



---

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**PRINCIPIOS DE COMUNICACIÓN EN AM**

M O N O G R A F Í A  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
INGENIERO EN ELECTRONICA Y  
TELECOMUNICACIONES

ASESOR: M. en C ELÍAS VARELA PAZ

PACHUCA, HIDALGO; 2005

---

---

*Mientras sigas sintiendo que las estrellas son algo que están por encima de ti, continuaras sin tener la mirada del hombre de conocimiento*

*Frieddrich Nietzsche*

*A mi papá Germán*

*A mi mamá Judith*

*Por tu honestidad y pasión por lo que haces, con tu ejemplo me das fuerzas para continuar por mis aspiraciones*

*Por tu carácter, y tu disciplina, no se te olvide que me motivas a seguir adelante aun en los momentos difíciles*

*A mis hermanos Adriana y Kirely*

*Por todas las vivencias que hemos compartido, el apoto y por no apoyar mis acciones gracias*

*A todos los que no confiaron en mí*

*Por ser una motivación de superación personal y darme inspiración para no abandonar mis objetivos. No dejen de estar en mi camino*

*A mis amigos*

*Por compartir tantas experiencias tales como desveladas, alegrías, disgustos y tristezas en esta etapa de mi vida*

*A Maricarmen*

*Por estar ahí en el momento justo y la hora adecuada cuando necesité el apoyo y compañía de una amiga incondicional*

*Quien logra su ideal, precisamente por ello lo supero*

*Friedrich Nietzsche*

## **INTRODUCCIÓN**

Esta monografía presenta a los estudiantes una explicación introductoria de los sistemas de comunicación, destacando el diseño y la modulación de señales. Por tanto, el enfoque se orienta hacia un acucioso desarrollo de los principios matemáticos en los que se basan tales sistemas, utilizando, siempre que es posible, ejemplos de una gran variedad de sistemas de comunicación actuales, que van desde la radiodifusión comercial y los sistemas telefónicos hasta la telemetría por satélite y el radar.

Es difícil imaginar cómo sería la vida moderna sin el fácil acceso a medios de comunicación confiables, económicos y eficientes. Los sistemas de comunicación se hallan dondequiera que se transmita información de un punto a otro. El teléfono, la radio y la televisión son ejemplos cotidianos de sistemas de comunicación. Hay sistemas de comunicación más complicados que guían aviones, naves espaciales y trenes automáticos; mientras que otros proporcionan noticias frescas de todo el mundo, a menudo por medio de satélites; la lista de ejemplos podría continuar indefinidamente. No es exagerado decir que los sistemas de comunicación actuales no sólo son necesarios para los negocios, la industria, la banca y la divulgación de información al público, sino también esenciales para el bienestar y la defensa de las naciones.

El propósito de este trabajo es presentar un estudio introductorio de los sistemas de

---

---

comunicación. Por "comunicación" se entiende la conducción o transmisión de información de un lugar y un tiempo a otros. Ciertamente esta definición no es muy precisa, pero el tema de la comunicación es muy amplio. Puede, por ejemplo, significar cualquier cosa, desde una conferencia telefónica hasta el uso de gestos adecuados, énfasis y buena dicción en un discurso; desde una señal de humo hasta una transmisión por satélite. El común denominador de estos ejemplos es que existe información transmitida que es de importancia para el receptor.

Este estudio de las comunicaciones se restringirá a la que abarca el programa de sistemas de comunicación ; las señales eléctricas son relativamente fáciles de controlar comparadas, por ejemplo, con el fuego para las señales de humo).

En el más amplio sentido, debe considerarse a la luz como perteneciente a esta clase, dado que se encuentra en el espectro electromagnético. Así, para largas distancias es apropiado el estudio de las comunicaciones a través de señales eléctricas. En los siguientes capítulos veremos como han evolucionado desde las señales de humo hasta nuestros tiempos.

En el trabajo se verán los tipos de señales sus características tanto matemática como funcionales tales como periódica, no periódica, sinusoidal, diente de sierra onda cuadrada sus variantes. En el capítulo 2 hace también mención de la relación de señal con vectores

---

---

para un mejor entendimiento del tema.

En los siguientes capítulos se estudiarán análisis de fourier y su importancia con los sistemas y señales, ortogonalidad, convolución de señales y modulación.

## **ANALISIS DE SEÑALES**

### **OBJETIVO**

#### **GENERAL**

Desarrollar un apoyo didáctico, ilustrativo y comprensible de la teoría relacionada con el análisis de señales agrupando en el volumen la teoría matemática de una suficiente cantidad de ejercicios para alumno y catedráticos

#### **ESPECIFICO:**

- Desarrollar conceptual y organizativamente el programa que abarca la materia de telecomunicaciones I que se imparte en la actualidad en la carrera de Ingeniería de Electrónica y Telecomunicaciones.
- Ayudar tanto al maestro como al alumno a comprender de manera sencilla el desarrollo de la materia.

#### **JUSTIFICACION:**

Dado que se cursó la materia de Sistemas de señales I, y se observó la carencia de material didáctico y de apoyo para la comprensión de ésta por parte del alumno y catedrático.

La presente monografía busca facilitar la enseñanza de los Sistemas de comunicación electrónica, proporcionando material específico que reclama el programa de dicha materia. Proporcionando el material específico, donde contiene el programa de dicha materia.

Se realizó el acopio de información en este trabajo, pretendiendo cumplir con el objetivo de constituir una fuente para quienes se interesen en la materia o temas a fines; ya que los temas que abarca esta materia no se encuentra en una sola bibliografía

Al organizar el material se considero esencial que el estudiante se complemente con esta monografía ya que contiene ejercicios tanto resueltos como propuestos con base en los fundamentos del material del texto y esto le ayudara a profundizar la comprensión de los temas.

---

---

<b>CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES .....</b>	<b>2</b>
1.1 IMPORTANCIA Y FUNCION DE LA COMUNICACIÓN .....	2
1.2 ELEMENTOS GENERALES DE UN SISTEMA DE COMUNICACION: .....	3
1.2.1 SISTEMAS MÁS IMPORTANTES EN LA COMUNICACION.....	4
1.3 EVOLUCION DE LA COMUNICACIÓN HUMANA .....	5
1.3.1 COMUNICACIONES ELÉCTRICAS.....	7
1.4 MODOS DE TRANSMISIÓN .....	18
1.5 REDES DE TELECOMUNICACIONES.....	23
1.5.1 TIPOS DE REDES.....	23
1.5.1.1 Por distribución geográfica:.....	24
<b>CAPÍTULO 2 SEÑALES.....</b>	<b>27</b>
2.1 CARACTERÍSTICAS DE SEÑALES DE TEELCOMUNICACIONES. ....	27
2.1.2 CLASIFICACIÓN DE LAS SEÑALES .....	28
2.1.2.1 SEÑALES DE ENERGÍA, SEÑALES DE POTENCIA. ....	28
2.1.2.2 PERIÓDICA, NO PERIÓDICA. ....	30
2.2 FUNCIONES DE SEÑALES.....	31
2.2.1 LA FUNCIÓN SENOIDAL ARMÓNICA SIMPLE.....	31
2.2.2 SEÑAL SINUSOIDAL .....	33
2.2.4 SEÑAL DE ONDA CUADRADA.....	37
2.2.5 FACTOR DE FORMA. RELACIÓN ENTRE LAS SEÑALES PERIÓDICAS ANALÓGICAS Y LAS DIGITALES.....	38
2.2.6 FACTOR DE FORMA DE UNA FUNCIÓN DIENTE DE SIERRA.....	41
2.3 ANALISIS DE SEÑALES.....	42
2.3.1 ANALOGÍA ENTRE SEÑALES Y VECTORES .....	42
2.3.2 VECTORES.....	43
2.4 ORTOGONALIDAD.....	46
2.4.1 ORTOGONALIDAD EN EL DOMINIO DE FRECUENCIA. ....	50
2.4.2 ESPACIO ORTOGONAL DE VECTORES.....	57

---

---

---



---

<b>CAPÍTULO 3 ANÁLISIS DE FOURIER .....</b>	<b>67</b>
3.1 UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA .....	67
3.2 LA SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER .....	73
3.3 SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER.....	77
3.4 REPRESENTACION DE UNA FUNCION PERIODICA MEDIANTE LA SERIE DE FOURIER EN TODO EL INTERVALO $(-\infty < t < \infty)$ .....	80
3.5 EL ESPECTRO COMPLEJO DE FOURIER .....	82
3.6 REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN CUALQUIERA EN TODO EL INTERVALO $(-\infty, \infty)$ : LA TRANSFORMADA DE FOURIER .....	90
3.7 ALGUNAS OBSERVACIONES ACERCA DE LA FUNCIÓN DE ESPECTRO CONTINUO.....	96
3.8 REPRESENTACIÓN DE UNA SEÑAL EN EL DOMINIO DEL TIEMPO Y EN EL DE LA FRECUENCIA.....	99
3.9 EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.....	100
3.10 TRANSFORMADAS DE FOURIER DE ALGUNAS FUNCIONES ÚTILES .....	101
3.10.1. SEÑAL EXPONENCIAL BILATERAL $f(t) = e^{-a t }$ .....	103
3.10.2. LA FUNCIÓN PULSO RECTANGULAR .....	103
3.11 FUNCIONES SINGULARES .....	104
3.12 TRANSFORMADAS DE FOURIER QUE CONTIENEN FUNCIONES IMPULSO .....	111
3.12.1 TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCIÓN IMPULSO.....	111
3.12.2 TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA CONSTANTE.....	112
3.12.3 TRANSFORMADA DE $\text{sgn}(t)$ .....	113
3.12.4 TRANSFORMADA DE LA FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO $U(T)$ .....	115
3.12.5. SEÑALES SINUSOIDALES PERPETUAS $\cos \omega_0 t$ y $\text{sen } \omega_0$ .....	116
3.12.6. LA TRANSFORMADA DE UNA EXPONENCIAL PERPETUA.....	120
3.12.7 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA.....	121
3.13 ALGUNAS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER .....	127

---



---



---



---

3.13.1	<i>PROPIEDAD DE SIMETRÍA</i> .....	129
3.13.2	<i>PROPIEDAD DE LINEALIDAD</i> .....	131
3.13.3	<i>PROPIEDAD ESCALAR</i> .....	131
3.13.4	<i>PROPIEDAD DE DESPLAZAMIENTO EN LA FRECUENCIA</i> .....	136
3.13.5	<i>PROPIEDAD DE DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO</i> .....	138
3.16.6	<i>DIFERENCIACIÓN EN EL TIEMPO Y LA FRECUENCIA</i> .....	141
3.13.7	<i>DIFERENCIACIÓN EN LA FRECUENCIA</i> .....	147
3.14	<i>TEOREMA DE PARSEVAL PARA SEÑALES DE POTENCIA</i> .....	149
<b>CAPÍTULO 4 CONVOLUCIÓN</b> .....		<b>198</b>
4.1	<i>EL TEOREMA DE LA CONVOLUCIÓN</i> .....	198
4.1.1	<i>TEOREMA DE LA CONVOLUCIÓN EN EL TIEMPO</i> .....	199
4.1.2	<i>TEOREMA DE LA CONVOLUCION EN LA FRECUENCIA</i> .....	199
4.2	<i>ALGUNAS RELACIONES DE LA CONVOLUCIÓN</i> .....	201
4.2.1	<i>LEY CONMUTATIVA</i> .....	201
4.2.2	<i>LEY DISTRIBUTIVA</i> .....	202
4.2.3	<i>LEY ASOCIATIVA</i> .....	202
4.3	<i>INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA CONVOLUCIÓN</i> .....	203
4.4	<i>CONVOLUCIÓN DE UNA FUNCIÓN CON LA FUNCIÓN IMPULSO UNITARIO</i> .....	207
4.4.1	<i>TEMAS LTI DISCRETOS: LA SUMA DE CONVOLUCIÓN</i> .....	209
4.4.1.1	<i>LA REPRESENTACIÓN DE SEÑALES DISCRETAS EN TÉRMINOS DE LOS IMPULSO</i> .....	209
4.4.1.2	<i>LA RESPUESTA AL IMPULSO UNITARIO DISCRETO Y LA REPRESENTACIÓN DE LA SUMA DE CONVOLUCIÓN DE SISTEMAS LTI</i> .....	212
4.5	<i>SISTEMAS LTI CONTINUOS: LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN</i> .....	219
4.5.1	<i>LA REPRESENTACIÓN DE SEÑALES CONTINUAS EN TÉRMINOS DE LOS IMPULSOS</i> .....	220
4.5.2	<i>LA RESPUESTA AL IMPULSO UNITARIO CONTINUO Y LA REPRESENTACIÓN DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN DE SISTEMAS LTI</i> .....	226

---



---

---

---

<b>CAPÍTULO 5 MODULACIÓN .....</b>	<b>233</b>
5.1 INTRODUCCIÓN.....	233
5.1.1 RAZONES PARA MODULAR.....	235
5.1.2 PROCESO DE MODULACION .....	238
5.1.3 FACTORES QUE AFECTAN EL CANAL A LA SEÑAL .....	239
5.1.4 RELACIÓN ENTRE LA MODULACIÓN Y EL CANAL.....	240
5.2. MODULACIÓN AM BALANCEADO - DEFINICIÓN DE MODULACIÓN POR AMPLITUD... 243	
5.3. DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA .....	243
5.4. MODULACIÓN AM ESTÁNDAR .....	248
5.4.1 COMPARACIÓN ENTRE AM BALANCEADO Y AM ESTÁNDAR.....	252
5.4.2 ÍNDICE DE MODULACIÓN.....	252
5.5. POTENCIA Y CORRIENTE EN LAS BANDAS LATERALES.....	255
5.6. DEMODULACIÓN O DETECCIÓN .....	257
5.6.1 DETECCIÓN AM BALANCEADO.....	261
5.7. CORRIMIENTO DE ESPECTRO (DESPLAZAMIENTO DE FRECUENCIA).....	265
5.8. CIRCUITOS DE APLICACIÓN.....	267
5.8.1 MODULADOR BALANCEADO BÁSICO.....	267
5.8.2 MODULADOR ESTÁNDAR BÁSICO .....	269
5.8.3 CONVERTOR O MEZCLADOR DE FRECUENCIA.....	270
5.9. DIAGRAMAS BÁSICOS DE TRANSMISOR Y RECEPTOR DE AM.....	272
5.9.1 EL TRANSMISOR.....	272
5.9.2 EL RECEPTOR .....	273
5.10 MODULACION DE AMPLITUD: PORTADORA SUPRIMIDA .....	275
5.10.1 POTENCIA DE LA PORTADORA Y LA BANDA LATERAL EN AM .....	279
5.10.2 GENERACIÓN DE SEÑALES DSB-LC .....	282
5.11 MODULADOR (RECTIFICADOR) DE CONMUTACIÓN.....	282

---

---

---



---

5.11.1	MODULADOR QUE USA NO LINEALIDADES .....	285
5.11.2	DEMODULACIÓN (DETECCIÓN) DE SEÑALES DSB-LC (AM).....	286
5.11.2.1	DETECTOR DE ENVOLVENTE.....	286
5.11.3	OTROS MÉTODOS DE DETECCIÓN.....	288
5.12.-	MODULACION EN BANDA LATERAL UNICA(SSB).....	289
5.12.1	ANÁLISIS TEMPORAL Y FRECUENCIAL DE UNA SEÑAL SSB .....	291
5.12.2	MODULADORES SSB.....	293
5.12.2.1	MÉTODOS POR DISCRIMINACIÓN EN FRECUENCIA .....	293
5.12.2.2	MODULACIÓN POR DISCRIMINACIÓN DE FASE.....	294
5.12.3	DEMODULACIÓN DE ONDAS SSB.....	295
5.12.3.1	DETECCIÓN SÍNCRONA:.....	295
5.12.3.2	DETECCIÓN DE SSB CON UN DETECTOR DE ENVOLVENTE.....	296
5.13	MODULACION EN DOBLE BANDA LATERAL (DSB).....	297
5.13.1	ESPECTRO DE UNA SEÑAL DSB .....	298
5.13.2	CÁLCULO DE POTENCIA DE LA SEÑAL DSB .....	299
5.13.3	MODULADORES DSB .....	300
5.13.3.1	MODULADORES QUE UTILIZAN ELEMENTOS NO LINEALES:.....	301
5.13.4	DEMODULADORES DSB.....	303
5.13.4.1	DETECTOR SÍNCRONO.....	303
5.13.4.2	DETECCIÓN HOMODINA:.....	304
5.13.4.3	RECEPTOR DE PORTADORA INYECTADA:.....	304
5.14	MODULACION EN BANDA LATERAL RESIDUAL Ó VESTIGIAL(VSB).....	305
5.14.1	REPRESENTACIÓN EN TIEMPO DE UNA SEÑAL VSB.....	307
5.14.2	MODULADORES VSB.....	308
5.14.3	DEMODULADORES VSB .....	310
<b>5.15</b>	<b>MODULACIÓN DE FRECUENCIA .....</b>	<b>311</b>
5.15.1	MODULACIÓN DE FRECUENCIA DE BANDA ANGOSTA.....	311
5.15.2	MODULACIÓN DE FRECUENCIA DE BANDA ANCHA .....	315

---



---

---

---

<b>ANEXO .....</b>	<b>319</b>
PROBLEMAS DE CAPITULO 2 (SEÑALES) .....	319
PROBLEMAS DEL CAPITULO 3 (ANALISIS DE FOURIER) .....	332
PROBLEMAS CAPITULO 4 (CONVOLUCION) .....	344
RESPUESTAS PROBLEMAS CAPITULO 4 (CONVOLUCION) .....	344
<u>RESPUESTAS</u> PROBLEMAS CAPITULO 3 (CONVOLUCION) .....	344
<u>RESPUESTAS</u> PROBLEMAS CAPITULO 4 (CONVOLUCION) .....	344

---

---

---

---

## INDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Esquema general de un sistema de comunicación.....	3
Figura 1.2 Sistema de comunicación.....	19
Figura 1.3 Sistema de un sistema de transmisión semiduplex.....	21
Figura 1.4 Sistema de comunicación que usa una transmisión duplex completa.....	23
Figura 2.1 Algunas señales de energía .....	30
Figura 2.2 Alternador de una espira.....	32
Figura 2.3 Generación de un ciclo de señales sinusoidales simple.....	33
Figura 2.4 Señal sinusoidal.....	34
Figura 2.5 Señal sinusoidal de frecuencia igual a 6Hz.....	35
Figura 2.6 dos Señales sinusoidales con ángulos fase que difieren en $\pi/2$ .....	36
Figura 2.7 Señal de onda cuadrada.....	37
Figura 2.8 Función diente de sierra.....	42
Figura 2.9 Vectores.....	43
Figura 2.10 Magnitud vectorial.....	44
Figura 2.11 Construcción en el dominio de tiempo de una señal OFDM.....	48
Figura 2.12 Aproximación $f(t)$ .....	54
Figura 2.13 Determinación grafica de la componente de la forma de onda $f_2(t)$ en una señal $f_1(t)$ .....	56
Figura 2.14 Espacio ortogonal de vectores.....	57
Figura 2.15 Aproximación a una función rectangular mediante funciones ortogonales.....	65
Figura 3.0.1 Modos normales de una cuerda en vibración.....	69
Figura 3.0.2 Jean Baptiste Joseph Fourier (foto JBJ Fourier) .....	71
Figura 3.1 función $f(t)$ mediante una serie trigonometría de Fourier.....	75
Figura 3.2 Onda seno rectificadas.....	82

---

---

---



---

Figura 3.3 Espectro de línea de una onda seno rectificada.....	84
Figura 3.4 Función rectangular.....	87
Figura 3.5 Función de muestreo $S_a(x)$ .....	88
Figura 3.6 Frecuencias fundamentales.....	89
Figura 3.7 Suma de funciones exponenciales en todo intervalo $(-\infty, \infty)$ .....	91
Figura 3.8 Periodo $t$ cuando tiende a $\infty$ .....	92
Figura 3.9 Suma de las áreas rectangulares.....	95
Figura 3.10 a) Viga cargada en puntos discretos b) Viga cargada continuamente.....	97
Figura 3.11 Representaciones de $e^{-at} u(t)$ en el dominio del tiempo y en el dominio de frecuencia.....	102
Figura 3.13 a) Función pulso rectangular b) Transformada de la función rectangular.....	104
Figura 3.14 Fuente con corriente en el capacitor.....	105
Figura 3.15 a) Representación de voltaje no ideal b) polo de corriente en el capacitor a fuente no ideal del voltaje.....	106
Figura 3.16 Secuencias del pulsos cuando varia.....	107
Figura 3.17 a) Secuencias de pulsos de Gauss b) Secuencias de pulsos triangulares ..	107
Figura 3.18 La función impulso como limite de una secuencia de funciones de muestreo.....	110
Figura 3.19 La función impulso y su transformada.....	113
Figura 3.20 Constante y su transformada.....	113
Figura 3.21 Transformada de Fourier de $\text{sgn}(t)$ .....	115
Figura 3.22 Función escalón unitario y su función de densidad espectral.....	115
Figura 3.23 Frecuencias $\text{sen } \omega_0 t$ .....	119
Figura 3.24 Frecuencias $\pm \omega_0 t (t)$ .....	119
Figura 3.25 Función de densidad espectral del $\text{cos } \omega_0 t$ (8 ciclos).....	119

---



---

---



---

Figura 3.26 Función $\cos \omega_0 t (t)$ y la magnitud de sustitución de densidad espectral...	120
Figura 3.27 Función de densidad espectral de pulso rectangular periódico.....	123
Figura 3.28 Secuencia de funciones impulso uniformes y equidistantes .....	125
Figura 3.29 funciones periódicas de impulsos y sus transformadas de Fourier.....	126
Figura 3.30 Propiedades de simetría de la transformada de Fourier.....	128
Figura 3.31 Comprensión en el dominio del tiempo, una expansión en el dominio de la frecuencia.....	133
Figura 3.32 Efecto de la modulación en el espectro de la frecuencia.....	137
Figura 3.33 Función $G_t(t-T/2)$ .....	138
Figura 3.34 Función trapezoidal.....	143
Figura 3.35 Aproximación a una función mediante segmentos de línea recta.....	143
Figura 3.36 Espectro de potencia de una función.....	148
Figura 4.1 Área bajo la curva de producto de $f_1(r)$ y $f_2 (t_1-r)$ .....	197
Figura 4.2 Impulso unitario $f(t)$ .....	201
Figura 4.3 Descomposición de de una señal discreta en una suma ponderada de impulso desplazados.....	204
Figura 4.4 Interpretación grafica de la respuesta de un sistema lineal discreto.....	207
Figura 4.4 Continuación.....	208
Figura 4.5 a) Respuesta al impulso $h(n)$ b) Las respuestas “ecos” c) Respuesta total $y(n)$ .....	212
Figura 4.6 Aproximación en una escalera de una señal.....	214
Figura 4.7 Interpretación grafica de la ecuación 4.22.....	217
Figura 4.8 a) Señal arbitraria $x(t)$ (b) Impulso $\delta(1-t)$ como función de $t$ fija (c) Producto de dos señales.....	218
Figura 4.9 Interpretación grafica de la respuesta de un sistema lineal continuo.....	220
Figura 4.10 Representación grafica de las ecuaciones (4.26 (4.27).....	222

---



---

---



---

Figura 4.11 Calculo de la integral de convolución.....	225
Figura 4.12 Respuestas del sistema con impulso $h(t)=u(t)$ .....	226
Figura 4.13 Señal $x(t)$ y $h(t)$ para diferentes valores de $t$ .....	228
Figura 4.14 Producto $x(r) h(t-r)$ .....	229
Figura 4.15 Problema de convolución.....	230
Figura 5.1 Señal moduladora, Onda modulada en amplitud, onda modulada en frecuencia.....	234
Figura 5.2 Asignaciones de espectro de frecuencias.....	237
Figura 5.3 Constelación de QAM de cuatro niveles (16 símbolos).....	241
Figura 5.4. Generadores senoidales en serie.....	246
Figura 5.5 Espectros correspondientes a la entrada al circuito modulador y salida del mismo.....	247
Figura 5.5 Espectros correspondientes a la entrada al circuito modulador y salida del mismo.....	248
Figura 5.7 Portadora.....	249
Figura 5.8 Señal AM estándar.....	249
Figura 5.9 Respuesta grafica en el espectro en un circuito.....	251
Figura 5.10 fuentes senoidales en serie.....	251
Figura 5.11 Señal moduladora senoidal.....	252
Figura 5.12 Portadora sin modular.....	253
Figura 5.13 señal al 50% de profundidad de modulación.....	253
Figura 5.14 Sobre modulación .....	255
Figura 5.15 Circuito multiplicador.....	257
Figura 5.16 Señal AM entrante (A) y salida demoduladora(B).....	258
Figura 5.17 Señal con circuito con etapa moduladora.....	258
Figura 5.18 Detector AM balanceado.....	261

---



---



---

---

Figura 5.19 Señal con detector en AM.....	261
Figura 5.20 Señal con circuito AM balanceado y demodulador.....	262
Figura 5.21 Circuito detector de picos.....	264
Figura 5.22 Modulador tipo anillo.....	268
Figura 5.23 Modulador Estándar básico.....	269
Figura 5.24 Mezclador de frecuencias.....	271
Figura 5.25 Diagrama a bloques de un transmisor AM estándar.....	272
Figura 5.26 Diagrama de un receptor superheterodino.....	273
Figura 5.27 Modulación (a) y suma (b) de amplitud para el caso Senoidal.....	278
Figura 5.28 Diagrama de bloques de la generación de DSB-LC.....	281
Figura 5.29 Generación de una señal de AM usando el modulador (rectificado) de conmutación.....	283
Figura 5.30 Detector de envolvente.....	285
Figura 5.31 Circuito retorno baja impedancia.....	288
Figura 5.32 Ejemplo de espectro.....	288
Figura 5.33 Banda lateral inferior y banda lateral superior.....	289
Figura 5.34 Análisis en frecuencias.....	291
Figura 5.35 Filtro pasabanda.....	292
Figura 5.36 Espectro a la frecuencia definitiva y filtrada.....	293
Figura 5.37 Sistema modulador por discriminación de fase.....	293
Figura 5.38 Modulación DSB.....	296
Figura 5.39 Señal de modulador DSB.....	297
Figura 5.40 Al transformar la señal DSB.....	298
Figura 5.41 Modulador con elementos no lineales.....	300
Figura 5.42 Dispositivo no lineal.....	301

---

---

---

---

Figura 5.43 Detector síncrono.....	302
Figura 5.44 Detector homodina.....	303
Figura 5.45 Receptor de portadora inyectada.....	303
Figura 5.46 señal filtrada con pasabajo del detector síncrono.....	305
Figura 5.47 Modulador VSB.....	308
Figura 5.48 Filtro VSB.....	308
Figura 5.49 Señal filtrada.....	310
Figura 5.50 Espectro aproximado para FM de banda angosta.....	313
Figura 5.51 Comparación de FM de banda angosta y AM_DSB a) FM de banda angosta b) AM_DSB.....	313
Figura 5.52 Magnitud del espectro de la modulación de frecuencia banda amplia.....	315

---

---

# CAPÍTULO I

## ANTECEDENTES

## CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES

### 1.1 IMPORTANCIA Y FUNCION DE LA COMUNICACIÓN

Desde los primeros tiempos, con la existencia de la persona humana; el deseo de comunicación era de vital. Su importancia radica en que sin la comunicación, no habría transmisión de conocimientos, ideas, pensamientos, sentimientos, etc. El hombre primitivo ha ido evolucionando a lo largo de los milenios, llegando a construir un lenguaje interpretado y hablado por medio de símbolos y luego de letras a los cuales les ha dado significado y conforman hoy el lenguaje.

Existen, además del lenguaje, multitud de sistemas de comunicación:

- Dos personas se comunican por medio de gestos y palabras.
- La ropa que lleva puesta una persona, indica a que se dedica esa persona. Ej. enfermera, policía, bombero, etc.
- El reloj es un medio de comunicación que da la hora.
- Un pictograma de "Prohibido fumar" puede ser interpretado por cualquier persona en todo el mundo.

## 1.2 ELEMENTOS GENERALES DE UN SISTEMA DE COMUNICACION:

El esquema más general de un proceso de comunicación se debe a Weaver y Shannon. Al comienzo de la comunicación telefónica, y en relación con ella, describe muy imperfectamente la comunicación humana: [3]

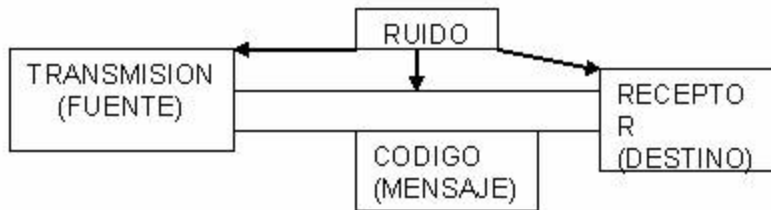


Figura1.1 Esquema General de un Sistema de Comunicación

- El mensaje o información que se desea transmitir.
- El emisor que envía los mensajes.
- El receptor que recibe los mensajes del emisor.
- El medio por donde viajan los mensajes desde el emisor al receptor.

Para comprender este modelo, hay que imaginarse una conversación telefónica. Yo hablo (fuente) con alguien (blanco), mis palabras (mensaje) son codificadas por el combinado (emisor) en forma de una señal transmitida por una línea telefónica (canal) hasta el combinado de su destinatario. Este combinado decodifica el mensaje en forma de un mensaje que recibe el destinatario. En una comunicación humana, el emisor y la fuente forman un todo. ver figura 1.1

La emisión de los mensajes (los estímulos que el emisor emite al receptor, pertenecen generalmente a un sistema de comunicación).

Los Sistemas de Comunicación: hace falta que 2 personas compartan un sistema de comunicación para que puedan establecer una comunicación. La dificultad para comunicar con las personas que pertenecen a otras culturas viene de que el emisor y el receptor no disponen exactamente de los mismos sistemas de comunicación, lo que no permite la comprensión y entendimiento.

### **1.2.1 SISTEMAS MÁS IMPORTANTES EN LA COMUNICACION**

1. La distancia entre los interactuantes: Hall y Argyle demostraron que la distancia entre los interactuantes era una dimensión muy codificada de la comunicación, y variables según los grupos sociales y las culturas. Distinguen así la distancia íntima, la distancia personal que permite relaciones físicas rituales como los saludos, la distancia social entre 1 y 2 metros que impide el contacto físico, la distancia pública próxima (la que permite escuchar en un grupo de personas) y la distancia pública lejana (como en una conferencia ante un público).
2. El sistema corporal: las posiciones corporales, los movimientos y las mímicas faciales
3. El sistema paravocal: o vocal son las variaciones del tono de voz, de timbre, el ritmo, etc. Los estudios realizados demuestran que está en relación con el estado

psíquico y emocional del locutor y con la relación que éste instala con su interlocutor. Así, una voz dulce expresa la intimidad, si la del interlocutor lo es también.

4. El sistema del lenguaje: propio de la especie humana, el más elaborado de los sistemas. Un locutor que emite una frase en cierto contexto realiza simultáneamente 3 cosas: produce un enunciado de la lengua, una forma gramatical que tiene un significado (función locutoria). Después diciendo lo que dice, realiza por lo menos una acción (función ). Finalmente induce ciertos efectos sobre su auditor (función perlocutoria). [15]

### 1.3 EVOLUCION DE LA COMUNICACIÓN HUMANA

**5000 A.C. PREHISTORIA.** El hombre prehistórico se comunicaba por medio de gruñidos y otros sonidos (primera forma de comunicación). Además, con señales físicas con las manos y otros movimientos del cuerpo. "La comunicación a grandes distancias era bastante compleja".

**3000 A.C. EGIPCIOS:** representaban las ideas mediante símbolos (*hieroglyphics*), así la información podría ser transportada a grandes distancias al ser transcritas en medios como el papel papiro, madera, piedras, etc.

*"ahora los mensajes pueden ser enviados a grandes distancias al llevar el medio de un lugar a otro".*

**1,700 - 1,500 A.C** Un conjunto de símbolos fue desarrollado para describir sonidos individuales, y estos símbolos son la primera forma de ALFABETO que poniéndolos juntos forman las PALABRAS. Surgió en lo que es hoy Siria y Palestina.  
*"la distancia sobre la cual la información es movida, sigue siendo todavía limitada".*

**GRIEGOS** Desarrollan la Heliografía (mecanismo para reflejar la luz del sol en superficies brillosas como los espejos).

*"Aquí también el Transmisor y el Receptor deberán conocer el mismo código para entender la información".*

**430 D.C. ROMANOS** utilizaron antorchas (sistema óptico telegráfico) puestas en grupos apartados a distancias variantes, en la cima de las montañas para comunicarse en tiempos de guerra.

*Cuando la heliografía ó las antorchas romanas fueron usadas "el enemigo" podía ver la información (descifrar), y así fue introducido el concepto de CODIFICACIÓN.*

*Este tipo de comunicación se volvía compleja, cuando se quería mover información a muy grandes distancias (se hacía uso en ocasiones de repetidores).*

**1500s AZTECAS** Comunicación por medio de mensajes escritos y llevados por hombres a pie. (Heraldos)

**ÁFRICA Y SUDAMÉRICA:** Comunicación por medios acústicos (tambores y cantos).



**NORTEAMÉRICA** Los indios de Norteamérica hacían uso de señales de humo.

*"Estos dos últimos tipos de comunicación funcionaban mientras el sonido del tambor se escuchaba o las señales de humo se veían".*

**1860s** Sistemas Ópticos Telegráficos (uso de banderas, o semáforos) por la caballería de EUA.

**1860** (Abril 3): Comunicación (mensajería) vía caballos (PONY Express). La idea era proveer el servicio más rápido de entrega de correo entre las ciudades de St. Joseph, Missouri, y Sacramento, California. El servicio termino a finales de Octubre de 1861 al empezar el telégrafo en los EUA. [4]

### 1.3.1 COMUNICACIONES ELÉCTRICAS

**1752** Descubrimiento de la electricidad (pararrayos) por Benjamín Franklin en los EU.

**1800-1837** Descubrimientos preliminares: Volta descubre los principios de la batería; Tratados matemáticos de Fourier, Cauchy y Laplace; Experimentos con electricidad y magnetismo por Oersted, Ampere, Faraday, y Henry; La Ley de Ohm; primeros Sistemas telegráficos por Gauss, Weber, Wheatstone y Cooke.

**1844** El nacimiento de la TELEGRAFÍA. El Telégrafo, primera forma de comunicación eléctrica. Inventado por Samuel Morse.

*A finales de 1844 se puso en operación el primer enlace telegráfico, entre las ciudades de Washington, d.C. y Baltimore, MA.*

**1845** Son enunciadas las Leyes de Kirchhoff.

**1861** Las líneas telegráficas cubren casi todo Estados Unidos.

**1864** James Clerk Maxwell desarrolla la "*Teoría Dinámica del campo electromagnético*"  
Predice la radiación electromagnética.

**1865** Se crea la International Telegraph Union (ITU), organización internacional encargada de la creación y aprobación de estándares en comunicaciones. En la actualidad esta organización se llama International Telecommunications Union.

**1866** Se instala el cableado telegráfico trasatlántico, entre Norteamérica e Inglaterra, por la compañía Cyrus Field & Associates.

**1873** James C. Maxwell desarrolla las matemáticas necesarias para la teoría de las comunicaciones.

**1874** El francés Emile Baudot desarrolla el primer multiplexor telegráfico; permitía 6 usuarios simultáneamente sobre un mismo cable, los caracteres individuales eran divididos mediante un determinado código (protocolo).

**1876** Marzo 7, se otorga la patente #174,465 a Alexander Graham Bell. El nacimiento de la TELEFON&IacuteA, la mayor contribución al mundo de las comunicaciones; se transmite el primer mensaje telefónico cuando G. Bell le llamó a su asistente, Thomas Watson, que se encontraba en el cuarto de al lado, y le dijo las inmortales palabras "Watson, come here; I want you."

Alexander G. Bell usó los circuitos existentes del telégrafo, pero usó corriente eléctrica para pasar de un estado de encendido a apagado y viceversa. La invención de Bell era sensitiva al sonido, de tal modo creaba vibraciones en un diafragma receptor con el cual el esperaba que fuera entendido por la gente sorda y proveer comunicación entre ellos. *Dibujo inicial del teléfono por Alexander G. Bell en 1876.*

**1878** Primer enlace telefónico, en New Haven , Conn con ocho líneas.

**1882** Se construye la primer pizarra telefónica manual (switchboard), llamada *Beehive*, desarrollada para una localidad centralizada que podría ser usada para interconectar varios usuarios por teléfono. [4]

**1887** Telegrafía Inalámbrica, Heinrich Hertz comprueba la Teoría de Maxwell; Demostraciones de Marconi y Popov. *Edison desarrolla un transductor de "botón de carbón"; Strower inventa la conmutación "paso a paso".*

**1888** Heinrich Rudolph Hertz mostró que las ondas electromagnéticas existían y que ellas podrían ser usadas para mover información a muy grandes distancias.

---

---

*Esto sería el predecesor de la propagación electromagnética o transmisión de radio.*

**1889** Almon B. Strowger, inventa el teléfono de marcado que se perfecciona en 1896.

*En el intervalo Strowger también desarrolla el primer conmutador telefónico automático (PABX), el cual consistía de cinco botones. El primer botón fue llamado "descolgado" (release), con el cual empieza el conmutador, el siguiente botón eran las centenas, e identifican el primer dígito de los números de 3 dígitos marcados. Este botón era presionado un número de veces para indicar el número marcado; y así sucesivamente las decenas y unidades. [17]*

**1892** Se establece el primer enlace telefónico entre las ciudades de New York y Chicago.

**1896** Guglielmo Marconi obtuvo la patente sobre la tecnología de comunicaciones inalámbricas (la radio).

**1897** Se instalan líneas telefónicas por todo Estados Unidos.

**1898** En 1898 Marconi hace realidad la tecnología inalámbrica cuando el seguía la regata de Kingstown y manda un reporte a un periódico de Dublín, Irlanda.

**1899** Se desarrolla la teoría de la "Carga en los Cables" por Heaviside, Pupin y Campbell; Oliver Heaviside saca una publicación sobre cálculo operacional, circuitos y electromagnetismo.



**1934** Se crea la *Federal Communication Commision* (FCC) en los EU., organismo que regula las comunicaciones en ese país. Roosevelt firma el acta.

**1936** Se descubre "Un método de reducción de disturbancias en señalización de radio por un sistema de modulación en frecuencia" por Edwin H. Armstrong, que propicia la creación de la radio FM.

**1937** Alec Reeves concibe la Modulación por Codificación de Pulsos (PCM) usada hoy en día en telefonía.

**1940** Primer computadora, llamada Z2 por Konrad Zuse (Alemania).

**1941** La FCC autoriza la primer licencia para la emisión de TV(formato NTSC, 525 líneas, 60 cuadros por segundo). Se funda la primer estación de FM por Edwin H. Armstrong; Universidad de Colombia WKCR.

**1945** Aparece un artículo en la revista *Wireless World* escrito por el matemático británico, futurista y escritor de ciencia ficción Arthur C. Clarke (autor de la novela 2001: Odisea del espacio) donde propone la comunicación vía satélites artificiales.

**1948** Quizás el mayor evento en las comunicaciones del mundo ocurre, cuando Claude Shannon desarrolló su "*Teoría matemática de las comunicaciones*" Shannon desarrolla el concepto "Teoría de la Información".

**1948-1951** Es inventado el transistor por Bardeen, Brattain, y Shockley; con este descubrimiento se reduce significativamente el tamaño y la potencia de los equipos de comunicaciones.

**1950** Se establece el primer enlace de comunicaciones vía MICROONDAS, previendo comunicaciones en un alto volumen a muy grandes distancias. La multicanalización por División de Tiempo (TDM) es aplicada a la telefonía.

**1955** Narinders Kapany de la India descubre que una fibra de vidrio aislada puede conducir luz a gran distancia (primeros estudios sobre las fibras ópticas)

**1956** Primer cable telefónico transoceánico (36 canales de voz).

**1957** Octubre 4, es lanzado por la USSR el primer SATÉLITE artificial, llamado Sputnik.

**1958** Desarrollo de Sistemas de Transmisión de Datos a Larga Distancia para propósitos militares.

**1960** Aparecen los teléfonos de marcación por tonos. Mainman demuestra el primer LASER.

**1961** Los circuitos integrados entran a producción comercial.

**1962** Es lanzado el satélite Telstar I por la NASA, fue el primer satélite comercial. *Permitió comunicaciones entre Europa y Norteamérica por solo pocas horas al día.*

**1962-1966** El nacimiento de las comunicaciones digitales de alta velocidad. El servicio de la transmisión de datos es ofrecido comercialmente; canales de banda ancha para señales digitales; PCM es usada para transmisión de TV y voz.

**1963** Se perfecciona los osciladores de microondas de Estado Sólido por Gunn.

**1964** Fue formado INTELSAT (International Telecommunications Satellite Organization).

**1965** INTELSAT lanza el satélite Pájaro Madrugador (Early Bird). *Permitió los primeros intercambios de programación de TV. entre Norteamérica y Europa.* El satélite Mariner IV transmite las primeras imágenes de Marte.

**1969** Enero 2, el gobierno de los Estados Unidos le da vida a INTERNET cuando un equipo de científicos empiezan a hacer investigaciones en redes de computadoras. La investigación fue fundada por la *Advanced Research Projects Agency -ARPA*, una organización del Departamento de Defensa de los EU., mejor conocida como ARPANET.

**1970** Canadá y Estados Unidos desarrollaron satélites para comunicaciones dentro de Norteamérica. [4]

**1971** En noviembre de 1971, primer microprocesador comercial fabricado por Intel Inc. modelo 4004 (costo \$ 200 dls, 2,300 transistores, 0.06 MIPS).

**1972** Noviembre 9, Canadá lanza su primer satélite ANIK.



**1974** Estados Unidos lanza los satélites Western Union's Westar I & II. Ambos, Westar I & II y ANIK contaban con una docena de canales de televisión. (en comparación con el pájaro madrugador que solo contaba con un solo canal).

**1975** La compañía RCA entra al negocio de las comunicaciones espaciales con el lanzamiento de SATCOM I. *Este fue el primer satélite con 24 canales, y que más tarde contaría con más de 57,000 subscriptores registrados.*

El 30 de septiembre *Home Box Office* (HBO) comienza el primer servicio de TV distribuido por satélite. En esta ocasión HBO transmitió el campeonato mundial de Box entre Muhammad Ali y Joe Frazier desde Manila, a la cual titularon "The Thriller in Manila".

**1976** Ted Turner, un propietario de la estación de TV independiente WTBS (Turner Broadcast Service) de la Ciudad de Atlanta, empieza a transmitir TV vía satélite a través de todo Estados Unidos. Empieza así la primer Súper Estación de TV.

**1979** Se crea el consorcio INMARSAT (International Maritime Satélite organización), provee comunicaciones y servicios de navegación a embarcaciones vía satélite.

**1980** Es adoptado el estándar internacional para fax (Grupo III), hasta la fecha usado para transmisión de facsímile.

*Bell System* (hoy AT&T) introduce las fibras ópticas a la telefonía.

Septiembre, se presentan las especificaciones de la red *Ethernet*, definidas por Robert Meltcalfe en PARC (Palo Alto Reseach Center) de Xerox, aunado a DEC e Intel.

**1981** Nace la TELEFONÍA CELULAR

Nace la Televisión de Alta definición HDTV

**1983** La FCC aprueba la tecnología de televisión vía microondas MMDS (Multichannel Multipoint Distribution Service). En EU., primer teléfono celular con tecnología analógica.

**1985** México lanza su primer satélite llamado *Morelos I*.

**1988** En EU la FCC aprueba la HDTV, al año siguiente Japón empieza a usar dicha tecnología.

**1989** Es lanzado el segundo satélite mexicano *Morelos II*.

**1993** En EU, comienza la telefonía celular con tecnología digital. Intel Corp. introduce al mercado el procesador PENTIUM. Al año siguiente, los usuarios comienzan a detectar fallas en el microprocesador, lo que crea una gran controversia.

El presidente de los EU. se convierte en el primer mandatario en usar Internet al mandar un mensaje electrónico; su dirección electrónica es *president@whitehouse.gov*.

En Noviembre es lanzado el satélite Solidaridad I. (éste sustituye al Morelos I)

**1994** Es puesto en órbita el satélite Solidaridad II. *Ambos satélites tienen una vida estimada útil de 14 años y operan en las bandas C, Ku, y L.*

**1995** Junio 7, se publica la Ley Federal de Telecomunicaciones en México.

**1996** En Octubre, USRobotics introduce la tecnología X2 para módems, con velocidades de 56 Kbps.

**1997** Enero 1, Comienza la apertura telefónica (de larga distancia) en México. Licitación del espectro para Televisión por MMDS y PCS en México. Empieza la comercialización de ADSL en EU. La ITU estandariza los módems de 56 Kbps (recomendación V.90)

**1998** En Noviembre'98 septiembre comienzan los servicios del sistema de satélites de órbita baja (LEO) Iridium; En Diciembre 4, México lanzó el quinto satélite (SATMEX V) que remplazará al Morelos II.

Las Redes de Comunicación: Mientras que una comunicación elemental incluye un emisor y un receptor, un grupo incluye tantos emisores y receptores como los miembros que hay en el grupo, y esto define la red de todos los circuitos. Redes de comunicación, no son más que la posibilidad de compartir con carácter universal la información entre grupos de computadoras y sus usuarios; un componente vital de la era de la información.

La generalización del ordenador o computadora personal (PC) y de la red de área local (LAN) durante la década de los ochenta ha dado lugar a la posibilidad de acceder a información en bases de datos remotas, cargar aplicaciones desde puntos de ultramar, enviar mensajes a otros países y compartir archivos, todo ello desde un ordenador personal. Las redes que permiten todo esto son equipos avanzados y complejos. Su eficacia se basa en la confluencia de muy diversos componentes. El diseño e implantación de una red mundial de ordenadores es uno de los grandes ‘milagros tecnológicos’ de las últimas décadas.

#### 1.4 MODOS DE TRANSMISIÓN

En el proceso de transmisión, las señales que portan la información se contaminan con ruido. Éste es generado por numerosos hechos naturales y artificiales, y provoca errores en la transmisión de información. Desde el punto de vista de la ingeniería, el problema de la comunicación estriba en el diseño de las partes de la transmisión sobre las que puede ejercerse algún control. Un criterio para esto es mantener la transmisión de información tan libre de errores como sea posible.

Con estos objetivos en mente, se examinarán diferentes sistemas de comunicación y sus principios básicos de operación. Se destacarán los métodos y no los circuitos o dispositivos particulares que se emplean normalmente.

En la figura 1.2 se muestran las unidades básicas comprendidas en un sistema de comunicación. No todos los sistemas incluyen la totalidad de las operaciones indicadas, aunque siempre emplean un medio de transmisión de alguna clase. El codificador elige la mejor forma de la señal para optimizar su detección en la salida. El decodificador efectúa la operación inversa para tomar la mejor decisión, basada en las señales disponibles, de que un mensaje dado fue efectivamente enviado. El diseño del codificador y el decodificador debe basarse en una detallada descripción matemática de la transmisión de información. Aunque el tema de la codificación suele tener cierto aire de secreto, un motivo más importante en muchos sistemas de comunicación modernos es mejorar la eficiencia en la conducción de la información.

El modulador produce una señal variable en la salida, que es proporcional, de algún modo, a la señal que aparece en sus terminales de entrada. Por ejemplo, un modulador

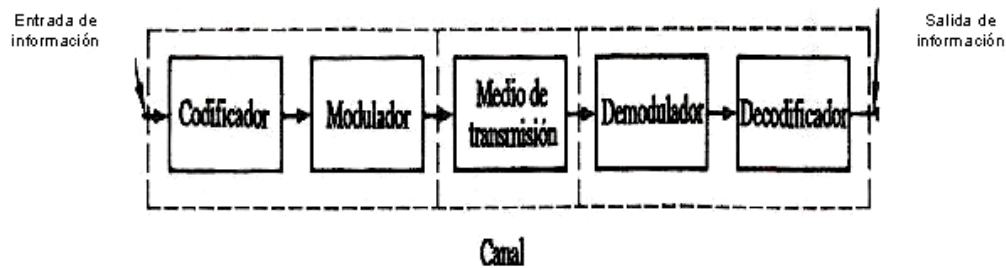


Figura 1.2 Sistema de comunicación.

senoidal puede variar la amplitud, la frecuencia o la fase de una señal senoidal en proporción directa a la tensión de entrada. Las funciones del codificador y del modulador son semejantes en lo que respecta a la preparación de la señal para una transmisión más eficiente. Sin embargo, el proceso de codificación está concebido para optimizar la

detección de errores en un mensaje que se está transmitiendo, mientras que el proceso de modulación está diseñado para imprimir la señal de información sobre la onda que se va a transmitir. El demodulador realiza la operación inversa al modulador para restaurar la señal a su forma original. [12]

El medio de transmisión es la piedra angular del sistema; sin él no existirían problemas de comunicación. El medio de comunicación puede incluir la ionosfera, la troposfera, el espacio libre o simplemente una línea de transmisión. En todo caso se introducen la atenuación y la distorsión, así como las señales de ruido generadas en los medios y en los equipos de transmisión y recepción. Para el propósito de este libro, las señales de ruido son cualesquiera señales eléctricas (tensiones o corrientes) que interfieran con la recepción libre de errores de la señal portadora del mensaje.

Las líneas discontinuas de la figura 1.2 indican tres subsistemas básicos de un sistema de comunicación. El subsistema central restringe el flujo de información y se llama *canal*. El canal incluye los efectos del ruido aditivo, la interferencia, la propagación y la distorsión. Es el factor limitante del rendimiento de cualquier sistema de comunicación bien diseñado. La función del *transmisor* es preparar la información para enviada en forma tal que pueda superar lo mejor posible las limitaciones impuestas por el canal. La función del *receptor* es efectuar las operaciones inversas a las del transmisor para recuperar la información con la menor cantidad de errores posible. Nótese que, en sentido amplio, el transmisor y el receptor, en pareja, están diseñados de manera específica para combatir los efectos perniciosos del canal en la transmisión de información.

El sistema de comunicación mostrado en la figura 1.2 es capaz de transmitir en un sentido y se llama sistema de transmisión *simplex* (SX). En muchos casos es deseable mantener una comunicación en dos sentidos o, al menos, poder devolver un mensaje a su origen para una posible verificación, comparación o control. Una manera de obtener esto es utilizar el mismo canal de manera alterna para transmitir en ambas direcciones, como se muestra en la figura 1.3. Este método se llama *semidúplex* (HDX, *half-duplex*).

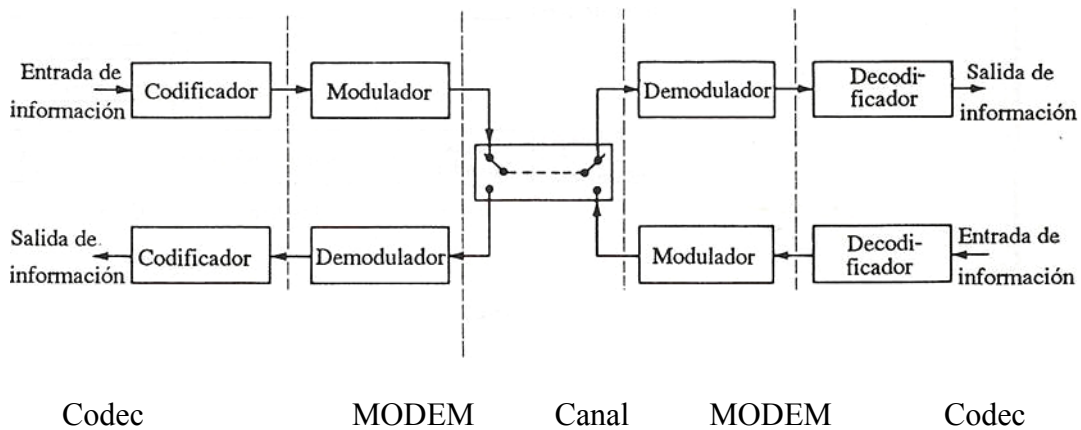


Figura 1.3 Sistema de comunicación que usa una transmisión semidúplex.

En la figura 1.4 se muestra un tercer tipo, el *dúplex completo* (FDX, *full-duplex*). En éste, se obtiene comunicación simultánea en ambos sentidos. Nótese que tanto en la transmisión HDX como en la FDX, los moduladores y demoduladores operan en parejas. Esta combinación de modulador y demodulador se llama *modem* (modulador-demodulador) en los sistemas de transmisión de datos. También los codificadores y decodificadores trabajan en pares, dando así origen al término *codec* (codificador-decodificador).

Considérese ahora un canal en el que el único perjuicio a la transmisión proviene del ruido aditivo. Como ya se mencionó, para la comunicación es necesario un ancho de banda mínimo  $B$ . Un ancho de banda mayor permitiría más interferencia del ruido con la

---

---

transmisión de información, por lo que es importante mantener el ancho de banda de dicho canal tan reducido como sea posible.

El ruido presente se caracteriza por su potencia media  $N$  y la señal transmitida por su potencia media  $S$ . Si la potencia media del ruido es relativamente pequeña, la potencia de la señal no necesita ser muy grande para que el receptor determine qué información se está enviando (por supuesto, también interesa la eficiencia y, por tanto, se intenta minimizar la potencia transmitida necesaria para conducir la información al usuario). Por el contrario, la potencia media de la señal debe ser relativamente grande cuando la potencia del ruido es grande. Así, se deduce que lo que importa es la *razón* entre la potencia media de la señal y la potencia media del ruido, y no las propias magnitudes de  $S$  y  $N$ . Esta razón  $S/N$ , llamada *razón señal a ruido*, es un importante parámetro en la teoría y el diseño de sistemas de comunicación. [8]

Todos los sistemas de comunicación pueden juzgarse en términos de ancho de banda, razón señal a ruido y factores económicos (costo). En todo tipo de sistema existen varios compromisos entre estos parámetros, los cuales examinaremos más adelante. La razón señal a ruido incluye tanto la potencia transmitida como el criterio de desempeño, por lo que para algunos sistemas es más conveniente el concepto de compromisos de desempeño de tres vías mostrado en la figura 1.4. Algunos de los compromisos de ancho de banda y razón señal a ruido se destacan en el siguiente análisis somero de sistemas digitales.



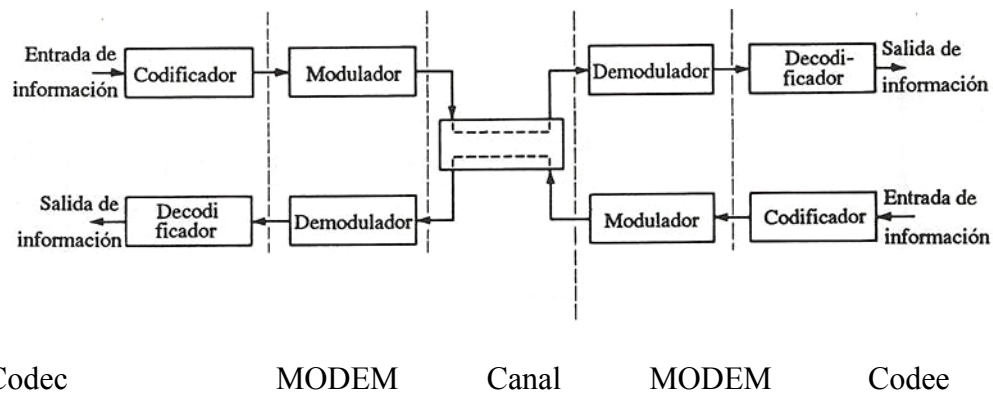


Figura 1.4 Sistema de comunicación que usa una transmisión dúplex completa.

## 1.5 REDES DE TELECOMUNICACIONES

Es un conjunto de dispositivos físicos "hardware" y de programas "software", mediante el cual podemos comunicar computadoras para compartir recursos (discos, impresoras, programas, etc.) así como trabajo (tiempo de cálculo, procesamiento de datos, etc.).

A cada una de las computadoras conectadas a la red se le denomina un nodo. Se considera que una red es local si solo alcanza unos pocos kilómetros.

### 1.5.1 TIPOS DE REDES

Las redes de información se pueden clasificar según su extensión y su topología. Una red puede empezar siendo pequeña para crecer junto con la organización o institución. A continuación se presenta los distintos tipos de redes disponibles:

### 1.5.1.1 Por distribución geográfica:

- Segmento de red (subred)

Un segmento de red suele ser definido por el "hardware" o una dirección de red específica. Por ejemplo, en el entorno "Novell NetWare", en un segmento de red se incluyen todas las estaciones de trabajo conectadas a una tarjeta de interfaz de red de un servidor y cada segmento tiene su propia dirección de red.

- Red de área locales (LAN)

Una LAN es un segmento de red que tiene conectadas estaciones de trabajo y servidores o un conjunto de segmentos de red interconectados, generalmente dentro de la misma zona. Por ejemplo un edificio.

- Red de campus

Una red de campus se extiende a otros edificios dentro de un campus o área industrial. Los diversos segmentos o LAN de cada edificio suelen conectarse mediante cables de la red de soporte.

- Red de área metropolitanas (MAN)

Una red MAN es una red que se expande por pueblos o ciudades y se interconecta mediante diversas instalaciones públicas o privadas, como el sistema telefónico o los suplidores de sistemas de comunicación por microondas o medios ópticos.

- Red de área extensa (WAN y redes globales) [21]

Las WAN y redes globales se extienden sobrepasando las fronteras de las ciudades, pueblos o naciones. Los enlaces se realizan con instalaciones de telecomunicaciones públicas y privadas, además por microondas y satélites.

# CAPÍTULO III

## TIPO DE SEÑALES

**CAPÍTULO 2 SEÑALES****2.1 CARACTERÍSTICAS DE SEÑALES DE TELECOMUNICACIONES.**

Una señal eléctrica puede ser de tensión o de corriente y se puede describir en forma matemática. El interés no radica en "caídas de tensión, "corrientes de malla", etc., sino en las variaciones de las señales con el tiempo, sean éstas tensiones o corrientes. En consecuencia, una señal es simplemente una función única valuada del tiempo que se puede emplear para representar una tensión o una corriente en una situación específica. En ocasiones pueden aparecer excepciones, sobre todo en análisis que impliquen energía y potencia. En este caso, una manera conveniente de obviar cualquier complicación es incorporar un resistor de un ohm. El valor de un resistor particular escalará el resultado, una vez establecida la identidad de la señal. Para todos los cálculos de energía y potencia, se supone un resistor de un ohm, salvo que se indique otra cosa en un problema dado.

Las señales senoidales desempeñan un papel primordial en el análisis de los sistemas de comunicación. Tales señales  $f(t)$  se pueden representar como una función del tiempo  $t$  por medio de la ecuación

$$f(t) = A \cos (\omega t + \theta) , \quad (2.1)$$

donde  $A$  es la amplitud,  $(\theta)$  es la fase y  $(\omega)$  es la rapidez de cambio de fase o frecuencia de la senoidal en radianes por segundo.  $\omega$  también se puede expresar en ciclos por segundo[18]

(Hz), donde  $(\omega) = 2 \pi f$ .

### 2.1.2 CLASIFICACIÓN DE LAS SEÑALES

El mejor método de representación de señales en una situación dada depende del tipo de señal que se considere. Aquí se estudian algunas de las clasificaciones más útiles.

#### 2.1.2.1 SEÑALES DE ENERGÍA, SEÑALES DE POTENCIA.

Una señal de energía es una señal en forma de pulso que normalmente existe durante un intervalo finito de tiempo o, aun cuando se encuentre presente por un lapso infinito, tiene, al menos, la mayor parte de su energía concentrada en un intervalo finito de tiempo.

Para los sistemas eléctricos, una señal es una tensión o una corriente. La potencia instantánea disipada por una tensión  $e(t)$  en una resistencia  $R$  es:

$$P=|e(t)|^2/R \quad \text{watts,} \quad (2.2)$$

Y para una corriente  $i(t)$

$$P=|i(t)|^2/R \quad \text{watts} \quad (2.3),$$

En cada caso, la potencia instantánea es proporcional al cuadrado de la magnitud de la señal. Para una resistencia de un Ohm, estas ecuaciones toman la misma forma, por lo que es usual, en el análisis de señales, referirse a la potencia instantánea asociada con una señal dada  $f(t)$  como

$$P=|f(t)|^2 \text{ watts} \quad (2.4)$$

Aunque puede parecer que las dimensiones no son correctas en la ecuación (2.4), la convención implica multiplicar o dividir por una resistencia adecuada.

