



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

FILTRADO ADAPTABLE DE UN ECG USANDO UN DSP

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIATURA EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

P R E S E N T A N:
DULCE MARÍA LICONA RIOS
GILDARDO IVÁN LOZANO GONZÁLEZ

A S E S O R E S D E T E S I S:
DR. LUIS ENRIQUE RAMOS VELASCO
DR. VIRGILIO LÓPEZ MORALES

PACHUCA DE SOTO, HIDALGO. ENERO DE 2006

Agradecimientos

Agradecemos a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo por habernos permitido desarrollar profesionalmente.

A nuestros asesores Doctor Luis Enrique Ramos Velasco y al Doctor Virgilio López Morales les expresamos nuestra gratitud por habernos guiado experta y pacientemente durante todo el proceso.

Este trabajo de tesis fue elaborado gracias al proyecto PROMEP con número 103.5/05//2038.

«Deseo expresar mi gratitud a mi gente, a mi mamá y a mi hermana, por haberme dado acceso a un mundo nuevo para mi y muy especialmente a la fuerza espiritual que hay dentro de mi, a Dios.»

Dulce María Licona Rios

«A mis padres y hermanos sin cuyo apoyo cualquier proyecto sería imposible GRACIAS.»

Gildardo Iván Lozano González

Resumen

En este trabajo de tesis se presentan resultados obtenidos en simulación y emulación del procesamiento digital adaptable de señales biomédicas (el caso particular del electrocardiograma) haciendo uso del DSP TMS320c6711 de Texas Instruments. Los algoritmos utilizados hacen que la bioseñal presente la calidad adecuada que facilite el diagnóstico, tanto mediante técnicas de inspección visual como mediante técnicas actuales de inspección automática.

Los resultados reflejan las ventajas que presentan los filtros adaptables sobre los filtros digitales clásicos, para el procesamiento de dichas señales.

Por otro, lado se demuestra la confiabilidad y precisión en el procesamiento de señales analógicas mediante técnicas digitales, en la solución de problemas de ingeniería electrónica, fácilmente implementables en Procesadores Digitales de Señales.

Índice general

Resumen	i
1. Introducción	1
2. Herramientas Matemáticas	15
2.1. Introducción	16
2.2. Señales y Sistemas	17
2.2.1. Definición de Señal	17
2.2.2. Tipos de Señales	17
2.2.3. Definición de Sistema	23
2.3. Muestreo de Señales Analógicas	27
2.4. Convolución	28
2.4.1. Convolución en Tiempo Continuo	29
2.4.2. Convolución en Tiempo Discreto	31
2.5. Serie de Fourier	33
2.5.1. Serie de Fourier en Tiempo Continuo	33
2.5.2. Serie de Fourier en Tiempo Discreto	38
2.6. La Transformada de Fourier	39
2.6.1. Transformada de Fourier en Tiempo Continuo	40
2.6.2. Transformada de Fourier en Tiempo Discreto	42
2.7. Transformada Discreta de Fourier	45

2.8.	Transformada Rápida de Fourier	46
2.8.1.	Cálculo Directo de la DFT	47
2.8.2.	Metodología de “Divide y Vencerás” para el Cálculo de la DFT	48
2.9.	La Transformada de Laplace	51
2.10.	La Transformada z	52
2.11.	Resumen y Referencias	54
3.	Filtros Digitales	55
3.1.	Introducción	55
3.2.	Filtros Analógicos vs Digitales	56
3.3.	Filtrado Digital en el Dominio de la Frecuencia	58
3.4.	Características de Filtros Causales Selectivos en Frecuencia . .	61
3.4.1.	Ventajas de los Filtros Digitales	63
3.5.	Clasificación de los Filtros Digitales	63
3.5.1.	Filtros FIR (Respuesta Impulsional Finita)	63
3.5.2.	Filtros IIR (Respuesta Impulsional Infinita)	66
3.6.	Análisis Comparativo entre Filtros FIR e IIR	68
3.7.	Resumen y Referencias	69
4.	Filtrado Adaptable	71
4.1.	Introducción	72
4.2.	Filtrado Lineal Óptimo	73
4.3.	Predicción Lineal	78
4.4.	Filtros Adaptables	80
4.4.1.	Esquema Prototipo del Filtrado Adaptable	81
4.4.2.	Algoritmos de Filtrado Adaptable	83
4.5.	Resumen y Referencias	87

5. Resultados	89
5.1. Introducción	89
5.2. Espectro Frecuencial del ECG	91
5.3. Resultados de Simulación	93
5.3.1. Filtro FIR	93
5.3.2. Filtro IIR	97
5.3.3. Filtro Adaptable	100
5.3.4. Discusión	104
5.4. Emulación en el DSP 320c6711 de Texas Instruments	105
5.4.1. Validación del Algoritmo Seleccionado	106
5.5. Resumen y Referencias	107
6. Conclusiones y Proyección Futura	109
6.1. Proyección Futura	110
A. Artículo	111
B. DSP TMS320c6711 de Texas Instruments	117
B.1. Generalidades de un DSP	118
B.2. Arquitectura	119
B.2.1. Características y Opciones	119
B.2.2. Arquitectura	122
B.2.3. Archivos de Registros de Control	126
B.2.4. Caminos de Memoria, Cargas y Almacenamiento	127
B.2.5. Modos de Direccionamiento	127
B.2.6. Periféricos	128
C. Producto Interno y Principio de Mínimos Cuadrados	133
C.1. Producto Interno	133
C.2. El Principio de Mínimos Cuadrados	134

Referencias

141

Índice de figuras

1.1. Vista anterior y corte frontal del corazón.	9
1.2. Monitoreo de un ECG.	10
1.3. Ondas componentes de la señal electrocardiográfica.	11
2.1. Representación gráfica del impulso unitario.	19
2.2. Señales impulsos.	19
2.3. Combinación lineal de impulsos para el Ejemplo 2.2.1.	20
2.4. Representación gráfica del escalón unitario.	20
2.5. Representación gráfica de la rampa unidad.	21
2.6. Representación gráfica de la exponencial (real). A y a son reales, $a > 0$	22
2.7. Señales par e impar, coseno y seno respectivamente, con periodo fundamental T	22
2.8. Esquema básico de un sistema.	24
2.9. Muestreo periódico de una señal analógica.	28
2.10. Sistema LTI con respuesta al impulso, $h(t)$	29
2.11. Representación gráfica de la señal $y(t)$ del Ejemplo 2.4.1.	30
2.12. Señales del Ejemplo 2.4.2 a convolucionar.	32
2.13. Señal de salida $y[n]$ del Ejemplo 2.4.2.	32
2.14. Onda cuadrada del Ejemplo 2.5.1.	36

2.15. Reconstrucción de la señal $x(t)$ empleando 1, 3 y 11 armónicos a partir de series de Fourier para el Ejemplo 2.5.1.	37
2.16. Espectro de la señal periódica del Ejemplo 2.5.2.	39
2.17. Par de transformadas para el Ejemplo 2.6.1.	44
3.1. Efecto de los filtros sobre las senoides.	57
3.2. Respuestas en magnitud de los filtros discretos selectivos en frecuencia ideales.	59
3.3. Características de magnitud de filtros físicamente realizables.	62
3.4. Ejemplos de $h[n]$ para (a) Tipo I, (b) Tipo II, (c) Tipo III, (d) Tipo IV de filtros FIR.	66
4.1. Arquitectura general de un sistema adaptable.	72
4.2. Esquema prototipo del filtro Wiener.	74
4.3. Filtrado lineal óptimo.	76
4.4. Predicción lineal.	78
4.5. Estructura en celosía.	80
4.6. Esquema prototipo del filtrado adaptable.	82
5.1. Diagrama básico del filtrado adaptable de un ECG.	90
5.2. Señal de ECG.	92
5.3. Espectro de la señal de ECG.	92
5.4. Estructura directa para la realización de un filtro FIR.	93
5.5. (a) Señal de ECG alterada por ruido Gaussiano y (b) su espectro.	95
5.6. Diagrama del filtro FIR en Simulink.	95
5.7. Diagrama de Bode del filtro FIR en Simulink.	96
5.8. Señal de salida del filtro FIR.	96
5.9. Estructura directa de un filtro IIR.	97
5.10. Diagrama del filtro IIR realizado en Simulink.	99
5.11. Diagrama de bode del filtro IIR en Simulink.	99

5.12. Señal de ECG filtrada del filtro IIR.	100
5.13. Diagrama del filtro FIR adaptable.	100
5.14. Diagrama del filtro FIR adaptable LMS.	101
5.15. Resultados de simulación para LMS, con $\mu = 0.1$	102
5.16. Resultados LMS, con $\mu = 0.01$	102
5.17. Diagrama del filtro FIR Adaptable RLS.	103
5.18. Resultados de simulación para RLS.	103
5.19. (a) Señal ECG original y respuesta de los filtros (b) FIR y (c) IIR.	104
5.20. (a) Señal ECG original y respuesta del filtro FIR adaptable (b) LMS, (c) RLS.	105
5.21. Diagrama de emulación usando el DSP y MATLAB.	106
5.22. Resultados de emulación de un filtro FIR adaptable LMS, (a) Señal original ECG, (b) Señal con ruido y (c) Señal filtrada.	107
B.1. Diagrama básico de un DSP.	118
B.2. DSP TMS320c6711.	119
B.3. Diagrama de bloques del DSP.	122
B.4. Caminos de datos del DSP c6711	124
B.5. Unidades funcionales del DSP c6711.	125
B.6. Diagrama de bloques con los periféricos del DSP c6711	129

Índice de tablas

1.	NOTACIÓN EMPLEADA EN LA TESIS.	XV
1.1.	EJEMPLOS DE SEÑALES Y SU FRECUENCIA ASOCIADA.	5
1.2.	DURACIÓN DEL INTERVALO QT.	13

Indice de Algoritmos

5.1. ALGORITMO: ESPECTRO DE UNA SEÑAL ECG	91
5.2. ALGORITMO: FILTRO FIR.	94
5.3. ALGORITMO: FILTRO IIR REALIZACIÓN DIRECTA.	97

Notación y Simbología

En la **Tabla 1** se resume la notación empleada en el desarrollo de este trabajo de tesis.

Tabla 1: NOTACIÓN EMPLEADA EN LA TESIS.

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN
AR	Autoregresivo
DFT	Transformada discreta de Fourier
DSP	Procesador digital de señales
ECG	Electrocardiograma
EEG	Electroencefalograma
EMG	Electromiograma
FFT	Transformada rápida de Fourier
FIR	Respuesta impulsional finita
IIR	Respuesta impulsional infinita
LMS	Least Mean Square
LTI	Lineal Invariante en el Tiempo
MA	Media en movimiento
MAC	Operación de multiplicación y acumulación
RLS	Recursive Least Square

Capítulo 1

Introducción

El análisis de señales se hace con el propósito de extraer información de estas; la mayor parte de las señales (señales sísmicas, biomédicas y electromagnéticas) que aparecen en los ámbitos de la ciencia y la ingeniería son de naturaleza analógica, es decir, las señales son funciones de una variable continua, como el tiempo o el espacio y normalmente toman valores en un rango continuo.

Los procesadores digitales, las herramientas matemáticas y el desarrollo de diferentes tipos de algoritmos para el procesamiento digital de señales proporcionan un método alternativo para el procesamiento de una señal analógica y así hacen posible la realización de analizadores de señales [15].

El procesamiento digital de señales es una área de la ciencia y de la ingeniería que se ha desarrollado rápidamente durante los últimos 30 años. Este amplio crecimiento que ha tenido la industria digital se debe en gran medida al desarrollo de algoritmos de procesamiento digital de señales en los que se requiere de aplicaciones tales como filtrado, compresión, análisis en frecuencia entre otras [21].

Los sistemas programables tienen un gran número de aplicaciones en el campo del procesamiento digital de señales, entre las que se encuentran la ecualización de canales, cancelación de ecos, etc., y en ellas destaca la cancelación activa de ruido que se aplica cuando no es posible usar los procedimientos clásicos de eliminación de ruido (filtros selectivos en frecuencia), tal es el caso de los EEG, ECG y EMG. La solución óptima a dicho problema es el empleo de los filtros adaptables, dispositivos que utilizan algoritmos recursivos.

Justificación

Esta tesis nace de la necesidad de construir innovadoras herramientas para atacar problemas tradicionales con nuevas expectativas y perspectivas, y, realizar estudios de alta sensibilidad con origen en el filtrado adaptable y la actual tecnología digital.

Con el presente trabajo se pretende aportar una herramienta matemática que sirva para el procesamiento digital de señales médicas, en el contexto del filtrado digital, ya que la implementación de un filtro ideal es imposible, pero se pueden obtener excelentes filtros digitales con relativamente pocos recursos que, en términos prácticos y dependiendo de la aplicación particular, pueden tener un buen desempeño.

El continuo desarrollo del procesamiento digital de señales es el resultado de los avances tecnológicos tanto en procesadores digitales como en circuitos integrados. Actualmente estos resultan ser *baratos*, *rápidos* y *confiables* para construir sistemas digitales altamente sofisticados, capaces de realizar funciones y tareas del procesamiento digital de señal que normalmente eran

demasiado difíciles, costosos y de baja precisión cuando se emplea circuitería o sistemas de procesamiento de señales analógicas.

El procesamiento digital no solo tiene las ventajas arriba mencionadas, si no que presenta otra de especial interés; es posible realizar operaciones programables que, por medio de software, pueden ser modificadas fácilmente cuando así se requiera, sin alterar el sistema mismo, así las funciones de procesamiento pueden ser ejecutadas por un hardware único. Por lo tanto, el hardware digital y software asociado proporciona un mayor grado de *flexibilidad* en el diseño y desarrollo de sistemas.

El principal problema en un sistema de procesamiento de señales biomédicas es la dificultad para adquirir la señal pura, es decir, sin ruido; ya que para el estudio de una señal proveniente del cuerpo humano es necesario tener la señal de forma pura o lo más limpia posible, tal y como es generada, sin interferencia alguna que modifique sus parámetros y de esta manera el médico especialista pueda apoyarse en esta señal para dar un diagnóstico. Es posible minimizar los efectos del ruido que alteran la señal mediante un tratamiento digital y una herramienta opcional adecuada para ello es el procesamiento adaptable.

En un filtro adaptable los parámetros que lo caracterizan como filtro cambian con el tiempo, en contraposición con los filtros tradicionales (IIR, FIR) que no varían en el tiempo. Las señales generadas por el cuerpo humano pueden variar o sufrir alteraciones por diversos factores, la idea del filtro adaptable es “adaptar” sus parámetros en función de los cambios que sufra la señal del ECG.

Objetivo General

El objetivo de este trabajo de tesis es diseñar filtros adaptables para el procesamiento digital de un ECG haciendo uso de un DSP para su emulación.

Objetivos Específicos

- Puesta en operación un DSP.
- Programación de algoritmos de filtros adaptables.
- Emulación del procesamiento de un electrocardiograma.

Antecedentes

A partir de los años 60, innumerables propuestas respecto al procesamiento de bioseñales empezaron a surgir, se desarrollaron un sin número de algoritmos y métodos aplicando diversos conceptos matemáticos y estadísticos, así como algoritmos computacionales enfocados a redes neuronales o reconocimiento de patrones, intentando abordar el problema desde diferentes campos. Es así, pues que hoy en día los programas encargados de interpretar dichas señales utilizan una enorme variedad de técnicas para el análisis de estas [13].

La generación de señales eléctricas de un organismo biológico como es la actividad eléctrica interna generada por comportamientos o funcionamientos específicos de órganos internos, contiene información (parámetros) muy importante en el estudio y entendimiento del mismo. De esta manera el cuerpo humano genera múltiples señales eléctricas (bioeléctricidad) capaces de ser

monitoreadas, y a partir de las cuales, se extrae información.

Por ejemplo se tiene señales eléctricas asociadas a la actividad ocular^{a b}, respiratoria^c, cardíaca^d, cerebral^e, muscular^f, sanguínea^g, etc., cada una de ellas con un rango de frecuencias diferentes como se muestra en la **Tabla 1.1**.

Tabla 1.1: EJEMPLOS DE SEÑALES Y SU FRECUENCIA ASOCIADA.

TIPO DE SEÑAL	RANGO DE FRECUENCIA (Hz)
Electroretinograma ^a	0 - 20
Electronistagmograma ^b	0 - 20
Neumograma ^c	0 - 40
Electrocardiograma ^d	0 - 100
Electroencefalograma ^e	0 - 100
Electromiograma ^f	10 - 200
Esfigmomanograma ^g	0 - 200
Voz	1000 - 4000

Actualmente algunos analizadores de estas señales asisten al médico proporcionando un diagnóstico, mientras otros únicamente proveen un limitado número de parámetros mediante los cuales el médico puede hacer su propio diagnóstico basado en las características extraídas. Existen analizadores disponibles con la capacidad de ofrecer más de cien diagnósticos alternativos, sin embargo la fidelidad de éstos es aún incierta.

A continuación se presentan brevemente algunas de las técnicas más utilizadas en los analizadores actuales que están relacionados con el tema bajo estudio en esta tesis.

Sistemas de Procesamiento Electrocardiográfico en Tiempo Real

El procesamiento de señales electrocardiográficas en tiempo real es una tarea sumamente delicada y compleja. Analizadores que realizan trabajos de este tipo tratan de asegurar la fiabilidad de sus resultados mediante el uso de procedimientos redundantes en procesamiento de señales, además de tener que cuidar aspectos relacionados con el consumo de energía y el tiempo de vida de las baterías en los dispositivos.

Los métodos utilizados para la detección de los picos que componen un ECG son variables. Existe un gran número de algoritmos de reconocimiento utilizados en los analizadores electrocardiográficos, y en muchos de los casos los principios de operación de estos varían considerablemente. Algunos se basan en diferentes tipos de manipulación de amplitudes mientras otros examinan la señales en dominio de frecuencias empleando técnicas como la aplicación de diversos filtros y procesamiento de *wavelets*.

Las propiedades adaptables de los algoritmos con respecto al cambio de señal pueden también diferir, y algunos algoritmos utilizan métodos estadísticos para su identificación. Un ejemplo de algoritmo que utiliza métodos estadísticos fue propuesto hace ya dos décadas por Touch en 1986 para calcular la línea base electrocardiográfica.

Interpretación de Señales Electrocardiográficas Utilizando Reconocimiento de Patrones

Algunos investigadores aseguran que la interpretación de señales electrocardiográficas es una típica aplicación de reconocimiento de patrones, existiendo hoy en día sofisticados analizadores electrocardiográficos que en casos

específicos pueden lograr incluso un mayor grado de exactitud en su diagnóstico al que sería obtenido por un cardiólogo. No obstante, perduran aún ciertos cambios electrocardiográficos demasiado complejos de identificar mediante el uso de las computadoras [28].

Los analizadores más simples monitorean diferencias entre señales. En sistemas de procesamiento basados en reconocimiento de patrones en los cuales el análisis no es realizado en tiempo real, se obtiene una muestra representativa a partir de los ciclos medidos, y esta es utilizada en el análisis. Los métodos más típicos para la elaboración de muestras representativas son la construcción de ciclos promedios y construcción de ciclos de medianas. Los parámetros basados en estos métodos pueden ser usados como valores de referencia para cada ciclo de manera separada, pudiendo determinar entonces la variación de los parámetros.

Por último cabe destacar que los parámetros obtenidos a partir de la señal medida dependen de cada aplicación.

Sistemas Existentes

Actualmente en Estados Unidos, Europa, Asia y algunos países de África, muchas de las compañías líderes en el área de aparatos electrónicos están ingresando en el campo de la medicina. Algunas se interesan únicamente en la fabricación de nuevos dispositivos para el cuidado de la salud, sin embargo otras se involucran más afondó, adentrándose en el terreno de la investigación, el desarrollo de nuevos y más eficientes algoritmos e incluso la generación de ofertas educativas. Por mencionar algunas de estas empresas, se encuentra entre ellas: *Philis, General Electric, Toshiba y Sony*.

El desarrollo de estas empresas se enfoca principalmente en sistemas de imágenes y monitoreo radiológico, cardiológico, neurológico y/o prenatal para pacientes en estado preoperatorio, cuidado crítico o embarazadas.

Un ejemplo muy común es el monitoreo de pacientes ambulatorios con problemas cardíacos. Esto es, el uso de dispositivos inalámbricos que graban la señal tomada del paciente y se comunican al centro de telemetría del hospital. El primero de ellos, llamado PatientNet, de la empresa General Electric; el segundo Cardioline del grupo Ángeles en México [28].

Generalidades del ECG

Un ECG es la representación gráfica de la tensión contra tiempo de la actividad cardiovascular de un paciente, que ofrece información acerca del estado del músculo cardíaco [20]. El origen se encuentra en las células del músculo cardíaco, las cuales pueden ser excitadas eléctricamente, produciéndose un flujo de iones a través de su membrana, lo cual induce un potencial eléctrico variable en el interior y en el exterior.

El corazón se contrae únicamente si el músculo cardíaco cambia la conductividad de su pared celular, permitiendo un flujo de iones de Calcio como elemento más característico dentro de un complejo proceso. En general, la contracción es disparada por el nodo sinusal, situado en la posición cefálica de la aurícula derecha y compuesto por un grupo de células que tienen como característica peculiar que se despolarizan automáticamente cada 800ms. Esta despolarización se transmite a las células auriculares adyacentes, describiendo un flujo de cationes Na^+ y Ca^{++} , que irrumpen desde el medio extracelular hacia el interior cuando la membrana se hace permeable. En la

Figura 1.1 se muestran las principales partes y la estructura genérica del sistema nervioso del corazón.

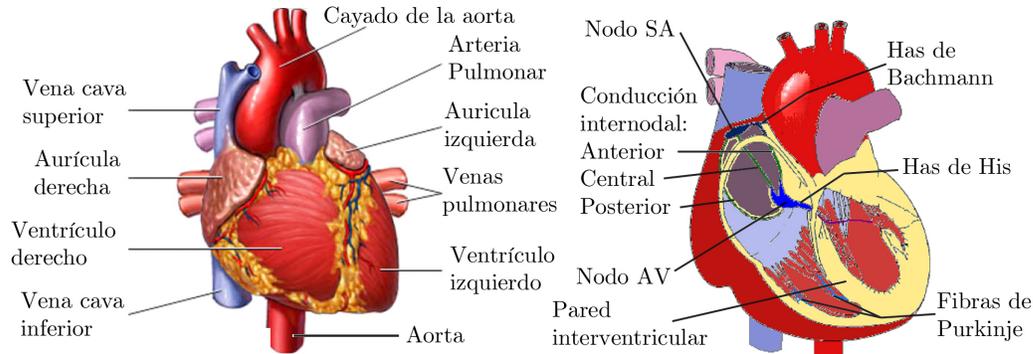


Figura 1.1: *Vista anterior y corte frontal del corazón.*

La fase de recuperación se conoce como repolarización, y durante este periodo las concentraciones de iones vuelven al nivel normal. En reposo las células tienen un potencial transmembrana de 90mV. Este potencial es cíclico, con un periodo de entre 400 y 1200ms.

Existe una conexión especial, el nodo auriculoventricular o AV, que avanza de aurícula a ventrículo, evitando frecuencias cardiacas superiores a 200 lpm (latidos por minuto) [7]. La despolarización del músculo produce un nivel positivo que precede a la onda de avance. Pasado este tiempo, la excitación continua a través del Haz de His hasta alcanzar las fibras de Purkinje donde se transmite a todos los puntos de los ventrículos izquierdo y derecho causando su contracción (esto significa que en la superficie del músculo los electrodos recogen un nivel positivo), lo que provoca que la sangre venosa salga en dirección a los pulmones y la sangre arterial hacia el resto del cuerpo.

Para adquirir la señal los sensores de tensión (electrodos) son colocados en el pecho del paciente y la señal recogida es llevada al electrocardiógrafo, donde es mostrada a través de un monitor, como se muestra en la **Figura 1.2**.

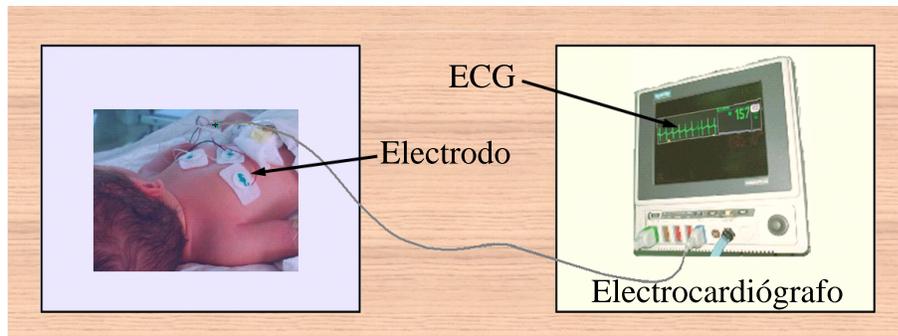


Figura 1.2: *Monitoreo de un ECG.*

Uno de los grandes problemas que se presenta en la obtención de la señal de baja frecuencia, es su alta susceptibilidad a la interferencia por ruido, como la producida por la red misma, que posee una frecuencia muy cercana a la actividad cardíaca y además de ser superior en amplitud. Otros tipos de ruidos pueden ser generados por el movimiento relativo del contacto entre electrodo-piel, o el ruido generado por las señales eléctricas de los músculos (señales electromiográficas) y los ruidos propios del entorno.

Por lo tanto es preciso eliminar la interferencia que se introduce al obtener un ECG. Parece sencillo a simple vista resolver este problema, quizás mediante el empleo de un filtro NOTCH, que eliminase las frecuencias no deseadas, sin embargo, debido a la cercanía que puede existir entre las frecuencias de las señales involucradas se requiere de un filtro muy *selectivo* para no eliminar la señal útil. Como resultado el orden del filtro debería ser muy alto, lo cual involucra una gran complejidad, aumentando con ello su costo. Una mejor alternativa la ofrecen los filtros adaptables, que bien puede

ser la configuración de un filtro digital FIR adaptable, ya que reduce en gran medida dicha interferencia si no es que la elimina por completo.

Ondas Componentes del ECG

Durante la despolarización y repolarización miocárdica, aparecen las ondas del ECG. Las distancias entre deflexiones u ondas se denominan segmentos o intervalos. Un periodo del ECG perteneciente a un individuo sano, consiste en una onda P, el complejo QRS, la onda T y la onda U, tal como se muestra en la **Figura 1.3**.

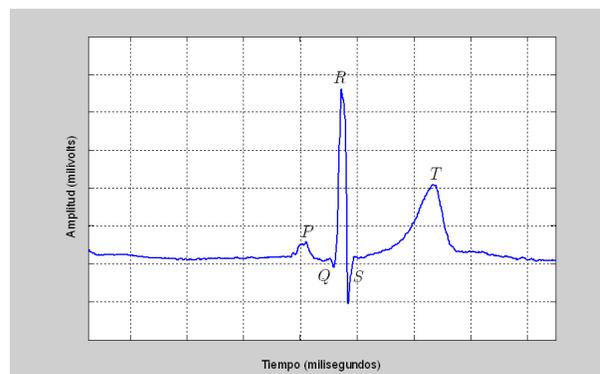


Figura 1.3: Ondas componentes de la señal electrocardiográfica.

Las porciones del electrocardiograma entre las deflexiones se denominan segmentos, y las distancias entre ondas se denominan intervalos. El ECG puede ser dividido en los siguientes intervalos y segmentos [12]:

- *Onda P*. Representa la despolarización de la aurícula. Su duración normal es de 0.1s. La forma depende de la localización de los electrodos (derivación). Un aumento del voltaje o de la duración de esta onda indica una anomalía auricular. La ausencia de esta onda ocurre en una

parada del nodo sinusal, y en el bloqueo SA sinoauricular (situación en la que sí se despolariza el nodo sinusal, pero no se transmite el impulso a las células de la aurícula contiguas).

