo que permitiría el desarrollo de un ambiente encaminado a la mejora del profesorado.

Por su parte los exámenes parciales no están elaborados bajo el modelo por competencias, siendo este un eje adoptado en el programa académico de bachillerato. Más bien las pruebas están enfocadas en medir la capacidad de memorización de los estudiantes y su habilidad para reproducir procedimientos, dejando a un lado procesos fundamentales del pensamiento matemático como la comunicación, el planteamiento de conjeturas y la elaboración y explicitación de argumentos matemáticos.

El rol del profesor está influenciado por estos dos aspectos mencionados que a su vez repercute en el ambiente de aprendizaje en el aula en donde se desarrollan ciertos niveles de entendimiento matemático en los estudiantes.

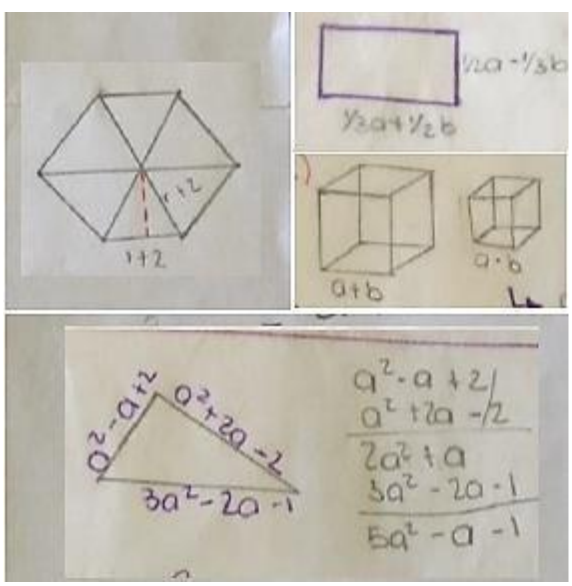
En este sentido, en el C2, el nivel que desarrollaron algunos estudiantes fue básicamente memorístico propiciando en ellos cierto tipo de conexiones con otros conceptos matemáticos. En contrastación con el C1 existieron intentos por implementar problemas más auténticos, en donde se favorecieron procesos de comunicación entre estudiantes, pero no así con el profesor, haciendo falta su intervención para definir elementos conceptuales que en ocasiones quedaban en el sentido común.

Las diferencias en relación con el rol del profesor en el aula en ambos casos parecen centrarse en el reconocimiento de la importancia de una sólida formación disciplinar y didáctica de la matemática. Ambos buscan que sus estudiantes comprendan conceptos matemáticos, pero lo hacen bajo distintas estrategias. Éstas han mostrado tener impacto en la construcción del ambiente de aprendizaje en sus respectivas aulas.

5.3.1.2 El tipo de problemas implementados en el aula

Ambos profesores consideran que uno de los mayores obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas es el uso exclusivo de la memorización. Se identificó en los dos casos que no existieron variedad en los problemas implementados que permitieran a los estudiantes explorar otros métodos de aprendizaje de las matemáticas. En el C1 se planteaban problemas que se abordaban primeramente en grupos de 3 o 4 alumnos y posteriormente se hacía una discusión grupal. Los problemas se centraron en cálculo de perímetros, áreas y volúmenes de distintas figuras para abordar temas como, factorización, suma, resta, multiplicación y división de polinomios, productos notables, entre otros. La siguiente Imagen 9 muestra una prueba del segundo parcial con algunos problemas a resolver.

Imagen 9 Algunos problemas del examen parcial



Esta fue la estrategia principal del profesor para relacionar el álgebra con la geometría, pero existieron casos de estudiantes donde no podían resolver el ejercicio si no aparecía la figura geométrica. Esto muestra que el profesor pudo haber diversificado el tipo de problemas y no centrarse en uno solo, como abordar problemas con múltiples soluciones (Barrera y Reyes, 2017) o problemas sin solución (Santos, 2010) o articular conceptualmente saberes matemáticos en el discurso del profesor (Rondero, 2015). La poca operatividad de este tipo de problemas se vuelve una actividad restrictiva y poco consistente conceptualmente, siendo necesario dar sentido a los problemas.

En el C2 los problemas se caracterizaban por ser exclusivamente de tipo reproductivo (PISA, 2012) en donde se desarrollan procesos como memorización procedimental para posteriormente reproducirlo su estructura en otros tipos de ejercicios. En algunos casos los estudiantes pueden llegar a conectar conceptos, como se dio cuando resolvían ejercicios de factorización y el binomio de Newton. Por su parte en el C1 el profesor intentaba desarrollar problemas de tipo reflexivo, desarrollando la comunicación entre estudiantes, pero quedando limitados estos problemas por su diseño y profundidad para razonar sobre conceptos matemáticos, propiciando el desarrollo de ideas desconectadas entre los estudiantes y, en algunos casos, un conocimiento de sentido común, como cuando confundían unidades lineales con unidades cuadradas. Es importante recordar que el diseño de tareas es un recurso sumamente valioso al alcance del profesor para transformar el aula de matemáticas (Stein, Grover & Henningsen, 1996).

Puede concluirse que el tipo de tareas ya sean rutinarias o auténticas permitió la identificación de múltiples carencias conceptuales en los estudiantes, como en el caso de las fracciones algebraicas lo fue el concepto de igualdad y de factor común. Sin embargo, no se generaron nuevas tareas de aprendizaje que permitieran enlazar sus conceptos previos, con el fin de contrastarlos, reforzarlos o sustituirlos por un nuevo conocimiento.

5.3.2 Con respecto a los niveles de entendimiento que construyen los estudiantes

La construcción de herramientas cognitivas depende fundamentalmente del tipo de tareas que se desarrollen. En el caso donde los estudiantes abordaban ejercicios rutinarios las estrategias que comúnmente se desarrollaban era la memorización de procedimientos.

El tipo de tareas es un elemento que puede transformar la forma en que el estudiante construya sus herramientas cognitivas, en este caso no se identificó el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes debido en gran medida a que no se analizaron en profundidad la naturaleza de los problemas o tareas de aprendizaje.

5.3.2.1 La construcción de herramientas cognitivas

Se identificaron en forma escasa la construcción de herramientas cognitivas por parte del estudiante en el C1. Lo destacable en este caso y que no se identificó en el C2 fueron los procesos de comunicación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias y representaciones. Estos elementos son básicos en la construcción de niveles superiores de entendimiento matemático.

Aunque en uno de los casos se pudo identificar un intento por diseñar problemas más auténticos y romper con el ritmo de trabajo de cursos anteriores, los resultados no fueron diferentes a la otra aula donde se trabajaba bajo un modelo mecánico. Esto puede deberse que los procesos de mecanización ocurridos en diversas aulas tienden a cegar a los estudiantes del significado de aquello que se hace. Aparecen casos donde estudiantes pueden sumar, restar, dividir y multiplicar rápido y sin errores, pero a menudo no saben cuál de éstas usar ante algún problema. Como señala Wertheimer (1991), la enseñanza no debe hacer hincapié principalmente en el aprendizaje y la ejercitación repetitivos, sino dejar que el alumno descubra las características y requerimientos estructurales de situaciones dadas.

Dichos hábitos de mecanización tienen un efecto cegador en los estudiantes donde en ocasiones intervienen otros factores como “los hábitos adquiridos mediante el aprendizaje repetitivo, la actitud adoptada hacia los problemas y cierta atmosfera imperante en los centros escolares con respecto a aprender, hacer y pensar” (Wettheimer, 1991, p. 124).

Lo anterior refuerza la conclusión de que la construcción de herramientas cognitivas por parte del estudiante está fuertemente ligada (ya sea para desarrollar entendimiento o cegarlo) al rol del profesor que desempeñe en el aula, así como al tipo de problemas de aprendizaje que diseñe más que a los planes de estudio. Cuando estos se convierten en el único referente para el profesor parece que suelen tener un efecto cegador estructural en los estudiantes.

En estos casos analizados puede concluirse, con respecto al tipo de herramientas construidas por el estudiante, que éstas no fueron valoradas en cuanto a su dimensión didáctica y conceptual de una forma profunda como lo fueron sus carencias y por tanto no se generaron tareas adecuadas para combatir dichas deficiencias, como lo es el establecer conexiones entre distintas áreas de la matemática.

5.3.2.2 La evaluación

La evaluación es una dimensión en estrecha relación con los demás elementos del ambiente de aprendizaje. El tipo de evaluación por medio de exámenes parciales no corresponde a una evaluación por competencias; más bien está basada en un paradigma cuantitativo que pretende medir la capacidad de memorización y el alcance de los objetivos. Este tipo de evaluación condiciona todo el proceso de enseñanza y aprendizaje en el C2, siguiendo una instrucción acorde al tipo de exámenes, incluso en el C1 donde se intenta realizar una evaluación de tipo cualitativa.

Desde un punto de vista de la evaluación cuantitativa, la diferencia de calificaciones en exámenes entre ambos casos no es significativa como para afirmar que un estilo de enseñanza es mejor que el otro. Desde la evaluación cualitativa (Eisner, 2002), durante la implementación de problemas en el C1, se generaron procesos de razonamiento, comunicación y reflexión, por medio de la búsqueda de relaciones entre conceptos, crear y justificar conjeturas, buscar ejemplos y comunicar ideas. En el C2 destaca la capacidad del profesor por generar ejercicios específicos para cierto grupo de estudiantes que les permitan realizar conexiones con conceptos previos.