De acuerdo con esta convención, la energía disipada por las señales durante un intervalo de tiempo  $(t_1, t_2)$  es

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt \text{ joules} \quad (2.5)$$

Se define como una *señal de energía* aquella para la cual las ecuaciones (2.5) es finita, aun cuando el intervalo de tiempo sea infinito; esto es, cuando

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.6)$$

En la figura 2.1 se muestran varios ejemplos de señales de energía.

La potencia media disipada por la señal  $f(t)$  durante el intervalo de tiempo  $(t_1, t_2)$  es

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt \quad (2.7)$$

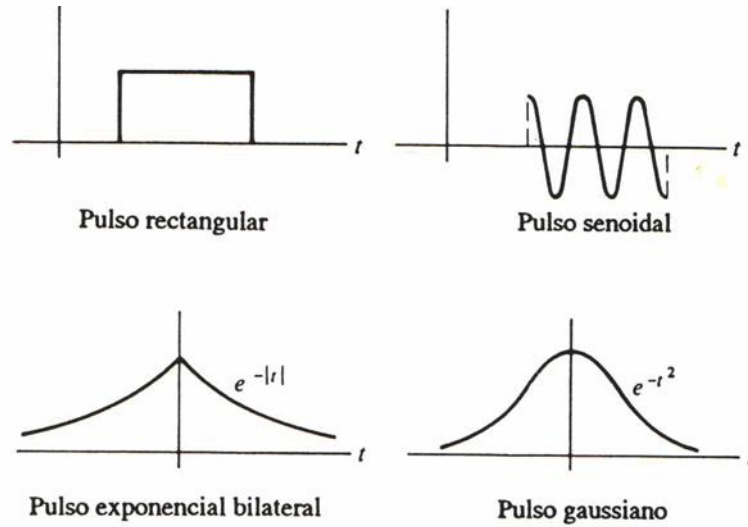


Figura 2.1 algunas señales de energía

Si el término de la derecha de la ecuación (2.7) se mantiene finito pero distinto de cero cuando el intervalo de tiempo se vuelve infinito, es decir, si

$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.8)$$

Entonces, la señal  $f(t)$  tiene potencia media finita y se llama *señal de potencia*.

### 2.1.2.2 PERIÓDICA, NO PERIÓDICA.

Una señal periódica es la que se repite exactamente a sí misma después de un lapso de tiempo fijo. Por tanto, la señal  $f(t)$  es periódica si existe un número  $T$  tal que:

$$f(t + T) \equiv f(t) \quad (2.9)$$

para toda  $t$ .



El menor número positivo  $T$  que satisfaga la ecuación (2.9) se llama *periodo* el periodo define la duración de un ciclo completo de  $f(t)$ . Toda señal periódica es una señal de potencia si su energía por ciclo es finita, y entonces la potencia media sólo necesita calcularse en un ciclo completo.

Se dice que cualquier señal para la que no exista un valor de  $T$  que satisfaga la ecuación (2.9) es *no periódica* o *aperiódica* un caso intermedio entre las señales periódicas y las no periódicas es la “señal casi periódica”. Este tipo de señal está compuesto por la suma de dos o más señales periódicas con periodos inconmensurables.

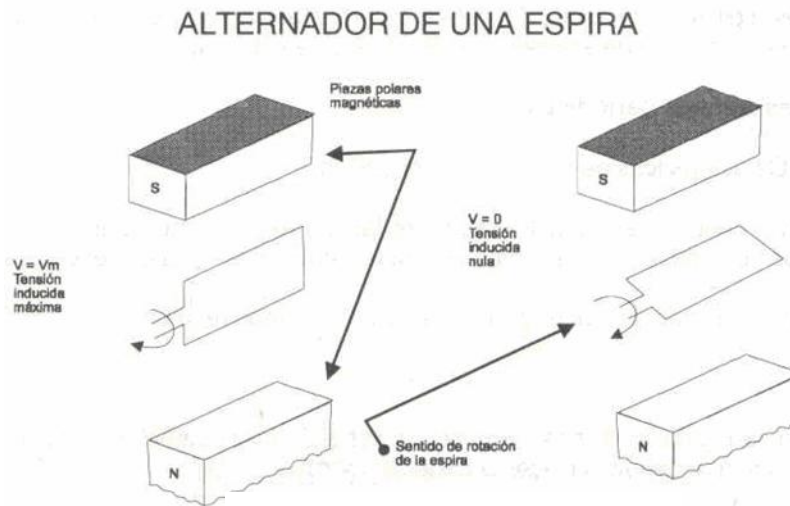
$$f(t) = \sin t + \sin \sqrt{2}t. \quad (2.10)$$

Esta función es “casi periódica” dado que cada término de la derecha es periódico, aunque no hay periodo  $T$  en el cuál  $f(t)$  se repite exactamente a sí misma.

## 2.2 FUNCIONES DE SEÑALES

### 2.2.1 LA FUNCIÓN SENOIDAL ARMÓNICA SIMPLE.

Una de las formas más comunes de las señales analógicas, es la de la función senoidal armónica simple. Esta señal, es la que se genera cuando una espira de alambre, gira a velocidad angular constante, en el interior de un campo magnético generado por imanes (Figura 2.2).



Este supuesto equipo, se denomina alternador de una espira y la fuerza electromotriz inducida en esta espira, está dada por la siguiente expresión:

$$f(t) = A \text{ sen } (\omega t + \theta)$$

donde resulta:

**A = Amplitud.**

**$\omega$  = Pulsación angular.**

**$\theta$  = Ángulo de fase inicial.**

Cada una de estas constantes, como se verá a continuación, tiene un significado preciso en la forma de la onda generada.

La representación gráfica de un ciclo completo de revolución de las espiras se detalla en la Figura 2.3.

Esta figura muestra la forma de la función, que representa la tensión que se ha generado en la espira, en función del ángulo que la espira ha girado con respecto a las piezas polares del imán permanente, hasta completar un ciclo completo.

Precisamente, el rotar continuo de la espira, genera una señal periódica, donde los valores se repiten cíclicamente (Expresión 2.1). [11]

### 2.2.2 SEÑAL SINUSOIDAL

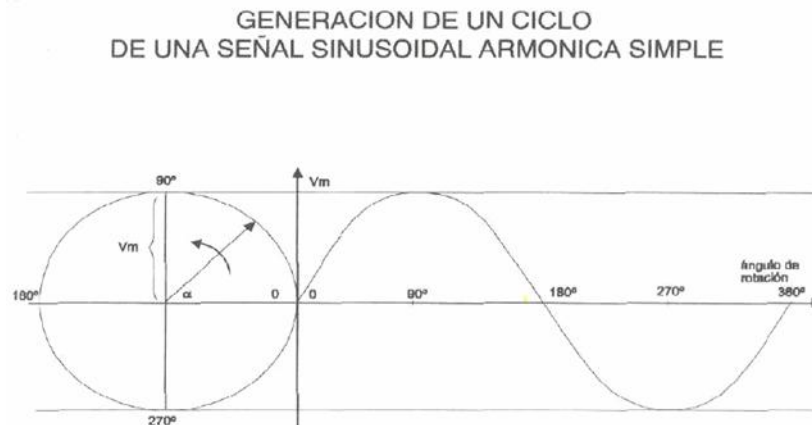


Figura 2.3 Generacon de un ciclo Señales sinusoidal armonica simple

Cuando la espira ha girado  $360^\circ$ , decimos que la señal ha completado un ciclo completo (en radianes, será igual a  $2\pi$ ).

Se denomina período, y se indica con la letra T, al tiempo expresado en segundos, que tarda la señal en completar un ciclo.

La Figura 2.4, nos muestra una señal sinusoidal representada en función del tiempo, que ha recorrido dos ciclos.

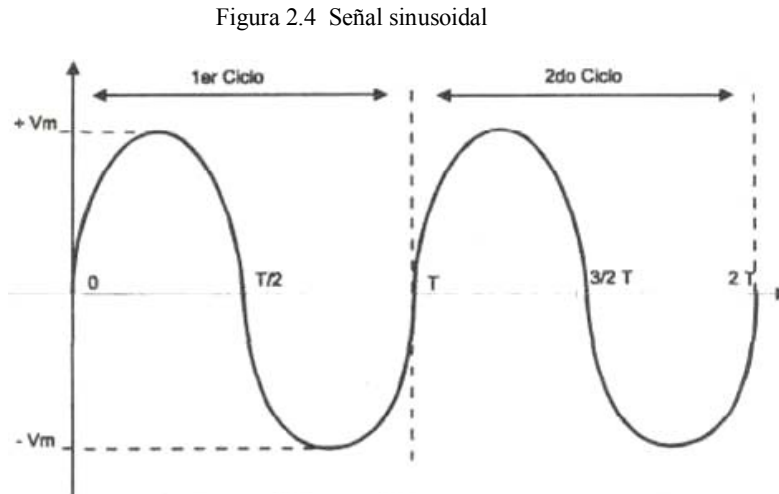


Figura 2.4 Señal sinusoidal

Se denomina frecuencia, al número de ciclos completos que tiene lugar en un segundo.

La frecuencia se mide en Hertz.

Un Hertz, corresponderá entonces, a una frecuencia de un ciclo por segundo. La frecuencia y el período están relacionados por la expresión siguiente:

donde:

$$f = \frac{1}{T} \text{ (Hertz)} \quad (2.11)$$

**f = Frecuencia (Hertz). T = Período (seg.).**

Y la frecuencia y la pulsación, a su vez, están relacionadas por la expresión siguiente:

$$\omega = 2 \pi f \quad (2.12)$$

La Figura 2.5, nos muestra una señal senoidal de  $f = 6$  Hertz es decir de

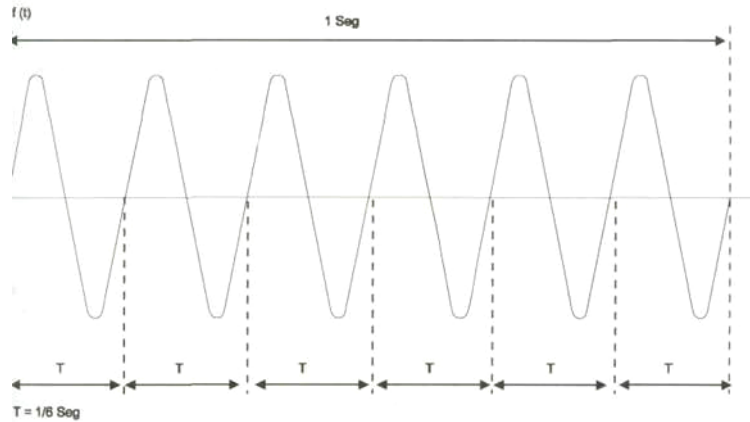


Figura 2.5 Señales senoidal de frecuencia igual a 6Hz

$$T = \frac{1}{6 \text{ (Hertz)}} \text{ (seg)}$$

Analicemos ahora el papel que juega , el ángulo de fase inicial;

$$f(t) = A \text{ sen } (\omega t + \theta)$$

Si ahora analizamos la expresión para el instante  $t = 0$ , resultará,

$$f(0) = A \text{ sen } \theta \quad \dots \quad (2.13)$$

Es decir, que el valor de la función en el instante  $t = 0$  depende del valor del ángulo de fase inicial (para valores de  $A$  constantes).

Consideremos ahora dos funciones, donde sólo varían los valores del ángulo de fase inicial  $\theta$  , y sean éstos:

$$\theta_1 = 0; \quad \text{luego, } f_1(0) = 0 \quad (2.14)$$

$$\theta_2 = \pi/2; \quad \text{luego } f_2(0) = A \text{ sen} = A \pi/2 \quad . \quad (2.15)$$

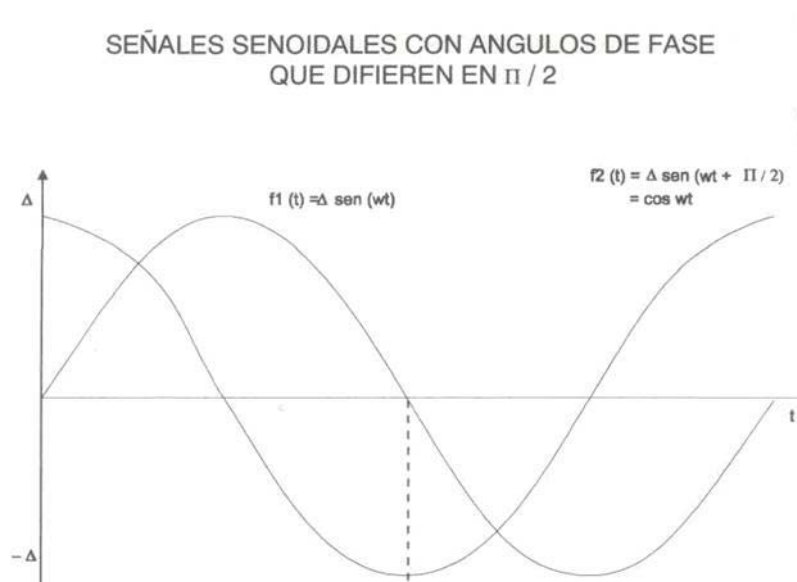


Figura 2.6 Dos señales senoidales con ángulos de fase que difieren en  $\pi/2$

Luego, si dos ondas son idénticas, excepto en el valor del ángulo de fase inicial, su diferencia puede expresarse como una diferencia de fase.

Se dice entonces que una señal, respecto de otra que tiene solamente la fase distinta, atrasa o adelanta un cierto número de grados. [7]

En la Figura 2.6, la señal  $f_2(t)$ , adelanta  $90^\circ$  respecto de la señal  $f_1(t)$ .

### 2.2.4 SEÑAL DE ONDA CUADRADA

Una de las formas más comunes de las señales digitales es la de la función onda cuadrada. Esta señal, normalmente es generada por equipos denominados generadores de pulsos, basados en las técnicas de la electrónica digital (Figura 2.7).

La función onda cuadrada se define matemáticamente, mediante las siguientes expresiones:

$$f(t) = 1, \text{ para } 0 < t < T/2 \quad \text{y} \quad f(t) = -1, \text{ para } T/2 < t < T \quad (2.16)$$

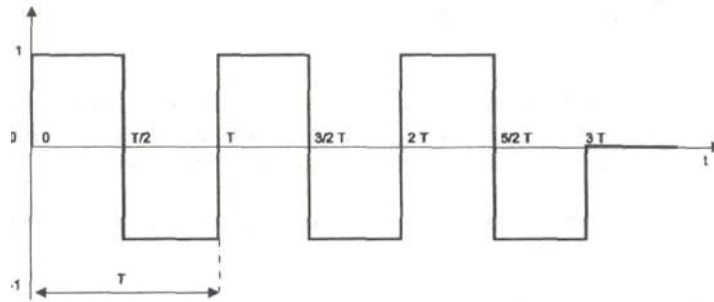


Figura 2.7 Señal onda cuadrada

Para esta función tienen el mismo significado los conceptos de frecuencia, período y amplitud.

### 2.2.5 Factor de forma. Relación entre las señales periódicas analógicas y las digitales.

Las señales periódicas pueden ser caracterizadas por valores de la amplitud, que se denominan "valor eficaz de la amplitud" y "valor medio de la amplitud".

Cuando la amplitud, representa el valor de la tensión de una señal o el valor de la corriente, éstos resultan ser el valor eficaz y medio, de la tensión o de la corriente respectivamente.

Se define como "valor eficaz", al que resulta de la siguiente expresión:

$$y_e = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt \quad (2.17)$$

Se define como "valor medio", al que resulta de la siguiente expresión:

$$y_e = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (2.18)$$

Conocidas las Expresiones (2.17) y (2.18), es posible definir el concepto denominado factor de forma.

Dada una función  $f(t)$ , se denomina factor de forma "FF", a la relación entre los valores eficaz y medio de la misma.

$$\frac{Y_m}{Y_e} \quad (2.19)$$



Dado que el factor de forma de la onda cuadrada es igual a 1, conceptualmente el factor de forma de una señal  $f(t)$  brinda una idea de la deformación que esa función presenta respecto de una función onda cuadrada del mismo período.

Cuanto mayor sea este factor para una función dada, más deformada será ésta respecto de la función onda cuadrada.

### **Ejemplo 2.1 Factor de forma de una onda cuadrada.**

La función onda cuadrada se toma como modelo a partir del cual se puede medir la deformación de cualquier otra señal, respecto de ella.

Veremos que el valor de su factor de forma es igual a uno. Para ello desarrollaremos las expresiones del factor de forma a partir de la onda cuadrada de la Figura 2.7.

Para ello repetiremos la Expresión (2.16), que definía dicha función:

$$f(t) = 1, \text{ para } 0 < t < T/2 \text{ y } f(t) = -1, \text{ para } T/2 < t < T \quad (2.20)$$

Para calcular  $y_e$  e  $y_m$ , dada la simetría particular de la función sobre un período, se calcula para un semiperíodo, es decir;

$$y_e = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t)^2 dt = 1 \quad (2.21)$$

$$y_e = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt = 1 \quad (2.22)$$

luego;

$$FF = \frac{y_e}{y_m} = \frac{1}{1} = 1$$

### Ejemplo 2.2 FACTOR DE FORMA DE UNA ONDA SINUSOIDAL.

Dado que el seno tiene igual simetría, valen las mismas consideraciones que en el caso anterior, luego;

$$y_e = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} (A \operatorname{sen}(\omega t))^2 dt$$

completando el diferencial y extrayendo la constante A de la integral, tendremos;  
y operando convenientemente tendremos que,

$$y_e = \frac{A^2}{\pi} \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}(\omega t))^2 d\omega t$$

$$y_e = \frac{A}{2}$$

$$y = 0,707 A$$

Calculemos ahora  $y_m$

$$y_m = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A \operatorname{sen} \omega t \, dt$$

análogamente, completando el diferencial y tomando  $A = 1$  e integrando tendremos que;

$$y_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \omega t \, d\omega t$$

$$y_m = 0,637$$

$$FF = \frac{0,707}{0,637} = 1,1109$$

Luego es FF igual a: donde se puede observar que el valor obtenido es mayor al de la onda cuadrada, por estar la señal senoidal deformada respecto de ésta.

### 2.2.6 FACTOR DE FORMA DE UNA FUNCIÓN DIENTE DE SIERRA.

La Figura 2-8 nos muestra una función denominada "diente de sierra", que es muy usada en la técnica por cuanto es la que se usa, por ejemplo, para la señal de barrido de un osciloscopio.

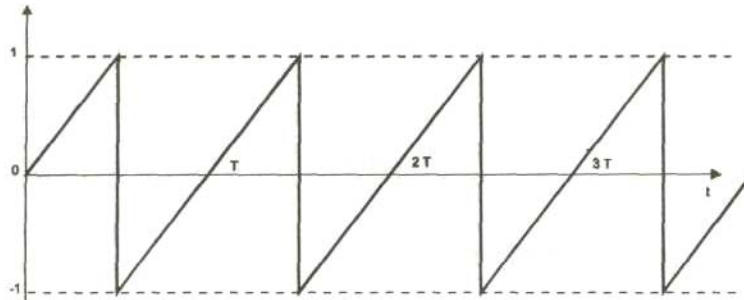


Figura 2.8 Funcion diente de sierra

Figura 2.7 Señal onda cuadrada

Sea esta señal de período  $T$  y amplitud igual a 1, como las anteriores.

Si efectuamos los cálculos correspondientes a este caso, obtendríamos que el valor del factor de forma es igual a:

$$FF = 1,155$$

lo que significa que difiere de la onda cuadrada aún más que la señal senoidal.

## 2.3 ANALISIS DE SEÑALES

### 2.3.1 ANALOGÍA ENTRE SEÑALES Y VECTORES

Se entiende o se recuerda mejor un problema si se lo asocia con algún fenómeno conocido. Por eso, siempre tratamos de buscar analogías al estudiar un nuevo problema. En el estudio de problemas abstractos, las semejanzas resultan muy útiles, particularmente si el problema es análogo a algún fenómeno concreto. Entonces es fácil obtener alguna idea del problema nuevo a partir del conocimiento del fenómeno correspondiente. Afortunadamente existe una

analogía perfecta entre los vectores y las señales que permite un mejor entendimiento del análisis de señales. En seguida repasaremos brevemente las propiedades de los vectores.

### 2.3.2 VECTORES

Un vector se especifica mediante su magnitud y su dirección. Denotaremos todos los vectores con negritas y a sus magnitudes con cursivas; por ejemplo,  $\mathbf{A}$  es determinado vector con magnitud  $A$ . Considérense dos vectores  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$  como los de la figura 2.9. Sea  $V_{12}$  la componente de  $\mathbf{V}_1$  sobre  $\mathbf{V}_2$ . ¿Cómo interpretamos físicamente la componente de un vector a lo largo de otro? Geométricamente, la componente del vector  $\mathbf{V}_1$ , a lo largo del vector  $\mathbf{V}_2$  se obtiene al trazar una perpendicular desde el extremo de  $\mathbf{V}_1$  hacia el vector  $\mathbf{V}_2$ , como vemos en la figura 2.9. El vector  $\mathbf{V}_1$  se puede expresar ahora en términos del vector  $\mathbf{V}_2$ .

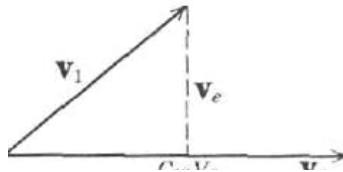


Figura 2.9 Vectores

$$\mathbf{V}_1 = C_1 \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_e$$

Sin embargo ésta no es la única forma de expresar el vector  $\mathbf{V}_1$ , en términos del vector  $\mathbf{V}_2$ . La figura 2.9 nos muestra dos entre infinitas posibilidades.

$$\mathbf{V}_1 = C_1 \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_{e_1} \quad (2.19a)$$

y en la figura (2.10)

$$\mathbf{V}_1 = C_2 \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_{e_2} \quad (2.19b)$$

En cada representación,  $V_1$  queda expresado en términos de  $V_2$  más otro vector, que llamaremos vector error. Si se quiere aproximar el vector  $V_1$  mediante un vector en la dirección de  $V_2$ , entonces  $V_e$  representa el error de la aproximación. Por ejemplo, si en la figura 2.10 aproximamos a  $V_1$  mediante  $C_{12}V_2$ , entonces el error de la aproximación es  $V_e$ . Si en la

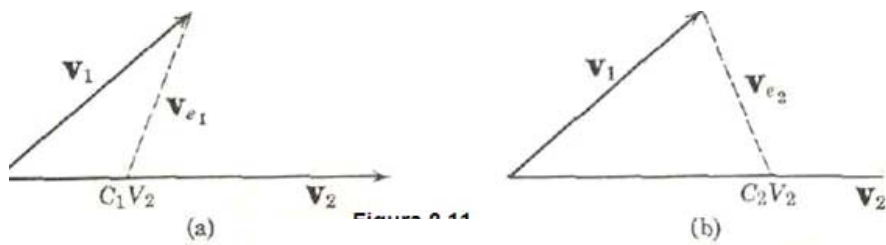


Figura 2.10 Magnitud vectorial

Figura 2.10a, se aproxima  $V_1$ , mediante  $C_1V_2$  entonces el error está dado por  $V_{e1}$ , y así sucesivamente. ¿Qué tiene de particular la representación de la figura 2.10b? La geometría de estas figuras nos enseña claramente que el

Vector error de la figura 2.10b es el menor. Ahora podemos formular una definición cuantitativa de la componente de un vector en la dirección de otro. La componente del vector  $V_1$  en la dirección del vector  $V_2$  está dada por  $C_{12}V_2$ , en donde  $C_{12}$  se escoge de manera que el vector error sea mínimo.

Interpretemos físicamente la componente de un vector a lo largo de otro. Por supuesto que, cuanto mayor sea la componente de un vector en la dirección de otro vector, más se parecen

las direcciones de ambos vectores y es más pequeño el vector error. Si la componente del vector  $V_1$  a lo largo de  $V_2$  es  $C_U V_2$ , entonces la magnitud de  $C_{12}$  indica la similitud de los dos vectores. Si  $C_{12}$  es cero, entonces el vector no tiene componente en dirección del otro, y por lo tanto los dos vectores son perpendiculares entre sí. A estos vectores se les conoce como *vectores ortogonales*. Por lo tanto, los vectores ortogonales son vectores independientes. Si los vectores son ortogonales, entonces el parámetro  $C_{12}$  es cero.

Por conveniencia, definimos el producto escalar de los vectores A y B como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$$

En donde  $\theta$  es el ángulo que forman los vectores A y B. Se tiene de la definición que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

De acuerdo con esta notación,

$$\text{la componente de A a lo largo de B} = A \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{B}$$

y

$$\text{la componente de B a lo largo de A} = B \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{A}$$

De igual manera,

$$\begin{aligned} \text{la componente de } \mathbf{V}_1 \text{ a lo largo de } \mathbf{V}_2 &= \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2}{V_2} \\ &= C_{12} V_2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Por lo tanto

$$C_{12} = \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2}{V_2^2} = \frac{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2} \quad (2.25)$$

Nótese que si  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$  son ortogonales, entonces

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = 0$$

y

$$C_{12} = 0$$

## 2.4 ORTOGONALIDAD.

Dos señales son ortogonales si estas son mutuamente independientes entre sí. En el contexto de las comunicaciones, la ortogonalidad es una propiedad la cual permite que múltiples señales puedan ser transmitidas y recuperadas perfectamente utilizando un canal común y sin interferencia entre ellas. La pérdida de ortogonalidad resulta en una total degradación del sistema de comunicación al no poder recuperarse las formas originales de cada señal. [5]

Muchos esquemas de multiplexación comunes son inherentemente ortogonales; La multiplexación por división de tiempo (TDM), por ejemplo, transmisión de múltiples señales sobre el mismo canal a asignar intervalos de tiempo únicos para



cada una de ellas por separado. Durante cada intervalo de tiempo solamente la señal de una sola fuente es transmitida previniendo cualquier interferencia entre las múltiples fuentes de información.

Debido a esto, TDM es ortogonal por naturaleza. En el dominio de la frecuencia, la mayoría de sistemas FDM son ortogonales en la medida en que cada una de las señales estén suficientemente espaciadas una de otra previniendo la interferencia. Aunque estos métodos son ortogonales, el término OFDM ha sido reservado para una forma especial de FDM. Las subportadoras en una señal OFDM están espaciadas tan cerca como teóricamente sea posible mientras que se sigue manteniendo la ortogonalidad entre ellas. OFDM logra la ortogonalidad en el dominio de frecuencia al asignar cada una de las señales en diferentes portadoras. Las señales OFDM son construidas a partir de una suma de sinusoides, cada una correspondiendo a una subportadora diferente. La frecuencia de banda base de cada subportadora se elige como un múltiplo entero de la inversa de la duración del símbolo, lo cual resulta en que todas las subportadoras tienen un número entero de ciclos por símbolo. Como consecuencia, las subportadoras son ortogonales una con otra. La figura 2.11 muestra la construcción de una señal OFDM con cuatro subportadoras.

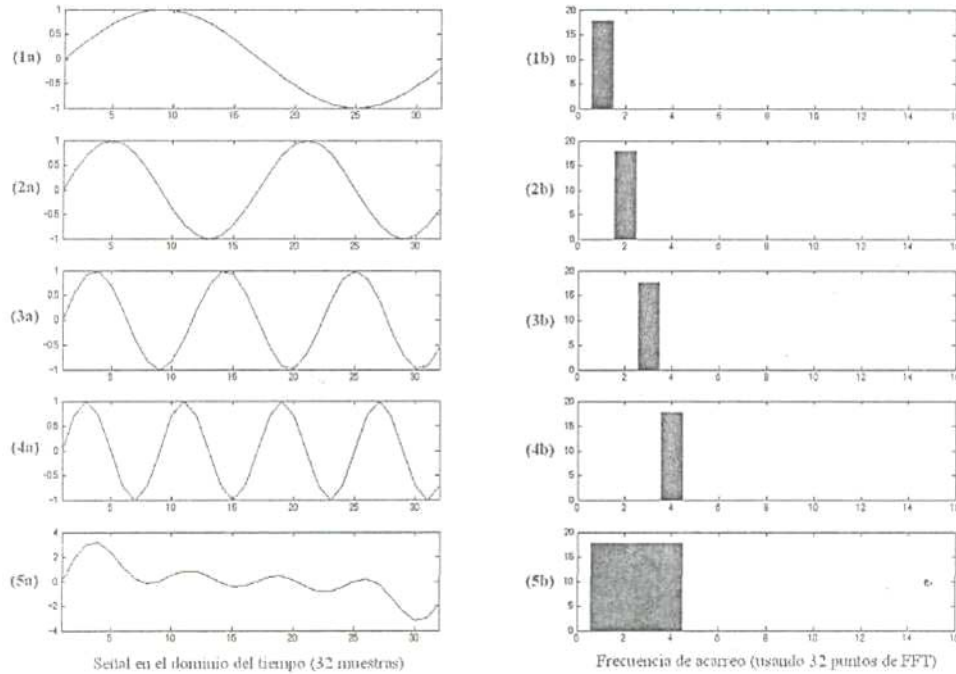


Fig. 2.11 Construcción en el dominio del tiempo de una señal OFDM.

(1a), (2a), (3a) y (4a) muestran las subportadoras individuales con 1, 2, 3 y 4 ciclos por símbolo, respectivamente. La fase de todas estas subportadoras es cero. Note que cada subportadora tiene un número entero de ciclos por símbolo, lo que las hace cíclicas.

Adicionando una copia del símbolo al inicio o al final resultaría en una suave unión entre símbolos. (1b), (2b), (3b) y (4b) muestran la FFT en el dominio del tiempo de las formas de onda (1a), (2a), (3a) y (4a), respectivamente. (5a) y (5b) muestran el resultado de la suma de las cuatro subportadoras.

Un conjunto de funciones es ortogonal si y sólo si cumple con la ecuación (2.24). Si dos funciones cualesquiera distintas dentro del conjunto son multiplicadas e integradas sobre un periodo de símbolo, el resultado es cero para funciones ortogonales. Otra forma de concebir lo anterior es de la forma siguiente: si observamos en un receptor ajustado hacia

una de las funciones ortogonales (una subportadora en el caso de OFDM), entonces el receptor observará solamente el resultado para esa función. Los resultados para todas las otras funciones en el conjunto integran a cero y de esta forma no tienen ningún efecto.

$$\int_0^T s_i(t)s_j(t)dt = \begin{cases} C & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.26)$$

$$s_k(t) = \begin{cases} \text{sen}(2\pi k f_0 t) & 0 < t < T \quad k = 1, 2, \dots, M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.27)$$

Donde  $f_0$  es el espacio entre subportadoras o frecuencia fundamental de subportadora,  $M$  es el número de subportadoras y  $T$  es el periodo de símbolo. Puesto que el componente de frecuencia más alto es  $Mf_0$  el ancho de banda de transmisión es también  $Mf_0$ . Estas subportadoras son ortogonales entre sí puesto que cuando multiplicamos las formas de onda de dos subportadoras cual que requiera e integramos sobre el periodo de símbolo el resultado es cero.

### 2.4.1 ORTOGONALIDAD EN EL DOMINIO DE FRECUENCIA.

Otra forma de ver la propiedad de ortogonalidad de las señales OFDM es observando su espectro. En el dominio de frecuencia, cada subportadora OFDM tiene una respuesta sinc,  $\text{sinc}(x)/x$ , es resultado de la duración del símbolo correspondiendo a la inversa del espacio entre subportadoras. La forma de onda utilizada en la construcción de los símbolos OFDM es un pulso rectangular de duración  $T_{FFT}$ . Esta duración de símbolo corresponde a la inversa del espacio entre subportadoras en el dominio de frecuencia, la cual es  $1/T_{FFT}$  Hz<sup>1</sup>. Esta forma de onda cuadrada en el dominio del tiempo resulta en una respuesta en frecuencia sinc en el dominio de frecuencia. La forma sinc tiene un lóbulo principal angosto, con muchos lóbulos laterales que decaen lentamente con la magnitud de la diferencia en frecuencia siempre desde el centro.

El concepto de comparación y ortogonalidad de vectores se puede extender a las señales. Consideraremos dos señales  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ . Supóngase que se desea aproximar  $f_1(t)$  en términos de  $f_2(t)$  en un cierto intervalo ( $t_1 < t < t_2$ ) de la manera siguiente:

$$f_1(t) \simeq C_{12} f_2(t) \quad \text{en} \quad (t_1 < t < t_2) \quad (2.28)$$

¿Cómo seleccionaremos  $C_{12}$  para obtener la mejor aproximación? Obviamente, debemos encontrar un valor para  $C_{12}$  tal que el error entre la función real y la aproximada sea mínimo en el intervalo ( $t_1 < t < t_2$ ). Definamos una *función de error*  $f_e(t)$ :

$$f_e(t) = f_1(t) - C_{12} f_2(t) \quad (2.29)$$

Uno de los criterios para reducir al mínimo el error  $f_e(t)$  en el intervalo  $t_1$  a  $t_2$  es el de reducir el valor promedio de  $f_e(t)$  en este intervalo; es decir reducir al mínimo la expresión

$$\frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12}f_2(t)] dt \quad (2.30)$$

Sin embargo, el criterio resulta inadecuado, pues tal vez, existan errores positivos y negativos grandes que se cancelen entre sí durante el proceso de promediar, de donde se tendrá una indicación falsa de que el error es cero. Por ejemplo, si aproximamos la función  $\sin t$  con una función nula  $f(t) = 0$  el intervalo de  $0$  a  $2\pi$ , el error promedio será cero; eso indica incorrectamente que  $\sin t$  se puede aproximar a cero en el intervalo de  $0$  a  $2\pi$  sin error alguno. Esta situación se puede corregir si reducimos al mínimo al promedio (o valor medio) del cuadrado del error, en lugar de hacerlo con el promedio del error mismo. Designemos al promedio de  $f_e^2(t)$  por  $\varepsilon$ .

Para encontrar el valor de  $C_{12}$  que reduce  $\varepsilon$  al mínimo, debemos tener

$$\varepsilon = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f_e^2(t) dt = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12}f_2(t)]^2 dt \quad (2.31)$$

A menudo los términos señal y función se emplean indistintamente. Una señal es una función del tiempo; sin embargo, existe una diferencia entre las señales y las funciones. Una función  $f(t)$

puede ser función multivaluada de la variable  $t$ . Pero la señal física siempre es función univaluada de  $t$ . En consecuencia, siempre que se emplee el término función, se entenderá que es una función univaluada de la variable independiente. [17]

Si cambiamos el orden de integración y diferenciación, obtenemos:

$$\frac{1}{(t_2 - t_1)} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f_1^2(t) dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt + 2C_{12} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt \right] = 0 \quad (2.32)$$

Evidentemente, la primera integral es cero; por lo tanto, de la ecuación 2.32

Se obtiene:

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt} \quad (2.33)$$

Por analogía con los vectores, decimos que  $f_1(t)$  tiene una componente de forma de onda  $f_2(t)$  y que la componente tiene una magnitud  $C_{12}$ . Si se anula  $C_{12}$ , entonces la señal  $f_1(t)$  no contiene componente de la señal  $f_2(t)$  y decimos que las dos funciones son ortogonales en el intervalo  $(t_1, t_2)$ . Se deduce, por lo tanto, que las funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  son *ortogonales* en el intervalo  $(t_1, t_2)$  si

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt = 0 \quad (2.34)$$

Obsérvese la similitud entre la ecuación 2.33 de funciones ortogonales y la ecuación 2.34 de vectores ortogonales.

Podemos demostrar fácilmente que las funciones  $\text{sen } n\omega_0 t$  y  $\text{sen } m\omega_0 t$  son ortogonales en cualquier intervalo  $(t_0, t_0 + 2\pi/\omega_0)$  para valores enteros de  $n$  y  $m$ . Considérese la integral  $I$ :

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_0}^{t_0 + 2\pi/\omega_0} \text{sen } n\omega_0 t \text{ sen } m\omega_0 t \, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0 + 2\pi/\omega_0} \frac{1}{2} [\cos (n - m)\omega_0 t - \cos (n + m)\omega_0 t] \, dt \\ &= \frac{1}{2\omega_0} \left[ \frac{1}{(n - m)} \text{sen } (n - m)\omega_0 t - \frac{1}{(n + m)} \text{sen } (n + m)\omega_0 t \right]_{t_0}^{t_0 + 2\pi/\omega_0} \end{aligned}$$

Como  $n$  y  $m$  son enteros,  $(n - m)$  y  $(n + m)$  también lo son. En ese caso la integral  $I$  se vuelve cero. Por lo tanto las dos funciones son ortogonales. En la misma forma, se puede demostrar que  $\text{sen } n\omega_0 t$  y  $\text{cos } n\omega_0 t$  son funciones ortogonales y que  $\text{cos } n\omega_0 t$  y  $\text{cos } m\omega_0 t$  también son ortogonales entre sí.

### Ejemplo 2.3

Se define una función rectangular  $f(t)$  como:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t < \pi) \\ -1 & (\pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

Aproxímese esta función mediante la forma de onda sen  $t$  en el intervalo  $(0,2\pi)$ , de modo que el error cuadrático medio sea mínimo. *Solución.* Aproximaremos a la función  $f(t)$  en el intervalo  $(0, 2\pi)$ , por medio de

$$f(t) \simeq C_{12} \text{ sen } t$$

Encontraremos el valor óptimo de  $C_{12}$  con el que se reduce al mínimo el error cuadrático medio de la aproximación. De acuerdo con la ecuación 2.33, para reducir al mínimo el error cuadrático medio:

$$\begin{aligned} C_{12} &= \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \text{ sen } t \, dt}{\int_0^{2\pi} \text{ sen}^2 t \, dt} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \text{ sen } t \, dt + \int_{\pi}^{2\pi} -\text{sen } t \, dt \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$f(t) \simeq \frac{4}{\pi} \text{ sen } t$$

Representa la mejor aproximación de  $f(t)$  mediante una función sen  $t$  que reduce al mínimo el error cuadrático medio.

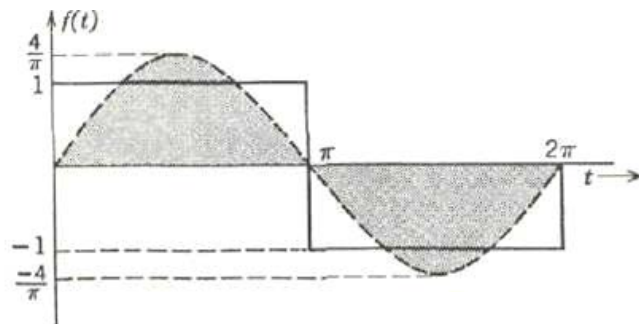


Figura 2.12 Aproximacion  $f(t)$



Por analogía con los vectores, podemos decir que la función rectangular  $f(t)$  de la figura 2.12 tiene una componente de función  $\sin t$  y que la magnitud de esta componente es  $4/\pi$ .

¿Cuál es el significado de la ortogonalidad de dos funciones? En el caso de vectores, la ortogonalidad implica que un vector no tiene componente en la dirección del otro. De igual manera, una función no contiene componente alguna de la forma de la función que es ortogonal a ella. Si intentamos aproximar una función mediante su función ortogonal, el error será más grande que la función original misma, de modo que será mejor aproximar a una función con una función nula

$f(t) = 0$  en lugar de una función ortogonal a ella. Por consiguiente el valor óptimo de  $C_{12}$  es 0 en ese caso.

Determinación gráfica de la componente de una función en otra.

Es posible determinar la componente de una función en otra por medio de procedimientos gráficos. Supóngase que se conocen gráficamente las dos funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  y que se desea determinar la componente de la forma de onda  $f_2(t)$  contenida en la señal  $f_1(t)$  en un período  $(0,7)$ . Sabemos que la componente está dada por  $C_{12}f_2(t)$ ; es decir,

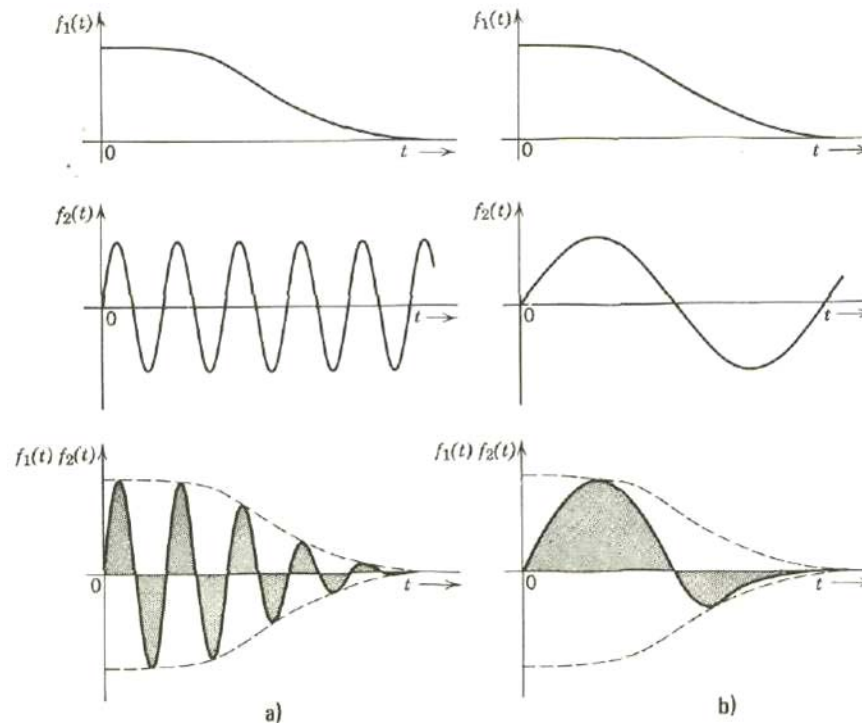


Figura 2.13 Determinación gráfica de la componente de la forma de onda  $f_2(t)$  en una señal  $f_1(t)$ .

$f_1(t)$  contiene la componente de la función  $f_2(t)$  de magnitud  $C_{12}$ , dada por

$$C_{12} = \frac{\int_0^T f_1(t)f_2(t) dt}{\int_0^T f_2^2(t) dt}$$

Se encuentra la integral del numerador de esta ecuación al multiplicar las dos funciones y evaluar el área bajo la curva producto, como se muestra en la figura 2.13. La integral del denominador se obtiene al encontrar el área bajo la función  $[f_2(t)]^2$  de una manera similar.

Es evidente que si  $f_1(t)$  banca mucho mas lentamente que  $f_2(t)$  el área bajo la curva  $f_1(t)f_2(t)$  será muy pequeña, pues, las áreas positivas y negativas serán aproximadamente iguales y tenderán a cancelarse entre si como vemos en la figura 2.13a. En consecuencia,  $f_1(t)$  contiene una pequeña componente de  $f_2(t)$ . No obstante, si  $f_1(t)$  varían aproximadamente con la misma rapidez que  $f_2(t)$ , entonces el área bajo la curva producto  $f_1(t)f_2(t)$  será mucho mayor, como se muestra en la figura 2.13b y, por lo tanto  $f_1(t)$  contendrá una componente grande de la función  $f_2(t)$ . Este resultado también es intuitivamente obvio, ya que si dos funciones varían con rapidez aproximadamente igual, deben ser bastante parecidas y, por consiguiente,  $f_1(t)$  contendrá una componente grande de la función  $f_2(t)$

#### 2.4.2 ESPACIO ORTOGONAL DE VECTORES

Se puede llevar aun más lejos la analógica entre vectores y seriales. Consideremos un espacio vectorial de tres dimensiones, descrito mediante coordenadas rectangulares, como en la figura 2.14. Designaremos un vector de longitud unitaria en el eje  $x$  como  $a_x$ . De la misma manera, se designaran

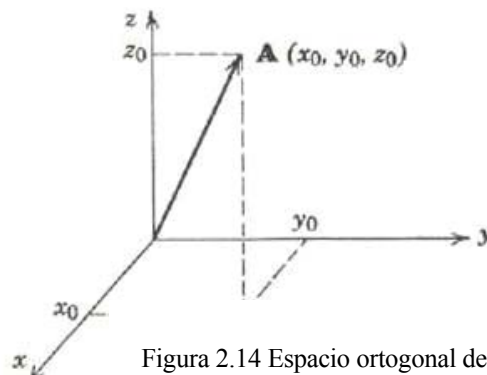


Figura 2.14 Espacio ortogonal de vectores

Como  $a_y$  y  $a_z$  a los vectores unitarios sobre los ejes  $y$  y  $z$ , respectivamente. Ya que la magnitud de los vectores  $a_x$  y  $a_z$  es la unidad, se infiere que, en general, para cualquier vector  $A$ :

La componente de  $A$  en la dirección del eje  $x$  —  $A \cdot a_x$  La componente de  $A$  en la dirección del eje  $y = A \cdot a_y$  La componente de  $A$  en la dirección del eje  $z = A \cdot a_z$

Un vector  $A$  desde el origen hasta un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  del espacio tiene como componentes a  $x_0$ ,  $y_0$  y  $z_0$  en la dirección de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Podemos expresar este vector  $A$  en términos de sus componentes a lo largo de los tres ejes perpendiculares entre sí:

$$\mathbf{A} = x_0 \mathbf{a}_x + y_0 \mathbf{a}_y + z_0 \mathbf{a}_z$$

Se puede expresar cualquier vector del espacio en términos de los vectores,  $a_x$ ,  $a_y$  y  $a_z$ .

Puesto que los tres vectores son mutuamente perpendiculares, se deduce que

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = 0 \quad (2.35)$$

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1 \quad (2.36)$$

Las propiedades de los tres vectores, como nos dice la ecuación 2.33, e pueden expresar en forma resumida como

$$\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{a}_n = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

En donde  $m$  y  $n$  pueden tener cualquier valor  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

A continuación haremos una observación importante. Si el sistema de coordenadas cuenta solamente con dos ejes,  $x$  y  $y$ , entonces el sistema resulta inadecuado para expresar cualquier vector  $A$  en términos de las componentes en estos ejes. En este sistema solo se expresan dos de las componentes del vector  $A$ . Por lo tanto, se necesita de un sistema de coordenadas completo para poder expresar a cualquier vector  $A$  en términos de sus componentes. En este caso deben existir tres ejes de coordenadas.

Un área recta representa un espacio de una dimensión; un plano representa un espacio de dos dimensiones y nuestro universo, en general, es un espacio de tres dimensiones. Los conceptos desarrollados aquí son aplicables a un espacio de  $n$  dimensiones. Por supuesto que tal espacio físico no existe en la naturaleza; no obstante, existen muchos problemas análogos que conviene considerar como problemas de  $n$  dimensiones. Por ejemplo, una ecuación lineal con  $n$  variables independientes puede considerarse como vector expresado en términos de sus componentes con respecto a  $n$  coordenadas perpendiculares entre sí.

Si a los vectores unitarios a lo largo de estas  $n$  coordenadas mutuamente perpendiculares se les designa por  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y si un vector  $A$  del espacio de  $n$  dimensiones tiene por componentes a  $C_1, C_2, \dots, C_n$  respectivamente, a lo largo de estas  $n$  coordenadas, entonces

$$\mathbf{A} = C_1\mathbf{x}_1 + C_2\mathbf{x}_2 + C_3\mathbf{x}_3 + \dots \quad (2.37)$$

Los vectores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son todos ortogonales entre sí y el conjunto debe ser completo para que cualquier vector quede representado mediante la ecuación 2.37. La condición de ortogonalidad implica que el producto escalar el error habrá de disminuir. Por la manera en que se ha definido,  $\epsilon$  es una cantidad positiva; por lo tanto, en el límite, cuando el número de

términos se vuelve infinito, la suma  $\sum_{r=1}^{\infty} C_r^2 K_r$  converge a la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt$$

y entonces  $\epsilon$  se anula. Así,

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{r=1}^{\infty} C_r^2 K_r \quad (2.38)$$

En esas condiciones,  $f(t)$  queda representada por la serie infinita:

$$f(t) = C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \dots + C_r g_r(t) + \dots$$

La serie infinita del segundo miembro de la ecuación 2.38 converge a  $f(t)$  de manera que el valor medio del cuadrado del error es cero. Se dice que la serie *converge al valor medio*. Nótese que, aquí, la representación de  $f(t)$  es exacta.

Se dice que un conjunto de funciones  $g_1(t), g_2(t), \dots, g_r(t)$  mutuamente ortogonales en el intervalo  $(t_1, t_2)$  es completo o cerrado cuando no existe una función  $x(t)$  para la cual se cumpla que:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_k(t) dt = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Si se puede encontrar una función  $x(t)$  tal que la integral anterior se anule, entonces, evidentemente,  $x(t)$  es ortogonal a cada uno de los miembros del conjunto  $\{g_r(t)\}$  y, en consecuencia, forma parte del conjunto. Es obvio que el conjunto no es completo si  $x(t)$  no pertenece a él.

Ahora conviene resumir los resultados. Para un conjunto  $(g_r(t))$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) mutuamente ortogonal en el intervalo  $(t_1, t_2)$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2} g_m(t)g_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ K_m & \text{si } m = n \end{cases} \quad (2.39)$$

Si este conjunto de funciones es completo, entonces se puede expresar cualquier función  $f(t)$  como

$$C_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_r(t) dt}{K_r} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_r(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt} \quad (2.40)$$

$$f(t) = C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \dots + C_r g_r \quad (2.41)$$

En la comparación de vectores y señales, el producto escalar de dos vectores es análogo a la integral del producto de dos señales, es decir

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \sim \int_{t_1}^{t_2} f_A(t) f_B(t) dt$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 \sim \int_{t_1}^{t_2} f_A^2(t) dt$$

Si se expresa un vector en términos de sus componentes mutuamente ortogonales, el cuadrado de la magnitud está dado por la suma de los cuadrados de las magnitudes de los vectores componentes. Para las señales, también se tiene un resultado análogo, que se expresa con precisión en la ecuación 2.38 (teorema de Parseval). Puesto que las funciones componentes no son ortonormales, el segundo miembro es

$$\sum C_r^2 K_r^2 \text{ en lugar de } \sum C_r^2.$$

Un conjunto ortonormal,  $K_r = 1$ . Así la ecuación 2.39 es análoga al caso en que se expresa un vector en términos de sus componentes a lo largo de vectores mutuamente ortogonales cuyas magnitudes cuadradas son  $K_1, K_2, \dots, K_r, \dots$ , etc.

La ecuación 2.38 nos muestra que  $f(t)$  contiene una componente de señal  $g_r(t)$  con magnitud  $C_r$ . La representación de  $f(t)$  mediante un conjunto infinito de funciones



mutuamente ortogonales se conoce como *representación generalizada de  $f(t)$  en serie de Fourier*.

### Ejemplo 2.4

Consideraremos de nuevo la función rectangular del ejemplo 2.1 que se muestra en la figura 2.12. Se hizo una aproximación a esta función mediante una sola función  $\text{sen } t$ . Aquí veremos que se obtiene una aproximación mejor cuando se emplea un gran número de funciones mutuamente ortogonales. Vimos antes que las funciones  $\text{sen } n\omega_0 t$  y  $\text{sen } \omega_0 t$  son mutuamente ortogonales en el intervalo  $(t_0, t_0 + 2\pi \omega_0 t)$  para todos los valores enteros de  $n$  y  $m$ . Por lo tanto, se deduce que un conjunto de funciones  $\text{sen } t$ ,  $\text{sen } 2t$ ,  $\text{sen } 3t$ , etc., es mutuamente ortogonal en el intervalo  $(0, 2\pi t)$ . A continuación se hará una aproximación a la función rectangular de la figura 2.14 mediante una serie finita de funciones sinusoidales

$$f(t) \simeq C_1 \text{sen } t + C_2 \text{sen } 2t + \dots + C_n \text{sen } nt$$

$$\begin{aligned} C_r &= \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \text{sen } rt \, dt}{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 rt \, dt} \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \text{sen } rt \, dt - \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } rt \, dt \right) \\ &= \frac{4}{\pi r} \quad \text{si } r \text{ es impar} \\ &= 0 \quad \text{si } r \text{ es par} \end{aligned}$$

Así,  $f(t)$  queda aproximada por

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \text{sen } t + \frac{1}{3} \text{sen } 3t + \frac{1}{5} \text{sen } 5t + \frac{1}{7} \text{sen } 7t + \dots \right) \quad (2.42)$$

La figura 2.14 nos muestra la función real y la función aproximada cuando se hace la aproximación con uno, dos, tres y cuatro términos, respectivamente, en la ecuación 2.42. Para el número dado en términos de la forma  $\text{sen } r_t$ , se tiene que constituyen las aproximaciones óptimas que reducen al mínimo al error cuadrático medio. A medida que se incrementa el número de términos, la aproximación es mejor y disminuye el error cuadrático medio. Para un número infinito de términos el error cuadrático medio es cero.

$$\varepsilon = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[ \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - C_1^2 K_1 - C_2^2 K_2 - \dots \right]$$

En este caso

$$(t_2 - t_1) = 2\pi$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t < \pi) \\ -1 & (\pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} f^2(t) dt = 2\pi$$

Además,

$$C_r = \begin{cases} \frac{4}{\pi r} & \text{si } r \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$$

y

$$K_r = \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 rt dt = \pi$$

Se determino el error  $\epsilon$  en estas aproximaciones. De la ecuación 2.37,

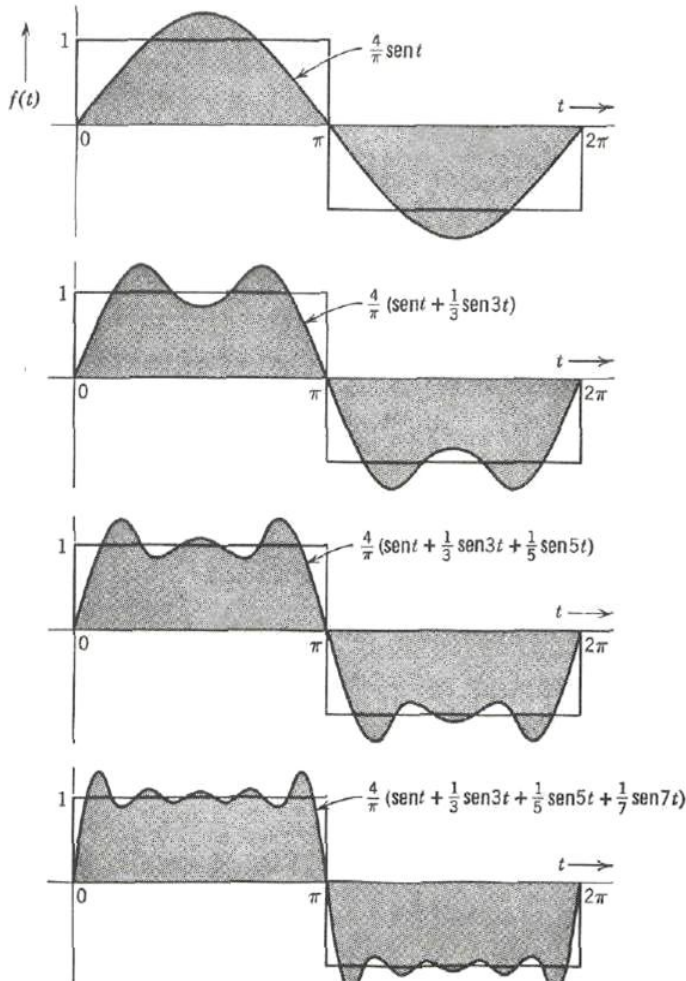


Figura 2.15 Aproximación a una función rectangular mediante funciones ortogonales Espacio ortogonal

Por lo tanto, en la aproximación de un término,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2\pi} \left[ 2\pi - \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 \pi \right] = 0.19$$

En la aproximación de dos términos

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2\pi} \left[ 2\pi - \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 \pi - \left( \frac{4}{3\pi} \right)^2 \pi \right] = 0.1$$

En la aproximación de tres términos,

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2\pi} \left[ 2\pi - \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 \pi - \left( \frac{4}{3\pi} \right)^2 \pi - \left( \frac{4}{5\pi} \right)^2 \pi \right] = 0.0675$$

y

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{2\pi} \left[ 2\pi - \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 \pi - \left( \frac{4}{3\pi} \right)^2 \pi - \left( \frac{4}{5\pi} \right)^2 \pi - \left( \frac{4}{7\pi} \right)^2 \pi \right] = 0.051$$

Y así sucesivamente.

Se ve fácilmente que, en este caso, el error cuadrático medio disminuye rápidamente a medida que aumenta el número de términos.

# CAPÍTULO III

# ANÁLISIS DE FOURIER

---

---

## CAPÍTULO 3 ANÁLISIS DE FOURIER.

### 3.1 UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA

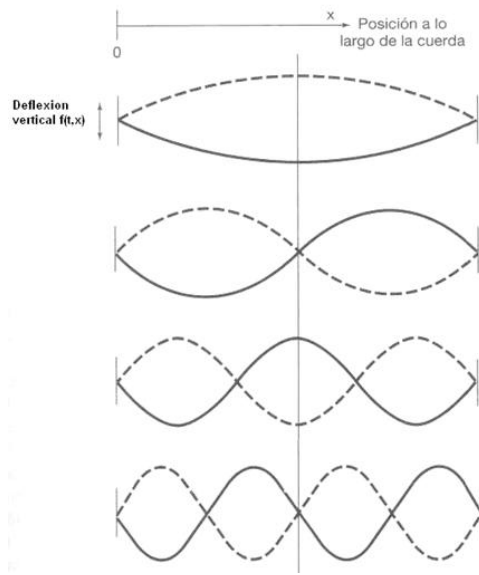
El desarrollo del análisis de Fourier tiene una larga historia que involucra a un gran número de personas así como la investigación de muchos fenómenos físicos diferentes.<sup>1</sup> El concepto del empleo de "sumas trigonométricas" (esto es, las sumas de senos y cósenos relacionadas armónicamente, o las de exponenciales complejas periódicas, relacionadas en la misma forma), para describir fenómenos periódicos data cuando menos del tiempo de los babilonios, quienes utilizaron ideas de este tipo para predecir eventos astronómicos. La historia moderna de esta materia empieza en 1748, cuando L. Euler examina el movimiento de una cuerda vibratoria. En la figura 3.0.1 mostramos algunos de los primeros "modos normales" de este tipo de cuerda. Si consideramos la deflexión vertical  $f(t, x)$  de la cuerda en el tiempo  $t$  y a una distancia  $x$  a lo largo de la cuerda, entonces, para cualquier instante fijo de tiempo, los modos normales son funciones senoidales de  $x$  relacionadas armónicamente. Lo que Euler notó fue que si la configuración de una cuerda vibratoria en algún punto del tiempo es una combinación lineal de estos modos normales, también lo es su configuración en cualquier tiempo subsecuente. Más aún, Euler demostró que uno podía calcular los coeficientes de la combinación lineal para un tiempo posterior de una manera muy directa a partir de los coeficientes del tiempo anterior. Al hacer esto, Euler había efectuado el mismo tipo de cálculo que nosotros haremos en la próxima sección cuando deduzcamos una de las propiedades de las sumas trigonométricas que las hacen tan útiles para el análisis de los sistemas LTI. Específicamente, veremos que si la entrada a un sistema LTI se expresa como una combinación lineal de exponenciales complejas periódicas o senoides, la salida también se

---

---

puede expresar de esta forma, con coeficientes que están relacionados de una forma directa con los de la entrada. [1]

La propiedad descrita en el párrafo precedente no sería de utilidad particular alguna si no fuera cierto que una amplia clase de funciones interesantes puede representarse mediante combinaciones lineales de exponenciales complejas. A mediados del siglo XVII este punto fue motivo de un acalorado debate. En 1753 D. Bernoulli argumentaba, con bases físicas, que todos los movimientos físicos de una cuerda podían ser representado mediante combinaciones lineales de modos normales, pero él no sustentó matemáticamente estas ideas, por lo que no fueron aceptadas ampliamente. De hecho, el mismo Euler descartó las series trigonométricas, y en 1759 J. L. Lagrange criticó fuertemente su uso en el examen de cuerdas vibratorias. Las críticas de Lagrange se basaban en su propio creencia de que era imposible representar señales con esquinas (es decir, con pendientes discontinuas) empleando series trigonométricas. Puesto que dicha configuración surge cuando se pulsa una cuerda (es decir, tensándola para después soltarla), él argumentaba que las series trigonométricas eran de uso muy limitado.'