- *Complejo QRS*. Representa la despolarización de los ventrículos. Se forma por las ondas Q, R y S, aunque se pueden presentar otras denominadas R' y S'. Su duración es de aproximadamente 100ms.
 - *Onda T*. Representa la repolarización de los ventrículos. La onda T normal es asimétrica en sus ramas y está redondeada en su vértice. La pendiente de la rama inicial es más suave que la de la rama terminal. Las anomalías de esta onda pueden indicar enfermedades cardíacas primarias, aunque hay casos de personas sanas con las mismas anomalías. También puede traducir trastornos del equilibrio hidroelectrolítico.
 - *Onda U*. Tiene un origen fisiológico poco claro. Es anormal en trastornos del Potasio.
 - *Segmento PR*. Corresponde a la línea isoelectrica entre el comienzo de la onda P y la deflexión inicial del complejo QRS. La duración normal de este segmento está entre 0.12 y 0.21s, dependiendo de la frecuencia cardíaca.
 - *Segmento ST*. Es el intervalo entre el final del complejo QRS y el inicio de la onda T. Representa el tiempo durante el que los ventrículos permanecen en estado activado y puede iniciarse la repolarización ventricular. Normalmente el segmento ST es isoelectrico, aunque puede estar también ligeramente desviado. Una desviación elevada a menudo representa un infarto de miocardio, una pericarditis aguda o una miocarditis.
-

- *Intervalo PP.* Corresponde al intervalo de tiempo entre el comienzo de la onda P y el comienzo de la siguiente onda P.
- *Intervalo RR.* Corresponde al intervalo de tiempo entre la onda R de un complejo QRS y la onda R del siguiente complejo QRS.
- *Intervalo QRS.* Corresponde al intervalo de tiempo entre el comienzo de la onda Q y el final de la onda S, dentro del mismo complejo QRS. Es un indicador del tiempo de conducción intraventricular.
- *Intervalo QT.* Corresponde al intervalo de tiempo entre el comienzo del complejo QRS y el final de la onda T, representando la duración de la sístole eléctrica. La relación entre el ritmo cardiaco y la duración de este intervalo viene dado en la **Tabla 1.2**.

Tabla 1.2: DURACIÓN DEL INTERVALO QT.

Ritmo Cardiaco	Duración del QT(s)
60	0.33-0.43
70	0.31-0.41
80	0.29-0.38
90	0.28-0.36
100	0.27-0.35
120	0.25-0.32

Organización de la Tesis

Este trabajo de tesis se organiza en 6 capítulos, con el siguiente contenido:

- El *Capítulo 2* está dedicado a la caracterización y análisis de señales y sistemas LTI (tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto) mediante el empleo de técnicas de transformación, iniciando con la convolución, a esta siguen las series y la transformada de Fourier, con las que es posible el análisis en frecuencia de las señales y sistemas. De la misma manera se describen otras técnicas como la transformada discreta de Fourier (DFT) y la transformada rápida de Fourier (FFT). Finalizando con los métodos de Laplace y transformada Z.

 - Los filtros se introducen en el *Capítulo 3*. En él se presentan las características de los filtros causales, no causales, analógicos y discretos. Se caracteriza también el diseño de los filtros FIR e IIR sencillos, así como algunas propiedades importantes para su aplicación práctica.

 - En el *Capítulo 4* se introduce al filtrado lineal óptimo que permite el diseño de los filtros adaptables. Continúa con la teoría de la predicción lineal que permite el estudio de señales con características aleatorias, finalmente se describen los filtros adaptables, desde su esquema básico hasta sus algoritmos.

 - En el *Capítulo 5* se diseñan, simulan, emulan y analizan los filtros digitales para el procesamiento del ECG, se empieza con el filtro FIR de estructura directa, continua con el IIR y finaliza con el filtro FIR adaptable, que forma el corazón de este trabajo de tesis.

 - Finalmente las conclusiones y trabajo futuro son presentados en el *Capítulo 6*.
-

Capítulo 2

Herramientas Matemáticas

EN el capítulo anterior se describen brevemente algunas investigaciones realizadas sobre el tratamiento digital de señales biomédicas. Lo anterior permite ver la revolución tecnológica, tan sólo en el campo de las ciencias médicas, que ha sido posible gracias a la aplicación de técnicas de procesamiento digital de señales.

Es importante saber que dichas técnicas de análisis y diseño de sistemas **LTI** se realizaron por un principio para señales continuas en el tiempo, sin embargo, debido al gran desarrollo de la era digital, en la que actualmente estamos inmersos, fue necesario ampliar la aplicación de las técnicas del tratamiento digital sobre sistemas que emplean señales en tiempo continuo. En este capítulo se dan las herramientas básicas para el procesamiento digital de señales.

2.1. Introducción

Resulta indispensable dar a conocer las definiciones y herramientas matemáticas empleadas en este trabajo de tesis, esto con el fin de comprender con mayor claridad y facilidad el procesamiento adaptable de señales médicas.

Las técnicas de transformación aplicadas sobre señales y/o sistemas permiten estudiar sus características y comportamiento, que en muchas ocasiones resulta difícil o imposible tal y como se presentan (en el dominio del tiempo), es en el dominio de la frecuencia, en donde si es posible realizar un análisis más claro.

A lo largo de este capítulo se resumen conceptos y técnicas de transformación en el procesamiento de señales, tanto en caso continuo, como en caso discreto. Ello debido a la interrelación de los sistemas y señales de ambos casos.

Es pertinente aclarar que no se realiza un estudio profundo, puesto que no es este el objetivo, sin embargo, para quien requiera de mayor información puede consultarlo en la bibliografía [19, 21].

El capítulo comienza con las series y transformadas de Fourier en tiempo continuo y su contraparte en tiempo discreto. Continúa con la transformada discreta de Fourier y la transformada rápida de Fourier. Finalmente se presenta la transformada de Laplace y su complementaria en tiempo discreto, la transformada z . De esta manera se puede proseguir con el siguiente capítulo sobre filtros digitales. Estas herramientas matemáticas son utilizadas en los Capítulos 3, 4 y 5.

2.2. Señales y Sistemas

Los conceptos de señales y sistemas aparecen con frecuencia en una variedad muy amplia de campos, las ideas y técnicas asociadas a estos conceptos son de suma importancia en las diversas áreas de la ciencia y tecnología como las comunicaciones, acústica, sismología, procesamiento de voz e ingeniería biomédica, solo por mencionar algunas.

El estudio de un sistema simplemente no es posible sin el empleo de señales y el estudio de las señales no tiene objeto si estas no tienen aplicación en algún sistema. A continuación se describe brevemente a las señales y sistemas, así como su interrelación que guardan. Además se mencionan algunas clasificaciones de los mismos.

2.2.1. Definición de Señal

Una señal es una cantidad física que varía con el tiempo, el espacio o cualquier otra variable u otras variables independientes y contiene información acerca de la naturaleza o comportamiento de algún fenómeno. Ejemplos de señales son voltaje y corriente como funciones del tiempo en un circuito eléctrico, otro ejemplo es la señal de ECG, que proporciona información sobre el estado del corazón.

2.2.2. Tipos de Señales

En el universo existe una amplia variedad de señales y su clasificación, depende en gran medida de una aplicación concreta, es de igual manera amplia. Para fines de este trabajo es suficiente la clasificación siguiente:

Señal Continua en el Tiempo

Es aquella señal que está definida para todos los valores del tiempo y puede tomar cualquier valor en el intervalo continuo. Matemáticamente estas señales se describen como funciones continuas de una variable continua, en el desarrollo subsecuente de este trabajo la variable independiente aparece encerrada entre paréntesis, por ejemplo; $x(t) = e^{st}$.

Señal Discreta en el Tiempo

Es aquella que se define (o existe) sólo para ciertos valores de tiempo y se representa matemáticamente como una secuencia de números reales o complejos. La variable independiente se representa con la letra n y se encierra entre corchetes como en el siguiente ejemplo; $[n] = a^n$, si $n \geq 0$.

Adicionalmente, es necesario saber que hay señales, que sirven como generadores básicos y que a partir es posible construir muchas otras señales, comunmente a estas señales se les denomina *señales elementales*. Tal es el caso de la función impulso unitario dado por

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

cuya gráfica correspondiente se presenta en la **Figura 2.1**.

Ejemplo 2.2.1 Dadas las señales

$$x1 = [2 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$x2 = [0 \ 4 \ 0 \ 0]$$

$$x3 = [0 \ 0 \ 3 \ 0]$$

$$x4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

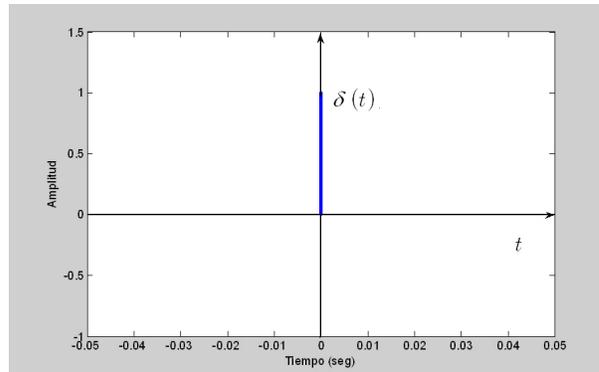


Figura 2.1: Representación gráfica del impulso unitario.

cuya representación gráfica de cada una se encuentra respectivamente en la **Figura 2.2a,b,c,d**. Obtener la combinación lineal de estas cuatro señales que resulta de la suma algebraica.

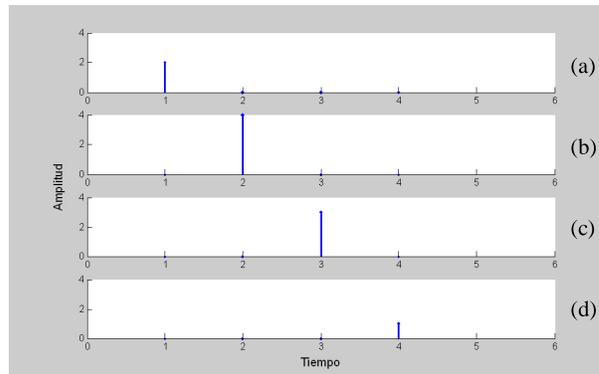


Figura 2.2: Señales impulsos.

Basta con sumar uno a uno los valores verticalmente, la señal resultante queda definida como

$$x = [2 \quad 4 \quad 3 \quad 1]$$

cuya representación gráfica corresponde a la **Figura 2.3**.

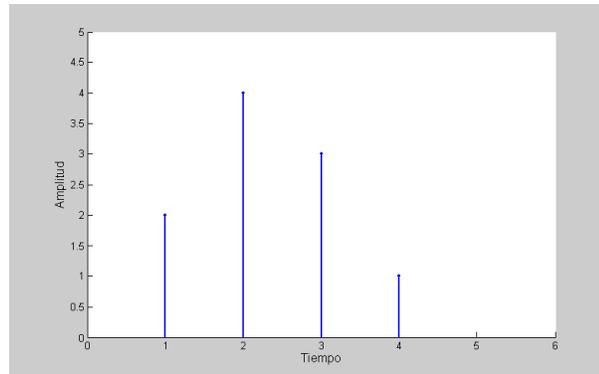


Figura 2.3: *Combinación lineal de impulsos para el Ejemplo 2.2.1.*

Igualmente la función escalón unitario expresado como

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

La **Figura 2.4** corresponde a la representación gráfica de la función escalón.

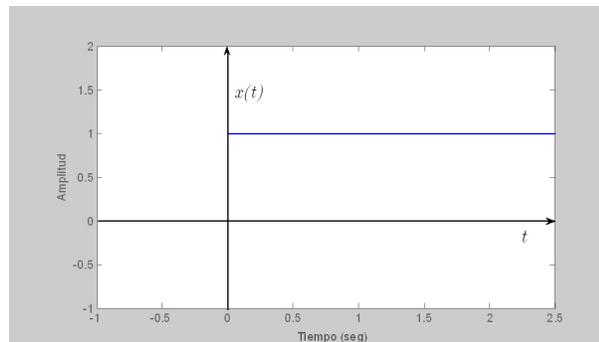


Figura 2.4: *Representación gráfica del escalón unitario.*

Una señal elemental más de este tipo es la función rampa unidad, para este caso se muestra en tiempo discreto. La **Figura 2.5** ejemplifica gráficamente

a la siguiente expresión que le corresponde

$$x_r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

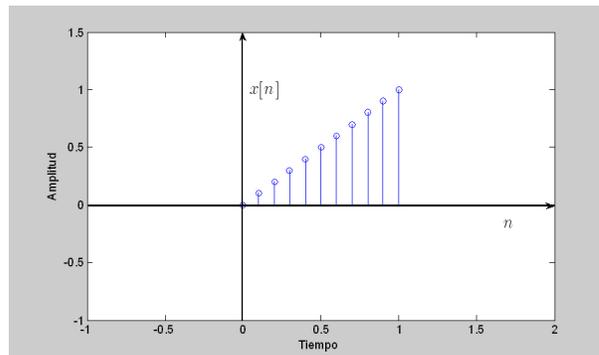


Figura 2.5: Representación gráfica de la rampa unidad.

Finalmente se presenta la señal exponencial compleja dada por la expresión

$$x(t) = Ae^{at}$$

válida para toda a . Un ejemplo de esta señal se presenta en la **Figura 2.6**.

Como se puede observar, la representación de las señales anteriores puede hacerse tanto para tiempo continuo como para tiempo discreto.

A lo largo de este trabajo se refiere con frecuencia a las señales *periódicas*, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto. Se dice que una señal es periódica cuando sus valores de amplitud se “*repite*n” a intervalos de tiempo iguales, al intervalo mínimo donde se efectúan las reproducciones de dichos valores se le denomina *periodo fundamental*; es decir cuando una señal $y(t)$ tiene la propiedad de que existe un valor positivo T para el cual

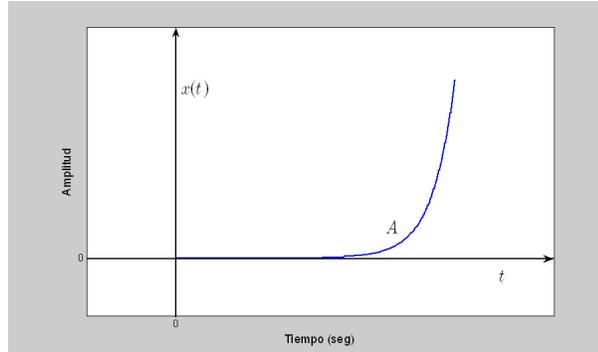


Figura 2.6: Representación gráfica de la exponencial (real). A y a son reales, $a > 0$.

$$y(t) = y(t + T) \quad \forall t$$

En esta caso se dice que $y(t)$ es periódica con periodo T . Esto se puede ver gráficamente en la **Figura 2.7**.

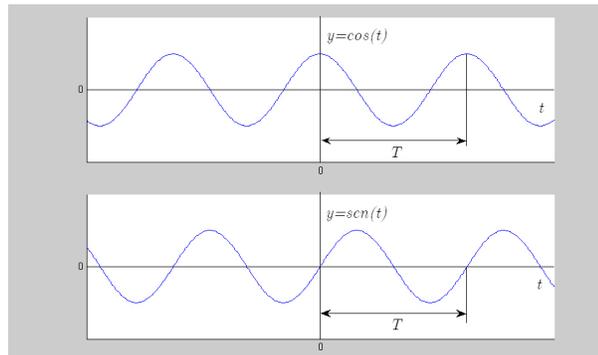


Figura 2.7: Señales par e impar, coseno y seno respectivamente, con periodo fundamental T .

La **Figura 2.7** también muestra otro aspecto importante de dichas señales, su *paridad*; una señal $y(t)$ es *par* si se cumple que

$$y(-t) = y(t)$$

e *impar* si

$$y(-t) = -y(t)$$

Como se puede observar de la **Figura 2.7** una función par es *simétrica* con respecto al eje vertical en el origen y una función impar es *antisimétrica* respecto al eje vertical en el origen. Además si la función $y(t)$ satisface

$$y(t) = -y(t + T/2) \quad \forall t$$

se dice que $y(t)$ tiene simetría de 1/2 onda.

Para el caso mostrado en la **Figura 2.7** la función *coseno* es par y la función *seno* es impar y ambas tienen simetría de 1/2 onda.

2.2.3. Definición de Sistema

Un *sistema* es un conjunto de elementos, que interactúan para realizar una determinada tarea u operación sobre una señal. Un ejemplo de sistema es un filtro, que se usa para reducir el ruido y/o interferencia que alteran a una señal dada.

Una representación básica de sistema se muestra en la **Figura 2.8**, en la que se muestra como actúa el operador H del sistema sobre una señal (señal de entrada) para generar otra señal (señal de salida). La representación simbólica de este se expresa como

$$u(t) \xrightarrow{H} y(t)$$

En el análisis de algún sistema es indispensable el *modelado* del mismo. Para estos fines un *modelo matemático* es la representación matemática que describe al sistema. Por consiguiente el modelo debe ser una abstracción del sistema real, lo que se interpreta como una mínima cantidad de patrones y relaciones posibles. Todo ello con la finalidad de interpretar adecuadamente la naturaleza y comportamiento mismos del sistema.

Un *modelo matemático* de un sistema consiste en un conjunto de ecuaciones cuya solución predice cambios en el comportamiento del sistema. El uso de modelos matemáticos es una consecuencia de esfuerzos analíticos para abstraer y describir el mundo real. Las descripciones cualitativas del sistema (modelos simbólicos verbales) dan poca ayuda para predecir o especificar con precisión el estado de un sistema.

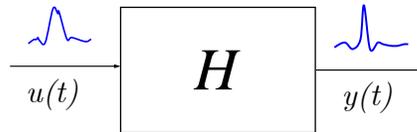


Figura 2.8: Esquema básico de un sistema.

La clasificación de la gran variedad de sistemas se puede englobar en las siguientes:

Sistema Lineal y Sistema no Lineal

Se dice que un *sistema es lineal* si y sólo si cumple con los principios de superposición y homogeneidad. Matemáticamente, el principio de superposición establece que si para una entrada $x_1(t)$ produce una salida $y_1(t)$ y otra entrada $x_2(t)$ produce $y_2(t)$, la suma de las entradas producirá la suma de las salidas, así

$$x_1(t) + x_2(t) \xrightarrow{H} y_1(t) + y_2(t)$$

Este es el primer principio. La homogeneidad, por otra parte, consiste en que si la entrada se ve afectada por un coeficiente constante α , la salida se verá afectada de la misma manera, tal como sigue

$$\alpha x_1(t) \xrightarrow{H} \alpha y_1(t)$$

Un *sistema es no lineal* cuando simplemente no cumple con alguno o ninguno de los principios anteriores.

Sistema Invariante en el Tiempo y Sistema Variante en el Tiempo

Un *sistema es invariante en el tiempo*, si un desplazamiento en el tiempo de la señal de entrada causa el mismo desplazamiento en la señal de salida, esto es si

$$x(t) \xrightarrow{H} y(t)$$

entonces

$$x(t \pm p) \xrightarrow{H} y(t \pm p)$$

Una característica es que están descritos por ecuaciones diferenciales o algebraicas con coeficientes constantes.

La contraparte del sistema anterior es un *sistema invariante en el tiempo* el cual está descrito por ecuaciones diferenciales (o de diferencias para el caso discreto) o algebraicas con coeficientes que dependen del tiempo.

Sistema Continuo en el Tiempo y Sistema Discreto en el Tiempo

Un *sistema continuo en el tiempo* es aquel en el que tanto su salida como su entrada, son señales continuas en el tiempo, esto es, se conocen en cualquier instante en el tiempo.

Mientras que un *sistema discreto en tiempo* es aquel que opera sobre una señal de entrada en tiempo discreto y genera una salida igual en tiempo discreto, lo que implica que ambas estén definidas sólo para algunos instantes de tiempo.

Sistema Causal y Sistema no Causal

Se dice que un *sistema es causal* si su salida en cualquier instante de tiempo depende solo de los valores de entrada presentes y pasados, pero no futuros. Las condiciones de *reposo inicial* (mejor conocidas como condiciones iniciales, representadas en el contexto como *c.i.*) de estos sistemas es cero, es decir, los valores de entrada son cero para valores negativos de la variable independiente. Son sistemas que se caracterizan por ser físicamente realizables.

Un *sistema no causal* es aquel que no satisface la condición anterior, esto es, que puede depender de valores pasados, presentes y además futuros. Este tipo de sistemas no son físicamente realizables, ya que, es evidente que en un sistema en tiempo real no se dispone de las entradas futuras. Se pueden diseñar sistemas no causales en el momento que se tenga disponible o almacenada toda la señal de entrada a ser procesada, tal es el caso por ejemplo de señales sísmicas.

Durante el desarrollo subsecuente de este trabajo se estudian los ***Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo***, mejor conocidos como

sistemas **LTI**. Lo que significa que, cumplen con el principio de superposición y homogeneidad, y su representación matemática está dada por ecuaciones diferenciales (o de diferencias para el caso discreto) o algebraicas con coeficientes constantes. Las herramientas matemáticas y/o técnicas de transformación para el estudio de los sistemas **LTI** se dan a conocer en las siguientes secciones.

2.3. Muestreo de Señales Analógicas

El *muestreo* es la conversión de una señal en tiempo continuo a una señal en tiempo discreto obtenida tomando *muestras* de la señal en tiempo continuo en instantes de tiempo discreto. Existen muchas maneras de muestrear una señal, pero el tipo de muestreo más usado es el muestreo periódico o uniforme, que se describe mediante la relación

$$x[n] = x_a(nT), \quad \infty < n < \infty$$

donde $x[n]$ es la señal en tiempo discreto obtenida tomando muestras de la señal analógica $x_a(t)$ cada T segundos. El intervalo de tiempo T entre dos muestras sucesivas se denomina periodo de muestreo o intervalo de muestreo, y su recíproco $1/T = F_s$ se llama velocidad de muestreo (muestras por segundo) o frecuencia de muestreo (Hertz), la **Figura 2.9** muestra este proceso.

El muestreo periódico establece una relación entre las variables t y n de tiempo continuo y tiempo discreto, respectivamente. De hecho, estas variables se relacionan linealmente a través del periodo de muestreo T o, equivalentemente, a través de la velocidad de muestreo $F_s = 1/T$, como

$$t = nT = \frac{n}{F_s}$$

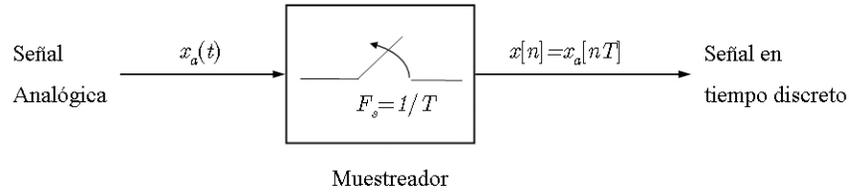


Figura 2.9: *Muestreo periódico de una señal analógica.*

Cuando se desea recuperar la señal original $x_a(t)$ la señal muestreada $x[n]$, se deben cumplir ciertas condiciones sobre el periodo de muestreo T . Estas condiciones están dadas por el Teorema de Shannon [21] que establece que se debe seleccionar una velocidad de muestreo lo suficientemente alta, se debe escoger $F_s/2$ mayor que F_{max} para poder reconstruir la señal sin ambigüedad.

$$F_s > 2F_{m\acute{a}x}$$

donde F_{max} es la frecuencia más alta de la señal analógica. Con la velocidad de muestreo seleccionada de esta manera se tiene que cualquier componente de frecuencia de la señal analógica corresponde en tiempo discreto a una senoide con alguna frecuencia.

2.4. Convolución

Como se vió en la Sección 2.2, toda señal puede expresarse como una combinación lineal de impulsos desplazados. Dicha representación de la señal es útil al estudiar la *convolución*, esta se define como el producto de dos señales en donde una de las señales es el reflejo y desplazamiento de la otra.

2.4.1. Convolución en Tiempo Continuo

La convolución en tiempo continuo puede caracterizar un sistema **LTI** por medio de una combinación lineal de impulsos desplazados y ponderados, empleando para ello la integral. Si se tiene un sistema como el mostrado en la **Figura 2.10**, entonces la salida $y(t)$ puede interpretarse por medio de la integral de convolución de la siguiente manera

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2.1)$$

donde $h(t)$ es la respuesta al impulso $\delta(t)$. La parte derecha de la ecuación (2.1) es la convolución de la señales $x(t)$ y $h(t)$. Cabe señalar que dicha expresión es válida tanto para señales periódicas como para señales aperiódicas.

La evaluación de la integral de convolución para un valor específico de t consiste en lo siguiente; primero se obtiene la señal $h(t - \tau)$ a partir de $h(\tau)$ reflejándola alrededor del origen y desplazándola t a la derecha si $t > 0$ o la izquierda $|t|$ si $t < 0$. Después se multiplica $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$, finalmente se obtiene $y(t)$ al integrar el producto resultante desde el límite inferior al superior. A continuación se presenta un ejemplo sobre la convolución de dos señales.

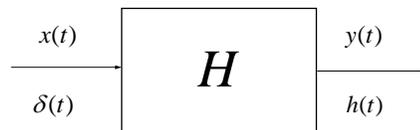


Figura 2.10: Sistema LTI con respuesta al impulso, $h(t)$.

Ejemplo 2.4.1 Obtener la convolución de la señal de entrada $x(t) = u(t)$ con $h(t) = e^{-t}$ de un sistema LTI causal (*c.i.* = 0).

En este ejemplo es posible observar que $x(t)$ es igual al escalón unitario y por tanto tiene el valor de uno en cualquier instante de tiempo t . Entonces la integral de convolución queda como sigue

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

La variable independiente aquí ahora es τ , pero el valor de $x(\tau)$ sigue siendo 1, por tanto la expresión se reduce a

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau)d\tau$$

Sabiendo que $h(t) = e^{-t}$ entonces $h(t - \tau) = e^{-(t-\tau)}$ que sustituyendo en la integral es

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau$$

Resolviendo

$$y(t) = 1 - e^{-t}$$

Cuya representación gráfica se muestra en la **Figura 2.11**

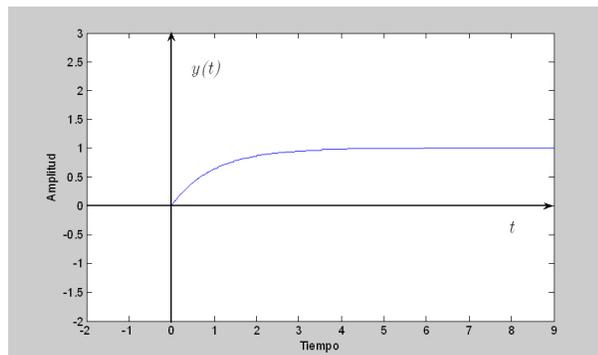


Figura 2.11: Representación gráfica de la señal $y(t)$ del Ejemplo 2.4.1.

2.4.2. Convolución en Tiempo Discreto

Al igual que para el caso continuo, la convolución en tiempo discreto puede representar a un sistema **LTI**, pero ahora por medio de una sumatoria, así

$$y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (2.2)$$

A la ecuación (2.2) se le denomina *convolución discreta* y entonces en esta situación ambas señales están discretizadas, la representación simbólica de la convolución en tiempo discreto se puede dar como un simple producto. Para el caso de la convolución de $x[k]$ con $h[k]$, queda como $y[n] = x[n] * h[n]$.

El procedimiento aquí empleado es similar que al del caso continuo; la señal de salida es la suma de los valores de entrada $x[k]$ ponderados por su valor correspondiente $h[n-k]$.

Ejemplo 2.4.2 Determinar la respuesta a la señal $x[n]$, dada la respuesta al impulso $h[n]$ cuyas gráficas correspondientes se presentan en la **Figura2.12**.

Las señales de este ejemplo pueden ser expresadas como vectores de la siguiente manera

$$h[n-k] = [1 \quad \{2\} \quad 1 \quad -1]$$

y

$$x[n] = [\{1\} \quad 2 \quad 3 \quad 1]$$

donde el numero encerrado entre llaves indica la posición del origen.

Para simplificar cálculos y con ello tiempo es útil emplear Matlab, basta con declarar en la línea de comandos los vectores que representan a las señales y convolucionarlos

mediante la función *conv* (que devuelve los valores de $y[n]$), de esta forma $conv(x, h)$.

La señal $y[n]$ es

$$y[n] = [1 \quad \{4\} \quad 8 \quad 8 \quad 3 \quad -2 \quad -1]$$

a cuya expresión corresponde la gráfica de la **Figura 2.13**

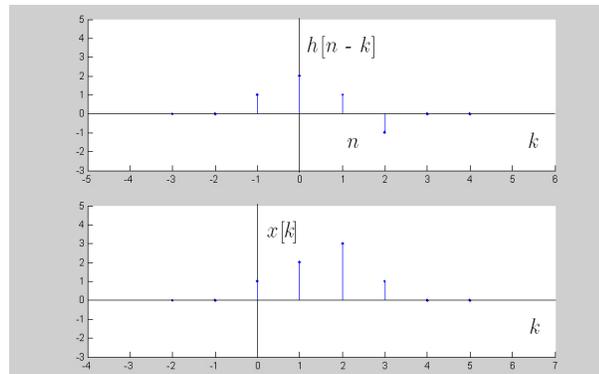


Figura 2.12: Señales del Ejemplo 2.4.2 a convolucionar.