Estos elementos señalados no parecen ser relevantes acorde a la evaluación realizada por la academia. En este caso, el proceso de evaluación se enmarca en una perspectiva reduccionista del curriculum quedándose en una primera etapa que es el curriculum prescrito (Jimeno, 1998) donde el proceso de enseñanza y aprendizaje se centra en los contenidos.

5.3.2.3 Cultura social

Se encontró relación entre los tipos de evaluación realizados por la academia y por el profesor. En el C1 los estudiantes en el aula trabajaban de una forma que les facilitara memorizar procedimientos correctos para llegar al resultado. Algunos lo hacían individualmente y otros en pares. En el C2, el profesor, al desarrollar y evaluar procesos como comunicación de ideas, reflexión, distintas formas de representación y argumentación de resultados, entre otros, la organización del aula permitía en una sesión el trabajo individual, en parejas, en equipos de 4 integrantes o todo el grupo enfocado en un problema.

Una creencia implícita presente en ambos casos es que el estudiante piensa que el profesor es el responsable de su aprendizaje, pero en el C2 el rol del profesor mostraba que quien es responsable del aprendizaje son los propios estudiantes. Este juego de creencias puede terminar por no responsabilizar a ninguna de las dos partes.

5.3.3 Con respecto a la relación entre los ambientes de aprendizaje y los niveles de entendimiento

Los niveles de entendimiento poseen una relación dinámica con respecto al ambiente de aprendizaje. Este elemento parece estar reproduciendo una práctica escolar predominante en México que pretende que el estudiante aprenda para pasar exámenes y enseñar para obtener buenos puntajes en pruebas estandarizadas. A su vez impide el desarrollo de una cultura matemática más amplia que involucre elementos de resolución de problemas, articulación de saberes matemáticos en el discurso del profesor o la evaluación formativa. Los esfuerzos por ambos profesores de construir un ambiente propicio para el aprendizaje en diversas ocasiones son disminuidos por este tipo de prácticas escolares en cuanto a la enseñanza y la evaluación de conocimientos y habilidades matemáticas.

Como señalan Kohler, Kofka y Sander (1963), aplicando su concepto de totalidad, las singularidades, como puede ser el aula, el profesor o el estudiante son generadas y configuradas dentro de un todo continuo y dinámico que es la cultura escolar del cual forma parte la cultura social en el aula. En este contexto significa que el profesor es parte de un ambiente escolar que incide en sus roles dentro del aula.

Los distintos elementos del ambiente de aprendizaje, en su análisis individual y global mostraron una fuerte interconexión entre estos, identificándose, además, otras dimensiones como las indicaciones de la academia de matemáticas y la evaluación en control de la institución.

Esto refuerza lo afirmado por Hiebert (1997) acerca de la unidad que constituye el ambiente de aprendizaje. Esta totalidad se caracteriza por ser altamente dinámica donde las relaciones entre las dimensiones del ambiente se expresan como una magnitud unificada, de ahí su complejidad para abordarlas individualmente e independientes del contexto.

Aunado a lo anterior, las distintas características de los estudiantes en cuanto al desarrollo de entendimiento muestran la falta de articulación entre los elementos del ambiente, incentivada por la concepción de un curriculum centrado en los contenidos y no en quien los trasmite. Incluir al profesor como un elemento dinámico del curriculum de matemáticas y no solo como un reproductor de contenidos puede permitir el engranaje con las demás dimensiones del ambiente de aprendizaje.

Las limitaciones de las condiciones bajo las cuales se llevó a cabo la investigación no permitieron profundizar en las dimensiones como el diseño de tareas y la construcción de herramientas cognitivas, con la intención de ampliar el conocimiento de aquellos elementos que favorecen u obstaculizan un aprendizaje con entendimiento en los estudiantes.

5.4 Recomendaciones

En base a la teoría y el análisis de los resultados expuestos, se plantean una serie de sugerencias con el objetivo de fortalecer el ambiente de aprendizaje y posibilitar mejores niveles de entendimiento en los estudiantes. Las siguientes recomendaciones no pretenden ser una receta, sino una postura crítica y reflexiva sobre los resultados de este trabajo y que retoma algunos principios de la perspectiva teórica del aprendizaje con entendimiento. Bajo esta mirada, se tiene presente el hecho de que, como afirman Hiebert y Grouws (2007):

> No hay razón para creer, basándose en hallazgos empíricos o en argumentos teóricos, que un único método de enseñanza es el más eficaz para lograr todos los tipos de metas de aprendizaje. Tal vez algunos métodos de enseñanza son más efectivos para, por ejemplo, memorizar números, mientras que otros métodos de enseñanza son más efectivos para profundizar la comprensión conceptual y otros métodos para adquirir una ejecución fluida de procedimientos complejos…, el método de enseñanza mejor o más eficaz podría ser una combinación de métodos, con un cambio oportuno y ágil entre ellos (p. 375).

El aprendizaje con entendimiento y el enfoque por competencias no son las únicas formas de trabajo que pueden aportar significativamente a la mejora del ambiente de aprendizaje en el aula de matemáticas. Se deben de tomar en cuenta otras teorías cognitivas y constructivistas de la enseñanza y el aprendizaje.

5.4.1 Respecto a los roles del profesor

Una base fundamental para la mejora de la enseñanza de la matemática es el profesor. En México los profesores identifican más bien modas respecto a su proceso de formación. Es necesario ir más allá de la sustitución de un modelo por otro, imponiendo un modelo de enseñanza y ejecutando solamente las recomendaciones de los especialistas. Esto a su vez se traduce en cursos a profesores que muchas veces no están fundamentados adecuadamente. De manera que se vuelve indispensable un sistema de formación de profesores de matemáticas para nivel medio superior.

5.4.2 El pensamiento crítico y su papel en la construcción de las herramientas cognitivas

Un problema matemático por sí solo carece de sentido si no existe un interés por parte de quien lo resuelve. Un proceso fundamental en el entendimiento es el arte de formular preguntas. El profesor puede llegar a acuciar al estudiante con distintos cuestionamientos para despertar el interés. Pero también existe una disposición innata que es el pensar inquisitivamente, aquella capacidad para cuestionarse el por qué y el cómo funcionan las cosas como lo hacen. Por ejemplo, en días posteriores al sismo del 19 de septiembre de 2017, se ha difundido masivamente en redes sociales una noticia sobre una supuesta donación de Rusia a México para los damnificados del terremoto, donde se hace el comentario que se indica en la Imagen 10:

Imagen 10 Error de cálculo en un Tweet

De los muchos cuestionamientos que puedan existir ante este mensaje destaca el por qué la donación está en euros y no en rublos rusos o dólares o a través de qué organización se hizo la donación, entre otros. Lo que sí puede cuestionarse con argumentos es la conversión de euros a pesos: 1 euro equivale aproximadamente a 21 pesos, entonces 20 millones de euros equivalen a $420 millones de pesos (420,000,000) y no $42 mil millones (42,000,000,000) como dice el mensaje. Seguramente entre quienes leyeron el mensaje conocen el significado de la “regla de tres” e incluso podrían resolver algún ejercicio de esta naturaleza si se les propusiese hacerlo. Pero lo que no se observó fue la aplicación efectiva de la herramienta (regla de tres) en una cuestión cotidiana como esta conversión entre monedas. En los varios días que duró este mensaje en los primeros lugares en Twitter, no se encontró ningún cuestionamiento crítico al mensaje, solo se continuó difundiendo.

Esto apunta a un problema más profundo. Se puede conocer la herramienta y aplicarla a distintos contextos, pero solo si se le pide hacerlo, no voluntariamente. Estas fueron algunas de las expresiones más comunes en las aulas estudiadas, los problemas y ejercicios realizados se hacían para cumplir y no se generaban preguntas nuevas a partir de los resultados obtenidos. Por tanto, antes de la construcción de herramientas es fundamental despertar el pensamiento crítico. No existe una receta de contenidos preestablecidos para este propósito ya que se trata de una habilidad, esto posibilita que el modelo por competencias, el cual adopta el sistema de bachillerato de la UAEH pueda establecer como fundamente en sus programas de estudio.

Una propuesta que es posible realizar desde el modelo por competencias puede consistir en organizar el curriculum en base a habilidades y no solo a contenidos (Santos, 2010). Una competencia implica el desarrollo conceptual y de habilidades. El desarrollo de la habilidad puede hacer del profesor un guía y no solo un ejecutor del programa. El docente estaría involucrado en la elección del contenido y el método para desarrollar la habilidad. Por ejemplo, ¿por qué un diálogo como el Menón, redactado hace poco más de dos milenios, sigue causando interés, asombro e influencia en la elaboración de algunas teorías del aprendizaje? Aunque el contenido temático es importante, la duplicación del cuadrado no juega un papel tan esencial en este contexto como lo es el método. La intención inicial de

Sócrates es desarrollar la virtud, entonces él selecciona el contenido y el método para desarrollar dicha habilidad.

Este diálogo es un ejercicio de reflexión, un ejemplar ideal que inspira a la mente con la idea de desarrollar una mejor didáctica. Se sabe que en la vida cotidiana un solo problema quizá no sea suficiente para desarrollar entendimiento. Una reflexión desprendida del dialogo “el Menón” es que el proceso de educar se desarrolla de forma mediata, nunca directamente. El entendimiento es exactamente este mismo principio, no se puede exigir enseñar el entendimiento (Lonergan, 2006).