**Figura 3.0.1** Modos normales de una cuerda en vibración

Fue dentro de este ambiente un tanto hostil y escéptico que Jean Baptiste Joseph Fourier (figura 3.0.2) presentó sus ideas medio siglo después. Fourier nació el 21 de marzo de 1768 en Auxerre, Francia, y para la época en que entró en la controversia sobre las series trigonométricas ya tenía toda una vida de experiencias. Sus muchas contribuciones, en particular aquellas relativas a las series y transformadas que llevan su nombre, son aún más impresionantes por las circunstancias en las cuales desarrollo su trabajo. Sus revolucionarios descubrimientos, aunque no fueron apreciados por completo durante su propia vida, han tenido un gran impacto en el desarrollo de las matemáticas, y además han sido y son todavía de gran importancia en una variedad extremadamente amplia de disciplinas científicas y de la ingeniería.

Además de sus estudios en matemáticas, Fourier llevó una vida política muy activa. De hecho, durante los años que siguieron a la Revolución Francesa sus actividades casi lo condujeron a la muerte, pues en dos ocasiones logró escapar de la guillotina por muy



poco. Más tarde, Fourier se convirtió en colaborador de Napoleón Bonaparte, lo acompañó en sus expediciones a Egipto (durante las cuales Fourier recopiló la información que usaría después como base de sus tratados sobre Egiptología) y en 1802 fue nombrado por Bonaparte como prefecto de una región de Francia con sede en Grenoble. Fue ahí, mientras fungía como prefecto, que Fourier desarrolló sus ideas sobre las series trigonométricas.



Figura 3.0.2 Jean Baptiste Joseph Fourier [foto de J. B. J. Fourier, )

Los eventos físicos que motivaron el trabajo de Fourier fueron los fenómenos de propagación y difusión del calor. Esto, por sí mismo, fue un paso significativo por cuanto que la mayor parte de la investigación previa en física matemática había tenido que ver con la mecánica racional y celestial. Para 1807, Fourier había completado un trabajo: había encontrado que algunas series de senoides relacionadas armónicamente eran útiles para representar la distribución de la temperatura a través de un cuerpo. Adicionalmente, sostenía que "cualquier" señal periódica podía ser representada por tales series. Si bien su tratamiento de este tema era significativo, muchas de las ideas básicas sobre las que se sustentaba habían sido descubiertas por otros. Asimismo, los argumentos matemáticos de Fourier eran aún imprecisos, y no fue sino hasta 1829 que P. L. Dirichlet proporcionó las condiciones precisas bajo las cuales una señal periódica podía ser representada con una serie de Fourier. En este sentido, Fourier no contribuyó en realidad a la teoría matemática de las series de Fourier. Sin embargo, sí tuvo la perspicacia para ver el potencial de esta representación mediante series, y en gran medida su trabajo y sus afirmaciones fueron lo que impulsó muchos de los trabajos

---

---

subsecuentes sobre las series de Fourier. Además, Fourier llevó este tipo de representación un gran paso adelante de cualquiera de sus predecesores: obtuvo una representación a para señales *aperiódicas* no como *sumas* ponderadas de senoides relacionadas armónicamente, sino como *integrales* ponderadas de senoides que no están relacionadas armónicamente. Es a esta extensión, desde la serie de Fourier hasta la integral o transformada de Fourier, a lo que se enfocan los capítulos 4 y 5. Al igual que la serie de Fourier, la transformada de Fourier sigue siendo una de las herramientas más poderosas para el análisis de sistemas LTI. [6]

Cuatro distinguidos matemáticos y científicos fueron designados para examinar el documento presentado por Fourier en 1807. Tres de los cuatro (S. F. Lacroix, G. Monge y P. S. de Laplace) estaban a favor de que se publicara el documento, pero el cuarto, J. L. Lagrange, permaneció firme en su rechazo de las series trigonométricas, rechazo que había manifestado 50 años atrás. Debido a las vehementes objeciones de Lagrange, el documento de Fourier nunca se publicó. Después de varios intentos adicionales para que su trabajo fuese aceptado y publicado por el Instituto de Francia, Fourier empezó a escribir otra versión de su trabajo, la cual apareció con el nombre de *Théorie analytique de la chaleur*.

Este libro fue publicado en 1822, 15 años después de que Fourier presentara por primera vez sus resultados a dicho instituto. Hacia el final de su vida Fourier recibió parte del reconocimiento que merecía, pero el tributo más significativo que se le pudo haber hecho ha sido el enorme impacto que ha tenido su trabajo en muchas disciplinas dentro de los campos de las matemáticas, la ciencia y la ingeniería.

### 3.2 La serie trigonométrica de Fourier

Ya hemos demostrado que las funciones  $\sin \omega_0 t$ ,  $\sin 2\omega_0 t$ , etc., forman un conjunto ortogonal en cualquier intervalo  $(t_0, t_0 + 2\pi/\omega_0)$ . Este conjunto, sin embargo, no es completo. Esto lo evidencia el hecho de que una función  $\cos n\omega_0 t$  es ortogonal a  $\sin m\omega_0 t$  en el mismo intervalo. Consecuentemente para completar el conjunto, debemos agregar funciones coseno así como funciones seno. Se puede demostrar que el conjunto de funciones que consta de un grupo  $\cos n\omega_0 t$  y otro  $\sin n\omega_0 t$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) forma un conjunto ortogonal completo. Nótese que, para  $n = 0$ ,  $\sin n\omega_0 t$  es cero, pero  $\cos n\omega_0 t = 1$ . Es así como tenemos un conjunto ortogonal completo, representado por las funciones  $1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t, \dots$ ;  $\sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots, \sin n\omega_0 t, \dots$ , etc. Se deduce que cualquier función  $f(t)$  puede representarse en términos de estas funciones en cualquier intervalo  $(t_0, t_0 + 2\pi/\omega_0)$ . Así

$$\begin{aligned}
 f(t) = & a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + a_n \cos n\omega_0 t + \dots \\
 & + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots + b_n \sin n\omega_0 t + \dots \\
 & (t_0 < t < t_0 + 2\pi/\omega_0)
 \end{aligned}$$

Denotaremos, por conveniencia,  $2\pi/\omega_0$  por  $T$ . La ecuación anterior queda entonces como

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (t_0 < t < t_0 + T) \quad (3.1)$$

La ecuación 3.1 es la representación de  $f(t)$  por medio de la serie trigonométrica de Fourier en el intervalo  $(t_0, t_0 + T)$ . Las constantes  $a_n$  y  $b_n$  están dadas por

$$a_n = \frac{\int_{t_0}^{(t_0+T)} f(t) \cos n\omega_0 t dt}{\int_{t_0}^{(t_0+T)} \cos^2 n\omega_0 t dt} \quad (3.2a)$$

y

$$b_n = \frac{\int_{t_0}^{(t_0+T)} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt}{\int_{t_0}^{(t_0+T)} \operatorname{sen}^2 n\omega_0 t dt} \quad (3.2b)$$

Si ponemos  $n = 0$  en la ecuación 1.47a, obtenemos

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{(t_0+T)} f(t) dt \quad (3.3a)$$

También tenemos que

$$\int_{t_0}^{(t_0+T)} \cos^2 n\omega_0 t dt = \int_{t_0}^{(t_0+T)} \operatorname{sen}^2 n\omega_0 t dt = \frac{T}{2}$$

Por consiguiente,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{(t_0+T)} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (3.3b)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{(t_0+T)} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt \quad (3.3c)$$

El término constante  $a_0$  en la serie está dado por la ecuación 3.3a. Es evidente que  $a_0$  es el valor promedio de  $f(t)$  en el intervalo  $(t_0, t_0 + T)$ . Así,  $a_0$  es la componente de corriente directa de  $f(t)$  en este intervalo.

La serie trigonométrica (ecuación 3.1) tiene la siguiente representación compacta:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos (n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (3.4)$$

en donde

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (3.5)$$

y  $\varphi_n = -\tan^{-1} (b_n/a_n)$ .

**Ejemplo 3.1**

Vamos a desarrollar la función  $f(t)$  de la figura 3.1 mediante una serie trigonométrica de Fourier en el intervalo  $(0,1)$ . Desde luego,  $f(t) = At$  ( $0 < t < 1$ ), el intervalo  $T=1$ , y  $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi$ . Debemos escoger  $t_0 = 0$ . Así

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos 2\pi t + a_2 \cos 4\pi t + \cdots + a_n \cos 2\pi n t + \cdots \\ + b_1 \sin 2\pi t + b_2 \sin 4\pi t + \cdots + b_n \sin 2\pi n t + \cdots \quad (3.6)$$

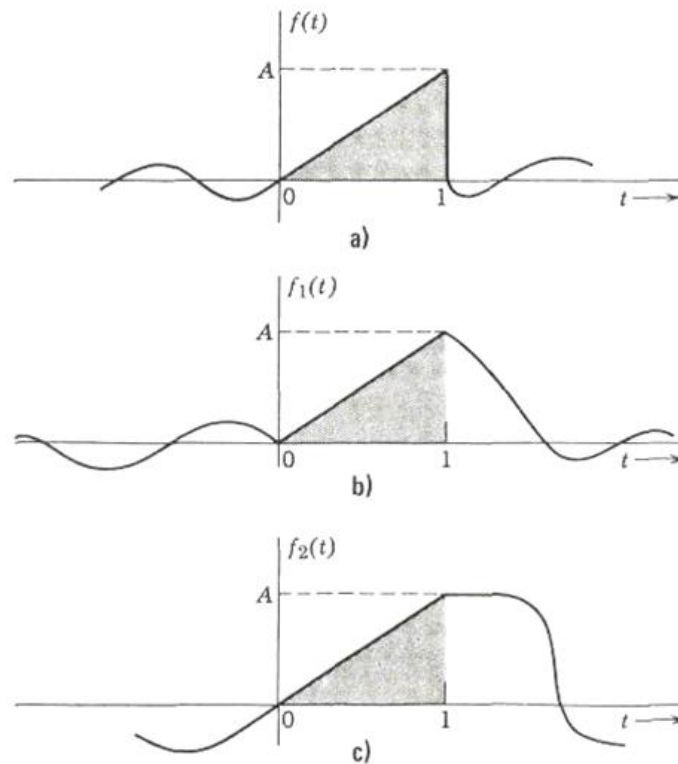


Figura 3.1 función  $f(t)$  mediante una serie trigonométrica de Fourier

Se determinan los diversos coeficientes de la serie en la ecuación 3.6, empleando las ecuaciones de la 3.3a a la 3.3c.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 1 \int_0^1 At dt = \frac{A}{2} \quad (3.7a)$$

De la misma manera,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 At \cos 2\pi nt dt \\ &= \frac{A}{2\pi^2 n^2} [\cos 2\pi nt + 2\pi nt \sin 2\pi nt]_0^1 = 0 \end{aligned} \quad (3.7b)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 At \sin 2\pi nt dt \\ &= \frac{A}{2\pi^2 n^2} [\sin 2\pi nt - 2\pi nt \cos 2\pi nt]_0^1 = \frac{-A}{\pi n} \end{aligned} \quad (3.7c)$$

Como  $a_n = 0$  para todos los valores de  $n$ , todos los términos coseno de la ecuación 3.6 son cero. Los coeficientes de los términos seno están dados por la ecuación 3.7c. La serie de la ecuación 3.6 queda expresada como

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sin 2\pi t - \frac{A}{2\pi} \sin 4\pi t - \frac{A}{3\pi} \sin 6\pi t - \dots \\ &\quad - \frac{A}{n\pi} \sin 2\pi nt - \dots \quad (0 < t < 1) \\ &= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nt}{n} \quad (0 < t < 1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

En esta forma, hemos expresado  $f(t)$  en términos de sus componentes en el intervalo (0, 1). De la ecuación 3.8 se desprende que  $f(t)$  tiene una componente de corriente directa de valor  $A/2$ . Además,  $f(t)$  tiene componentes de funciones sinusoidales  $\sin 2\pi t$ ,  $\sin 4\pi t$ , etc., con magnitudes  $-A/\pi$ ,  $-A/2\pi$ , etc., respectivamente.

Conviene observar que la serie de la ecuación 3.6 representará también cualquier otra función que sea idéntica a  $f(t)$  en el intervalo (0, 1). Es decir, las funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  de las figuras 3.1b y 3.1c son idénticas a  $f(t)$  en el intervalo (0, 1) y, por consiguiente, se

pueden representar ambas funciones en el intervalo  $(0, 1)$  mediante la serie de la ecuación 3.8.

### 3.3 SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER

Se puede demostrar fácilmente que el conjunto de funciones exponenciales  $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ , ( $n = 0, \pm 1, + 2, \dots$ ) es ortogonal en el intervalo  $(t_0, t_0 + 2\pi/\omega_0)$  para cualquier valor de  $t_0$ . Nótese que éste es un conjunto de funciones complejas. Podemos demostrar su ortogonalidad, considerando la integral[14]

$$I = \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} (e^{jn\omega_0 t})(e^{jm\omega_0 t})^* dt = \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt$$

si  $n = m$ , la integral  $I$  está dada por

$$I = \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} dt = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

si  $n \neq m$ , la integral  $I$  está dada por

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{jn - m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t} \Big|_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} \\ &= \frac{1}{jn - m)\omega_0} e^{i(n-m)\omega_0 t_0} [e^{i2\pi(n-m)} - 1] \end{aligned}$$

Puesto que  $m$  y  $n$  son enteros,  $e^{j2\pi(n-m)}$  es igual a la unidad y, en consecuencia, la integral vale cero:

$$I = 0$$



Así,

$$\int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_0} e^{jn\omega_0 t} (e^{jm\omega_0 t})^* dt = \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega_0} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (3.9)$$

Como antes, sea

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = T$$

De la ecuación (3.9) es evidente que el conjunto de funciones

$$\{e^{jn\omega_0 t}\} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

es ortogonal en el intervalo  $(t_0, t_0 + T)$ , en donde  $T = 2\pi/\omega_0$ . Además, se puede demostrar que éste es un conjunto completo. Por lo tanto, es posible representar cualquier función  $f(t)$  mediante una combinación lineal de funciones exponenciales en el intervalo  $(t_0, t_0 + T)$ :

$$\begin{aligned} f(t) &= F_0 + F_1 e^{j\omega_0 t} + F_2 e^{j2\omega_0 t} + \dots + F_n e^{jn\omega_0 t} + \dots \\ &\quad + F_{-1} e^{-j\omega_0 t} + F_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + \dots + F_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \dots \end{aligned}$$

para

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (t_0 < t < t_0 + T) \quad (3.10)$$

En donde  $\omega_0 = 2\pi/T$  y la suma en la ecuación 3.10 es para valores enteros de  $n$  desde  $-\infty$  hasta  $\infty$  sin excluir el cero. A la representación de  $f(t)$  mediante la serie exponencial, como se muestra en la ecuación 3.10, se le conoce como representación de  $f(t)$  mediante la serie exponencial de Fourier en el intervalo  $(t_0, t_0 + T)$ . Los diferentes coeficientes de la serie se determinan con la ecuación 3.11

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)(e^{jn\omega_0 t})^* dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jn\omega_0 t}(e^{jn\omega_0 t})^* dt} \\
 &= \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jn\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t} dt} \\
 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

También se pudo haber obtenido directamente el resultado al multiplicar ambos miembros de la ecuación 3.10 por  $e^{-jn\omega_0 t}$  e integrar con respecto a  $t$  en el intervalo  $(t_0 > t_0 + T)$ . En virtud de la ortogonalidad, se anulan todos los términos del segundo miembro con la salvedad de uno, y se obtiene la expresión de  $F_n$  de la ecuación 3.11

Resumamos los resultados:

Se puede expresar cualquier función  $f(t)$  dada como suma discreta de funciones exponenciales  $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ , ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) en el intervalo  $t_0 < t < t_0 + T$ , ( $\omega_0 = 2\pi/T$ )

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (t_0 < t < t_0 + T) \quad (3.12)$$

en donde

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.13)$$

Obsérvese que las series exponencial y trigonométrica de Fourier no son dos tipos diferentes de series, sino dos formas distintas de expresar la misma serie. Se pueden obtener los coeficientes de una de las series a partir de los de la otra. Esto se demuestra por medio de las ecuaciones 3.12 y 3.13. De estas ecuaciones se deduce que

$$\begin{aligned}
 a_0 &= F_0 \\
 a_n &= F_n + F_{-n} \\
 b_n &= j(F_n - F_{-n})
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

También podemos utilizar la ecuación 3.14 para obtener los coeficientes de la serie exponencial a partir de los de la serie trigonométrica. Si sustituimos las ecuaciones 3.13 en la ecuación 3.14, obtenemos

$$F_0 = \frac{A}{2} \quad \text{y} \quad F_n = \frac{jA}{2\pi n} \tag{3.15a}$$

en consecuencia

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{jA}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{jn2\pi t} \tag{3.15b}$$

### 3.4 REPRESENTACION DE UNA FUNCION PERIODICA MEDIANTE LA SERIE DE FOURIER EN TODO EL INTERVALO $(-\infty < t < \infty)$

Hasta aquí, hemos representado una función  $f(t)$  como serie de Fourier en un intervalo finito  $(t_0, t_0 + T)$ . Fuera del intervalo, la función  $f(t)$  y la serie de Fourier correspondiente no son necesariamente iguales. Sin embargo, si la función  $f(t)$  es periódica, se puede demostrar que su representación en serie se aplica a todo el intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Esto se demuestra fácilmente si se toma una función  $f(t)$  y su representación en serie exponencial de Fourier en el intervalo  $(t_0, t_0 + T)$ :

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{jA}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{jn2\pi t}$$

La igualdad es válida en el intervalo  $(t_0, t_0 + T)$ . Los dos miembros de la ecuación 3.16 no son necesariamente iguales fuera del intervalo. Es fácil ver, sin embargo, que el segundo miembro de la ecuación 3.16 es periódico (con período  $T=2\pi/\omega_0$ ). Esto se deduce de que

$$e^{jn\omega_0 t} = e^{jn\omega_0(t+T)} \quad \text{para } T = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Por lo tanto, es obvio que, si  $f(t)$  es periódica con período  $T$ , entonces la igualdad de la ecuación 3.16 es válida en todo el intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Así, para una función periódica  $f(t)$ , [54]

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (-\infty < t < \infty)$$

en donde

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Nótese que la elección de  $t_0$  es indiferente.

**Ejemplo 3.2**

Considérese la onda seno rectificada de la figura 3.2. En esta función

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j2\pi n t} \quad \begin{cases} \omega_0 = 2\pi \\ T = 1 \end{cases}$$

$$F_n = A \int_0^1 \text{sen } \pi t e^{-j2\pi n t} dt$$

$$= \frac{-2A}{\pi(4n^2 - 1)}$$

Por lo tanto,

$$f(t) = \frac{-2A}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} e^{j2\pi n t}$$

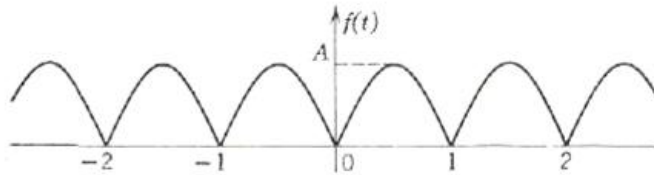


Figura 3.2 Onda seno rectificada

### 3.5 EL ESPECTRO COMPLEJO DE FOURIER

El desarrollo en serie de Fourier de una función periódica equivale realmente a la transformación de la función en términos de sus componentes de diferentes frecuencias. Una función periódica con período  $T$  tiene componentes de frecuencias angulares  $\omega_0$ ,  $2\omega_0$ ,  $3\omega_0$ , ...,  $n\omega_0$ , etc., en donde  $\omega = 2\pi/T$ . Si se especifica  $f(t)$ , se puede encontrar su espectro. Inversamente, si se conoce el espectro, se puede encontrar la función periódica  $f(t)$  correspondiente. Por lo tanto, tenemos dos maneras de especificar a la función  $f(t)$ : la representación en el dominio del tiempo, con la cual  $f(t)$  se expresa como función

del tiempo, y la representación en el dominio de la frecuencia, con la cual se especifica el espectro (es decir, las amplitudes de las diferentes componentes de frecuencia). Nótese que el espectro existe únicamente en  $\omega = \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ , etc. Así, el espectro no es una curva continua, sino que existe solamente en algunos valores discretos de  $\omega$ . Por consiguiente es un *espectro discreto* y a veces se le llama *espectro de líneas*. Se puede representar gráficamente al espectro al trazar líneas verticales en  $\omega = \omega_0, 2\omega_0, \dots$ , etc., con alturas proporcionales a la amplitud de la componente correspondiente de frecuencia. Así, en una gráfica, el espectro de frecuencias discreto aparece como una serie de líneas verticales igualmente espaciadas, con alturas proporcionales a la amplitud de la componente correspondiente de frecuencia. [24]

Se puede utilizar cualquiera de las dos series, la trigonométrica o la exponencial, para representar el espectro. Sin embargo, para nuestros fines, resulta más útil la forma exponencial. En esta serie la función periódica se expresa como suma de funciones exponenciales de frecuencia  $0, \pm \omega_0, \pm 2\omega_0, \dots$ , etc. No es difícil entender el significado de las frecuencias negativas. Las dos señales  $e^{j\omega t}$  y  $e^{-j\omega t}$  oscilan a la frecuencia  $\omega$ . Sin embargo, se les puede ver como dos fasores que giran en direcciones opuestas y que, cuando se suman, producen una función real del tiempo. Así, [11]

$e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2 \cos \omega t$  En una función periódica de período  $T$ , la serie exponencial está dada por

$$f(t) = F_0 + F_1 e^{j\omega_0 t} + F_2 e^{j2\omega_0 t} + \dots + F_n e^{jn\omega_0 t} + \dots \\ + F_{-1} e^{-j\omega_0 t} + F_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + \dots + F_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \dots$$

Por consiguiente, tenemos las frecuencias  $0, \omega_0, -\omega_0, 2\omega_0, -2\omega_0, \dots, n\omega_0, -n\omega_0$  etc., y las amplitudes de las componentes son respectivamente  $F_0, F_1, F_{-1}, F_2, F_{-2}, \dots, F_n,$

$$F_{-n}, \dots, \text{etc.}$$

Las amplitudes  $F_n$  suelen ser complejas y, por lo tanto, se les describe por su magnitud y fase. Por consiguiente, en general, se requiere de dos espectros para la representación de una función periódica en el dominio de la frecuencia: el *espectro de magnitud* y el *espectro de fase*; sin embargo, en la mayoría de los casos, las amplitudes de las componentes de frecuencia son o bien reales o imaginarias, de modo que se puede describir la función mediante un solo espectro. [11]

Considérese la función periódica donde aparece (figura 3.2). Se encontró que la serie exponencial de Fourier para esta onda seno rectificadas es (ecuación 3.17):

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{2A}{3\pi} e^{j2\pi t} - \frac{2A}{15\pi} e^{j4\pi t} - \frac{2A}{35\pi} e^{j6\pi t} - \dots \quad (3.17)$$

$$- \frac{2A}{3\pi} e^{-j2\pi t} - \frac{2A}{15\pi} e^{-j4\pi t} - \frac{2A}{35\pi} e^{-j6\pi t} - \dots$$

Figura 3.3 Espectro de línea de una onda seno rectificadas.

El espectro existe en  $\omega = 0, \pm 2, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \dots$ , etc., y las magnitudes correspondientes son  $2A/n, -2A/3\pi, -2A/15\pi, -2A/35\pi, \dots$ , etc. Nótese que todas las amplitudes son reales y, por eso, sólo es necesario dibujar un espectro. Este espectro se muestra en la figura 3.3. Se ve en esta figura que el espectro es evidentemente simétrico con respecto al eje vertical que pasa por el origen. A continuación se demuestra que el espectro de magnitud de cualquier función periódica es simétrico con respecto al eje vertical que pasa por el origen. El coeficiente  $F_n$  está dado por

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$F_{-n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt$$

Estas ecuaciones nos indican claramente que los coeficientes  $F_n$  y  $F_{-n}$  son complejos conjugados, es decir, que

$$F_{-n} = F_n^* \text{ en consecuencia. } |F_n| = |F_{-n}|$$

Se infiere, por lo tanto, que el espectro de magnitud es simétrico con respecto al eje vertical que pasa por el origen y, por consiguiente, es función par de  $\Omega$ .

Si  $F_n$  es real, entonces  $\omega F_{-n}$  también lo es y  $F_{-n}$  es igual a  $F_n$ . Si  $F_n$  es complejo, sea

$$\text{entonces } F_n = |F_n| e^{j\theta_n} \quad (3.18a)$$

$$F_{-n} = |F_n| e^{-j\theta_n} \quad (3.18b)$$

La fase de  $F_n$  es  $\theta_n$ ; sin embargo, la fase de  $F_{-n}$  es  $-\theta_n$ . Por lo tanto, es obvio que el espectro de fase es asimétrico (función impar) y el espectro de magnitud es simétrico (función par) con respecto al eje vertical que pasa por el origen.



**Ejemplo 3.3**

Desarróllese la función rectangular periódica de la figura 3.4 como serie exponencial de Fourier y dibújese el espectro de frecuencia.

*Solución.* La función rectangular tiene duración  $\delta$  y se repite cada  $T$  segundos.

Podemos describir analíticamente la función en un período de la manera siguiente:

$$f(t) = \begin{cases} A & (-\delta/2 < t < \delta/2) \\ 0 & (\delta/2 < t < T - \delta/2) \end{cases}$$

por conveniencia, escogeremos  $-\delta/2$  y  $(T - \delta/2)$  como límites de integración.

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\delta/2}^{T-\delta/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} A e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{-A}{jn\omega_0 T} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-\delta/2}^{\delta/2} \\ &= \frac{2A}{n\omega_0 T} \frac{(e^{jn\omega_0 \delta/2} - e^{-jn\omega_0 \delta/2})}{2j} \\ &= \frac{2A}{n\omega_0 T} \text{sen}(n\omega_0 \delta/2) \\ &= \frac{A\delta}{T} \left[ \frac{\text{sen}(n\omega_0 \delta/2)}{n\omega_0 \delta/2} \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

La función entre paréntesis es de la forma  $(\text{sen } x)/x$ . Esta función desempeña un papel muy importante en la teoría de la comunicación y, se le conoce como *función de muestreo*, abreviado  $Sa(x)$ .

$$Sa(x) = \frac{\text{sen } x}{x} \quad (3.20)$$

Véase la función de muestreo en la figura 3.5. Puede notarse que la función oscila con período 2, con amplitud decreciente en ambas direcciones de  $x$ , y que tiene ceros en  $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ , etc. De la ecuación 3.19, tenemos

$$F_n = \frac{A\delta}{T} \text{Sa}(n\omega_0\delta/2)$$

Pero

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{y} \quad \frac{n\omega_0\delta}{2} = \frac{n\pi\delta}{T}$$

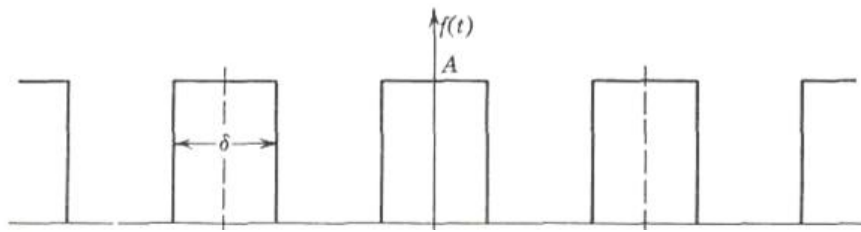


Figura 3.4 Función rectangular

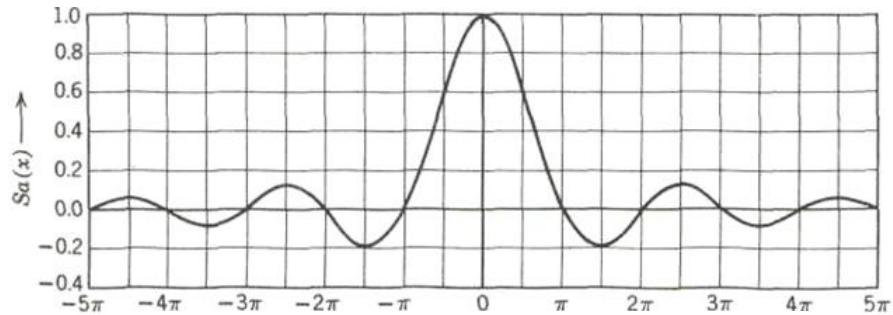
Por lo tanto,

$$F_n = \frac{A\delta}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\delta}{T}\right) \quad (3.21a)$$

y

$$f(t) = \frac{A\delta}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\delta}{T}\right) e^{jn\omega_0 t} \quad (3.21b)$$

Es evidente de la ecuación 3.21 que  $F_n$  es real y, en consecuencia, sólo necesitamos un espectro para la representación en el dominio de la frecuencia. Además, como  $\text{Sa}(x)$  es una función par, de la ecuación 3.21 se desprende que  $F_n = F_{-n}$ .

Figura 3.5 Función de muestreo  $Sa(x)$ 

La frecuencia fundamental  $\omega_0 = 2\pi/T$ . El espectro de frecuencia es función discreta y existe solamente en  $\omega = 0, \pm 2\pi/T, \pm 4\pi/T, \pm 6\pi/T, \dots$  etc., con amplitudes  $A\delta/T, (A\delta/T)Sa(\pi\delta/T), (\pi\delta/T)Sa(\pi\delta/T), \dots$ , etc., respectivamente. Consideraremos el espectro para algunos valores específicos de  $\delta$  y  $T$ . Tomaremos como duración del pulso  $\delta = 1/20$  de segundo y el período  $T$  como de  $1/4$  de segundo,  $1/2$  segundo, y  $1$  segundo, sucesivamente.

Para  $\delta = 1/20$  y  $T = 1/4$  segundo, está dada por

$$F_n = \frac{A}{5} Sa\left(\frac{n\pi}{5}\right)$$

La frecuencia fundamental  $\omega_0 = 2\pi/T = 8$ . Así pues, el espectro existe en  $\omega = 0, \pm 8\pi, \pm 16\pi$  etc., como se ve en la figura 3.6a.

Si  $\delta = 1/20$ ,  $T = 1/2$  segundo [7]

]

$$F_n = \frac{A}{10} Sa\left(\frac{n\pi}{10}\right)$$

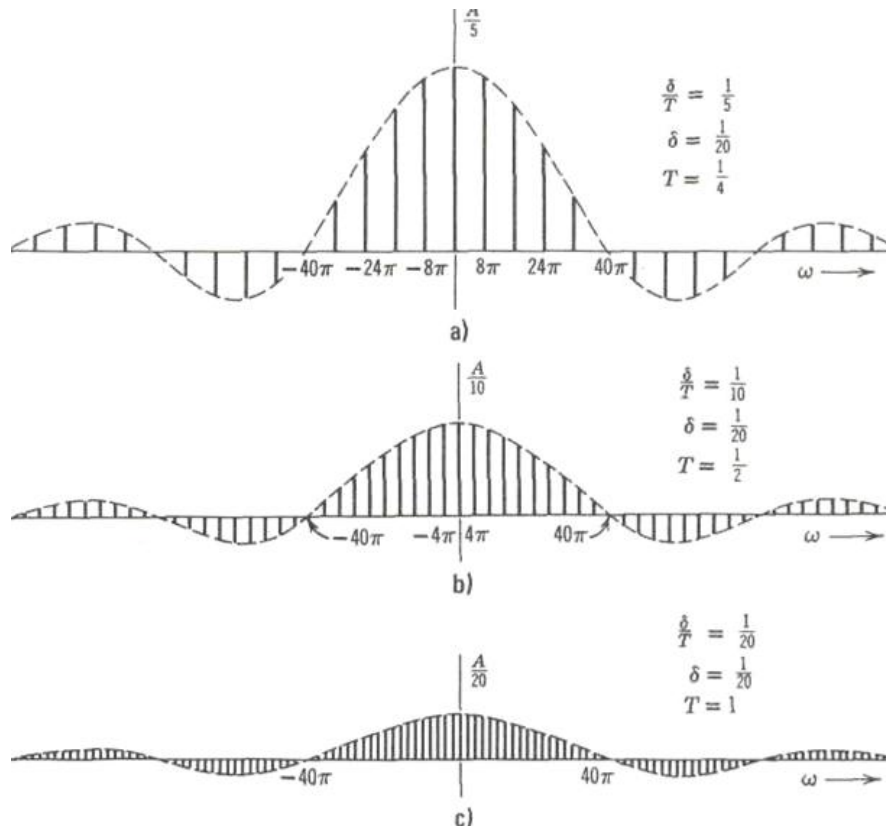


Figura 3.6 Frecuencias fundamentales

Si  $\delta = 1/20, T = 1$  segundo

$$F_n = \frac{A}{20} Sa\left(\frac{n\pi}{20}\right)$$

El espectro existe en  $\omega = 0, +2\pi, \pm 4\pi, \dots$ , etc., y se le muestra en la figura 3.6c.

Se ve claramente que, a medida que crece el período  $T$ , la frecuencia fundamental  $2\pi/T$  se vuelve más pequeña y, en consecuencia, aparecen más componentes de frecuencia dentro del rango dado de frecuencia. Por lo tanto, el espectro se vuelve más denso cuando el período  $T$  aumenta; sin embargo, las amplitudes de los componentes de frecuencia disminuyen a medida que  $T$  se incrementa. En el límite, cuando  $T$  tiende a infinito, tenemos un solo pulso rectangular de duración  $\delta$  y la frecuencia fundamental tiende a cero.

---

---

El espectro se vuelve continuo y existe en todas las frecuencias; obsérvese, sin embargo, que la forma del espectro de frecuencia no cambia con el período  $T$ .

De esta manera, la envolvente del espectro no depende del período  $T$  de la función, sino únicamente de la forma del pulso. En el límite, cuando  $T$  tiende a infinito la función  $f(t)$  sólo está formada por un pulso que no se repite, por lo que el espectro representa a una función no periódica en el intervalo  $(-\infty < t < \infty)$ . Es así como se ha extendido la representación de una función periódica mediante, una suma de funciones exponenciales a la de una función no periódica. [54]

### **3.6 REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN CUALQUIERA EN TODO EL INTERVALO $(-\infty, \infty)$ : LA TRANSFORMADA DE FOURIER**

Hemos aprendido a representar cualquier función en términos de una serie exponencial (o trigonométrica) en un intervalo finito. En el caso especial de una función periódica, se puede extender la representación a todo el intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Sin embargo, conviene representar cualquier función, periódica o no, en todo el intervalo  $(-\infty, \infty)$  en términos de señales exponenciales. Veremos que una señal no periódica se puede expresar generalmente como suma (integral) continua de señales exponenciales, en contraste con las señales periódicas, que se pueden representar mediante una suma discreta de señales exponenciales.

Este problema puede tratarse en dos formas. Podemos expresar  $f(t)$  en términos de funciones exponenciales en un intervalo finito  $(-T/2 < t < T/2)$  y suponer que  $T$  tiende a

infinito. También podemos construir una función periódica con período  $T$  de modo que  $f(t)$  represente el primer ciclo de la onda periódica. En el límite, el período  $T$  tiende a infinito y, entonces, la función periódica solamente tendrá un ciclo en el intervalo  $(-\infty < t < \infty)$  representado por  $f(t)$ .

De hecho no existe diferencia alguna entre estas dos formas, pero la segunda es más conveniente, porque nos permite visualizar el proceso de límites sin alterar la forma del espectro de frecuencia. Ya hemos analizado en cierto grado el proceso para el caso de la función rectangular del ejemplo 1.6 (figura 3.4). Se observó que, cuando el período  $T$  aumenta, la frecuencia fundamental disminuye y el espectro de frecuencia se vuelve más denso, es decir, existen más componentes dentro del rango dado de frecuencias y las amplitudes se vuelven más pequeñas; sin embargo, no se altera la forma del espectro de frecuencia. Esto se puede ver fácilmente en la figura 3.6 en donde se consideran tres valores de  $T$  ( $T = 1/4, 1/2, \text{ y } 1$  segundo) [7]

Consideremos la función  $f(t)$  que se ilustra en la figura 3.7. Se requiere representar a esa función como suma de funciones exponenciales en todo el intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Con ese fin construiremos una nueva función periódica  $f_r(t)$  con período  $T$  en la que la función  $f(t)$  se repite cada  $T$  segundos[13]

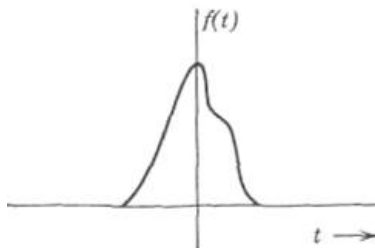


Figura 3.7 Suma de funciones exponenciales en todo intervalo  $(-\infty, \infty)$

como nos indica la figura 3.8. El período  $T$  se hace lo suficientemente grande para que no se traslapen los pulsos de la forma de  $f(t)$ . La nueva función  $f_T(t)$  es periódica y se le puede representar por una serie exponencial de Fourier. En el límite, si suponemos que  $T$  tiende a infinito, entonces los pulsos de la función periódica se repiten después de un intervalo infinito. Por lo tanto, en el límite  $T \rightarrow \infty$ ,  $f_T(t)$  y  $f(t)$  son idénticas. Es decir,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = f(t)$$

$T \rightarrow \infty$

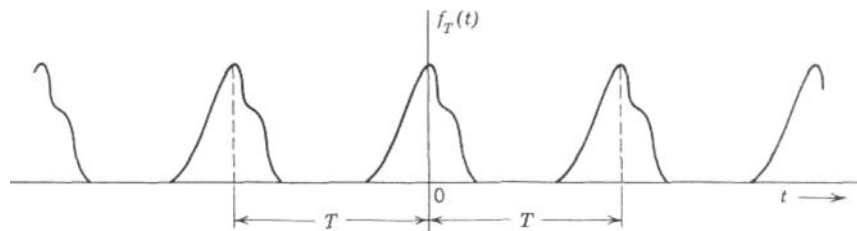


Figura 3.8

Así, la serie de Fourier que representa a  $f_T(t)$  en todo el intervalo también representará a  $f(t)$  en todo el intervalo si hacemos  $T = \infty$  en la serie. Podemos expresar la serie exponencial de Fourier de  $f_T(t)$  como

en donde

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.22)$$

El término  $F_n$  representa la amplitud de la componente de frecuencia  $n\omega_0$ . A continuación supongamos que  $T$  aumente. A medida que  $T$  aumenta,  $\omega_0$  (la frecuencia fundamental) disminuye y el espectro se vuelve más denso. Como se ve de la ecuación 3.22, también se reduce la amplitud de cada componente. La forma del espectro de frecuencia, sin embargo, no cambia (ya hemos observado este comportamiento en el caso de una función rectangular como la de la figura 3.6). En el límite, cuando  $T = \infty$ , la magnitud de cada componente se vuelve infinitesimalmente pequeña, pero también existe un número infinito de componentes espectrales. El espectro existe en cualquier valor de  $\omega$  y ya no es un espectro discreto sino función continua de  $\omega$ . Para aclarar esta cuestión haremos un cambio de notación. Sea

$$n\omega_0 = \omega_n \quad (3.23)$$

Entonces,  $F_n$  es función de  $\omega_n$  y denotaremos  $F_n$  mediante  $F_n(\omega_n)$ , sea

$$TF_n(\omega_n) = F(\omega_n) \quad (3.24)$$



Entonces

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \quad (3.25)$$

y, a partir de las ecuaciones 3.24 y 3.25 obtenemos

$$F(\omega_n) = T F_n = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt \quad (3.26)$$

Si sustituimos el valor de  $T = 2\pi/\omega_0$  en la ecuación 3.26, obtener

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \omega_0 \quad (3.27)$$

La ecuación 3.27 nos enseña que se puede expresar  $f_T(t)$  como suma de señales exponenciales de frecuencias ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, \dots$ , etc. La amplitud de la componente de frecuencia  $\omega_n$  es  $F(\omega_n) \omega_0 / 2\pi$  (esto es igual a  $F_n$ ). Obsérvese, por lo tanto, que la amplitud de dicha componente no es igual sino proporcional a  $F(\omega_n)$ .

Interpretaremos ahora gráficamente la ecuación 3.27, que representa una suma discreta de componentes de frecuencia  $\omega$ , dicho de otra manera, una suma de componentes discretas de frecuencia. En general, la cantidad  $F(\omega_n) e^{j\omega_n t}$  es compleja y por lo tanto, en su representación gráfica estricta se necesitan dos diagramas (uno real y otro imaginario o sea diagramas de magnitud y de fase). Sin embargo, supondremos que la cantidad  $F(\omega_n) e^{j\omega_n t}$  es real. Eso es suficiente para indicar nuestra manera de razonar. La figura 3.9 ilustra el diagrama de esta cantidad como función de  $\omega$ . La función existe solamente en valores discretos de  $\omega$ , es decir, en  $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ , etc.

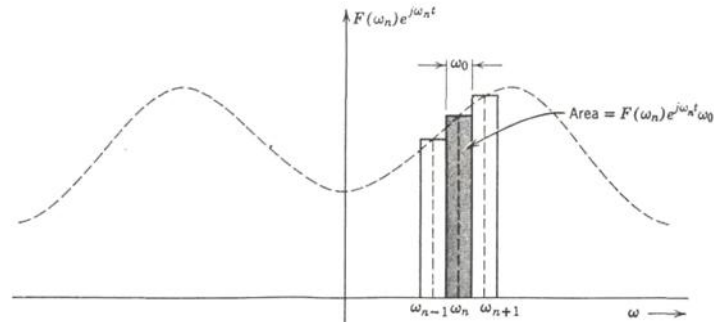


Figura 3.9 Suma de las áreas rectangulares

La distancia que separa cada componente de frecuencia es  $\omega_0$ . Por lo tanto, el área del rectángulo sombreado de la figura 3.9 es  $F(\omega_n)e^{j\omega_n t} \omega_0$ . La ecuación 3.27 representa la suma de las áreas bajo todos los rectángulos que corresponden a valores de  $n$  desde  $n = -\infty$  hasta  $\infty$ . La suma de las áreas rectangulares representa aproximadamente el área bajo la curva punteada. La aproximación se mejora cuando disminuye el valor de  $\omega_0$ . En el límite, cuando  $T \rightarrow \infty$ ,  $\omega_0$  se vuelve infinitesimalmente pequeña de modo que se le puede representar por  $d\omega$ . La suma discreta de la ecuación 3.27 se transforma en la integral o el área bajo la curva. La curva es una función continua de  $\omega$  y está dada por  $F(\omega)e^{j\omega t}$ . Además, cuando  $T \rightarrow \infty$ , la función  $f_T(t) \rightarrow f(t)$  y las ecuaciones 3.25 y 3.26 se transforman en

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.28)$$

en donde

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.29)$$

En esta forma se ha logrado representar una función no periódica  $f(t)$  en términos de funciones exponenciales en todo el intervalo ( $-\infty < t < \infty$ ). La ecuación 3.28 representa  $f(t)$  como suma continua de funciones exponenciales con frecuencias comprendidas en el intervalo ( $-\infty < \omega < \infty$ ). La amplitud de cualquier componente es proporcional a  $F(\omega)$ . Por

lo tanto  $F(\omega)$  representa el espectro de frecuencia de  $f(t)$  y se le llama *función de densidad espectral*. Nótese, sin embargo, que aquí el espectro de frecuencia es continuo y existe en cualquier valor de  $\omega$ . La ecuación 3.29 nos permite determinar la función de

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \quad \text{y} \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \quad (3.30)$$

densidad espectral  $F(\omega)$

En general las ecuaciones 3.28 y 3.29 se conocen como par de transformadas de

Así,  $F(\omega)$  es la transformada directa de Fourier de  $f(t)$  y  $f(t)$  es la

Fourier. Se dice que la ecuación 3.29 es la transformada directa de Fourier de  $f(t)$ , y la ecuación 3.28 la transformada inversa de Fourier de  $F(\omega)$ . En forma.

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

simbólica dichas transformadas se denotan como

### 3.7 ALGUNAS OBSERVACIONES ACERCA DE LA FUNCIÓN DE ESPECTRO CONTINUO

Se ha obtenido la expresión de una función no periódica  $f(t)$  como suma continua de funciones exponenciales de frecuencias en el intervalo de  $-\infty$  a  $\infty$ . La amplitud de la componente de cualquier frecuencia es infinitesimal, pero proporcional a  $F(\omega)$ , en donde  $F(\omega)$  es la densidad espectral.

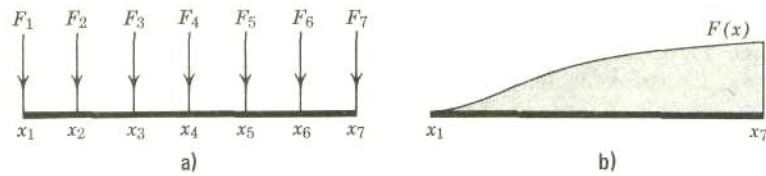


Figura 3.10 a) Viga cargada en puntos discretos. b) Viga cargada continuamente.

A veces el concepto de espectro continuo resulta confuso, debido a que generalmente nos imaginamos el espectro formado por frecuencias discretas y con amplitudes finitas como en el caso de una función periódica. El concepto es más comprensible cuando se considera un fenómeno análogo. Un ejemplo común de distribución continua es el de la carga de una viga. Considérese una viga cargada con pesos de  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_7$ , unidades en puntos uniformemente espaciados  $x_1, x_2, \dots, x_7$ , como vemos en la figura 3.10a. La viga está cargada en 7 puntos discretos y el peso total sobre la viga está dado por la suma de las cargas.

$$W_T = \sum_{r=1}^7 F_r$$

Consideremos a continuación el caso de una viga cargada en forma continua como nos muestra la figura 3.10b. Sea  $F(x)$  kilogramo/metro, la densidad de carga, que es función de  $x$ . El peso total sobre la viga está dado, en este caso, por la suma continua de los pesos, es decir, por la integral de  $F(x)$  en toda la longitud

$$W_T = \int_{x_1}^{x_7} F(x) dx \quad \text{kg}$$

En el caso de una carga discreta, el peso existe únicamente en puntos discretos sin que haya peso alguno en los demás puntos. Por otra parte, en el caso de la carga continuamente distribuida, hay peso en todos los puntos, pero en cada uno de ellos la

carga es cero. Sin embargo, en una distancia pequeña  $dx$  la carga está dada por  $F(x) dx$ . Por lo tanto  $F(x)$  representa la magnitud relativa de la carga en un punto  $x$ . En el caso de las señales y sus espectros de frecuencia, la situación es exactamente análoga. Podemos representar una señal periódica mediante una suma de exponenciales discretas con amplitudes finitas.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j\omega_n t} \quad (\omega_n = n\omega_0)$$

En una función no periódica, la distribución de exponenciales se vuelve continua; es decir, la función espectral existe en todos los valores de  $\omega$ . La amplitud de la componente en cualquier frecuencia  $\omega$  es cero.

Si integramos con respecto a la variable  $f$  en lugar de  $\omega$ , se elimina el factor  $2\pi$  y la función  $f(t)$  queda expresada en términos de la suma continua de esas componentes infinitesimales.

$$\omega = 2\pi f$$

y

$$d\omega = 2\pi df$$

La ecuación 1.76 se puede ahora expresar como

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(2\pi f) e^{j2\pi f t} df$$

---

---

### 3.8 REPRESENTACIÓN DE UNA SEÑAL EN EL DOMINIO DEL TIEMPO Y EN EL DE LA FRECUENCIA

La transformada de Fourier es un instrumento con el cual se expresa una señal dada en términos de sus componentes exponenciales. La función  $F(\omega)$  es la transformada directa de Fourier de  $f(t)$  y representa las amplitudes relativas de las diferentes componentes. Por lo tanto,  $F(\omega)$  es la representación de  $f(t)$  en el dominio de la frecuencia. La representación en el dominio del tiempo especifica la función en cada instante del tiempo, mientras que la representación en el dominio de la frecuencia especifica las amplitudes relativas de las componentes de frecuencia de la función. Ambas representaciones especifican en forma única la función. En general, la función  $F(\omega)$  es compleja y se necesitan dos diagramas para su representación gráfica completa.

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

Así,  $F(\omega)$  se puede representar mediante un diagrama de magnitud  $|F(\omega)|$  y un diagrama de fase  $\theta(\omega)$ . En muchos casos,  $F(\omega)$  es sólo real o imaginaria y entonces sólo se requiere de un diagrama. Demostraremos a continuación que, cuando  $f(t)$  es función real,

Tenemos de las ecuaciones 3.32a y 3.32b se infiere que, si  $f(t)$  es función real de  $t$ ,

$$F^*(\omega) = F(-\omega)$$

Tenemos de las ecuaciones 3.32a y 3.32b se infiere que, si  $f(t)$  es función real de  $t$ ,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.32a)$$

De la misma manera,

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt \quad (3.32b)$$

Por lo tanto, si

$$F^*(\omega) = F(-\omega) \quad (3.33)$$

entonces

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

$$F(-\omega) = |F(\omega)| e^{-j\theta(\omega)} \quad (3.34)$$

Es evidente a partir de estas ecuaciones que el espectro de magnitud  $|F(\omega)|$  es función par de  $\omega$  y el espectro de fase  $\theta(\omega)$  es función impar de  $\omega$ .

### 3.9 EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

De la ecuación 3.29, que define la transformada de Fourier, se desprende

claramente  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$  que si es finita, entonces existe la transformada de Fourier.

Pero, como la magnitud de  $e^{-j\omega t}$  es la unidad, una condición suficiente para la existencia de la transformada de Fourier de  $f(t)$  es que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

sea finita. Sin embargo, si se consideran funciones singulares (por ejemplo, funciones impulso), entonces esta condición de absoluta integrabilidad no es siempre necesaria. Veremos posteriormente que existen funciones que no son absolutamente

integrables, aunque sí tienen transformadas. Es decir, la integrabilidad absoluta de  $f(t)$  es condición suficiente pero no necesaria, para la existencia de la transformada de Fourier de  $f(t)$ .

Las funciones como  $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$ ,  $u(t)$ , etc., no satisfacen la condición anterior y, en un sentido estricto, no poseen transformada de Fourier. Sin embargo, esas funciones sí tienen transformada de Fourier en el límite.

Se puede suponer que la función  $\sin \omega t$  existe únicamente en el intervalo  $-T/2 < t < T/2$ . En estas condiciones la función posee transformada de Fourier, siempre y cuando  $T$  sea finito. En el límite,  $T$  tiende a un valor muy grande pero finito. Se demostrará posteriormente que en el límite existe la transformada de Fourier de tales funciones.

### 3.10 TRANSFORMADAS DE FOURIER DE ALGUNAS FUNCIONES ÚTILES

#### 3.10.1. Señal exponencial unilateral $e^{-at}u(t)$

Se han representado el espectro de magnitud  $|F(\omega)|$  y el espectro de fase  $\Theta(\omega)$  en la figura 3.11.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= e^{-at}u(t) \\
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \qquad (3.35)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{a + j\omega} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{-j \tan^{-1}(\omega/a)}
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

Aquí

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad \text{y} \quad \theta(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Obsérvese que la integral de la ecuación 3.35 converge sólo en  $a > 0$ . Cuando  $a < 0$ , la transformada de Fourier no existe. Esto también se deduce al considerar que, cuando  $a < 0$ ,  $f(t)$  no es absolutamente integrable.

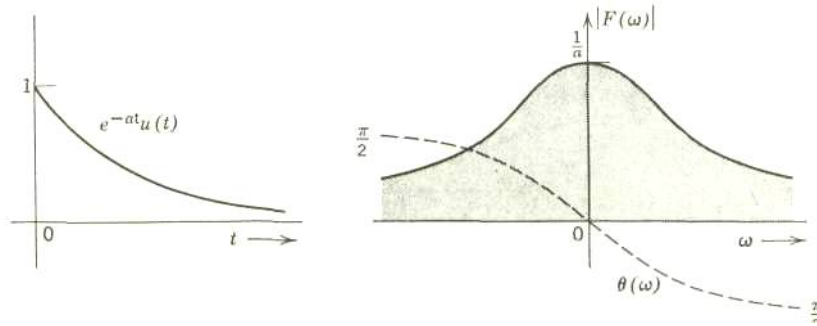


Figura 3.11 Representaciones de  $e^{-at}u(t)$  en el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia.

### 3.10.1. SEÑAL EXPONENCIAL BILATERAL $f(t) = e^{-a|t|}$

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\
 &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Obsérvese que, en este caso, el espectro de fase  $\theta(\omega) = 0$ . El espectro de magnitud  $2a/(a^2 + \omega^2)$  se ilustra en la figura 3.12.

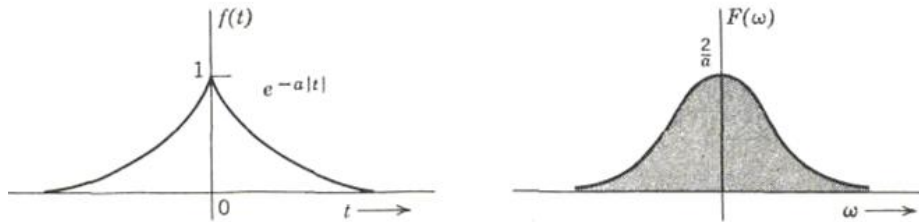


Figura 3.12 Espectro de magnitud

### 3.10.2. LA FUNCIÓN PULSO RECTANGULAR

Se define la función pulso rectangular  $G_T(t)$ , que se muestra en la figura 3.13a, como

$$G_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

La transformada de Fourier de esta función está dada por

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{A}{j\omega} (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}) \\
 &= A\tau \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \\
 &= A\tau \text{Sa} \left( \frac{\omega\tau}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Nótese que  $F(\omega)$  es una función real y, en consecuencia, se le puede representar gráficamente por una sola curva (figura 3.13) [5]

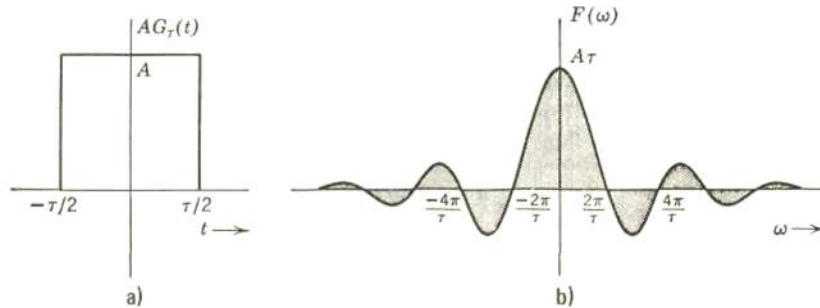


Figura 3.13 a) Función pulso rectangular b) Transformada de la función pulso rectangular

### 3.11 FUNCIONES SINGULARES

Considérese un voltaje escalón unitario aplicado a un capacitor, de la manera ilustrada en la figura 3.14a. La corriente  $i$  que pasa por el capacitor está dada por

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

Es fácil ver que  $dv/dt$  es cero para todos los valores de  $t$  con la excepción de  $t=0$ , en donde no está definida. La derivada en  $t=0$  no existe debido a que la función  $u(t)$  es discontinua en ese punto. Nos encontramos con una dificultad matemática, planteada por la idealización de la fuente y el elemento del circuito. La solución existiría si o bien la fuente, o bien el capacitor, fuesen no ideales. Por ejemplo, si el voltaje de la fuente fuese como el de la figura 3.15a en lugar del de la figura 3.14a, la corriente en el capacitor sería un pulso como el de la figura 3.14b. En el caso de un voltaje escalón unitario ideal, la solución no existe, pero es posible obtenerla en el límite, si se supone

una fuente no ideal como la de la figura 3.15a y a continuación se toma  $a$  como cero en el límite.

Designemos por  $u_a(t)$  la función no ideal de voltaje. En el límite, cuando

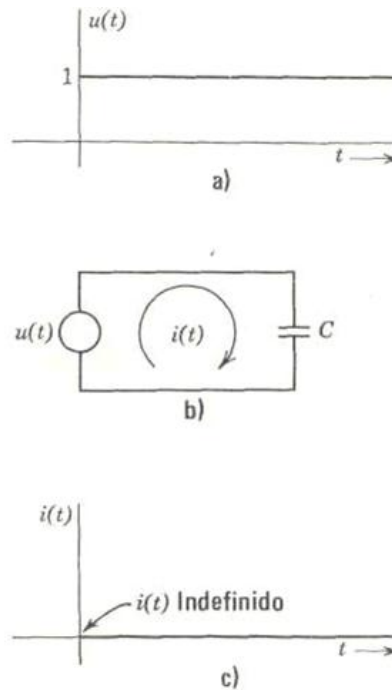


Figura 3.14 Fuente con corriente en el capacitor

$a$  tiende a cero, esta función de voltaje se transforma en una función escalón unitario. La derivada de la función  $u_a(t)$  es un pulso rectangular de altura  $\frac{1}{a}$  y de duración  $a$ . A medida que  $a$  varía, la forma del pulso varía, pero su área permanece constante. La figura 3.16 nos muestra la secuencia de esos pulsos cuando varía  $a$ . En el límite, cuando  $a$  es cero, la altura del pulso se vuelve infinita y la duración se hace cero; sin embargo, el área del pulso sigue siendo unitaria. Definamos la función impulso unitario como la derivada de una función escalón unitario. Puesto que la derivada de una función escalón unitario no existe, la función impulso unitario se define como el

límite de la secuencia de las derivadas de una función no ideal  $u_a(t)$  cuando  $a$  tiende a cero. La función impulso unitario se denota por  $\delta(t)$ . Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{d}{dt} [u_a(t)] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} [u(t) - u(t - a)]\end{aligned}$$

En el límite, cuando  $a \rightarrow 0$ , la función  $\delta(t)$  adopta la forma de un pulso de altura infinita y duración cero. El área bajo el pulso, sin embargo, sigue siendo unitaria. La función  $\delta(t)$  es cero en cualquier punto con la excepción de  $t = a$ . [4]

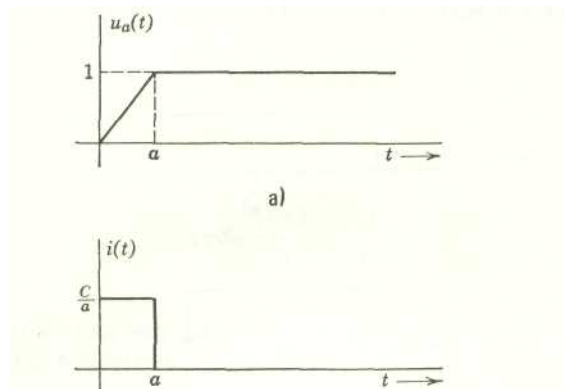


Figura 3.15 a) representación de voltaje no ideal. b) pulso de corriente en el capacitor con fuente no ideal del voltaje

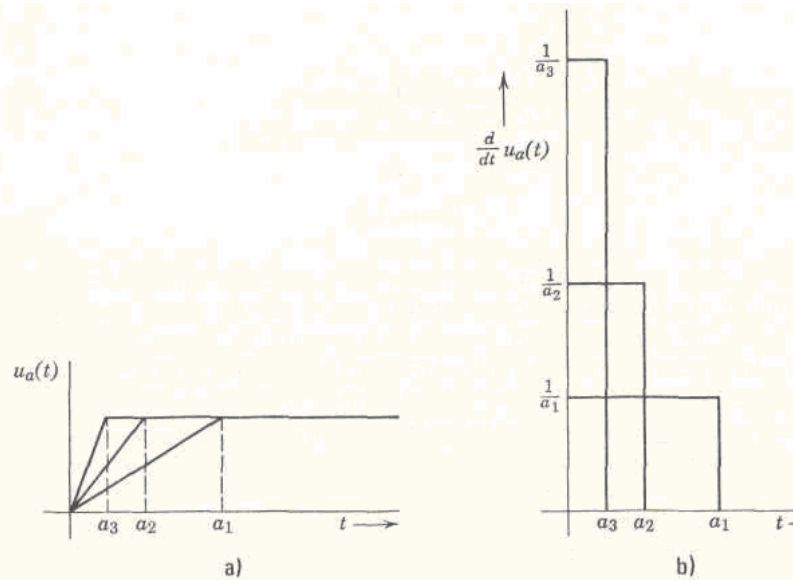


Figura 3.16 Secuencias de pulsos cuando varia a

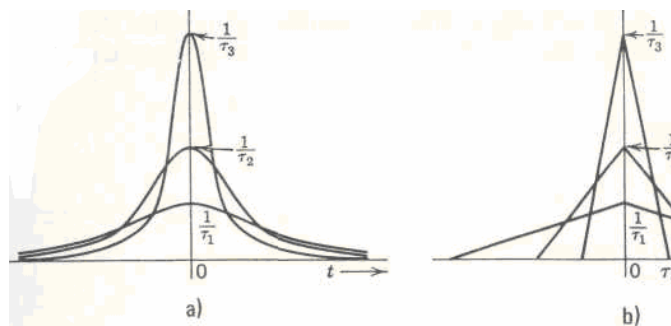


Figura 3.17 a) Secuencia de pulsos de gauss; b) Secuencias de pulsos triangulares

Se puede expresar este hecho mediante la definición de la función impulso dada por P. A. M. Dirac:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1 \\ \delta(t) &= 0 \quad t \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Es evidente, de acuerdo con su definición, ecuación 3.39, que la función impulso no es una verdadera función en el sentido matemático, en el que una función debe quedar definida para todos los valores de  $t$ . Sin embargo, se ha justificado rigurosamente la

función impulso mediante la teoría de las distribuciones de Schwartz; se debe a Temple una versión de esta teoría (funciones generalizadas). Desde ese punto de vista la función impulso queda definida como una secuencia de funciones regulares y todas las operaciones con la función impulso se consideran como operaciones con la secuencia. Por consiguiente, se define la función impulso mediante varias secuencias como vemos en la figura 3.17.