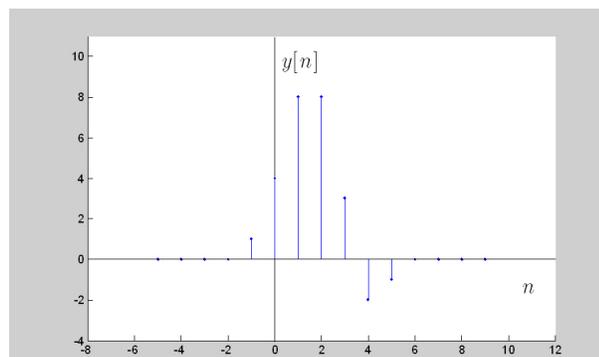


Figura 2.13: Señal de salida $y[n]$ del Ejemplo 2.4.2.

2.5. Serie de Fourier

La representación matemática básica de señales periódicas es la *serie de Fourier*, que es una suma ponderada de sinusoides relacionadas armónicamente. Dicha expansión fue desarrollada por el matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), en su trabajo sobre la conducción y distribución de calor.

La serie de Fourier, como representación alternativa de las señales *periódicas*, se realiza mediante el empleo de señales elementales, que para este caso son las exponenciales complejas. La representación de las señales y de los sistemas se hace a través de sumatorias ponderadas de un conjunto de señales básicas (en este caso la exponencial). Esta sección se trata de igual manera a la anterior, primero en tiempo continuo y posteriormente en tiempo discreto.

2.5.1. Serie de Fourier en Tiempo Continuo

La exponencial compleja usada aquí es e^{st} , donde s es un número complejo de la forma general. La importancia del empleo de esta señal radica en el hecho de que, la respuesta de un sistema LTI a ella es esta misma modificada solo en amplitud como sigue

$$e^{st} \rightarrow H(s)e^{st}$$

La señal para la cual la entrada es igual a la misma entrada multiplicada por una constante (que puede ser compleja) se denomina la *función característica* del sistema y el factor en este caso $H(s)$ es el *valor característico*. Por otra parte, si la relación de entrada-salida se da a través de un cociente,

por ejemplo, $H(s) = Y(s)/X(s)$ a $H(s)$ se le denomina *función de transferencia*, donde $Y(s)$ es la salida del sistema y $X(s)$ la entrada.

Ahora analizando la periodicidad de la señal elemental se tiene que

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

lo cual cumple $x(t) = x(t + T_0)$, es decir es periódica. Donde ω_0 es su frecuencia fundamental y con periodo fundamental $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Ahora bien es posible tener un conjunto de exponenciales relacionadas armónicamente de la siguiente forma:

$$\phi_k = e^{jk\omega_0 t}$$

donde: $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, y cada exponencial con su propia frecuencia fundamental (que son múltiplos de ω_0) y su periodo T_0 . Entonces es posible tener una señal periódica como una combinación lineal de exponenciales complejas (relacionadas armónicamente) de la siguiente manera:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2.3)$$

A la ecuación (2.3) se le conoce como *Serie de Fourier*, de la *forma exponencial* o también como *ecuación de síntesis*. Analizando esta ecuación se puede notar que para $k = 0$ el término es constante, para $k = 1$ se tiene el periodo fundamental T_0 y se denomina en su conjunto como *componentes de la primera armónica*, para $k = \pm N$ el periodo es una fracción de T_0 (o bien, la frecuencia es un múltiplo de la frecuencia fundamental) y se le conoce como componentes de la N ésima armónica. Al componente a_k se le conoce como *coeficientes de la serie de Fourier*, más adelante se describe la forma

de obtenerlos.

Existen formas alternas para la representación de la serie de Fourier, las cuales se dan como sigue

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \quad (2.4)$$

La ecuación (2.4) es la *forma polar* de la serie de Fourier para señales periódicas de tiempo continuo. Pero si a_k se representa en forma rectangular, es decir; $a_k = B_k + C_k$, en que B_k y C_k son reales, la ecuación puede tomar la siguiente forma:

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cos(k\omega_0 t) + C_k \text{sen}(k\omega_0 t)] \quad (2.5)$$

Se puede notar que esta ecuación contiene dos funciones trigonométricas y es de allí su nombre de *forma trigonométrica* de la serie de Fourier (para señales en tiempo continuo).

Por último con el fin de simplificar el análisis a través de las series de Fourier, es importante señalar el aspecto siguiente: *Para señales periódicas pares la expansión de la serie se reduce a una constante más una sumatoria de cosenos, mientras que para señales impares sólo a una sumatoria de senos.* Si además de ello presentan simetría de 1/2 onda la serie sólo tendrá componentes impares.

Ejemplo 2.5.1 Una señal de onda cuadrada $x(t)$ como la mostrada en la **Figura 2.14**, muy comúnmente empleada, puede ser expresada por medio de una serie de

Fourier ya que es una señal periódica.

De la gráfica se puede observar que dicha señal es impar y posee simetría de $1/2$ onda, por lo descrito anteriormente la serie de Fourier que la representa es una sumatoria de senos y estas armónicas son impares.

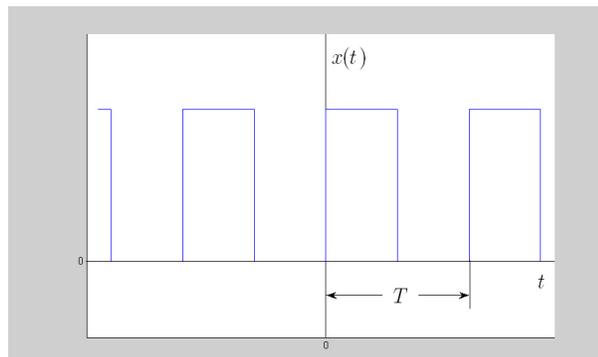


Figura 2.14: Onda cuadrada del Ejemplo 2.5.1.

Ahora la representación de $x(t)$ por medio de su serie de Fourier se muestra en la **Figura 2.15**, para el primer caso (ver **Figura 2.15a**) se emplea el primer armónico, en el segundo caso (**Figura 2.15b**) la suma de los 3 primeros armónicos impares y finalmente en la última gráfica de la **Figura 2.15c** se ilustra la suma de los 11 primeros armónicos impares.

Coefficientes de la Serie de Fourier

Una vez que se tiene la expresión matemática de la serie de Fourier para señales periódicas continuas en el tiempo, es pertinente saber cómo calcular el valor con que cada armónica pondera a la señal.

Solo se presenta la ecuación matemática que describe a los coeficientes de

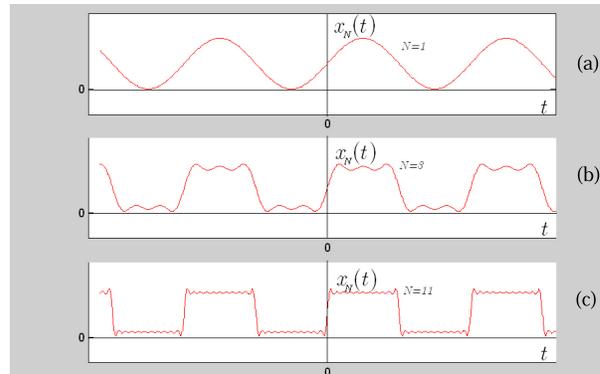


Figura 2.15: Reconstrucción de la señal $x(t)$ empleando 1, 3 y 11 armónicos a partir de series de Fourier para el Ejemplo 2.5.1.

la serie de Fourier, sin realizar deducción alguna, como a continuación:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2.6)$$

La ecuación 2.6 es conocida como *ecuación de análisis* y se utiliza para calcular los coeficientes espectrales a_k de la señal $x(t)$.

Relación de Parseval

Para señales periódicas, la ecuación de Parseval relaciona la energía contenida dentro de un periodo de la función del tiempo con la energía contenida en los coeficientes de la serie de Fourier. La que sigue es su expresión matemática:

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \quad (2.7)$$

La cantidad $|a_k|^2$ se interpreta como aquella parte de la energía por periodo que es aportada por la k ésima armónica. La ecuación (2.7) indica la conservación de energía de la señal en el dominio de la frecuencia.

2.5.2. Serie de Fourier en Tiempo Discreto

Para este caso el conjunto de exponenciales complejas discretizadas (relacionadas armónicamente) está dado por

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}$$

A diferencia del caso continuo, en el que todo el conjunto está formado por señales distintas, en este conjunto solo hay N señales diferentes; debido a que las exponenciales complejas en tiempo discreto que difieren en frecuencia por un múltiplo de 2π son idénticas, esto es, $e^{j(\Omega+2\pi r)n} = e^{j\Omega}e^{j2\pi rn} = e^{j\Omega n}$.

Entonces la sumatoria que forma la serie de Fourier en tiempo discreto es en k y se expresa como

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad (2.8)$$

los coeficientes a_k se calculan con la forma siguiente

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (2.9)$$

La ecuación (2.8) es la ecuación de síntesis, mientras que la ecuación (2.9) es la de análisis.

Ejemplo 2.5.2 Determinar el espectro de la señal $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$

Es posible observar que $\omega_0 = \pi/3$ y por tanto $N = 6$, sustituyendo en la ecuación (2.9) se tiene

$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 x[n] e^{-j2\pi kn/6} \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

y $x[n]$ se puede expresar como

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{6}\right) = \frac{1}{2}e^{j2\pi n/6} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi n/6}$$

Comparando esta expresión con la ecuación de síntesis es posible observar que $a_1 = 1/2$, además la segunda exponencial corresponde a $a_{-1} = 1/2$, pero como la señal es periódica dichos valores se repiten en un periodo de $N = 6$ lo que significa que $a_5 = 1/2$, concluyendo se tiene

$$a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_5 = \frac{1}{2}$$

La representación gráfica se presenta en la **Figura 2.16**

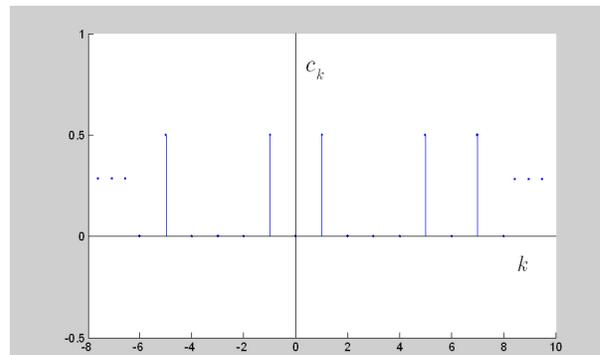


Figura 2.16: *Espectro de la señal periódica del Ejemplo 2.5.2.*

2.6. La Transformada de Fourier

En la sección anterior se interpretó a una señal periódica como una combinación lineal de exponenciales complejas relacionadas armónicamente. Esto puede extenderse para el caso de señales no periódicas o aperiódicas, gracias a la *transformada de Fourier*.

2.6.1. Transformada de Fourier en Tiempo Continuo

La transformada de Fourier es un método alternativo para el estudio de señales y sistemas continuos LTI ya que proporciona una representación en el dominio de la frecuencia. El análisis es posible también para señales periódicas como se verá más adelante.

Transformada de Fourier de Señales No Periódicas

Específicamente, se piensa en una señal aperiódica como el límite de una señal periódica cuando el periodo se hace arbitrariamente grande (tiende a infinito), se examina entonces el comportamiento en el límite de la representación de la serie de Fourier para dicha señal.

La representación de la *transformada de Fourier* está dada por la siguiente expresión:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.10)$$

Esta es la ecuación de análisis y también se le conoce como *integral de Fourier* de $x(t)$. Desde luego la ecuación (2.10) debe tener su ecuación de síntesis correspondiente y es la siguiente:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) se conoce como la *transformada inversa de Fourier*. Esta tiene la misma función que la ecuación (2.3) para las señales periódicas, ya que ambas corresponden a la descomposición de una señal en una combinación de exponenciales complejas. Para las señales aperiódicas las exponenciales ocurren en una sucesión continua de frecuencias y de acuerdo

con la ecuación (2.11) la amplitud es $X(\omega)(d\omega/2\pi)$. La transformada $X(\omega)$ de una señal no periódica $x(t)$ se refiere como el espectro de $x(t)$ puesto que proporciona la información de cómo $x(t)$ está compuesta por señales senoidales en diferentes frecuencias.

Relación de Parseval

Al igual que para la serie de Fourier, la ecuación de energía puede ser calculada para señales no periódicas. La expresión de Parseval se obtiene de la aplicación de la transformada de Fourier, y queda como sigue:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (2.12)$$

La cantidad en el lado izquierdo de la ecuación (2.12) es la energía total en la señal $x(t)$. La ecuación establece que esta energía total puede determinarse ya sea mediante el cálculo de la energía por unidad de tiempo ($|x(t)|^2$) e integrando principalmente el tiempo, o calculando la energía por unidad de frecuencia ($|X(\omega)|^2/2\pi$) e integrando principalmente las frecuencias. Al igual que para el caso de la serie de Fourier la ecuación (2.12) indica la conservación de la energía de la señal en el dominio de la frecuencia.

Transformada de Fourier de Señales Periódicas

A diferencia de el caso anterior, para señales periódicas que no son ni absolutamente integrables ni integrables al cuadrado sobre un intervalo infinito, puede considerarse que tiene transformada de Fourier si se permiten funciones impulso en la transformada.

La transformada de Fourier resultante para una señal periódica consiste de un tren de impulsos en frecuencia, siendo las áreas de los impulsos proporcionales a la serie de Fourier.

De manera más general, si $X(\omega)$ es una combinación lineal de impulsos igualmente espaciados en frecuencia, esto es

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (2.13)$$

Al aplicar la ecuación (2.11) da como resultado

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

como puede notarse corresponde exactamente a la serie de Fourier de una señal periódica. Entonces la transformada de Fourier de una señal periódica (dada por la ecuación (2.13)) con coeficientes a_k de la serie de Fourier, puede interpretarse como un tren de impulsos que ocurren a las frecuencias armónicamente relacionadas y para las cuales el área del impulso en la k ésima frecuencia armónico $k\omega_0$ es 2π veces el k ésimo coeficiente de a_k de la serie de Fourier.

2.6.2. Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

De manera similar al caso continuo aquí se mencionan las dos situaciones tanto para señales periódicas como aperiódicas. La diferencia al tiempo continuo consiste en que las componentes armónicas discretas tiene un rango en frecuencia igual a $(-\pi, \pi)$ o $(0, 2\pi)$, y cualquiera fuera de este intervalo es equivalente a una en su interior.

Transformada de Fourier de Señales Aperiódicas

El par de transformadas de Fourier de señales en tiempo discreto que describe a un sistema LTI se da como sigue

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (2.14)$$

donde

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (2.15)$$

Como en el caso continuo la ecuación (2.14) y la ecuación (2.15) son las ecuaciones de síntesis y análisis, respectivamente.

Ejemplo 2.6.1 Sea $X(\omega)$ una señal de energía finita dada por

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

La transformada inversa de Fourier de $X(\omega)$ resulta en la secuencia

$$\begin{aligned} x[n] &= \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\text{sen}\omega_c n}{\pi n} \quad n \neq 0 \end{aligned}$$

y para $n = 0$

$$x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi}$$

entonces la señal en el tiempo $x(n)$ queda representada por

$$x[n] = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\pi n}, & n \neq 0 \end{cases}$$

La representación gráfica de estas transformadas de Fourier se muestra en la **Figura 2.17**

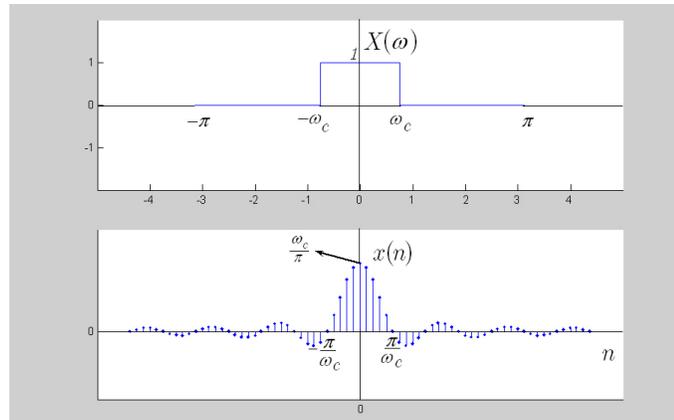


Figura 2.17: Par de transformadas para el Ejemplo 2.6.1.

De la **Figura 2.17** se observa que el espectro $X(\omega)$ de una señal en tiempo discreto $x[n]$ es continuo. Esta situación es adversa cuando se quiere implementar la transformada de Fourier en tiempo discreto en una computadora digital, para resolver esta situación lo que se hace es discretizar en la frecuencia el espectro, dando como resultado la transformada discreta de Fourier que es el tema de estudio de la sección 2.7.

Transformada de Fourier de Señales Periódicas

Una forma alternativa y conveniente para la transformada de Fourier de una señal periódica está dada por

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (2.16)$$

Es obvio que en este caso las armónicas son un tren de impulsos, y no exponenciales, que ocurren en múltiplos de la frecuencia fundamental $2\pi/N$. Los coeficientes de Fourier para la ecuación (2.16) se calculan por

$$Na_k = X\left(k \frac{2\pi}{N}\right) \quad (2.17)$$

donde Na_k son tan sólo muestras de la transformada de Fourier de un periodo de la señal en cuestión.

2.7. Transformada Discreta de Fourier

Esta técnica de transformación es una de las más aplicadas en los sistemas de procesamiento digital actuales, ya que puede adecuarse fácilmente a una computadora digital o implementarse en algún hardware digital. La DFT, como también se le conoce, es empleada para señales de duración finita, su expresión matemática es

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.18)$$

y la DFT inversa o *IDFT* se expresa como

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jk(2\pi/N)n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.19)$$

Las ecuaciones (2.18) y (2.19) se pueden expresar igualmente como

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.20)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.21)$$

donde, por definición

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

que es la n -ésima raíz de la unidad.

2.8. Transformada Rápida de Fourier

Como se mencionó anteriormente la transformada discreta de Fourier (DFT) es una herramienta computacional muy útil en numerosas aplicaciones de procesamiento digital de señales. La utilidad de la DFT e IDFT se debe, en gran parte, a la existencia de algoritmos computacionales eficientes para su cálculo, conocidos como algoritmos para la *transformada rápida de Fourier* o **FFT**.

En esta sección se presenta una metodología ampliamente utilizada para el cálculo de la DFT. Esta metodología se basa en la idea de “divide y vencerás”, así una DFT de tamaño N , donde N es un número compuesto, se reduce al cálculo de DFTs más pequeñas a partir de las cuales se obtiene la DFT total. Gracias a esta metodología han surgido un gran número de algoritmos alternativos para el cálculo de la DFT.

El problema dentro del cálculo de la DFT radica en determinar la secuencia $\{X(k)\}$ de N números complejos dada la secuencia de datos $\{x[n]\}$ de longitud N según las ecuaciones (2.20) y (2.21).

De dichas ecuaciones es posible ver que para cada valor k , en el cálculo de $X(k)$ se deben realizar N multiplicaciones complejas ($4N$ multiplicaciones reales) y $N - 1$ sumas complejas ($4N - 2$ sumas reales). Entonces para determinar los N valores de la DFT se requieren N^2 multiplicaciones complejas y $N^2 - N$ sumas complejas.

El cálculo directo de la DFT es ineficiente debido, a que no hace uso de las propiedades de simetría y periodicidad del factor de fase W_N , que son:

$$\text{Propiedad de Simetría} : W_N^{k+N/2} = -W_N^k \quad (2.22)$$

$$\text{Propiedad de Periodicidad} : W_N^{k+N} = W_N^k \quad (2.23)$$

En cambio los algoritmos computacionales, conocidos como algoritmos para la transformada rápida de Fourier, usan estas dos propiedades del factor de fase.

2.8.1. Cálculo Directo de la DFT

Para una secuencia compleja $x[n]$ de N puntos, la DFT se puede representar como

$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R[n] \cos \frac{2\pi kn}{N} + x_I[n] \operatorname{sen} \frac{2\pi kn}{N} \right] \quad (2.24)$$

y

$$X_I(k) = - \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R[n] \operatorname{sen} \frac{2\pi kn}{N} - x_I[n] \cos \frac{2\pi kn}{N} \right] \quad (2.25)$$

el cálculo directo de (2.24) y (2.25) exige:

1. $2N^2$ cálculos de funciones trigonométricas.
 2. $4N^2$ multiplicaciones reales.
 3. $4N(N-1)$ sumas reales.
 4. Numerosas operaciones de direccionamiento e indexado.
-

2.8.2. Metodología de “Divide y Vencerás” para el Cálculo de la DFT

El método se basa en la descomposición de una DFT de N puntos en DFTs más pequeñas. Es decir, considerando una DFT de N puntos, la idea es representar N como un producto de dos enteros, esto es,

$$N = LM \quad (2.26)$$

Por medio de esta notación la secuencia $x[n]$, $0 \leq n \leq N - 1$, ahora se puede representar mediante una matriz unidimensional indexada por n , o en una matriz bidimensional indexada por l y m , donde, $0 \leq l \leq L - 1$ y $0 \leq m \leq M - 1$, por lo que $x[n]$ se puede almacenar en una matriz rectangular de diferentes maneras, donde cada una depende de la correspondencia entre el índice n y los índices l y m .

Entonces para la correspondencia

$$n = l + mL \quad (2.27)$$

la disposición es que la primera columna contiene los primeros L elementos de $x[n]$ y la segunda contiene los siguientes L elementos de $x[n]$, y así sucesivamente.

Una disposición similar puede usarse para almacenar los valores calculados de la DFT. Si se tiene la correspondencia desde el índice k a la pareja de índices (p, q) , donde $0 \leq p \leq L - 1$ y $0 \leq q \leq M - 1$, de tal manera que para

$$k = Mp + q \quad (2.28)$$

la DFT se almacena por filas, donde la primera fila contiene los primeros M elementos de la DFT $x[k]$, la segunda fila los siguientes M elementos, y

así sucesivamente.

Ahora teniendo en cuenta que $x[n]$ puede representarse mediante la matriz rectangular $x(l, m)$, y que $X(k)$ se lleva a la matriz rectangular correspondiente $X(p, q)$; así la DFT se puede expresar como el sumatorio doble de los elementos de la matriz rectangular multiplicados por los factores de fase correspondientes. Considerando la correspondencia que da lugar al almacenamiento por columnas, dada por (2.28), y de $x[n]$, dada por (2.27). Entonces

$$X(p, q) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x(l, m) W_N^{(Mp+q)(mL+l)} \quad (2.29)$$

Pero

$$W_N^{(Mp+q)(mL+l)} = W_N^{MLmp} W_N^{mLq} W_N^{Mpl} W_N^{lq} \quad (2.30)$$

Sin embargo, $W_N^{Nmp} = 1$, $W_N^{mqL} = W_{N/L}^{mq} = W_M^{mq}$, y $W_N^{Mpl} = W_{N/M}^{pl} = W_L^{pl}$.

Con estas simplificaciones, (2.29) puede representarse como

$$F(p, q) = \sum_{l=0}^{L-1} \left\{ W_N^{lq} \left[\sum_{m=0}^{M-1} f(l, m) W_M^{mq} \right] \right\} W_L^{lp} \quad (2.31)$$

La ecuación (2.31) implica el cálculo de DFTs de longitudes M y L . Subdividiendo el cálculo en tres pasos, se tiene lo siguiente:

1. Primero, se calculan las DFTs de M puntos

$$X(l, q) = \sum_{m=0}^{M-1} x(l, m) W_M^{mq}, \quad 0 \leq q \leq M-1 \quad (2.32)$$

para cada una de las filas $l = 0, 1, \dots, L-1$

2. Segundo, calcular la nueva matriz rectangular $G(l, q)$ definida como

$$G(l, q) = W_N^{lq} F(l, q) \quad 0 \leq l \leq L - 1, \quad 0 \leq q \leq M - 1 \quad (2.33)$$

3. Finalmente, se calculan las DFTs de L puntos

$$X(p, q) = \sum_{l=0}^{L-1} G(l, q) W_L^{lp} \quad (2.34)$$

para cada columna $q = 0, 1, \dots, M - 1$, de la matriz $G(l, q)$.

Este procedimiento aparenta ser más complejo que el cálculo directo de la DFT, sin embargo la complejidad computacional es:

$$\text{Multiplicaciones complejas:} \quad N(M + L + 1)$$

$$\text{Sumas complejas:} \quad N(M + L - 2)$$

Lo que significa que el número de multiplicaciones se reduce de N^2 a $N(M + L + 1)$ y el número de sumas se reduce de $N(N - 1)$ a $N(M + L + 2)$.

Resumiendo, el algoritmo implica los siguientes pasos:

1. Almacenamiento de la señal por columnas.
 2. Cálculo de la DFT de M puntos de cada fila.
 3. Multiplicación de la matriz resultante por los factores de fase W_N^{lq} .
 4. Cálculo de la DFT de L puntos de cada columna.
 5. Lectura por filas de la matriz resultante.
-

2.9. La Transformada de Laplace

Para comenzar, recordar que la respuesta de un sistema LTI a la exponencial compleja de forma e^{st} está dada por

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

donde:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (2.35)$$

Para s puramente imaginaria, la integral de la ecuación (2.35) corresponde a la transformada de Fourier de $h(t)$; y para valores generales de la variable compleja s , se conoce como la *transformada de Laplace* de la respuesta al impulso $h(t)$. La transformada de Laplace para una función continua $x(t)$ se expresa matemáticamente como

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (2.36)$$

La forma general de la variable s es $s = \sigma + j\omega$, donde σ y ω son la parte real e imaginaria respectivamente.

De manera más amplia la transformada de Laplace de $x(t)$ se puede interpretar como la transformada de Fourier de $x(t)$ después de multiplicarla por una señal exponencial real.

La transformada de Laplace existe si la integral que la define es finita. Para ello se necesita que los valores de σ sean unos concretos, lo que define una región de convergencia de la transformada de Laplace.

Finalmente la *transformada inversa de Laplace* se expresa como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (2.37)$$

La ecuación (2.37) establece que $x(t)$ se puede representar como una integral ponderada de exponenciales complejas.

Ejemplo 2.9.1 Obtener la transformada de Laplace de la señal

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.36)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-t}u(t)]e^{-st} dt$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1}$$

2.10. La Transformada z

Esta técnica de transformación es la contraparte de la transformada de Laplace, esto es, tiene el mismo papel en el análisis de señales y sistemas *discretos* LTI que la transformada de Laplace en el análisis de señales y sistemas *continuos* LTI.

La *transformada z* de una señal discreta $x[n]$ se define como la serie de potencias

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (2.38)$$

donde z es una variable compleja de la forma $re^{j\Omega}$. La relación (2.38) transforma una señal en el dominio del tiempo $x[n]$ en la señal compleja $X(z)$ y se le conoce como transformada z *bilateral* para distinguirla de la transformada z *unilateral*. Esta última es de gran utilidad en el análisis de sistemas causales específicos representados por ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes y con condiciones iniciales (esto es, aquellos que en su inicio no se encuentran en reposo), se expresa de manera similar a la transformada z bilateral, solo que para este caso la sumatoria se lleva a cabo solo sobre valores no negativos de n sin importar si $x[n]$ es o no cero para $n < 0$ quedando como

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (2.39)$$

Puesto que la transformación es una serie infinita de potencias, esta existe solo para aquellos valores de z para los que la serie converge. La región de convergencia (**ROC**) de $X(z)$ es el conjunto de todos los valores de z para los que $X(z)$ es finita, entonces para cada transformada z se debe indicar su ROC.

Ejemplo 2.10.1 Determinar la transformada z de la señal de duración finita

$$x[n] = [1, 2, \{5\} 7 0 1]$$

Empleando la ecuación (2.38) se tiene

$$X[z] = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

Su **ROC** es el plano z excepto en $z = 0$ y $z = \infty$.