Spaemann (2003) afirma al respecto que educar no es ningún proceso propio de la racionalidad instrumental al igual que la selección de contenidos en el curriculum (Jimeno, 1992). No existe ninguna actividad especial que se llame educar; la educación es un proceso secundario que sobreviene cuando se hacen muchas otras actividades. Por ejemplo, el educador debe tener en mente que sus estudiantes entiendan. El profesor se encuentra entre el objeto y el estudiante. El contenido que él transmite ha de ser comprendido adecuadamente de tal manera que en el estudiante pueda despertar una relación con el objeto de conocimiento, el profesor guía, como Sócrates a Menón y, después, el resultado de la relación entre el estudiante y el objeto ya no está en manos del profesor,

La determinación de contenidos del curriculum no es un proceso de la racionalidad científica (Jimeno, 1992). En esta misma idea, otra posible propuesta es que se pueda organizar el programa a partir de rasgos fundamentales del quehacer matemático, como visualizar, interpretar diagramas, descubrir situaciones, argumentar, diseñar un problema auténtico e identificar patrones. Estos elementos pueden actuar como ejes organizadores del curriculum, no solo a base de sustitución de contenidos, que por más modernos que sean puede caerse en el riesgo de que pueden continuar trabajándose con los mismos métodos de hace 20 años. No solo es el contenido, es la habilidad a desarrollar.

5.4.3 Tipo de tareas de aprendizaje

Si el curriculum está organizado en base al desarrollo de habilidades es posible la integración y experimentación de múltiples problemas de aprendizaje y no solo los marcados en un programa. Este reto es importante para establecer un vínculo entre la matemática y la vida cotidiana, no se pueden seguir suponiendo ejemplos ficticios a los que nunca se enfrentará un estudiante, es necesario explorar la realidad, extraer problemas y analizarlos, transformarlos y adaptarlos en el aula.

Puede suponerse que, si las matemáticas son útiles en toda la sociedad, entonces la participación de los estudiantes puede llevar a la investigación los diferentes trabajos y actividades cotidianas, desde la construcción, ingeniería, industria, hospitales, vendedores de seguros, entre otros aquellos problemas en los que la matemática tiene impacto. Estos pueden adaptarse y desarrollarse en el aula. Es esencial mostrar que cada día surgen nuevos desafíos y no se sabe con certeza cuáles serán los próximos. De esta manera, un reto consiste en preparar al estudiante para el cambio y la incertidumbre. Desde esta perspectiva profesores y directivos pueden dialogar sobre la forma en que la matemática puede aportar al desarrollo cognitivo del estudiante para que impacte positivamente en la sociedad.

En la realidad analizada se obtuvieron indicios acerca de la falta de compromiso de los estudiantes con su aprendizaje. Por ejemplo, esto sucede desde el momento en que los estudiantes ven al profesor como fuente de verificación y validación de resultados o cuando el profesor identifica actitudes de irresponsabilidad en sus estudiantes que llevan a tomar determinaciones de academia como repetir los temas. Desde la perspectiva de la presente investigación, es cierto que el profesor no puede comprometerse a que un alumno entienda, de forma que el alumno debe de pasar por el proceso mental de un descubrimiento, revivirlo en su mente.

Durante su vida en el aula de matemáticas se le enseña al estudiante que pueden existir muchos caminos para la solución de un problema o ejercicio, como si pudiera elegir algo que no conoce por dentro. Se priva a los estudiantes del poder descubridor de la realidad, de una idea o concepto matemático. Ante esta exposición prematura al pluralismo de ideas y métodos, sin comprometerse a reconstruirlo de fondo, conduce a la muerte de facultades del ser humano, conduce al relativismo (Spaemann, 2003). El camino tiene que ser reconstruido por el estudiante, como lo son las herramientas cognitivas y la reconstrucción de conceptos y descubrimientos fundamentales de las matemáticas.

Estos elementos muestran la esencia acerca de la naturaleza de un problema, siendo esta una unidad o totalidad, que es más que la suma de las partes. No basta que un estudiante conozca y acumule herramientas, métodos, axiomas y conceptos matemáticos si ante un problema no puede ponerlos en práctica como el ejemplo mostrado de la aplicación de la regla de tres. Un problema pone a disposición la actividad mental requerida para su solución en donde los elementos individuales son determinados por la totalidad. Estas son las actividades intermedias que el profesor puede diseñar y que hacen del entendimiento una búsqueda no inmediata, es decir que por medio del diseño de tareas el estudiante reconstruya aquellas cualidades del pensamiento que llevaron a otros matemáticos a realizar importantes descubrimientos.

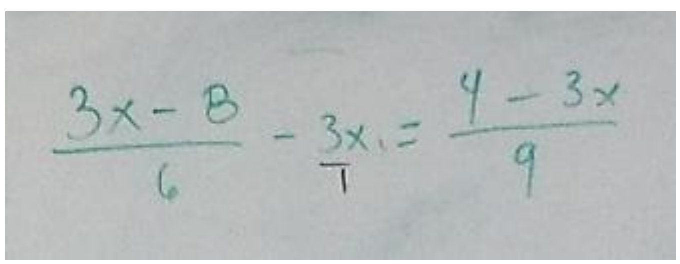
Una forma de reconstruir el concepto o idea en matemáticas es mediante la implementación de tareas con múltiples soluciones. Barrera y Reyes (2017) han argumentado los beneficios al ambiente en el aula de matemáticas mediante esta forma de indagar en las diferentes rutas potenciales de aprendizaje. Su promoción posibilita la exploración de la creatividad de los estudiantes y a la vez promueven el desarrollo de niveles de entendimiento mediante el uso y visualización de la interconexión de diversos conceptos matemáticos y estableciendo similitudes y diferencias entre los métodos para resolver los problemas.

El reto se centra en que para implementar esta herramienta didáctica “se requiere que los profesores sean capaces de encontrar diferentes caminos para resolver un problema y caracterizar las cualidades de cada ruta” (Barrera y Reyes, 2017, p.112), así como comprender profundamente las ideas que se pretende enseñar y entenderlas de distintas maneras. La implementación de tareas con múltiples soluciones puede convertirse en plataformas que apoyen la formación de los docentes de matemáticas, además de fortalecer el conocimiento matemático y didáctico de los profesores, y favorecer el desarrollo de una postura crítica respecto a su práctica profesional (Barrera y Reyes, 2017).

Entender algo es determinar cómo se estructura y relaciona con otros conceptos. Al respecto Barrera y Reyes (2017) argumentan que las tareas con múltiples soluciones “son una herramienta útil para explorar el proceso de construcción de niveles progresivos de entendimiento conceptual y de un pensamiento crítico. Resolver problemas de diferentes formas es una herramienta efectiva para ensayar perspectivas o puntos de vista diversos, así como construir relaciones matemáticas que articulen, estructuren y unifiquen ideas, representaciones, procedimientos, heurísticas, resultados y principios matemáticos” (p. 111).

Un elemento que puede ayudar al desarrollo de entendimiento es el desarrollo de una situación en la que se conectan tres áreas de la matemática, aritmética, álgebra y geometría analítica. Una de las principales dificultades encontradas en el ambiente de aprendizaje la falta de conexión entre aritmética y álgebra. En la siguiente Imagen 11 se muestra un ejercicio propuesto por el profesor en el que los estudiantes no pudieron dar solución al no poder conectar una operación de fracciones con números enteros.

Imagen 11 Igualdad entre fracciones algebraicas



En este caso es posible llevar a los estudiantes hacia una comprensión de las operaciones con fracciones más allá de la reproducción del algoritmo. La siguiente Imagen 12 muestra un caso de una resta de fracciones.

Imagen 12 Resta de fracciones

$$\frac{4}{6}-\frac{1}{4}=\frac{16-6}{24}=\frac{10}{24}$$

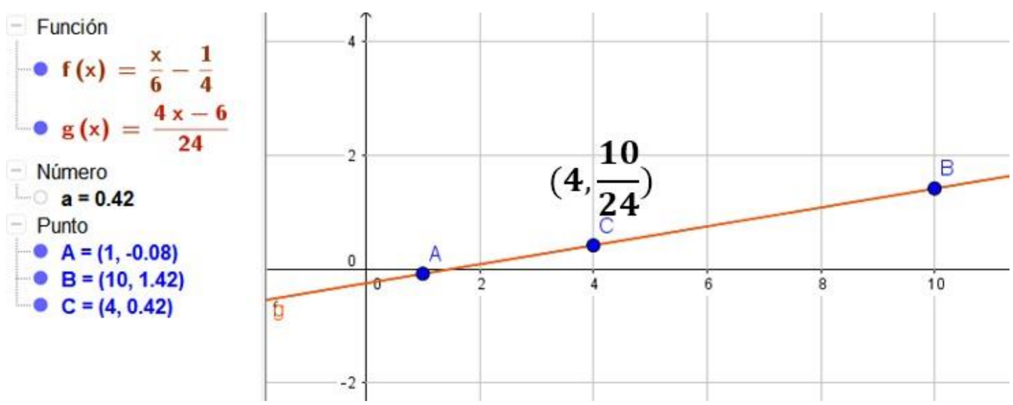
Una vez comprendido la resta de fracciones con números enteros se puede mostrar un ejemplo algebraico como el de la Imagen 13.