La figura 3.18 nos muestra la función impulso como límite de la secuencia de funciones de muestreo. Todas estas secuencias satisfacen la ecuación 3.39.

#### 1. Pulso de Gauss

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} e^{-\pi t^2/\tau^2}$$

#### 2. Pulso triangular

$$\delta(t) = \begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[ 1 - \frac{|t|}{\tau} \right] & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$

#### 3. Pulso exponencial

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\tau} e^{-|t|/\tau}$$

#### 4. Función de muestreo. Se puede demostrar que

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1 \\ \delta(t) &= 0 \quad t \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

A medida que  $k$  aumenta, la amplitud de la función  $(k/\pi)Sa(kt)$  también aumenta y la función oscila más rápidamente atenuándose en forma inversamente proporcional a  $t$

(figura 3.18). En el límite, cuando  $k \rightarrow \infty$ , la función se concentra en el origen y el área neta bajo la curva aún es la unidad, como puede verse en la ecuación 3.40. Por lo tanto,

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} Sa(kt) \quad (3.41)$$

5. Función de muestreo cuadrática

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} Sa^2(kt) \quad (3.42)$$

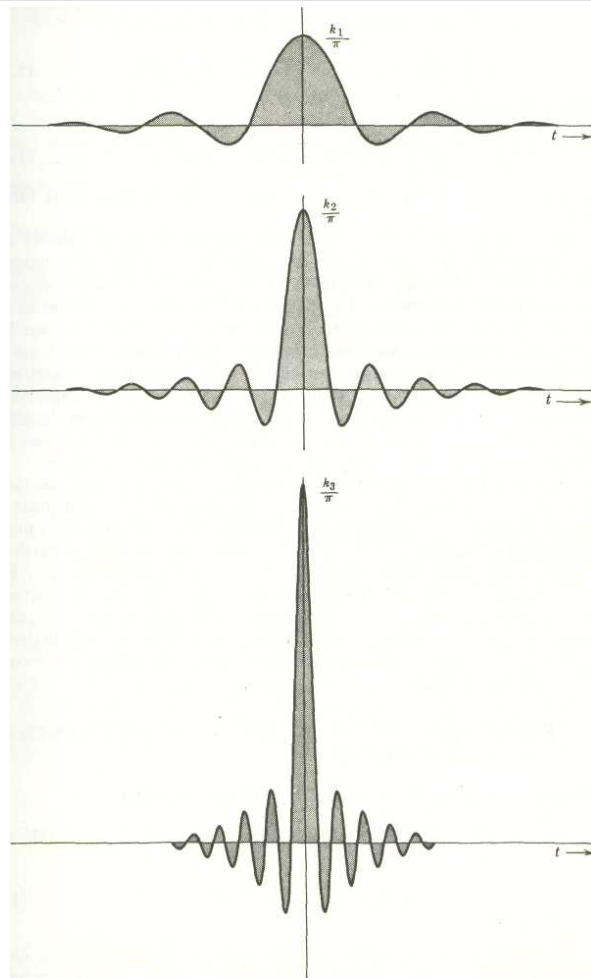
Esto se deduce de argumentaciones parecidas a las que se emplean con la función de muestreo y el hecho de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\pi} Sa^2(kx) dx = 1 \quad (3.43)$$

Volvamos a la función impulso  $\delta(t)$ . Observamos que el área está concentrada en el origen  $t = \theta$ . Por lo tanto, podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1 \quad (3.44)$$





*Figura 3.18 La función impulso como límite de una secuencia de funciones de muestreo.*

En donde  $0^+$  y  $0^-$  denotan valores de  $t$  arbitrariamente pequeños que se aproximan al origen por la derecha y por la izquierda, respectivamente. Además como  $\delta(t) = 0$  en cualquier punto excepto en  $t=0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = f(0) \quad (3.45a)$$

Y también deducimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (3.45b)$$

Las ecuaciones 3.45a representan la propiedad de muestreo de la función impulso.

Insistimos en que la función impulso no es una verdadera función en el sentido matemático habitual, donde se define una función para todos los valores de  $t$ . No obstante, su empleo formal conduce a resultados que se pueden interpretar físicamente. La utilización de la función impulso es muy común en las ciencias físicas y en la ingeniería para representar entidades como masas puntuales, cargas puntuales, fuentes puntuales, fuerzas concentradas, fuentes de línea y cargas superficiales. En realidad, esas distribuciones no existen en la práctica, pero la idealización simplifica la obtención de los resultados. Además, el equipo de medición que se emplea en la actualidad, debido a su resolución finita, no distingue entre las respuestas a la función impulso ideal y a un pulso de duración pequeña pero finita.

La función escalón  $u(t)$ , la función impulso  $\delta(t)$  y sus derivadas se llaman funciones singulares. Este término se aplica a todas las funciones que son discontinuas o tienen derivadas discontinuas. Esas funciones sólo pueden tener derivadas continuas de orden finito. Por ejemplo, la función parabólica  $f(t) = at^2u(t)$  solamente tiene derivada continua de primer orden,  $f'(t) = 2atu(t)$ . La segunda derivada es discontinua. Por lo tanto es función singular. De la misma manera, la función rampa y la función escalón unitario (así como la función impulso y sus derivadas) son funciones singulares. De hecho, cualquier función que se represente por un polinomio en  $t$  constituye una función singular. [13]

## 3.12 TRANSFORMADAS DE FOURIER QUE CONTIENEN FUNCIONES IMPULSO

### 3.12.1 TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCIÓN IMPULSO

La transformada de Fourier de la función impulso unitario  $b(t)$  está dada por

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.46)$$

De la definición de función impulso de la ecuación 3.39. Se define rigurosamente la función impulso. De esa manera, definimos la función impulso por sus propiedades como integral y no como función del tiempo definida para todo  $t$ . Se puede demostrar que la definición (3.39) no especifica una sola función.

De la propiedad de muestreo de la función impulso expresada por la ecuación 3.45a, se deduce que la integral del segundo miembro de la ecuación 3.46 es la unidad. En consecuencia, [18]

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \quad (3.47)$$

Así, la transformada de Fourier de la función impulso unitario es la unidad. Por lo tanto, es evidente que la función impulso unitario tiene densidad espectral uniforme en todo el intervalo de frecuencias. En otras palabras, la función impulso contiene todas las componentes de frecuencia con amplitudes relativas iguales.

### 3.12.2 TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA CONSTANTE

Encontremos a continuación la transformada de Fourier de la función siguiente:

$$f(t) = A$$

Esta función no satisface la condición de integrabilidad absoluta, pero en el límite, posee transformada de Fourier. Consideremos la transformada de Fourier de una función pulso rectangular de altura  $A$  y de duración  $T$  segundos, como la que se ilustra en la figura 3.13a. En el límite, cuando

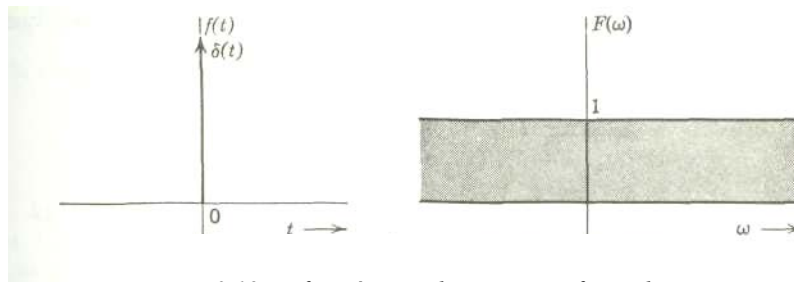


Figura 3.19 La función impulso y su transformada

$T \rightarrow \infty$ , la función pulso rectangular tiende a convertirse en una función constante  $A$ . En consecuencia la transformada de Fourier de una constante  $A$  es la transformada de Fourier de una función pulso rectangular  $G_T(t)$  cuando  $T \rightarrow \infty$ . De la transformada de Fourier de  $AG_T(t)$  es  $ATSA(QT/2)$ :

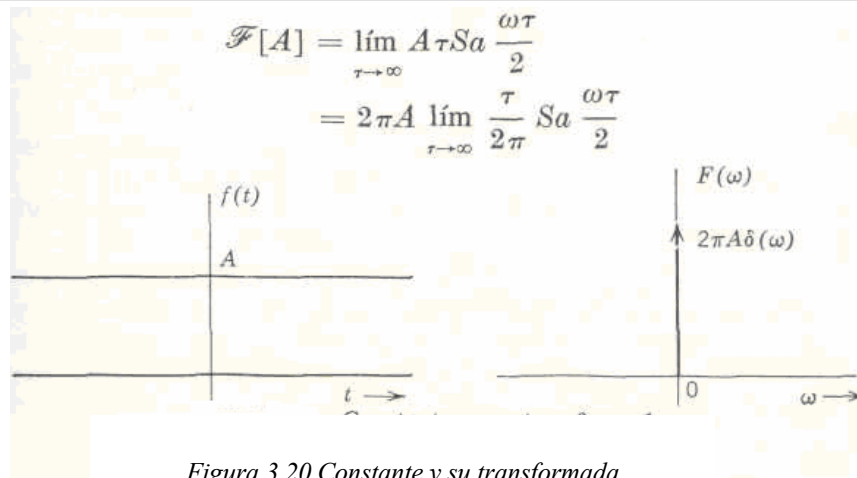


Figura 3.20 Constante y su transformada

De la ecuación 3.41, se deduce que el límite de la función de muestreo anterior define una función impulso  $\delta(\omega)$ . Por lo tanto

$$\mathcal{F}[A] = 2\pi A \delta(\omega) \quad (3.48a)$$

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi \delta(\omega) \quad (3.48b)$$

Así, cuando  $f(t)$  es constante, contiene solamente una componente de frecuencia  $\omega = 0$ . Como es de esperarse una señal constante de corriente directa ( $\omega = 0$ ), no contiene alguna otra componente de frecuencia. [15]

### 3.12.3 TRANSFORMADA DE $\text{sgn}(t)$

Se define la función signum, que se abrevia  $\text{sgn}(t)$ , como

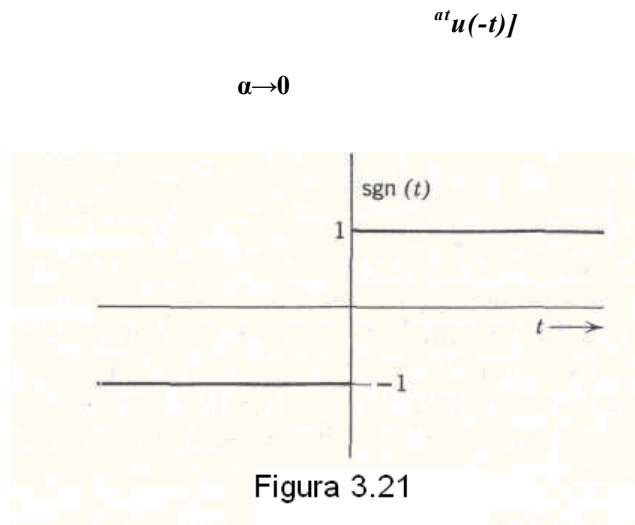
$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (3.49a)$$

Se ve fácilmente que,

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1 \quad (3.49b)$$

Se obtiene fácilmente la transformada de Fourier de  $\text{sgn}(t)$  al observar que

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} [e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]$$



$\alpha$  Figura 3.21 Transformada de Fourier de  $\text{sgn}(t)$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[ \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt \right] \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[ \frac{-2j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right] \\
 &= \frac{2}{j\omega} \qquad (3.50)
 \end{aligned}$$

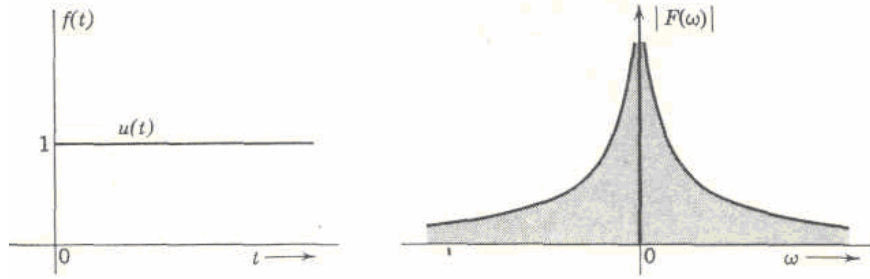


Figura 3.22 Funcion escalón unitario y su función de densidad espectral

### 3.12.4 TRANSFORMADA DE LA FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO U(T)

De la ecuación 3.49b se deduce que

$$u(t) = \frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(t)]$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{2}\{\mathcal{F}[1] + \mathcal{F}[\text{sgn}(t)]\}$$

Al emplear las ecuaciones 1.93b y 1.95, obtenemos

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (3.51)$$

La función de densidad espectral contiene un impulso en  $\omega = 0$  (figura 3.22). Por consiguiente, la función  $u(t)$  contiene, como era de esperarse, una gran componente de corriente directa y, además, otras componentes de frecuencia. La función  $u(t)$  aparenta ser una señal pura de corriente directa, de modo que resulta raro que existan otras componentes de frecuencia diferentes de  $\omega = 0$ . Sin embargo, la función  $u(t)$  no es una verdadera señal de corriente directa, ya que vale cero en  $t < 0$  y tiene una discontinuidad pronunciada en  $t = 0$  que da lugar a otras componentes de frecuencia. En una señal verdadera de corriente directa,  $f(t)$  es constante en todo el intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Se ha visto (ecuación 3.23) que esa señal no contiene otras componentes de frecuencia diferentes a la de corriente directa ( $\omega = 0$ ).

---

---

**3.12.5. SEÑALES SINUSOIDALES PERPETUAS  $\cos \omega_0 t$  y  $\sin \omega_0 t$** 

Consideremos ahora las señales senoidales  $\cos \omega_0 t$  y  $\sin \omega_0 t$  en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Estas señales no satisfacen la condición de integrabilidad absoluta; no obstante, su transformada de Fourier existe y se le puede obtener mediante un proceso de límite similar al que empleamos con la función constante  $f(t) = A$ . Supondremos primero que

dichas funciones existen únicamente en el intervalo de  $-T/2$  a  $T/2$ , siendo cero fuera de él. En el límite,  $T$  tenderá a infinito. Mostraremos en seguida el procedimiento. [7]

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\cos \omega_0 t) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{\text{sen} [(\omega - \omega_0)\tau/2]}{(\omega - \omega_0)\tau/2} + \frac{\text{sen} [(\omega + \omega_0)\tau/2]}{(\omega + \omega_0)\tau/2} \right\} \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\tau}{2} \text{Sa} \left[ \frac{\tau(\omega - \omega_0)}{2} \right] + \frac{\tau}{2} \text{Sa} \left[ \frac{\tau(\omega + \omega_0)}{2} \right] \right\} \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

Según la ecuación 3.41, en el límite, una función de muestreo se transforma en una función impulso y tenemos

$$\mathcal{F}(\cos \omega_0 t) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (3.53)$$

De igual manera, se puede demostrar que

$$\mathcal{F}(\text{sen } \omega_0 t) = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \quad (3.54)$$

Por lo tanto el espectro de Fourier de estas funciones consta de sendos impulsos en  $\omega_0$  y en  $-\omega_0$ . Es interesante observar el comportamiento del espectro en el proceso de límite cuando  $T$  tiende a infinito. Si  $T$  es finito, la función de densidad espectral está dada por la ecuación 3.52. La figura 3.25 nos muestra la gráfica de dicha función en el caso en que  $T = 16\pi / \omega_0$ . Es decir, la gráfica representa la función de densidad espectral de la señal  $\cos \omega_0 T$  en un intervalo de 8 ciclos.

$$f(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t & |t| < \frac{16\pi}{\omega_0} \\ 0 & |t| > \frac{16\pi}{\omega_0} \end{cases}$$



Nótese que existe una gran concentración de energía en las frecuencias cercanas a  $\pm \omega_0$ . A medida que incrementamos el intervalo  $\tau$ , la densidad espectral se concentra alrededor de las frecuencias  $\pm \omega_0$ . En el límite, cuando  $T \rightarrow \infty$ , la densidad espectral es cero en cualquier punto con la excepción de  $\pm \omega_0$ , en donde es infinita de tal manera que el área bajo la curva en cada una de estas frecuencias es  $\pi$ . Por lo tanto, en el límite, la distribución se convierte en dos impulsos de intensidad  $\pi$  unidades cada uno localizados en las frecuencias  $\pm \omega_0$  como indica la figura 3.24. Evidentemente las funciones de densidad espectral de  $\cos \omega_0 t$  y  $\sin \omega_0 t$  existen solamente en  $\omega = \omega_0$ . Eso es lógico, ya que las funciones no contienen componentes de alguna otra frecuencia. En cambio las funciones  $\cos \omega_0 t u(t)$  y  $\sin \omega_0 t u(t)$  contienen componentes de frecuencia diferentes de  $\omega_0$ . Se puede demostrar que es evidente que esas funciones contienen una gran componente de frecuencia  $\omega_0$ , pero también contienen otras

Componentes

$$\mathcal{F}[(\cos \omega_0 t)u(t)] = \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.55a)$$

$$\mathcal{F}[(\sin \omega_0 t)u(t)] = \frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.55b)$$

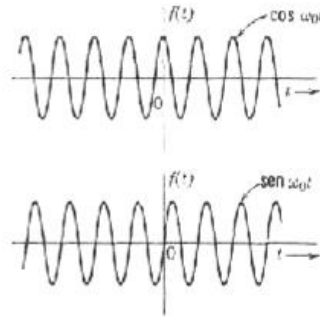


Figura 3.23

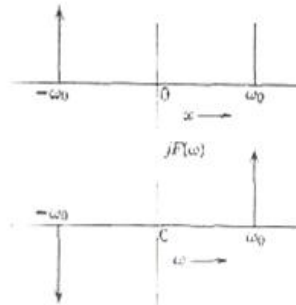
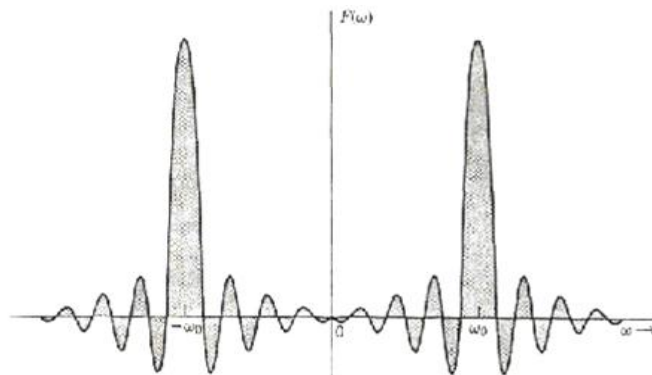


Figura 3.24

Figura 3.25 Función de densidad espectral del  $\cos \omega_0 t$  (8 ciclos)

Aparentemente las señales  $\cos \omega_0 t u(t)$  y  $\text{sen } \omega_0 t u(t)$  son señales sinusoidales puras y tal vez nos parezca extraño que contengan componentes de frecuencias diferentes de  $\omega_0$ . Debemos recordar, sin embargo, que estamos expresando una función en términos de funciones exponenciales perpetuas (o sinusoidales perpetuas) que existen desde  $-\infty$  hasta  $\infty$ . Las funciones  $\cos \omega_0 t u(t)$  y  $\text{sen } \omega_0 t u(t)$  no son señales sinusoidales perpetuas puesto que éstas valen cero en  $t < 0$  y existen solamente en valores

positivos de  $t$ . Por lo tanto, también contienen otras componentes además de aquella en  $\omega_0$ .

Todas estas componentes (figura 3.26) se suman de manera que producen un valor cero

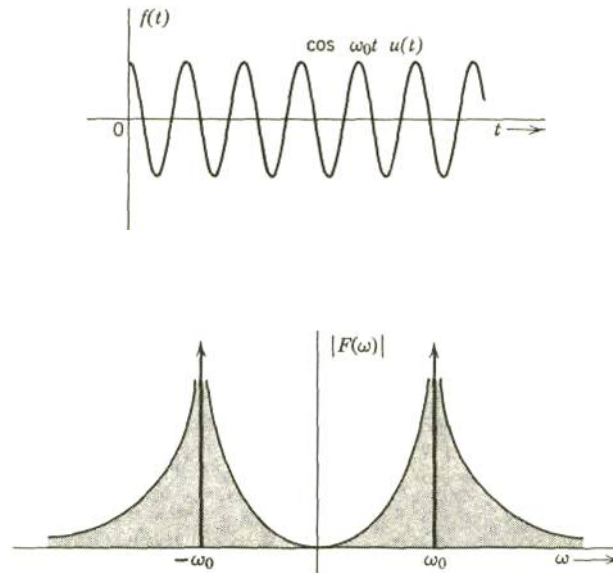


Figura 3.26 Función  $\cos \omega_0 t u(t)$  y la magnitud de su función de densidad espectral.

### 3.12.6. LA TRANSFORMADA DE UNA EXPONENCIAL PERPETUA

Vamos a encontrar la transformada de Fourier de una señal exponencial perpetua  $e^{j\omega_0 t}$  ( $-\infty < t < \infty$ ). Tenemos que

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \text{sen } \omega_0 t$$

De acuerdo con lo anterior,

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = \mathcal{F}[\cos \omega_0 t + j \text{sen } \omega_0 t]$$

Al sustituir las ecuaciones 3.53 y 3.54 en la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{j\omega t}] &= \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) - j\delta(\omega + \omega_0) + j\delta(\omega - \omega_0)] \\ &= 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \end{aligned} \tag{3.56}$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier de  $e^{j\omega_0 t}$  es un solo impulso de intensidad  $2\pi$  localizado en  $\omega = \omega_0$ . Obsérvese que la señal  $e^{j\omega_0 t}$  no es función real del tiempo, por lo que tiene un espectro que existe solamente en  $\omega = \omega_0$ . Ya hemos demostrado anteriormente que, para cualquier función real de tiempo, la función de densidad espectral  $F(\omega)$  satisface la condición siguiente (véase la ecuación 3.33):

$$F^*(\omega) = F(-\omega)$$

y

$$|F(\omega)| = |F(-\omega)|$$

De ahí que, para cualquier función real de tiempo, el espectro de magnitud sea una función par de  $\omega$ ; si existe un impulso en  $\omega = \omega_0$ , deberá existir otro impulso en  $\omega = -\omega_0$ . Eso es lo que sucede para las señales  $\sin \omega_0 t$  y  $\cos \omega_0 t$ .

### 3.12.7 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA

Se ha desarrollado la transformada de Fourier como caso límite de la serie de Fourier, al suponer que el período de una función periódica se vuelve infinito. Ahora se procederá en la dirección opuesta, para demostrar que la serie de Fourier sólo es un caso límite de la transformada de Fourier. Este punto de vista es muy útil, pues permite unificar el tratamiento de ambas funciones, las periódicas y las no periódicas.

En un sentido estricto, la transformada de Fourier de una función periódica no existe, ya que ésta no satisface la condición de integrabilidad absoluta. Para cualquier función periódica  $f(t)$

:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \infty$$

No obstante, la transformada existe en el límite. Ya hemos encontrado las transformadas de Fourier de  $\cos \omega_0 t$  y  $\sin \omega_0 t$  en el límite. Usaremos el mismo procedimiento, al suponer que la función periódica existe solamente en el intervalo finito  $(-T/2, T/2)$  y que  $T$  se vuelve infinito en el límite.

También podemos expresar la función periódica mediante su serie de Fourier. La transformada de Fourier de una función periódica es, entonces, la suma de las transformadas de Fourier de sus componentes. Podemos expresar la función periódica  $f(t)$  con período  $T$  como[5]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= \mathcal{F} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F}(e^{jn\omega_0 t}) \end{aligned}$$

Si tomamos las transformadas de Fourier de ambos miembros, tenemos

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad \left( \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right)$$

Al sustituir la transformada de  $e^{j\omega t}$  de la ecuación 3.56, obtenemos

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (3.57) \quad (3.57)$$

Este es un resultado significativo. La relación de 3.57 establece que *la función de densidad espectral o la transformada de Fourier de una señal periódica está compuesta por impulsos localizados en las frecuencias armónicas de dicha señal siendo la intensidad de cada impulso igual a  $2n$  multiplicado por el valor del coeficiente correspondiente de la serie exponencial de Fourier*. La secuencia de impulsos equidistantes no es más que la forma límite de una función de densidad continua. Este resultado no nos sorprende, pues, sabemos que una función periódica contiene solamente componentes de frecuencias armónicas discretas.

### Ejemplo 3.3

Encuéntrese la transformada de Fourier de una función pulso rectangular periódica (pulso rectangular de duración  $T$  segundos, que se repite cada  $T$  segundos). La transformada de Fourier de esta función está dada por (ecuación 3.21b)

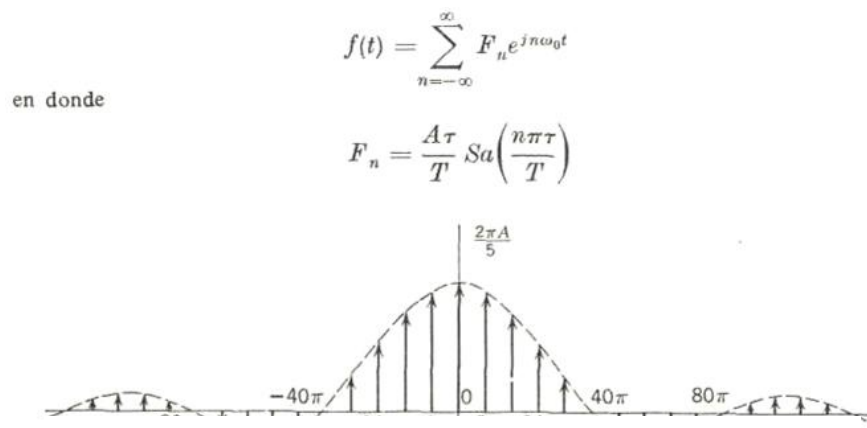


Figura 3.27 Función de densidad espectral del pulso rectangular periódico

De la ecuación 3.57, se deduce que la transformada de Fourier de esta función es:

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{2\pi A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \delta(\omega - n\omega_0) \quad (3.58)$$

Así, la transformada de Fourier de  $f(t)$  consta de impulsos localizados en  $\Omega = 0, \pm(\omega_0, \pm 2\omega_0, \dots, \pm n\omega_0, \dots, \text{etc.}$  La magnitud o intensidad del impulso localizado en  $\omega = n\omega_0$  está dada por  $2\pi (A\tau/T)Sa(n\pi\tau/T)$ .

En la figura 3.27 se representa el espectro en el caso  $r = 1/20$  segundo y  $T=1/4$  segundo, donde  $\omega_0 = 8\pi$ .

**Ejemplo 3.4**

Se encontrará la transformada de Fourier de una secuencia o tren de impulsos equidistantes de intensidad unitaria a intervalos de  $T$  segundos como la que se ilustra

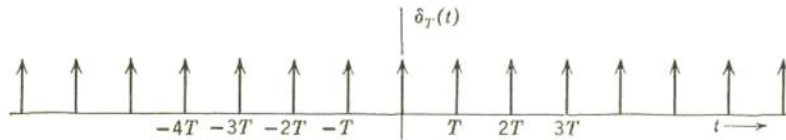


Figura 3.28 Secuencia de funciones impulso uniformes y equidistantes.

en la figura 3.28. Esta función tiene mucha importancia en la teoría de muestreo y por eso conviene denotarla con el símbolo especial  $\delta_{0T}(t)$ . Así,

$$\begin{aligned} \delta_T(t) &= \delta(t) + \delta(t - T) + \delta(t - 2T) + \dots + \delta(t - nT) + \dots \\ &\quad + \delta(t + T) + \delta(t + 2T) + \dots + \delta(t + nT) + \dots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Esta es una función periódica cuyo período es  $T$ . Encontraremos primero su serie de Fourier.

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

en donde

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

La función  $\delta_{0T}(t)$  en el intervalo  $(-T/2, T/2)$  es simplemente  $\delta(t)$ . Entonces

Por la propiedad de muestreo de la función impulso (ecuación 3.45a) la ecuación

$$F_n = \frac{1}{T}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

En consecuencia,  $F_n$  es constante. Se deduce, por lo tanto, que el tren de impulsos con período  $T$  contiene componentes de frecuencias

$\omega = 0, \pm \omega_0, \pm 2\omega_0, \dots, + n\omega_0, \dots, \text{etc.}, (\omega_0 = 2\pi/T)$ . [13]

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \quad (3.60)$$

Para encontrar la transformada de Fourier de  $\delta_T(t)$ , recurrimos a la ecuación 3.57.

Como en este caso  $F_n = 1/T$ , es evidente que



$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[\delta_T(t)] &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \delta(\omega - n\omega_0) \\
 &= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\
 &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\
 &= \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Esa relación es muy significativa. Establece que la transformada de Fourier de un tren de impulsos de intensidad unitaria con período  $T$  es otro tren de impulsos de intensidad  $\omega_0$  a intervalos de  $\omega_0$  rad/segundos ( $\omega_0 = 2\pi/T$ ). La secuencia de impulsos con períodos  $T=1/2$  y  $T=1$  segundos y sus respectivas transformadas se muestran en la figura 3.29. Evidentemente, a medida que aumenta el período del tren de impulsos, el espectro de frecuencias se vuelve más denso. [9]

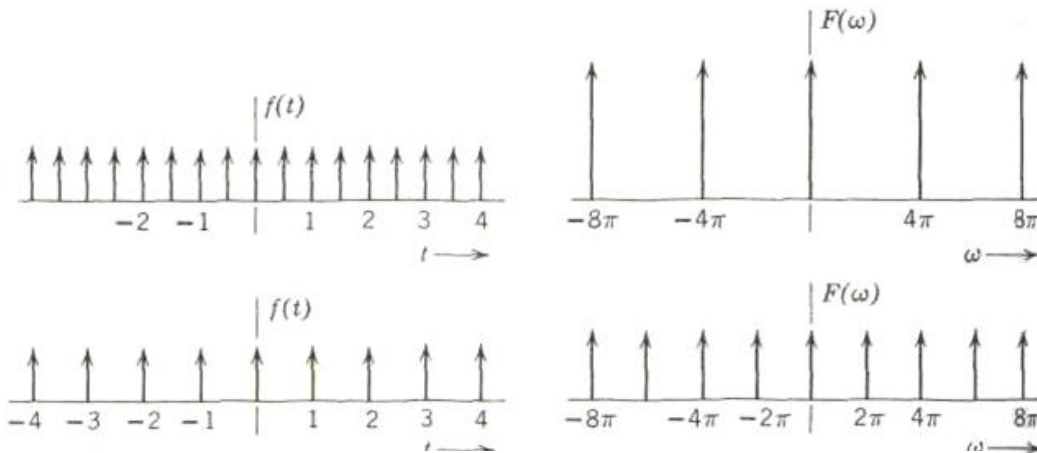


Figura 3.29 Funciones periódicas de impulsos y sus transformadas de Fourier

En la tabla 3.1 A se presentan diferentes funciones del tiempo y sus funciones de densidad espectral correspondientes. Obsérvese que en la mayoría de las señales de dicha

tabla,  $F(\omega)$  es real, por lo que sólo es necesario un diagrama. La tabla 3.1B es una lista de las transformadas de algunas funciones importantes

### 3.13 ALGUNAS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La transformada de Fourier constituye un instrumento para expresar una señal en términos de sus componentes exponenciales de diferentes frecuencias. Ya se ha indicado que dicha transformada no es sino otra forma de describir una función. Por lo tanto, se tienen ya dos descripciones, la del dominio del tiempo y la del dominio de la frecuencia para representar la función. Es ilustrativo estudiar lo que ocurre en uno de los dominios al efectuar ciertas operaciones con la función en el otro; por ejemplo, ¿cómo se afecta el espectro de una función si ésta fuese derivada o desplazada en el dominio del tiempo? A continuación trataremos de evaluar los efectos que algunas operaciones importantes con la función en uno de los dominios tienen sobre el otro.

Es oportuno hacer notar que existe cierta simetría en las ecuaciones correspondientes a ambos dominios. Esto puede verse fácilmente de las ecuaciones que definen a la transformada de Fourier[17]

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.62)$$

y

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

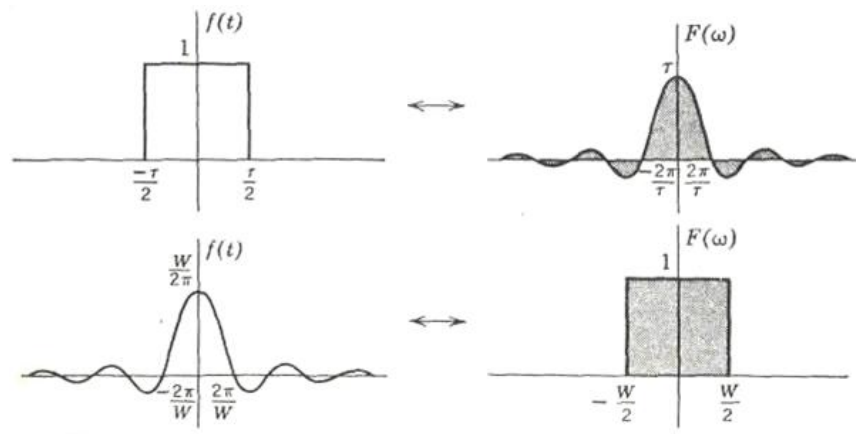


Figura 3.30 Propiedad de simetría de la transformada de Fourier

Por lo tanto es de esperarse que se refleje la misma simetría en las propiedades en cuestión. Por ejemplo, es de suponerse que el efecto en el dominio de la frecuencia, causado por una diferenciación en el dominio del tiempo, se parezca al efecto en el dominio del tiempo, causado por una diferenciación en el dominio de la frecuencia y veremos que así sucede.

Por conveniencia, denotaremos la correspondencia entre ambos dominios por una flecha bidireccional; es decir, la notación

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

significa que  $F(\omega)$  es la transformada directa de Fourier de  $f(t)$  y que  $f(t)$  es la transformada inversa de Fourier de  $F(\omega)$  según la relación de la ecuación 3.62. [27]

## 3.13.1 PROPIEDAD DE SIMETRÍA

Si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

entonces

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (3.63)$$

*Demostración.* De la ecuación 3.62 se desprende que

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-j\omega t} d\omega$$

Ya que en esta integral,  $\omega$  es una variable simbólica la podemos sustituir por cualquier otra variable  $x$ . Por lo tanto,

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-jxt} dx$$

entonces

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-jx\omega} dx$$

De la misma manera, substituyendo la variable simbólica  $x$  por otra variable  $t$ , obtenemos

$$\begin{aligned} 2\pi f(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \mathcal{F}[F(t)] \end{aligned}$$

asi

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (3.64)$$

Se manifiesta claramente la propiedad de simetría cuando  $f(t)$  es una función par. En ese caso,  $f(-\omega) = f(\omega)$  y la ecuación 3.64 se reduce a

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$$

Se ha representado esa propiedad en la figura 3.30

Puede verse fácilmente que la transformada de Fourier de una función pulso rectangular es una función de muestreo y que la transformada de Fourier de una función de muestreo es una función pulso rectangular. La propiedad de simetría se cumple en todas las funciones  $f(t)$  pares. Si  $f(t)$  no es función par, entonces la simetría no es perfecta y solo existe en cierto grado, como se ve a partir de la ecuación 3.64[22]

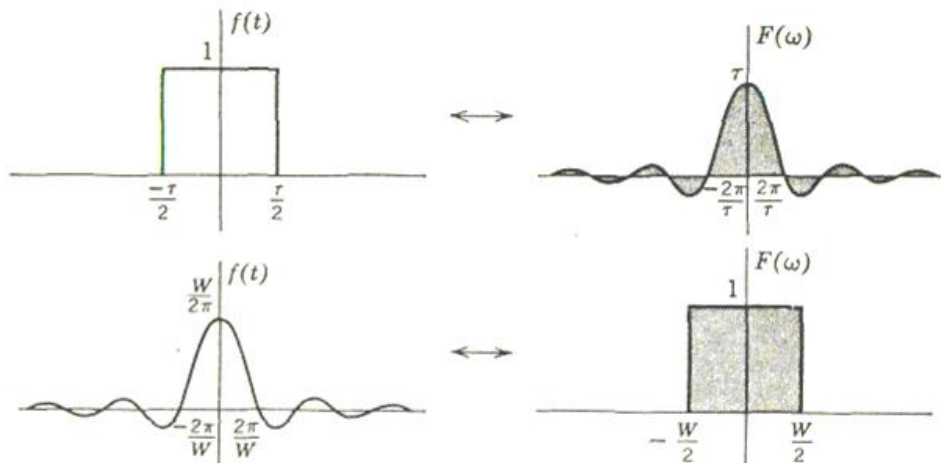


Figura 3.30 Propiedad de simetría de la transformada de Fourier.

Si

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$$

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

### 3.13.2 PROPIEDAD DE LINEALIDAD

Entonces, para cualesquiera constantes arbitrarias  $a_1$  y  $a_2$ ,

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \leftrightarrow \alpha_1 F_1(\omega) + \alpha_2 F_2(\omega) \quad (3.65)$$

Esto resulta obvio. La propiedad de linealidad también es válida para las sumas finitas:

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \cdots + a_n f_n(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) + \cdots + a_n F_n(\omega)$$

### 3.13.3 PROPIEDAD ESCALAR

Si  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

entonces, para una constante real  $a$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (3.66)$$

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt$$

*Demostración.* Si  $a$  es una constante real positiva,

Sea  $x = at$ . Entonces, para la constante positiva  $a$ ,

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{(-j\omega/a)x} dx$$

$$= \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Por lo tanto

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

De igual manera, se puede demostrar que, si  $a < 0$ ,

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{-a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

En consecuencia,

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

El significado de la propiedad escalar: La función  $f(at)$  representa  $f(t)$  comprimida en la escala del tiempo por el factor  $a$ . En la misma forma, la función  $F(\omega/a)$  representa la función  $F(\omega)$  expandida en la escala de frecuencia por el mismo factor  $a$ . En consecuencia, la propiedad escalar establece que el comprimir una función en el dominio del tiempo equivale a una expansión en el dominio de la frecuencia y viceversa. Este resultado también es intuitivamente obvio, pues el comprimir en el dominio del tiempo en determinado factor significa que la función varía más rápidamente en ese mismo factor y, en consecuencia, las componentes de frecuencia se incrementan proporcionalmente. En igual forma si, en la escala del tiempo, expandimos una función, ésta varía más lentamente y sus componentes en el espectro disminuyen, o sea que el espectro se comprime. Como ejemplo considérese la señal  $\cos \omega_0 t$  que contiene componentes de frecuencia en  $\pm \omega_0$ . La señal  $\cos 2\omega_0 t$  representa una compresión de  $\cos \omega_0 t$  en un factor de dos y sus componentes de frecuencia se

---

---

encuentran en  $\pm 2\omega_0$ . Por lo tanto es evidente que se ha expandido el espectro de frecuencia en un factor de dos. El efecto de la propiedad escalar se ilustra en la figura 3.31.

En el caso especial en que  $a = -1$ , de la propiedad escalar se deduce que



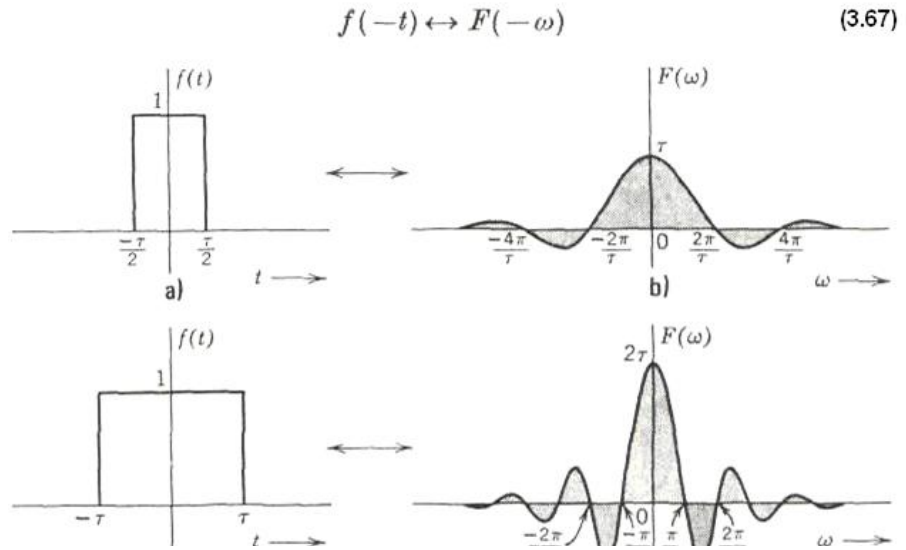


Figura 3.31 Comprimir en el dominio del tiempo equivale a una expansión en el dominio de la frecuencia.

**Ejemplo 3.5**

Encuéntrese la transformada inversa de Fourier de  $\text{sgn}(\omega)$  y  $u(\omega)$  mediante las propiedades de simetría y escalar. A partir de la ecuación 3.50, tenemos que

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

Si aplicamos a esta ecuación la propiedad de simetría (ecuación 3.64), obtenemos

$$\frac{2}{jt} \leftrightarrow 2\pi \operatorname{sgn}(-\omega)$$

Pero  $\operatorname{sgn}(-\omega) = -\operatorname{sgn}(\omega)$ . Por lo tanto,

$$\frac{j}{\pi t} \leftrightarrow \operatorname{sgn}(\omega) \quad (3.68)$$

y también

$$u(\omega) = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{sgn}(\omega)]$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[u(\omega)] &= \frac{1}{2}\{\mathcal{F}^{-1}[1] + \mathcal{F}^{-1}[\operatorname{sgn}(\omega)]\} \\ &= \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left[ \frac{1}{2} \delta(t) - \frac{1}{2\pi jt} \right] \leftrightarrow u(\omega) \quad (3.69)$$

### 3.13.4 PROPIEDAD DE DESPLAZAMIENTO EN LA FRECUENCIA

Si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

entonces

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0) \quad (3.70)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= F(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

El teorema establece que un desplazamiento de  $\omega_0$  en el dominio de la frecuencia equivale a multiplicar por  $e^{j\omega_0 t}$  en el dominio del tiempo. Es evidente que la multiplicación por el factor  $e^{j\omega_0 t}$  traslada todo el espectro de frecuencia  $F(\omega)$  en la cantidad  $\omega_0$ . Por eso, a este teorema también se le llama *teorema de traslación de frecuencia*.

En los sistemas de comunicación, muy a menudo hay que trasladar el espectro de frecuencia. Esto se suele llevar a cabo multiplicando la señal  $f(t)$  por una señal sinusoidal. El proceso se llama *modulación*. Puesto que se puede expresar una señal sinusoidal como suma de exponenciales, es claro que la multiplicación de la señal  $f(t)$  por una señal sinusoidal (modulación) trasladará todo el espectro de frecuencias. Esto se demuestra fácilmente si se observa la identidad[21]

$f(t) \cos \omega_0 t = 1/2[f(t)e^{j\omega_0 t} + f(t)e^{-j\omega_0 t}]$  Por el teorema de traslación de frecuencia, se deduce que, **si**



$$f(t) \leftrightarrow (\omega)$$

entonces

$$f(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow 1/2[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)] \quad (3.71a)$$

De igual manera, se puede demostrar que

$$f(t) \sin \omega_0 t \leftrightarrow 3/2 [F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)] \quad (3.71b)$$

Es así como el proceso de la modulación traslada el espectro de frecuencias en la cantidad  $\pm\omega_0$ . Este resultado es muy útil

en la teoría de la comunicación. En la figura 3.32, se muestra un ejemplo de traslación de frecuencia producida por la modulación. La ecuación 3.71 también se conoce con el nombre de *teorema de la modulación*

### 3.13.5 PROPIEDAD DE DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

Si

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

entonces

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (3.72)$$

*Demostración.*

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt$$

Sea

$$t - t_0 = x$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x+t_0)} dx \\ &= F(\omega)e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

El teorema establece que, si se desplaza una función en el dominio del tiempo en la cantidad de  $t_0$  segundos, entonces no se altera su espectro de magnitud  $|F(\omega)|$ , pero el espectro de fase sufre un cambio de  $-\omega t_0$ . Este resultado es intuitivo, pues el desplazamiento de la función en el dominio del tiempo no afecta las componentes de frecuencia de la señal, a pesar de que cada componente se desplaza en la cantidad  $t_0$ . Resumiendo, un desplazamiento de  $t_0$  en el dominio del tiempo es equivalente a una desviación de fase de  $-\omega t_0$ , es decir, a la multiplicación por  $e^{-j\omega t_0}$  en el dominio de la frecuencia. [21]

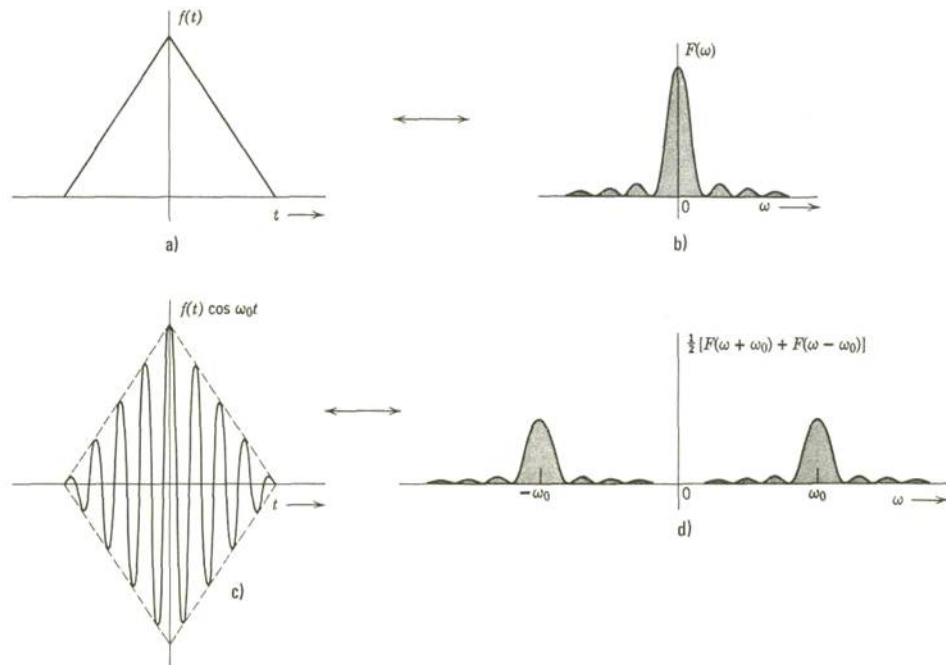


Figura 1.39 Efecto de la modulación en el espectro de frecuencias.

**Ejemplo 3.6**

Encontrar la transformada de Fourier del pulso rectangular que se muestra en la figura 3.33. Dicho pulso está representado por la función  $G_T(t)$ , desplazada en  $\tau/2$  segundos. En consecuencia, se puede expresar como  $G_T(t-\tau/2)$ . De acuerdo con la tabla 1.1B y por la propiedad de desplazamiento en el tiempo, tenemos

$$G_T\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau/2}$$

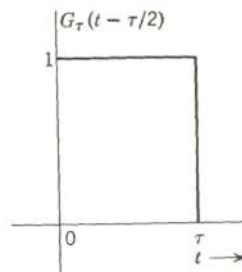


Figura 3.33 Función  $G_T(t-\tau/2)$

Obsérvese la dualidad entre las propiedades de desplazamiento en la frecuencia y en el tiempo. También hay una versión dual del teorema de la modulación. Su enunciado

es:

$$\frac{1}{2}[f(t + T) + f(t - T)] \leftrightarrow F(\omega) \cos \omega T \quad (3.73)$$

### 3.16.6 DIFERENCIACIÓN EN EL TIEMPO Y LA FRECUENCIA

Si

$$\begin{aligned} & f(t) \leftrightarrow F(\omega) \\ \text{entonces*} \quad & \frac{df}{dt} \leftrightarrow (j\omega)F(\omega) \end{aligned} \quad (3.74a)$$

y

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega) \quad (3.74b)$$

siempre y cuando  $F(\omega)/\omega$  esté limitada en  $\omega = 0$ . Esto equivale a decir que  $F(0) = 0$  o

que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$$

\* La ecuación 3.74a no garantiza la existencia de la transformada de  $df/dt$ . Implica solamente que, si existe, está dada por  $j\omega F(\omega)$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ \text{Por lo tanto} \quad \frac{df}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Al cambiar el orden de diferenciación e integración, obtenemos

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

De esta ecuación se deduce evidentemente que

$$\frac{df}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$$



De la misma manera, se puede extender el resultado a la derivada de orden  $n$

$$\frac{d^n f}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega) \quad (3.75)$$

Ahora, considérese la función

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

Entonces

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t)$$

Por lo tanto, si

$$\varphi(t) \leftrightarrow \Phi(\omega)$$

entonces

$$f(t) \leftrightarrow j\omega\Phi(\omega)$$

Es decir,

$$F(\omega) = j\omega\Phi(\omega)$$

En consecuencia,

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

y, así,

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

Nótese que el resultado sólo es válido si existe  $\bar{\varphi}(\omega)$ , es decir,  $\varphi(t)$  es absolutamente integrable. Esto sólo será posible si

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi(t) = 0$$

Es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$$

Lo que equivale a la condición  $F(0) = 0$ , ya que



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(\omega)|_{\omega=0}$$

Los resultados de los teoremas de diferenciación e integración en el tiempo, en la forma en que lo expresan las ecuaciones 3.73 y 3.74, son también obvios intuitivamente. La transformada de Fourier expresa una función  $f(t)$  en términos de una suma continua de funciones exponenciales de la forma  $e^{j\omega t}$ . En consecuencia la derivada de  $f(t)$  es igual a la suma continua de las derivadas de cada una de las componentes exponenciales. Puesto que la derivada de una función exponencial  $e^{j\omega t}$  es igual a  $j\omega e^{j\omega t}$ , entonces el proceso de diferenciación de  $f(t)$  equivale a multiplicar cada componente exponencial. Por lo tanto.

$$\frac{df}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

Se hace una argumentación parecida en el caso de la integración.

Se concluye que diferenciar en el dominio del tiempo equivale a multiplicar por  $j\omega$  en el dominio de la frecuencia y que integrar en el dominio del tiempo equivale a dividir entre  $j\omega$  en el de la frecuencia. En el siguiente ejemplo, veremos la utilidad del teorema de diferenciación en el tiempo para obtener la transformada de Fourier en el caso de algunas funciones continuas por tramos.

**Ejemplo 3.7**

Determinar la transformada de Fourier de la función trapezoidal de la figura 3.34. Diferenciamos dos veces dicha función para obtener una secuencia de impulsos. Es fácil obtener la transformada de los impulsos. En la figura 3.34 vemos claramente que

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{A}{(b-a)} [\delta(t+b) - \delta(t+a) - \delta(t-a) + \delta(t-b)] \quad (3.76)$$

La transformada de Fourier de un impulso unitario es 1. Por lo tanto, según el teorema de desplazamiento en el tiempo, obtenemos

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

Al emplear este resultado y el teorema de diferenciación en el tiempo, se puede escribir la transformada de la ecuación 3.51 como

$$(j\omega)^2 F(\omega) = \frac{A}{(b-a)} (e^{j\omega b} - e^{j\omega a} - e^{-j\omega a} + e^{-j\omega b})$$

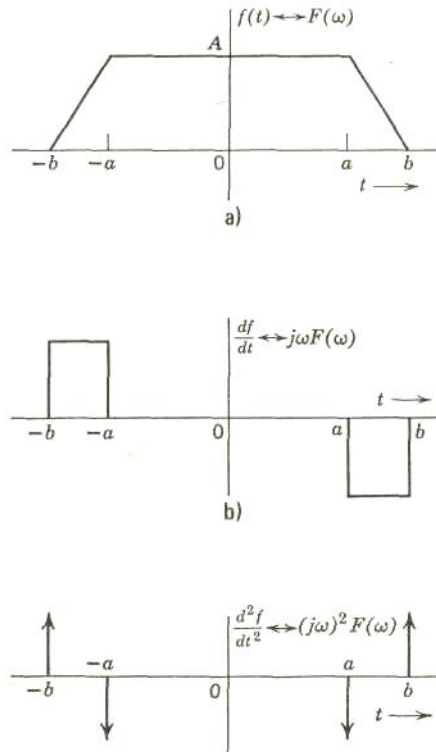


Figura 3.34 Funcion trapezoidal

de donde obtenemos

$$F(\omega) = \frac{2A}{(b-a)} \left( \frac{\cos a\omega - \cos b\omega}{\omega^2} \right)$$

Este problema nos sugiere un método numérico para obtener la transformada de Fourier de una función  $f(t)$ . Se puede aproximar cualquier función  $f(t)$  mediante seg-

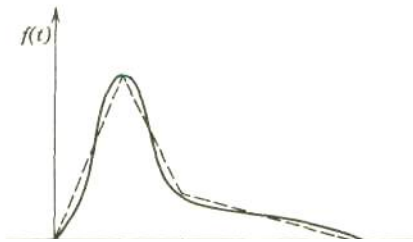


Figura 3.35 Aproximacion a una función mediante segmentos de linea recta

segmentos de recta, como se muestra en la figura 3.35. Se obtiene una aproximación tan buena como se desee, con sólo incrementar el número de segmentos. La segunda derivada de la función aproximada produce un tren de impulsos cuya transformada encontramos rápidamente. La transformada  $F(\omega)$  de la función que se busca es  $1/(j\omega)^2$  multiplicada por la transformada de la segunda derivada. [20]

### 3.13.7 DIFERENCIACIÓN EN LA FRECUENCIA

Si Entonces

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

*Demostración.*

$$-jtf(t) \leftrightarrow \frac{dF}{d\omega} \quad (3.77)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Por lo tanto

$$\frac{dF}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Al cambiar el orden de diferenciación e integración, obtenemos

$$\frac{dF}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} -jtf(t)e^{-j\omega t} dt$$

De la ecuación anterior se deduce que

$$-jtf(t) \leftrightarrow \frac{dF}{d\omega}$$

Si extendemos el resultado a derivadas de orden superior:

$$(-jt)^n f(t) = \frac{d^n F}{d\omega^n}$$



Se concluye que una diferenciación en el dominio de la frecuencia equivale a una multiplicación por  $-j\omega$  en el dominio del tiempo.

### 3.14 TEOREMA DE PARSEVAL PARA SEÑALES DE POTENCIA.

La potencia promedio disipada en una resistencia de un ohm es

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f^*(t) dt \quad \text{watts} \quad (3.76)$$

Si se utiliza la serie de Fourier exponencial y se reemplaza la ecuación anterior

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{jm\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.77)$$

Donde:  $\omega_0 = 2\pi/T$

Si se supone que  $f(t)$  es integrable en el intervalo  $t_0$  a  $(t_0 + T)$ , en la ecuación se puede intercambiar el orden de las sumatorias y la integral:

$$P = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt \quad (3.78)$$

Sin embargo, las funciones exponenciales complejas son ortogonales en el intervalo  $t_0$  a  $(t_0 + T)$  de la manera que la integral de la ecuación anterior es cero excepto para el caso



especial en que  $m=n$ . En estas condiciones, la doble sumatoria se reduce a una y aparece una nueva relación para la potencia promedio en términos de las magnitudes de los coeficientes:

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_n^* = \sum_{N=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \quad (3.79)$$

Si se combinan las ecuaciones se obtiene una relación conocida como Teorema de Parseval para señales periódicas:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{N=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \quad (3.80)$$

Si se conoce la función del tiempo  $f(t)$ , se puede hallar la potencia promedio. Por otra parte ésta también se puede hallar si se conoce los coeficientes de Fourier. Las respuestas obtenidas en el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia deben concordar.

**Ejemplo 3.8.**

Determine la potencia de  $f(t) = 2\text{sen } 100t$  usando las ecuaciones (3.76) y (3.79)

**Solución:** De la ecuación (3.76), se tiene

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 4\text{sen}^2 100t dt = 2W$$

Los coeficientes de Fourier  $f(t)$  son:

$$F_1 = -j \quad F_{-1} = j$$

$F_n = 0$  para toda  $n$  diferente de  $+1$

Así la ecuación (3.79) da:

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 = F_1 F_1^* + F_{-1} F_{-1}^* = |j|^2 + |-j|^2 = 1 + 1 = 2W$$

En la ecuación (3.79) se ilustra el hecho de que la potencia es una función periódica se distribuye en frecuencias discretas relacionadas entre si en forma armónica. La potencia contenida en cada componente de frecuencias está dada por el término respectivo de la ecuación (3.79). Entonces, si se hace una grafica de  $P$  contra  $\omega$ , la potencia de  $f(t)$  se localiza sólo en frecuencias discretas, como se aprecia en la figura 3.36. Esta gráfica se llama “espectro de potencias” de la señal  $f(t)$ .