Es común tener una señal en el dominio de z , para transformar de este al dominio del tiempo se realiza mediante la *transformada z inversa* cuya expresión matemática esta dada por

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{n-1}dz \quad (2.40)$$

En este caso, la evaluación de la integral de la ecuación (2.40) requiere de una integración a lo largo de una curva cerrada en el plano complejo y entonces resulta un tanto difícil y/o tardado el cálculo de la transformada inversa. Sin embargo, existen procedimientos alternativos para obtener la secuencia, uno de los procedimientos más utilizados para transformadas z racionales es mediante la expansión por fracciones parciales de la expresión.

2.11. Resumen y Referencias

En este capítulo se resumieron los conceptos y las técnicas de transformación aplicadas en el estudio de señales y sistemas tanto para tiempo continuo como para tiempo discreto, de todo ello lo más importante ha sido en la caracterización de los sistemas **LTI**, los que son ampliamente utilizados en la práctica para el diseño e implementación de sistemas de procesamiento digital.

Debido a lo extenso que resulta un estudio más detallado de cada sección se omitieron los procedimientos de las técnicas de transformación y algunos otros aspectos, sin embargo para el que requiera de dicha información puede consultarlo en la bibliografía a qué empleada [19, 21]. Como ya se mencionó lo visto en este capítulo es aplicable a sistemas de procesado digital como por ejemplo los filtros digitales, que son el tema de estudio del siguiente capítulo.

Capítulo 3

Filtros Digitales

Una vez disponible el instrumental teórico-matemático desarrollado en el capítulo anterior, el presente capítulo se dedica al estudio formal de los filtros. En el área de procesamiento de señales, el filtrado es un proceso mediante el cual se modifica el contenido espectral de la señal.

Se inicia este capítulo con los conceptos básicos de filtrado, haciendo especial hincapié en la caracterización de los filtros LTI, hasta llegar a la clasificación de los filtros digitales, y se finaliza con un análisis comparativo de los filtros **FIR** e **IIR**.

3.1. Introducción

El término *filtro* se utiliza comúnmente para describir un dispositivo que discrimina, según algún atributo de los objetos que se aplican a su entrada, aquello que pasa a través de él. Por ejemplo, un filtro de aire permite que el aire pase a través, evitando que las partículas de polvo presentes en el aire lo atraviesen. Un filtro de aceite realiza una función similar, con la excepción de que es aceite la sustancia que se permite que pase a través del filtro,

mientras que las partículas de suciedad se recogen a la entrada, evitando que lo atraviesen [17].

En general, cualquier algoritmo o sistema de tratamiento pueden interpretarse como un *filtro*. Se entiende por filtro LTI aquel sistema lineal e invariante que permite el paso de componentes de la señal existentes en un determinado intervalo frecuencial, y que elimina las demás, modificando el espectro de la señal de entrada. Idealmente, en el margen de frecuencias que se conservan, denominado *Banda de paso*, el módulo de la respuesta frecuencial del filtro toma un valor constante; en el intervalo frecuencial complementario, denominado *Banda atenuada*, el módulo de la respuesta frecuencial es nulo; cuando el margen frecuencial está fragmentado en varios intervalos, cada uno de éstos recibe el nombre de banda de paso o atenuada según sea el comportamiento deseado.

Los filtros digitales se usan para dos propósitos generales: la separación de señales que se han combinado y la restauración de señales que se han distorsionado de alguna manera. El filtrado se emplea en procesado digital de señales de diferentes maneras, por ejemplo, un dispositivo para medir la actividad eléctrica del corazón de un bebé mientras todavía esta en el útero. La señal cruda probablemente esté corrupta por la respiración y latido del corazón de la madre. Un filtro podría usarse para separar estas señales y puedan analizarse individualmente [8].

3.2. Filtros Analógicos vs Digitales

Los filtros analógicos son baratos, rápidos y tienen un rango dinámico grande en amplitud y frecuencia. Los filtros digitales en comparación son completamente superiores en el nivel de rendimiento que pueden lograr,

además los filtros digitales pueden lograr miles de veces mejor atenuación que los filtros analógicos. Esto hace una diferencia dramática en como se aproximan los problemas de filtrado.

Un filtro digital programable permite flexibilidad a la hora de reconfigurar las operaciones de procesamiento digital sin más que cambiar el programa, por el contrario la reconfiguración de un filtro analógico implica habitualmente el rediseño del hardware, seguido de la comprobación y verificación para ver que opera correctamente. Además las tolerancias en los componentes de los circuitos analógicos hacen extremadamente difícil el control de la precisión de este proceso. En cambio, un filtro digital permite un mejor control de los requisitos de precisión.

La función de transferencia de un sistema analógico puede representarse con una función compleja $H(s)$, y la de un sistema digital se representa mediante una función compleja $H(z)$. Estas funciones de transferencia describen el efecto del sistema sobre una señal de entrada y también el efecto de filtración del sistema, como se muestra en la **Figura 3.1**.

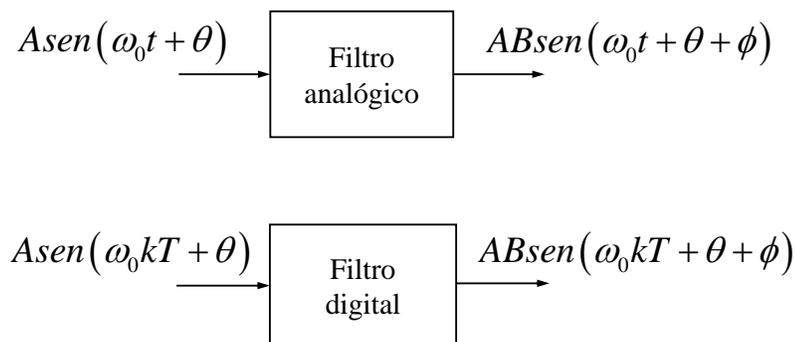


Figura 3.1: Efecto de los filtros sobre las senoides.

3.3. Filtrado Digital en el Dominio de la Frecuencia

Aunque la función de transferencia de un filtro define el efecto del filtro en términos de frecuencias, en muchos casos puede describirse desde el punto de vista ideal del comportamiento del módulo de respuesta frecuencial según la posición relativa de las bandas de paso y las bandas atenuadas, por ejemplo, el filtro recibe el nombre de *pasa bajas*, *pasa altas*, *pasa bandas* y *rechaza bandas*. El primero permite el paso solo a las bajas frecuencias y elimina las altas; el filtro pasa altas presenta el comportamiento complementario; el filtro pasa bandas cancela las bajas y altas frecuencias (bandas de atenuación superior e inferior), y conserva una banda determinada de frecuencias; el último, presenta bandas de paso en baja y alta frecuencia, y una banda atenuada en un margen de frecuencias intermedio.

Las características ideales de la respuesta en magnitud de estos tipos de filtros se representan en la **Figura 3.2**. Tal como se muestra estos filtros ideales tienen ganancia constante (normalmente tomada como ganancia unitaria) en la banda de paso y ganancia cero en la banda atenuada.

Dado que estos filtros son ideales no son causales, es decir, no son físicamente realizables, ya que no se puede dar una transición abrupta entre las zonas de paso y atenuación. Mas adelante se revisan las características de filtros digitales causales.

Los filtros digitales LTI, causales y estables pueden describirse por una ecuación en diferencias finitas de coeficientes reales y constantes, es decir un filtro digital es la implementación en hardware o software de una ecuación diferencia.

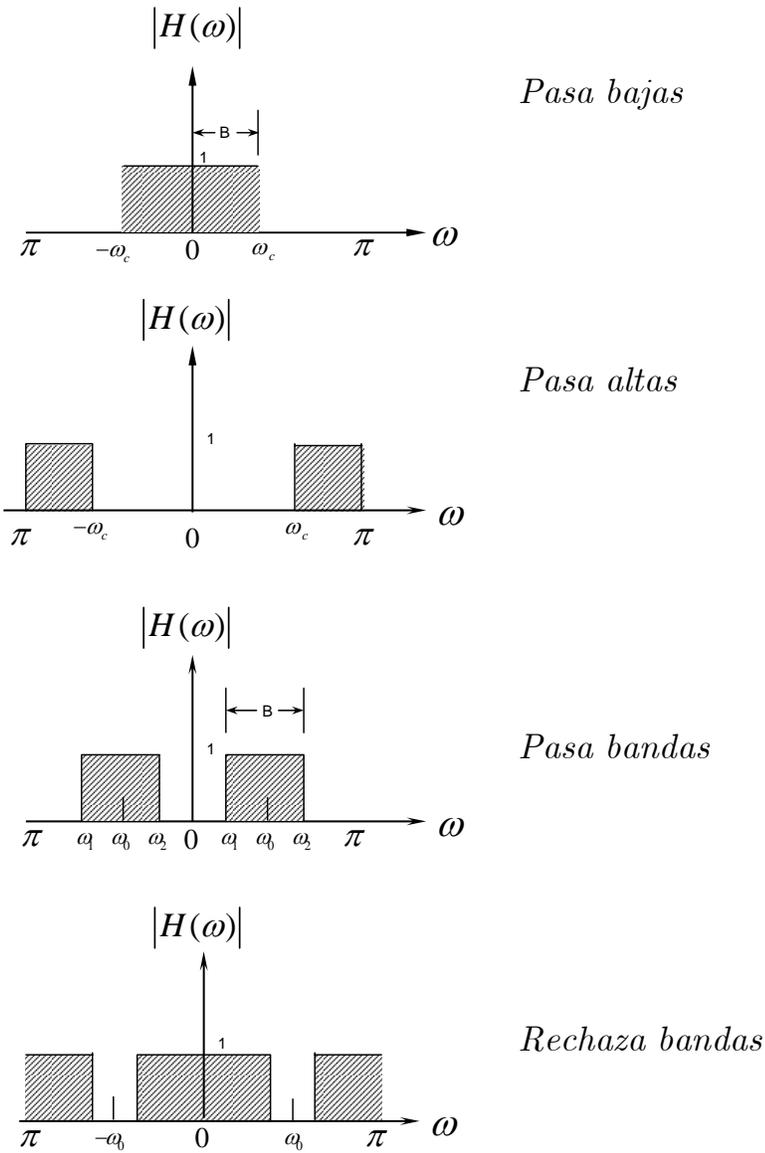


Figura 3.2: Respuestas en magnitud de los filtros discretos selectivos en frecuencia ideales.

La señal de salida $y[n]$ del filtro, correspondiente a una señal de entrada $x[n]$, se expresa por la ecuación

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (3.1)$$

Por medio de la transformada z , esta clase de sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo se pueden caracterizar también por la función de transferencia racional que es el cociente de dos polinomios en z^{-1} .

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (3.2)$$

Para que un sistema sea *realizable* debe ser causal y estable. En ningún caso el filtro puede tener una respuesta frecuencial ideal, como las ilustradas en la **Figura 3.2**, ya que a todas ellas corresponde una respuesta impulsional no causal e inestable, es decir el filtro causal se aproxima al ideal. Esta aproximación permite una tolerancia alrededor del valor teórico unidad del módulo de la respuesta frecuencial en la banda de paso y sobre el valor nulo en la banda atenuada. El proceso de diseño de un filtro digital requiere tres pasos:

1. Establecer las especificaciones del filtro para unas determinadas prestaciones. Estas especificaciones son las mismas que las requeridas por un filtro analógico: frecuencias de rechazabanda y pasabanda, atenuaciones, ganancia, etc.
 2. Determinar la función de transferencia que cumpla las especificaciones.
 3. Realizar la función de transferencia en hardware o software.
-

3.4. Características de Filtros Causales Selectivos en Frecuencia

Los filtros ideales son no causales y, por lo tanto, físicamente irrealizables para aplicaciones de procesamiento de señal en tiempo real. La causalidad implica que la característica de respuesta en frecuencia del filtro no puede ser cero excepto en un conjunto finito de puntos en el rango de frecuencias, además de no poder tener un corte infinitamente abrupto desde la banda de paso a la banda de rechazo, es decir $H(\omega)$ no puede caer desde uno hasta cero abruptamente.

Aunque las características de respuesta en frecuencia que poseen los filtros ideales deben ser deseables, no son absolutamente necesarias en la mayoría de las aplicaciones prácticas. Si se relajan estas condiciones es posible realizar filtros causales que aproximan los filtros ideales con tanta precisión como deseemos.

Tampoco es necesario que la magnitud del módulo $|H(\omega)|$ sea constante en toda la banda de paso del filtro. Se puede tolerar un pequeño rizado en la banda de paso como se ilustra en el **Figura 3.3**. Simuladamente no es necesario que sea cero en la banda de rechazo. También se puede tolerar un valor distinto de cero o un pequeño rizado en la banda de rechazo.

La transición de la respuesta en frecuencia desde la banda de paso a la de rechazo define la banda de transición o región de transición del filtro. La frecuencia ω_p define el límite superior de la banda de paso, mientras que la frecuencia ω_s define el principio de la banda de rechazo. Así el ancho de

banda de transición es

$$BW_{sp} = \omega_s - \omega_p \quad (3.3)$$

Si existe un rizado en la banda de paso del filtro, su valor se denota por δ_1 , y la magnitud varía entre los límites $1 \pm \delta_1$. El rizado de la banda de rechazo del filtro se denota por δ_2 .

La banda de paso contiene frecuencias con magnitudes mayores que la de la frecuencia de corte; la banda de transición contiene frecuencias con magnitudes entre las magnitudes de las frecuencias de corte de rechazo; la banda de rechazo contiene frecuencias con magnitudes menores que la magnitud de rechazo de la frecuencia de rechazo.

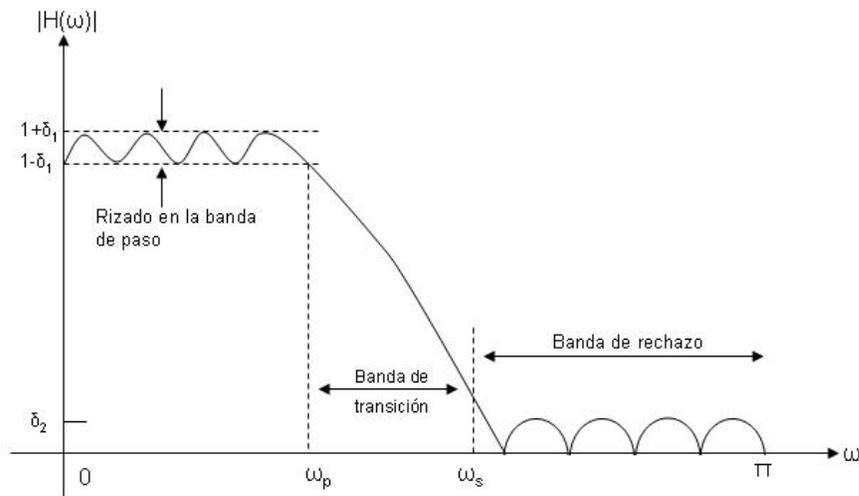


Figura 3.3: Características de magnitud de filtros físicamente realizables.

3.4.1. Ventajas de los Filtros Digitales

- Alta inmunidad al ruido
- Alta precisión (limitada por los errores de redondeo en la aritmética empleada)
- Fácil modificación de las características del filtro
- Muy bajo coste (y bajando)

Por estas razones, los filtros digitales están reemplazando rápidamente a los filtros analógicos.

3.5. Clasificación de los Filtros Digitales

Los filtros digitales se subdividen según su respuesta impulsional finita FIR o infinita IIR.

3.5.1. Filtros FIR (Respuesta Impulsional Finita)

Los filtros de respuesta impulsional finita o FIR se usan en aplicaciones donde existe la necesidad de un filtro de fase lineal. Este requisito ocurre en muchas aplicaciones, especialmente en telecomunicaciones, donde existe la necesidad de separar señales, tales como datos que han sido multiplexados por división de frecuencia.

Se caracterizan por tener una respuesta impulsional con longitud L finita. Es decir, el filtro es causal y su orden es $M = L - 1$, por tanto las muestras de la respuesta impulsional valen cero para valores del índice n negativos o

superiores a M ($h[n] = 0$ para $n > M = L - 1$).

La señal de salida $y[n]$ se obtiene mediante la ecuación de convolución de la respuesta impulsional del sistema $h[n]$ o la ecuación en diferencias finitas, donde basta con limitar el número de coeficientes b_k a $L = M + 1$:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (3.4)$$

La secuencia b_k son los coeficientes del filtro y no hay recursión, es decir, la salida depende sólo de la entrada y no de valores pasados de la salida siendo la respuesta por tanto una suma ponderada de valores pasados y presentes de la entrada, de ahí que se denomine Media en Movimiento (Moving Average).

El filtro FIR también se puede caracterizar por su función de transferencia

$$H(z) = \sum_{k=0}^M h(k)z^{-k} \quad (3.5)$$

Esta función de transferencia tiene un denominador constante y sólo tiene ceros, por lo tanto la respuesta es de duración finita ya que si la entrada se mantiene en cero durante M periodos consecutivos, la salida será también cero.

Cuando la respuesta frecuencial de un filtro en la banda de paso no es la ideal, la señal sufre una transformación denominada distorsión lineal. En particular, si esta distorsión es debida a que el módulo de la respuesta frecuencial no es constante en la banda de paso, esta transformación es denominada *distorsión de amplitud*, mientras que si es debida a que la respuesta de fase no es lineal se habla de una *distorsión de fase*. Aunque es posible acercarse tanto

como se desee, es inviable obtener una respuesta frecuencial sin distorsión de amplitud. Únicamente los filtros pasa todo tienen una respuesta frecuencial constante en módulo, pero precisamente por ello no son útiles como filtros ya que dejan pasar todas las componentes frecuenciales, aunque afortunadamente, en lo que se refiere a la fase, sí es posible obtener filtros sin distorsión, es decir, con fase lineal.

Un filtro FIR tiene fase lineal si su respuesta impulsional satisface la condición.

$$h[n] = \pm h[M - 1 - n]; n = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (3.6)$$

Los filtros FIR de fase lineal se clasifican en los siguientes 4 tipos [14] de acuerdo con las paridades de simetría y de la longitud de su respuesta impulsional, ver **Figura 3.4**.

- Tipo I: Simetría par y longitud impar

$$H(z) = 1 + 1.5z^{-1} + z^{-2} \quad (3.7)$$

- Tipo II: Simetría par y longitud par

$$H(z) = (1 + z^{-1}) + (1 + 1.5z^{-1}z^{-2}) = 1 + 2.5z^{-1} + 2.5z^{-2} + z^{-3} \quad (3.8)$$

- Tipo III: Simetría impar y longitud impar

$$H(z) = (1 - z^{-2}) + (1 + 1.5z^{-1}z^{-2}) = 1 + 2.5z^{-1} - 1.5z^{-3} - z^{-4} \quad (3.9)$$

- Tipo IV: Simetría impar y longitud par

$$H(z) = (1 - z^{-1}) + (1 + 1.5z^{-1}z^{-2}) = 1 + 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2} - z^{-3} \quad (3.10)$$

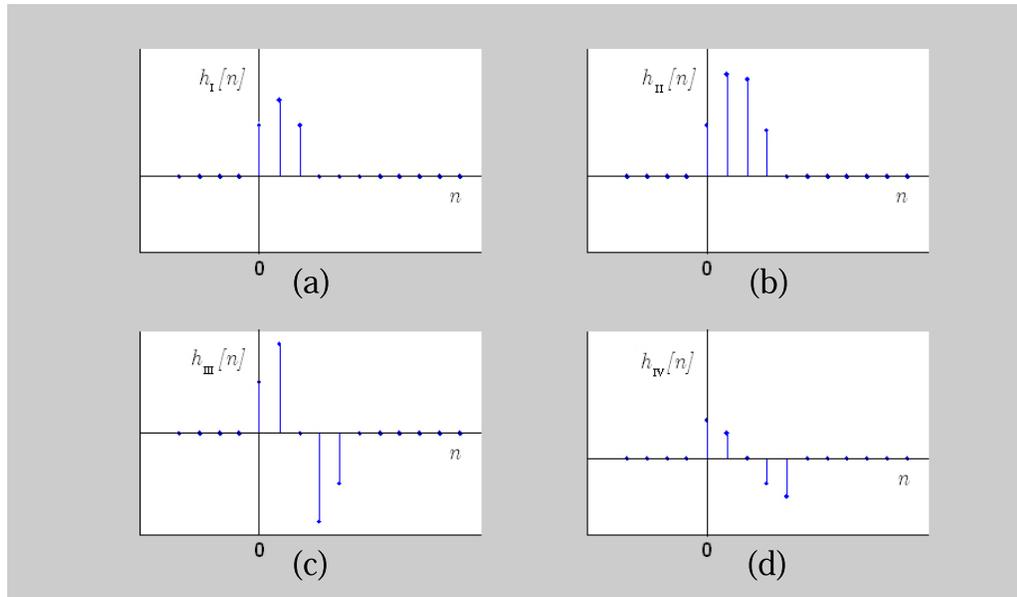


Figura 3.4: Ejemplos de $h[n]$ para (a) Tipo I, (b) Tipo II, (c) Tipo III, (d) Tipo IV de filtros FIR.

3.5.2. Filtros IIR (Respuesta Impulsional Infinita)

En aquellas aplicaciones donde no es imprescindible disponer de una respuesta frecuencial con fase lineal, suelen utilizarse filtros cuya respuesta impulsional tiene longitud infinita. Su principal ventaja radica en que, para cumplir unas especificaciones determinadas, precisan de un orden sensiblemente inferior al requerido por un filtro FIR.

El filtro IIR óptimo, es decir aquel que satisface una plantilla de especificaciones con el menor orden posible, se obtiene a partir de la aproximación de Cauer o elíptica, que ofrece una atenuación con rizado de amplitud constante en las bandas de paso y atenuada.

Existen dos variaciones de este tipo de filtros: AR y ARMA

1. Filtros AR (Autoregresivo)

La ecuación diferencia que describe un filtro AR es

$$y[n] + a_1y[n - 1] + a_2y[n - 2] + \dots + a_Ny[n - N] = x[n] \quad (3.11)$$

Lo que da lugar a una función de transferencia que contiene solo polos que es:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_Nz^{-N}} \quad (3.12)$$

Este filtro es recursivo ya que la salida depende no solo de la entrada actual sino además de valores pasados de la salida (Filtros con retroalimentación), es decir, el término autoregresivo tiene un sentido estadístico en que la salida $y[n]$ tiene una regresión hacia sus valores pasados y su respuesta al impulso es normalmente de duración infinita, de ahí su nombre.

2. Filtros ARMA (Autoregresivo y Media en Movimiento)

Es el filtro más general y es una combinación de los filtros MA y AR. La ecuación de diferencias que describe un filtro ARMA de orden N es:

$$y[n] + a_1y[n - 1] + a_2y[n - 2] + \dots + a_Ny[n - N] = b_0x[n] + b_1x[n - 1] + \dots + b_Mx[n - M] \quad (3.13)$$

Y la función de transferencia

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}} \quad (3.14)$$

Un filtro de este tipo se denota por $\text{ARMA}(N,M)$, es decir es Autoregresivo de orden N y Media en Movimiento de orden M . Su respuesta a impulso es también de duración infinita y por tanto es un filtro del tipo IIR.

3.6. Análisis Comparativo entre Filtros FIR e IIR

La cuestión sobre qué diseño es mejor, un filtro FIR o un filtro IIR, no tiene fácil respuesta. Esta depende, en todo caso, de la aplicación para la que se diseña el filtro.

Los filtros FIR representan dos ventajas fundamentales respecto a los filtros IIR. La primera es que un filtro FIR es de fase lineal, por lo que no representa distorsión de retardo de grupo. La segunda es que un filtro FIR es inherentemente estable, su función de transferencia es sólo ceros, lo cual asegura estabilidad, aunque se produzcan errores de precisión numérica en la representación de sus coeficientes. La principal desventaja de un filtro FIR ante un IIR proviene del elevado orden que puede requerirse para cumplir las especificaciones, ya que crece linealmente con la selectividad. Los órdenes para los filtros FIR, utilizados en múltiples aplicaciones difícilmente requiere al orden de un diseño IIR que sobrepase la decena. En consecuencia la realización de un sistema FIR se hace más costosa, ya que implica una mayor carga computacional y una mayor necesidad de memoria disponible.

Lógicamente este inconveniente de los sistemas FIR se convierte en la principal ventaja de los filtros IIR. Además, el orden requerido por un filtro IIR por transformada bilineal se calcula previamente al diseño del filtro, lo

que evita la reiteración de cálculos. Por contra, el orden de un filtro FIR debe reajustarse mediante diseños sucesivos, en un proceso de prueba y error que puede llegar a ser laborioso. Entre las desventajas principales de un filtro IIR se destaca la posible inestabilidad producida por errores de cuantificación de los coeficientes del denominador de la función de transferencia, que pueden situar un polo fuera del círculo de radio unidad. La otra desventaja importante es la imposibilidad de conseguir una respuesta frecuencial con fase lineal.

En aplicaciones donde se precise fase lineal se intenta utilizar un filtro FIR, siempre que el orden requerido no sea excesivo, mientras que en aplicaciones donde se precisan selectividades y discriminaciones muy elevadas suelen utilizarse filtros IIR, ya que los filtro FIR exigen órdenes excesivos.

Finalmente como cuestiones fundamentales debe considerarse en la utilización de un filtro digital para filtrar señales analógicas en tiempo real, el tiempo de ejecución requerido y la cantidad de memoria disponible para la arquitectura y tecnología que se utilice. En ambos factores radica la principal causa de limitación del margen de frecuencias en que los filtros discretos son de utilidad.

3.7. Resumen y Referencias

En este capítulo se ha intentado motivar el filtrado digital de señales como alternativa al filtrado analógico de éstas. Se vio que los filtros LTI, causales y estables poseen que la característica de respuesta en frecuencia del filtro no puede ser cero excepto en un conjunto finito de puntos además de las características en magnitud.

De forma general, los sistemas lineales e invariantes en el tiempo se subdividen en sistemas FIR (Respuesta Impulsional de duración Finita) y sistemas IIR (Respuesta Impulsional de duración Infinita), dependiendo de si $h(n)$ tiene duración finita o infinita respectivamente.

Existe una enorme cantidad sobre literatura técnica sobre los temas de filtrado e identificación de sistemas. Como referencia se citan los libros de [6, 8, 17, 21].

Los filtros digitales anteriormente descritos pretenden semejarse a un filtro óptimo. Los filtros adaptables que utilizan estructuras IIR y FIR buscan converger al filtro óptimo de Wiener, tema bajo estudio del siguiente capítulo.

Capítulo 4

Filtrado Adaptable

EN base a las generalidades sobre los filtros digitales (IIR y FIR), presentadas en el capítulo anterior, es posible continuar con el estudio de los filtros de interés en este trabajo de tesis, los filtros adaptables.

En situaciones donde se pretende procesar señales de propiedades estadísticas desconocidas o cambiantes (situación presente en muchas aplicaciones), en que no se presentan las condiciones de un filtrado óptimo, se plantea como solución el empleo de filtros adaptables.

A lo largo de este capítulo se presentan las características del filtrado adaptable, también se familiariza con los algoritmos para la realización de este tipo de filtros así como con sus diagramas de bloques necesarios para su programación.

4.1. Introducción

En un amplio margen de los escenarios, que pretende un tratamiento digital de señales, el diseño de los filtros óptimos lleva a una degradación de sus prestaciones cuando las condiciones del escenario cambian con el tiempo. Los sofisticados sistemas presentes en la actualidad y su extremada dependencia con el espectro o correlación de las señales involucradas (en que muy a menudo cambian sus propiedades), obliga a la prevención de la degradación en la calidad de los mismos. Aquel sistema que es capaz de *adaptarse* al entorno de las señales se le denomina **adaptable**. Para fines de este trabajo este sistema se refiere como *filtro adaptable*.

La estructura genérica de un sistema adaptable presenta una etapa de proceso a la que se superpone un estructura de *aprendizaje*, dicha estructura es capaz de monitorear las condiciones del entorno e introducir las posibles modificaciones pertinentes al sistema de proceso [3].