Imagen 13 Resta de fracciones algebraica

$$\frac{x}{6}-\frac{1}{4}=\frac{4x-6}{24}$$

El estudiante puede buscar la relación que guardan estos dos tipos de representaciones, la aritmética con la algebraica. Posteriormente puede auxiliarse con una representación gráfica, como en la Imagen 14

Imagen 14 Representación gráfica de una función



En su parte gráfica puede identificarse diversas características de la ecuación de la Imagen 12, como que esta representa una línea recta en el plano cuando se le dan valores distintos a x. También es posible mostrar una conexión esencial entre la aritmética y el álgebra, que esta última es una generalización de la aritmética. De esta manera se muestra la forma en que la conexión entre tipos de representaciones, como gráfica con numérica y algebraica constituye una prueba didáctica de la adquisición de un conocimiento (Barrera y Reyes, 2017). Esto a su vez muestra un avance en el nivel de entendimiento de los estudiantes.

Bajo el diseño de tareas con múltiples soluciones, puede desarrollarse otro elemento centrado en los ambientes de aprendizaje llamado “la enseñanza con variación”. En este medio se llevan a cabo tres tipos de actividades: “1) un problema, múltiples soluciones, cuyo eje es la reflexión sobre las fortalezas y limitaciones de cada aproximación; 2) un problema múltiples cambios, donde los estudiantes modifican las condiciones iniciales del problema para buscar extensiones o generalizaciones y 3) múltiples problemas, una solución, que consiste en buscar métodos útiles para resolver familias de problemas que comparten una estructura profunda” (Gu, Huang y Marton, 2004, en barrera y Reyes, 2017).

5.4.4 La evaluación de los aprendizajes

Los cambios curriculares son importantes, pero si no se modifica la concepción de evaluación de poco servirán las modificaciones. En esta tarea deben también participar los docentes de forma activa porque ellos enfrentan la situación de convivir diariamente en el aula de matemáticas.

Aunque un profesor debe llevar a cabo una evaluación más auténtica del aprendizaje, centrada en la formación y no en la medición, en la reflexión y no en la imposición, algunos elementos como la aplicación de un examen por parte de la academia tienen que estar en congruencia con la cultura social en el aula implementada mediante el desarrollo de problemas de aprendizaje como los que aquí se describen.

5.4.5 Futuras investigaciones

La presenta investigación se apoya en dos áreas fundamentales, las ciencias de la educación y la matemática educativa o didáctica de la matemática. En el país existen solamente 12 universidades o institutos de educación superior tanto privados como públicos en donde se ofrece al menos un posgrado en didáctica de la matemática, bajo estas mismas características existen sólo 4 universidades que ofrecen una licenciatura en didáctica de la matemática, es recomendable que esta área del conocimiento tuviera un desarrollo más amplio, dado que se requiere que existan programas de formación de profesores de nivel medio superior en México, para lo cual resulta conveniente tener especialistas con maestrías y doctorados en didáctica de la matemática.

A pesar de los acuerdos internacionales, como el “Acuerdo para Mejorar la Calidad de la Educación de las Escuelas en México” firmado por la OCDE y la SEP en 2008, la falta de especialistas en didáctica de la matemática para la formación, capacitación y actualización de los docentes de nivel básico y medio superior sigue siendo manifiesta. Pero quizá el dato más sobresaliente es que todos los posgrados y las licenciaturas antes mencionadas están coordinados por los departamentos o áreas académicas de ingeniería o ciencias básicas.

Es necesario una colaboración estrecha entre los institutos dedicados a la formación en humanidades, específicamente las áreas de educación y pedagogía, con los institutos de ciencias básicas. De esta relación depende incluso el futuro de una nación como advirtiera a mediados del siglo XX en su influyente conferencia C. P. Snow “Las dos culturas”. Precisamente estas dos culturas a las que hace referencia son las ciencias exactas y las ciencias sociales. Cerrar la brecha entre estas dos áreas del pensamiento requiere del desarrollo de proyectos encaminados al beneficio de la sociedad donde se involucre el trabajo multidisciplinario.

En este sentido el presente trabajo vincula las ciencias de la educación con la didáctica de la matemática, analizando las relaciones entre las dimensiones del ambiente de aprendizaje y los niveles de entendimiento identificados en los estudiantes. Al emplear una metodología de estudio instrumental colectivo de casos se analizaron de una forma más integral la relación entre ambas. De esta manera se lograron identificar características importantes que muestran bajos niveles de competencia y entendimiento y su relación con otras dimensiones, cuestión que difícilmente se identificaría si se llevaran a cabo estudios de enfoque directo (Gallardo y González, 2010)

Tras la realización de este tipo de investigación de corte indirecto se observó que lo alcanzado en generalidad se pierde en profundidad. Aquellos estudios que profundizan en los procesos de pensamiento de los estudiantes trabajan con una dimensión. En estos interesan aquellos problemas que, mediante la implementación y guía por parte del profesor, desarrollan altos niveles de comprensión en los estudiantes. En la presente investigación se trabajó con seis dimensiones del aprendizaje con entendimiento y cuatro factores que identifica la OCDE (2006) lo cual permite tener una perspectiva del aula y su contexto de forma global.

Por ello, un resultado que arroja este trabajo es que el proceso de investigación en temas relacionados con el ambiente de aprendizaje en matemáticas debe abordarse primeramente desde una perspectiva global, de manera que muestre las dimensiones que intervienen en el aula y la forma en que estas se relacionan. De lo contrario, investigar las dimensiones del ambiente de forma individual, aislada y a priori, pueden llevar a realizar recomendaciones como tipo recetas y que están descontextualizadas del medio escolar en donde se desarrollan. Por tanto, es importante considerar cuidadosamente la selección de una dimensión del ambiente de aprendizaje, cuya importancia señalada por Hiebert (1997) no puede juzgarse sin la consideración de la situación global. Futuras investigaciones deberán tomar en cuenta que investigar bajo la perspectiva del aprendizaje con entendimiento apunta al análisis de la situación en su totalidad, para que después las distintas partes y aspectos sean estudiados en su especificidad.

El ambiente de aprendizaje requiere mayor investigación en tanto concepto unificador. Otras investigaciones a futuro requieren un equipo multidisciplinario para abordar las distintas dimensiones. Además, es necesario abordar el impacto de elementos externos al aula como las políticas educativas, así como el programa de formación de profesores de matemáticas específico para bachillerato y que es inexistente en México, debido en parte por la gran variedad de subsistemas.

Es urgente un programa de formación de profesores de matemáticas en México donde colaboren las ciencias de la educación y la didáctica de la matemática. Ambas poseen la capacidad de desarrollar ambientes de aprendizaje en el aula donde se trabaje como una comunidad matemática, promoviendo pensamiento creativo, crítico y reflexivo. La creatividad es el motor de la ciencia y la tecnología y por tanto del crecimiento económico. Acercar estas dos áreas puede hacer un llamado más fuerte para invertir en la formación inicial y continua de los profesores de matemáticas en este transito complejo como lo es la educación media superior.

Referencias

Álvarez, J. (2008.) *Evaluar para conocer, examinar para excluir*. España: Morata.

Arredondo, A. y Juárez, M. (2014). Una comparación de los conocimientos disciplinares y pedagógicos de los futuros docentes de matemáticas en Francia y México. *Revista Latinoamericana de educación comparada*, 5(6), pp.125-141.

Backhoff, E y Perez, J. (2015). *Segundo Estudio Internacional sobre la Enseñanza y el Aprendizaje* (TALIS 2013) Resultados de México. México: INEE

Ball, D. y H. Bass (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. en B. Davis y E. Simmt (eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*. (3-14) Edmonton, AB, CMESG/GCEDM.

Barrera, F. y Reyes A. (2013). *Elementos didácticos y resolución de problemas: formación docente en matemáticas*. Pachuca de Soto: UAEH.

Barrera, F. y Reyes, A. (2017). Tareas con diversas soluciones, estructura conceptual en profesores de matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 19(1), pp. 110-122. Recuperado de http://redie.uabc.mx/redie/article/view/971

Cano, M. (2008). La evaluación por competencias en la educación superior. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 12(3), pp. 1-16. España: Universidad de Granada

Carpenter, T., & Fennema, E. (1988). Research and cognitively guided instruction. In E. Fennema, T. P. Carpenter, & S. J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 2-19). Madison: University of Wisconsin, National Center for Research in Mathematical Sciences Education.

Carrell, S. E., Page, E., y West, J. E. (2009). Sex and science: How professor gender perpetuates the gender gap. *The Quarterly Journal of Economics*, 125, pp. 1101- 1114.

Cortés, J., Blackhorff, E. y Organista, J. (2004). Estrategias de cálculo mental utilizadas por estudiantes del nivel secundaria de Baja California*. Educación matemática*. 16(1), pp. 149-168. México: Santillana.

Duffin, J.; Simpson, A. (1997). Towards a new theory of understanding. En: E. Pehkonen (Ed.) *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, pp.166-173, Lhati, Finland.

Eisner, E. (2002). Una nueva forma para el diagnóstico en evaluación. En*: La escuela que necesitamos*. (pp. 191-212). Argentina: Amorrortu editores.

Estrada, J. (2003). *La formulación y reformulación de problemas o preguntas en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel medio superior. Educación Matemática*. 15(2), pp. 77-103. México: Grupo Santillana.