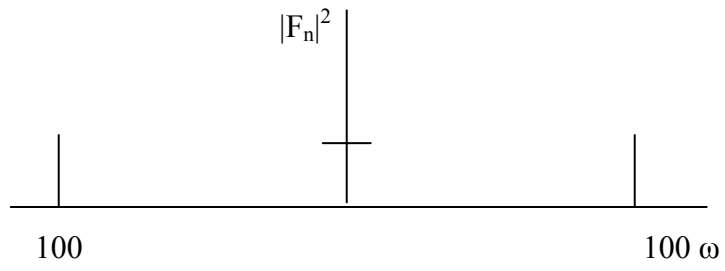


Figura 3.36 Espectro de potencias de la función

TABLA 3.1a

Algunas funciones del tiempo y las correspondientes funciones de densidad espectral

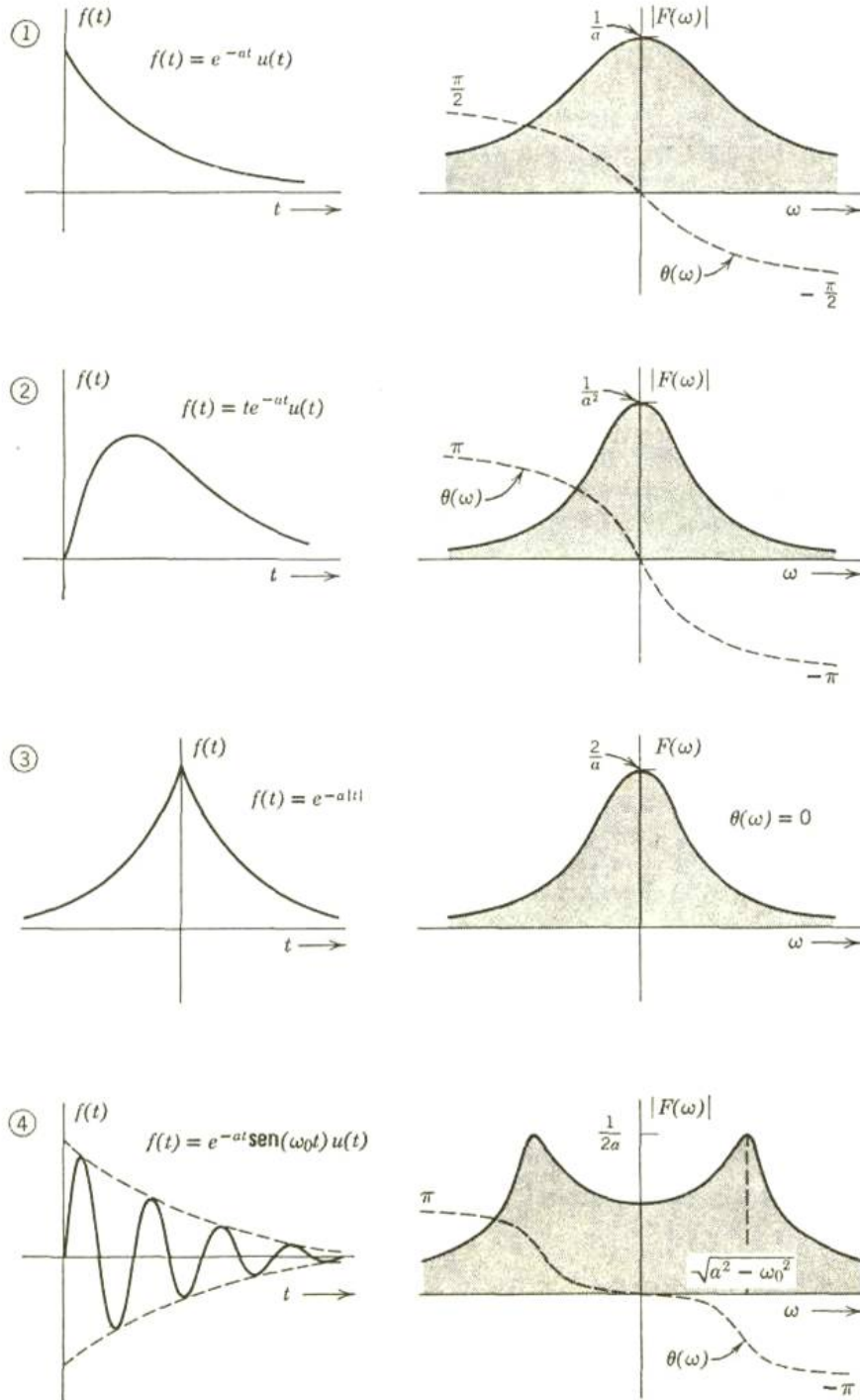


TABLA 3.1 a(continuación)

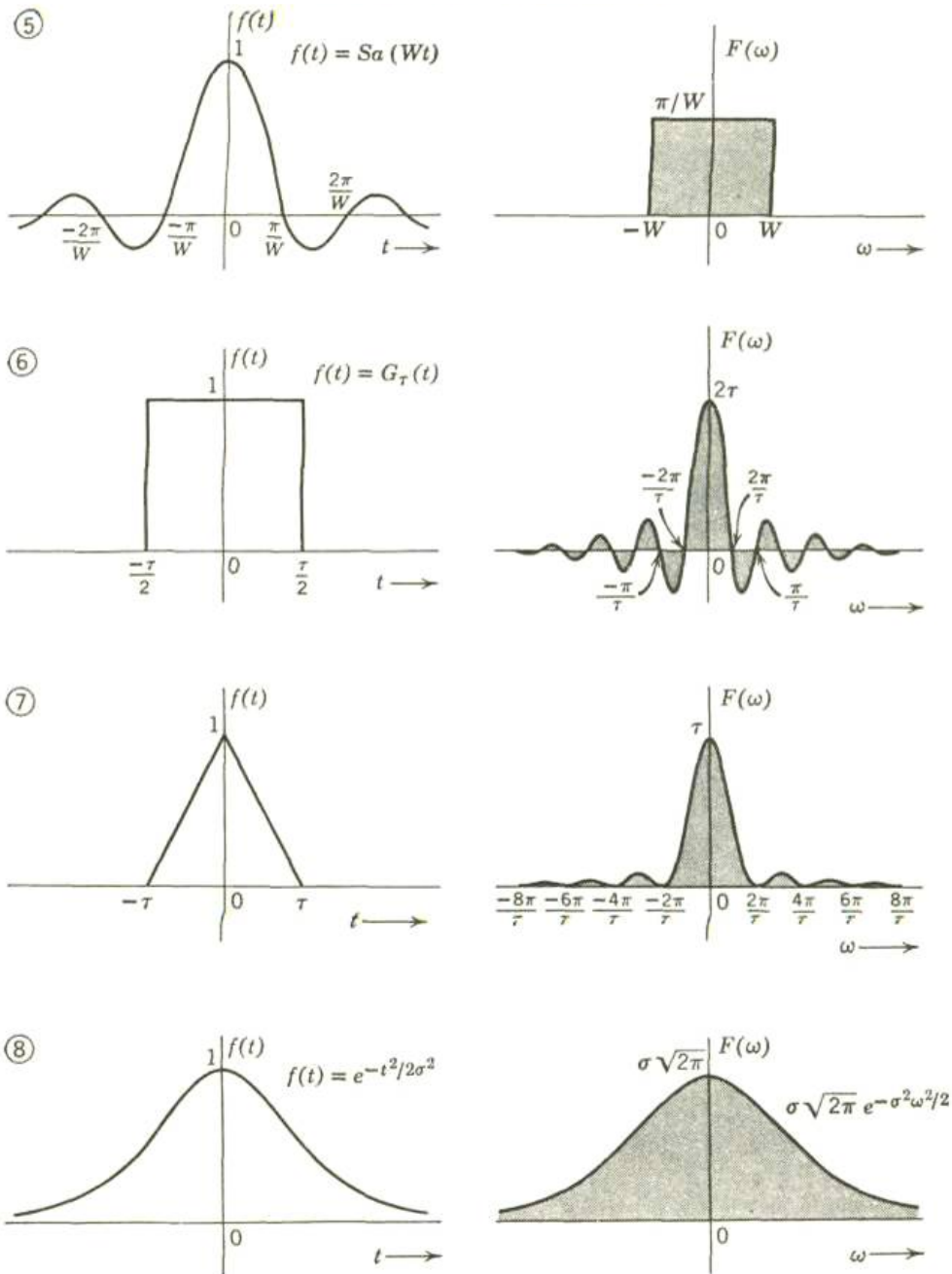


TABLA 3.1a (continuación)

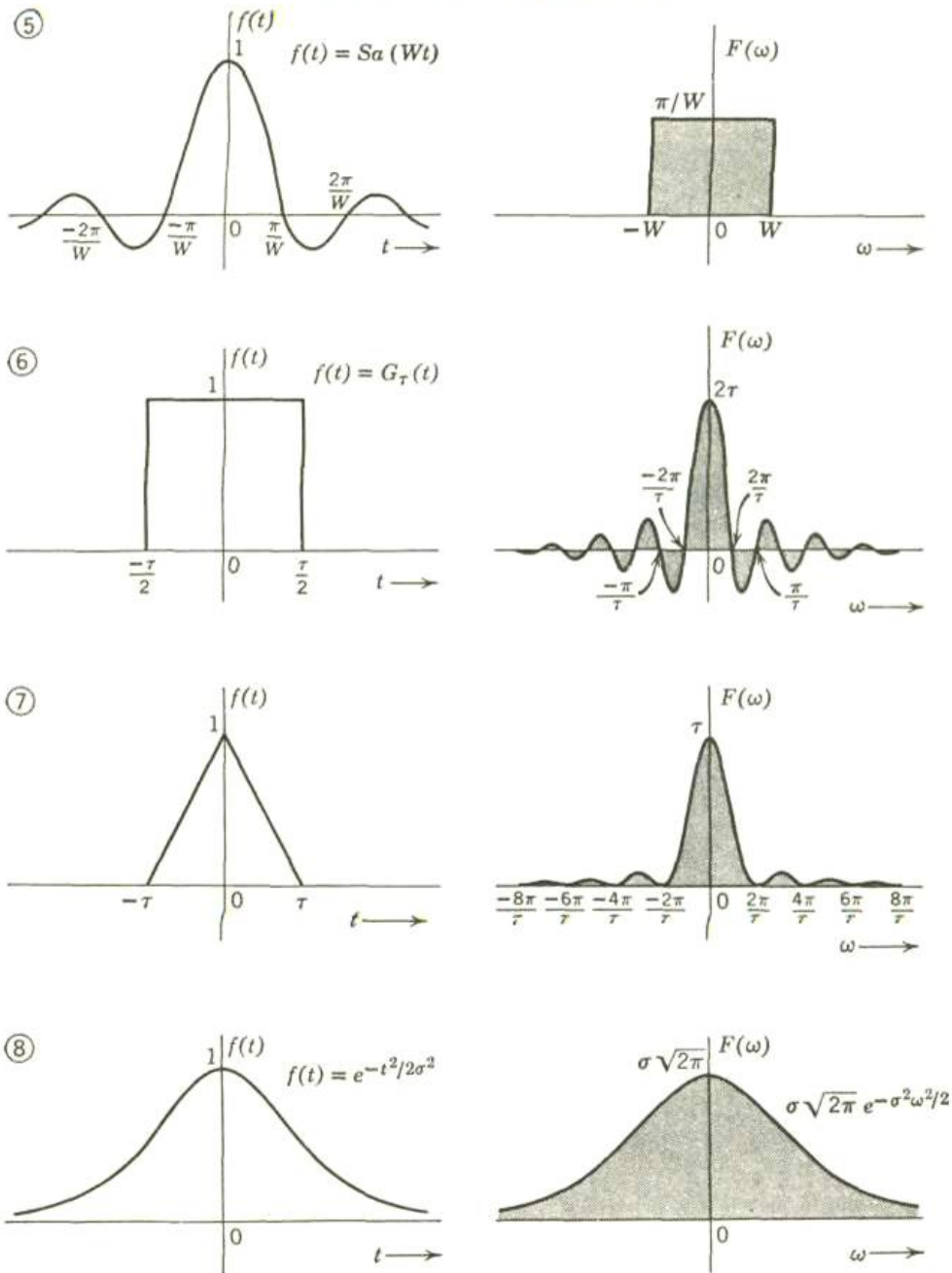


TABLA 3.1a CONTINUACION

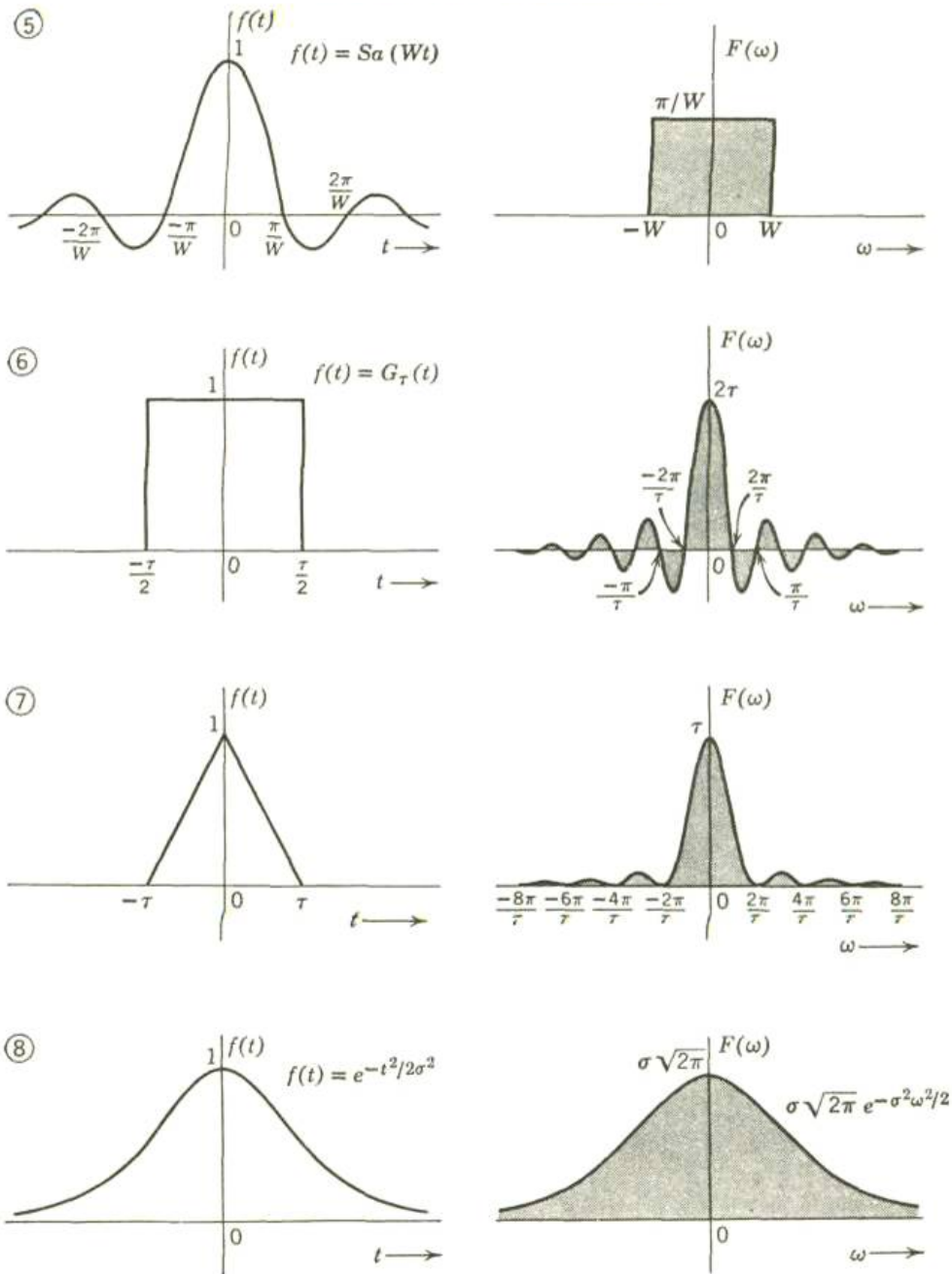


TABLA 3.1a CONTINUACION

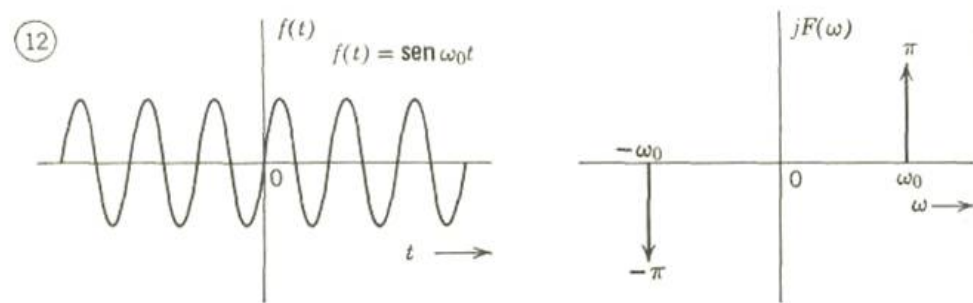
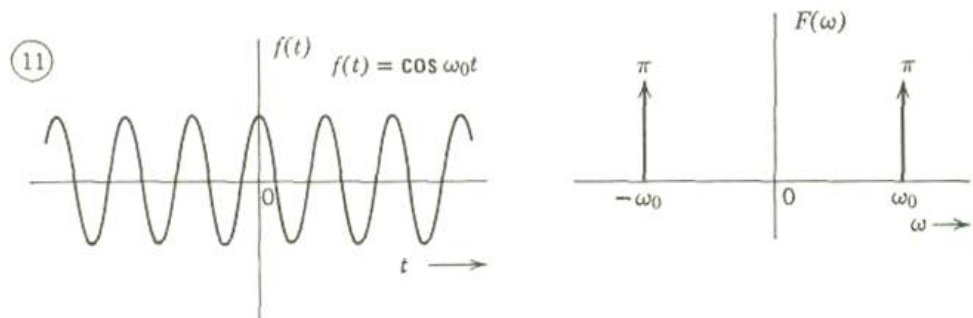
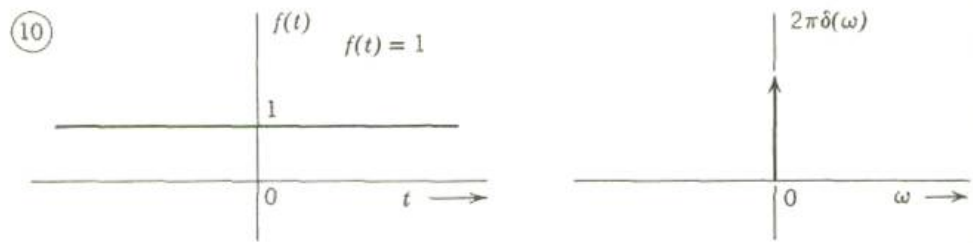
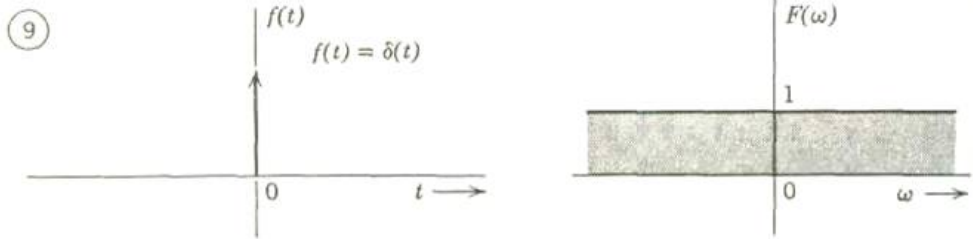
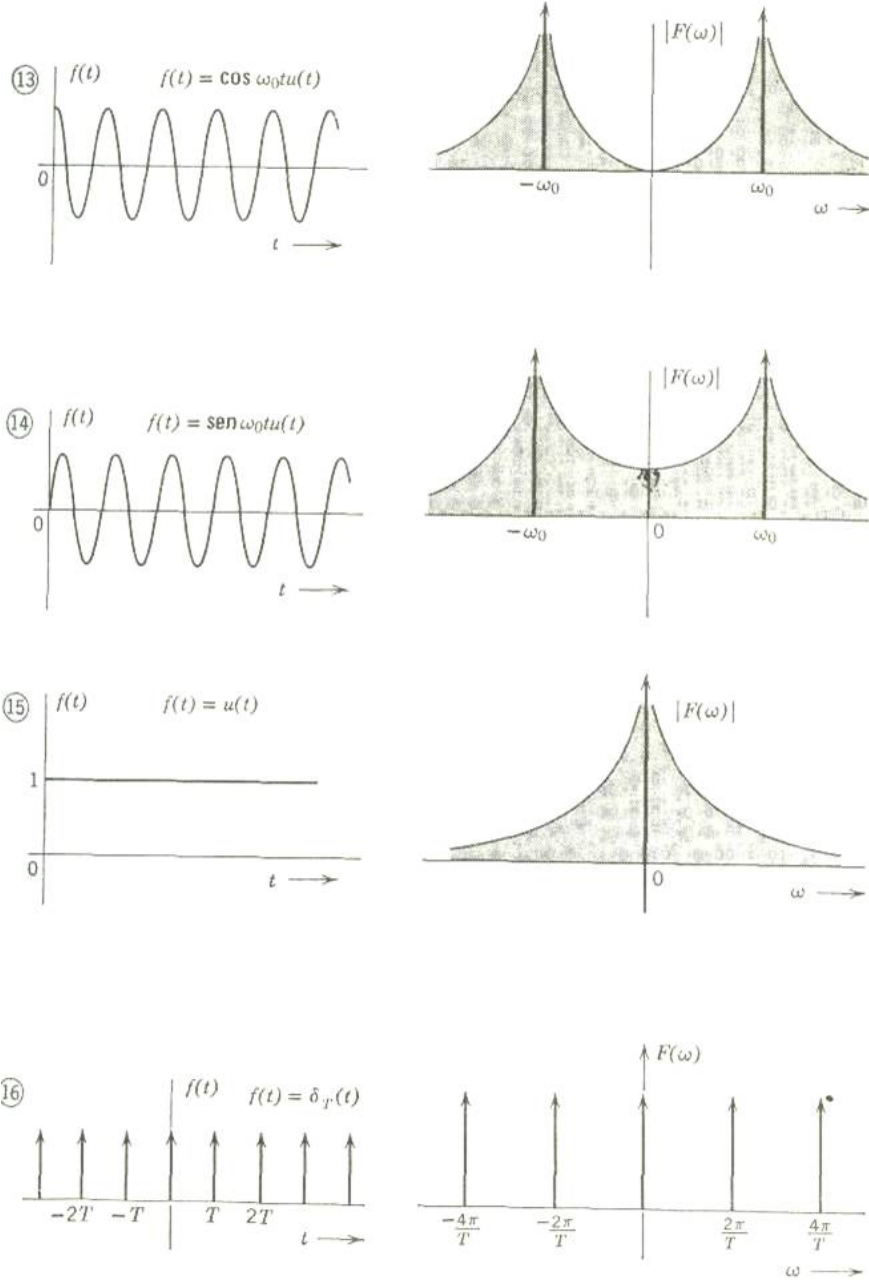




TABLA 3.1a CONTINUACION



**TABLA 3.1b**  
**Transformada de fourier**

$f(t)$	$F(\omega)$
1. $e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}$
2. $te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$
3. $ t $	$\frac{-2}{\omega^2}$
4. $\delta(t)$	1
5. 1	$2\pi \delta(\omega)$
6. $u(t)$	$\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
7. $\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
8. $\sen \omega_0 t u(t)$	$\frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
9. $\cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
10. $\sen \omega_0 t$	$j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
11. $e^{-at} \sen \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$
12. $\frac{W}{2\pi} Sa \frac{(Wt)}{2}$	$G_W(\omega)$
13. $G_\tau(t)$	$\tau Sa \left( \frac{\omega\tau}{2} \right)$
14. $\left. \begin{array}{l} 1 - \frac{ t }{\tau} \cdots  t  < \tau \\ 0 \quad \quad \quad \cdots  t  > \tau \end{array} \right\}$	$\tau \left[ Sa \left( \frac{\omega\tau}{2} \right) \right]^2$
15. $e^{-\sigma t }$	$\frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2}$
16. $e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma \sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2 \omega^2/2}$
17. $\delta_T(t)$	$\omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) \quad \left( \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right)$

## EJERCICIOS

## E.1.1 FUNCIONES PERIÓDICAS

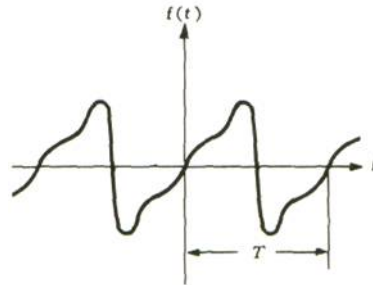


Figura 1.1 Una función periódica.

Figura E1.1 Un función periódica

Una *función periódica* se puede definir como una función para la cual

$$f(t) = f(t+T) \quad (\text{E.1.1})$$

para todo valor de  $t$ . La constante mínima  $T$  que satisface la relación (E.1.1) periodo de la función. Mediante repetición de (E.1.1), se obtiene,

$$F(t) = f(t+nT), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{E.1.2})$$

**PROBLEMA E.1.1** Encontrar el período de la *función*  $f(t) = \cos t/3 + \cos t/3$ .

**Solución:**

si la función  $f(t)$  es periódica con un período  $T$ , entonces, de (E.1.1) se tiene

$$\cos 1/3 (t + T) + \cos 1/4 (t + T) = \cos t/3 + \cos t/4$$



Puesto que  $\cos(\theta + 2\pi n) = \cos \theta$  para cualquier entero  $m$  se tiene que

$$1/3 T = 2\pi m,$$

$$1/4 T = 2\pi n,$$

donde  $m$  y  $n$  son enteros. Por consiguiente  $T = 6\pi m = 8\pi n$ ; cuando  $m = 4$  y  $n = 3$ , se obtiene el mínimo valor de  $T$ . (Esto se puede ver mediante el procedimiento de ensayo y error). De donde,  $T = 24\pi$ .

En general, si la función

$$f(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$$

es periódica con período  $T$ , entonces es posible encontrar dos enteros  $m$  y  $n$  tales que

$$\omega_1 T = 2\pi m \quad (\text{E.1.3})$$

$$\omega_2 T = 2\pi n \quad (\text{E.1.4})$$

El cociente de (E.1.3) y (E.1.4) es

$$\omega_1/\omega_2 = m/n \quad (\text{E.1.5})$$

**PROBLEMA E.1.2** Decir si la función  $f(t) = \cos 10t + \cos (10 + \pi) t$  es una función

**Solución:** aquí  $\omega_1 = 10$  y  $\omega_2 = 10 + \pi$ . Puesto que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{10}{10 + \pi}$$

no es un número racional, es imposible encontrar un valor  $T$  que satisfaga (E.1.1); por consiguiente  $f(t)$  no es una función periódica.

**PROBLEMA E.1.3** Encontrar el período de la función  $f(t) = (10 \cos t)^2$

**Solución:** si aplicamos la identidad trigonométrica  $\cos^2 \theta = 1/2 (1 + \cos 2\theta)$  se tiene

$$f(t) = (10 \cos t)^2 = 100 \cos^2 t = 100 \cdot 1/2 (1 + \cos 2t) = 50 + 50 \cos 2t.$$

Puesto que una constante es una función periódica de período  $T$  para cualquier valor de  $T$ , y el período de  $\cos 2t$  es  $\pi$ , se concluye que el período de  $f(t)$  es  $\pi$ .

**PROBLEMA E.1.4** Demostrar que si  $f(t+T) = f(t)$ , entonces

$$\int_{a-T/2}^{a+T/2} f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$$

$$\int_T^{T+t} f(t) dt = \int_0^t f(t) dt.$$

**Solución:** si  $f(t + T) = f(t)$ , entonces, al hacer  $t = t - T$ , se tiene

$$f(t - T + t) = f(T) = f(T - T). \quad (\text{E.1.8})$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt.$$

Considerar ahora

SÍ se hace la sustitución  $t = t - T$  y se usa la igualdad (E.1.8), se obtiene

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(\tau - T) d\tau = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(\tau) d\tau.$$

Puesto que cualquier símbolo puede representar la variable comodín

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t) dt. \quad (\text{E.1.9})$$

Ahora, el primer miembro de la ecuación (E.1.6) puede escribirse como

$$\int_{a-T/2}^{a+T/2} f(t) dt = \int_{a-T/2}^{-T/2} f(t) dt + \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t) dt.$$

Aplicando el resultado de (E.1.9) a la primera integral del segundo miembro de la anterior ecuación, se tiene

$$\int_{a-T/2}^{a+T/2} f(t) dt = \int_{a+T/2}^{T/2} f(t) dt + \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t) dt = \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t) dt + \int_{a+T/2}^{T/2} f(t) dt$$

En (E.1.9), if  $\alpha = 0$  y  $\beta = t$ , entonces (E.1.9) se convierte en

$$\int_0^t f(t) dt = \int_T^{T+t} f(t) dt.$$

En (E.1.6), si  $a = T/2$ , entonces (E.1.6) se convierte en

$$\int_0^T f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt. \quad \text{E.1.10)$$

**PROBLEMA E.1.5** Sea  $f(t + T) = f(t)$  y

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Demostrar que  $g(t + T) = g(t)$  si y sólo si

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0.$$

**Solución:** puesto que  $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ ,

$$g(t + T) = \int_0^{t+T} f(\tau) d\tau = \int_0^T f(\tau) d\tau + \int_T^{t+T} f(\tau) d\tau.$$

Por (E.1.10) y (E.1.7), se tiene Por

consiguiente,  $\int_0^T f(\tau) d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$ ,  $\int_T^{t+T} f(t) dt = \int_0^t f(t) dt$ .

y  $g(t + T) = g(t)$  si y sólo si  $\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0$



**PROBLEMA E1.6** Sea  $f(t+T)=f(t)$ , y**PROBLEMA 1.6** Sea  $f(t+T)=f(t)$ , y

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} a_o t,$$

donde  $a_o = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$ . Demostrar que  $F(t+T) = F(t)$ .

**Solución:** puesto que  $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} a_o t$ , se tiene

$$F(t+T) = \int_0^{t+T} f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} a_o \cdot (t+T)$$

$$= \int_0^T f(\tau) d\tau + \int_T^{T+t} f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} a_o t - \frac{1}{2} a_o T.$$

Por (E.1.10) y (E.1.7), se tiene

$$\int_0^T f(\tau) d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) d\tau = \frac{1}{2} a_o T,$$

$$\int_T^{T+t} f(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Por consiguiente,

$$F(t+T) = \frac{1}{2} a_o T + \int_0^t f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} a_o t - \frac{1}{2} a_o T = \int_0^t f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} a_o t = F(t).$$

**E.1.2 SERIES DE FOURIER**

Sea la función  $f(t)$  una función periódica de período  $T$ , la cual se puede representar por la serie trigonométrica

---

---

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots$$

$$= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sen n\omega_0 t), \quad (\text{E.1.11})$$

donde  $\omega_0 = 2\pi/T$ .

Una serie como la representada por (E.1.11) se llama *serie trigonométrica de Fourier*. Esta serie también se puede representar así:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos (n\omega_0 t - \theta_n) \quad (\text{E.1.12})$$

**PROBLEMA E.1.7** Deducir la forma (E.1.12) de (E.1.11) y expresar  $C_n$  y  $\theta_n$  en términos de  $a_n$  y  $b_n$ .

Solución: se puede expresar

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sen n\omega_0 t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left( \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos n\omega_0 t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sen n\omega_0 t \right)$$

Si se utiliza la identidad trigonométrica

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sen n\omega_0 t &= C_n (\cos \theta_n \cos n\omega_0 t + \sen \theta_n \sen n\omega_0 t) \\ &= C_n \cos (n\omega_0 t - \theta_n), \end{aligned} \quad (\text{E1.13})$$

donde

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (\text{E1.14})$$

$$\cos \theta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \sen \theta_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}};$$

Por consiguiente

$$\tan \theta_n = b_n / a_n, \text{ ó } \theta_n = \tan^{-1}(b_n / a_n) \quad (\text{E1.15})$$

También si se hace

$$C_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad (\text{E1.16})$$

se obtiene

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sen n\omega_0 t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos (n\omega_0 t - \theta_n). \quad (1.17)$$

(E1.17)

Según (E.1.12), es obvio que la representación en series de Fourier de una

Función periódica, representa la función periódica como la suma de componentes sinusoidales que tienen diferentes frecuencias. La componente sinusoidal de frecuencia  $\omega = n\omega_0$  se denomina la  $n$ -ésima armónica de la función periódica. La primera armónica comúnmente se conoce como la componente fundamental porque tiene el mismo periodo de la función y  $\omega_0 = 2\pi/T$  se conoce como la frecuencia angular fundamental. Los coeficientes  $C_n$  y los ángulos  $\theta_n$  se conocen como amplitudes armónicas y ángulos de fase, respectivamente.

### E.1.3 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO: FUNCIONES ORTOGONALES

Un conjunto de funciones  $\theta_k(t)$  es ortogonal en un intervalo  $a < t < b$  si para dos funciones cualesquiera  $\theta_m(t)$  y  $\theta_n(t)$  pertenecientes al conjunto  $\theta_k(t)$  cumple:

$$\int_a^b \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ r_n & \text{para } m = n \end{cases} \quad (\text{E1.18})$$

Considérese, por ejemplo, un conjunto de funciones sinusoidales; mediante el cálculo elemental se puede demostrar que

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{para } m \neq 0 \quad (1.19a) \quad (\text{E1.19a})$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{para todo valor de } m, \quad (1.19b) \quad (\text{E1.19b})$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/2, & m = n \neq 0, \end{cases} \quad (1.19c) \quad (\text{E1.19c})$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/2, & m = n \neq 0, \end{cases} \quad (1.19d) \quad (\text{E1.19d})$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{para todo valor de } m \text{ y } n. \quad (1.19e) \quad (\text{E1.19e})$$

donde  $\omega_0 = 2\pi/T$  estas relaciones demuestran que las funciones  $1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t, \sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots, \sin n\omega_0 t$ , forman un conjunto de

funciones ortogonales en el intervalo  $-T/2 < t < T/2$ .

**PROBLEMA E.1.8** Verificar la integral (E.1.19c).

Solución: con la identidad trigonométrica

$$\cos A \cos B = 1/2 [\cos (A + B) + \cos (A - B)],$$

y

$$\omega_o t \Big|_{t=\pm T/2} = \frac{2\pi}{T} \left( \pm \frac{T}{2} \right) = \pm \pi,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{-T/2}^{T/2} \cos (m\omega_o t) \cos (n\omega_o t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \{ \cos [(m+n)\omega_o t] + \cos [(m-n)\omega_o t] \} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(m+n)\omega_o} \operatorname{sen} [(m+n)\omega_o t] \Big|_{-T/2}^{T/2} \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{1}{(m-n)\omega_o} \operatorname{sen} [(m-n)\omega_o t] \Big|_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(m+n)\omega_o} \{ \operatorname{sen} [(m+n)\pi] + \operatorname{sen} [(m-n)\pi] \} \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{1}{(m-n)\omega_o} \{ \operatorname{sen} [(m-n)\pi] + \operatorname{sen} [(m-n)\pi] \} \\ &= 0 \text{ si } m \neq n. \end{aligned}$$

Utilizando la identidad trigonométrica  $\cos^2 \theta = 1/2 (1 + \cos 2\theta)$  y haciendo  $m = n \neq 0$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(m\omega_0 t) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [1 + \cos 2m\omega_0 t] dt \\
&= \frac{1}{2} t \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{4m\omega_0} \operatorname{sen} 2m\omega_0 t \Big|_{-T/2}^{T/2} \\
&= \frac{T}{2}.
\end{aligned}$$

**PROBLEMA E.1.9** Verificar la integral (E.1.19e). Solución: con la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} A \cos B = 1/2 [\operatorname{sen} (A + B) + \operatorname{sen} (A - B)],$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \{\operatorname{sen} [(m+n)\omega_0 t] + \operatorname{sen} [(m-n)\omega_0 t]\} dt \\
&= \frac{1}{2} \frac{-1}{(m+n)\omega_0} \cos [(m+n)\omega_0 t] \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{2} \frac{-1}{(m-n)\omega_0} \cos [(m-n)\omega_0 t] \Big|_{-T/2}^{T/2} \\
&= 0 \text{ si } m \neq n.
\end{aligned}$$

Si se hace  $m = n \neq 0$ , y se utiliza la identidad trigonométrica  $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$  se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(m\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(2m\omega_0 t) dt \\
&= -\frac{1}{4m\omega_0} \cos(2m\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^{T/2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Evidentemente, para  $m = n = 0$ , la integral es cero.





## E.1.4 EVALUACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER

Utilizando las relaciones de ortogonalidad (E.1.19a-e) se pueden evaluar ahora los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  de la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{sen } n\omega_0 t). \quad (\text{E1.11})$$

Multiplicando ambos lados por  $\cos m\omega_0 t$  e integrando entre  $[-T/2$  y  $T/2]$ , se obtiene intercambiando el orden de los signos de integración y sumatoria se obtiene[5

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt \\ &+ \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) \right] \cos(m\omega_0 t) dt \\ &+ \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\omega_0 t) \right] \cos(m\omega_0 t) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt. \end{aligned}$$

Si se aplican las relaciones de ortogonalidad (E.1.19), se tiene

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = \frac{T}{2} a_m. \quad (1.20)$$

(E1.20)

De donde  $\therefore$

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt. \quad (E1.21)$$

Si se integra (E.1.11) entre  $[-T/2$  y  $T/2]$  y se usa (1-19), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} dt + \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{sen } n\omega_0 t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} a_0 T + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{2} a_0 T. \end{aligned} \quad (E1.22)$$

De donde,

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad (E1.23)$$

o

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt. \quad (E1.24)$$

Se debe notar que  $a_0/2$  es el valor promedio de  $f(t)$  durante un período.

La ecuación (E.1.24) indica que (E.1.21), la cual evalúa los coeficientes de la serie coseno, también da el coeficiente  $a_0$  correctamente puesto que  $\cos m\omega t|_{m=0}=1$

Análogamente, si la ecuación {E.1.11} se multiplica por  $\text{sen } m\omega_0 t$  y se integra término por término entre los límites  $[-T/2 \text{ y } T/2]$ , se obtiene.

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen } (m\omega_0 t) dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \text{sen } (m\omega_0 t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos (n\omega_0 t) \text{sen } (m\omega_0 t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \text{sen } (n\omega_0 t) \text{sen } (m\omega_0 t) dt. \end{aligned}$$

El uso de las relaciones de ortogonalidad (E.1.19) conduce a

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen } (m\omega_0 t) dt = \frac{T}{2} b_m. \quad (\text{E1.25})$$

De donde

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen } (m\omega_0 t) dt. \quad (\text{E1.26})$$

Sustituyendo  $m$  por  $n$  se puede expresar (1.21) y (1.26) como

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos (n\omega_0 t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{E1.27})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen } (n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, \quad (\text{E1.28})$$

EN general, no es necesario que el intervalo de integración de (E.1.27) y (E.1.28) sea simétrico alrededor del origen. Si se aplica (E.1.6), el único requisito es que la integral se tome sobre un período completo. [5]

**PROBLEMA E.1.10** Encontrar la serie de Fourier para la función  $f(t)$  definida

(E1.29)

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases} \quad (1.29)$$

y  $f(t+T)=f(t)$ . (Ver figura 1.2)

**Solución:** por (1.27) y  $\omega_0 t \Big|_{t=\pm T/2} = \frac{2\pi}{T} \left( \pm \frac{T}{2} \right) = \pm \pi$ , se tiene

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[ \int_{-T/2}^0 -\cos(n\omega_0 t) dt + \int_0^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left( \frac{-1}{n\omega_0} \operatorname{sen} n\omega_0 t \Big|_{-T/2}^0 + \frac{1}{n\omega_0} \operatorname{sen} n\omega_0 t \Big|_0^{T/2} \right) \end{aligned} \quad (E1.30)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{T} \left[ \frac{-1}{n\omega_0} [\operatorname{sen} 0 - \operatorname{sen}(-n\pi)] + \frac{1}{n\omega_0} [\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen} 0] \right] \\ &= 0 \text{ para } n \neq 0 \end{aligned}$$

(E1.31)

puesto que  $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen}(n\pi) = 0$ .

Para  $n = 0$ , se tiene

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0 \quad (1.31)$$

puesto que el valor promedio de  $f(t)$  durante un período es cero.

De (1.28) y  $\omega_0 T = (2\pi/T)T = 2\pi$  se tiene

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[ \int_{-T/2}^0 -\operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt + \int_0^{T/2} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[ \frac{1}{n\omega_0} \cos(n\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^0 + \frac{-1}{n\omega_0} \cos(n\omega_0 t) \Big|_0^{T/2} \right] \\ &= \frac{2}{n\omega_0 T} \left\{ [1 - \cos(-n\pi)] - [\cos(n\pi) - 1] \right\} \end{aligned} \quad (E1.32)$$

Puesto que  $\cos n\pi = (-1)^n$ ,

p

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ impar.} \end{cases} \quad (E1.33)$$

De donde

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\omega_0 t \\ &= \frac{4}{\pi} \left( \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5\omega_0 t + \dots \right). \end{aligned} \quad (E1.34)$$

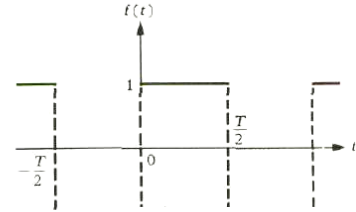


Figura E1.2 Forma de onda del problema E1.10

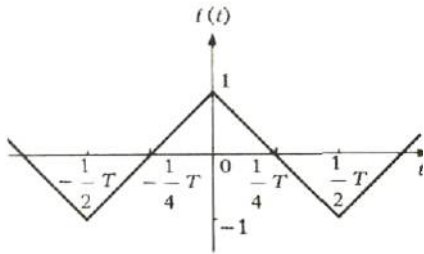


Figura 1.3. Forma de onda del problema 1.11.

**PROBLEMA E.1.11** Encontrar la serie de Fourier para la función cuya forma de onda se muestra en la figura E.1.3.

**Solución:** la función  $f(t)$  se puede expresar analíticamente así:

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{4t}{T}, & -\frac{T}{2} < t \leq 0 \\ 1 - \frac{4t}{T}, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases} \quad (\text{E1.35})$$

Puesto que el valor promedio de  $f(t)$  durante un período es cero,

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0.$$

Por (E.1.27) y (E.1.35) se obtiene

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_o t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_o t) dt + \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 \frac{4}{T} t \cos(n\omega_o t) dt \\
 &\quad + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} -\frac{4}{T} t \cos(n\omega_o t) dt.
 \end{aligned}$$

La primera integral del segundo miembro es igual a cero. Haciendo  $t = -\tau$  en la segunda integral se obtiene

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{8}{T^2} \int_{T/2}^0 (-\tau) \cos[n\omega_o(-\tau)](-d\tau) - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_o t) dt \\
 &= \frac{8}{T^2} \int_{T/2}^0 \tau \cos(n\omega_o \tau) d\tau - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_o t) dt \\
 &= -\frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} \tau \cos(n\omega_o \tau) d\tau - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_o t) dt \\
 &= -\frac{16}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_o t) dt.
 \end{aligned}$$

Ahora, integrando por partes, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \int_0^{T/2} t \cos(n\omega_o t) dt &= \frac{1}{n\omega_o} t \operatorname{sen}(n\omega_o t) \Big|_0^{T/2} - \frac{1}{n\omega_o} \int_0^{T/2} \operatorname{sen}(n\omega_o t) dt \\
 &= \frac{1}{(n\omega_o)^2} \cos(n\omega_o t) \Big|_0^{T/2}
 \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(n2\pi/T)^2} (\cos n\pi - 1), \\
 a_n &= -\frac{16}{T^2} \frac{1}{(n2\pi/T)^2} (\cos n\pi - 1) \\
 &= \frac{4}{n^2\pi^2} (1 - \cos n\pi). \tag{E1.37}
 \end{aligned}$$

Puesto que  $\cos n\pi = (-1)^n$ ,

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{8}{n^2\pi^2}, & n \text{ impar.} \end{cases} \tag{E1.38}$$

Análogamente, por (E.1.28) y (E.1.35) se tiene

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_o t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(n\omega_o t) dt + \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 \frac{4}{T} t \operatorname{sen}(n\omega_o t) dt \\
 &\quad + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} -\frac{4}{T} t \operatorname{sen}(n\omega_o t) dt \\
 &= \frac{8}{T^2} \int_{T/2}^0 (-\tau) \operatorname{sen}[n\omega_o(-\tau)] (-d\tau) - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \operatorname{sen}(n\omega_o t) dt \\
 &= \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \operatorname{sen}(n\omega_o t) dt - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \operatorname{sen}(n\omega_o t) dt \\
 &= 0. \tag{E1.39}
 \end{aligned}$$

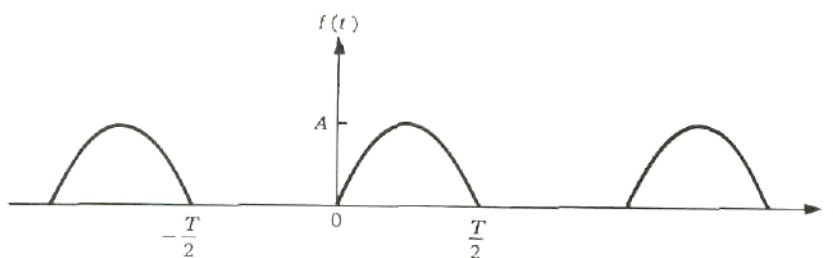
De donde,

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \left( \cos \omega_o t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega_o t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega_o t + \dots \right). \tag{E1.40}$$

**PROBLEMA E.1.12** Encontrar la serie de Fourier para la función  $f(t)$  definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ A \operatorname{sen} \omega_0 t, & 0 < t < \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (\text{E1.41})$$

y  $f(t+T) = f(t)$ ,  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Ver Figura E1.4



*Figura E1.4 forma de onda del problema E1.12*

Solución: puesto que  $f(t) = 0$  cuando  $-T/2 < t < 0$ , de (E.1.27) y (E.1.28) se tiene



$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A \operatorname{sen}(\omega_0 t) dt = \frac{2A}{T\omega_0} (-\cos \omega_0 t) \Big|_0^{T/2} \\
 &= \frac{A}{\pi} (1 - \cos \pi) \\
 &= \frac{2A}{\pi}, \tag{E1.42}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A \operatorname{sen}(\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{A}{T} \int_0^{T/2} \{ \operatorname{sen}[(1+n)\omega_0 t] + \operatorname{sen}[(1-n)\omega_0 t] \} dt. \tag{E1.43}
 \end{aligned}$$

Cuando  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{A}{T} \int_0^{T/2} \operatorname{sen}(2\omega_0 t) dt = \frac{A}{T} \left( -\frac{1}{2\omega_0} \cos 2\omega_0 t \right) \Big|_0^{T/2} = \frac{A}{4\pi} [1 - \cos(2\pi)] \\
 &= \frac{A}{4\pi} (1 - 1) \\
 &= 0. \tag{E1.44}
 \end{aligned}$$

Cuando  $n = 2, 3, \dots$ ,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{A}{T} \left\{ \frac{\cos[(1+n)\omega_0 t]}{(1+n)\omega_0} - \frac{\cos[(1-n)\omega_0 t]}{(1-n)\omega_0} \right\} \Big|_0^{T/2} \\
 &= \frac{A}{2\pi} \left\{ \frac{1 - \cos[(1+n)\pi]}{1+n} + \frac{1 - \cos[(1-n)\pi]}{1-n} \right\} \\
 &= \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{A}{2\pi} \left( \frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n} \right) = -\frac{2A}{(n-1)(n+1)\pi}, & n \text{ impar} \end{cases} \tag{E1.45}
 \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} A \operatorname{sen}(\omega_0 t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{A}{T} \int_0^{T/2} \{ \cos[(1-n)\omega_0 t] - \cos[(1+n)\omega_0 t] \} dt. \tag{E1.46}
 \end{aligned}$$

Cuando  $n = 1$

$$b_1 = \frac{A}{T} \int_0^{T/2} dt - \frac{A}{T} \int_0^{T/2} \cos(2\omega_o t) dt = \frac{A}{2} - \frac{A}{T} \frac{\text{sen } 2\omega_o t}{2\omega_o} \Big|_0^{T/2} = \frac{A}{2}. \quad (\text{E1.47})$$

Cuando  $n = 2, 3, \dots$ ,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{A}{T} \left\{ \frac{\text{sen} [(1-n)\omega_o t]}{(1-n)\omega_o} - \frac{\text{sen} [(1+n)\omega_o t]}{(1+n)\omega_o} \right\} \Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{A}{2\pi} \left\{ \frac{\text{sen} [(1-n)\pi] - \text{sen } 0}{1-n} - \frac{\text{sen} [(1+n)\pi] - \text{sen } 0}{1+n} \right\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E1.48})$$

De donde,

$$f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \text{sen } \omega_o t - \frac{2A}{\pi} \left( \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega_o t + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega_o t + \dots \right). \quad (\text{E1.49})$$

**PROBLEMA E.1.13** Desarrollar  $f(t) = \text{sen}^5 t$  en serie de Fourier.

**Solución:** en vez de proceder como se hizo en el problema (E.1.12), se hará uso de las identidades

$$e^{\pm jn\theta} = \cos n\theta \pm j \text{sen } n\theta, \quad (\text{E1.50})$$

$$\cos n\theta = \frac{e^{jn\theta} + e^{-jn\theta}}{2}, \quad (\text{E1.51})$$

$$\text{sen } n\theta = \frac{e^{jn\theta} - e^{-jn\theta}}{2j}. \quad (\text{E1.52})$$

Se expresa

$$\begin{aligned} \text{sen}^5 t &= \left( \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right)^5 = \frac{1}{32j} (e^{j5t} - 5e^{j3t} + 10e^{jt} - 10e^{-jt} + 5e^{-j3t} - e^{-j5t}) \\ &= \frac{5}{8} \text{sen } t - \frac{5}{16} \text{sen } 3t + \frac{1}{16} \text{sen } 5t. \end{aligned} \quad (\text{E1.53})$$

En este caso la serie de Fourier tiene tres términos solamente.

## E.1.5 APROXIMACIÓN MEDIANTE UNA SERIE FINITA DE FOURIER

Sea

$$S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \quad (\text{E1.54})$$

la suma de los primeros  $(2k + 1)$  términos de una serie de Fourier que representa  $f(t)$  es el intervalo  $-T/2 < t < T/2$ .

$S f(t)$  se aproxima por  $S_k(t)$ , es decir,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) + \varepsilon_k(t), \quad (\text{E1.55})$$

$$\varepsilon_k(t) = f(t) - S_k(t), \quad (\text{E1.56})$$

y  $\varepsilon_k(t)$  es la diferencia o *error* entre  $f(t)$  y su aproximación, entonces el *error cuadrático medio*  $E_k$  está definido por

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\varepsilon_k(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - S_k(t)]^2 dt. \quad (\text{E1.57})$$

**PROBLEMA E.1.14** Demostrar que si se aproxima una función  $f(t)$  por una serie finita de Fourier  $S_k(t)$ , entonces esta aproximación tiene la propiedad de ser el mínimo error cuadrático medio.

Solución Si se sustituye (E.1.54) en (E.1.57), se tiene

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \right]^2 dt. \quad (\text{E1.58})$$

Considerar  $E_k$  como una función de  $a_0, a_n$ , y  $b_n$ . Entonces para que el error cuadrático medio  $E_k$  sea un mínimo, sus derivadas parciales con respecto a  $a_0, a_n$ , y  $b_n$  deben ser iguales a cero, es decir,

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial a_n} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial b_n} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Intercambiando el orden de la diferenciación y de la integración:

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_0} = -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \right] dt, \quad (\text{E1.59})$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_n} = -\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \right] \cos (n\omega_0 t) dt, \quad (\text{E1.60})$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial b_n} = -\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \right] \operatorname{sen} (n\omega_0 t) dt \quad (\text{E1.61})$$

Si se usan las propiedades de ortogonalidad (E.1.19), (E.1.27), y (E.1.28) del seno y del coseno, las integrales (E.1.59), (E.1.60) y E.1.61) se reducen a

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_0} = \frac{a_0}{2} - \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0, \quad (\text{E1.62})$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_n} = a_n - \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos (n\omega_0 t) dt = 0, \quad (\text{E1.63})$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial b_n} = b_n - \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen} (n\omega_0 t) dt = 0. \quad (\text{E1.64})$$

**PROBLEMA E.1.15** Demostrar que el error cuadrático medio  $f_k$  en una aproximación  $af(t)$  por  $S_k(t)$ , definida por (1.57), se reduce a

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2). \quad (\text{E1.65})$$

**Solución:** por (E.1.57) se tiene

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - S_k(t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{[f(t)]^2 - 2f(t)S_k(t) + [S_k(t)]^2\} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt - \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)S_k(t) dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [S_k(t)]^2 dt. \end{aligned} \quad (\text{E1.66})$$

Ahora bien;

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)S_k(t) dt &= \frac{2}{T} \frac{a_0}{2} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^k a_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ &\quad + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^k b_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (E.1.27) y (E.1.28), se obtiene

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) S_k(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2). \quad (1.67) \quad (\text{E1.67})$$

Utilizando las relaciones de ortogonalidad (E.1.19),

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [S_k(t)]^2 dt &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \right]^2 dt \\ &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned} \quad (\text{E1.68})$$

Sustituyendo (E.1.67) y (E.1.68) en (E.1.66), se obtiene

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) + \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned}$$

**PROBLEMA E.1.16** Establecer la siguiente desigualdad:

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2). \quad (\text{E1.69})$$

Solución: por (E.1.57), se tiene

$$E_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - S_k(t)]^2 dt \geq 0. \quad (\text{E1.70})$$

Y también por (E.1.65) se deduce que

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2). \quad (\text{E1.71})$$

El teorema de Parseval afirma que si  $a_0$ ,  $a_n$ , y  $b_n$  para  $n=1, 2, \dots$  son los Coeficientes en la expansión de Fourier de una función periódica  $f(t)$  con período T, entonces

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (\text{E1.72})$$

**PROBLEMA E.1.17** Demostrar el teorema de Parseval.

Solución: por (E.1.65), se tiene

(E1.73)

$$E_{k+1} = E_k - \frac{1}{2} (a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2). \quad (1.73)$$

Mediante las relaciones (E.1.70) y (E.1.73) se observa que la sucesión  $|E_k|$  contiene solamente términos no negativos y no es creciente; por consiguiente la sucesión converge.

De (E.1.56),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k(t) = f(t) - \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = 0. \quad (\text{E1.74})$$

De donde,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_k = 0. \quad (\text{E1.75})$$

En consecuencia, por (E.1.65) se concluye que

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

### E.1.6 LAS CONDICIONES DE DIRICHLET

Anteriormente se dedicó atención a la determinación de la serie de Fourier de funciones dadas y se supuso que la función dada se podía representar mediante una serie de Fourier.

Ahora se debe investigar la convergencia de la serie de Fourier a  $f(t)$ .

Una de las partes más elegantes de la teoría de Fourier es la que trata de los problemas de convergencia. Se enunciarán aquí las condiciones, conocidas como *condiciones de Dirichlet*,

bajo las cuales es posible la representación en serie de Fourier de una función dada  $f(t)$ . Las condiciones de Dirichlet son:

- 1) La función  $f(t)$  tiene un número finito de discontinuidades en un período.
- 2) La función  $f(t)$  tiene un número finito de máximos y mínimos en un período.
- 3) La integral del valor absoluto de  $f(t)$  en un periodo es finita; es decir,

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt = \text{finita} < \infty. \quad (\text{E1.76})$$

Se dice que una función  $f(t)$  es *continua por tramos* en el intervalo finito  $[-T/2, T/2]$  si satisface las condiciones (1) y (2).

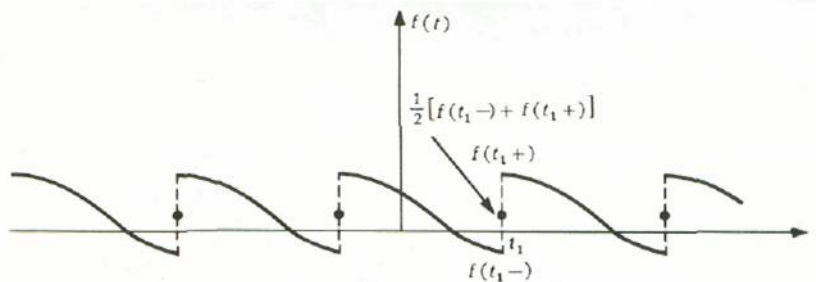


Figura E1.5 Función por tramos y límites a la izquierda y a la derecha

En un punto de discontinuidad, como se muestra en la figura E.1.5, el cual se denota por  $t = t_1$ , la serie de Fourier converge a

$$\frac{1}{2} [f(t_1-) + f(t_1+)], \quad (\text{E1.77})$$

donde  $f(t)$  es el límite de  $f(t)$  cuando  $t$  se aproxima a  $t_1$  por la izquierda, y  $f(t_1+)$  es el límite de  $f(t)$  cuando  $t$  se aproxima a  $t_1$  por la derecha. La razón de esta propiedad de la serie de Fourier se discute en el apéndice A.



**PROBLEMA E.1.18** Si  $a_n$  y  $b_n$  son las sucesiones de los coeficientes de  $f(t)$ , demostrar

que 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \quad (1.78) \quad (E1.78)$$

Solución: por (E.1.69), se tiene

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt.$$

Puesto que la serie del miembro izquierdo es convergente entonces es necesario que

lo cual implica que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ . 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0,$$

**PROBLEMA E.1.19** Demostrar que si  $f(t)$  es una función continua por tramos y la integral del valor absoluto de  $f(t)$  es finita en el Intervalo  $-T/2 < t < T/2$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sen(n\omega_0 t) dt = 0. \quad (E1.79)$$

Solución: los coeficientes de Fourier  $a_n$  y  $b_n$  existen, puesto que la integral del valor absoluto de  $f(t)$  es finita en el intervalo  $[-T/2, T/2]$ . Aplicando (E.1.78) y la definición de los coeficientes de Fourier se concluye que (E.1.79) es correcta, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} a_n \\ b_n \end{cases} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \begin{cases} \cos(n\omega_0 t) \\ \sen(n\omega_0 t) \end{cases} dt = 0.$$

De donde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \begin{cases} \cos(n\omega_0 t) \\ \sen(n\omega_0 t) \end{cases} dt = 0.$$

### E.1.7 DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER

En seguida se considera la diferenciación e integración de las series de Fourier de una función. Se debe observar que la diferenciación término por término de una serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

multiplica los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  por  $\pm n\omega_0$ . De donde la diferenciación tiende a disminuir la convergencia y puede resultar en *divergencia*. Por otra parte, en la integración término por término los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  se dividen por  $\pm n\omega_0$ , y el resultado es una serie cuya convergencia aumenta.

**PROBLEMA E.1.26** Demostrar el siguiente teorema de diferenciación de las series de Fourier

Si  $f(t)$  es continua cuando  $-T/2 < t < T/2$  con  $f(T/2^-) = f(T/2^+)$ , y si la derivada  $f'(t)$  es continua por tramos, y diferenciable, entonces la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (\text{E1.80})$$

se puede diferenciar término por término para obtener (E1.81)

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 (-a_n \sin n\omega_0 t + b_n \cos n\omega_0 t). \quad (1.81)$$

Solución: puesto que  $f(t)$  es continua por tramos y diferenciable, su serie de Fourier converge a ella; por lo tanto su representación en serie de Fourier es

$$f'(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\omega_0 t + \beta_n \operatorname{sen} n\omega_0 t), \quad (\text{E1.82})$$

donde

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f'(t) \cos (n\omega_0 t) dt, \quad (\text{E1.83})$$

$$\beta_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f'(t) \operatorname{sen} (n\omega_0 t) dt. \quad (\text{E1.84})$$

Integrando (E.1.83) y (E.1.84) por partes,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{T} \left[ (\cos n\omega_0 t) f(t) \Big|_{-T/2}^{T/2} + n\omega_0 \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen} (n\omega_0 t) dt \right] \\ &= n\omega_0 b_n, \end{aligned} \quad (\text{E1.85})$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{2}{T} \left[ (\operatorname{sen} n\omega_0 t) f(t) \Big|_{-T/2}^{T/2} - n\omega_0 \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos (n\omega_0 t) dt \right] \\ &= -n\omega_0 a_n \end{aligned} \quad (\text{E1.86})$$

puesto que  $f(-T/2) = f(T/2)$ .

Debe notarse que  $a_0 = 0$ . Por consiguiente,

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 (-a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t + b_n \cos n\omega_0 t),$$

lo cual se puede obtener de la serie de Fourier de  $f(t)$  diferenciando término por término.

(La diferenciación de una función con discontinuidades súbitas será tratada en la sec. 2.5).