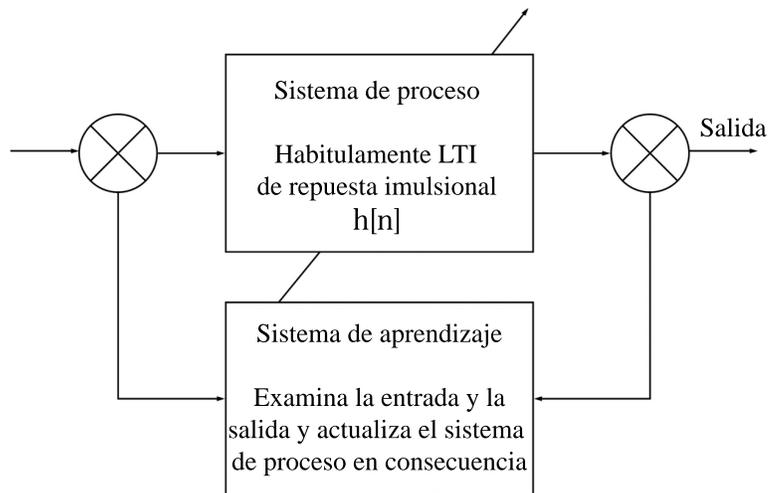


Figura 4.1: *Arquitectura general de un sistema adaptable.*

De la **Figura 4.1** puede entenderse que un sistema de tal estructura es de cierta forma “autodiseñado”, puesto que es capaz de modificar su propia función de transferencia.

4.2. Filtrado Lineal Óptimo

Hay básicamente dos teorías para el diseño de los filtros adaptables lineales (donde la salida del filtro es una función lineal -posiblemente variante en el tiempo- de la entrada del filtro) [16]:

1. La aproximación clásica, está destinada en el diseño de filtros “*selectores*” de frecuencia tales como los filtros pasabandas, pasabajas, pasaaltas/etc. Para una aplicación de reducción de ruido, por ejemplo, se basa en el conocimiento de la totalidad el contenido espectral de ambas; la señal útil y las componentes de ruido. Es aplicable principalmente cuando la señal y el ruido ocupan claramente diferentes bandas de frecuencia. Tal diseño clásico de filtros no son tratados aquí.
 2. Diseño de Filtro Óptimo, por otra parte, esta basado en teoría de optimización, donde el filtro es diseñado para ser “mejor” (de alguna forma). Si la señal y el ruido son vistos como procesos estocásticos, basados en sus parámetros estadísticos (asumido como disponibles), un filtro óptimo es diseñado tal que, por ejemplo, minimize los efectos del ruido a la salida del filtro acordando con algún criterio estadístico. Está basada en la minimización del valor cuadrático medio de la diferencia entre la salida actual del filtro y alguna salida deseada, como se ilustra en la **Figura 4.2**. Puede parecer extraño que la teoría requiera de una señal deseada, si tal cosa fuese válida ¿para qué complicar el diseño con un
-

filtro?. Suficiente es decir, que usualmente es posible obtener una señal que, mientras que esta no es realmente la requerida, es suficiente para el propósito de controlar el proceso de adaptación. El diseño de estos son dados más adelante, en el contexto de Filtrado Adaptable, donde no se asume conocimiento de los parámetros estocásticos, pero el cual esta basado en una idea muy similar. La teoría del diseño de filtro óptimo data a los trabajos de Wiener en 1942 y Kolmogorov en 1939. La solución resultada es referida a menudo como filtro Wiener. La teoría de filtros adaptables se construye en gran parte en este trabajo.

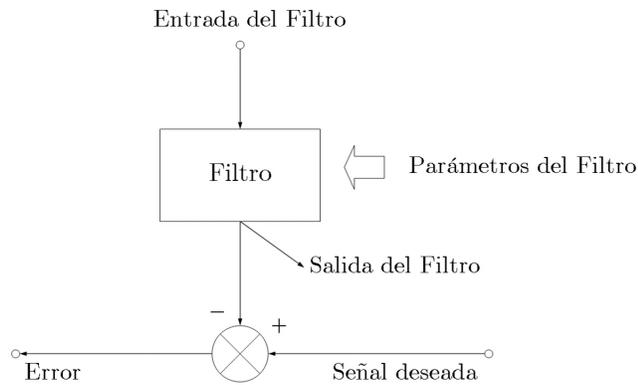


Figura 4.2: *Esquema prototipo del filtro Wiener.*

El diseño de filtros Wiener puede ser denominado diseño “a priori”, porque este está basado en una información estadística a priori. Es importante ver, sin embargo que el filtro Wiener es solamente óptimo cuando la estadística relaciona verdaderamente la información a priori sobre el cual el diseño del filtro estuvo basado. Aún mas, cuando tal información a priori no está disponible, cual es usualmente el caso, no es posible diseñar en primer lugar un filtro Wiener. Además las características de la señal y/o ruido son a menudo no estacionario. En este caso es ocasionalmente muy difícil aplicar

esto en práctica. Entonces un método alternativo es usar un **filtro adaptable**, el cual se puede autodiseñar y mantiene la señal deseada cancelando la indeseada.

A continuación se plantea un modelo estadístico que cubre en la práctica la mayoría de los escenarios de aplicación del filtrado lineal óptimo. Tomando como referencia lo ilustrado en la **Figura 4.3** es posible observar que cada señal incluida es una realización de procesos aleatorios estacionarios (estos procesos son aquellos en que las propiedades estadísticas son invariantes a una traslación en el eje temporal). La señal de entrada $u[n]$ es filtrada por un filtro cuya respuesta al impulso $h[n]$ es optimizada de modo que la salida $y[n]$ es lo más parecida posible a la secuencia deseada $d[n]$. La precisión del filtro se mide a partir del error $e[n]$. Para evitar análisis excesivos se estudia los filtros óptimos FIR, por ser más adecuado para nuestro campo de estudio. El error $e[n]$, para un filtro de orden M , se escribe par cada instante de tiempo como

$$e[n] = d[n] - \sum_{k=0}^M h[k]u[n-k] \quad (4.1)$$

o en notación vectorial

$$e[n] = d[n] - \mathbf{u}^t[n]\mathbf{h} \quad (4.2)$$

donde t indica transpuesta. Una vez agrupados los $M + 1$ coeficientes de la respuesta del filtro $\mathbf{h}[n]$ en el vector $\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_M]^t$, y los $M + 1$ valores más recientes de la entrada en el vector $\mathbf{u}[n] = [u[n], u[n-1], \dots, u[n-M]]^t$. El objetivo es minimizar una función de coste (que mide la potencia del proceso aleatorio $e[n]$), establecida como la varianza del error

$$J[\mathbf{h}] \triangleq E[e^2[n]]$$

Ahora, con la finalidad de encontrar los coeficientes $\mathbf{h}[n]$ para los que el error tiene la menor potencia se iguala el gradiente $J[\mathbf{h}]$ a cero

$$\nabla J[\mathbf{h}] = 2E[e[n]\nabla e[n]] = -2E[e[n]\mathbf{u}[n]] = 0$$

La relación anterior indica que para aquel filtro que minimiza la potencia del error, este debe estar correlacionado con los datos de entrada. A lo que se le conoce como **Principio de Ortogonalidad**, el cual requiere de una interpretación geométrica [18].

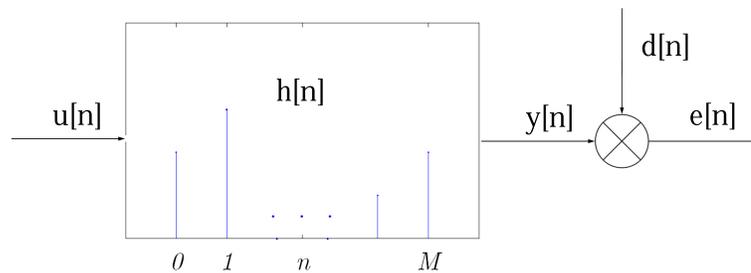


Figura 4.3: *Filtrado lineal óptimo.*

Si se considera el espacio vectorial de las variables aleatorias, espacio en el que se define el producto escalar $\langle x, y \rangle = E[xy]$, se tiene que $e[n] = d[n] - y[n]$ es ortogonal a las $M + 1$ variables aleatorias $u[n], u[n - 1], \dots, u[n - M]$ con las que se estima $d[n]$. En tal sentido, la estimación $y[n]$ de la muestra en el instante n de la secuencia deseada es una combinación lineal de las variables aleatorias $u[n], u[n - 1], \dots, u[n - M]$, es decir, la proyección ortogonal de $d[n]$ sobre el subespacio generado las mencionadas variables.

La minimización de la función $J(\mathbf{h})$ da como resultado el filtro óptimo que se pretende, que es la solución al siguiente sistema de ecuaciones lineales,

formulado de forma matricial y denominado **Ecuaciones de Wiener-Hopf**:

$$\mathbf{R}_u \mathbf{h} = \mathbf{r}_{du} \quad (4.3)$$

donde $\mathbf{R}_u = E[\mathbf{u}[n]\mathbf{u}^t[n]]$ es la matriz de autocorrelación de $u[n]$ de tamaño $(M + 1)(M + 1)$, y $\mathbf{r}_{du} = E[d[n]\mathbf{u}[n]]$ es el vector de correlación cruzada de tamaño $M + 1$ de la secuencia deseada $d[n]$ y al señal de entrada $u[n]$:

$$\mathbf{R}_u = \begin{pmatrix} R_u[0] & R_u[1] & \cdots & R_u[M] \\ R_u[1] & R_u[0] & \cdots & R_u[M-1] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_u[M] & R_u[M-1] & \cdots & R_u[0] \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{r}_{du} = [r_{du}[0], r_{du}[1], \dots, r_{du}[M]]^t \quad (4.5)$$

La solución requiere del conocimiento de los parámetros estadísticos de segundo orden del problema, puesto que se parte de una función dependiente de la potencia del error. La solución es garantizada en la práctica para la totalidad de los casos, puesto que la matriz de autocorrelación \mathbf{R}_u está claramente definida a no ser que las muestras de la entrada $u[n]$ presenten algún tipo de dependencia determinista entre ellas. La matriz \mathbf{R}_u es Toeplitz (con elementos constantes a lo largo de las diagonales), propiedad que representa una ventaja al encontrar algoritmos eficientes en la resolución de ecuaciones lineales de este tipo. El resultado obtenido se denomina **Filtro de Wiener**, este es aquel que en promedio, ofrece una salida lo más parecida posible a la secuencia deseada bajo un criterio de error cuadrático medio.

Se puede trabajar con la función de coste $J[\mathbf{h}]$ de modo que quede explícita su dependencia del vector \mathbf{h} que contiene los coeficientes del filtro estimador

[10]

$$J[\mathbf{h}] = E[e^2[n]] = \sigma_d^2 - 2\mathbf{h}^t \mathbf{r}_{du} + \mathbf{h}^t \mathbf{R}_u \mathbf{h} \quad (4.6)$$

donde σ_d^2 es la secuencia de la potencia deseada $d[n]$. Manipulando la forma cuadrática anterior se puede expresar de manera más explícita

$$\begin{aligned} J[\mathbf{h}] &= \sigma_d^2 - \mathbf{r}_{du}^t \mathbf{R}_u^{-1} \mathbf{r}_{du} + (\mathbf{h} - \mathbf{R}_u^{-1} \mathbf{r}_{du})^t \mathbf{R}_u (\mathbf{h} - \mathbf{R}_u^{-1} \mathbf{r}_{du}) \\ &= J_{\min} + (\mathbf{h} - \mathbf{h}_{opt})^t \mathbf{R}_u (\mathbf{h} - \mathbf{h}_{opt}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Es claro que para $\mathbf{h} = \mathbf{h}_{opt} = \mathbf{R}_u^{-1} \mathbf{r}_{du}$ la función de coste alcanza su valor mínimo $J_{min} = \sigma_d^2 - \mathbf{r}_{du}^t \mathbf{R}_u^{-1} \mathbf{r}_{du}$, siempre menor o igual que σ_d^2 .

4.3. Predicción Lineal

La predicción lineal de procesos aleatorios estacionarios se describe como la estimación del valor que va a tomar la realización de un proceso aleatorio $u[n]$ en un instante dado una vez observados los valores anteriores [18]. La predicción lineal es un caso particular de filtrado óptimo, tal y como se observa en la **Figura 4.4**.

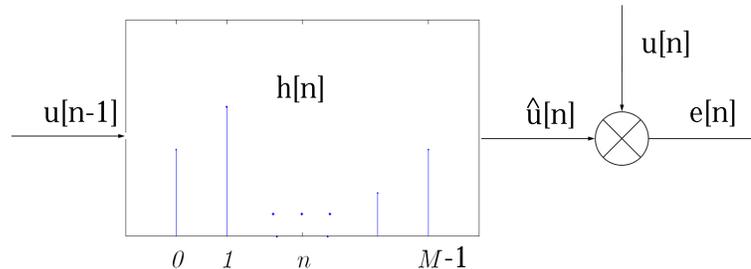


Figura 4.4: *Predicción lineal.*

La secuencia deseada es ahora la propia $u[n]$, mientras que la secuencia de entrada se corresponde con $u[n - 1]$, de tal modo que la predicción de la muestra de $u[n]$ en el instante n , escrita como $\hat{u}[n]$, se puede poner como

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^M h_k u[n - k] \quad (4.8)$$

y el error de predicción está dado por

$$e[n] = u[n] - \sum_{k=1}^M h_k u[n - k] \quad (4.9)$$

Los sucesivos valores del error de predicción se obtienen como el resultado de filtrar la secuencia $u[n]$ por el denominado filtro de error de predicción cuya función de transferencia es

$$a_M(z) = 1 - \sum_{k=1}^M h_k z^{-k} = 1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} \quad (4.10)$$

El subíndice M indica el orden de la predicción; número de muestras que intervienen en las misma. Este filtro se conoce también como *filtro blanqueador*, ya que el error de predicción tiene el espectro más plano en relación al espectro de la entrada. Se puede hacer estimación de un proceso aleatorio en la medida en la que éste no sea *blanco*, ya que de lo contrario no habría correlación entre muestras, que es precisamente la que aprovecha el predictor lineal.

La estructura en celosía implementa el filtro de error de predicción para todos los ordenes por debajo de M , para lo que basta solamente tomar la salida en la sección correspondiente, dicha estructura se muestra en la **Figura 4.5**.

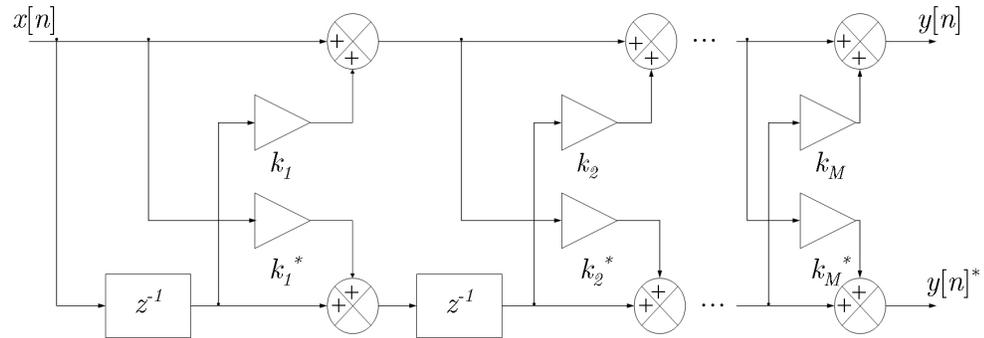


Figura 4.5: Estructura en celosía.

4.4. Filtros Adaptables

Los filtros adaptables son dispositivos empleados en una variedad de aplicaciones, a menudo con fines muy diferentes. Por ejemplo, un filtro puede ser usado, para reducir el efecto de adición de ruido o interferencia contenida en una señal dada, tal que la componente de la señal útil puede ser distinguida con mayor efectividad en la salida del filtro.

Un filtro adaptable tiene una adaptación algorítmica, que significa monitorear el ambiente y variar la función de transferencia del filtro como tal. El algoritmo comienza fijando las condiciones iniciales (eso puede corresponder a un desconocimiento del ambiente) y, basado en las actuales señales recibidas, actúa para encontrar el diseño óptimo del filtro. En un estado estacionario, se espera que el filtro converja con el filtro Wiener. En un estado no estacionario, se espera que el filtro “rastree” las variaciones de tiempo y varié sus coeficientes de filtro como tal.

En la realidad, tal cosa no existe como solución óptima e inmediata para el problema del filtrado adaptable. Los filtros adaptables tienen que hacerse sin una información estadística apriori, en lugar de ello comúnmente obtienen

toda su información solamente de una realización de los procesos, por ejemplo, una secuencia de muestreos en el tiempo. Pero, hay entonces muchas opciones en cuanto a la información que es extraída, cómo es deducida, y cómo es usada esta en el algoritmo. En el caso estacionario, por ejemplo, la ergodicidad puede ser utilizada o empleada para calcular los parámetros estadísticos de la señal durante el promedio del tiempo. El tiempo promedio obviamente no es una gran herramienta útil en un estado no estacionario. Dada solamente una realización del proceso, el algoritmo de adaptación tendrá que operar con estimaciones instantáneas de los datos estadísticos de la señal. Nuevamente tales estimaciones pueden ser obtenidas en varias formas, lo que significa que se tiene un amplio conjunto de herramientas más que una única solución. Como resultado se produce una gran variedad de algoritmos, los cuales ofrecen un rasgo conveniente propio.

La elección de una solución sobre alguna otra es determinada no solo por las propiedades de convergencia y “rastreado” (seguimiento), sino también por la estabilidad numérica, precisión y robustez, también como la complejidad computacional y, algunas veces la tratabilidad con la implementación en hardware.

4.4.1. Esquema Prototipo del Filtrado Adaptable

El esquema prototipo del filtrado adaptable está descrito en la **Figura 4.6** que es claramente similar al esquema del filtrado de Wiener de la **Figura 4.2**. La operación básica ahora involucra dos procesos:

1. Un proceso de filtrado, el cual produce una señal de salida en respuesta a una señal de entrada dada.
 2. Un proceso de adaptación que apunta a ajustar los parámetros del filtro
-

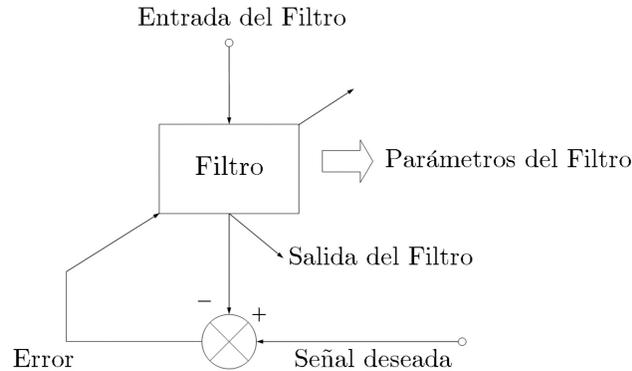


Figura 4.6: *Esquema prototipo del filtrado adaptable.*

(Función de transferencia del filtro) al ambiente (posiblemente variante en el tiempo). La adaptación es guiada por una señal de error que indica que tan bien la salida del filtro se relaciona con alguna respuesta deseada. Los ejemplos son dados en la siguiente sección. A menudo el valor cuadrático medio de la señal de error es usado como criterio de optimización.

Dependiendo de la aplicación cada parámetro del filtro, la salida del filtro o la señal de error, pueden ser de interés.

Un filtro adaptable puede ser implementado como un componente analógico o digital. Aquí solo se consideran filtros digitales. Cuando se procesa señales analógicas, el filtro adaptable es entonces precedido por un convertidor analógico a digital. De manera similar, una conversión digital analógica puede ser adicionada cuando una señal analógica sea necesitada. En las figuras el bloque A/D y D/A son omitidos.

Como será explicado en el capítulo subsecuente, una elección pragmática es usar un filtro FIR, donde la salida del filtro está formada como una com-

binación lineal de entrada retrasada.

Esta elección conduce a matemáticas y algoritmos medianamente simples. En particular el problema de optimización puede ser hecho para tener una función costeable con un solo punto crucial (unimodal). Además el filtro resultante es incondicionalmente estable.

4.4.2. Algoritmos de Filtrado Adaptable

El objetivo será encontrar el filtro óptimo, h_o , que satisface las ecuaciones de Wiener-Hopf descritas anteriormente en la Sección 4.2.

La solución a dichas ecuaciones puede representar una carga computacional excesiva cuando el número de coeficientes es elevado. Una forma alternativa a la resolución directa es emplear un procedimiento iterativo de optimización. Uno de los más antiguos es el *método de máximo descenso* (Steepest-Descent Algorithm).

Algoritmo de máximo descenso

Para hallar el J_{min} , se realizan los siguientes pasos:

1. Se parte de un filtro inicial $\mathbf{h}[0]$ que habitualmente es el vector nulo. Se hace $n = 0$.
 2. Se calcula el vector gradiente definido como la derivada del error cuadrático medio, $J(\mathbf{h}[n])$, con respecto al vector de coeficientes, $\mathbf{h}[n]$.
 3. Se calcula el nuevo filtro, $\mathbf{h}[n + 1]$, cambiando el filtro previo en la dirección contraria a la del vector gradiente.
-

4. Se vuelve al paso 2 con $n = n + 1$ y se repite el proceso.

Las correcciones sucesivas del filtro en la dirección opuesta a la del vector gradiente nos llevarán a la obtención del filtro óptimo.

Sea $\nabla J(\mathbf{h}[n])$ el *vector gradiente* en la iteración n , la actualización del filtro se realiza por la ecuación siguiente:

$$\mathbf{h}[n + 1] = \mathbf{h}[n] - \frac{\mu}{2} \nabla J(\mathbf{h}[n]) \quad (4.11)$$

donde μ es una constante real y positiva.

Puesto que $\nabla J(\mathbf{h}[n]) = -2E[e[n]\mathbf{u}[n]] = -2r_{du} - \mathbf{R}_u \mathbf{h}[n]$, la ecuación (4.11) pasa a ser:

$$\mathbf{h}[n + 1] = \mathbf{h}[n] + \mu(\mathbf{r}_{du} - \mathbf{R}_u \mathbf{h}[n]) \quad (4.12)$$

El parámetro μ controla la velocidad del descenso por la superficie del error.

Algoritmo LMS

El algoritmo LMS (Least-Mean-Square) pertenece a la familia de los algoritmos de *gradiente estocástico*. El término de gradiente estocástico se emplea para distinguir el algoritmo LMS del de máximo descenso que emplea un gradiente determinista para el cálculo iterativo del filtro de Wiener. La propiedad más resaltable del algoritmo LMS es su sencillez; no se necesita ninguna estimación de las funciones de correlación, ni requiere inversión de matrices.

Su expresión matemática esta definida por [10]

$$\mathbf{h}[n - 1] = \mathbf{h}[n] + \mu e[n] \mathbf{u}[n] \quad (4.13)$$

Para cada iteración se realizan los siguientes pasos:

1. Calcular la muestra de salida del filtro FIR,

$$y[n] = \mathbf{h}^t[n] \mathbf{u}[n] = \sum_{k=0}^M \mathbf{h}_k[n] \mathbf{u}[n - k]$$

2. Calcular la muestra de error, $e[n] = d[n] - y[n]$
3. Actualizar los coeficientes del filtro con la ecuación (4.13).

La relación que guarda el algoritmo LMS con el algoritmo de máximo descenso es que se sustituye el promedio estadístico $E[e[n] \mathbf{u}[n]]$ por su valor instantáneo $e[n] \mathbf{u}[n]$.

Por lo tanto ahora cada coeficiente del filtro mostrará un comportamiento ruidoso con lo que la trayectoria de los coeficientes pasa de ser determinista a ser aleatoria. No hay garantía de que se alcance el filtro óptimo, sino que después de un número arbitrario de etapas el filtro se moverá ruidosamente en torno al punto de mínimo error de la superficie de error. Esto es $J(\mathbf{h}[n]) \rightarrow J(\infty)$, donde $J(\infty)$ es una constante.

La condición de convergencia para este algoritmo es la siguiente [10]:

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\text{máx}}} \quad (4.14)$$

donde $\lambda_{\text{máx}}$ es el mayor de los autovalores de la matriz de autocorrelación de \mathbf{R}_u .

Para un valor dado de μ , la velocidad de convergencia depende de la dispersión de los autovalores de \mathbf{R}_u . Conforme los autovalores son más parecidos entre sí, el error desciende en línea recta hacia el J_{min} desde el punto inicial. Así para el diseño de este filtro se tiene que entre más grande sea μ , más rápida será la convergencia, pero menor será la estabilidad alrededor del valor mínimo, y a menor μ dentro del rango, más lenta es la convergencia, pero más estable será alrededor del valor óptimo.

Un problema ocurre cuando en la matriz de autocorrelación existen autovalores iguales a cero, ello puede ocasionar que el proceso de adaptación no converja con la solución deseada. Dicho problema se soluciona empleando una constante denominada factor *leakage*, este factor debe ser de un valor comprendido entre 0 y 1, que cuando no sucede el problema mencionado se elige de 1, entonces el algoritmo LMS se expresa como:

$$\mathbf{h}[n + 1] = [1 - \mu r] \mathbf{h}[n] + \mu e[n] \mathbf{u}[n] \quad (4.15)$$

Algoritmo RLS

El algoritmo LMS tiene muchas ventajas (debido a su simplicidad computacional), pero su porcentaje de convergencia es lento. El algoritmo LMS solo tiene un parámetro ajustable que modifica su porcentaje de convergencia, el tamaño del paso μ , el cual tiene un rango límite de ajuste en orden para asegurar la estabilidad.

Para tener una convergencia más rápida, debe ser usado un algoritmo más complejo con parámetros adicionales. Una opción viable es el uso de un algoritmo que realiza una estimación muestra a muestra llamado algoritmo

RLS (Recursive Least Squares). Este algoritmo queda definido por [1]:

$$\mathbf{h}[n + 1] = \mathbf{h}[n] + Ke[n] \quad (4.16)$$

donde K es el *vector de ganancia de Kalman* y $e[n]$ representa la señal de error. El procedimiento a seguir para la evaluar la ecuación sigue las siguientes operaciones:

1. Calcular las muestras de salida del filtro.
2. Encontrar la señal de error, $e[n]$.
3. Calcular el vector de ganancia de Kalman, K .
4. Actualizar la matriz inversa de correlación.
5. Actualizar los coeficientes del filtro con la ecuación (4.16).

El vector de ganancia de Kalman está basado en los resultados de auto-correlación de los datos de entrada, y un factor llamado *forgetting factor* con un rango de entre 0 y 1 y provee unos *pesos de tiempo* de los datos de entrada tal que los pesos más recientes de la entrada son pesos más significativos que los datos pasados. Su expresión matemática es la siguiente [10]:

$$K = \frac{\mathbf{R}_u^{-1}}{1 + \mathbf{u}[n]\mathbf{R}_u^{-1}\mathbf{U}[n]} \mathbf{U}[n] \quad (4.17)$$

donde $\mathbf{U}[n] = [\mathbf{u}[n], \mathbf{u}[n - 1], \dots, \mathbf{u}[n - M]]$

4.5. Resumen y Referencias

Los filtros FIR adaptables pueden implementarse mediante una estructura en celosía, ofreciendo una gran robustez frente a errores de redondeo y

una mayor eficiencia computacional. Hay sin embargo otras opciones como la estructura directa, más sencilla de implementar, lo que conduce a algoritmos medianamente simples y cuyos resultados llegan a ser óptimos cuando el sistema de estudio no es tan complejo.

Para fines más explícitos, en cuanto a filtrado óptimo puede consultarse [3, 18] y en [16], en el tercero existe extensa información de filtrado adaptable, igualmente para este último tema se emplearon los libros [1, 10].

En el capítulo siguiente se presenta el diseño y simulación para el procesamiento de un ECG, mediante el empleo de un filtro FIR adaptable empleando una estructura directa.

Capítulo 5

Resultados

Una vez descritos todos los elementos que forman parte del proceso de filtrado de señales, ahora se procede a estudiar el caso particular de una señal de un ECG: descripción de la señal, transformación, filtrado digital, y algoritmos de filtros adaptable. Se presentan una serie de experimentos con el fin de realizar un estudio comparativo entre las diferentes estructuras de filtros descritos en los capítulos anteriores. Una vez completado este estudio, se aplica el método más viable a una señal del ECG para validar los resultados mediante una emulación en un DSP.

5.1. Introducción

Tal como se ha comentado en el primer capítulo, uno de los objetivos del presente trabajo es procesar una señal de ECG con un filtro adaptable, de tal manera, que permita reducir la cantidad de ruido que se introduce cuando la señal es adquirida, sin perder información relevante.