Eurydice (Red europea de información sobre educación) (2012). *La enseñanza de las matemáticas en Europa: retos comunes y políticas nacionales*. España: Ministerio de educación, cultura y deporte.

Fennema, E., Peterson, P., Carpenter, T. y Lubinski, C. (1990). Teachers' attributions and beliefs about girls, boys, and mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 21, pp. 55-69.

Flores, R. (2005*). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas*. Educaciòn Matemática 17(2), pp. 7-34. México: Santillana.

García, R. (2012). *La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas básicas en niños de aulas mexicanas*. México: Ángeles editores.

Gimeno, J. (1998). *Comprender y trasformar la enseñanza*. España: Morata.

Gimeno, J. (1988). *El curriculum. Una reflexión sobre la práctica.* Madrid: Morata.

Gimeno, J. (Comp.). (2009). *Educar en competencias, ¿qué hay de nuevo?* Madrid: Morata.

Godino, J. y Font, V. (2003*). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. España: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Goetz, J. y LeCompte, M. (1984*). Etnografía y diseño cualitativo en Investigación educativa*. España: Morata.

González, J. y Gallardo, J. (2010). Fronteras en la investigación sobre comprensión en Educación Matemática. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 66, pp. 23-30

González, P., Fernández, M., García, T., Suárez, N., Fernández, E., Tuero-Herrero, E., da Silva, E. (2012). Diferencias de género en actitudes hacia las matemáticas en la Enseñanza obligatoria. *Revista Iberoamericana de Psicología y Salud,* 3(1), pp. 55-73. Sociedad Universitaria de Investigación en Psicología y Salud A Coruña, España.

Guevara, Y., Rugeiro, J., Delgado, U., y Hermosillo, A., (2010). Análisis de logros académicos de niños de primer grado, en relación con sus habilidades iniciales. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 15(46), pp. 803-821. México.

Guzmán, J., Kieran, C., y Squalli, H. (2003). La calculadora con pantalla multilinea y el seguimiento de estrategias numéricas en alumnos de primero, segundo y tercer año de secundaria. En *Educación Matemática*, 15(2), pp. 105-127. México: Santillana.

Hayes, H. (2014). *Un aula tan amplia como el mundo, en Curriculum XXI, lo esencial de la educación para un mundo de cambio.* Madrid: Narcea.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). Making sense: teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth: NH: Heinemann.

Hiebert, J., Morris, A. K., y Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. Journal of Mathematics Teacher Education, 6, pp. 201-222.

Hiebert, J., Grouws, D. (2009). 'Which teaching methods are most effective for maths?' Better: Evidence based Education, 2(1), pp. 10-11. obtenido de: http://content.yudu.com/A1i1c9/BetterFall09US/resources/index.htm?referrerUrl

INEE (2015). *PISA en el aula: Matemáticas*. México: INEE

INEE (2016). *Panorama educativo de México 2015. Indicadores del Sistema Educativo Nacional: educación básica y media superior*. México: INEE.

Isoda, M., y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Kline, M. (2014). *Por qué Juanito no sabe sumar. El fracaso de la matemática moderna.* México: Siglo XXI

Koyama, M. (1993). Building a two axes process model of understanding mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 1, pp. 63-73. E.U.

Kyriacou, C., Issitt, J. (2008). *What characterises effective teacher-initiated teacher-pupil dialogue to promote conceptual understanding in mathematics lessons in England in Key Stages 2 and 3? a systematic review*. Report. In: Research Evidence in Education Library. London: EPPI-Centre, Social Science Research Unit.

Lacasta, E. y Wilhelmi, M. R. (2008). *Juanito tiene cero naranjas*. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), Investigación en educación matemática XII. pp. 403–414. Badajoz: SEIEM. Disponible en: http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

LaRouche, L. (1991). Solución a la paradoja platónica del uno y los muchos. *Benengeli*. 1(3), pp. 4-34. E.U.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Aprendizaje situado. Participación periférica legitima*. New York: Cambridge University Press.

Leibniz, G. (1992). *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano*. España: Alianza

Lonergan, B. (2004). *Insight: estudio sobre la comprensión humana*. Salamanca: Sígueme.

Mochón, J. y Tlachy, M. (2003). Un estudio sobre el promedio: concepciones y dificultades en dos niveles educativos*. Educación matemática*. 15(3), pp. 5-28. México: Santillana

Moreno, T. (2016). *Evaluación del aprendizaje y para el aprendizaje. Reinventar la evaluación en el aula*. México: UAM.

OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana*. Madrid: Santillana.

OCDE (2007). *Informe PISA 2006. Competencias científicas para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

OCDE (2010). *Acuerdo de cooperación México-OCDE para mejorar la calidad de la educación de las escuelas mexicanas*. Recuperado del sitio de internet: http://www.oecd.org/education/school/46216786.pdf

OCDE. (2011). *¿Se ha deteriorado la disciplina en los centros?* (4). Recuperado del sitio de internet PISA in focus: http://www.mecd.gob.es/inee/PISA-in-focus.html#PIF_04

OCDE. (2013). ¿Los estudiantes pueden obtener mejores resultados en las escuelas con aulas? (32) Recuperado del sitio de internet PISA in focus: http://www.mecd.gob.es/inee/PISA-in-focus.html#PIF_04

OCDE. (2013). ¿Qué piensan los estudiantes sobre la escuela? (24). Recuperado del sitio de internet PISA in focus: http://www.mecd.gob.es/inee/PISA-in-focus.html#PIF_04

OCDE. (2013). Las expectativas de calificaciones (26). Recuperado del sitio de internet PISA in focus: http://www.mecd.gob.es/inee/PISA-in-focus.html#PIF_04

OCDE. (2013). *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do: Student Performance in Mathematics, Reading and Science*. Vol. 1. París: OECD Publishing.

OCDE. (2014). ¿Está relacionada la agrupación y selección de estudiantes en distintos centros educativos con su motivación para aprender? (39). Recuperado del sitio de internet PISA in focus: http://www.mecd.gob.es/inee/PISA-in-focus.html#PIF_04

OCDE. (2014). ¿Los jóvenes de 15 años son creativos a la hora de resolver problemas? (38). Recuperado del sitio de internet PISA in focus: http://www.mecd.gob.es/inee/PISA-in-focus.html#PIF_04

OCDE. (2014). ¿Tienen los estudiantes la motivación para lograr el éxito? (37). Recuperado del sitio de internet PISA in focus: http://www.mecd.gob.es/inee/PISA-in-focus.html#PIF_04

OCDE. (2014). México en Pisa 2012. México: INEE.

OCDE. (2015). ¿Afectan las relaciones profesor-alumno al bienestar de los estudiantes en la escuela? (50). Recuperado del sitio de internet PISA in focus: http://www.mecd.gob.es/inee/PISA-in-focus.html#PIF_04

OCDE. (2015). ¿Es mejor para el aprendizaje tener más horas de clase? (54). Recuperado del sitio de internet PISA in focus: http://www.mecd.gob.es/inee/PISA-in-focus.html#PIF_04

OCDE. (2015). ¿Hasta qué punto confían los alumnos en su capacidad para resolver problemas de matemáticas? (56). Recuperado del sitio de internet PISA in focus: http://www.mecd.gob.es/inee/PISA-in-focus.html#PIF_04

OCDE. (2015). ¿Recibe el alumnado desaventajado las mismas oportunidades para aprender matemáticas? (63). Recuperado del sitio de internet PISA in focus: http://www.mecd.gob.es/inee/PISA-in-focus.html#PIF_04

OCDE. (2015). ¿Te ponen nervioso las matemáticas? (48). Recuperado del sitio de internet PISA in focus: http://www.mecd.gob.es/inee/PISA-in-focus.html#PIF_04

OCDE. (2016). ¿Es la memorización una buena estrategia para aprender matemáticas? (61). Recuperado del sitio de internet PISA in focus: http://www.mecd.gob.es/inee/PISA-in-focus.html#PIF_04

Parra, M. y Flores, R. (2008). *Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones.* Educación matemática. 20(1). Pp. 31-52. México: Santillana.

Pérez-Gómez, A. (1992). Los procesos de enseñanza- aprendizaje: análisis didáctico de las principales teorías del aprendizaje. En Gimeno, J.(Comp). (1992). *Comprender y transformar la enseñanza.* Madrid: Morata.

PISA (2012). Matemáticas por ordenador. Ejemplos de preguntas en soporte digital. En http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012-resolucionproblemas/preguntasliberadasmatematicasweb.pdf?documentId=0901e72b81936c1a consultado el 5 de Marzo de 2015.

Polya, G. (2013). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Rigo, M. (2011). *La mayéutica y su aplicación a un cuestionario dirigido a docentes.* Memorias del congreso de Investigación en educación matemática XV. (p. 523-532). Ciudad Real, España.

Santos -Trigo, M. (1997). *La transferencia del conocimiento y la formulación o rediseño de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Revista Mexicana de Investigación Educativa, 2(3), 11-30

Santos, L. (2010). *La resolución de problemas matemáticos*. Fundamentos cognitivos. México: Trillas.

Santos-Trigo, M. (2007*). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain.* ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39, (5), pp. 523-536.

Santos-Trigo, M. (2008). La Resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. sf). Badajoz, España: Universidad de Extremadura.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Sepúlveda, A., Santos Trigo, M. (2006). Desarrollo de episodios de comprensión matemática. Estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(31), pp. 1389-1422. México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa.

Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. Profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 9(2), pp. 1-3.

Sierra, F. (1998). Función y sentido de la entrevista cualitativa en investigación social. En Galindo, L. (1998). *Técnicas de investigación en sociedad, cultura y comunicación*. (pp. 277-341). México: Pearson.

Simons, H. (2011). *Estudio de caso: teoría y práctica*. España: Morata.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de caso*. España: Morata.

Stein, M. K. & Smith M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice*. Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 268-275.

Stein, M., Grover, B., Henningsen, M. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2). pp. 455-488. E.U.

Thompson, A., R. Philpp, P. Thompson y B. Boyd (1994). Calculational and Conceptual Orientations in Teaching Mathematics, en D.B Aichele y A.F. Coxford (eds.), *Professional Development for Teacher of Mathematics*, Libro del Año, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, (pp. 79-92).

Torres, J. (2011). *La justicia curricular. El caballo de Troya de la cultura escolar*. España: Morata.

Usiskin, Z. (2012). What does it mean to understand some mathematics? In: Proceedings of ICME12, COEX, Seoul, Korea; July 8–15,2012 (pp. 502–521). Seoul, Korea: ICME-12.

Vela, F. (2008). Un acto metodológico básico de la investigación social: la entrevista cualitativa. En: Tarrés, M. (Ed.), *Observar, escuchar y comprender* (pp. 63-96). México: Porrua.

Villegas, G. (2008*). Dime cómo evalúas y te diré como enseñas y qué aprenden tus estudiantes.* Ponencia en el Foro Educativo Nacional. Foro Educativo Nacional "Evaluar es Valorar". Pp. 159 – 169. Bogota, Colombia.

Wertheimer, M. (1991). *El pensamiento productivo*. España: Paidos.

Wertheimer, M. (2010). A Gestalt Perspective on the Psychology of Thinking. En Glatzeder, B. et al. (eds.). *Towards a Theory of Thinking, On Thinking*. pp. 49-57 Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Zhenmei, Y. (2014). *PISA: el ranking mundial de la educación*. En http://es.euronews.com/2014/01/17/pisa-el-ranking-mundial-de-la-educacion consultado el 2 de abril del 2015.

Anexo 1. Guía de observación

Jesús Israel Monroy Muñoz

Proyecto: Ambientes de aprendizaje y niveles de entendimiento matemático en estudiantes de bachillerato

Lugar: preparatoria no 3 y 4. Aula de álgebra. Primer semestre.

<table>
<tr><th>Actor o escenario</th><th>Instrumento</th><th>Dimensiones</th><th>Guía de observación</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Ambiente en el aula desde el enfoque de aprendizaje con entendimiento</td><td rowspan="2">Observación participante</td><td>Rol del profesor</td><td>La forma de seleccionar y plantear ciertos tipos de problemas para abordar conceptos o ideas matemáticas
Metodología de abordar algún problema que encarga a sus estudiantes:
Comprensión de un problema
Concepción de un plan para resolver el problema
Relacionar un problema con otros.
Relacionar teoremas, conceptos, formulas
La forma en que tiende a ejecutar un plan para resolver un problema
Visión retrospectiva
Niveles de entendimiento:
La forma en que el planteamiento de un nuevo problema tiene la intención de conectarse con los conocimientos previos del estudiante. De relacionar con otros conceptos.
Al abordar un problema, describir la forma en que lo aborda por niveles de entendimiento: la parte algorítmica, la justificación, el modelado, contexto histórico y cultural y la representación metafórica. Posteriormente la forma en que conecta todo lo anterior.</td></tr>
<tr><td>Cultura social</td><td>Qué tipo de comunicación promueve en el aula.</td></tr>
</table>

			Cómo se comparta e interactúa el grupo ante el planteamiento de problemas por parte del profesor. Cuál es la forma de comunicación, que tipo de preguntas realizan entre compañeros, en qué parte del problema se enfocan las preguntas o comentarios de los alumnos.
		Tipo de problemas	Que características tienen los problemas que aborda el profesor. La forma de abordar los problemas por medio de niveles de entendimiento. La forma en que los conecta. Cuando los estudiantes resuelven un problema, cuanto tiempo ocupan en: leerlo, analizarlo, explorarlo, hacer un plan, implementarlo, verificarlo, plantearse nuevas preguntas, comentarlo con sus compañeros.
		Tipo de herramientas	La forma en que explora las herramientas cognitivas de los estudiantes al resolver problemas Qué tipo de representaciones utilizan los estudiantes en la solución de problemas o ejercicios. Que características tienen los problemas que resuelven. El profesor tiene algún tipo de anotación sobre los tipos de representación utilizados por sus estudiantes Heurísticas utilizadas: Encontrar un problema más simple relacionado con el problema original Relajar una o más condiciones del problema Considerar el problema como resuelto Trabajar hacia atrás Dibujar una figura Trazar elementos auxiliares Analizar casos particulares Utilizar analogías

			casos particulares Entender el problema Configurar un plan Ejecutar el plan Examinar la solución obtenida
		Equidad y accesibilidad	La forma en que se relaciona con los estudiantes más destacados La forma en que se relaciona con los estudiantes menos destacados La forma en que los estudiantes reaccionan y se expresan ante los problemas. Como aborda el profesor las dudas de los estudiantes. Como enfrenta las actitudes positivas y negativas de los estudiantes ante los problemas que diseña.
		Evaluación	¿Cómo evalúa el entendimiento de algún concepto o idea matemática de los estudiantes? De las distintas formas de representación usadas por los estudiantes, usted ¿acepta, valida o recomienda usar cierto tipo de representaciones? Evalúa practicas o actividades fuera del contexto escolar Forma de evaluar la manera en que sus estudiantes demuestran su comprensión de aspectos esenciales y conectados de las ideas Forma de evaluar que los alumnos reconozcan modos alternativos de respuesta ante los problemas Forma de evaluar la forma en que los estudiantes construyen herramientas, que permitan conocer la adaptación creativa de herramientas en otros contextos o tipos de problemas. Forma de evaluar cuando los estudiantes perciben totalidades y no elementos aislados Forma de evaluar cuando el estudiante utilice formas distintas de demostración (acorde a su nivel) de lo que ha aprendido La forma de registrar todos los elementos anteriores. (participaciones, notas en su cuaderno, en el de los estudiantes, en el examen)

Ambiente de aprendizaje desde la perspectiva del enfoque por competencias	Observación participante	Tipo de problemas	Procedimiento al resolver problemas basado en: 1) El proceso matematizador o de matematización se inicia con un problema presente en la realidad 2) En el segundo paso, la persona que desea resolver el problema trata de identificar las matemáticas pertinentes al caso y reorganiza el problema según los conceptos matemáticos que han sido identificados. Por ejemplo, relacionar las fórmulas matemáticas con dimensiones como la edad, frecuencia cardiaca, años, entre otros. 3) El tercer paso implica una progresiva abstracción de la realidad 4) El cuarto paso consiste en resolver el problema matemático. 5) El quinto paso supone responder a la pregunta: qué significado adquiere la solución estrictamente matemática al transponerla al mundo real. Identificar este proceso en capacidades como Comunicación Matematización Representación Argumentación y razonamiento Diseño de estrategias Utilización de operaciones y lenguaje formal, simbólico Utilización de herramientas matemáticas En entornos de Formulación matemática de las situaciones Empleo de conceptos, datos, procedimientos y Razonamientos matemáticos Interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos Nota: Interpretar con los 6 niveles de competencia matemática.

		Actitudes de los estudiantes y Estrategias de aprendizaje (experiencias de educación en matemáticas, el comportamiento o el rol de los maestros y el grado de activación cognitiva, estrategias cognitivas por parte del profesor, autoeficacia en la resolución de problemas	La forma en que transmite información y conocimientos, provoca el desarrollo de competencias. La forma en que reconstruyen sus modelos mentales, sus esquemas de pensamiento. Cómo el profesor implica activamente al alumno en procesos de búsqueda, estudio, experimentación, reflexión, aplicación y comunicación del conocimiento. La forma en que se enfoca en situaciones reales y propone actividades auténticas. Vincula el conocimiento a los problemas importantes de la vida cotidiana. Forma de contemplar la flexibilidad y creatividad requerida por la naturaleza de las tareas auténticas y por las exigencias de vinculación con el entorno social. Forma de aprender en situaciones de incertidumbre y en procesos permanentes de cambio como una condición para el desarrollo de competencias básicas y para aprender a aprender Forma de preparación de entornos de aprendizaje caracterizados por el intercambio y vivencia de la cultura más viva y elaborada. Forma del diálogo, el debate, el respeto a las diferencias, saber escuchar, enriquecerse con las aportaciones ajenas ¿Qué hace cuando un alumno no muestra interés en resolver algún problema o actividad de la clase?
		TIEMPO DE APRENDIZAJE Y TRABAJO DE CURSO (tiempo que se trabaja matemáticas en clase, la	Apoyarse en el proceso matematizador: 1) El proceso matematizador o de matematización se inicia con un problema presente en la realidad 2) En el segundo paso, la persona que desea resolver el problema trata de identificar las matemáticas pertinentes al caso y reorganiza el problema según los conceptos matemáticos que han sido identificados. Por ejemplo, relacionar las fórmulas matemáticas con dimensiones como la edad, frecuencia cardiaca, años, entre otros.