**PROBLEMA E.1.21** Sea  $f(t)$  continua por tramos en el intervalo  $-T/2 < t < T/2$  y sea  $f(t+T)=f(t)$ . Demostrar que la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \quad (\text{E.1.87})$$

se puede integrar término por término para obtener

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \frac{1}{2} a_0 (t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} [-b_n (\cos n\omega_0 t_2 - \cos n\omega_0 t_1) + a_n (\operatorname{sen} n\omega_0 t_2 - \operatorname{sen} n\omega_0 t_1)]. \quad (\text{E.1.88})$$

**Solución:** puesto que  $f(t)$  es una función continua por tramos y por el resultado del problema E.1.6, la función  $F(t)$  definida por

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} a_0 t \quad (\text{E.1.89})$$

es continua y periódica con período  $T$ . Puesto que

$$F'(t) = f(t) - \frac{1}{2} a_0, \quad (\text{E.1.90})$$

se sigue que  $F(t)$  también es continua. Sea la expansión de  $F(t)$  en serie de Fourier

$$F(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\omega_0 t + \beta_n \operatorname{sen} n\omega_0 t). \quad (\text{E.1.91})$$

Entonces, para  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\
&= \frac{2}{n\omega_0 T} F(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{2}{n\omega_0 T} \int_{-T/2}^{T/2} F'(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \\
&= -\frac{2}{n\omega_0 T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - \frac{1}{2} a_0] \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \\
&= -\frac{1}{n\omega_0} b_n,
\end{aligned} \tag{E1.92}$$

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \\
&= -\frac{2}{n\omega_0 T} F(t) \cos n\omega_0 t \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{2}{n\omega_0 T} \int_{-T/2}^{T/2} F'(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\
&= \frac{2}{n\omega_0 T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - \frac{1}{2} a_0] \cos(n\omega_0 t) dt \\
&= \frac{1}{n\omega_0} a_n.
\end{aligned} \tag{E1.93}$$

donde

$$F(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} (-b_n \cos n\omega_0 t + a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t). \tag{E1.94}$$

Ahora bien;

$$F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau - \frac{1}{2} a_0 (t_2 - t_1). \tag{E1.95}$$

De donde,

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt &= F(t_2) - F(t_1) + \frac{1}{2} a_0 (t_2 - t_1) \\
&= \frac{1}{2} a_0 (t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} [-b_n (\cos n\omega_0 t_2 - \cos n\omega_0 t_1) \\
&\quad + a_n (\operatorname{sen} n\omega_0 t_2 - \operatorname{sen} n\omega_0 t_1)]
\end{aligned}$$

lo cual se puede obtener de la serie de Fourier de  $f(t)$  mediante integración término por término.

**PROBLEMA E.1.22** Demostrar que la integral de una función periódica cuyo valor promedio es diferente de cero no es una función periódica.

Solución: por el resultado del problema E.1.21, se tiene

$$\int_0^T f(\tau) d\tau = \frac{1}{2} a_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n\omega_0} (a_n \operatorname{sen} n\omega_0 t - b_n \operatorname{cos} n\omega_0 t + b_n) \right]. \quad (\text{E.1.96})$$

El término  $1/2 a_0 t$  no es periódico y por consiguiente la integral no es periódica. Nótese que la integración de la serie de Fourier de  $f(t)$  término por término, conduce a la serie de Fourier de la integral de  $f(t)$  solamente si  $a_0 = 0$ , es decir, sólo si el valor promedio de  $f(t)$  es cero; esto se demostró en el problema E.1.5.

**PROBLEMA 1.23** Sea  $f(t)$  una función continua y  $f'(t)$  una función continua por tramos en el intervalo  $-T/2 < t < T/2$ . Multiplicar

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{cos} n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \quad (\text{E.1.97})$$

por  $f(t)$ , integrar término por término y demostrar que

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (\text{E.1.98})$$

(Cf., teorema de Parseval Problema E.1.17) Solución:

$$\begin{aligned}
 \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \right. \\
 &\quad \left. + b_n \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \right] \\
 &= \frac{1}{4} a_0^2 T + \frac{T}{2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]. \quad (\text{E1.99})
 \end{aligned}$$

De esta manera

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

# CAPÍTULO IV

# CONVOLUCIÓN



## CAPÍTULO 4 CONVOLUCIÓN

### 4.1 El teorema de la convolución

El teorema de la convolución es quizás uno de los instrumentos más eficaces en el análisis armónico; con su empleo, se obtienen con facilidad muchos resultados importantes. En esta monografía lo aplicaremos con frecuencia.

Dadas dos funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , podemos formar la integral siguiente:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (4.1)$$

Esta integral, llamada integral de convolución, define la convolución de las funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , y también se expresa simbólicamente como

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

Posteriormente se considerará el significado físico y la interpretación gráfica de la convolución. Por lo pronto, enunciaremos y demostraremos el teorema. También en este caso hay dos teoremas: de la convolución en el tiempo y de la convolución en la frecuencia. [25]

$$\begin{array}{l} \text{si} \\ f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \\ f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega) \end{array}$$

#### 4.1.1 TEOREMA DE LA CONVOLUCIÓN EN EL TIEMPO.

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (4.3a)$$

es decir

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (4.3b)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f_2(t - \tau) dt \right] d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} F_2(\omega) d\tau \\ &= F_1(\omega) F_2(\omega) \end{aligned}$$

#### 4.1.2 TEOREMA DE LA CONVOLUCION EN LA FRECUENCIA.

Si  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$

y

$f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

entonces

$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u) du \quad (4.4a)$$

O sea

$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)] \quad (4.4b)$$

Por la propiedad de desplazamiento en el tiempo, la integral entre paréntesis del segundo miembro es igual a  $F_2(\omega)e^{j\omega t}$ .

Este teorema se demuestra en la misma forma que el anterior, debido a la simetría entre las transformadas directa e inversa de Fourier.

Concluimos que la convolución de dos funciones en el dominio del tiempo equivale a la multiplicación de sus espectros en el dominio de la frecuencia y que la multiplicación de las dos funciones en el dominio del tiempo equivale a la convolución de sus espectros en el dominio de la frecuencia.

La tabla 4.1 contiene algunas de las propiedades importantes de la transformada de Fourier. Nótese la simetría y la correspondencia entre los dominios del tiempo y la frecuencia.

Tabla 4.1

Operación	$f(t)$	$F(\omega)$
1. Escalar	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
2. Desplazamiento en el tiempo	$f(t - t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
3. Desplazamiento en la frecuencia	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
4. Diferenciación en el tiempo	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
5. Diferenciación en la frecuencia	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n F}{d\omega^n}$
6. Integración en el tiempo	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{(j\omega)} F(\omega)$
7. Convolución en el tiempo	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$
8. Convolución en la frecuencia.	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)]$

## 4.2 ALGUNAS RELACIONES DE LA CONVOLUCIÓN

A continuación se presentan algunas leyes del álgebra de la convolución que, como se verá, sigue lineamientos similares a los de la multiplicación ordinaria, operación sugerida por su representación simbólica. [25]

### 4.2.1 LEY CONMUTATIVA

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (4.5)$$

Se demuestra fácilmente esa relación:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

Al sustituir la variable  $\tau$  por  $t - x$ , obtenemos

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) f_1(t - x) dx \\ &= f_2(t) * f_1(t) \end{aligned}$$

#### 4.2.2 LEY DISTRIBUTIVA

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t) \quad (4.6)$$

La demostración es obvia

#### 4.2.3 LEY ASOCIATIVA

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) \quad (4.7)$$

La ley se deriva del teorema de la convolución y del hecho de que

$$F_1(\omega)[F_2(\omega)F_3(\omega)] = [F_1(\omega)F_2(\omega)]F_3(\omega)$$

### 4.3 INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA CONVOLUCIÓN

La interpretación gráfica de la convolución es muy útil en el análisis de sistemas así como en la teoría de la comunicación. Permite visualizar los resultados de muchas relaciones abstractas, sobre todo en la teoría de la comunicación. Si en los sistemas lineales sólo se conocen en forma gráfica  $f(t)$  y  $h(t)$  entonces la convolución gráfica resulta muy útil. Como ejemplo de esto, supongamos que  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  son los pulsos rectangular y triangular de la figura 4.1a. Encontraremos gráficamente la convolución  $f_1(t) * f_2(t)$ . Por definición[25]

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (4.8)$$

En la integral de convolución,  $r$  es la variable independiente (ecuación 4.8). En la figura 4.1b, se muestran las funciones  $f_1(r)$  y  $f_2(-r)$ . Nótese que se obtiene  $f_2(-t)$  al girar  $f_2(t)$  alrededor del eje vertical que pasa por el origen. El término  $f_2(t-r)$  representa la función  $f_2(-r)$  desplazada  $t$  segundos a lo largo del eje  $r$ . En la figura 4.1c, se ha indicado  $f_2(t_1 - r)$ . El valor de la integral de convolución en  $t=t_x$  está dado por la integral de la ecuación 4.8,

evaluada en  $t=t_1$ , y representa el área bajo la curva producto de  $f_1(r)$  y  $f_2(t_1 - r)$ . Dicha área es la región sombreada de la figura 4.1d. El valor de  $f_1(t)*f_2(t)$  en  $t=t_1$  es igual a esa área sombreada y se le ha representado en la figura 4.1

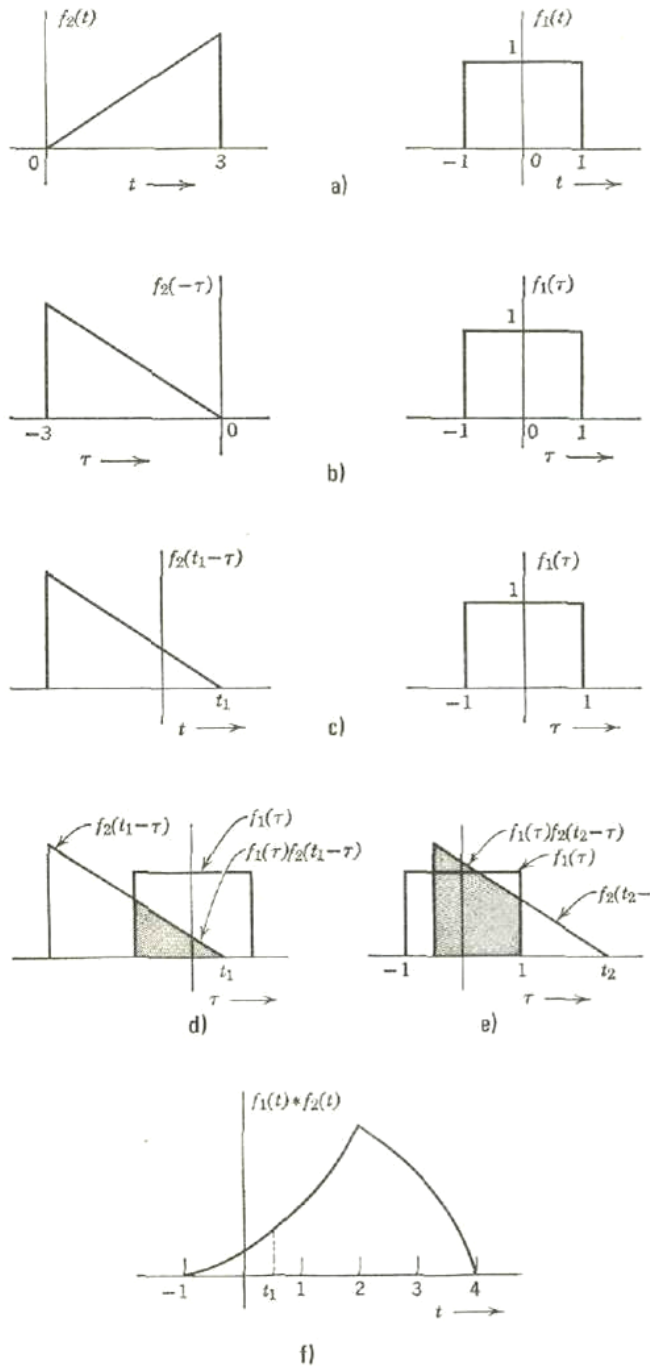


Figura 4.1. Areas bajo las curva de producto de  $F_1(r)$  y  $F_2(t_1-r)$

Para encontrar los valores de la función  $f_1(t) * f_2(t)$ , se seleccionan diferentes valores de  $t$ , se desplaza la función  $f_2(-t)$  según esos valores y se calcula el área bajo las curvas producto correspondientes.

Estas áreas representan el valor de la función de convolución en los valores respectivos de  $t$ .

La gráfica del área bajo la curva producto expresada como función de  $t$  representa la función de convolución  $f_1(t) * f_2(t)$  que se busca.

El mecanismo gráfico de la convolución puede considerarse como si la función  $f_2(-r)$  fuese un cuadro rígido que se desplaza en  $t_1$  segundos por el eje  $r$ . Esta función se multiplica por  $f_1(r)$  y el área bajo la curva es el valor de la función de convolución en  $t = t_1$ . Por lo tanto, para encontrar el valor de  $f_1(t) * f_2(t)$  en cualquier instante  $t = t_0$ , trasladamos en  $t_0$  segundos por el eje  $r$  al cuadro rígido que representa a  $f_2(-r)$  y multiplicamos esta función por  $f_1(t)$ . El área bajo la curva producto es el valor que buscamos de  $f_1(t) * f_2(t)$  en  $t = t_0$ . Para encontrar la función de convolución trasladamos sucesivamente el cuadro en diferentes cantidades y evaluamos las áreas bajo la curva producto en cada una de las posiciones. Es así como la gráfica del área expresada en función del desplazamiento del cuadro representa la función de convolución  $f_1(t) * f_2(t)$ . En resumen:

1. Gírese la función  $f_2(r)$  alrededor del eje vertical que pasa por el
2. origen para obtener la función  $f_2(-r)$ .



3. Considérese a la función girada como un cuadro rígido que se desplazará sobre el eje  $r$  en una cantidad  $t_0$ . Este cuadro rígido representa aquí la función  $f_2(t_0 - T)$ .
4. La función, representada por el cuadro rígido desplazado, multiplicada por  $f_1(r)$  es la función  $f_1(r)f_2(r_0 - r)$  y el área bajo esta curva producto esta dada por:

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) \quad (4.9)$$

5. Repítase este procedimiento para diferentes valores de  $t$ , desplazando sucesivamente el cuadro en diferentes cantidades, obteniendo los valores de la función de convolución  $f_1(t) * f_2(t)$  para esos valores de  $t$ .

Nótese que, para encontrar la función de convolución  $f_1(t) * f_2(t)$  para valores positivos de  $t$ , el cuadro se desplaza por la parte positiva del eje  $r$  mientras que, para valores negativos de  $t$ , se desplaza por la parte negativa.

la convolución de  $f_1(t)$  con  $f_2(t)$  es igual a la convolución de  $f_2(t)$  con  $f_1(t)$ . Es decir,

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

Por lo tanto, también podríamos mantener fija  $f_2(r)$  y tomar la imagen reflejada de  $f_1(r)$  en la convolución gráfica de la figura 4.1. En los dos casos, obtendremos el mismo resultado.

#### 4.4 CONVOLUCIÓN DE UNA FUNCIÓN CON LA FUNCIÓN IMPULSO UNITARIO

La convolución de una función  $f(t)$  con la función impulso unitario  $\delta(t)$  resulta en la función misma  $f(t)$ . Esto se comprueba fácilmente con la propiedad de muestreo indicada por la ecuación 4.10.

$$\begin{aligned} f(t) * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ &= f(t) \end{aligned} \quad (4.10a)$$

Este resultado también se deduce del teorema de convolución en el tiempo y del hecho de que

$$\begin{aligned} f(t) * \delta(t) &\leftrightarrow F(\omega) \\ f(t) * \delta(t) &= f(t) \end{aligned}$$

Que por lo tanto, En consecuencia,

Este resultado también es obvio gráficamente. Como el impulso está concentrado en un punto y tiene área unitaria, la integral de convolución es igual a la función  $f(t)$ . Así, la convolución de la función

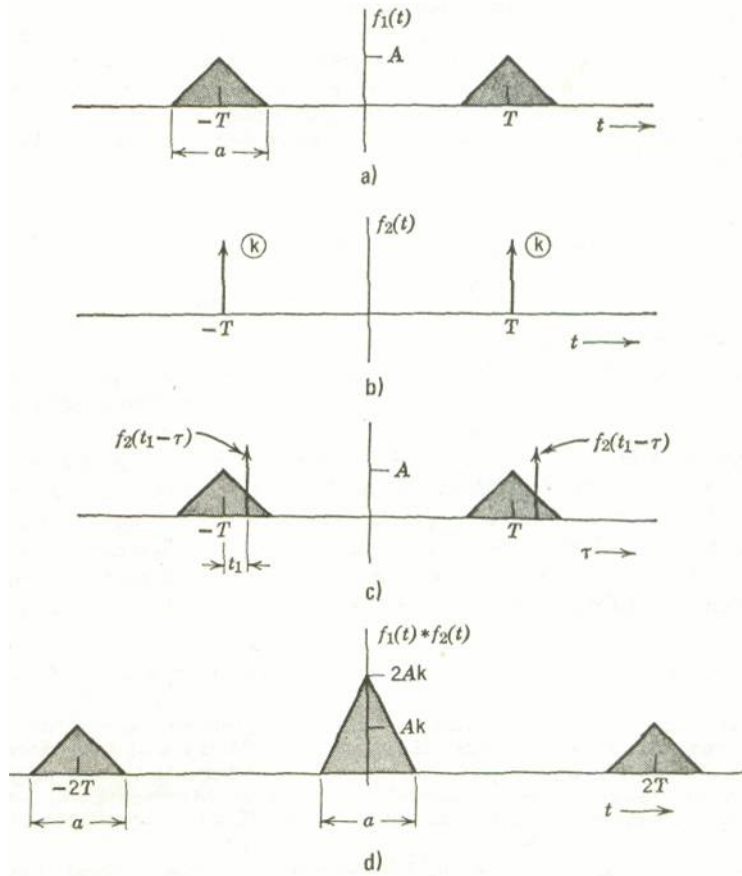


Figura 4.2 Impulso unitario  $f(t)$

impulso unitario  $f(t)$  reproduce la función  $f(t)$ .

$$f(t) * \delta(t - T) = f(t - T) \tag{4.11a}$$

$$f(t - t_1) * \delta(t - t_2) = f(t - t_1 - t_2) \tag{4.11b}$$

$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2) \tag{4.11c}$$

### 4.4.1 TEMAS LTI DISCRETOS: LA SUMA DE CONVOLUCIÓN

#### 4.4.1.1 LA REPRESENTACIÓN DE SEÑALES DISCRETAS EN TÉRMINOS DE LOS IMPULSO

La idea fundamental de visualizar cómo el impulso unitario discreto se puede usar para construir cualquier señal discreta consiste en pensar en una señal discreta como una secuencia de impulsos individuales. Para ver la forma en que esta idea intuitiva puede transformarse en una representación matemática, considere la señal  $x[n]$  mostrada en la figura 4.3. En las partes restantes de esta figura hemos dibujado cinco secuencias de impulso unitario desplazadas en el tiempo y escaladas, donde el escalamiento de cada impulso es igual al valor de  $x[n]$  en el instante particular en que ocurre la muestra unitaria. Por ejemplo, [28]

$$\begin{aligned} x[-1]\delta[n+1] &= \begin{cases} x[-1], & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases} \\ x[0]\delta[n] &= \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \\ x[1]\delta[n-1] &= \begin{cases} x[1], & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, la suma de las cinco secuencias en la figura es igual a  $x[n]$  para  $-2 \leq n \leq 2$ . De manera más general, si incluimos impulsos adicionales desplazados y escalados, podemos escribir

$$\begin{aligned} x[n] = \dots + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] \\ + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para cualquier valor de  $n$ , sólo uno de los términos del miembro derecho de la ecuación (4.12) es diferente de cero, y el escalamiento asociado con ese término es precisamente  $x[n]$ . Al escribir esta sumatoria en una forma más compacta, tenemos

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n - k]. \quad (4.13)$$

Esto corresponde a la representación de una secuencia arbitraria como una combinación lineal de impulsos unitarios desplazados  $\delta[n - k]$ , donde los pesos en esta combinación lineal son  $x[k]$ .

Como un ejemplo, considere  $x[n] = u[n]$ , el escalón unitario. En este caso, puesto

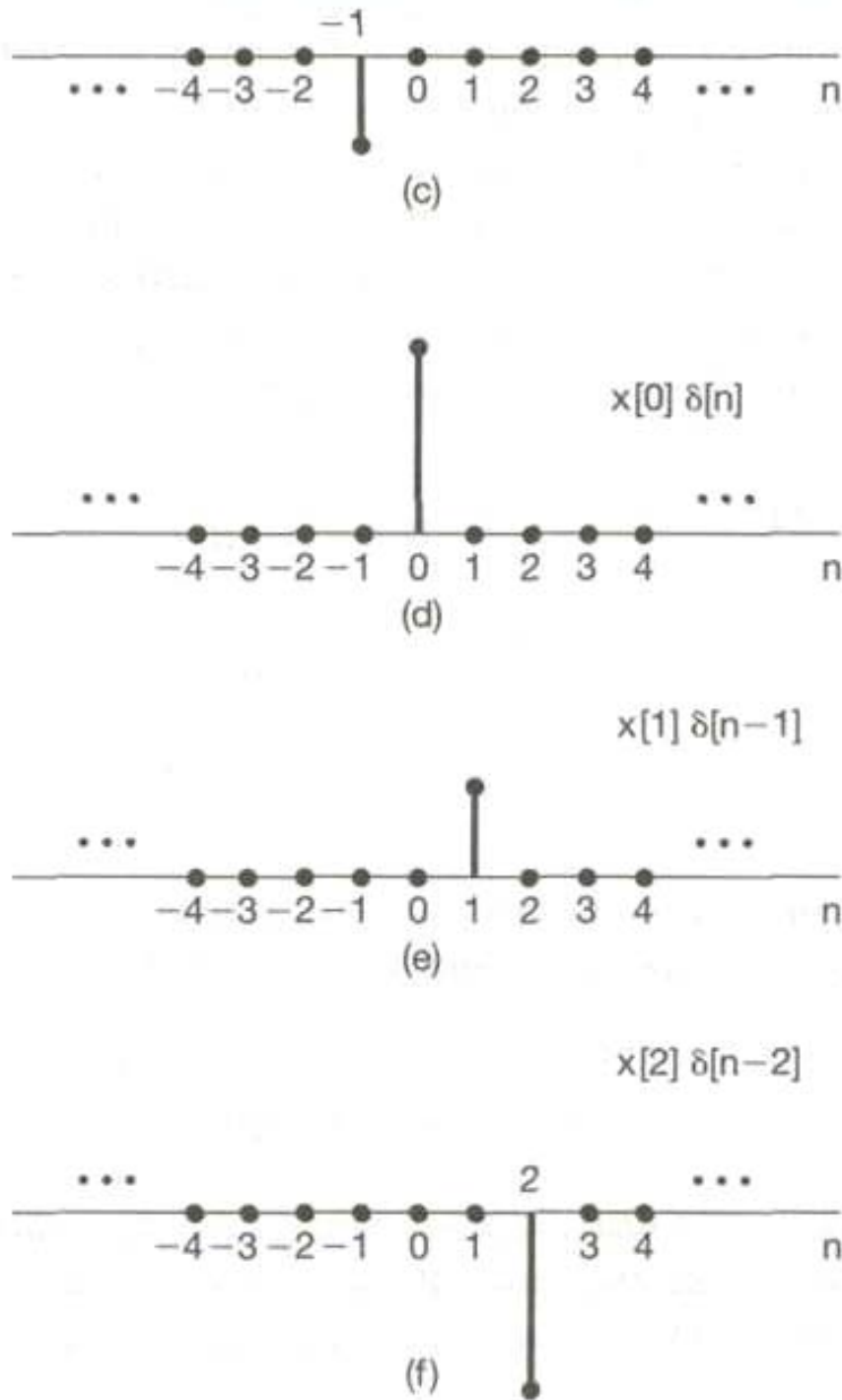


Figura 4.3 Descomposición de una señal discreta en una suma ponderada de impulsos desplazados

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n - k],$$

La ecuación (4.13) se llama *propiedad de selección* del impulso unitario discreto. Puesto que la secuencia  $S[n - k]$  es diferente de cero sólo cuando  $k = n$ , la sumatoria del lado derecho de la ecuación (4.13) "selecciona" a través de la secuencia de valores de  $x[k]$  y mantiene únicamente el valor que corresponde a  $k = n$ . En la siguiente subsección explotaremos esta representación de las señales discretas con el fin de desarrollar la representación de la suma de convolución para un sistema LTI discreto.

#### 4.4.1.2 LA RESPUESTA AL IMPULSO UNITARIO DISCRETO Y LA REPRESENTACIÓN DE LA SUMA DE CONVOLUCIÓN DE SISTEMAS LTI

La importancia de la propiedad de selección de las ecuaciones (4.12) y (4.13) reside en el hecho de que representa a  $x[n]$  como una superposición de versiones escaladas de un conjunto muy sencillo de funciones elementales, o sea, los impulsos unitarios desplazados  $S[n - k]$ , cada uno de los cuales es diferente de cero (con valor 1) en un solo punto en el tiempo, especificado por el correspondiente valor de  $k$ . La respuesta de un sistema lineal a  $x[n]$  será la superposición de las respuestas escaladas del sistema a cada uno de estos impulsos desplazados. Además, la propiedad de invariancia en el tiempo nos dice que las respuestas de un sistema invariante en el tiempo a los impulsos unitarios desplazados en el tiempo son simplemente versiones desplazadas en el tiempo una de otra. La representación de la suma

de convolución para sistemas discretos que son *tanto* lineales *como* invariantes en el tiempo resulta de poner juntos estos dos hechos básicos.

De manera más específica, considere la respuesta de un sistema lineal (pero posiblemente variante en el tiempo) a una entrada arbitraria  $x[n]$ . Podemos representar la entrada mediante la ecuación (4.13) como una combinación lineal de impulsos unitarios desplazados. Designemos a  $h_k[n]$  como la respuesta del sistema lineal al impulso unitario desplazado  $\delta[n - k]$ . Entonces, a partir de la propiedad de superposición de un sistema lineal, la respuesta  $y[n]$  del sistema lineal a la entrada  $x[n]$  en la ecuación (4.13) es simplemente la combinación lineal ponderada de estas respuestas básicas. Es decir, con la entrada  $x[n]$  a un sistema lineal expresado en la forma de la ecuación (4.13), la salida  $y[n]$  se expresa como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]. \quad (4.14) \quad (2.3)$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación (4.14), si conocemos la respuesta de un sistema lineal al conjunto de impulsos unitarios desplazados, podemos construir la respuesta a una entrada arbitraria. Una interpretación de la ecuación (4.14) se ilustra en la figura 4.4. La señal  $x[n]$  se aplica como la entrada a un sistema lineal cuyas respuestas  $h_{-1}[n]$ ,  $h_0[n]$  y  $h_1[n]$  a las señales  $\delta[n + 1]$ ,  $\delta[n]$  y  $\delta[n - 1]$ , respectivamente, están representadas en la figura 4.4(b). Ya que  $x[n]$  se puede escribir como una combinación lineal de  $\delta[n + 1]$ ,  $\delta[n]$  y  $\delta[n - 1]$ , la superposición nos permite escribir la respuesta a  $x[n]$  como una combinación lineal de respuestas a impulsos individuales desplazados. Los impulsos individuales desplazados y



escalados que constituyen  $x[n]$  se ilustran en el lado izquierdo de la figura 4.4(c), en tanto que las respuestas a estas señales componentes se presentan del lado derecho. En la figura 4.4(d) hemos dibujado la entrada real  $x[n]$ , la cual es la suma

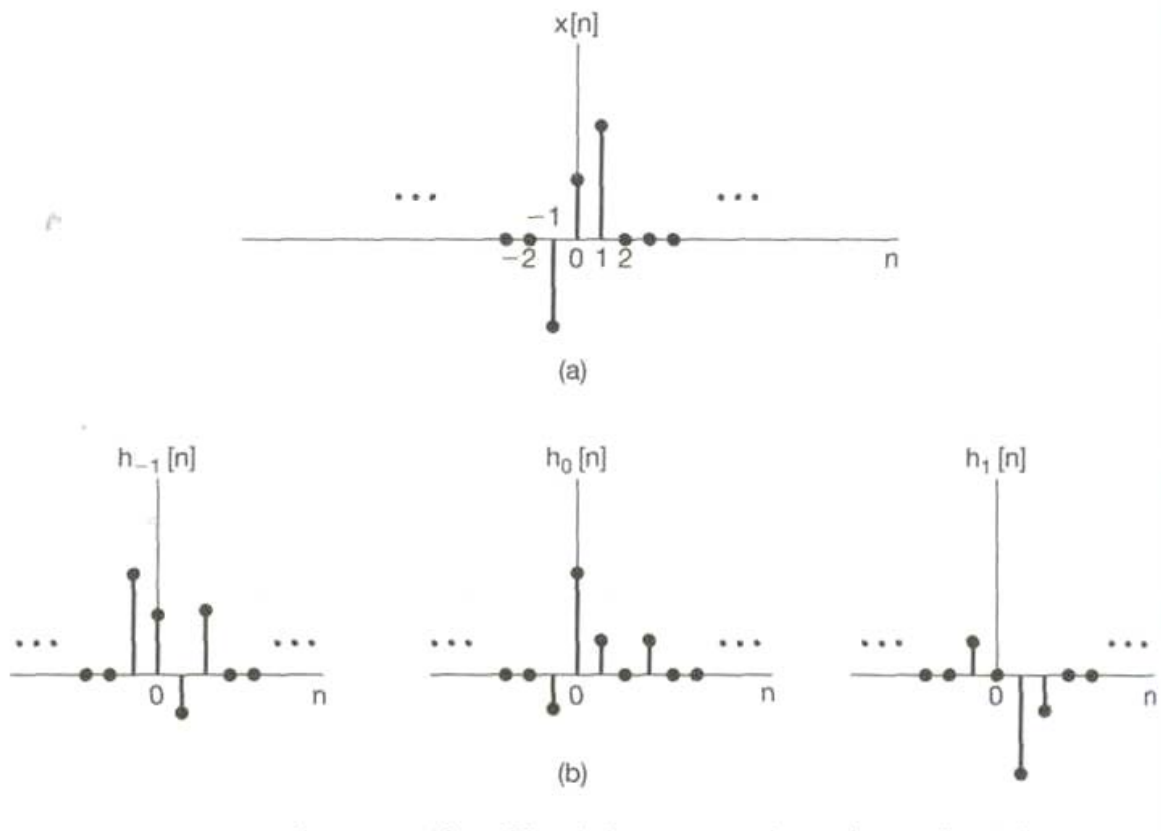


Figura 4.4 Interpretación gráfica de la respuesta de un sistema lineal discreto

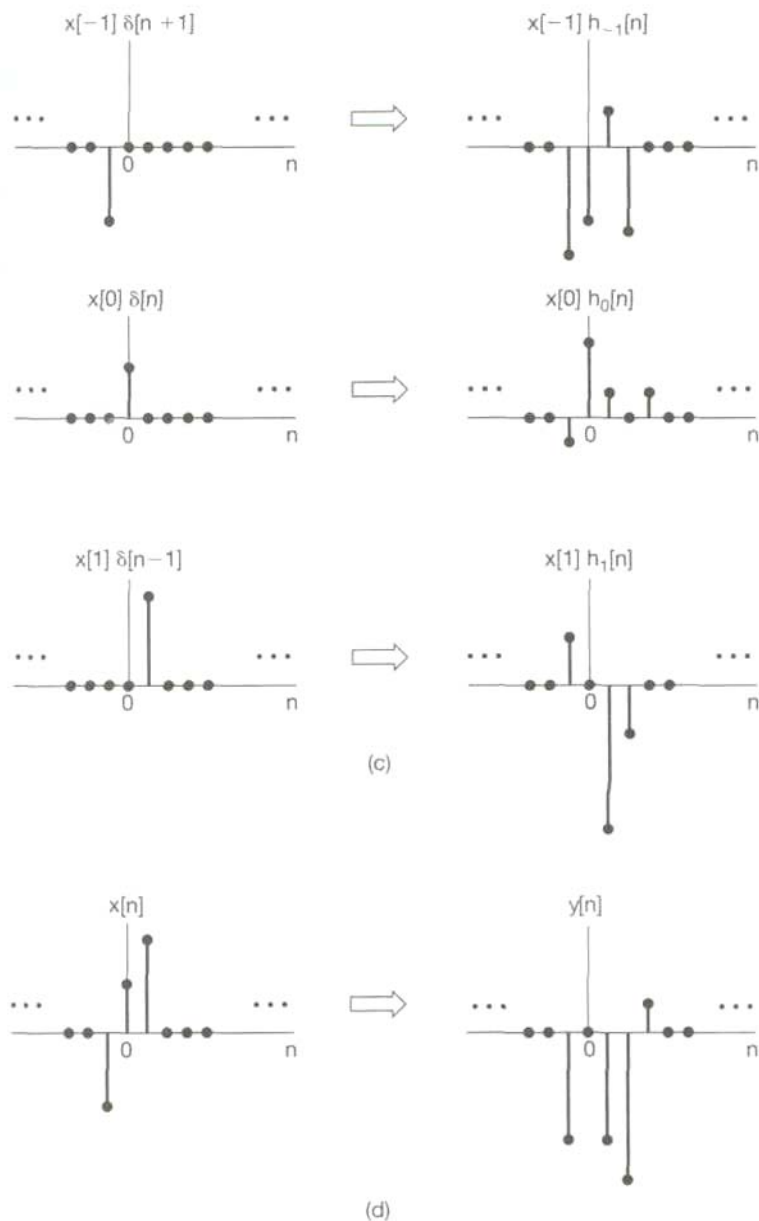


Figura 4.4 continuación Interpretación grafica de la respuesta de un sistema lineal discreto expresado en la ecuación (4.14)

de los componentes del lado izquierdo de la figura 4.4(c) con la salida real  $y[n]$ , la que, por superposición, es la suma de los componentes del lado derecho de la figura 4.4(c). De i este modo, la respuesta al tiempo  $n$  de un sistema lineal, es de manera

simple, la superposición de las respuestas debidas al valor de entrada en cada punto en el tiempo.

En general, por supuesto, las respuestas  $h_k[n]$  no necesitan estar relacionadas una con otra para diferentes valores de  $k$ . Sin embargo, si el sistema lineal también es *invariante en el tiempo*, entonces estas respuestas a impulsos unitarios desplazados en el tiempo son todas versiones desplazadas en el tiempo unas de otras. Específicamente, ya que  $S[n - k]$  es una versión desplazada en tiempo de  $\delta[n]$ , la respuesta  $h_k[n]$  es una versión desplazada en tiempo de  $h_0[n]$ ; es decir,

$$h_k[n] = h_0[n - k]. \quad (4.15)$$

Para facilitar la notación, eliminaremos el subíndice en  $h_0[n]$  y definiremos la *respuesta al impulso (muestra) unitario*

$$h[n] = h_0[n]. \quad (4.16)$$

Esto es,  $h[n]$  es la salida del sistema LTI cuando  $\delta[n]$  es la entrada. Entonces, para un sistema LTI, la ecuación (4.15) se vuelve

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n - k]. \quad (4.17)$$

Este resultado se conoce como la *suma de convolución* o *suma de superposición*, y a la operación del miembro derecho de la ecuación (4.14) se le llama *convolución* de

las secuencias  $x[n]$  y  $h[n]$ . Representaremos la operación de convolución de manera simbólica como[22]

$$y[n] = x[n] * h[n]. \quad (4.18)$$

Note que la ecuación (4.17) expresa la respuesta de un sistema LTI a una entrada arbitraria en términos de la respuesta del sistema al impulso unitario. De aquí se desprende que un sistema LTI se caracteriza completamente por su respuesta a una sola señal, es decir, su respuesta al impulso unitario.

La interpretación de la ecuación (4.17) es similar a la que dimos para la ecuación (4.14), donde, en el caso de un sistema LTI, la respuesta debida a la entrada  $x[k]$  aplicada en el tiempo  $k$  es  $x[k]h[n - k]$ ; es decir, es una versión desplazada y escalada (un "eco") de  $h[n]$ . Al igual que antes, la salida real es la superposición de todas estas respuestas.

**Ejemplo 4.1**

Considere un sistema LTI con respuesta al impulso  $h[n]$  y entrada  $x[n]$ , como se ilustra en la figura 4.4(a). Para este caso, ya que sólo  $x[0]$  y  $x[1]$  son diferentes de cero, la ecuación (4.17) se simplifica hasta la expresión

$$y[n] = x[0]h[n - 0] + x[1]h[n - 1] = 0.4h[n] + 2h[n - 1]. \quad (4.19)$$

Las secuencias  $0.4h[n]$  y  $2h[n - 1]$  son los dos ecos de la respuesta al impulso necesarios para la superposición involucrada en la generación de  $y[n]$ . Estos ecos se presentan en la figura 4.5(b). Sumando los dos ecos para cada valor de  $n$  obtenemos  $y[n]$ , la cual se muestra en la figura 4.4(c).

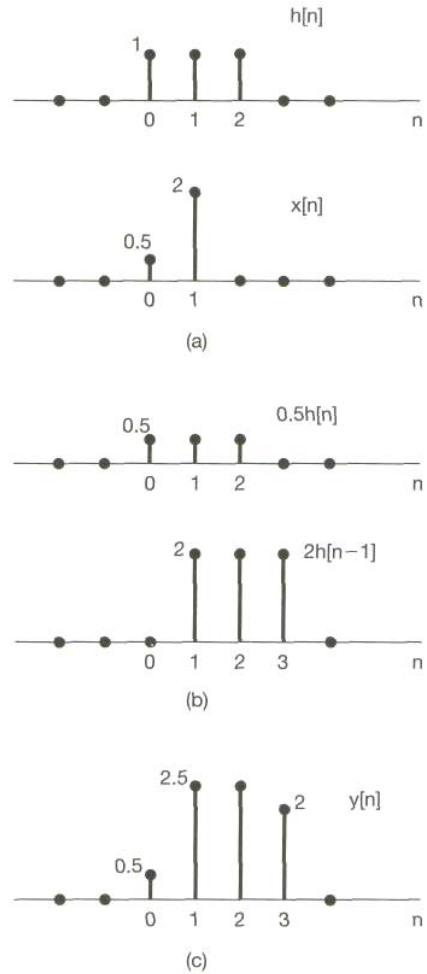


Figura 4.5 (a) La respuesta al impulso  $h[n]$  de un sistema LTI y una entrada  $x[n]$  al sistema; (b) las respuestas o "ecos"  $0.4h[n]$  y  $2h[n-1]$ , para los valores diferentes de cero de la entrada, esto es,  $x[0] = 0.4$  y  $x[1] = 2$ ; (c) la respuesta total  $y[n]$ , la cual es la suma de los ecos en (b).

## 4.5 SISTEMAS LTI CONTINUOS: LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

De manera análoga con los resultados deducidos y analizados en la sección anterior, el objetivo de esta sección es obtener una caracterización completa de un sistema LTI continuo en términos de su respuesta al impulso unitario. En el sistema discreto, la clave para nuestro desarrollo de la suma de convolución fue la propiedad de selección del impulso unitario discreto, esto es, representar matemáticamente de una señal como la superposición de funciones impulso unitario escaladas y desplazadas. Por tanto, de manera intuitiva podemos

imaginar que estos sistemas discretos responden a una secuencia de impulsos individuales. En el caso continuo, de hecho, no tenemos una secuencia discreta de valores de entrada. No obstante, si pensamos en el impulso unitario como la idealización de un pulso el cual es tan corto que su duración no tiene consecuencias en un sistema físico real, podemos desarrollar una representación para señales continuas arbitrarias en términos de estos pulsos idealizados con una duración pequeña que tiende a desaparecer o, de forma equivalente, en términos de impulsos. Esta representación se desarrolla en la siguiente subsección, y después procederemos para desarrollar la representación de la integral de convolución para sistemas LTI continuos.

#### **4.5.1 LA REPRESENTACIÓN DE SEÑALES CONTINUAS EN TÉRMINOS DE LOS IMPULSOS**

Para desarrollar la contraparte de tiempo continuo de la propiedad de selección en tiempo discreto mostrada en la ecuación (4.13), debemos comenzar por considerar una aproximación a pulso de "escalera",  $x(t)$ , para una señal continua  $x(t)$ , como se ilustra en la figura 4.6. De manera similar a la empleada en el caso discreto, esta aproximación se

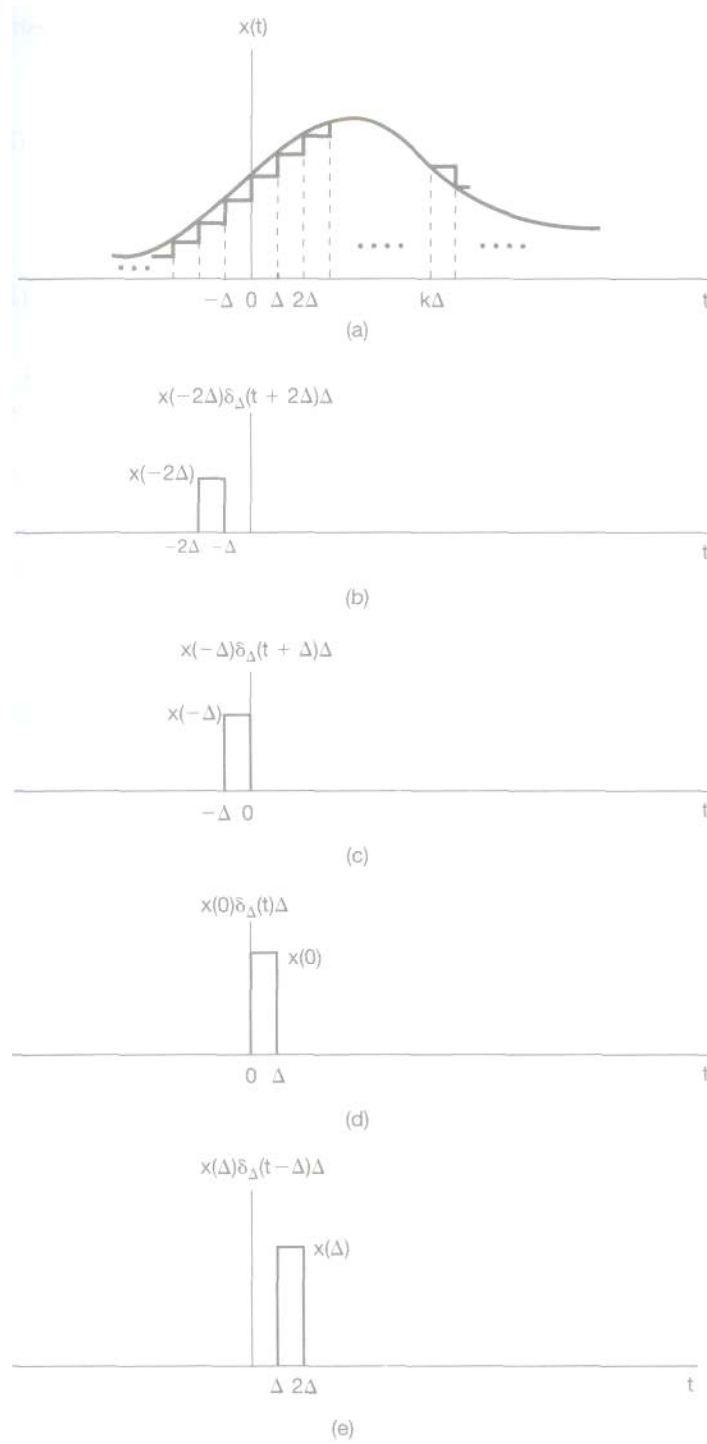


Figura 4.6 Aproximación en escalera de una señal continua



puede expresar como una combinación lineal de pulsos retrasados, lo cual se muestra en la figura 4.6a)-(e). Si definimos

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t < \Delta \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}, \quad (4.20)$$

entonces, ya que  $\delta_{\Delta}(t)$  tiene una amplitud unitaria, tenemos la expresión

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta. \quad (4.21)$$

A partir de la figura 2.12, vemos que, como en el caso discreto [ecuación (4.13)], para cualquier valor de  $t$ , sólo un término de la sumatoria en el miembro derecho de la ecuación (4.21) es diferente de cero.

Conforme  $\Delta$  se aproxima a 0, la aproximación  $\hat{x}(t)$  mejora cada vez más, y en el límite es igual a  $x(t)$ . Por tanto,

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta. \quad (4.22)$$

Asimismo, a medida que  $\Delta \rightarrow 0$ , la sumatoria en la ecuación (4.22) se aproxima a una integral. Esto se puede ver al considerar la interpretación gráfica de la ecuación, la cual se ilustra en

la figura 2.13. Aquí hemos mostrado las señales  $x(\tau)$ ,  $\delta_\Delta(t - \tau)$ , y sus productos. También hemos indicado una región sombreada cuya área se aproxima al área bajo  $x(\tau) \delta_\Delta(t - \tau)$  conforme  $\Delta \rightarrow 0$ . Nótese que la región sombreada tiene un área igual a  $x(m\Delta)$  donde  $t - \Delta < m\Delta < t$ . Además, para este valor de  $t$ , sólo el término con  $k = m$  es diferente de cero en la sumatoria en la ecuación (4.22) y, por tanto, el lado derecho de esta ecuación también es igual a  $x(m\Delta)$ . En consecuencia, de la ecuación (4.22) y del argumento anterior se desprende que  $x(t)$  es igual al límite conforme  $\Delta \rightarrow 0$  del área bajo  $x(\tau) \delta_\Delta(t - \tau)$ . Más aún, de la ecuación (1.74) sabemos que el límite cuando  $\Delta \rightarrow 0$  de  $\delta_\Delta(t)$  es la función impulso unitario  $\delta(t)$ . En consecuencia,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (4.23)$$

Al igual que en el caso discreto, la ecuación (4.23) se conoce como la *propiedad de selección* del impulso de tiempo continuo. Podemos observar que, para el ejemplo específico de  $x(t) = u(t)$ , la ecuación (4.23) se convierte en [16]

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau, \quad (4.24)$$

ya que  $u(\tau) = 0$  para  $\tau < 0$  y  $u(\tau) = 1$  para  $\tau > 0$ . La ecuación (4.24).

De nueva cuenta, la ecuación (4.23) se debe ver como una idealización en el sentido de que, para una  $A$  "lo suficientemente pequeña", la aproximación de  $x(t)$  en la ecuación (4.21) es en esencia exacta para cualquier propósito práctico.

Entonces, la ecuación (4.23) representa simplemente una idealización de la ecuación (4.21) al considerar una  $A$  tan pequeña que tienda a desaparecer. Observe también que pudimos haber deducido la ecuación (4.23) directamente mediante el uso de varias de las propiedades básicas del impulso unitario.

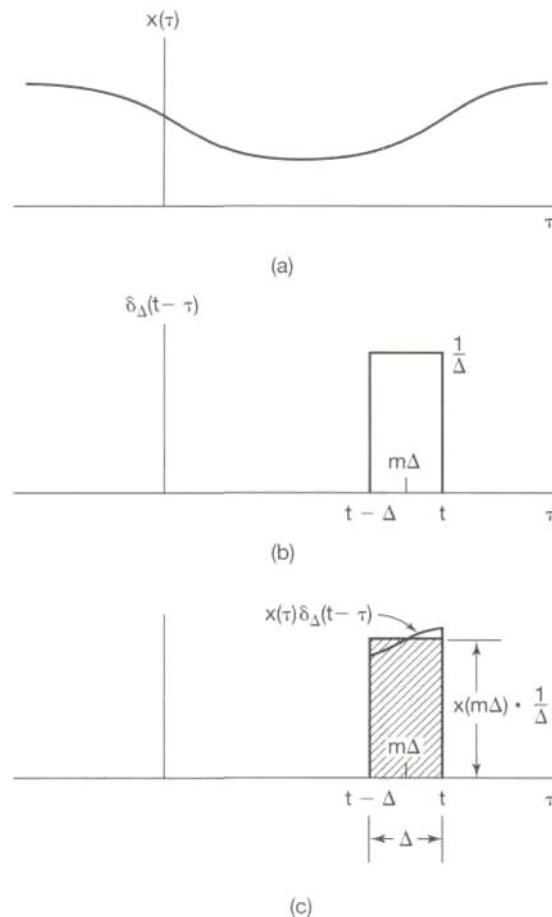


Figura 4.7 interpretación grafica de la ecuación 4.22

Específicamente, como se ilustra en la figura 4.8(b), la señal  $\delta(t - r)$  (vista como una función de  $r$  con  $t$  fija) es un impulso unitario localizado en  $r = t$ . Por tanto, como se muestra en la figura 4.8(c), la señal  $x(r)\delta(t - r)$  (de nuevo vista como una función de  $r$ ) es igual a  $x(t)\delta(t - r)$  [es decir, es un impulso escalado en  $r = t$  con un área igual al valor de  $x(t)$ ]. En consecuencia, la integral de esta señal a partir de  $r = -\infty$  a  $r = +\infty$  es igual a  $x(t)$ ; esto es,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - \tau)d\tau = x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau)d\tau = x(t).$$

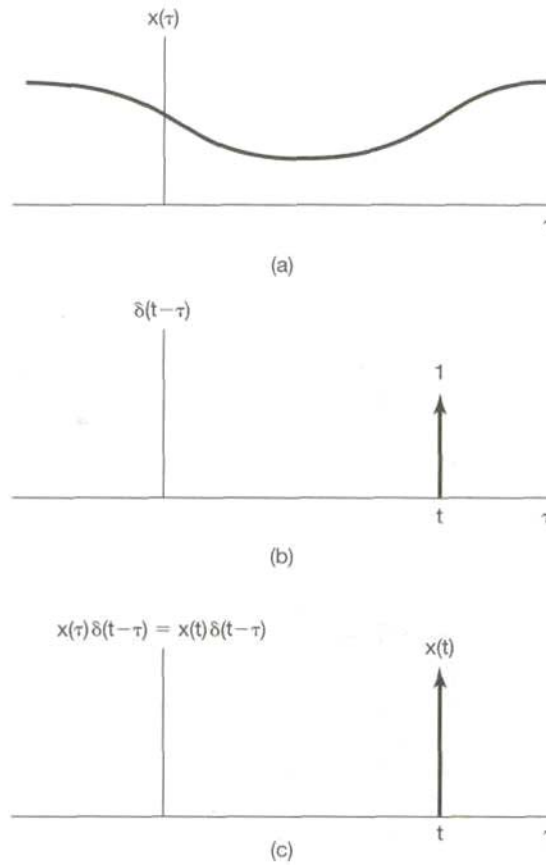


Figura 4.8 (a) Señal arbitraria  $x(\tau)$ ; (b) impulso  $\delta(t - \tau)$  como una función de  $\tau$  con  $t$  fija; (c) producto de dos señales.

### 4.5.2 La respuesta al impulso unitario continuo y la representación de la integral de convolución de sistemas LTI

Al igual que en el caso discreto, la representación desarrollada en la sección anterior nos proporciona un método con el cual se puede ver una señal arbitraria continua como la superposición de pulsos escalados y desplazados. En particular, la representación aproximada en la ecuación (4.21) representa la señal  $x(t)$  como una suma de versiones escaladas y desplazadas de la señal pulso básico  $\Delta(t)$ . En consecuencia, la respuesta  $y(t)$  de un sistema lineal a esta señal será la superposición de las respuestas a las versiones escaladas y desplazadas de  $\Delta(t)$ . Específicamente, definamos  $h_{k\Delta}(t)$  como la respuesta de un sistema LTI a la entrada  $\Delta(t - k\Delta)$ . Entonces, de la ecuación (4.21) y la propiedad de superposición, para sistemas lineales de tiempo continuo, vemos que[23]

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \hat{h}_{k\Delta}(t) \Delta. \quad (4.25)$$

La interpretación de la ecuación (4.24) es similar a aquella de la ecuación (4.14) para el caso discreto. En particular, considere la figura 4.9, la cual es la contraparte continua de la figura 4.4. En la figura 4.9(a) hemos representado la entrada  $x(t)$  y su aproximación  $\hat{x}(t)$ , mientras que en la figura 4.9(b)-(d) hemos

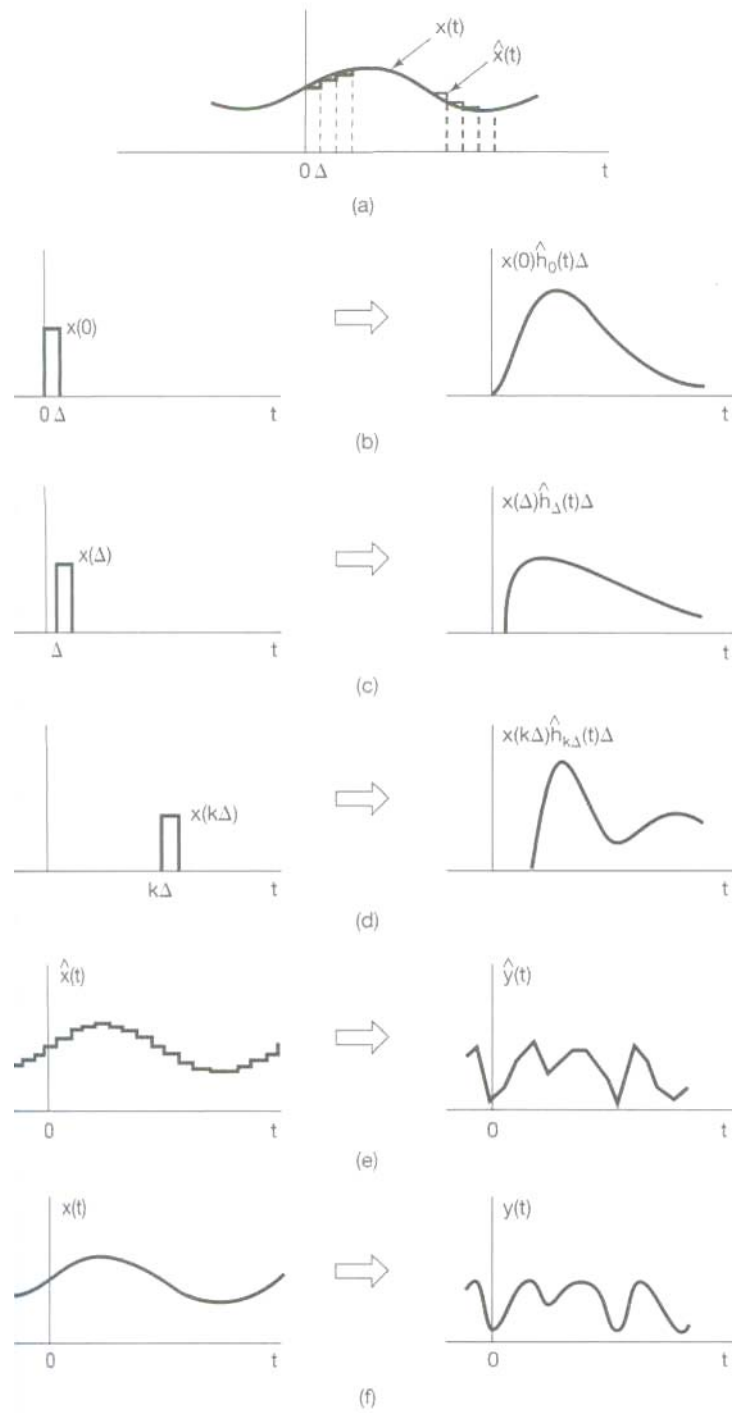


Figura (4.9) Interpretación gráfica de la respuesta de un sistema lineal continuo como el expresado en las ecuaciones 4.24 y 4.25

mostrado las respuestas del sistema a tres de los pulsos ponderados de la expresión para  $x^\wedge(t)$ . Entonces la salida  $y^\wedge(t)$  correspondiente a  $x^\wedge(t)$  es la superposición de todas estas respuestas, como se indica en la figura 4.9(e).

Lo que falta, entonces, es preguntarse qué pasa conforme  $A$  se hace muy pequeño, es decir, conforme  $\Delta \rightarrow 0$ . En particular, con  $x(t)$  expresada como en la ecuación (4.22),  $x^\wedge(t)$  se vuelve cada vez mejor aproximación a  $x(t)$  y, de hecho, las dos coinciden a medida que  $\Delta \rightarrow 0$ . En consecuencia, la respuesta a  $x^\wedge(t)$ , es decir,  $y^\wedge(t)$  en la ecuación (4.24), debe converger hacia  $y(t)$ , la respuesta a la entrada real  $x(t)$ , como se ilustra en la figura 4.9(f). Además, como hemos dicho, para una  $A$  "lo suficientemente pequeña", la duración del pulso  $\Delta_\Delta(t - k\Delta)$  no es significativa, en cuanto que, en lo concerniente al sistema, la respuesta a este pulso es en esencia la misma que la respuesta a un impulso unitario en el mismo punto en el tiempo. Esto es, puesto que el pulso  $\Delta_\Delta(t - k\Delta)$  corresponde a un impulso unitario desplazado conforme  $\Delta \rightarrow 0$  la respuesta  $h^\wedge_{T\Delta}(t)$  a este pulso de entrada se convierte en la respuesta a un impulso en el límite. Por tanto, si hacemos que  $h_T(t)$  denote la respuesta en el tiempo  $t$  aun impulso unitario  $\Delta(t - r)$  localizado en el tiempo

$T$ , entonces

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) h_{k\Delta}(t) \Delta. \quad (4.26)$$

Conforme  $\Delta \rightarrow 0$ , la sumatoria del lado derecho pasa a ser una integral, como se puede ver gráficamente en la figura 4.10. En forma específica, en la figura 4.10 el rectángulo sombreado representa un término en la sumatoria del lado derecho de la ecuación (4.26)

y a medida que  $\Delta \rightarrow 0$  la sumatoria se aproxima al área bajo  $x(\tau)h_{\tau}(t)$  vista como una función de  $r$ . Por tanto,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h_{\tau}(t)d\tau. \tag{4.27}$$

La interpretación de la ecuación (4.27) es análoga a la de la ecuación (4.24)., cualquier entrada  $x(t)$  se puede representar como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau.$$

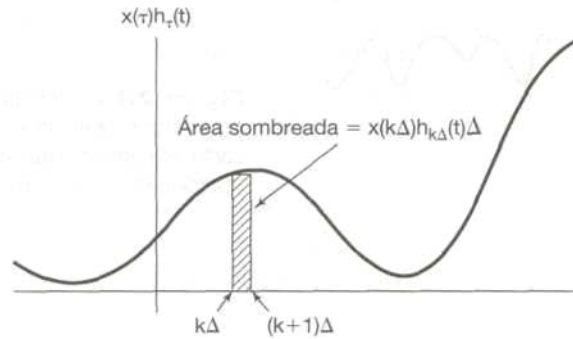


Figura 4.10 Representación grafica de las ecuaciones (4.26) y (4.27).

Esto es, podemos pensar intuitivamente en  $x(t)$  como una "suma" de impulsos ponderados desplazados, donde el peso en el impulso  $\delta(t - r) dt$  es  $x(r)$ . Con esta interpretación, la ecuación (4.27) representa la superposición de las respuestas a cada una de estas entradas, y por linealidad, el peso en la respuesta  $h_{\tau}(t)$  al impulso desplazado  $\delta(t - r)$  también es  $x(t)dt$ .



La ecuación (4.27) representa la forma general de la respuesta de un sistema lineal en el caso continuo. Si además de ser lineal, el sistema también es invariante en el tiempo, entonces  $h_T(t) = h_0(t - T)$ ; es decir, la respuesta de un sistema LTI al impulso unitario  $\delta(t - T)$ , el cual está desplazado  $T$  segundos desde el origen, es una versión de la respuesta a la función impulso unitario  $\delta(t)$  desplazada en forma semejante. Nuevamente por comodidad de notación, quitaremos el subíndice y definiremos la *respuesta al impulso unitario*  $h(t)$  como

$$\mathbf{h(t) = h_0(t);} \quad \mathbf{(4.28)}$$

es decir,  $h(t)$  es la respuesta a  $\delta(t)$ . En este caso, la ecuación (4.27) se vuelve

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad \mathbf{(4.29)}$$

La ecuación (4.29), conocida como la *integral de convolución* o la *integral de superposición*, es la contraparte continua de la suma de convolución de la ecuación (4.17) y corresponde a la representación de un sistema LTI continuo en términos de su respuesta a un impulso unitario. La convolución de dos señales  $x(t)$  y  $h(t)$  será representada simbólicamente como

$$\mathbf{y(t) = x(t) * h(t).} \quad \mathbf{(4.30)}$$

Aun cuando hemos decidido usar el símbolo para denotar tanto la convolución discreta como la continua, por lo general el contexto será suficiente para distinguir el caso de que se trate.

Al igual que en el caso discreto, podemos ver que un sistema LTI continuo está completamente caracterizado por su respuesta al impulso, es decir, por su respuesta a una sola señal elemental, el impulso unitario  $S(t)$ . En la siguiente sección exploraremos las implicaciones que esto conlleva conforme examinamos varias de las propiedades de la convolución y de los sistemas LTI tanto en el caso continuo como en tiempo discreto.