Para llevar a cabo este objetivo, en primer lugar se ha realizado un análisis técnico en los capítulos anteriores, de manera que con el fin de evaluar

las diferentes técnicas, será necesario realizar un estudio experimental sobre los métodos descritos en los dos últimos capítulos, ello con la finalidad de establecer cuál de ellos permite lograr el objetivo ya mencionado.

Antes de abordar la prueba experimental es necesario describir el sistema de filtrado que se pretende. El diagrama de la **Figura 5.1** muestra los bloques del sistema adaptable para el filtrado de la señal de ECG. De dicha figura se puede observar lo siguiente: la señal de entrada es el ruido, la señal deseada es la señal de ECG interferida por ruido, la señal de salida de error es la señal de ECG filtrada, esta última resulta de sustraer a la señal deseada $d[n]$ la señal de salida $y[n]$, matemáticamente de la siguiente manera:

$$e[n] = d[n] - y[n]$$

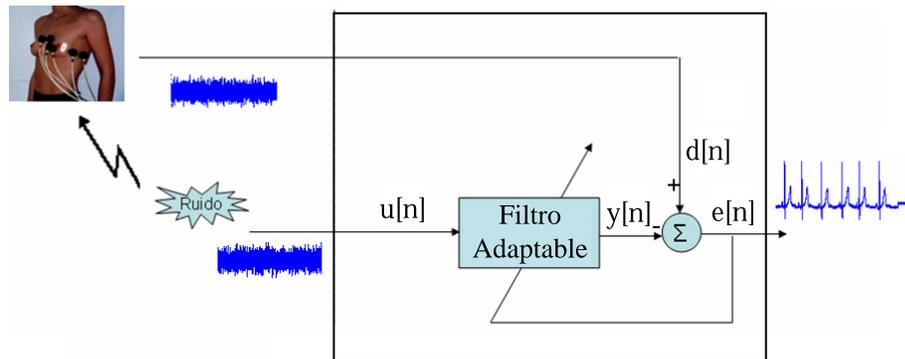


Figura 5.1: Diagrama básico del filtrado adaptable de un ECG.

El objetivo del proceso a realizar por el sistema planteado es conseguir la señal $e[n]$ lo más *pura* posible, ya que es en base a esta el diagnóstico que deba realizar el especialista.

5.2. Espectro Frecuencial del ECG

En el diseño de filtros selectivos en frecuencia, las características deseadas del filtro se especifican en el dominio de la frecuencia en función de la respuesta del filtro en magnitud y en fase.

El análisis frecuencial de una señal conlleva a la separación de la señal en sus componentes (sinusoidales) frecuenciales, por ello el espectro provee una “identidad” o forma de la señal en el sentido de que ninguna otra señal tiene el mismo espectro. Si descomponemos una forma de onda en sus componentes sinusoidales, la suma de estas componentes resulta en la forma de onda original, por otra parte, si alguna de estas componentes desaparece, el resultado es una señal diferente.

A continuación en la **Figura 5.2** se muestra la señal de ECG, obtenida de la base de datos del MIT DB: The Massachusetts Institute of Technology-Beth Israel Hospital Arrhythmia Database (48 registros, de 30 minutos cada uno) [27]. Más adelante en la **Figura 5.3** se muestra el espectro en frecuencia de la señal de ECG obtenida mediante el siguiente código en MATLAB:

ALGORITMO 5.1: ESPECTRO DE UNA SEÑAL ECG

```
x=fft(ECG);           % ECG es el vector de la
                      % señal electrocardiográfica.

L= length(x);

Nyquist=1/2;

freq=(1:L/2)/(L/2)*Nyquist; % Frecuencia normalizada
                             % o de Nyquist.

magx=abs(x(1:floor(L/2))); % Cálculo de la magnitud
                           % de la fft del vector.
```

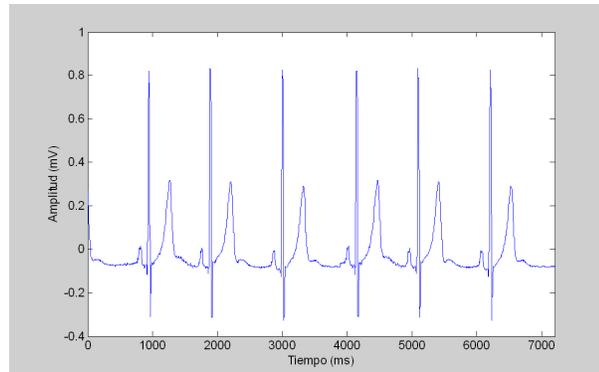


Figura 5.2: Señal de ECG.

En la **Figura 5.3** se muestra el espectro en frecuencia de la señal de ECG. Puede notarse que la mayor parte de la información presente en la señal está por debajo del 0.15 Hz en la frecuencia normalizada o de Nyquist [21], esto es, la señal está presente en bajas frecuencias.

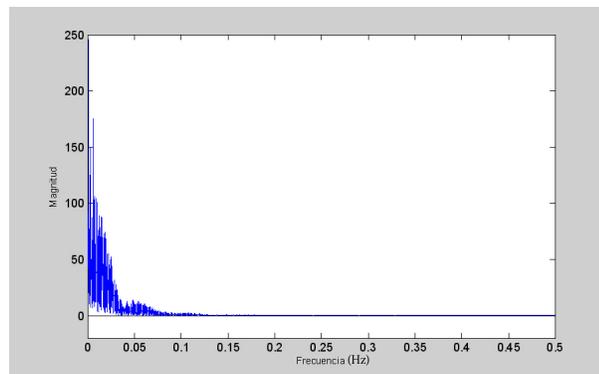


Figura 5.3: Espectro de la señal de ECG.

Es en base a las características que se observan claramente en el dominio de la frecuencia de la señal, el diseño de los filtros digitales que se simulan en este trabajo. En la siguiente sección se muestra el diseño y resultados obtenidos por los mismos ya en la señal de ECG interferida por ruido.

5.3. Resultados de Simulación

La simulación es la representación de un proceso o fenómeno mediante otro más simple, que permite analizar sus características. Mediante la simulación en este trabajo de tesis es posible generar la señal de salida de diferentes procesos de filtrado para comprobar su comportamiento bajo diversas condiciones de ruido, esto permite un conocimiento más profundo para la emulación.

5.3.1. Filtro FIR

Los filtros FIR se usan en aplicaciones donde existe la necesidad de un filtro de fase lineal. Este requisito ocurre en muchas aplicaciones, tal es el caso del procesamiento de señales médicas, donde existe la necesidad de separar las señales, sin distorcionarlas.

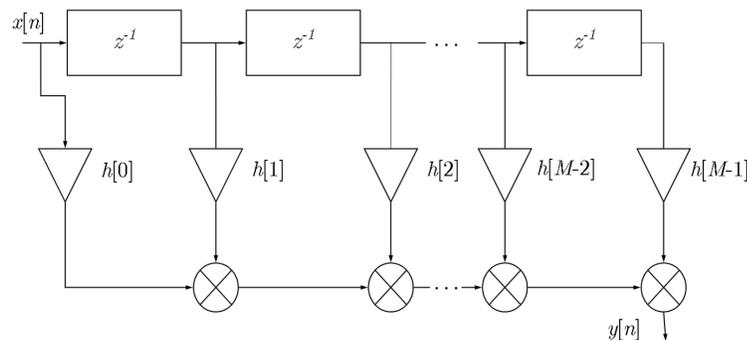


Figura 5.4: Estructura directa para la realización de un filtro FIR.

Un aspecto fundamental a considerar en el diseño y simulación de un filtro digital es el coste computacional que este exige. Este aspecto es determinante para aplicaciones en entornos analógicos. Aunque existen muchas estructuras para el diseño de los filtros digitales aquí solo se muestra la estructura directa,

que es la más sencilla de implementar y conduce a algoritmos eficientes en el procesamiento de señales.

En la **Figura 5.4** se muestra la estructura directa de un filtro FIR. Mas adelante, bajo la denominación de algoritmo 5.2, se proporciona el Algoritmo que realiza la secuencia de operaciones simbolizada por el diagrama de bloques; se consideran operaciones básicas la suma, el producto y la operación MAC y se dispone de un elemento acumulador A sobre cuyo registro se efectúan todas las operaciones MAC. Se utiliza notación vectorial para simbolizar el almacenamiento en memoria de las diferentes variables. Así la respuesta impulsional del filtro se conserva en el vector de dimensión L .

ALGORITMO 5.2: FILTRO FIR.

```

M: = L - 1                               ;Orden del filtro para i=0
  h(i): = h[i]                             ;Inicialización vector
  x(i): = 0                                 ;Inicialización del
fin                                          filtro con condiciones
                                          iniciales nulas

repetir(para cada muestra de entrada)
  x(0): = x[n]                             ;Lectura de la muestra
  A: = x(M)*h(M)                           ;Inicialización acumulador
  para i=0 hasta M-1 repetir
    A: = A+x(M-1-i)*h(M-1-i) ;Calculo M operaciones MAC
    x(M-i): = x(M-1-i)           ;Actualización del vector
  fin                                       asociado a la entrada
  y[n]: = A                               ;Muestra de salida
fin

```

Este algoritmo requiere $2L$ posiciones de memoria y un acumulador. Para cada nueva muestra de la entrada realiza un producto y $L - 1$ operaciones MAC; por tanto el número total de operaciones es L . El almacenamiento en memoria de los coeficientes del filtro se realiza con una precisión finita, es decir, se produce inevitablemente cierto error de cuantificación.

La señal de ECG de la **Figura 5.2** no se obtiene de forma natural, para obtener dicha señal se requiere de la aplicación de técnicas de procesamiento digital, debido a la alta susceptibilidad que presentan este tipo de señales ante ruidos e interferencias, como se muestra en la **Figura 5.5a** y cuyo espectro se encuentra representado en la **Figura 5.5b**.

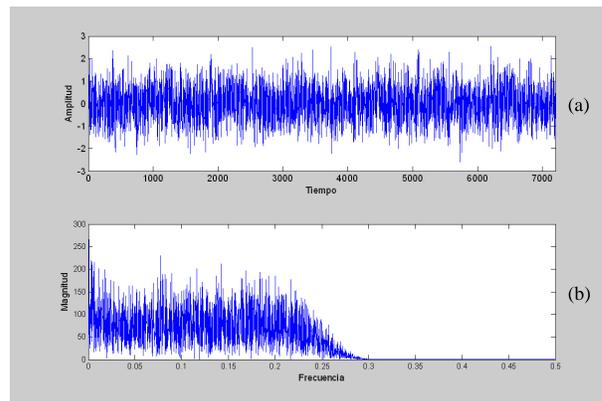


Figura 5.5: (a) Señal de ECG alterada por ruido Gaussiano y (b) su espectro.

Una alternativa para procesar la señal que permita atenuar el ruido adicionado a dicha señal es la aplicación de un filtro digital FIR. Para este propósito se emplea MATLAB y Simulink.

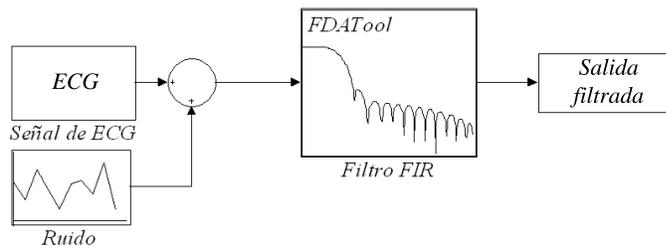


Figura 5.6: Diagrama del filtro FIR en Simulink.

En la **Figura 5.6** se muestra el diagrama en Simulink de la aplicación de dicho filtro, así como su bloque de características frecuenciales en la **Figura**

5.7 y finalmente, en la **Figura 5.8** se muestra la señal obtenida como salida de dicho filtro.

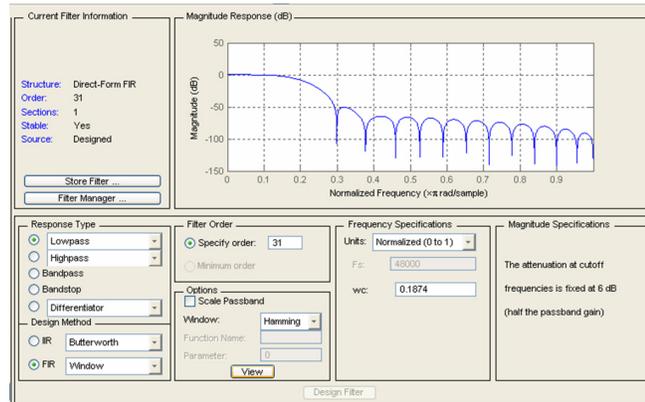


Figura 5.7: Diagrama de Bode del filtro FIR en Simulink.

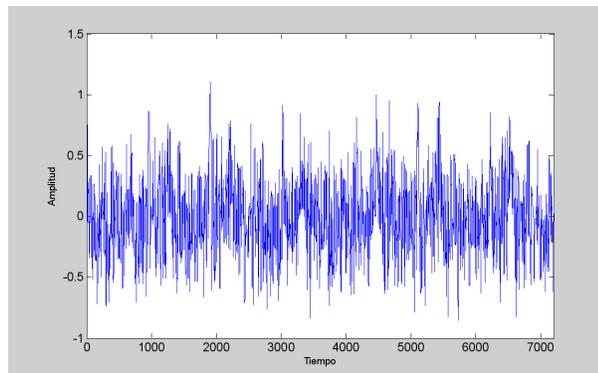


Figura 5.8: Señal de salida del filtro FIR.

Haciendo la comparación entre las **Figuras 5.5a** y **5.8** se puede notar la atenuación realizada a la señal interferente sin embargo, no son perceptibles las ondas componentes de la señal de ECG. Aunque este apartado se limita a la realización de un filtro FIR, nuestras conclusiones se mantienen en general como una simple atenuación del ruido.

5.3.2. Filtro IIR

En aquellas aplicaciones donde no es imprescindible disponer de una respuesta frecuencial con fase lineal, suelen utilizarse filtros cuya respuesta impulsional tiene longitud infinita. Su principal ventaja radica en que, para cumplir unas especificaciones determinadas precisan de un orden sensiblemente inferior al requerido por un filtro FIR, además requiere de menos memoria y tiene menor complejidad computacional.

La **Figura 5.9** muestra la estructura directa correspondiente a un filtro digital IIR, que se realiza apartir de la aplicación directa de la función de transferencia de $H(z)$. Aquí se proporciona un algoritmo para realización de un filtro IIR de segundo orden.

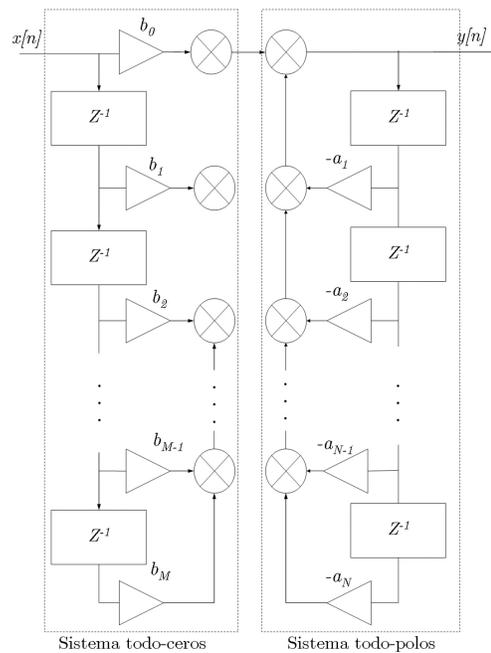


Figura 5.9: Estructura directa de un filtro IIR.

ALGORITMO 5.3: FILTRO IIR REALIZACIÓN DIRECTA.

```

M: =2                                ;Orden del filtro para i=1
hasta M repetir
  a(i): =a(i)                          ;Inicialización denominador
fin

para i=0 hasta M repetir
  b(i): =b_{i}                          ;Inicialización numerador
  x(i): =0                               ;Inicialización del vector
                                          ;asociado a la entrada
  y(i): =0                               ;Inicialización del vector
                                          ;asociado a la salida
fin repetir {para cada muestra de entrada}
  x(0): =x[n]                           ;Lectura de la muestra de
                                          ;la señal de entrada
  A: = b(M)*x(M)                         ;Inicialización acumulador
  para i=0 hasta M-1 repetir
    A: =A+b(M-1-i)*x(M-1-i)           ;Cálculo de MAC
    A: =A-a(M-i)*y(M-i)               ;Cálculo de MAC
  fin
  y(0): =A
  para i=0 hasta M-1 repetir
    x(M-i): =x(M-1-i)                 ;Actualización el vector
                                          ;asociado a la entrada
    y(M-i): =y(M-1-i)                 ;Actualización del vector
                                          ;asociado a la salida
  fin
  y[n]: =A                              ;Muestra de salida
fin

```

Este algoritmo corresponde a la función de transferencia

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

La realización directa de la célula de orden 2 responde a la expresión

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M=2} b_i x[n-i] - \sum_{i=1}^{M=2} a_i y[n-i]$$

Este algoritmo utiliza $4M+2 = 11$ posiciones de memoria y 1 acumulador. realiza un producto y $2M = 4$ operaciones MAC; en total $2M + 1 = 5$ operaciones por muestra de entrada.

A continuación, en la **Figura 5.10**, se presenta el diagrama realizado en Simulink del filtro IIR, y en la **Figura 5.11** su bloque de características frecuenciales.

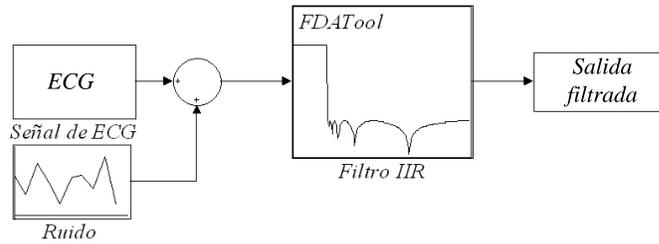


Figura 5.10: Diagrama del filtro IIR realizado en Simulink.

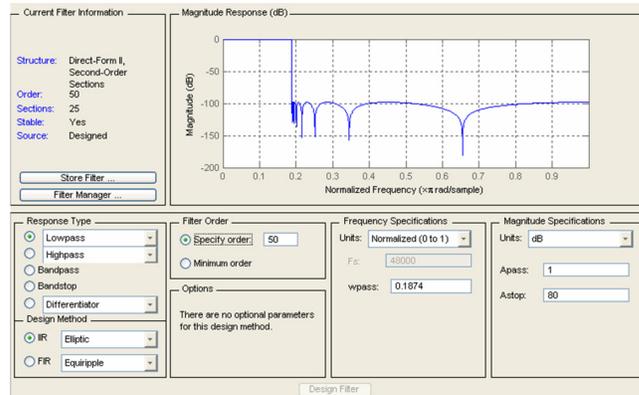


Figura 5.11: Diagrama de bode del filtro IIR en Simulink.

La **Figura 5.12** muestra la señal de salida del filtro IIR, aunque no es muy notorio, el filtro FIR atenúa en mayor medida el ruido que el filtro IIR coincidiendo con lo establecido anteriormente, ya que los filtros FIR son mucho menos susceptibles que los IIR de ser *inestables*.

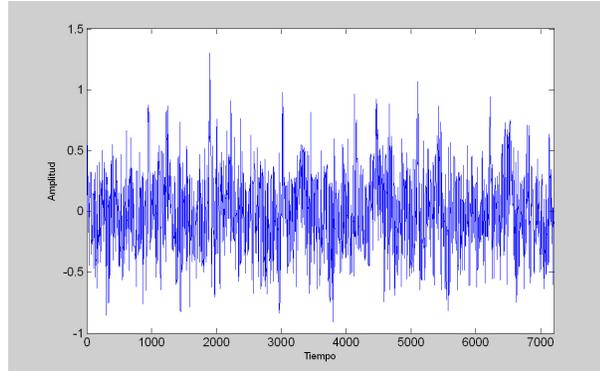


Figura 5.12: Señal de ECG filtrada del filtro IIR.

5.3.3. Filtro Adaptable

Siempre que se procesan señales de propiedades estadísticas desconocidas, o cambiantes, en que ya no se está en las condiciones de filtrado óptimo (estacionariedad), se plantea como solución la utilización de filtros adaptables. Estos sistemas permiten ir actualizando los coeficientes del filtro mediante un algoritmo recursivo. En un ambiente estacionario, el algoritmo arranca a partir de una condición inicial, y va adaptando sus coeficientes mediante iteraciones sucesivas, convergiendo al filtro óptimo en algún sentido.

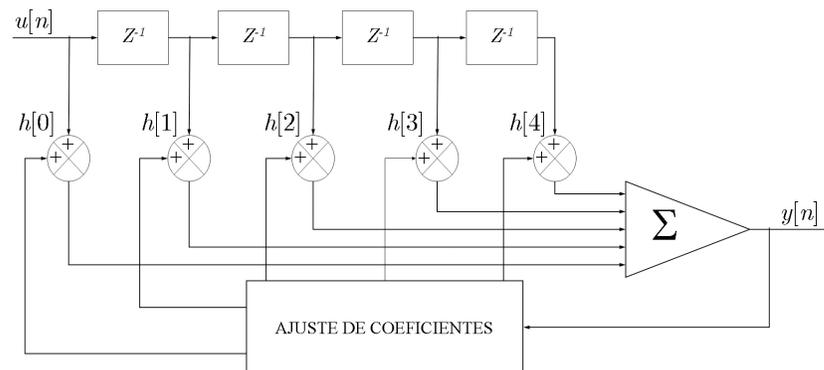


Figura 5.13: Diagrama del filtro FIR adaptable.

En ambientes no estacionarios, el filtro ofrece una capacidad de seguimiento, pudiendo seguir las variaciones en la estadística de la señal de entrada (aún cuando las variaciones no sean suficientemente lentas). Casi la totalidad de las aplicaciones con filtros adaptables utilizan implementaciones con filtros de respuesta impulsiva finita (FIRs), debido a la sencillez que presentan y lo eficientes que resultan.

Para implementar el FIR adaptable se utiliza la forma directa debido a la simplicidad que presenta ante otras configuraciones, así la forma del FIR adaptable es la mostrada en la **Figura 5.13**.

Algoritmo LMS

El algoritmo LMS es un método de cálculo ampliamente utilizado, especialmente en aplicaciones de procesamiento de señales en las que la velocidad de cálculo es alta. Se aborda, ahora sí, el planteamiento general de filtrado adaptable FIR. El procesamiento de la señal ECG puede plantearse con un sistema como el de la **Figura 5.14**, igualmente realizado en Simulink.

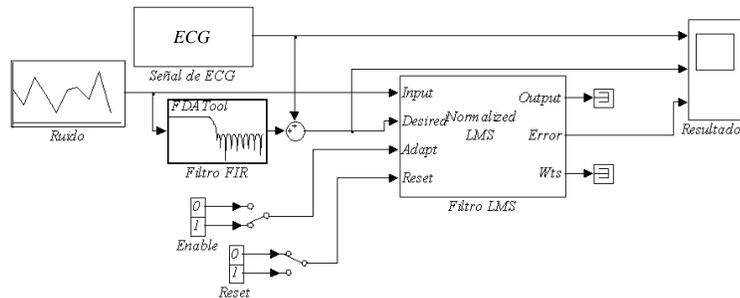


Figura 5.14: Diagrama del filtro FIR adaptable LMS.

Los parámetros de diseño del filtro FIR son los mismos a los mostrados anteriormente en la Subsección 5.3.1, para el algoritmo LMS se elige primero un valor de $\mu = 0.1$, este valor hace que la velocidad de convergencia sea rela-

tivamente grande, pero no así su estabilidad. En la **Figura 5.15** se ilustran las señales obtenidas a partir de dicho proceso, la señal **5.15a** representa la señal del ECG, la señal **5.15b** es la señal del ECG alterada por ruido Gaussiano, y la señal **5.15c** muestra la repuesta de dicho filtro, para $r = 1$.

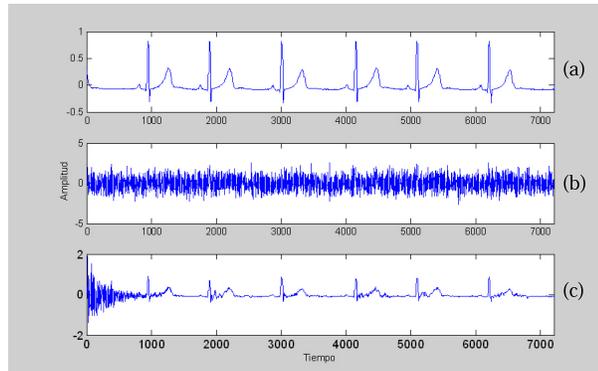


Figura 5.15: *Resultados de simulación para LMS, con $\mu = 0.1$.*

Con el mismo r , si se elige un $\mu = 0.01$ la velocidad de convergencia decrece y la señal filtrada tiende a semejarse aún más a la señal óptima, tal como sucede en la **Figura 5.16b**.

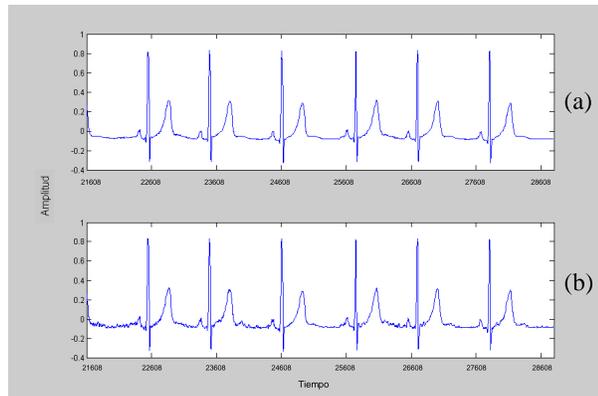


Figura 5.16: *Resultados LMS, con $\mu = 0.01$.*

Algoritmo RLS

El algoritmo RLS no se utiliza generalmente en aplicaciones de procesamiento de señales, porque exige velocidades de cálculo demasiado altas a los procesadores. Sin embargo para ver los efectos en simulación se ejecuta el diagrama a bloques de la **Figura 5.17**.

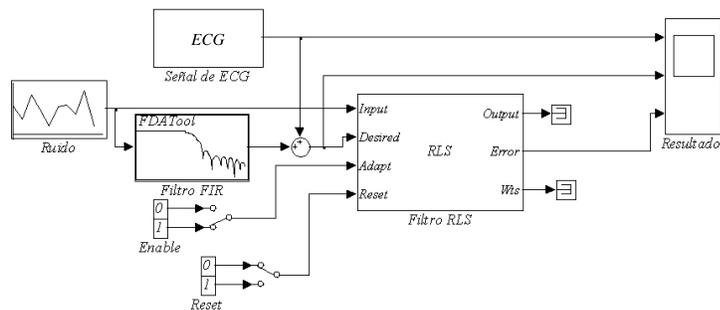


Figura 5.17: Diagrama del filtro FIR Adaptable RLS.

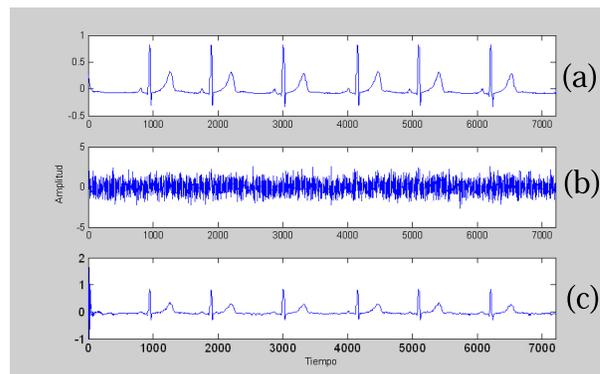


Figura 5.18: Resultados de simulación para RLS.

El valor de forgetting factor elegido para este caso es igual a 1. Simulink genera automáticamente el vector de ganancia de Kalman. Lo anterior no resulta muy conveniente en situaciones donde el sistema requiera modificar

vector de Kalman. En la **Figura 5.18** se ilustran las señales obtenidas a partir de dicho proceso, la señal **5.18a** representa la señal del ECG, la señal **5.18b** del ECG alterada por ruido Gaussiano, la señal **5.18c** es la repuesta de dicho filtro.

5.3.4. Discusión

En este apartado se realiza la comparación de los algoritmos empleados en el procesamiento del electrocardiograma en base al respuesta obtenida por cada uno de ellos. Además de realizar la comparación en cuanto a velocidad de convergencia y estabilidad, se hace también la comparación en cuanto a recursos empleados para su implementación.