		familiaridad con los conceptos matemáticas y el comportamiento de matemáticas y resolución de problemas)	3) El tercer paso implica una progresiva abstracción de la realidad. Existen diferentes modos de abstraer la realidad, esto es, de formular el problema en términos estrictamente matemáticos. Uno de ellos consiste en traducir las fórmulas lingüísticas a una expresión algebraica más formalizada, por ejemplo: y = 220 – x o y = 208 – 0,7x. donde y podría representar la máxima frecuencia cardíaca, expresada en latidos por minuto, y que x representa la edad, expresada en años. Otra forma de acceder a un universo estrictamente matemático consistiría en dibujar directamente los gráficos partiendo de las fórmulas lingüísticas. Estos tres pasos nos llevan desde el problema del mundo real al problema matemático. 4) El cuarto paso consiste en resolver el problema matemático. Por ejemplo, resolver la ecuación: 220 – x = 208 – 0,7x. Esto nos da x = 40, mientras que el valor correspondiente de y sería 180 5) El quinto paso supone responder a la pregunta: qué significado adquiere la solución estrictamente matemática al transponerla al mundo real. Formulación matemática de las situaciones Empleo de conceptos, datos, procedimientos y Razonamientos matemáticos Interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos Dificultades de los estudiantes en conceptos específicos (promedio, divisor, factor, numerador)
		Evaluación	¿transmite informaciones y conocimientos o provoca el desarrollo de competencias.? La forma en que reconstruye modelos mentales vulgares, esquemas de pensamiento. De sus estudiantes La forma en que implica activamente al alumno en procesos de búsqueda, estudio, experimentación, reflexión, aplicación y comunicación del conocimiento.

			La forma en que se enfoca en situaciones reales y propone actividades auténticas. Vincula el conocimiento a los problemas importantes de la vida cotidiana. Cómo contempla la flexibilidad y creatividad requerida por la naturaleza de las tareas auténticas y por las exigencias de vinculación con el entorno social. Como hace a sus alumnos aprender en situaciones de incertidumbre y en procesos permanentes de cambio como una condición para el desarrollo de competencias básicas y para aprender a aprender. Cómo prepara entornos de aprendizaje caracterizados por el intercambio y vivencia de la cultura matemática. Cómo estimula la capacidad para comprender y gobernar su propio y singular proceso de aprender y de aprender a aprender de sus estudiantes La forma en que abre el diálogo, el debate y la discrepancia, el respeto a las diferencias, saber escuchar, enriquecerse con las aportaciones ajenas y tener la generosidad suficiente para ofrecer lo mejor de sí mismo. La forma en que proporciona un entorno seguro y cálido en el que el aprendiz se sienta libre y confiado para probar, equivocarse, realimentar, y volver a probar. La evaluación educativa del rendimiento de los alumnos ha de entenderse básicamente como evaluación formativa, para facilitar el desarrollo en cada individuo de sus competencias de comprensión y actuación. Como diseña, evalúa y reconduce los procesos de aprendizaje de sus alumnos.
		Clima de clase (relaciones profesor alumno, disciplina en clase)	Preocupación por el aprendizaje de sus estudiantes Periodicidad semanal de tareas y características Tipo de relación profesor estudiante, se llevan bien ¿El profesor está interesado en el bienestar del estudiante, requiere ayuda extra el estudiante?

			El profesor escucha a sus estudiantes El profesor trata a los estudiantes con justicia Clase en orden Clase a tiempo Interrupciones en clase por ruido de los estudiantes
		Generales	¿Trabaja con el modelo por competencias? ¿su centro de trabajo se lo exige? ¿Qué son las competencias? ¿Qué es ser competente en matemáticas? ¿Encuentra similitudes y diferencias en ser competente en matemáticas y aprender con entendimiento o comprensión? ¿qué grado de libertad posee por parte de la institución para realizar su actividad docente? (para plantear temas complementarios, nuevos, elaboración del programa de matemáticas, exámenes, evaluaciones, asignación de calificaciones, selección de libros de texto) ¿Qué grado de libertad posee por parte de la institución para realizar su actividad docente desde su formación como maestro en didáctica de las matemáticas desde un enfoque de resolución de problemas y aprendizaje con entendimiento? ¿Qué apoyo recibe de la institución para con su formación y capacitación continua como docente?

Anexo 2. Guía de Entrevista

Jesus Israel Monroy Muñoz

Proyecto: Ambientes de aprendizaje y niveles de entendimiento matemático en estudiantes de bachillerato

Lugar: preparatoria no 3 y 4. Aula de álgebra. Primer semestre.

Actor o escenario	**Instrumento**	**Dimensiones**	**Guía de preguntas y temas a tratar**
Aprendizaje con entendimiento	Entrevista	Preguntas introductorias	¿Cuál es su formación? ¿Cómo llegó a ser profesor de matemáticas?
		Su rol en el aula	***Conocimiento de contenidos pedagógicos:*** • Cómo diseña y prepara una lección. • En qué libros se basa. • Cómo analiza los errores de los estudiantes. ejemplos. • En qué se suelen equivocar más los estudiantes, errores comunes. • Cómo aborda los errores de los estudiantes en su clase. • Explicar y representar nuevas ideas a los estudiantes. • Responder a las preguntas que los estudiantes tienen acerca de lo que están aprendiendo. ***Aplicación de la comprensión de los conceptos matemáticos:*** • Involucrar a los estudiantes en distintas pruebas. • Elegir y comparar diferentes representaciones para un determinado procedimiento o concepto matemático.

			• Elegir y usar definiciones matemáticas. • Explicar por qué surgieron conceptos y cómo han cambiado con el tiempo. • Trabajar con la amplia gama de aplicaciones de las ideas matemáticas que se enseñan. ***Entendimiento de los problemas y la resolución de problemas:*** • Examinando los diferentes métodos de solución de los estudiantes. • Comprometer a los estudiantes en la resolución de problemas. • Discutir maneras alternativas de abordar problemas con y sin calculadora y tecnología computacional. • Ofrecer extensiones y generalizaciones de problemas. ***La integración de las tres dimensiones anteriores:*** • Comparar diferentes tratamientos que ofrecen los libros de texto de un procedimiento matemático o tema extendiendo y generalizando propiedades y argumentos matemáticos. ***Conexiones y generalizaciones a otras áreas de la matemática:*** • Explicar cómo las ideas estudiadas en la escuela se relacionan con las ideas que los estudiantes pueden encontrar o han encontrado estudiando en otras áreas de la matemática. • Darse cuenta de las implicaciones para el aprendizaje de los estudiantes el pasar demasiado poco o demasiado tiempo sobre un tema dado. ***De acuerdo con Hiebert (1997):*** La forma en que explora las herramientas cognitivas de los estudiantes al resolver problemas. ¿Qué concepción tiene acerca de lo que son las matemáticas?

			¿Qué significa para usted entender matemáticas? ¿Qué es un problema? (en el contexto matemático) ¿Cómo sabe cuándo un estudiante entiende algún concepto o idea matemática? ¿Cómo saben los estudiantes cuando han entendido algún concepto o idea matemática? ¿Al diseñar su clase toma en cuenta el nivel hasta dónde quiere llegar en algún concepto? ***De acuerdo con Lonergan (1997)*** a) llega como una liberación de la tensión del preguntar. ¿El estudiante tiene interés por el problema, pasa un tiempo realizándose preguntas, incluso después de clase? b) llega repentina e inesperadamente. c) no está en función de circunstancias externas, sino de condiciones internas. d) tiene función de pivote entre lo concreto y lo abstracto. e) pasa a formar parte de la textura habitual de la mente de uno mismo. ***De acuerdo con Schoenfeld*** Tiempo para plantear y resolver un problema La existencia de un interés. La no existencia de una solución inmediata. La presencia de diversos caminos o métodos de solución. ***De acuerdo con Usinsky*** El desarrollo de algoritmos. Justificación por medio de la aplicación de las propiedades El modelado. Representación metafórica. Histórico – cultural.