El procedimiento para evaluar la integral de convolución es bastante similar al de su contraparte de tiempo discreto, la suma de convolución. Específicamente, en la ecuación (4.29) vemos que para cualquier valor de  $t$ , la salida  $y(t)$  es una integral ponderada de la entrada, donde el peso sobre  $x(r)$  es  $h(t - r)$ . Para evaluar esta integral para un valor específico de  $t$ , primero debemos obtener la señal  $h(t - r)$  (considerada como una función de  $r$  con  $t$  fija) a partir de  $h(r)$  mediante un reflejo alrededor del origen y un corrimiento a la derecha en un valor  $t$  si  $t > 0$ , o hacia la izquierda por  $|t|$  para  $t < 0$ . En seguida multiplicamos las señales  $x(r)$  y  $h(t - r)$  y se obtiene  $y(t)$  al integrar el producto resultante desde  $r = -\infty$  hasta  $r = +\infty$ . Para ilustrar la evaluación de la integral de convolución, consideremos varios ejemplos.

[29]

**Ejemplo 4.2**

Sea  $x(t)$  la entrada a un sistema LTI con respuesta al impulso  $h(t)$ , donde

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

y

$$h(t) = u(t).$$

En la figura 4.11 hemos representado las funciones  $h(r)$ ,  $x(r)$  y  $h(t-r)$  para un valor negativo y uno positivo de  $t$ . Gracias a la figura, vemos que para  $t < 0$  el producto de  $x(r)$  y  $h(t-r)$  es cero, y en consecuencia,  $y(t)$  es cero. Para  $t > 0$ ,

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau}, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}$$

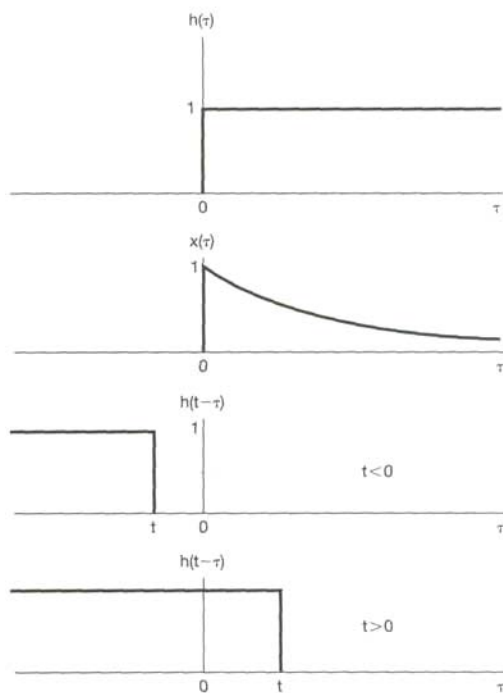


Figura 4.11 Cálculo de la integral de convolución para el ejemplo 4.2

De esta expresión podemos calcular  $y(t)$  para  $t > 0$ :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{a} (1 - e^{-at}). \end{aligned}$$

Por consiguiente, para toda  $t$ ,  $y(t)$  es

$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) u(t),$$

la cual se muestra en la figura 2.18.

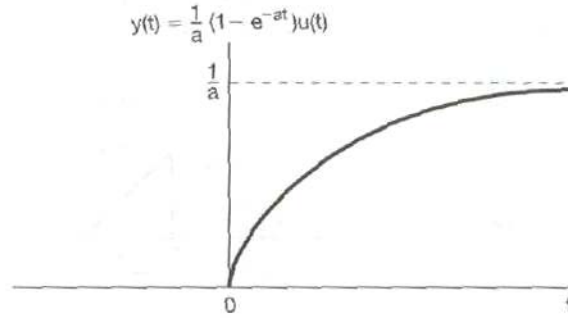


Figura 4.12 Respuesta del sistema en el ejemplo 4.2 con respuesta al impulso  $h(t) = u(t)$  a la entrada  $x(t) = e^{-2t} u(t)$

### Ejemplo 4.3

Considere la convolución de las siguientes dos señales:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases} \\ h(t) &= \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases} \end{aligned}$$

para la convolución discreta, es conveniente considerar la evaluación de  $y(t)$  en intervalos separados. En la figura 4.13 hemos dibujado  $x(r)$  e ilustrado  $h\{t - r\}$  en cada uno de los intervalos de interés. Para  $t < 0$  y para  $t > 3T$ ,  $x(r)h(t - r) = 0$  para todos los valores de  $r$ , y en consecuencia,  $y(t) = 0$ . Para los otros intervalos, el producto  $x(r)h(t - r)$  es como se

indica en la figura 4.14. Así, para estos tres intervalos, la integración puede realizarse de forma gráfica con el siguiente resultado:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 < t < T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T < t < 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T < t < 3T \\ 0, & 3T < t \end{cases} ,$$

lo cual se muestra en la figura 4.13.

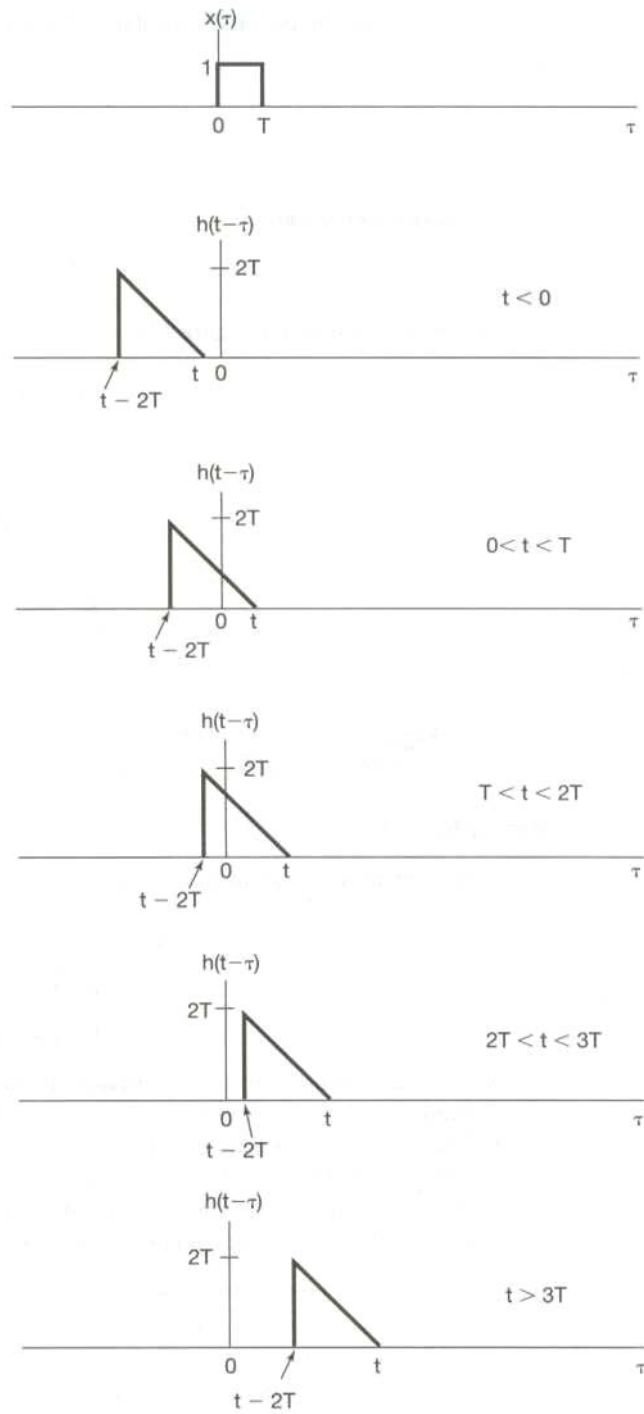


Figura 4.13 Señales  $x(t)$  y  $h(t-\tau)$  para diferentes valores de  $t$  ejemplo 4.3

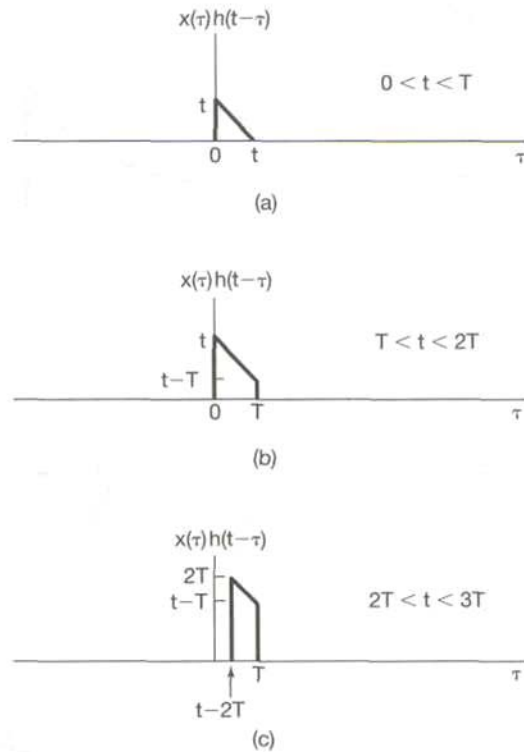


Figura 4.14 Producto  $x(\tau)h(t - \tau)$  del ejemplo 4.3 para los tres intervalos de valores de  $t$  en los cuales el producto no es idéntico a cero. (Vea la figura 4.13.)

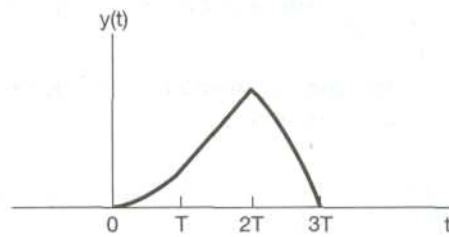


FIGURA (4.14) SEÑAL  $Y(T) = X(T) \cdot H(T)$  PARA EL EJEMPLO 4.4.

**Ejemplo 4.4**

Sea que  $y(t)$  denota la convolución de las siguientes dos señales:

$$x(t) = e^{2t}u(-t+3) \quad (4.31)$$

$$h(t) = u(t - 3). t), \quad (4.32)$$

Las señales  $x(\tau)$  y  $h(t - \tau)$  están trazadas como funciones de  $\tau$  en la figura 4.16(a).

Observamos primero que estas dos señales tienen regiones diferentes de cero que se

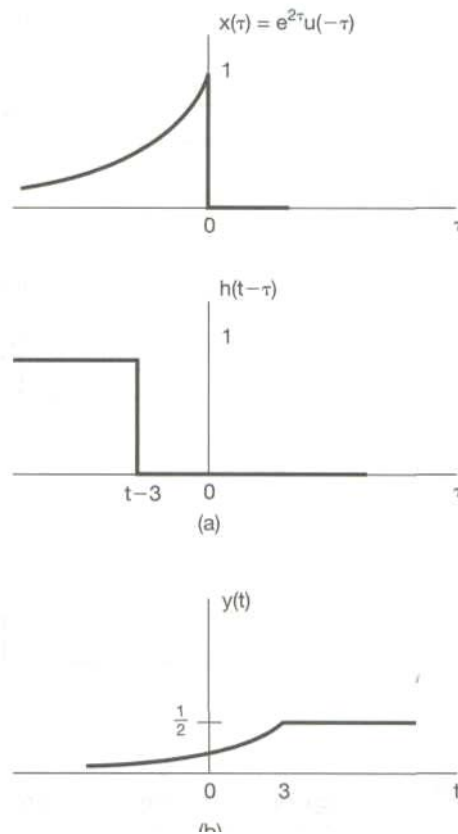


FIGURA 4.15 EL PROBLEMA DE CONVOLUCIÓN CONSIDERADO EN EL EJEMPLO 4.4

traslapan, sin importar el valor de  $t$ . Cuando  $t - 3 \leq 0$ , el producto de  $x(\tau)$  y  $h(t - \tau)$  es diferente de cero para  $-\infty < \tau < t-3$ , y la integral de convolución se convierte en

Para  $t - 3 \geq 0$ , el producto  $x(\tau)h(t - \tau)$  es diferente de cero para  $-\infty < \tau < 0$ , de manera que la



$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-3)}. \quad (4.33)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2}. \quad (4.34)$$

La señal resultante  $y(t)$  está trazada en la figura 4.15(b).

Como ilustran estos ejemplos y, la interpretación  $c_a$  de la convolución continua y la discreta es de un valor considerable para visualizara la euación de las integrales y sumas de convolución.

# CAPÍTULO V

# MODULACIÓN

## CAPÍTULO 5 MODULACIÓN

### 5.1 INTRODUCCIÓN

Muchas señales de entrada no pueden ser enviadas directamente hacia el canal, como vienen del transductor. Para eso se modifica una onda portadora, cuyas propiedades se adaptan mejor al medio de comunicación en cuestión, para representar el mensaje.

Definiciones: "La modulación es la alteración sistemática de una onda portadora de acuerdo con el mensaje (señal modulada) y puede ser también una codificación"

Las señales de banda base producidas por diferentes fuentes de información no son siempre adecuadas para la transmisión directa a través de un a canal dado. Estas señales son en ocasiones fuertemente modificadas para facilitar su transmisión."

Una portadora es una senoide de alta frecuencia, y uno de sus parámetros (tal como la amplitud, la frecuencia o la fase) se varía en proporción a la señal de banda base  $s(t)$ .

De acuerdo con esto, se obtiene la modulación en amplitud (AM), la modulación en frecuencia (FM), o la modulación en fase (PM). La siguiente figura muestra una señal de banda base  $s(t)$  y las formas de onda de AM y FM correspondientes. En AM la amplitud de la portadora varia en proporción a  $s(t)$ , y en FM, la frecuencia de la portadora varía en proporción a  $s(t)$

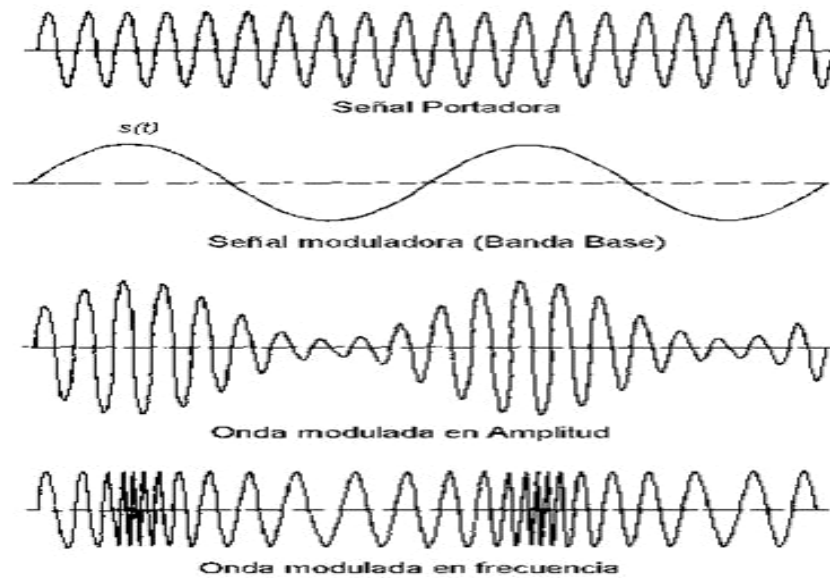


Figura 5.1 Señal moduladora, Onda modulada en amplitud, onda modulada en frecuencia

Es interesante hacer hincapié en que muchas formas de comunicación no eléctricas también encierran un proceso de modulación, y la voz es un buen ejemplo. Cuando una persona habla, los movimientos de la boca ocurren de una manera más bien lenta, del orden de los 10 Hz, que realmente no pueden producir ondas acústicas que se propaguen.

La transmisión de la voz se hace por medio de la generación de tonos portadores, de alta frecuencia, en las cuerdas vocales, tonos que son modulados por los músculos y órganos de la cavidad oral. Lo que el oído capta como voz, es una onda acústica modulada, muy similar a una onda eléctrica modulada.

### 5.1.2 RAZONES PARA MODULAR

Existen varias razones para modular, entre ellas:

- Facilita la propagación de la señal de información por cable o por el aire.
- Ordena el RADIOESPECTRO, distribuyendo canales a cada información distinta.
- Disminuye DIMENSIONES de antenas.
- Optimiza el ancho de banda de cada canal
- Evita INTERFERENCIA entre canales.
- Protege a la Información de las degradaciones por RUIDO.
- Define la CALIDAD de la información transmitida.

Modulación para facilidad de radiación: Una radiación eficiente de energía electromagnética requiere de elementos radiadores (antenas) cuyas dimensiones físicas serán por lo menos de 1/10 de su longitud. de onda. Pero muchas señales, especialmente de audio, tienen componentes de frecuencia del orden de los 100 Hz o menores, para lo cual necesitarían antenas de unos 300 Km. de longitud si se radiaran directamente.

Utilizando la propiedad de traslación de frecuencias de la modulación, estas señales se pueden sobreponer sobre una portadora de alta frecuencia, con lo que se logra una reducción sustancial del tamaño de la antena. Por ejemplo, en la banda de radio de FM, donde las portadoras están en el intervalo de 88 a 108 MHz, las antenas no deben ser mayores de un metro. [7]

- $\lambda = \frac{c}{f}$  donde  $\lambda$  es la longitud de onda en mts

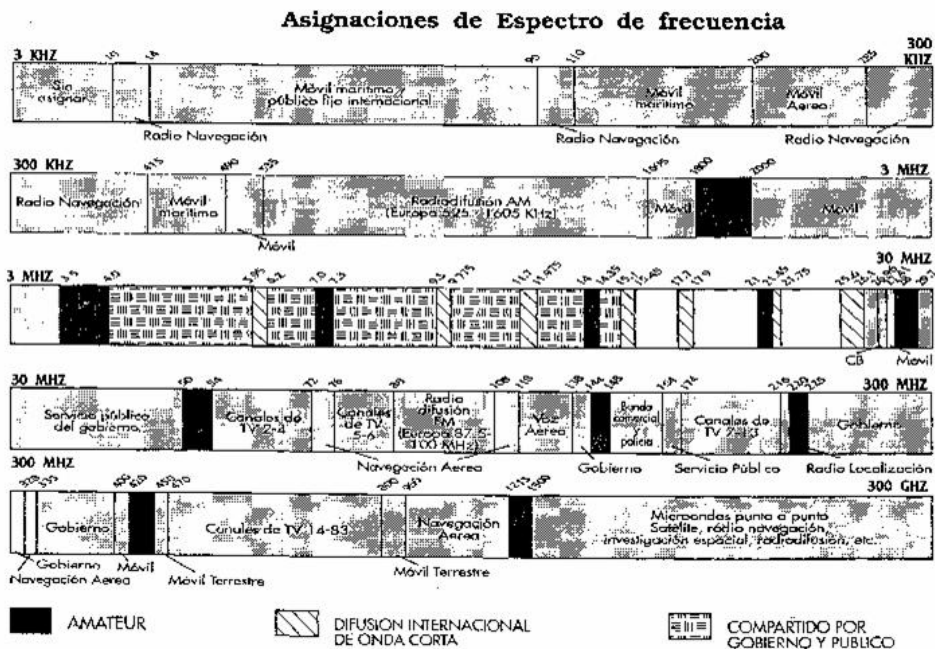
- $c$  es la velocidad de la luz ( $3 \times 10^8$  m/s)
- $f$  es la frecuencia en Hz

Modulación para reducir el ruido y la interferencia: Se ha dicho que es imposible eliminar totalmente el ruido del sistema. Y aunque es posible eliminar la interferencia, puede no ser práctico. Por fortuna, ciertos tipos de modulación tiene la útil propiedad de suprimir tanto el ruido como la interferencia.

La supresión, sin embargo, ocurre a un cierto precio; generalmente requiere de un ancho de banda de transmisión mucho mayor que el de la señal original; de ahí la designación del ruido de banda ancha. Este convenio de ancho de banda para la reducción del ruido es uno de los intereses y a veces desventajosos aspectos del diseño de un sistema de comunicación.

Modulación por asignación de frecuencia: El propietario de un aparato de radio o televisión puede seleccionar una de varias estaciones, aún cuando todas las estaciones estén transmitiendo material de un programa similar en el mismo medio de transmisión.

Es posible seleccionar y separar cualquiera de las estaciones, dado que cada una tiene asignada una frecuencia portadora diferente. Si no fuera por la modulación, solo operaría una estación en un área dada. Dos o más estaciones que transmitan directamente en el mismo medio, sin modulación, producirán una mezcla inútil de señales interferentes.



*Figura 5.2 Asignaciones de espectro de frecuencias*

Modulación para multicanalización: A menudo se desea transmitir muchas señales en forma simultánea entre dos puntos. Las técnicas de multicanalización son formas intrínsecas de modulación, permiten la transmisión de múltiples señales sobre un canal, de tal manera que cada señal puede ser captada en el extremo receptor. Las aplicaciones de la multicanalización comprenden telemetría de datos, emisión de FM estereofónica y telefonía de larga distancia.

Es muy común, por ejemplo, tener hasta 1,800 conversaciones telefónicas de ciudad a ciudad, multicanalizadas y transmitidas sobre un cable coaxial de un diámetro menor de un centímetro.

Modulación para superar las limitaciones del equipo: El diseño de un sistema queda generalmente a la disponibilidad de equipo, el cual a menudo presenta inconvenientes en

relación con las frecuencias involucradas. La modulación se puede usar para situar una señal en la parte del espectro de frecuencia donde las limitaciones del equipo sean mínimas o donde se encuentren más fácilmente los requisitos de diseño.

Para este propósito, los dispositivos de modulación se encuentran también en los receptores, como ocurre en los transmisores. [17]

### 5.1.3 PROCESO DE MODULACION

Frecuentemente se utilizan dispositivos electrónicos SEMICONDUCTORES con características no lineales (diodos, transistores, bulbos), resistencias, inductancias, capacitores y combinaciones entre ellos. Estos realizan procesos eléctricos cuyo funcionamiento es descrito de su representación matemática.

$$s(t) = A \text{ sen } (wt + \theta )$$

donde:

**A es la amplitud de la portadora (volts)**

**w es la frecuencia angular de la portadora (rad/seg)**

**$\theta$  ángulo de fase de la portadora (rad)**

Existen básicamente dos tipos de modulación: la modulación ANALÓGICA, que se realiza a partir de señales analógicas de información, por ejemplo la voz humana, audio y video en su forma eléctrica y la modulación DIGITAL, que se lleva a cabo a partir de señales generadas por fuentes digitales, por ejemplo una computadora.



Modulación Analógica: AM, FM, PM

Modulación Digital: ASK, FSK, PSK, QAM

#### **5.1.4 FACTORES QUE AFECTAN EL CANAL A LA SEÑAL**

Depende del medio o canal, ya que hay unos mejores que otros, aunque también depende del tipo de modulación y aplicación.

Los principales efectos que sufre la señal al propagarse son:

- Atenuación
- Desvanecimiento
- Ruido Blanco aditivo
- Interferencia externa
- Ruido de fase
- Reflexión de señales
- Refracción
- Difracción
- Dispersión

### 5.1.5 RELACIÓN ENTRE LA MODULACIÓN Y EL CANAL

El canal influye fuertemente en la elección del tipo de modulación de un sistema de comunicaciones, principalmente debido al ruido.

CANAL: Ruido, Distorsión, Interferencia y Atenuación.

MODULACIÓN: Inmunidad al ruido, Protege la calidad de la información, Evita interferencia.

#### Modulación de Amplitud en Cuadratura (QAM)

La modulación de amplitud en cuadratura (QAM), es una forma de modulación digital en donde la información digital está contenida, tanto en la amplitud como en la fase de la portadora transmitida. Es decir, lleva información digital, de manera analógica.

Pueden generarse esquemas multisímbolos de señalización, estas señales resultantes se denominan señales de modulación de amplitud en cuadratura (QAM), además estas señales pueden interpretarse como de muchos niveles de modulación en amplitud aplicados independientemente en cada una de las dos portadoras en cuadratura. Se emplea un demodulador, con un detector de nivel aplicado a la salida de cada detector sincrónico, podría entonces usarse para recuperar la información digital deseada.

Es evidente que la modulación se lleva a cabo usando dos detectores sincrónicos en paralelo, uno en cuadratura con el otro. La constelación del conjunto de la señal QAM de 16 niveles se muestra en la figura Constelación QAM-16. Nótese que esta señal puede considerarse como si se hubiera generado por dos señales moduladas en amplitud de

cuadratura. Como se usan cuatro niveles en cada una de las portadoras, la señal se denomina en ocasiones QAM de cuatro niveles. Todos los puntos están igualmente espaciados. Es evidente que la señal general de QAM puede escribirse también:

$$s(t) = a(t) \cos[\omega_c t + y(t)] \quad (5.1)$$

...donde la amplitud  $r_i$  y la fase angular  $\theta$  dan las adecuadas combinaciones.

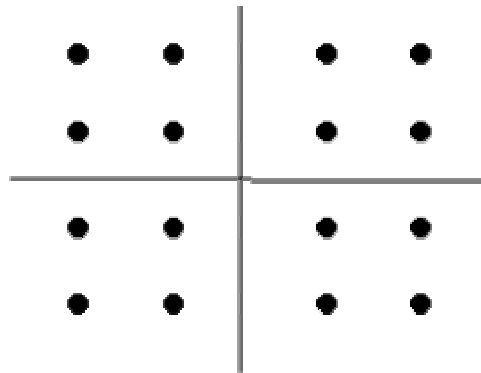


Figura 5.3 Constelación de QAM de cuatro niveles (16 símbolos).

En la práctica la conformación de los pulsos se lleva a cabo en el transmisor, como parte del proceso de modulación, y en el receptor, junto con el proceso de demodulación.

En la siguiente tabla se muestran las velocidades permisibles de bits para la transmisión de QAM, expresadas en las siguientes unidades: *bits/s/Hz* de ancho de banda de transmisión.

		Factor de caída, r		
M (# de estados)	0.1	0.25	0.5	1
2	0.9	0.8	0.67	0.5
4	1.8	1.6	1.33	1.0
8	2.7	2.4	2.0	1.5
16	3.6	3.2	2.67	2.0

Tabla 5.1 Velocidades permisibles de bits para la transmisión de QAM.

Uno de los métodos empleados, es el llamado AMPLITUD MODULADA [AM], que consiste en variar la amplitud de la onda de radio. Cuando una señal de baja frecuencia [BF], controla la amplitud de una onda de alta frecuencia [RF], tenemos una modulación por amplitud. La Radio y la Televisión no hubieran sido posibles sin la modulación.

En la transmisión existen dos procesos fundamentales. El primero, imprimir la Información [BF] en la Portadora [RF], proceso al que llamamos MODULACIÓN. El segundo, es el proceso decodificador, es decir la recuperación de la información, procedimiento que denominamos DEMODULACIÓN o DETECCIÓN.

## 5.2. Modulación AM Balanceado - Definición de Modulación por Amplitud

Para presentar lo que es la modulación en amplitud, comencemos con una etapa amplificadora, donde la señal de entrada " $E_o$ " se amplifica con una ganancia constante " $A$ ".

En ese caso la salida del amplificador, " $E_m$ ", es el producto de  $A$  y  $E_o$ . Supongamos ahora que la ganancia de la etapa amplificadora " $A$ " es variable en función del tiempo, entre 0 (cero) y un valor máximo, regresando a 0 (cero). Lo anterior significa, que la etapa amplificadora multiplica el valor de entrada " $E_o$ " por un valor diferente de " $A$ " en cada instante.

La descripción efectuada en el proceso anterior, es lo que denominamos Modulación en Amplitud. Por lo tanto, la modulación en amplitud es un proceso de multiplicación y se muestra en la próxima figura. Al multiplicador lo podemos considerar también, como un dispositivo de ganancia controlada por una tensión. En este caso, la entrada de control de ganancia corresponde con la entrada " $x$ ". La forma de onda mostrada en la figura pertenece a un modulador balanceado; mas adelante explicaremos esa denominación. En ella podemos observar que la envolvente de " $E_m$ ", tiene la misma forma que la señal de entrada " $E_s$ ".

## 5.3. DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA

Se alimenta una de las entradas de un circuito multiplicador con una RF portadora que llamamos " $E_o$ ". La segunda entrada del multiplicador se la alimenta con la señal de BF audio que denominaremos " $E_s$ " [modulante]. Esta última señal, es la que promoverá la

variación de ganancia del circuito. A los efectos del análisis matemático, las señales  $E_o$  y  $E_s$  son senoidales y las escribiremos como sigue: [28]

$$E_o = E_{o_p} \text{ sen } \omega_o t \quad (5.2)$$

donde;  $E_{o_p}$  es el valor de pico de la onda portadora (señal de RF). Recordemos que

$$\omega = 2\pi f$$

$$y, \quad E_s = E_{s_p} \text{ sen } \omega_s t \quad (5.3)$$

siendo:  $E_{s_p}$  el valor de pico de la señal de BF o audio.

Si se aplican las señales definidas a las entradas de un circuito multiplicador [modulador] el voltaje de salida  $E_m$  se expresa como sigue:

$$E_m = \frac{E_o \cdot E_s}{10} = \frac{E_{o_p} \text{ sen } \omega_o t \times E_{s_p} \text{ sen } \omega_s t}{10} = \frac{E_{o_p} \cdot E_{s_p}}{10} (\text{sen } \omega_o t \times \text{sen } \omega_s t) \quad (5.4)$$

Nota: El valor  $1/10$  es lo que se denomina factor de multiplicación y es un parámetro propio de cada circuito modulador (multiplicador). En este caso, se ha adoptado éste valor por ser un valor típico. La ecuación anterior representa el producto de dos señales senoidales de frecuencia distinta.

La expresión exhibida no tiene la forma que habitualmente utilizan los Ingenieros y Técnicos en Radiocomunicaciones, ésta, se obtiene efectuando la sustitución del producto de las funciones seno, por una identidad trigonométrica. La mencionada identidad es la siguiente: [25]

$$(\operatorname{sen} a) \cdot (\operatorname{sen} b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)] \quad (5.5)$$

efectuando el reemplazo correspondiente, se tiene:

$$E_m = \frac{E_{o_f} \cdot E_{s_f}}{20} \cos(\omega_o - \omega_s)t - \frac{E_{o_f} \cdot E_{s_f}}{20} \cos(\omega_o + \omega_s)t \quad (5.6)$$

Análisis de la ecuación

Anteriormente se ha mencionado que  $E_o$  y  $E_s$  son funciones senoidales, mientras que  $E_m$  no lo es en absoluto. En la ecuación última, puede apreciarse que  $E_m$  (señal de AM), se encuentra formada, por dos ondas cosenoidales de frecuencias diferentes.

La primera de las componentes de la señal modulada, tiene la frecuencia diferencia, mientras que la segunda tiene la frecuencia suma. Para el ejemplo representado en las gráficas anteriores, se han utilizado los valores que se detallan a continuación. Para el audio:

$$E_s = 5 \operatorname{sen} 2\pi 1000t ; \quad (5.7)$$

resulta entonces  $E_{s_f} = 5$  voltios. Para la portadora:

$$E_o = 5 \operatorname{sen} 2\pi 10000t ; \quad (5.7)$$

luego  $E_{o_f} = 5$  voltios,

en función de estos datos; podremos evaluar la amplitud y frecuencia de cada uno de los términos. La amplitud será:

$$E_o = 5 \text{ sen } 2\pi 1000t \quad (5.7)$$

(recuerde que  $\omega = 2\pi f$ ); las frecuencias han de ser:

10 KHz. +1 KHz. = 11 KHz. para la suma y,

10 KHz. - 1 KHz. = 9 KHz. para la diferencia.

Espectro:En el dominio del tiempo la señal de AM de la figura, resulta ser la suma o superposición de dos componentes; la primera, de frecuencia diferencia (9 KHz.) y amplitud máxima 1,25 voltios y la segunda, de frecuencia suma (11 KHz.) y amplitud máxima 1,25 voltios. Lo expresado anteriormente puede ser representado física o eléctricamente como dos generadores senoidales en serie como se muestra en la figura:5.4.

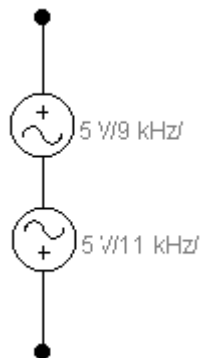
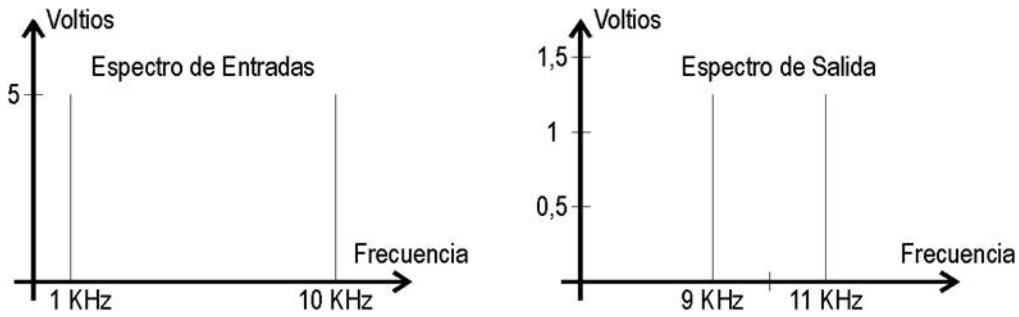


Figura 5.4. Generadores senoidales en serie





*Figura 5.5 Espectros correspondientes a la entrada al circuito modulador y salida del mismo*

Recordemos el significado de espectro: es una representación gráfica discreta de una señal, donde se indican con barras o líneas, la amplitud del pico de cada componente y su posición en el eje de las abscisas (X), revela la frecuencia. En las figuras 5.4 Y 5.5 tenemos los espectros correspondientes a la entrada al circuito modulador y la salida del mismo.

En el espectro de la izquierda (entradas), la primera línea, representa la señal modulante de baja frecuencia [BF] y la segunda, la portadora [RF]. Para el espectro de la derecha (salida), se aprecian: la primera línea, la frecuencia diferencia y la segunda, la frecuencia suma. La componente diferencia es también llamada Banda Lateral Inferior. La componente suma se denomina también Banda Lateral Superior. Las bandas laterales realmente existen, no son solo un argumento matemático, pueden ser filtradas y separadas.

En el caso de AM hay dos bandas laterales que se posicionan simétricas respecto de la ubicación original de la portadora. Si se conoce el rango de frecuencias modulantes, es posible predecir el margen de frecuencias que han de ocupar las bandas laterales. Ejemplo: si la frecuencia modulante puede variar entre 50 Hz y 4 KHz., las frecuencias caerán, en el lado inferior, entre 6 KHz. y 9,95 KHz. Mientras que del lado superior las frecuencias decaerán entre 10,05 KHz. y 14 KHz., según se aprecia en la figura 5.6

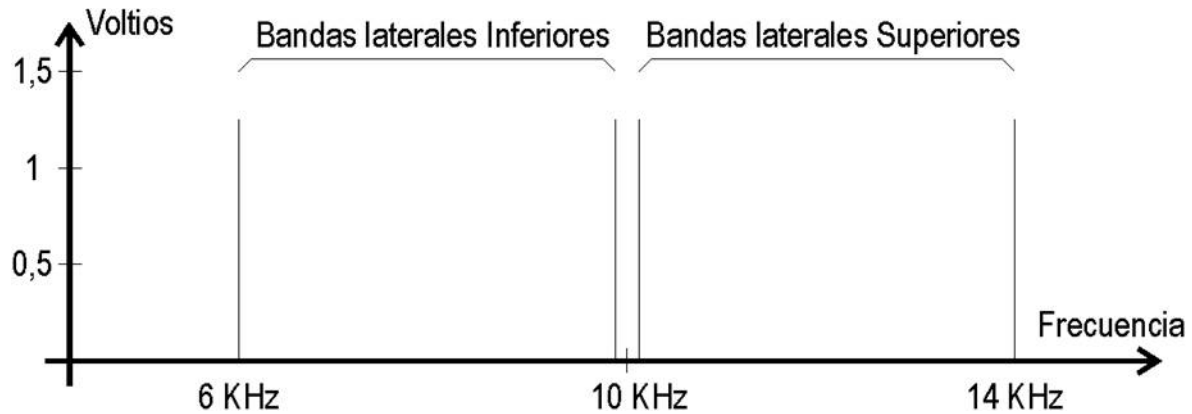


Figura 5.6 Banda lateral inferior y superior

#### 5.4. MODULACIÓN AM ESTÁNDAR

Mediante los circuitos descritos anteriormente, se han multiplicado dos señales, portadora y modulante, para obtener una salida balanceada, también denominada AM portadora suprimida o AM con supresión de portadora.

El modulador en amplitud clásico o estándar, sumo el término de la portadora al espectro de salida. La radiodifusión comercial en onda media y la televisión, emplean este tipo de modulación. [22]

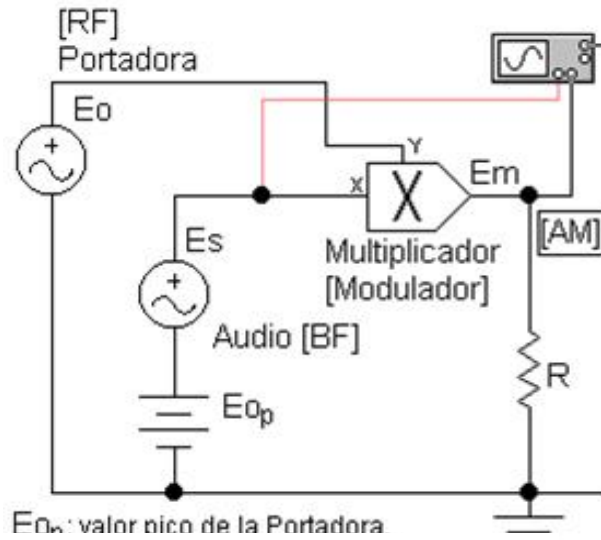


Figura 5.7 Portadora

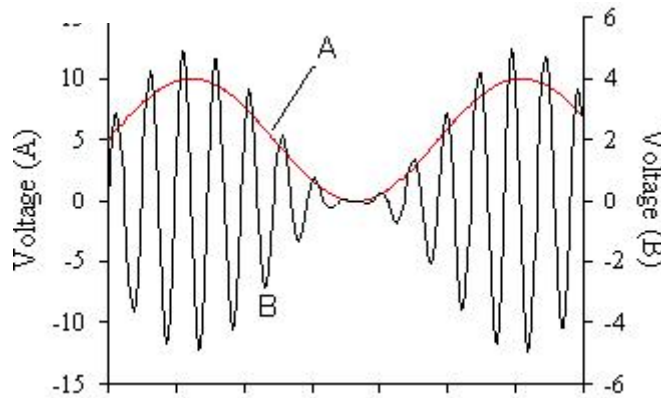


Figura 5.8 Señal AM estándar

Para obtener una señal de AM estándar, la modificación que debe introducirse al circuito presentado en la figura 5.8 , es solo, la incorporación de una fuente de continua en serie a la moduladora, de igual valor que el pico máximo de la portadora.

En las figuras 5.7 y 5.8 se pueden visualizar: el circuito modificado y la señal eléctrica de salida, junto a la moduladora (A).El voltaje de salida queda expresado por las siguientes ecuaciones:

$$E_m = \frac{(E_{o_p} + E_{s_p} \text{sen } \omega_s t) \cdot (E_{o_p} \text{sen } \omega_o t)}{10} = \frac{E_{o_p}^2}{10} (\text{sen } \omega_o t) + \frac{E_{s_p} \cdot E_{o_p}}{10} (\text{sen } \omega_s t) \cdot (\text{sen } \omega_o t) \quad (5.8)$$

aplicando igual sustitución que en el caso anterior, se tiene:

$$E_m = \frac{E_{o_p}^2}{10} (\text{sen } \omega_o t) + \frac{E_{s_p} \cdot E_{o_p}}{20} \cos(\omega_o - \omega_s) - \frac{E_{s_p} \cdot E_{o_p}}{20} \cos(\omega_o + \omega_s) \quad (5.9)$$

la importante diferencia entre las dos ecuaciones resultantes, se encuentra, en que ésta última tiene un término mas que la primera, como se ha mencionado en el párrafo inicial. Aparece en este caso, un término de frecuencia portadora, que resulta ser el de mayor amplitud (Se encuentra dividido por 10, mientras que los restantes por 20).

Análisis de la ecuación Como estudio de la ecuación podemos confeccionar la tabla:2

**Tabla 5.2**

Término	Carácter
$\frac{E_{o_p}^2}{10} (\text{sen } \omega_o t)$	Término de Portadora
$\frac{E_{s_p} \cdot E_{o_p}}{20} \cos(\omega_o - \omega_s)$	Banda Lateral Inferior
$\frac{E_{s_p} \cdot E_{o_p}}{20} \cos(\omega_o + \omega_s)$	Banda Lateral Superior

A manera de ejemplo, para tener una idea de amplitudes y efectuar alguna comparación, podemos utilizar los mismos valores, que los empleados para el caso del modulador balanceado. Resultando:

$$\frac{E^2_{o_p}}{10} = \frac{5^2}{10} = 2,5 \text{ voltios}, \text{ para el término de portadora y} \quad (5.10)$$

$$E_s = 5 \text{ sen } 2\pi 1000t \quad (5.7),$$

para las bandas laterales.

Estos resultados pueden representarse gráficamente en el espectro correspondiente y en un circuito eléctrico, como se aprecia en la siguiente figura 5.9

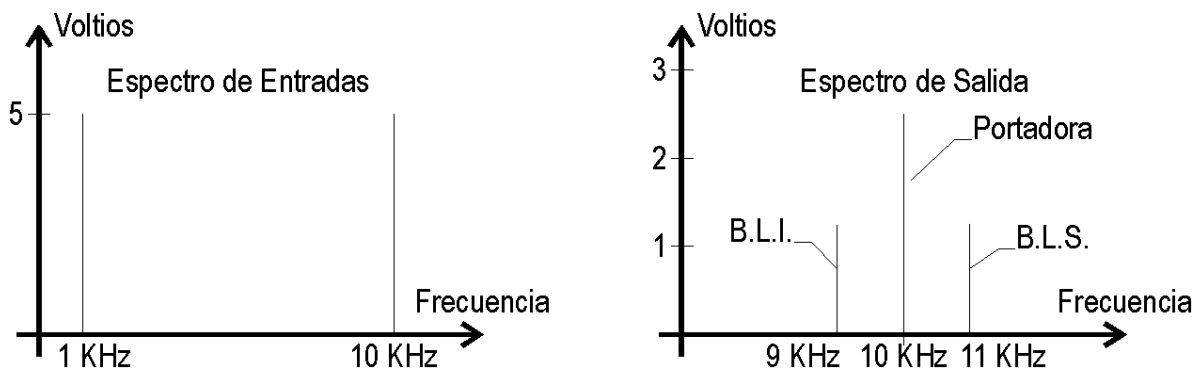


Figura 5.9 Respuesta grafica en el espectro en un circuito

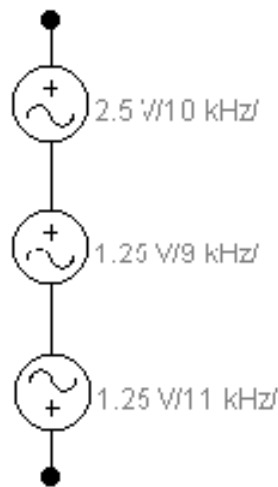


Figura 5.10 fuentes senoidales en serie

### 5.4.1 Comparación entre AM balanceado y AM estándar

En el primer caso la señal(figura 5.11) de salida contiene dos componentes, las dos bandas laterales. En el segundo caso, las componentes son tres, además de las bandas laterales existe el término de portadora. Si comparamos las señales resultantes, encontraremos que la envolvente de la señal balanceada no tiene la misma forma que la modulante, mientras que la envolvente de la señal clásica mantiene la forma. Los receptores clásicos aprovechan esta característica para efectuar la demodulación. De la onda balanceada, podemos decir que no existirá salida en el transmisor, mientras no exista modulación.

### 5.4.2 ÍNDICE DE MODULACIÓN

Teóricamente una señal moduladora senoidal produce evolución senoidal de la envolvente. Podemos definir entonces la envolvente de modulación como una fracción "m" de la amplitud de la portadora sin modular o bien como un porcentaje de la portadora

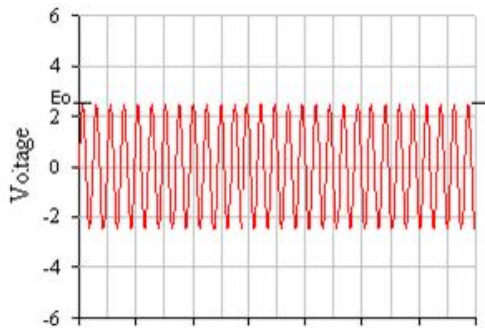


Figura 5.11 Señal moduladora senoidal

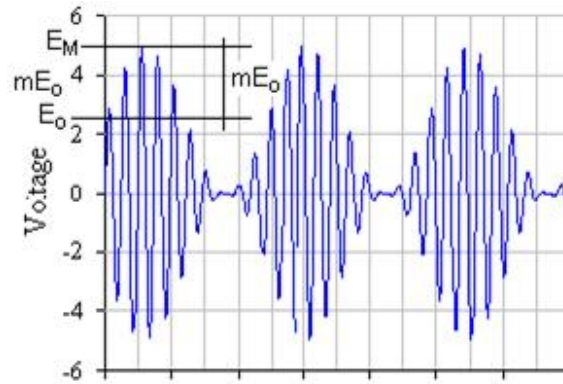


Figura 5.12 Portadora sin modular

de la definición y figuras 5.11 y 5.12 podemos deducir:

$$m = \frac{E_M - E_O}{E_O} = \frac{5 - 2,5}{2,5} = 1 \quad ; \quad (5.11)$$

equivale al 100% de profundidad de modulación. Veamos otro ejemplo; sea la siguiente forma de onda modulada:

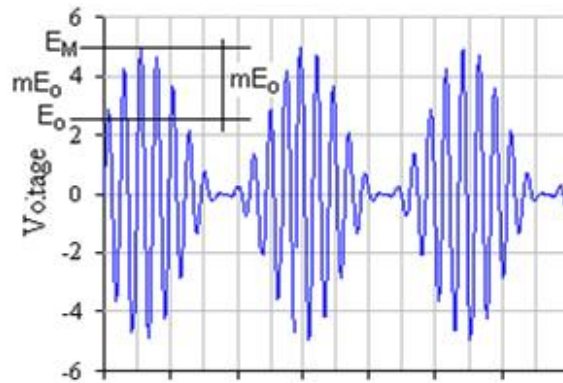


Figura 5.13 señal al 50% de profundidad de modulación

$$m = \frac{E_M - E_O}{E_O} = \frac{3,75 - 2,5}{2,5} = 0,5 \quad ; \quad (5.12)$$

en la figura 5.13 muestra el caso de 50% de profundidad de modulación.

Aplicando este concepto en la ecuación general de AM clásica y operando matemáticamente podremos escribir la igualdad de la siguiente forma:

$$Em = E_0 (\text{sen } \omega_p t) + \frac{m \cdot E_0}{2} \cos(\omega_p - \omega_s) t - \frac{m \cdot E_0}{2} \cos(\omega_p + \omega_s) t \quad (5.13)$$

de esta última expresión podemos concluir:

- La amplitud máxima que puede alcanzar el par de bandas laterales, en condiciones normales de modulación, es solo la mitad de la portadora sin modular, cuando  $m = 1$ .
- Siendo  $m = 0$ , las bandas laterales también son cero; desaparecen los dos términos que representan las mismas.
- Si se pretende transmitir una información cuya frecuencia máxima es de 5 KHz., el ancho de banda del canal y de todo el sistema debe ser, el doble de la frecuencia máxima que se desea emitir.

Una condición particular se presenta cuando  $m > 1$ , a esta condición se la define como sobre modulación y se puede notar en la representación que se aprecia mas abajo. Esta señal se obtiene en un circuito real, dado que matemáticamente el resultado sería otro. El defecto se produce, debido a la imposibilidad que tienen los semiconductores (transistores), de conducir en sentido inverso o funcionar, al encontrarse polarizados inversamente.(Fig. 5.14)



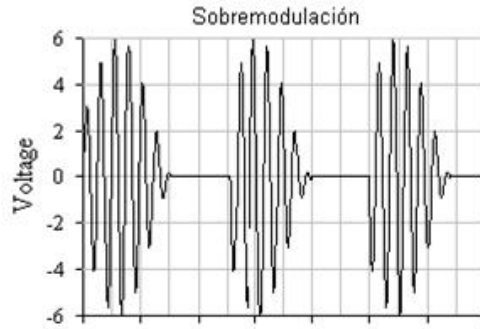


Figura 5.14 Sobremodulación

Bajo estas condiciones, la envolvente resulta una poliarmónica (ya no es una senoidal), sino que se representa por una fundamental y numerosas armónicas; estas armónicas, producen también muchos pares de bandas laterales originados por la distorsión. [21]

### 5.5. POTENCIA Y CORRIENTE EN LAS BANDAS LATERALES

En la última ecuación, expresada para la modulación clásica,

$$E_m = E_0 (\text{sen } \omega_c t) + \frac{m \cdot E_0}{2} \cos(\omega_c - \omega_m) t - \frac{m \cdot E_0}{2} \cos(\omega_c + \omega_m) t \tag{5.13}$$

cada término tiene un factor o coeficiente que determina la amplitud del mismo, y, se muestra a continuación:

$$; \text{ respectivamente } \quad 1, \quad \frac{m}{2}, \quad \frac{m}{2} \tag{5.14}$$

Si la potencia la expresamos como  $\frac{E^2}{R}$ ; a esos términos, para el cálculo de la potencia, desarrollada en cada banda lateral, deberemos elevarlos al cuadrado, resultando:

$$1; \frac{m^2}{4}; \frac{m^2}{4}; \quad (5.15)$$

mutuamente

de acuerdo a lo enunciado, la razón o relación de potencias, estará dada por:

$$1 + \frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{4} = 1 + \frac{m^2}{2} \quad (5.16)$$

entonces:

$$\frac{P_t}{P_o} = 1 + \frac{m^2}{2} \quad (\text{relación de potencias}) \quad (5.17)$$

de donde:

$$P_t = \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) \cdot P_o \quad (5.18)$$

siendo  $P_t$ , la potencia total para una modulación de índice "m" y  $P_o$ , la potencia de la portadora sin modular.

La corriente, de lo último enunciado, se la puede establecer de la siguiente manera:

$$\frac{P_t}{P_o} = \frac{I_t^2 \cdot R}{I_o^2 \cdot R} = 1 + \frac{m^2}{2} \quad (5.19)$$

operando matemáticamente, podremos obtener la siguiente igualdad:

$$I_t = I_o \sqrt{1 + \frac{m^2}{2}} \tag{5.20}$$

Ejemplo: si se tiene un transmisor AM, cuya potencia de portadora sin modular es de 500 [vatios], en condiciones de 100% de profundidad de modulación, la potencia total será de 750 [vatios]. La adición de 250 [vatios] es la potencia que se desarrolla en el par de bandas laterales; 125 [vatios] en la banda lateral inferior y 125 [vatios] en la banda lateral superior.

### 5.6. DEMODULACIÓN O DETECCIÓN

La demodulación o detección es un procedimiento que permite recuperar una tensión proporcional al mensaje empleado como modulación. Podemos mencionar dos procedimientos básicos; el primero, mediante el uso de un circuito multiplicador y el segundo, mas tradicional y simple, mediante rectificación y filtrado de la señal AM estándar. Analicemos cada uno en detalle.

Detección AM estándar

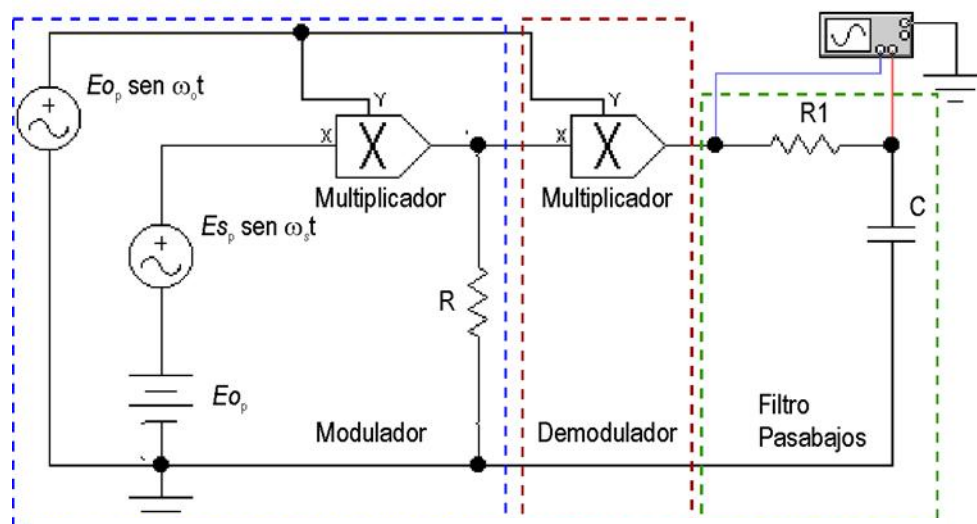


Figura 5.15 Circuito multiplicador

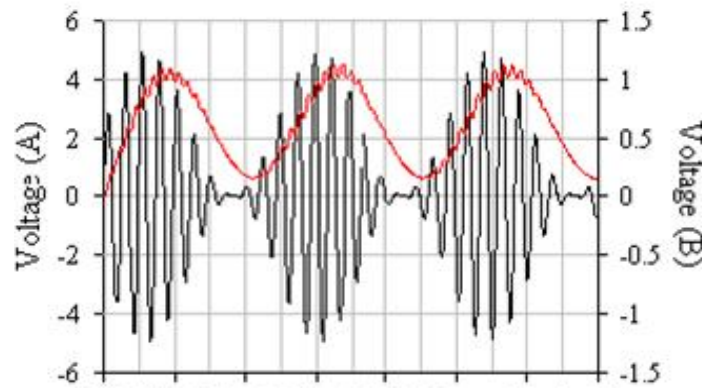


Figura 5.16 Señal AM entrante (A) y salida demoduladora(B)

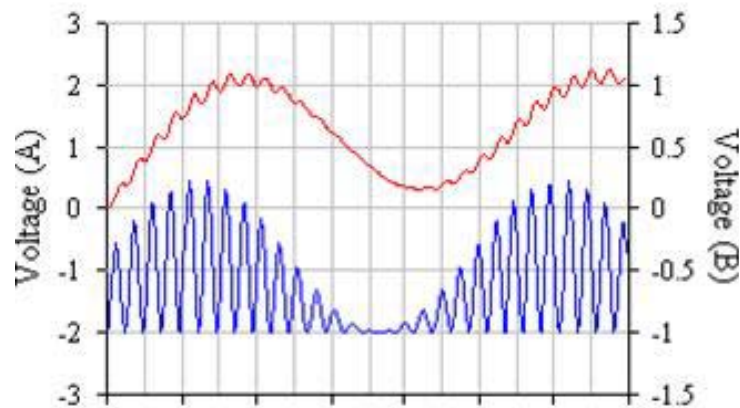


Figura 5.17 Señal con circuito con etapa moduladora

En las figuras 5.16 y 5.17 hallamos un circuito (Fig. 5.15) compuesto, donde tenemos en primer lugar la etapa moduladora, que hemos estudiado anteriormente, y luego, un nuevo multiplicador, que junto a un filtro pasa bajos, permite cumplimentar con la función Detectora. Las señales que se observan, en las gráficas anteriores, corresponden a: la onda de AM que se obtiene a la salida del modulador [negro], la salida del multiplicador utilizado como detector [azul] y finalmente, la tensión recuperada [rojo] hemos notar, como situación particular en este circuito, que para lograr la multiplicación, de la función detectora, se requiere multiplicar por la misma señal utilizada como portadora. Para completar la explicación de este tipo de circuito detector, es mas sencillo efectuar un

ejemplo numérico. El factor de multiplicación, como en los otros ejemplos, es 0,1. Sean entonces, la señal de AM ingresante por la entrada identificada con la letra "x" una tensión definida según siguiente ecuación (valores de un ejemplo precedente):

$$E_m = 2,5(\text{sen} 2 \pi 10000t) + 1,25 \cos(2 \pi 9000)t - 1,25 \cos(2 \pi 1000)t ;(5.21)$$

por otro lado, sea la señal portadora que ingresa en la entrada identificada con letra "y":

$$E_o = 2,5(\text{sen} 2 \pi 10000t) \tag{5.7}$$

la señal obtenida en la salida y graficada en color azul, tendrá componentes senoidales, cuyas frecuencias y amplitudes se calculan y describen en la siguiente tabla:

Entrada "y"	operación	Entrada "x"			Salida
2.5 [V] ; 10 Khz.	x	2.5 [V] ; 10 Khz.	=	Frec.	0.31 [V] ; 0 Hz
				Diferencia	
	x	1.25 [V] ; 9 Khz.	=	Frec. Suma	0.31 [V] ; 20KHz
				Frec.	0.15 [V] ; 1
				Diferencia	Khz.
				Frec. Suma	0.15 [V] ; 19 Khz.

	x	1.25 [V] ; 11KHz	=	Frec. Diferencia	0.15 [V] ; 1 Khz.
				Frec. Suma	0.15 [V] ; 21 Khz.

Tabla 5.3

Como método de cálculo, se ha multiplicado la entrada "y" (portadora) por cada una de las componentes de la entrada "x" (onda de AM) (aplicación de la propiedad distributiva de un producto), logrando como resultado en la salida, frecuencias suma y diferencia que se describen en la columna "salida". Entre las resultantes, tenemos dos componentes (resaltadas) cuya frecuencia es de 1KHz, que es la empleada como modulante y que, al pasar por un filtro pasa bajos, cuya frecuencia de corte sea la apropiada, se habrá recuperado una tensión proporcional a la mencionada moduladora [rojo].

Es importante mencionar que la tensión rescatada es proporcional y no de la misma amplitud que la empleada en el circuito modulador. La ondulación o rizado que se localiza en la salida, se hace imperceptible cuando se aumenta la relación de frecuencias, entre portadora y moduladora. (Ejemplo:  $f_0 = 100 \text{ Khz.}$  ó mayor)<sup>[13]</sup>

5.6.1 DETECCIÓN AM BALANCEADO

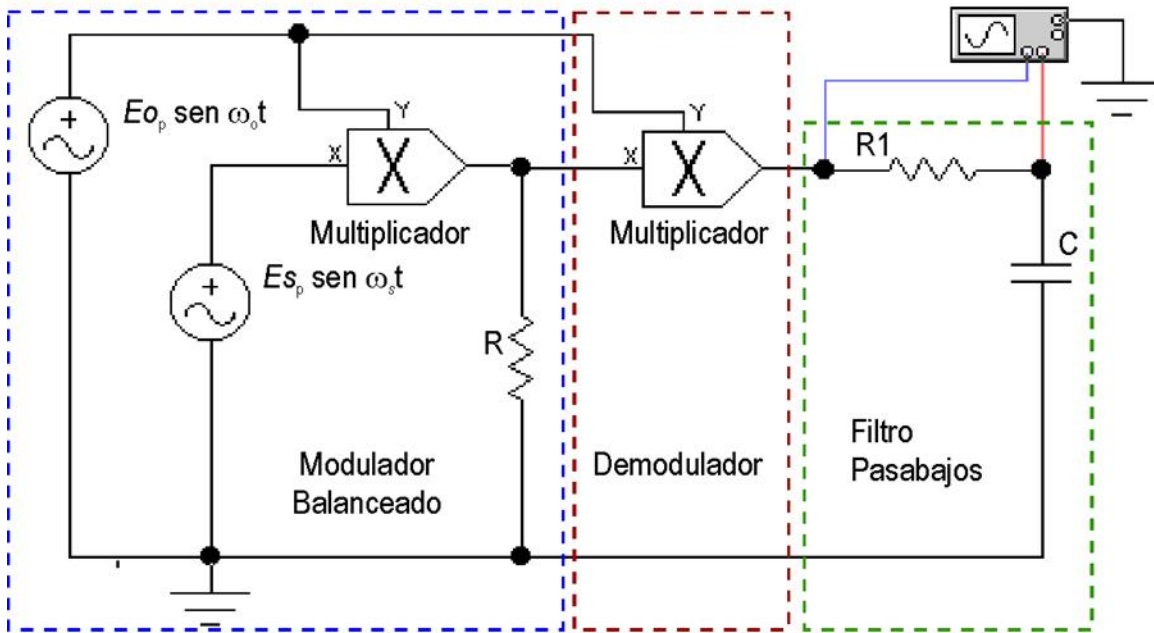


Figura 5.18 Detector AM balanceado

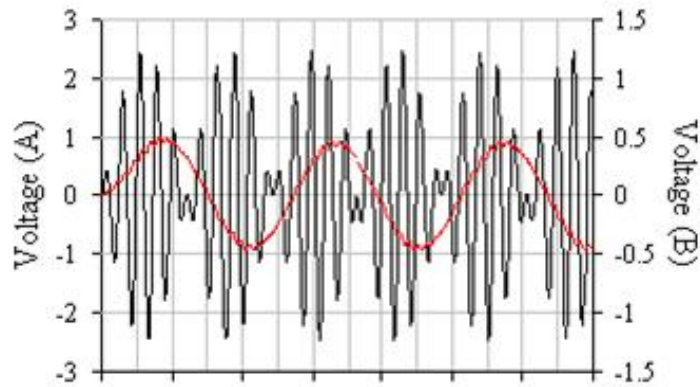


Figura 5.19 Señal con detector AM balanceado

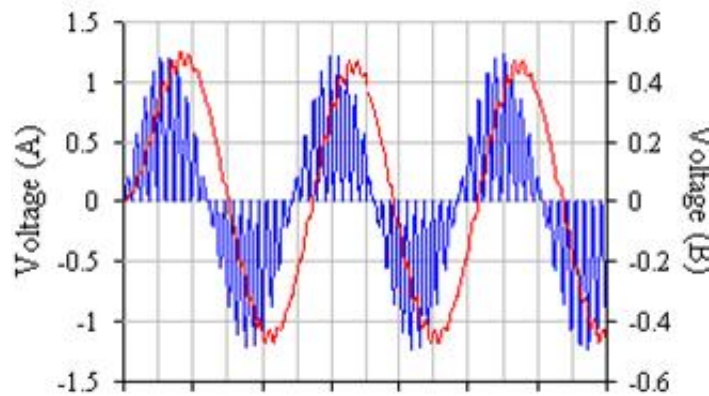


Figura 5.20 Señal con circuito AM balanceado y demodulador

En las figuras 5.19 y 5.20 anteriores se muestran un circuito compuesto, formado por el modulador balanceado y demodulador, en forma equivalente a lo que se ha mostrado para el caso AM estándar. Las señales, corresponden a las ondas: AM balanceada ingresante en la entrada "x" del multiplicador utilizado como detector [negro]; salida del mismo multiplicador [azul] y salida demodulada del circuito [rojo].