De manera natural se sustenta que los filtros digitales fijos (en este caso filtro FIR e IIR) no resuelven el problema que se presenta al procesar señales de parámetros aleatorios. Ello queda más que evidente al observar la **Figura 5.19**. Si bien es cierto que estos filtros eliminan, o al menos atenúan, gran parte del ruido que altera al ECG, también es cierto que la señal a la salida del filtro no puede ser interpretada como un ECG.

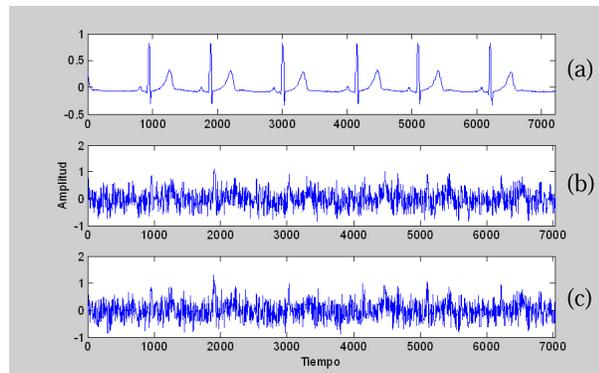


Figura 5.19: (a) Señal ECG original y respuesta de los filtros (b) FIR y (c) IIR.

Ahora bien, es de suma importancia elegir la opción que mejor se adapte

a las necesidades. Quedan como opciones el filtro FIR adaptable LMS y el FIR adaptable RLS. De estos dos es el segundo el que tiene una velocidad de convergencia mayor, pero la estabilidad es muy parecida, obviamente para cuando en el algoritmo LMS μ tiene un valor pequeño. La Figura 5.20 muestra la respuesta del filtro adaptable para cada algoritmo.

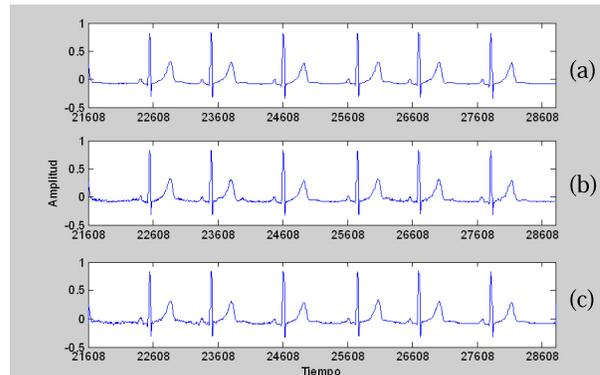


Figura 5.20: (a) Señal ECG original y respuesta del filtro FIR adaptable (b) LMS, (c) RLS.

Tal parece que fuera el algoritmo RLS la mejor elección, sin embargo como ya se ha visto este algoritmo exige velocidades de operaciones muy altas, ello implica el empleo de sistemas más robustos y en consecuencia más costosos. El algoritmo LMS es más sencillo lo que se refleja en un bajo consumo de recursos en cuanto a software y hardware se refiere. Es en base a lo anterior que se ha elegido como opción viable el empleo del filtro FIR adaptable LMS.

5.4. Emulación en el DSP 320c6711 de Texas Instruments

Gracias a que en la paquetería utilizada en este trabajo de tesis, existe un interconexión hacia diferentes DSP's, fue posible lograr la emulación, la

Figura 5.21 ilustra la forma de conexión entre dicho software y la tarjeta del DSP, así como el esquema básico del proceso de filtrado adaptable.

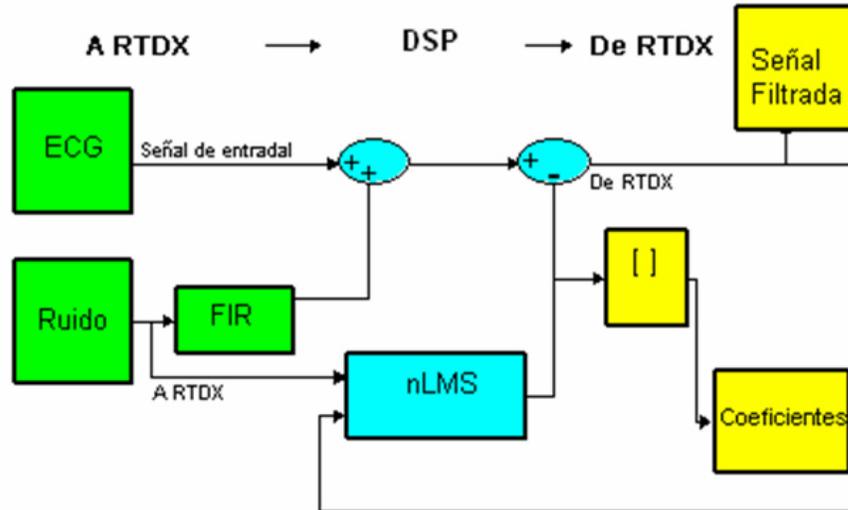


Figura 5.21: Diagrama de emulación usando el DSP y MATLAB.

5.4.1. Validación del Algoritmo Seleccionado

Los resultados obtenidos en esta fase están representados en la **Figura 5.22**, y de forma natural muestra la adaptación que logra el filtro. Cabe hacer mención que este proceso debido a que inicia con condiciones iniciales iguales a cero, tiende a que entre mayor sea el número de iteraciones, la señal se asemeja más a la deseada. En este caso, la señal **5.22a** muestra el ECG puro, mientras que la señal **5.22b** representa la sumatoria del ECG con el ruido, finalmente la señal **5.22c**, ilustra la salida del filtro adaptable LMS.

La emulación hecha demuestra que el sistema planteado es físicamente realizable y que el algoritmo promete un poco más al ejecutarlo en tiempo real, ya que en tal caso el computador solo será utilizado para desplegar los resultados. Esto permite entonces un aumento considerable de la velocidad

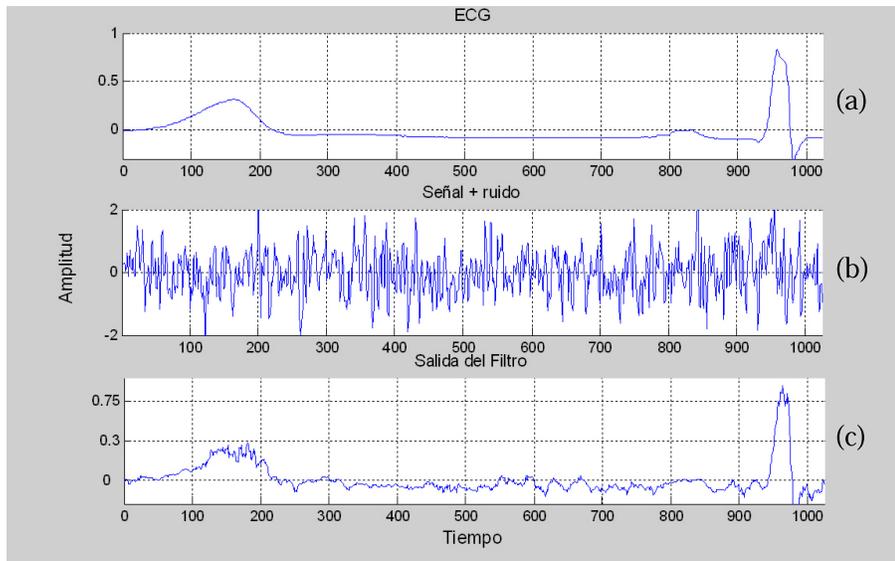


Figura 5.22: Resultados de emulación de un filtro FIR adaptable LMS, (a) Señal original ECG, (b) Señal con ruido y (c) Señal filtrada.

de procesamiento y en consecuencia una convergencia más rápida.

5.5. Resumen y Referencias

Este capítulo forma parte del corazón del trabajo de tesis, con los resultados presentados aquí se puede concluir que el objetivo general se cumple satisfactoriamente.

Hoy el diseño de filtros digitales se facilita enormemente por la disponibilidad de numerosas herramientas, dentro de las herramientas de computo para el procesamiento digital de señales se encuentran los programas de simulación donde los datos pueden analizarse, aplicando filtros digitales, y graficarse en una computadora. Para el propósito de este trabajo de tesis se utilizó el software de MATLAB 7.0 en conexión con un DSP.

La existencia de una literatura rica en el diseño de filtros digitales hace imposible citar todas las referencias importantes. Citaremos unas pocas. Algunos de los primeros trabajos en el diseño de filtros digitales fueron realizados por [8, 9, 11, 14, 23].

Las técnicas de diseño directo para filtros digitales has sido considerada en varios artículos, incluyendo [2, 4, 5, 23].

Capítulo 6

Conclusiones y Proyección Futura

La implementación del sistema descrito en esta Tesis planteado para el procesamiento digital de señales electrocardiográficas puede ser fácilmente adaptado a otros tipos de señales biomedicas. Sin embargo, el sistema necesita para su futuro desarrollo que exista una interacción entre usuarios para definir con exactitud los requisitos que debe cumplir y modificar entonces, cuando el caso lo requiriera, el algoritmo empleado.

A tenor de los resultados obtenidos en el Capítulo 5, las conclusiones que se pueden establecer son:

- En general. Los filtros digitales ofrecen mejores resultados que los analógicos. El principal inconveniente de los métodos basados en programación dinámica, es su elevado coste computacional que hace que el método cuando se ha de aplicar a la totalidad de las muestras de una señal sea recomendable en la práctica mediante el uso de un DSP, de arquitectura y memoria suficientemente disponible para dicha aplicación.
- Un sistema Lineal Invariante en el Tiempo definido a través de una

ecuación en diferencias puede ser implementado algorítmicamente de una gran diversidad de formas. Si se dispone de toda la precisión numérica necesaria, todas las implementaciones construidas a partir de retardos, multiplicadores y sumadores son equivalentes o muy parecidas. Pero cuando la precisión a la hora de representar los valores numéricos esta limitada, como en cuanto a los errores cometidos, el comportamiento ante la precisión finita es más óptima cuando se aplica una estructura adaptable.

- El algoritmo LMS permite adaptar los coeficientes en cancelación de ruido, de una forma muy sencilla y que resulta bastante robusta en escenarios adversos. La convergencia del algoritmo LMS resulta bastante precisa para el escenario del sistema planteado.
- La emulación del algoritmo LMS muestra la viabilidad del sistema planteado en este trabajo de tesis para su implementación a través de un DSP.

Por tanto, se concluye que la aplicación de filtros adaptables para el procesamiento digital de bioseñales ofrece una alternativa, ya que dichas señales contienen parámetros estadísticos desconocidos.

6.1. Proyección Futura

El algoritmo presentado en simulación y emulación en esta tesis, demuestra la viabilidad de la arquitectura planteada. Sin embargo, el sistema necesita para su futuro desarrollo, su implementación en tiempo real y definir con exactitud las especificaciones que debe cumplir.

Una vez implementado y realizado las pruebas pertinentes en tiempo real a pacientes, este algoritmo es fácilmente de adaptar a otro tipo de señales bioeléctricas.

Apéndice A

Artículo

Se ha realizado el presente artículo para ser sometido a un congreso nacional, éste aún por definir.

FILTRADO ADAPTABLE DE UN ECG USANDO UN DSP¹

Licona Rios D.² Lozano González G.² Ramos Velasco Luis E.³

³Centro de Investigación en Tecnologías de Información y Sistemas,
UAEH, Carretera Pachuca-Tulancingo, Km. 4.6, México
email: lramos@uaeh.reduaeh.mx

Resumen: En este artículo se presentan los resultados obtenidos en simulación y emulación del filtrado digital adaptable de una señal de electrocardiograma, haciendo uso del DSP TMS320c6711 de Texas Instruments. Los algoritmos utilizados hacen que la bioseñal presente la calidad adecuada que facilite el diagnóstico, tanto mediante técnicas de inspección visual como mediante técnicas actuales de inspección automática.

Palabras clave: Procesamiento adaptable, procesador digital de señales (DSP), electrocardiograma (ECG).

1. INTRODUCCIÓN

¹ Siempre que se debe procesar señales con propiedades estadísticas desconocidas, o variantes (situación muy común en las aplicaciones), se plantea como solución la utilización de filtros adaptables (Haykin, 1996).

Los procesadores digitales, las herramientas matemáticas y el desarrollo de diferentes tipos de algoritmos adaptables para el procesamiento digital de señales proporcionan un método alternativo para el procesamiento de una señal analógica y así hacen posible la realización de analizadores de señales (Haykin, 1996), (Marc, 1998).

Los DSP's tienen un gran número de aplicaciones en el campo del procesamiento digital de señales, y en ellas destaca la cancelación activa de ruido que se aplica cuando no es posible usar los procedimientos clásicos de eliminación de ruido (filtros selectivos en frecuencia), tal es el caso de los electroencefalogramas, electrocardiogramas y electromiogramas (Haykin, 1996).

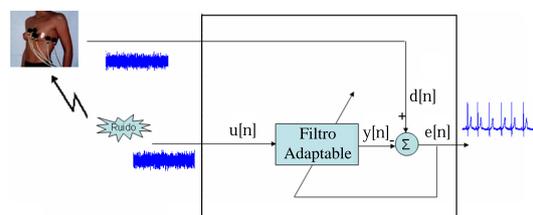


Figura 1. Esquema del filtrado adaptable de un ECG.

El esquema de la **Figura 1** muestra un sistema adaptable para el procesamiento de un ECG. Donde la señal de entrada es el ruido, la señal deseada es la señal de ECG interferida por ruido, la señal de error es la señal de ECG filtrada $y[n]$, menos la señal de salida $d[n]$, es decir; $e[n] = d[n] - y[n]$.

1.1 Generalidades del ECG

Un ECG es la representación gráfica de la tensión contra tiempo de la actividad cardiovascular de un paciente, que ofrece información acerca del estado del músculo cardíaco.

El origen se encuentra en las células del músculo cardíaco, las cuales pueden ser excitadas eléctricamente, produciéndose un flujo de iones a través

¹ Este trabajo fue apoyado por PROMEP con número de proyecto 103.5/05/2038

² Estudiantes de la carrera en Electrónica y Telecomunicaciones, de la UAEH, México.

de su membrana, lo cual induce un potencial eléctrico variable en el interior y en el exterior, mediante una polarización y despolarización miocárdica (Kilpatrick, 1994).

Durante la despolarización y repolarización miocárdica, aparecen las ondas del ECG. Las distancias entre deflexiones u ondas se denominan segmentos o intervalos. Un periodo del ECG perteneciente a un individuo sano, consiste en una onda P, el complejo QRS, la onda T y la onda U, tal como se muestra en la **Figura 2**.

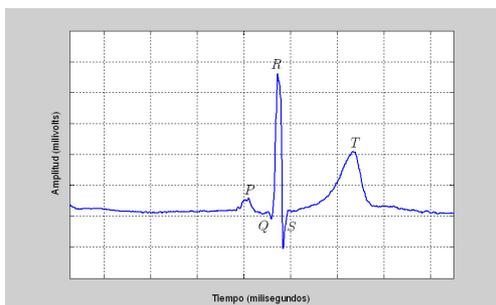


Figura 2. Ondas componentes de la señal electrocardiográfica.

Las porciones del electrocardiograma entre las deflexiones se denominan segmentos, y las distancias entre ondas se denominan intervalos.

2. TIPOS DE FILTROS

Un filtro digital realiza una transformación de la señal de entrada, alterando su contenido espectral, la magnitud y la fase para acomodarla a unas especificaciones deseadas. En esta sección se describen los dos filtros clásicos más utilizados en la cancelación activa de perturbaciones, que son: el filtro FIR (Finite Impulse Response) y el filtro IIR (Infinite Impulse Response), y posteriormente se revisan los algoritmos de adaptación (Proakis, 1998).

2.1 Filtros FIR

Los filtros de respuesta impulsional finita o FIR se usan en aplicaciones donde existe la necesidad de un filtro de fase lineal. Se caracterizan por tener una respuesta impulsional con longitud L finita. Es decir, el filtro es causal y su orden es $M = L - 1$, por tanto las muestras de la respuesta impulsional valen cero para valores del índice n negativos o superiores a M ($h[n] = 0$ para $n > M = L - 1$).

La señal de salida $y[n]$ se obtiene mediante la ecuación de convolución de la respuesta impulsional del sistema

$h[n]$ o la ecuación en diferencias finitas, donde basta con limitar el número de coeficientes b_k a $L = M + 1$:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (1)$$

La secuencia b_k son los coeficientes del filtro y no hay recursión, es decir, la salida depende sólo de la entrada y no de valores pasados de la salida siendo la respuesta por tanto una suma ponderada de valores pasados y presentes de la entrada, de ahí que se denomine Media en Movimiento (Moving Average).

El filtro FIR también se puede caracterizar por su función de transferencia

$$H(z) = \sum_{k=0}^M h(k)z^{-k} \quad (2)$$

Un filtro FIR siempre es estable, pues no añade polos al sistema. Por otro lado, no puede realizar funciones de transferencia racionales con un número finito de parámetros. En la Sección 2.3 se presentará un filtro FIR adaptable.

2.2 Filtros IIR

Los filtros IIR, de respuesta impulsional infinita, deben su nombre al hecho de que su salida puede depender tanto de la entrada como de la propia salida del filtro, de forma que el efecto de un impulso en la entrada puede no extinguirse en tiempo finito.

La ecuación diferencial que describe al filtro es

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = x[n] \quad (3)$$

Lo que da lugar a una función de transferencia que contiene solo polos que es:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (4)$$

Los filtros IIR son sistemas genéricos de procesamiento de señales. Su principal ventaja es que pueden realizar cualquier transformación lineal y discreta con un número finito de parámetros, resultando más eficientes que los filtros FIR. Por otro lado, tienen inconvenientes importantes, como la falta de garantía en su estabilidad o los problemas derivados de la cuantización y redondeo de sus coeficientes, mucho mayores que en el caso de los filtros FIR.

2.3 Algoritmos Adaptables

El elemento principal de procesamiento, en este artículo, es un filtro digital adaptable. Es decir, un filtro digital clásico, con la particularidad de que sus parámetros pueden variar a lo largo del tiempo. El encargado de modificar estos parámetros es un algoritmo de optimización que, con la finalidad de minimizar algún criterio, calcula constantemente los parámetros más adecuados. A continuación se resumen los algoritmos de adaptación más comunes (Marc, 1998).

2.3.1. Algoritmo LMS. El algoritmo LMS (Least-Mean-Square) pertenece a la familia de los algoritmos de *gradiente estocástico*, es un método de cálculo ampliamente utilizado especialmente en aplicaciones de procesamiento de señales en las que la velocidad de cálculo es alta.

La propiedad más resaltante del algoritmo LMS es su sencillez; ya que no necesita ninguna estimación de las funciones de correlación, ni requiere inversión de matrices.

Su expresión matemática está definida por

$$\mathbf{h}[n+1] = [1 - \mu r]\mathbf{h}[n] + \mu e[n]\mathbf{u}[n] \quad (5)$$

Donde μ es una constante que determina la velocidad de convergencia, y necesita ser ajustada empíricamente en cada caso.

No hay garantía de que se alcance el filtro óptimo, sino que después de un número arbitrario de etapas el filtro se moverá ruidosamente en torno al punto de mínimo error de la superficie de error.

Para cada iteración se realizan los siguientes pasos para un filtro FIR adaptable:

1. Calcular la muestra de salida del filtro FIR,

$$y[n] = \mathbf{h}^t[n]\mathbf{u}[n] = \sum_{k=0}^M \mathbf{h}_k[n]\mathbf{u}[n-k]$$

Donde t indica la transpuesta de $\mathbf{h}[n]$

2. Calcular la muestra de error, $e[n] = d[n] - y[n]$
3. Actualizar los coeficientes del filtro con la ecuación 5.

2.3.2. Algoritmo RLS. El algoritmo RLS (Recursive Least Squares) es la versión exacta del anterior algoritmo. Se utiliza el mismo criterio de optimización pero se calcula la solución exacta en cada iteración, siendo un algoritmo más complejo con parámetros adicionales.

Como resultado se obtiene una expresión definida así:

$$\mathbf{h}[n+1] = \mathbf{h}[n] + \mathbf{K}e[n] \quad (6)$$

donde \mathbf{K} es el *vector de ganancia de Kalman* y $e[n]$ representa la señal de error.

El vector de ganancia de Kalman está basado en los resultados de autocorrelación de los datos de entrada, y un factor llamado *forgetting factor* con un rango de entre 0 y 1 y provee unos *pesos de tiempo* de los datos de entrada tal que los pesos más recientes de la entrada son pesos más significativos que los datos pasados. Su expresión matemática es la siguiente:

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{R}_u^{-1}}{1 + \mathbf{u}[n]\mathbf{R}_u^{-1}\mathbf{u}[n]}\mathbf{U}[n] \quad (7)$$

donde $\mathbf{U}[n] = [u[n], u[n-1], \dots, u[n-M]]$

3. SIMULACIÓN

Las simulaciones fueron realizadas en (Matlab, 2004). La Figura 3 muestra los resultados obtenidos del filtro FIR adaptable LMS y el FIR adaptable RLS. De estos dos es el segundo el que tiene una velocidad de convergencia mayor, pero la estabilidad es muy parecida, obviamente para cuando en el algoritmo LMS μ tiene un valor pequeño.

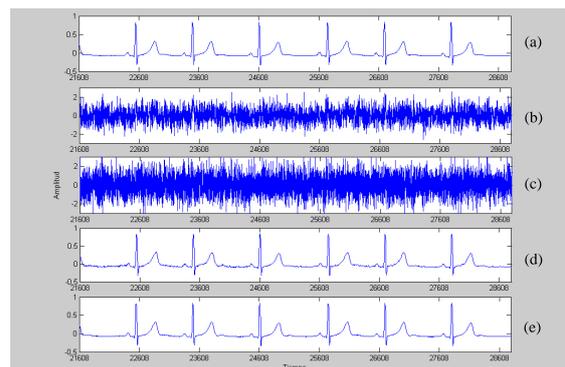


Figura 3. Cuadro comparativo (a) Señal de ECG óptima, (b) Señal de ruido aleatorio, (c) Señal ECG + ruido (d) Resultado del filtro FIR LMS (e) Resultado del filtro FIR RLS.

Tal parece que fuera el algoritmo RLS la mejor elección, sin embargo este algoritmo exige velocidades de operaciones muy altas, ello implica el empleo de sistemas más robustos y en consecuencia más costosos. El algoritmo LMS es más sencillo lo que se refleja en un bajo consumo de recursos en cuanto a software y hardware se refiere. Es en base a lo anterior que se ha elegido como opción viable el empleo del filtro FIR adaptable LMS para su emulación.

3.1 Emulación

Gracias a que en la paquetería utilizada en este artículo, existe un interconexión hacia diferentes DSP's, fue posible lograr la emulación, la **Figura 4** ilustra la forma de conexión entre dicho software y la tarjeta del DSP, así como el esquema básico del proceso de filtrado adaptable.

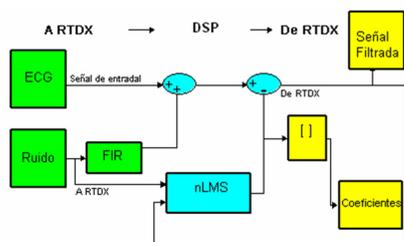


Figura 4. Diagrama de emulación usando el DSP y MATLAB.

Los resultados obtenidos en esta fase están representados en la **Figura 5**, y de forma natural muestra la adaptación que logra el filtro. Cabe hacer mención que este proceso debido a que inicia con condiciones iniciales iguales a cero, tiende a que entre mayor sea el número de iteraciones, la señal se asemeja más a la deseada. En este caso, la señal **5a** muestra el ECG puro, mientras que la señal **5b** representa la sumatoria del ECG con el ruido, finalmente la señal **5c**, ilustra la salida del filtro adaptable LMS.

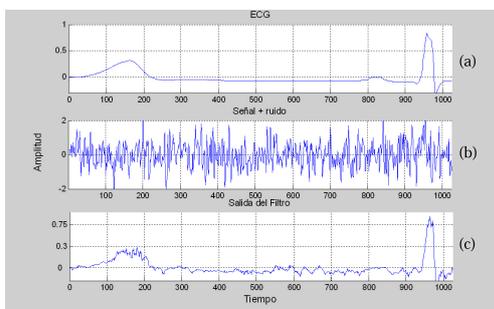


Figura 5. Resultados de emulación de un filtro FIR adaptable LMS, (a)Señal original ECG, (b)Señal con ruido y (c)Señal filtrada.

4. CONCLUSIONES

En este artículo se han presentado los resultados de la simulación y emulación de un mismo algoritmo de cancelación activa de ruido en una señal de electrocardiograma. Estos muestran un buen desempeño del esquema de filtrado utilizado para este fin.

Actualmente se está trabajando en la implementación de este trabajo en tiempo real utilizando el DSP TMS320c6711 de la familia de Texas Instruments.

5. REFERENCIAS

Haykin, Simon (1996) *Adaptive Filter Theory*; Prentice Hall.
Marc Moonen (1989). Introduction to Adaptive Signal Processing. Department of Electrical Engineering ESAT/SISTA
D. Kilpatrick y P.R. Johnston *Origin of the Electrocardiogram, IEEE, Engineering in Medicine and Biology*.
Proakis, John G. y Manolakis, Diminitis G. (1998) *Tratamiento Digital de Señales*; Prentice Hall.
Matlab 7, Simulink 6, *Signal Processing Blockset*.

Apéndice B

DSP TMS320c6711 de Texas Instruments

EL uso del DSP en este trabajo de tesis se sustenta sobre las ventajas que presenta frente a otros sistemas en el procesado digital de señales, dado que puede *adaptarse* fácilmente a cualquier cambio de las variables involucradas en un sistema dado, presenta muy baja distorsión en las señales de entrada y procesamiento de las mismas en tiempo real, tiene un alto índice de precisión, control sobre el comportamiento del hardware, tarjeta DSK donde se encuentran ya incluidos los convertidores sin necesidad de agregar hardware adicional para las conversiones analógicas de entrada, un robusto código de instrucciones que satisfacen cualquier aplicación de procesamiento digital de señales y que además son programables y reprogramables (no requiere el cambio del sistema de hardware), y permite un consumo de energía pequeño ya que emplea tecnología de estado sólido.

Este apéndice presenta una descripción general del kit de arranque del DSP TMS320c6711 [24], así como del microprocesador integrado en la tarjeta TMS320C50. El DSK 'C6x es una tarjeta de bajo costo, simple e independiente que permite experimentar y usar el DSP 'c6x0 para procesamiento de

señales en tiempo real. El DSP tiene un 'c6x en la tarjeta que permite la verificación completa de alta velocidad del código del 'c6x.

B.1. Generalidades de un DSP

Un DSP comprende los fundamentos matemáticos y algorítmicos que describen como procesar, en un ambiente de computo digital, información asociada a señales provenientes del mundo real.

- **Digital:** Sistema electrónico (digital) que opera con datos discretos representados en binario y de precisión finita.
- **Señal:** Un parámetro variable por medio del cual la información es transmitida en un sistema electrónico. Las señales son representadas de forma digital mediante secuencias de muestras.
- **Procesamiento:** la realización de operaciones en los datos mediante una secuencia de instrucciones programadas de acuerdo a un algoritmo que modifica dichos datos o extrae información de los mismos.



Figura B.1: *Diagrama básico de un DSP.*

Entonces un DSP es un sistema electrónico que realiza un procesamiento digital de señales físicas, obtenidas, a menudo, con el empleo de transductores y convertidores analógico-digitales. representativo se muestra en la **Figura B.1**.

B.2. Arquitectura

El DSP TMS320c6711 de Texas Instruments es un microprocesador específicamente para el procesamiento digital de señal. Sus características más básicas como el formato aritmético, la velocidad, la organización de su memoria y la arquitectura interna así como su costo y la disponibilidad de una amplia gama de herramientas de desarrollo, hacen que este dispositivo sea ideal para la emulación de los algoritmos que se obtuvieron en los capítulos 3 y 4. La Figura B.2 muestra la fotografía de un kit de desarrollo.