			De acuerdo con Eisner ¿Por qué y cómo escoge ciertos tipos de problemas para abordar conceptos o ideas matemáticas? ¿Qué proceso lleva a cabo para diseñar, rediseñar, seleccionar, adaptar algún problema mediante el cual desee generar entendimiento en sus estudiantes? Considera que las tareas para evaluar qué saben y pueden hacer los estudiantes ¿Reflejan las tareas con que se encontrarán en un futuro fuera de las escuelas y no solo las limitadas al ámbito escolar? ¿Por qué? ¿De qué forma diseña problemas que reflejan los valores de la comunidad intelectual de la que provienen? Es decir, que den a los alumnos la oportunidad de demostrar su comprensión de aspectos esenciales y conectados de las ideas ¿Construye problemas que tengan más de una solución? Que los alumnos reconozcan modos alternativos de respuesta. ¿Los problemas permiten la construcción y uso flexible de herramientas? Que permitan conocer la adaptación creativa de herramientas en otros contextos o tipos de problemas. ¿De qué forma? ¿Las tareas requieren que los estudiantes perciban totalidades y no elementos aislados? ¿De qué forma? ¿El estudiante selecciona una forma de representación que quiera utilizar como demostración de lo que ha aprendido? ¿De qué forma? ¿Trabaja con el modelo por competencias? ¿Su centro de trabajo se lo exige? ¿qué grado de libertad posee por parte de la institución para realizar su actividad docente? (para plantear temas complementarios, nuevos, elaboración del programa de matemáticas, exámenes, evaluaciones, asignación de calificaciones, selección de libros de texto)

			¿Qué grado de libertad posee por parte de la institución para realizar su actividad docente desde su formación como maestro en didáctica de las matemáticas desde un enfoque de resolución de problemas y aprendizaje con entendimiento? ¿Qué apoyo recibe de la institución para con su formación y capacitación continua como docente? **a) Conocimiento de contenidos pedagógicos:** • Diseñar y preparar una lección • Analizar los errores de los estudiantes • Explicar y representar nuevas ideas a los estudiantes • Responder a las preguntas que los estudiantes tienen acerca de lo que están aprendiendo **b) Aplicación de la comprensión de los conceptos matemáticos.** • Análisis de conceptos: • Como involucra a los estudiantes en distintas pruebas • Elegir y comparar diferentes representaciones para una determinada procedimiento o concepto matemático • Elegir y usar definiciones matemáticas • Explicar por qué surgieron conceptos y cómo han cambiado con el tiempo • Trabajar con la amplia gama de aplicaciones de las ideas matemáticas que se enseñan **c) Entendimiento de los problemas y la resolución de problemas** Análisis del problema: • Examinando los diferentes métodos de solución de los estudiantes • Comprometer a los estudiantes en la resolución de problemas • Discutir maneras alternativas de abordar problemas con y sin calculadora y tecnología computacional • Ofrecer extensiones y generalizaciones de problemas. **Conexiones y generalizaciones a otras áreas de la matemática**:

			• Comparar diferentes tratamientos que ofrecen los libros de texto de un procedimiento matemático o tema extendiendo y generalizando propiedades y argumentos matemáticos • Explicar cómo las ideas estudiadas en la escuela se relacionan con las ideas que los estudiantes pueden encontrar o han encontrado estudiando en otras áreas de la matemática • Darse cuenta de las implicaciones para el aprendizaje de los estudiantes el pasar demasiado poco o demasiado tiempo sobre un tema dado. • Está claro que los maestros necesitan entendimientos que van mucho más allá de los de los estudiantes.
		Cultura social	¿Qué tipo de comunicación promueve en el aula? ¿Cómo trabajan sus estudiantes regularmente, individual o por equipo? ¿Puede describir el tipo de ambiente que percibe en su grupo? (en distintos momentos: al abordar un nuevo tema, al ser evaluados, al resolver un problema en forma individual o por equipos)
		Tipo de problemas	¿Por qué y cómo escoge ciertos tipos de problemas para abordar conceptos o ideas matemáticas? ¿Qué proceso lleva a cabo para diseñar, rediseñar, seleccionar, adaptar algún problema mediante el cual desee generar entendimiento en sus estudiantes? Considera que las tareas para evaluar qué saben y pueden hacer los estudiantes ¿Reflejan las tareas con que se encontrarán en un futuro fuera de las escuelas y no solo las limitadas al ámbito escolar? ¿Por qué? ¿De qué forma diseña problemas que reflejan los valores de la comunidad intelectual de la que provienen? Es decir, que den a los alumnos la oportunidad de demostrar su comprensión de aspectos esenciales y conectados de las ideas ¿Construye problemas que tengan más de una solución? Que los alumnos reconozcan modos alternativos de respuesta.

			¿Los problemas permiten la construcción y uso flexible de herramientas? Que permitan conocer la adaptación creativa de herramientas en otros contextos o tipos de problemas. ¿De qué forma? ¿Las tareas requieren que los estudiantes perciban totalidades y no elementos aislados? ¿De qué forma? ¿El estudiante selecciona una forma de representación que quiera utilizar como demostración de lo que ha aprendido? ¿De qué forma?
		Tipo de herramientas	¿Qué tipo de representaciones utilizan sus alumnos durante la solución de algún problema? pudiera dar algunos ejemplos?
		Equidad y accesibilidad	¿Cómo relaciona con los estudiantes más destacados? ¿Cómo se relaciona con los estudiantes menos destacados? La forma en que los estudiantes reaccionan y se expresan ante los problemas. ¿Cómo aborda el profesor las dudas de los estudiantes? ¿Cómo enfrenta las actitudes positivas y negativas de los estudiantes ante los problemas que diseña?
		Evaluación	¿Cómo evalúa el entendimiento de algún concepto o idea matemática de los estudiantes? De las distintas formas de representación usadas por los estudiantes, usted ¿acepta, valida o recomienda usar cierto tipo de representaciones? ¿Cómo evalúa un problema resuelto por sus estudiantes? Plantea un examen de forma que los problemas revelen cómo proceden a resolverlo, y no solo a las soluciones que plantean.
Enfoque por Competencias		Actitudes de los estudiantes y	¿Cómo transmite información y conocimientos, provoca el desarrollo de competencias? ¿Cómo reconstruyen sus modelos mentales, sus esquemas de pensamiento?

		estrategias de aprendizaje	¿Cómo el profesor implica activamente al alumno en procesos de búsqueda, estudio, experimentación, reflexión, aplicación y comunicación del conocimiento? ¿Cómo se enfoca en situaciones reales y propone actividades auténticas. Vincula el conocimiento a los problemas importantes de la vida cotidiana? ¿Cómo contempla la flexibilidad y creatividad requerida por la naturaleza de las tareas auténticas y por las exigencias de vinculación con el entorno social? ¿Cómo sus estudiantes aprenden en situaciones de incertidumbre y en procesos permanentes de cambio como una condición para el desarrollo de competencias básicas y para aprender a aprender? ¿Cómo prepara de entornos de aprendizaje enfocados a que sus alumnos entiendan matemáticas? Forma del diálogo, el debate, el respeto a las diferencias, saber escuchar, enriquecerse con las aportaciones ajenas ¿Qué hace cuando un alumno no muestra interés en resolver algún problema o actividad de la clase?
			¿Cómo aborda los conceptos, temas o problemas con los estudiantes? ¿Aborda el proceso matematizador? ¿Qué semejanzas guarda con este? El proceso matematizador o de matematización se inicia con un problema presente en la realidad. ¿Lo lleva a cabo? ¿De qué forma? ¿Se identifican las matemáticas pertinentes al caso y reorganiza el problema según los conceptos matemáticos que han sido identificados? Por ejemplo, relacionar las fórmulas matemáticas con dimensiones como la edad, frecuencia cardiaca, años, entre otros. ¿Existe abstracción de la realidad? ¿cómo se lleva a cabo? Existen diferentes modos de abstraer la realidad, esto es, de formular el problema en términos estrictamente matemáticos. Uno de ellos consiste en traducir las fórmulas lingüísticas a una expresión algebraica más formalizada, por ejemplo: $y = 220 - x$ o $y = 208 - 0{,}7x$. donde y podría representar la máxima frecuencia cardíaca, expresada en latidos por minuto, y que x representa la edad, expresada en años. Otra forma de acceder a un universo estrictamente matemático consistiría en dibujar directamente los gráficos

			partiendo de las fórmulas lingüísticas. Estos tres pasos nos llevan desde el problema del mundo real al problema matemático. La forma de resolver el problema matemático. Por ejemplo, resolver la ecuación: 220 – x = 208 – 0,7x. Esto nos da x = 40, mientras que el valor correspondiente de y sería 180 La forma de responder a la pregunta: qué significado adquiere la solución estrictamente matemática al transponerla al mundo real.
		Tiempo de aprendizaje y trabajo de curso,	Preocupación por el aprendizaje de sus estudiantes Periodicidad semanal de tareas y características Tipo de relación profesor estudiante, se llevan bien ¿El profesor está interesado en el bienestar del estudiante, requiere ayuda extra el estudiante? El profesor escucha a sus estudiantes El profesor trata a los estudiantes con justicia Clase en orden Clase a tiempo Interrupciones en clase por ruido de los estudiantes
		Clima del centro educativo y clase	¿Qué es evaluar? Tipos de evaluación que utiliza Formulación de preguntas: Nivel 1:, responder correctamente sin comprender la información Nivel 2: inferencias directas a partir de la información Nivel 3: conocimiento profundo, conexiones con otros conceptos, situaciones, conocimientos, experiencias A partir de resolución de problemas genuinos donde se valore el proceso de solución. La escritura como herramienta, para problematizar, enriquecer.
		Evaluaciones del estudiante	¿Cuál era su concepción acerca de las matemáticas al egresar de la carrera de ingeniería química?

			¿Cuál era su concepción de las matemáticas al ingresar como docente a una institución de educación media superior que trabaja bajo el modelo por competencias, y que además usted tuvo que certificarse en competencias? ¿Cuál era su concepción de las matemáticas al egresar de la maestría en ciencias en matemáticas y su didáctica con énfasis en aprendizaje con entendimiento? ¿Cómo se ha transformado su práctica pedagógica a través de estos tres momentos en su vida como profesionista y docente de matemáticas? ¿Qué impacto han tenido en su práctica docente las distintas concepciones de la matemática que ha tenido durante su carrera, si es que ha cambiado? Bajo estas preguntas indagar, ¿Qué enfoques de la matemática (competencias o entendimiento) aplica en el aula de matemáticas con los estudiantes? utiliza el mismo para todos sus grupos? ¿Por qué?