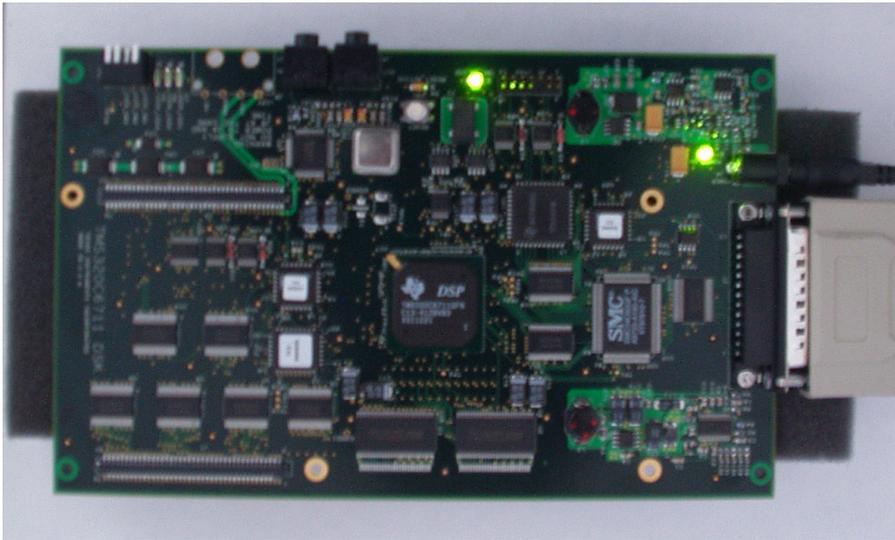


Figura B.2: DSP TMS320c6711.

B.2.1. Características y Opciones

El DSP TMS320c6711 ejecuta un máximo de 8 instrucciones de 32 bits, por ciclo. El CPU contiene 32 registros de propósito general, de 32 bits y 8 unidades funcionales. Este dispositivo tiene un conjunto completo de herramientas de desarrollo y optimización, que incluyen un compilador C efi-

ciente, un optimizador de ensamblador para simplificar la planificación y programación del lenguaje ensamblador, y un depurador con interfase gráfica basada en Windows, para visualizar las características de ejecución en el código fuente. Además, contiene una tarjeta de emulación de hardware compatible con la interfase del emulador TI XDS510. Estas herramientas cumplen con los estándares 1149.1999, revisión de acceso a puerto y arquitectura de verificación de límites, de la IEEE.

Las características de este dispositivo incluyen:

1. Un CPU avanzado VLIW (Very Long Instruction Word) con 8 unidades funcionales, que incluyen 2 multiplicadores de punto flotante y 6 ALU's (Unidades Lógico Aritméticas), cuatro de punto flotante y dos de punto fijo.
 - Ejecuta un máximo de 8 instrucciones por ciclo, **10 veces** más que los DSP típicos.
 - Permite rápido tiempo de desarrollo en diseños con código RISC altamente efectivos.
 2. Empaquetado de instrucción.
 - Obtiene el tamaño del código equivalente a las 8 instrucciones ejecutadas serialmente o en paralelo.
 - Reduce el tamaño del código, el consumo de energía y el fetch del programa.
 3. Ejecución condicional de todas las instrucciones.
 - Reduce los saltos costosos.
 - Incrementa el paralelismo para mantener un alto desempeño.
-

4. Ejecuta el código programado, en unidades funcionales independientes.
5. Proporciona soporte eficiente de memoria para una variedad de aplicaciones de 8, 16 y 32 bits de datos.
6. Proporciona soporte de normalización y saturación, en operaciones aritméticas claves con 8 bits.
7. Soporta operaciones comunes, halladas en aplicaciones de control y manipulación de datos, como: manipulación de campos, extracción de instrucción, activación, desactivación y conteo de bits.
8. Soporte de hardware para operaciones de punto flotante de doble y simple precisión con formato IEEE.
9. Multiplicación entera de 32 x 32 bits, con resultado de 32 o 64 bits.
10. Un máximo de 900 MFLOPS (operaciones de punto flotante por segundo) a 150 MHz.

Además estos dispositivos tienen la siguiente variedad de opciones en memoria y periféricos:

- Amplia memoria RAM para ejecución rápida de algoritmos.
 - Soporta interfaces para memoria externa de 32 bits (SDRAM, SBRAM, SRAM y otras memorias asíncronas) para aumentar el rango de memoria externa y maximizar el desempeño del sistema.
 - Acceso a la memoria y periféricos de los dispositivos a través del puerto host.
 - Controlador de multicanal EDMA.
 - Puerto serie multicanal.
 - Temporizador de 32 bits
-

B.2.2. Arquitectura

El DSP TMS320c6711 opera a 150MHz, ejecuta un máximo de 8 operaciones por ciclo en un tiempo de 6.7 ns, es de punto flotante y básicamente consiste en tres partes: El CPU, los periféricos y la memoria. Ocho unidades funcionales operan en paralelo (6 ALU's y dos multiplicadores), con dos conjuntos similares de cuatro unidades funcionales básicas. Las unidades se comunican usando un camino cruzado entre dos clasificaciones de registro, cada una de las cuales contiene 16 registros de 32 bits. La Figura B.3 muestra los bloques de dicho dispositivo.

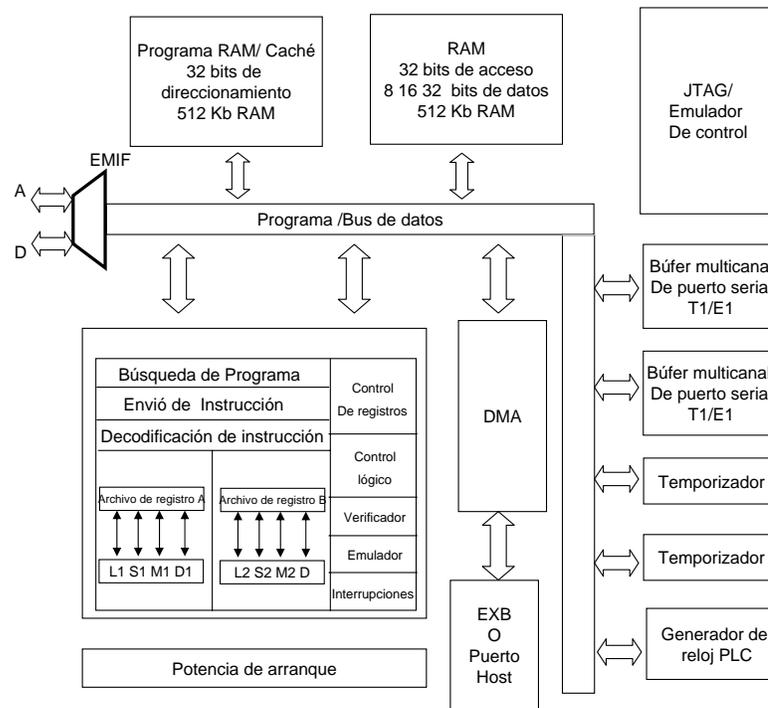


Figura B.3: Diagrama de bloques del DSP.

Unidad de Procesamiento Central CPU

El CPU de este DSP tiene una arquitectura de carga/almacenamiento, lo que significa que la única manera de acceder datos en memoria es con instrucciones de carga y almacenamiento.

El CPU contiene:

- Unidad *fetch* de programa
- Unidad de despacho de instrucción
- Unidad de decodificación de instrucción
- 32 registros de 32 bits
- Dos caminos de datos *path*, cada uno con cuatro unidades funcionales
- Registros de control
- Lógica de control
- Lógica de interrupción, emulación y prueba

Esta tiene dos caminos de datos A y B, cada camino tiene cuatro unidades funcionales y un archivo de registro que contiene 16 registros de 32 bits.

Las unidades funcionales ejecutan operaciones de lógica, corrimiento, multiplicación y direccionamiento de datos. Todas las instrucciones aceptan operaciones de carga y almacenamiento sobre los registros. Las dos unidades de direccionamiento de datos son exclusivamente responsables de toda la transferencia de datos entre los archivos de registros y la memoria.

Caminos de Datos del CPU

Los caminos de datos del CPU consisten de: dos archivos de registros de propósito general A y B, ocho unidades funcionales .L1, .L2, .S1, .S2 .M1,

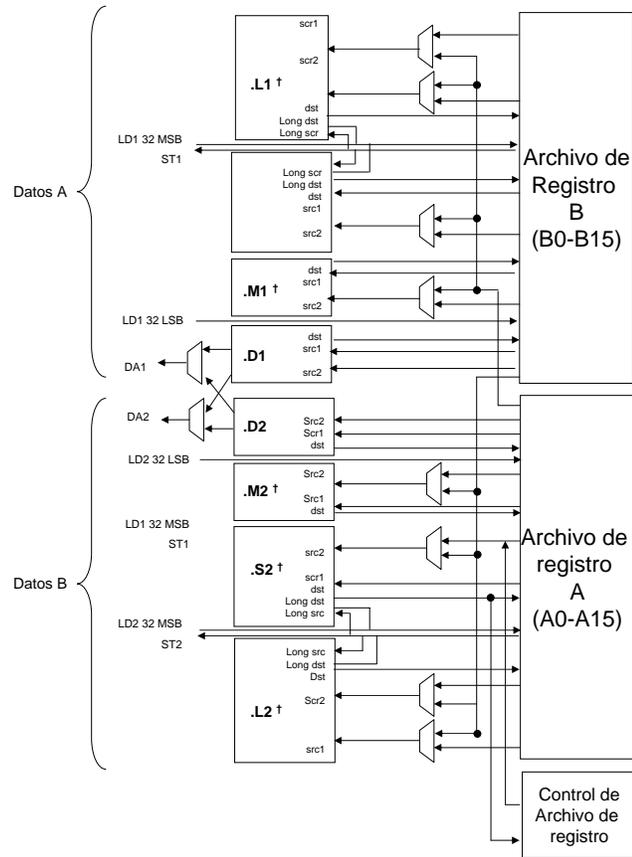


Figura B.4: *Caminos de datos del DSP c6711*

.M2, .D1 y .D2, dos caminos de lectura de memoria LD1 y LD2, dos caminos de almacenamiento en memoria ST1 y ST2, dos caminos cruzados entre los archivos de registros 1X y 2X, y dos caminos de direccionamiento de datos DA1 y DA2, como se muestran en la Figura B.4.

Archivos de Registros de Propósito General

Hay dos archivos de registros de propósito general (A y B) en los caminos de los datos. Cada uno de estos archivos contiene 16 registros de 32 bits

(A0-A15) para el archivo A y (B0-B15) para el archivo B. Los registros de propósito general pueden ser usados para manejar datos o punteros de direccionamiento de estos.

Los archivos soportan datos de 32 y 40 bits de punto fijo. Los datos de 32 bits, pueden estar contenidos en cualquier registro de propósito general. Los datos de 40 bits están contenidos en dos registros; los 32 bits menos significativos del dato (LSB) son colocados en un registro par y los restantes 8 bits más significativos del dato (MSB) son colocados en los ocho bits menos significativos del registro próximo superior (que siempre es un registro impar), también usa este par de registros para colocar valores de punto flotante de doble precisión de 64 bits.

Unidades Funcionales

Las ocho unidades funcionales en los caminos de datos de este dispositivo pueden ser divididas en dos grupos de cuatro; cada unidad funcional, en un camino de datos, es casi idéntica a la unidad correspondiente, en el otro camino, como se muestran en la Figura B.5.

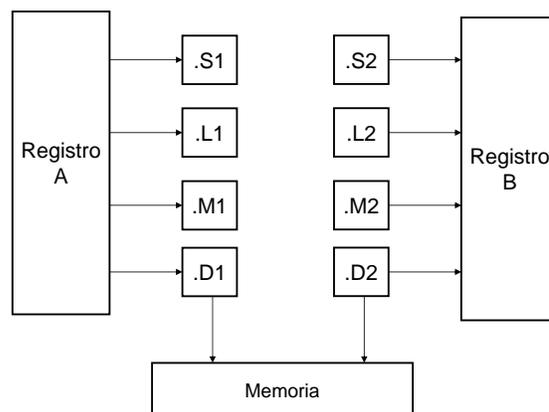


Figura B.5: *Unidades funcionales del DSP c6711.*

La mayoría de los caminos en el CPU, soportan operaciones de 32 bits, y algunas soportan operaciones largas (40 bits). Cada unidad funcional tiene su propio puerto de escritura de bits, en un archivo de registros de propósito general. Debido a que cada unidad tiene su propio puerto de escritura de 32 bits, las ocho unidades pueden ser usadas en paralelo en cada ciclo.

B.2.3. Archivos de Registros de Control

Una unidad puede leer de y escribir hacia los registros de control contenidos en el archivo de registros de control.

El DSP c6711 posee tres registros de configuración adicionales, para soportar operaciones de punto flotante. Los registros especifican los modos de redondeo de punto flotante. También contiene campos de bit para advertir si *src1* y *src2* son NaN (No es un número) o números desnormalizados.

Caminos entre Archivos de Registros

Cada unidad funcional lee directamente de y escribe hacia el archivo de registros, dentro de su propio camino de datos. Los archivos de registro son conectados a las unidades funcionales del archivo de registros opuesto, a través de los caminos cruzados 1X y 2X. Estos caminos cruzados permite a las unidades funcionales, de un camino de datos, acceder a operandos de 32 bits del lado opuesto. El camino 1X permite a las unidades funcionales del camino de datos A, leer su operando fuente del archivo de registros B, y viceversa.

B.2.4. Caminos de Memoria, Cargas y Almacenamiento

Hay dos caminos de 32 bits, para leer los datos de memoria en los registros de almacenamiento, además de tener un segundo camino de carga de 32 bits para ambos archivos de registros A y B. Este segundo camino permite leer simultáneamente dos registros de 32 bits en los lados A y B.

Caminos de Direccionamiento de Datos

Estos permiten generar direcciones de datos de un archivo de registros. Con eso se sostienen cargas y almacenamientos en memoria, desde el otro archivo de registros. Sin embargo, las cargas y almacenamientos ejecutados en paralelo, debe cargar a y de el mismo archivo de registro. Aunque también se puede utilizar un camino cruzado al registro opuesto.

B.2.5. Modos de Direccionamiento

Los modos de direccionamiento son lineales por defecto aunque también existe el modo de direccionamiento circular. El modo de direccionamiento se especifica con el registro modo de direccionamiento.

Con todos los registros se puede ejecutar el direccionamiento lineal, y sólo en ocho de ellos se puede ejecutar el direccionamiento circular.

Interrupciones

El CPU tienen 14 interrupciones, esta son reset, la interrupción no mas-carable (NMI) e interrupciones de la 4 a la 15. Estas interrupciones corresponden a las señales RESET, NMI e INT4-INT15 respectivamente, sobre los límites del CPU. Estas señales están ligadas directamente a los pines de

dispositivo, conectando periféricos al chip, o pueden ser desactivadas permanentemente.

Las características del servicio de interrupción incluyen:

- El pin IACK del CPU es usado para confirmar la recepción de una petición de interrupción.
- Los pines INUM0 INUM3 indican el vector de interrupción que está siendo utilizado
- Los vectores de interrupción son reubicables
- Los vectores de interrupción consiste en un paquete *fetch*. Con los paquetes se proporciona un rápido servicio

B.2.6. Periféricos

Los periféricos que son accesibles al usuario se configuran con un conjunto de registros de control mapeados en memoria. El controlador del bus de periféricos realiza el arbitraje para el acceso a los periféricos. La lógica de configuración de Boot está conectada por señales externas y la lógica de baja energía es accesible directamente por el CPU.

La Figura B.6 muestra los periféricos disponibles en el DSP TMS320c6711.

1. **Controlador EDMA.** Mejora la transferencia de datos entre rangos de direccionamiento en el mapa de memoria, además contiene 17 canales programables, así como un espacio de RAM para soportar múltiples configuraciones de futuras transferencias.
 2. **HPI.** Es un puerto paralelo por medio del cual, un procesador host puede acceder directamente al espacio en memoria del CPU. El dispositivo host tiene facilidad de acceso debido a que es el maestro de la
-

4. **Configuración del Boot.** El TMS320c6711 proporciona una variedad de configuraciones del boot, que determinan las acciones de inicialización que ejecuta el DSP, después del reset del dispositivo. Estas incluyen: cargas de código de un espacio externo de ROM sobre el EMIF y cargas del código a través del HPI/bus de un host externo.
 5. **2 McBSP.** El puerto serial multicanal con buffer (McBPS) está basado en las interfases estándar del puerto serie, es decir, el puerto puede almacenar muestras seriales en un buffer de memoria automáticamente, con la ayuda del controlador DMA/EDMA. Este también tiene capacidad de multicanal, compatible con los estándares de conexión de redes T1E1, SCSA y MVIP, que proporcionan:
 - Comunicación full-Duplex.
 - Registros de datos de doble buffer para flujo continuo de datos.
 - Tramado independiente y temporización para dispositivos y transmisión.
 - Interfase directa a codecs estándar, chips de interfase analógica (AICs) y otros dispositivos A/D y D/A conectados serialmente.
 6. Tiene las siguientes capacidades:
 - a) Interfase directa a:
 - Tramas T1/E1
 - Dispositivos conforme a *ST - BUSTM*
 - Dispositivos conforme a IOM-2
 - Dispositivos conforme a AC97
 - Dispositivos conforme a IIS
 - Dispositivos *SPITM*
-

- b) Transmisión y recepción multicanal de 128 canales
 - c) Un selector del ancho del tamaño del dato, que incluye 8, 12, 16, 20, 24, y 32 bits
 - d) Ley - μ y Ley -A de compasión
 - e) Transferencia inicial de 8 bits con LSB (bit menos significativo) ó MSB (bit más significativo)
 - f) Polaridad programable para ambas tramas de sincronización y relojes de datos
 - g) Reloj interno altamente programable y generación de trama
7. **TIMER.** El DSP c6711 tiene dos timer de propósito general que son usados para:
- a) Eventos del timer
 - b) Eventos de contador
 - c) Generador de pulsos
 - d) Interrupción de pulsos
 - e) Enviar eventos de sincronización a el controlador DMA/EDMA
8. **Selector de Interrupción.** El conjunto de periféricos del DSP producen de 14 a 16 fuentes de interrupción. El selector de interrupción, también permite cambiar la polaridad de entrada para la interrupción externa.
9. **Lógica de Bajo Consumo de Energía.** Esta permite reducir el reloj para disminuir el consumo de energía. La mayoría de la potencia de operación de la lógica CMOS, se disipa durante la conmutación del circuito de un estado lógico a otro.
-

Apéndice C

Producto Interno y Principio de Mínimos Cuadrados

EN este apéndice se proporciona una breve revisión de las propiedades del producto interno, y el principio de mínimos cuadrados.

C.1. Producto Interno

Se define *el producto interno* (o producto punto) $\langle x, y \rangle$ entre dos funciones complejas $x(t)$ y $y(t)$ en el intervalo (a, b) (que puede ir desde $-\infty$ hasta ∞) como

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y^*(t)dt$$

El producto interno cumple con las siguientes propiedades:

1. $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle^*$
2. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$

$$3. \quad \langle x + y1, y2 \rangle = \langle x, y1 \rangle + \langle x, y2 \rangle$$

$$4. \quad \langle cx, y \rangle = c \langle x, y \rangle$$

$$5. \quad \langle x, cy \rangle = c^* \langle x, y \rangle$$

$$6. \quad \langle x, x \rangle = \int_a^b |x(t)|^2 dt = E_x$$

$$7. \quad |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Se dice que dos funciones $x(t)$ y $y(t)$ son *ortogonales* en un intervalo (a, b) si su producto interno en ese mismo intervalo es cero; es decir si

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y^*(t)dt = 0$$

Un conjunto de funciones $\{\phi_k(t)\}$, $k = 0, 1, \dots$ se dice que es *ortogonal* si

$$\langle \phi_k, \phi_i \rangle = \begin{cases} E_k & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

y se dice que es *ortonormal* si es ortogonal y además $E_k = 1, k = 0, 1, \dots$

C.2. El Principio de Mínimos Cuadrados

Se desea aproximar una función compleja arbitraria $x(t)$ en el intervalo (a, b) mediante una combinación lineal $\hat{x}(t)$ de un conjunto de M funciones dadas $\{\phi_k(t)\}$ $k = 0, 1, \dots, M - 1$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=0}^{M-1} c_k \phi_k$$

y el error de aproximación se define como

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{M-1} c_k \phi_k(t)$$

Así, el objetivo es encontrar las M constantes c_k (posiblemente complejas) de manera que minimicen el error cuadrático medio resultante ξ dado por

$$\xi = \int_a^b |e(t)|^2 dt = \int_a^b \left| x(t) - \sum_{k=0}^{M-1} c_k \phi_k(t) \right|^2 dt$$

- Si todas las señales son reales, ξ es mínimo cuando

$$\frac{\partial \xi}{\partial c_i} = -2 \int_a^b \left[x(t) - \sum_{k=0}^{M-1} c_k \phi_k(t) \right] \phi_i(t) dt = 0; i = 0, 1, \dots, M-1$$

o equivalente

$$\sum_{k=0}^{M-1} c_k \int_a^b \phi_k(t) \phi_i(t) dt = \int_a^b x(t) \phi_i(t) dt; i = 0, 1, \dots, M-1$$

Las relaciones anteriores pueden reescribirse más compactamente con la definición del producto interno entre funciones, así

$$\begin{aligned} \xi &= \langle e, e \rangle = \langle e, x - \hat{x} \rangle \\ \langle e, \phi_i \rangle &= 0; \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \\ \sum_{k=0}^{M-1} \langle \phi_k, \phi_i \rangle &= \langle x, \phi_i \rangle; \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned}$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \dots & \langle \phi_{M-1}, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \dots & \langle \phi_{M-1}, \phi_1 \rangle \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \langle \phi_0, \phi_{M-1} \rangle & \langle \phi_1, \phi_{M-1} \rangle & \dots & \langle \phi_{M-1}, \phi_{M-1} \rangle \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x, \phi_0 \rangle \\ \langle x, \phi_1 \rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \langle x, \phi_{M-1} \rangle \end{bmatrix}$$

Observe que la matriz de correlaciones $\langle \phi_k, \phi_i \rangle$ es una matriz de Hermit.

- Las relaciones anteriores pueden extenderse a señales complejas, con lo que establece en general el siguiente *principio de ortogonalidad*: El error cuadrático medio ξ es mínimo cuando el error resultante $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ es ortogonal a cada una de las funciones $\phi_i(t)$

$$\langle e, \phi_i \rangle = \langle x - \hat{x}, \phi_i \rangle = 0$$

Corolario del principio de ortogonalidad: Cuando el error cuadrático medio ξ es mínimo, el estimado de la función deseada $\hat{x}(t)$ es ortogonal al error resultante $e(t)$

$$\langle e, \hat{x} \rangle = \langle x - \hat{x}, \hat{x} \rangle = 0$$

Es por esto que la aproximación $\hat{x}(t)$ puede considerarse como la proyección $x(t)$ en un espacio M -dimensional S_k de funciones $\phi_k(t)$. Además, de aquí también se desprende que el error cuadrático medio mínimo estará dado por

$$\xi = \langle x, x \rangle - \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle = E_x - E_{\hat{x}}$$

Glosario

Aurícula Cavidad del corazón que recibe el flujo sanguíneo. Lo transmite al ventrículo, que se encarga de bombearlo al sistema circulatorio.

Auriculoventricular Relativo a la conexión entre aurícula y ventrículo.

Cardíaco Relativo al corazón.

Cardiovascular Relativo al corazón y a los vasos sanguíneos.

Cefálica Cada uno de los vasos o conductos por donde retorna la sangre al corazón.

Electrodo Extremo de un conductor en contacto con un medio, al que lleva o del que recibe una corriente eléctrica.

Hidroelectrolítico Relativo al agua y a los electrolitos.

Isoeléctrico De iguales propiedades eléctricas.

Membrana Tejido flexible, elástico, delgado que en los seres orgánicos cubre vísceras, y absorbe o segrega humores.

Miocárdio Parte muscular del corazón de los vertebrados, situada entre el pericardio y el endocardio.

Miocarditis Inflamación del miocardio.

Pericardio Membrana que recubre externamente el corazón.

Permeable Que puede ser penetrado por el agua u otro fluido

Sinusal De un nódulo específico del tejido del corazón.

Sístole Movimiento de contracción del corazón y de las arterias para empujar la sangre que contienen.

Ventrículo Cada una de las dos cavidades inferiores del corazón, de donde salen las arterias aorta y pulmonar.

Bibliografía

- [1] Analog Devices,
ADSP-21000 FAMILY APPLICATION HANDBOOK,
Volumen 1,
1994.

- [2] Bander, J.W., Bardakjian, B.J.,
LEAST PTH OPTIMIZATION OF RECURSIVE DIGITAL FILTERS,
IEEE,
1973.

- [3] B.D.O. Anderson, J.B. Moore,
OPTIMAL FILTERING,
Prentice Hall,
1979.

- [4] Brophy, F., Salazar, A.C.,
CONSIDERATIONS OF THE PADE APPROXIMATION TECH-
NIQUE IN THE SYNTHESIS OF RECURSIVE DIGITAL FILTERS,
IEEE,
1973.

- [5] Burrus, C.S., Parks, T.W.,
DFT/FFT AND CONVOLUTION ALGORITHMS, Wiley,
1970.
- [6] DeRusso P.M.,
STATE VARIABLES FOR ENGINEERS,
Wiley, 1965.
- [7] D. Kilpatrick y P.R. Johnston,
ORIGIN OF THE ELECTRCARDOGRAM,
IEEE Engineering in Medicine and Biology,
Agosto/Septiembre 1994.
- [8] Gibbs, A.J.,
THE DESIGN OF DIGITAL FILTERS,
Aust. Telecommun,
1970.
- [9] Golden,R.M., Kaiser, J. F.,
DESIGN OF WIDEBAND SAMPLED DATA FILTERS,
Bell Syst,
1964.
- [10] Haykin, Simon,
ADAPTIVE FILTER THEOTY,
Prentice-Hall,
1996.
-

-
- [11] Helms, H.D.,
FAST FOURIER TRANSFORMS METHOD OF COMPUTING DIFFERENCE EQUATIONS AND SIMULATING FILTERS,
IEEE,
1967.
- [12] H. Harold,
DIAGNÓSTICO ELECTROCARDIOGRÁFICO Y VECTOCARDIOGRÁFICO,
Salvat,
1990.
- [13] Johnson, Johnny R.,
INTRODUCTION TO DIGITAL SIGNAL PROCESSING,
Prentice Hall,
1989.
- [14] Kaiser J.F.,
DIGITAL FILTERS,
Wiley,
1966.
- [15] Madiseti, Vijay K.,
VLSI DIGITAL SIGNAL PROCESSOR, An Introduction to Rapid Prototyping and Design Synthesis,
Butterworth-Heinemann,
1995.
-

- [16] Marc Moonen,
INTRODUCTION TO ADAPTIVE SIGNAL PROCESSING,
Department of Electrical Engineering · ESAT/SISTA K.U. Leuven,
Leuven, Belgium,
1998.
- [17] Mariño, Vallverdú, Rodríguez Moreno,
TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL,
1999.
- [18] Oppenheim, Alan V., Schaffer, Ronald W. con Buck, John R.,
DISCRETE-TIME SIGNAL PROCESSING,
Prentice Hall,
2^a ed.,
1999.
- [19] Oppenheim, Alan V., Willsky, Alan S.,
SEÑALES Y SISTEMAS,
Prentice Hall,
1983.
- [20] P. Laguna,
NUEVAS TÉCNICAS DE PROCESADO DE SEÑALES ELECTRO-
CARDIOGRÁFICAS:
Aplicación a Registros de Larga Duración,
Tesis Doctoral. Instituto de Cibernética de Cataluña.
Octubre 1990.
-

-
- [21] Proakis, John G., Manolakis, Dimitris G.,
TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES,
Principios Algoritmos y Aplicaciones,
Prentice Hall,
3ª ed., 1998.
- [22] Pšnička, Bohumil, et.al.,
PRÁCTICAS DE LABORATORIO CON MICROPROCESADORES
TMS320C6711,
Facultad de Ingeniería Eléctrica de la U.N.A.M.
- [23] Shanks, J.L.,
RECURSION FILTERS FOR DIGITAL PROCESSING,
Geophysics,
1967.
- [24] TMS320C6711 DSP STATER KIT. USER´S GUIDE.
Digital Signal Processor,
Texas Instruments,
2004.
- [25] MATLAB 7.0, Simulink 6, Signal Processing Blockset
- [26] www.mathworks.com
- [27] www.physionet.org
- [28] www.udlap.mx
-