Entre las resultantes, tenemos dos componentes (resaltadas, igual que en el caso anterior) cuya frecuencia es de 1KHz, que es la empleada como modulante y que, al pasar por un filtro pasa bajos, cuya frecuencia de corte sea la apropiada, se habrá recuperado una tensión proporcional a la mencionada moduladora [rojo].

La señal se ha recuperado utilizando la misma técnica que en AM estándar. La diferencia se encuentra en que, en este caso no existe la componente de 10 KHz. correspondiente a la portadora de la onda a demodular. Veamos un cuadro semejante al adoptado anteriormente, para obtener la tensión de salida. Siendo las señales empleadas las siguientes: [26]

$$\text{AM balanceado: } E_{m1} = 1,25 \cos(2 \pi 9000)t - 1,25 \cos(2 \pi 1000)t \quad (5.22)$$



Portadora:  $E_o = 2,5(\text{sen } 2 \pi 10000t)$  (5.23)

Entrada "y"	operación	Entrada "x"			Salida
2.5 [V] ; 10 Khz.	X	1.25 [V] ; 9 Khz.	=	Frec.	0.15 [V] ; 1
				Diferencia	Khz.
	x	1.25 [V] ; 11KHz	=	Frec. Suma	0.15 [V] ; 19 Khz.
				Frec.	0.15 [V] ; 1
				Diferencia	Khz.
				Frec. Suma	0.15 [V] ; 21 Khz.

**Tabla 5.4**

La onda recuperada [rojo] no es una onda pura , tal como ocurriera en el caso anterior, dado que se ha utilizado una frecuencia portadora de relación muy baja respecto a la moduladora. Si la fo se aumentara a 100 Khz. o mas, el resultado sería mucho mas próximo a una senoidal pura.

Detección AM estándar por diodo rectificador la siguiente figura muestra un circuito que puede ser utilizado como demodulador mediante la técnica de rectificación.

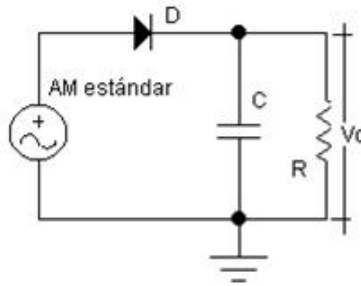


Figura 5.21 Circuito detector de picos

Habitualmente a este circuito (Fig. 5.21) se lo denomina detector de picos. Teóricamente los picos de la señal de entrada son los recuperados, por cuanto la señal de salida será la envolvente superior de la onda AM estándar tal como se muestra en las figuras del detector descrito anteriormente. Siendo en este caso, la onda (A) [negro], la Señal de AM entrante y la onda (B) [rojo] la señal de salida.

El funcionamiento del circuito podemos describirlo brevemente así: durante cada semiciclo positivo de la portadora el diodo conduce y carga el capacitor al valor de pico de la portadora. En cada semiciclo negativo el diodo no conduce y el capacitor se descarga a través de la resistencia. Si se ajusta la constante de tiempo RC a un valor muy superior al período de la portadora, solo existirá una pequeña descarga entre picos positivos. Por tanto la salida será la envolvente superior con una pequeña ondulación como se aprecia en la figura.

La ondulación o rizado se minimiza con el aumento de la frecuencia portadora tal el caso anterior, y se hace casi imperceptible cuando la portadora alcanza valores de frecuencia superiores a los 100 KHz., para señales de audio usadas como modulantes.

La constante de tiempo RC no puede ser cualquiera. Si es demasiado grande, el circuito no puede detectar el pico siguiente, fundamentalmente en el valle de la modulación, perdiendo la envolvente y, si es muy pequeña, el rizado es demasiado amplio. [24]

### 5.7. CORRIMIENTO DE ESPECTRO (DESPLAZAMIENTO DE FRECUENCIA)

En radiocomunicaciones es muy habitual la necesidad de modificar la frecuencia portadora, como también sus consecuentes bandas laterales. Para efectuar este proceso se utilizan técnicas semejantes a las descritas anteriormente.

Las señales moduladas se alimentan en la entrada "x" del multiplicador. Se conecta un oscilador (oscilador local) en la entrada "y", a este oscilador se lo ajusta en una frecuencia tal, que restada o sumada a la portadora modulada, dé la frecuencia deseada. Este es el procedimiento universalmente utilizado para obtener la frecuencia Intermedia en los receptores. Para completar la explicación veamos un ejemplo(tabla 5.5):

Componentes de la entrada "x" modulada		
Amplitud de pico [V]	Frecuencia en [Khz.]	Característica
1	$f_o + f_s = 1002$	Banda lateral superior
4	$f_o = 1000$	Portadora
1	$f_o - f_s = 998$	Banda lateral Inferior

**Tabla 5.5**

Las bandas laterales superior e inferior son debidas a una señal modulante de 2 KHz. En la entrada "y" se conecta un oscilador local cuya frecuencia se adopta en 1455 Khz., ya que esta frecuencia es 455 Khz. superior a la Frecuencia Intermedia deseada, siendo su amplitud 5 [voltios].

La solución la expresaremos la tabla 5.6 como en los casos anteriores. En ella se muestran todas las frecuencias que estarán presentes en la salida del circuito multiplicador.

Entrada "y"	operación	Entrada "x"			Salida
5 [V] ; 1455 Khz.	x	1 [V] ; 1000 Khz.	=	Frec. Diferencia	1 [V] ; 455 Khz.
				Frec. Suma	1 [V] ; 2445 Khz.
	x	4 [V] ; 998 Khz.	=	Frec. Diferencia	0.25 [V] ; 457 Khz.
				Frec. Suma	0.25 [V] ; 2453 Khz.
	x	1 [V] ; 1002 Khz.	=	Frec. Diferencia	0.25 [V] ; 453 Khz.
				Frec. Suma	0.25 [V] ; 2457 Khz.

Tabla 5.6

De la observación y análisis de la tabla 5.6, puede concluirse que, cada frecuencia presente en la entrada, se desplaza hacia nuevos valores de frecuencia.

Cada conjunto, puede separarse mediante el uso de filtros apropiados. Para la selección de la frecuencia deseada se utiliza un filtro pasa banda, en este caso particular, es conveniente usar un circuito resonante, cuya frecuencia de resonancia coincida, para nuestro proceso con 455 Khz. y el ancho de banda supere los 4 Khz., permitiendo de esta manera la selección de las tres componentes que fueron resaltadas (453; 455 y 457 Khz.). A este procedimiento se lo suele llamar también "Heterodinación, Conversión o Mezcla".[23]

## 5.8. CIRCUITOS DE APLICACIÓN

### 5.8.1 MODULADOR BALANCEADO BÁSICO

Este circuito muestra un modulador del tipo anillo (fig. 5.22). El esquema cuenta con una etapa preamplificadora para aumentar el nivel de la señal de entrada de audio, que puede ser la señal proveniente de un micrófono. La otra entrada procede de un oscilador que genera la [RF] portadora. El preset "P" permite el ajuste del circuito, logrando que se elimine la por completo la portadora en ausencia de la señal de audio.

Lógicamente, la tecnología actual tiene otros dispositivos del tipo Integrado como el LM1496 o LM1596 que cumplen la función de modulador balanceado muy eficientemente, además de otras aplicaciones que permite desarrollar el circuito integrado.

Es importante mencionar que esta modalidad de AM solo se utiliza como señal auxiliar para codificar la transmisión de FM estereofónica y para la codificación de la información

de color de los sistemas NTSC/PAL. También, en las videograbadoras formato VHS, la información de color se imprime en la cinta en esta modalidad.

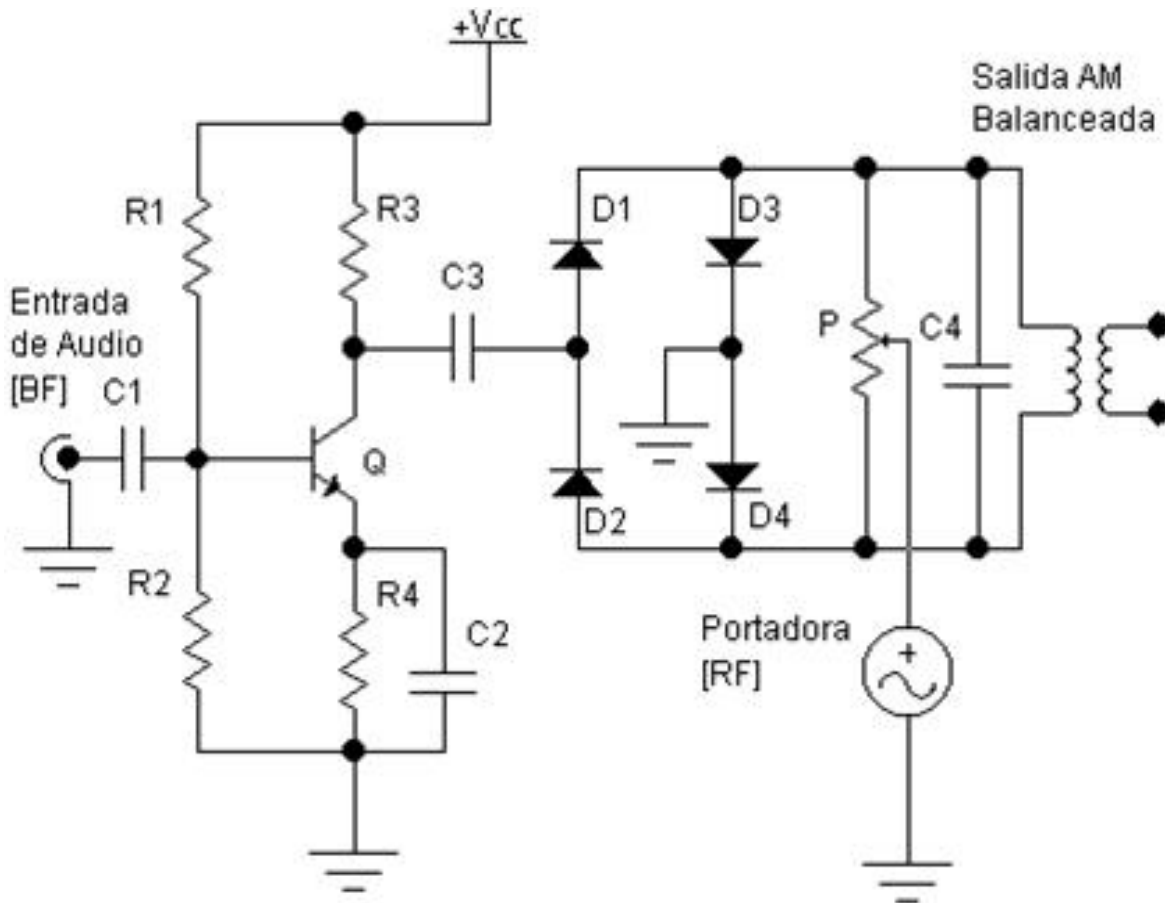


Figura 5.22 Modulador tipo anillo

## 5.8.2 MODULADOR ESTÁNDAR BÁSICO

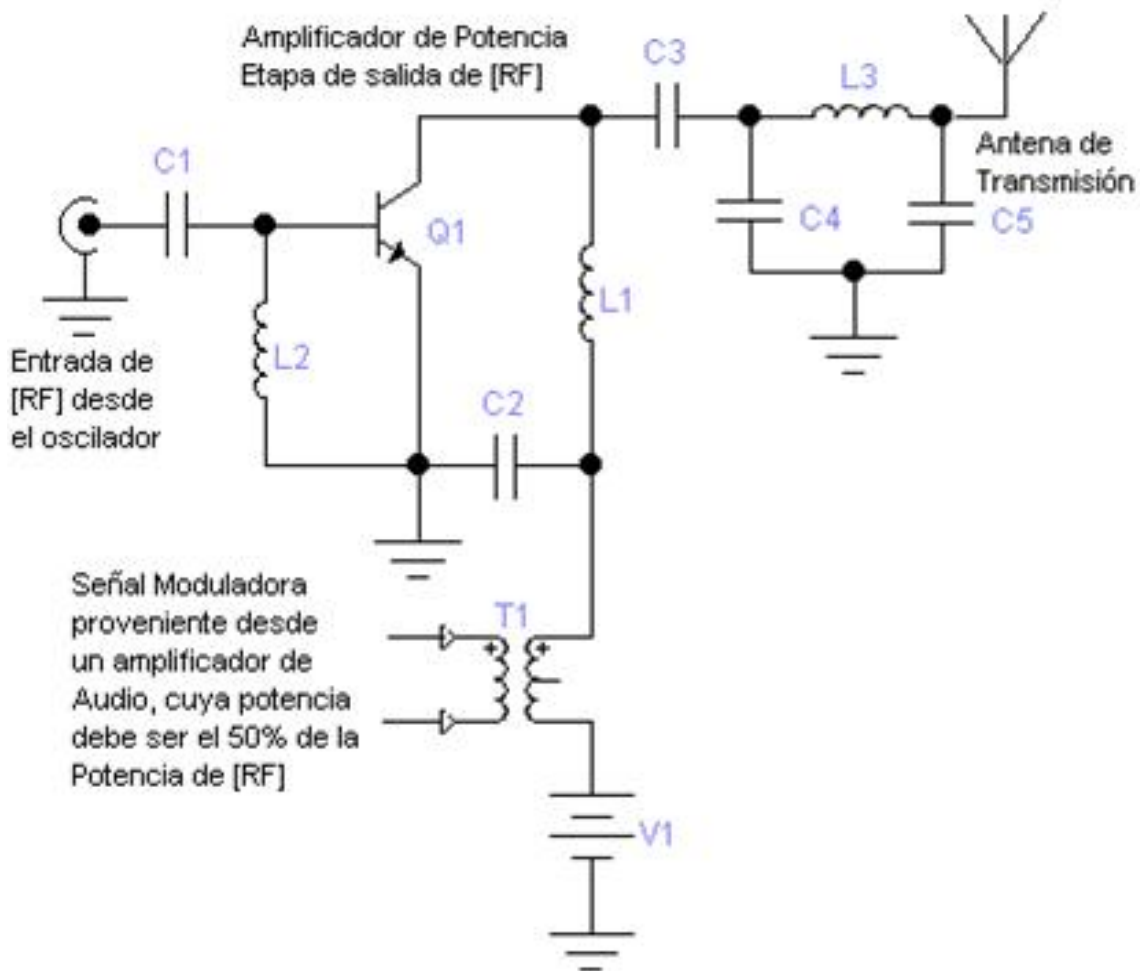


Figura 5.23 Modulador Estándar básico

El circuito de la Fig. 5.23 muestra una etapa de salida en clase "C", de un transmisor, en él se ha incorporado el transformador "T1" [Transformador Modulador] que sumando la señal de audio a la fuente de alimentación "V1", efectúa el proceso de modulación.

La señal de audio, la entrega un amplificador de audio, cuya potencia máxima, debe cumplir con la condición de ser el 50 % de la potencia entregada por el transistor en RF según se ha demostrado anteriormente

La bobina L3 junto a los capacitores C4 y C5 forma el circuito "Tanque de salida" que adapta impedancia entre el transistor y la antena. Fija además la frecuencia de trabajo del transmisor por ser un circuito resonante.

### **5.8.3 CONVERSOR O MEZCLADOR DE FRECUENCIA**

Cuando dos ondas senoidales excitan un circuito no lineal, no solo se han de producir armónicos de cada señal, sino que aparecerán nuevas frecuencias, suma y diferencia.

Este enunciado fue demostrado oportunamente. La generación de estas frecuencias ha permitido la creación de circuitos que permiten el cambio o desplazamiento de frecuencias.



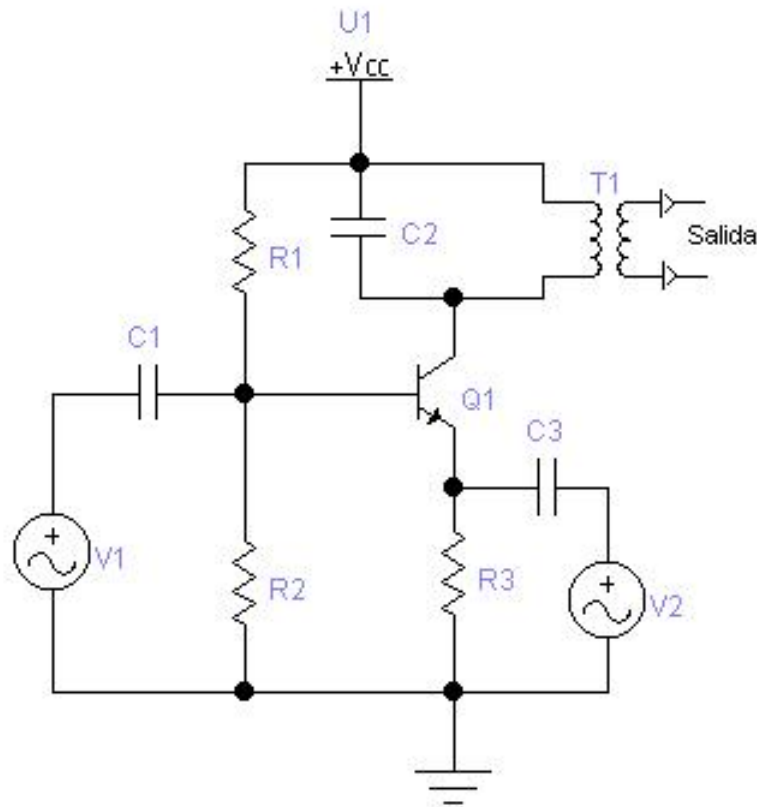


Figura 5.24 Mezclador de frecuencias

El circuito de la figura 5.24 muestra un mezclador de frecuencias. Dos ondas senoidales ( $V_1$  y  $V_2$ ) entran al circuito formado por el transistor (Bipolar o FET) y sus componentes asociados. La salida contiene las dos frecuencias iniciales ( $f_1$  y  $f_2$ ), sus armónicos y lo más importante, las frecuencias suma ( $f_1 + f_2$ ) y diferencia ( $f_1 - f_2$ ). Un filtro pasa banda, permite obtener la señal de salida. En este caso, un circuito resonante formado por el primario de  $T_1$  y  $C_2$ , que ajustado a una de las frecuencias (suma o diferencia) entregará la tensión a la carga. Todas las demás señales quedan bloqueadas por el filtro.

En la mayoría de las aplicaciones una de las tensiones debe ser grande, para asegurar el funcionamiento no lineal, y, suele ser provista por un oscilador comúnmente denominado, oscilador local. La otra entrada puede ser de pequeño nivel.

En el circuito (Fig. 5.24), la señal grande es la tensión  $V_1$ , de frecuencia  $f_1$ , que ingresa en la base del transistor. La señal pequeña será entonces la tensión  $V_2$ , de frecuencia  $f_2$ , que llega al emisor.

Este mismo circuito, puede ser empleado como detector o demodulador en el modo multiplicador, donde la señal de bajo nivel, debe ser la onda de AM a demodular y la señal de alto nivel, como se ha dicho, debe provenir de un oscilador, cuya frecuencia sea coincidente con la frecuencia portadora de la onda de AM a detectar. Nuevamente se destaca que éste es el caso expuesto en los circuitos detectores, con base, en etapas multiplicadoras. [25]

## 5.9. DIAGRAMAS BÁSICOS DE TRANSMISOR Y RECEPTOR DE AM

### 5.9.1 EL TRANSMISOR

En la próxima figura 5.25 se muestra un diagrama en bloques correspondiente a un transmisor AM estándar.

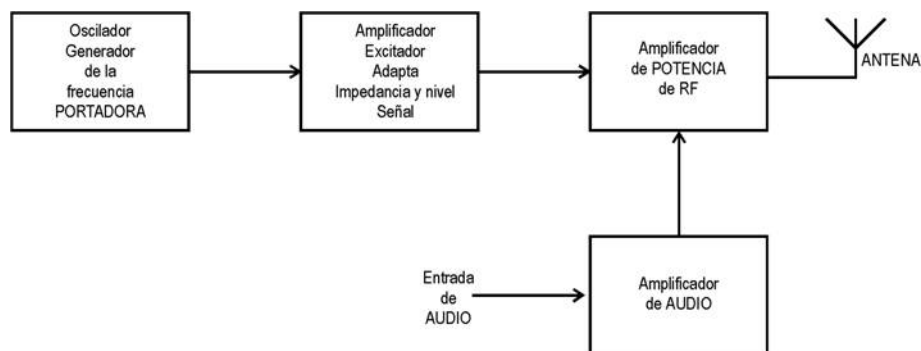


Figura 5.25 Diagrama a bloques de un transmisor AM estándar

en él se resumen todo el proceso y tratamiento de señales, necesario para lograr transmitir una señal en la modalidad AM clásica. La primera etapa es la encargada de generar la RF

portadora, el circuito utilizado es un oscilador, comúnmente controlado por cristal. Debido a que el nivel y la corriente de salida del oscilador generalmente no son suficientes para excitar la etapa de potencia del transmisor, se intercala una etapa excitadora, que además cumple la función de adaptar impedancias entre etapas.

La importancia de la correcta adaptación de impedancia, reside en la estabilidad de frecuencia del oscilador. Cuanto más alta es la impedancia de carga del oscilador, mas estable en frecuencia resultará éste. En la etapa de potencia de RF del transmisor se efectúa la modulación, donde ingresan la onda portadora y la señal modulante.

### 5.9.2 EL RECEPTOR

En la figura 5.26 se muestra el diagrama de un receptor comúnmente denominado superheterodino.

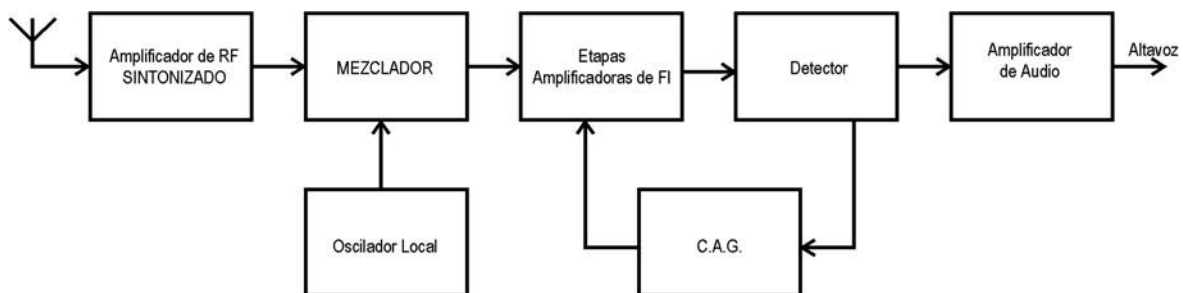


Figura 5.26 Diagrama de un receptor superheterodino

La señal es tomada por la antena y se aplica a la etapa amplificadora de RF. La salida de este proceso se mezcla con la señal del oscilador local para generar la frecuencia de FI. El

conjunto de estas tres etapas es lo que se designa como sintonizador del receptor. La frecuencia de FI se amplifica habitualmente en varias etapas (mínimo dos), de la última se alimenta el detector, circuito que ha de recuperar la señal moduladora. Con esta última se acometerá hacia los amplificadores de audio, que permitirán lograr el nivel y potencia suficiente para excitar los sistemas acústicos (altavoz). En cuanto a la etapa C.A.G. (Control Automático de Ganancia) esta destinada a lograr una estabilidad de amplitud entre las diferentes emisoras sintonizadas, evitando los bruscos cambios de volumen al cambiar la emisora captada.

La tecnología actual ha logrado resumir todas estas etapas en un único circuito integrado, un ejemplo de ello podemos encontrarlo en el TDA1083. Este circuito integrado permite construir con ese único chip, receptores AM/FM, incluidos la etapa amplificadora de audio.

Nota: en todo este trabajo se ha utilizado la simulación computada, mediante el empleo del software ELECTRONICS WORKBENCH 5.0. El mencionado puede obtenerse en su versión educativa o demostrativa desde <http://www.electronicworkbench.com> en forma gratuita. [12]

## 5.10 MODULACION DE AMPLITUD: PORTADORA SUPRIMIDA

La ecuación general de una señal senoidal puede escribirse.

$$\varphi(T)=a \cos \theta(T) \quad (5.24)$$

Se supondrá que  $a(t)$  y  $y(t)$  varían lentamente comparados con  $(\omega c t)$ . El término  $a(t)$  se llama envolvente de la señal  $\theta(t)$  y en el término  $\omega c$  frecuencia portadora;  $y(t)$  es la modulación de fase de  $\theta(t)$ .

$$\varphi(T)=a \cos (\omega \tau+\gamma) \quad (5.25)$$

En la modulación de amplitud, el término de fase de la ecuación es cero y la envolvente se hace proporcional a la señal dada. Haciendo la constante de proporcionalidad igual a uno se tiene.

Por lo tanto la modulación de amplitud trazada el espectro de frecuencia de una señal en rad/seg. pero deja inalterada su forma, este tipo de modulación de amplitud se llama portadora suprimida porque la densidad espectral de  $\theta(t)$  no presenta una portadora identificable, aunque el espectro se centre en la frecuencia  $Wc$ .

El contenido de frecuencia tanto negativo como positivo de  $f(t)$  aparece frecuencias positivas. esto implica que el ancho de banda de  $f(t)$  se duplica cuando se emplea este tipo de modulación de amplitud ,

. El contenido espectral de frecuencias positivas por encima de  $W_c$  se llama banda lateral superior y por debajo de  $0(t)$  exhibe las componentes de frecuencia positiva de  $f(t)$  y la banda lateral inferior , las de frecuencia negativa. Para las frecuencias negativas de  $0(t)$ , se cumple relaciones similares aunque invertidas.

De lo anterior cumplimos que la modulación de amplitud con portadora suprimida proporciona un medio conveniente para observar el espectro de frecuencias completo de una señal  $f(t)$  . Todo lo que hay que hacer es trasladar la señal por medio de la frecuencia portadora  $W_c$  mayor que las cotas espectrales. El hecho hay dos bandas laterales y no aparezca portadora separadora sugiere la siguiente designación conveniente para este tipo de modulación doble banda lateral con portadora suprimida(DSB-SC)

La recuperación de la señal original  $f(t)$  de la señal  $0(t)$  DSB-SC, requiere otra translación de frecuencia que desplace al espectro a su posición original. Este proceso de retransacción del espectro se llama desmodulación o detección.

Como la propiedad de modulación de la transformada de Furrier resulto útil al trasladar espectros para la modulación, se aprobara para la desmodulación. Suponiendo que en la señal transmitida se tiene [19]

$$. \varphi(T)=a \cos (\omega c d) \quad (5.26)$$



Hallando la transformada de Fourier de ambos lados de esta ecuación y usando la propiedad de modulación, se obtiene.

$$F(\varphi(T)=a \cos(\omega c t))=1/2f(\omega)+1/4f(\omega+2\omega)+1/4f(\omega-2\omega) \quad (5.27)$$

Este resultado también se puede obtener recordando que la multiplicación en el dominio del tiempo equivale a la convolución en el dominio de la frecuencia. Por lo tanto el espectro  $0(t)$  se puede obtener haciendo la convolución del espectro de la señal recibida con el de  $\cos Wc$ . Ambos métodos dan igual resultado y el espectro necesita un filtro pasabajas para separar los términos de doble frecuencia de las componentes.

A menudo es conveniente definir un porcentaje de modulación para una señal DSB-LC con modulación senoidal como

$$\% \text{ mod.} = \frac{(\text{magnitud max.}) - (\text{magnitud min.})}{(\text{magnitud max.}) + (\text{magnitud min.})} * 100\% \quad (5.28)$$

$$= \frac{(1+m)A - (1-m)A}{(1+m)A + (1-m)A} * 100\% = m * 100\%. \quad (5.29)$$

El parámetro  $m$  que controla las proporciones relativas entre la banda lateral y la portadora se llama *índice de modulación* de la señal AM. De la ecuación (5.18) puede verse fácilmente que para que ocurra una detección de la envolvente sin fuerte distorsión, hace falta que  $m < 1$ . Si  $m > 1$  se dice que la señal está sobre modulada.



El estudiante debe tener cuidado de no confundir la señal de la sumatoria de dos senoidales con la de una señal senoidal de amplitud modulada con índice de modulación, pequeño.

Ambos casos se describen en la figura 5.27

. Nótese que sus densidades espectrales son muy diferentes.

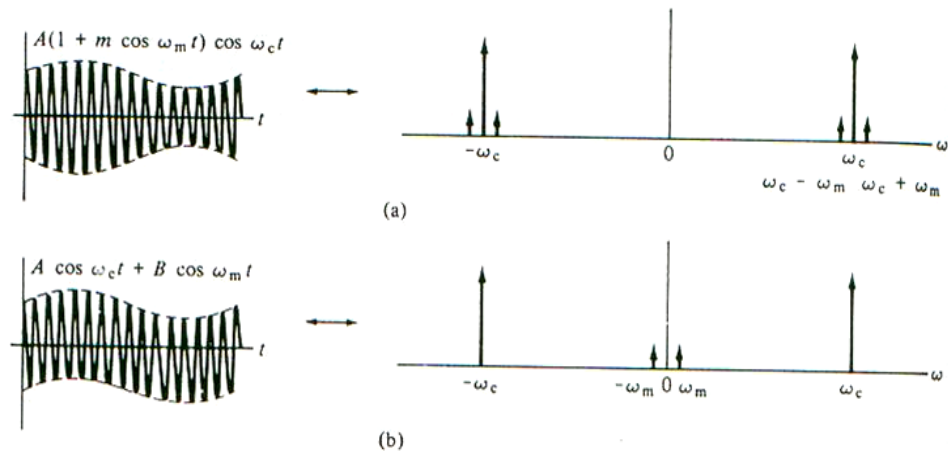


Figura 5.27 Modulación (a) y suma (b) de amplitud para el caso Senoidal.

$$\phi_{AM}(t) = A \cos \omega_c t + f(t) \cos \omega_c t. \quad (5.30)$$

### 5.10.1 POTENCIA DE LA PORTADORA Y LA BANDA LATERAL EN AM

En las señales de AM, el término portador no contiene información alguna sobre la señal moduladora  $f(t)$ . Por tanto, la potencia empleada en la portadora se desperdicia para cualquier transferencia de información. Es el precio que debe pagarse para disponer de receptores baratos.

En general, una señal AM puede describirse por medio de

Para una carga de un ohm, la potencia promedio total está dada por el valor cuadrático medio de la ecuación (5.30),

$$\overline{\phi_{AM}^2(t)} = A^2 \overline{\cos^2 \omega_c t} + \overline{f^2(t) \cos^2 \omega_c t} + \overline{2Af(t) \cos^2 \omega_c t}, \quad (5.31)$$

donde la barra indica promedio temporal. Se supondrá que  $f(t)$  varía lentamente con relación a  $\cos \omega_c t$ . Si además se supone que el valor promedio de  $f(t)$  es cero (el caso usual), entonces el último término de la ecuación 5.21 es cero y queda  $\diamond$

$$\begin{aligned} \overline{\phi_{AM}^2(t)} &= A^2 \overline{\cos^2 \omega_c t} + \overline{f^2(t) \cos^2 \omega_c t}, \\ &= A^2 / 2 + \overline{f^2(t)} / 2. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Por tanto, la potencia total  $P_t$  puede expresarse como la suma de una potencia portadora  $P_c$  y una banda lateral  $P_s$ :

$$P_t = \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} \overline{f^2(t)} = P_c + P_s. \quad (5.33)$$

La fracción de la potencia total contenida en las bandas laterales,  $\mu$ , está dada por

---

$\diamond$  Si  $f(t)$  no es cero, entonces el primero y los últimos términos de la derecha de la ecuación (5.31) puede combinarse en una potencia portadora efectiva. Es decir, un valor promedio de  $f(t)$  distinto de cero aparece en la señal AM como un término portador. [16]

$$\mu = \frac{P_s}{P_t} = \frac{\overline{f^2(t)}}{A^2 + \overline{f^2(t)}}. \quad (5.34)$$

Volviendo al caso en que  $f(t)$  es una senoidal simple

$$\begin{aligned} \phi_{AM}(t) &= A(1 + m \cos \omega_c t) \cos \omega_c t \\ &= A \cos \omega_c t + mA \omega_m t \cos \omega_c t, \end{aligned}$$

se tiene

$$\overline{\phi_{AM}(t)} = \frac{1}{2} A^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) m^2 A^2, \quad (5.35)$$

y

$$\mu = \frac{m^2}{2 + m^2}. \quad (5.36)$$

Como  $m \leq 1$ , en la ecuación (5.36) se ve que la eficiencia de la transmisión de un sistema AM (DSB-LC) es, cuando mucho, de 33 %. En las mejores condiciones, es decir,  $m = 1$ , 67% de la potencia total se consume en la portadora y representa potencia desperdiciada

### 5.10.2 GENERACIÓN DE SEÑALES DSB-LC

De manera conceptual, la forma más fácil de generar una señal DSB-LC es producir primero una señal DSB-SC y luego agregarle alguna portadora. Esto se muestra en forma de diagrama de bloques en la figura 5.28. Sin embargo, resulta que las señales DSB-LC son, en general, más fáciles de generar en forma directa, por lo que el sistema de figura 5.20 tiene un valor más analítico que práctico.

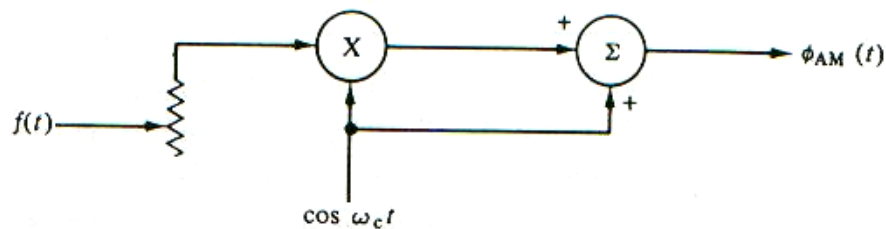


Figura 5.28 Diagrama de bloques de la generación de DSB-LC.

Como en el caso de las señales DSB-SC, la generación de señales DSB-LC puede dividirse entre los moduladores de tipo conmutador (interruptor) y los que usan características no lineales de los dispositivos.

### 5.11 MODULADOR (RECTIFICADOR) DE CONMUTACIÓN

El modulador de conmutación se puede extender directamente para la generación de AM agregando un nivel de cd a  $f(t)$  antes de la conmutación. Si este nivel es lo bastante grande para cumplir la condición  $[A + f(t)] > 0$ , es fácil ver que la señal de salida será DSB-LC.

Otra posibilidad para obtener lo mismo es añadir a  $f(t)$  alguna portadora antes de la conmutación. Esto se muestra en la figura 5.28. La acción de la conmutación puede verse como la multiplicación de la señal de entrada por una señal periódica cuadrada  $p_c(t)$  cuya frecuencia fundamental es de  $\omega_c$  rad/s. La densidad espectral de la señal conmutada resultante puede hallarse usando la propiedad de modulación de la transformada de Fourier o haciendo convolución en frecuencia de la densidad espectral de  $[f(t) + k \cos \omega_c t]$  con la densidad espectral de  $p_c(t)$ , como se muestra en la figura 5.29. El resultado es un término:

$[\frac{1}{2}k \cos \omega_c t + (2/\pi)f(t) \cos \omega_c t]$  centrado en  $\pm\omega$ . Las componentes de frecuencia no deseadas en  $\omega = 0, \pm 3\omega \pm 5\omega$ , etc., se pueden bloquear con un filtro pasabanda adecuado. No es necesario que el conmutador sea accionado por una fuente separada si la amplitud de la portadora se hace mucho mayor que  $f(t)$ . [16]

Un diodo ideal actuará muy bien como interruptor y, si la portadora es grande, apagará y encenderá a la frecuencia de ésta. En la figura 5.29 aparece el diagrama de un modulador con un diodo como interruptor. Las características espectrales son iguales que las del modulador de conmutación descrito. Como el diodo elimina la parte negativa de la señal compuesta  $[f(t) + k \cos \omega_c t]$  efectúa, en esencia, una rectificación de media onda de la señal de entrada. Por ello, este modulador se conoce también como modulador de tipo rectificador.

La modulación de amplitud con este modulador es relativamente fácil de obtener en niveles de potencia altos usando amplificadores operados en condiciones de clase C. Un filtro LC

en paralelo en la salida realiza la operación de filtración pasabanda requerida. Si se intenta sobremodular con este tipo de modulador, no aparecerá salida en lugar de la inversión de fase portadora. Esto provoca abruptas discontinuidades en la señal modulada e introduce mucho contenido armónico en el espectro.

Para evitar esto, se requieren transmisores de radio AM de alta potencia que mantengan un índice de modulación inferior al 100% en los picos negativos del contenido del programa.

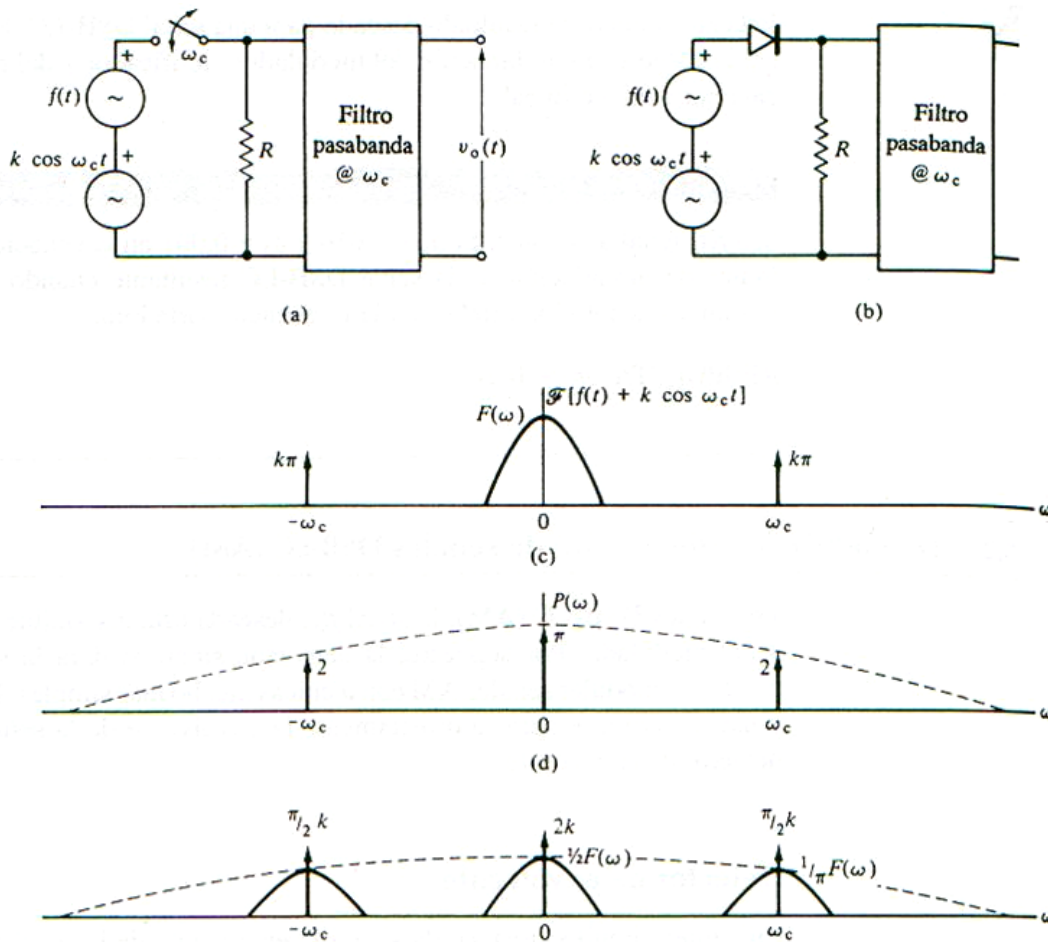


Figura 5.29 Generación de una señal de AM usando el modulador (rectificado) de conmutación.

### 5.11.1 MODULADOR QUE USA NO LINEALIDADES

El sistema de la figura 5.29 (b) puede usarse para generar AM, aun cuando el diodo no opere como interruptor ideal. En este caso, las no linealidades en la característica del diodo pueden aproximarse con una serie de potencias de la forma

$$i(t) = a_1 e(t) + a_2 e^2(t) + \dots, \quad i(t)R < e(t). \quad (5.37)$$

Reteniendo los dos primeros términos, encontramos que la tensión en la entrada del filtro pasabanda (despreciando los efectos de cualquier impedancia de entrada finita) es

$$i(t)R = a_1 R [f(t) + k \cos \omega_c t] + a_2 R [f(t) + k \cos \omega_c t]^2 + \dots \quad (5.38)$$

Expandiendo y agrupando dos términos en la frecuencia portadora, tenemos

$$v_0(t) = a_1 R k \cos \omega_c t + 2a_2 R k f(t) \cos \omega_c t. \quad (5.39)$$

Esta ecuación es el resultado deseado para una señal DSB-LC. El diodo semiconductor actúa como una combinación del modulador rectificador y del modulador que usa una característica no lineal.

### 5.11.2 DEMODULACIÓN (DETECCIÓN) DE SEÑALES DSB-LC (AM)

En señales DSB-LC (AM), la señal  $f(t)$  deseada está disponible en la envolvente de la señal modulada. Por supuesto, la detección síncrona dará la señal deseada, pero es posible modular señales AM con técnicas mucho más simples. El método más sencillo y usual es el que detecta directamente la envolvente de la señal modulada; se llama detector de envolvente.

#### 5.11.2.1 DETECTOR DE ENVOLVENTE

Cualquier circuito cuya salida siga a la envolvente de la señal de entrada sirve como detector de envolvente. El más simple es un circuito de carga no lineal de carga rápida, y descarga lenta. Puede construirse con facilidad usando un diodo en serie con un capacitor, como se muestra en la figura 5.22(b). Un resistor en paralelo con el capacitor

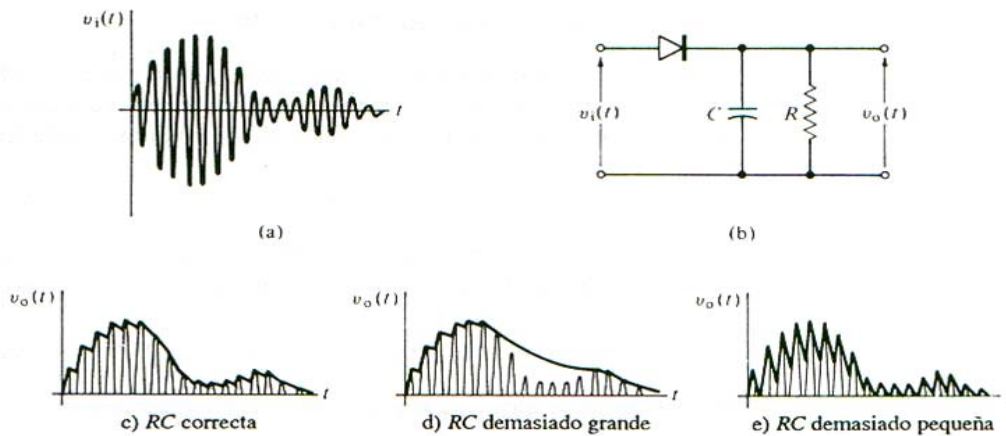


Figura 5.30 Detector de envolvente.



controla la constante de descarga. Los efectos de varias constantes de descarga se muestran en la figura 5.30 (c), (d) y (e).

El detector de envolvente opera como sigue. En los medios ciclos positivos de la señal de entrada, el capacitor  $C$  se carga hasta el valor pico de la señal. Cuando la señal de entrada cae por debajo de este valor, el diodo se cierra. El capacitor se descarga lentamente a través del resistor hasta el siguiente medio ciclo positivo en el cual la señal de entrada se hace mayor que la tensión del capacitor y el diodo conduce de nuevo. El capacitor se carga hasta el nuevo valor pico, etc.

Para una mejor operación, la constante de tiempo de descarga  $RC$  debe ajustarse de manera que la máxima pendiente negativa de la envolvente no exceda nunca la, razón exponencial de descarga. Si esta constante es muy grande, el detector puede perder algunos medios ciclos positivos de la portadora y, en consecuencia, no reproducir con fidelidad la envolvente. Si la constante de tiempo es demasiado pequeña el detector genera una señal muy escabrosa, perdiendo algo de eficiencia.

La señal detectada resultante se pasa de manera usual por un filtro pasabajas para eliminar el contenido armónico no deseado. Para eliminar el nivel de  $cd$  introducido por la portadora, puede usarse un capacitor de acoplamiento. Debido a la presencia de este nivel de  $cd$ , los métodos DSB-LC no son apropiados si se desea una respuesta de frecuencia de  $f(t)$  hasta  $\omega = 0$ .

El detector de envolvente es simple, eficiente y barato, y es de uso casi universal para la detección de señales DSB-LC.

El fácil empleo del detector de envolvente sugiere que quizá estas técnicas también podrían usarse para la detección de señales DSB-SC. Como en estas señales no hay término portador, debe añadirse suficiente portadora en el receptor para hacer posible la detección. Esto se hace a veces para simplificar el diseño del receptor; este tipo de receptor se llama receptor de tipo *portadora inyectada*. Por supuesto, el problema es mantener la portadora en la frecuencia correcta, por lo que tales sistemas tienen problemas de sincronización.

### 5.11.3 OTROS MÉTODOS DE DETECCIÓN

Si el circuito detector de envolvente Fig. 5.31 se conecta a tierra, puede hacerse que el diodo trabaje esencialmente como interruptor, encendiéndose y apagándose al ritmo de la portadora. Como tal acción rectifica la señal modulada, esto se conoce como detector rectificador. Un filtro pasabajos elimina los términos de alta frecuencia después de la rectificación, como se muestra en la figura 5.31.

El detector rectificador no es tan eficiente como el de envolvente, y rara vez se usa en receptores comerciales. Encuentra aplicación en la detección de amplitud de señales pasantes, donde la lenta descarga exponencial del detector de envolvente no es deseable.

[23]

Los métodos de detección síncrona usados para señales DSB-SC se pueden usar también para señales DSB-LC. Por ejemplo, puede emplearse un PLL para sincronizar un oscilador con la frecuencia portadora y esto, a su vez, utilizarse para demodular de manera síncrona la señal. Sin embargo, Tan elaboradas técnicas de recepción se usan rara vez debido a la mayor complejidad en el diseño y operación del receptor.

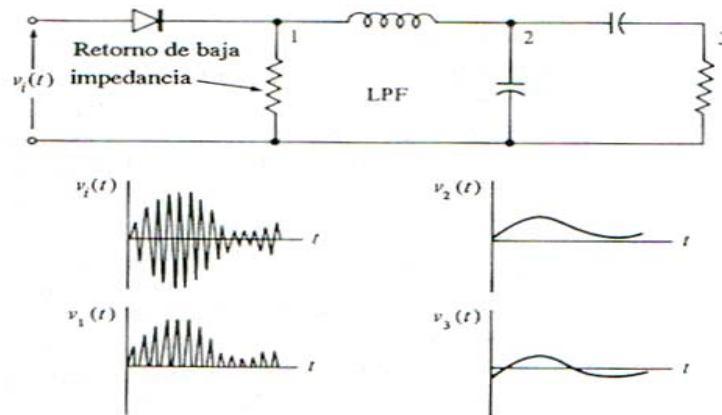


Figura 5.31 Circuito retorno baja impedancia

### 5.12.- MODULACION EN BANDA LATERAL UNICA(SSB)

El sistema de modulación AM se modificó para aumentar la eficiencia al no tener que llevar la portadora. Esto produjo modulación DSB. Sin embargo, analizando el espectro de una señal DSB, se encuentra que aún hay redundancia ya que las dos bandas alrededor de  $f_c$  son simétricas. Por lo tanto bastaría enviar una sola de las dos: la superior o la inferior. Por ejemplo si el mensaje  $x(t)$  tiene el siguiente espectro: ( Fig. 5.32)

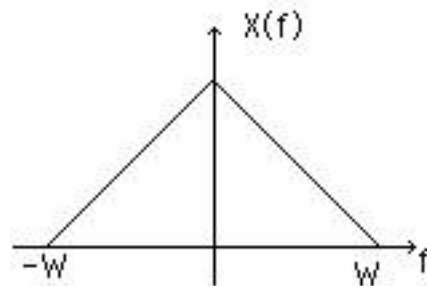


Figura 5.32 Ejemplo de espectro

Se puede tener USSB( Upper Single Side Band o Banda Lateral Superior) o LSSB (Lower Single Side Band o Banda Lateral Inferior)

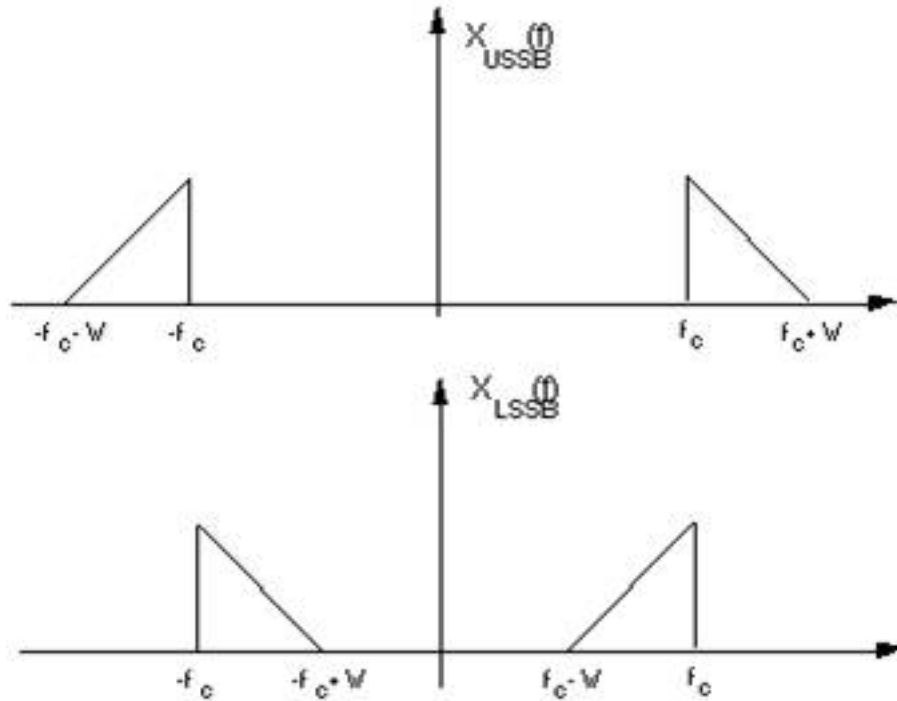


Figura 5.33 Banda lateral inferior y banda lateral superior

- En AM la potencia resultó igual a  $P_c + 2 \text{ PSB}$ . Ahora, en cualquiera de los dos tipos de SSB, la potencia será PSB, es decir:

$$P_{\text{USSB}} = P_{\text{LSSB}} = A_c^2 S_x / 4 \quad (5.40)$$

Por otra parte el ancho de banda de transmisión es  $W$ , la mitad que para AM y DSB.

Como se ha visto hasta ahora, el análisis de SSB en el dominio de la frecuencia es simple, no así en el dominio del tiempo. Antes de intentarlo veremos una herramienta matemática indispensable: la transformada de Hilbert.

### 5.12.1 ANÁLISIS TEMPORAL Y FRECUENCIAL DE UNA SEÑAL SSB

Supongamos que la expresión de la señal SSB es la siguiente:

$$x_{SSB}(t) = \frac{1}{2} A_c \left[ x(t) \cos \omega_c t \pm \hat{x}(t) \sin \omega_c t \right] \quad (5.48)$$

donde  $x(t)$  está limitada en banda. Hagamos el análisis en frecuencia:

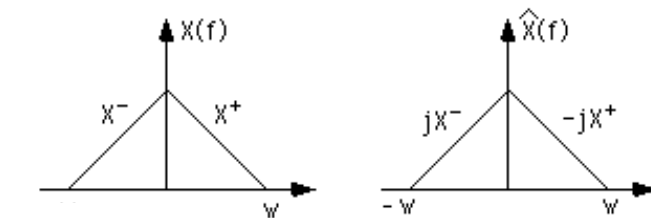


Figura 5.34a

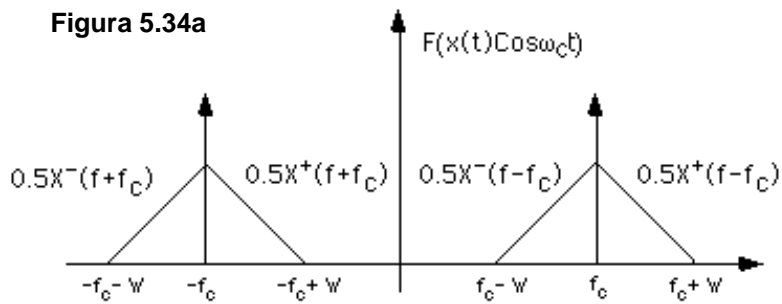


Figura 5.34b

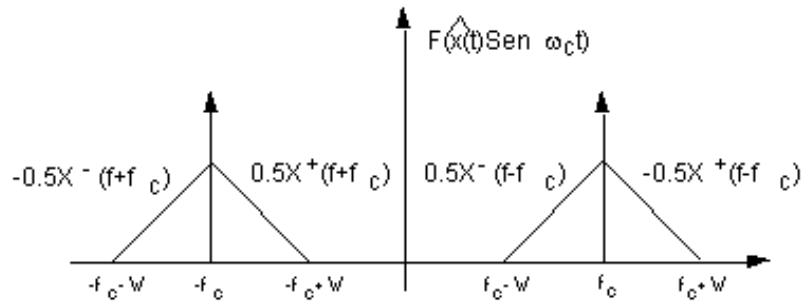


Figura 5.34c

Si se suman estas dos señales, se tendría:

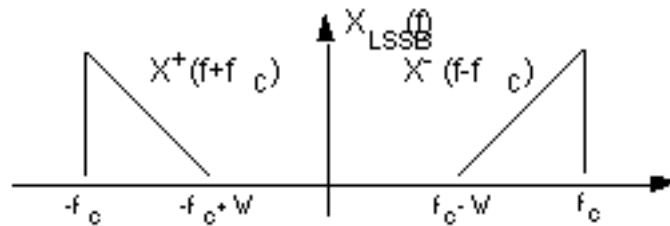


Figura 5.34d

Si se restan:

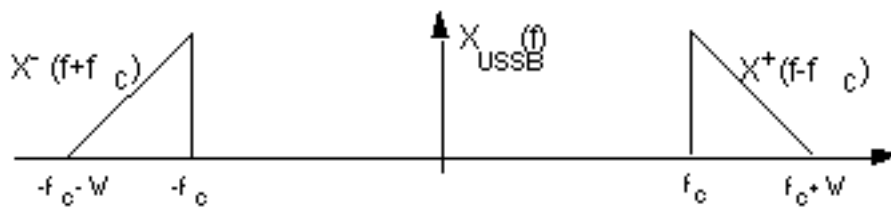


Figura 5.34e

*Figura 5.34 Analisis en frecuencias*

En conclusión: El método de modulación SSB reduce ancho de banda y potencia. Por supuesto la desventaja está en la complicación del modulador y el demodulador.

### 5.12.2 MODULADORES SSB

Existen dos métodos básicos para generar señales SSB: por discriminación de frecuencia y por discriminación de fase.

#### 5.12.2.1 MÉTODOS POR DISCRIMINACIÓN EN FRECUENCIA

Se genera una señal DSB y luego se le elimina una de las bandas con un filtro apropiado.



Figura 5.35 Filtro pasabanda

Si la señal tiene componentes de baja frecuencia, el filtro tiene que ser ideal y esto no es realizable físicamente. Por lo tanto este modulador se puede usar cuando el contenido de baja frecuencia del mensaje sea significativo a partir de una  $f=f_{\text{mín}}$  distinta de cero.

El ancho de la pendiente de rechazo del filtro, debe ser menor a  $2 f_{\text{mín}}$  y esto puede obligar a usar filtros con  $Q$  muy alto ( Si  $f_c$  es grande,  $Q=f_c/BW \gg 1$ ). Una forma de solucionar este problema es utilizar una doble modulación. Es decir se multiplica primero por un tono de frecuencia  $f_1$  pequeña y se usa un filtro de alto  $Q$  (relativamente , ya que  $Q_1=f_1/BW$  es pequeño).

A continuación se eleva el espectro a la frecuencia definitiva y se filtra esta vez con un filtro menos exigente. [19]

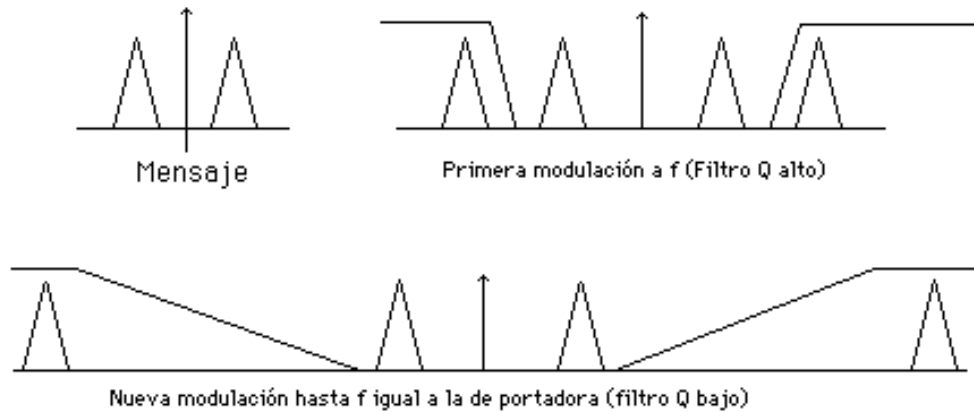


Figura 5.36 Espectro a la frecuencia definitiva y filtrada

Esta es una de las razones por la que en TV no se puede usar SSB, ya que la frecuencia a partir de la cual es importante la información es de 25 Hz. En cambio en telefonía si se presta , ya que  $f_{\text{mín}} = 300$  Hz.

### 5.12.2.2 MODULACIÓN POR DISCRIMINACIÓN DE FASE

:Se basa en la expresión temporal de la señal SSB, y se logra con el siguiente sistema:

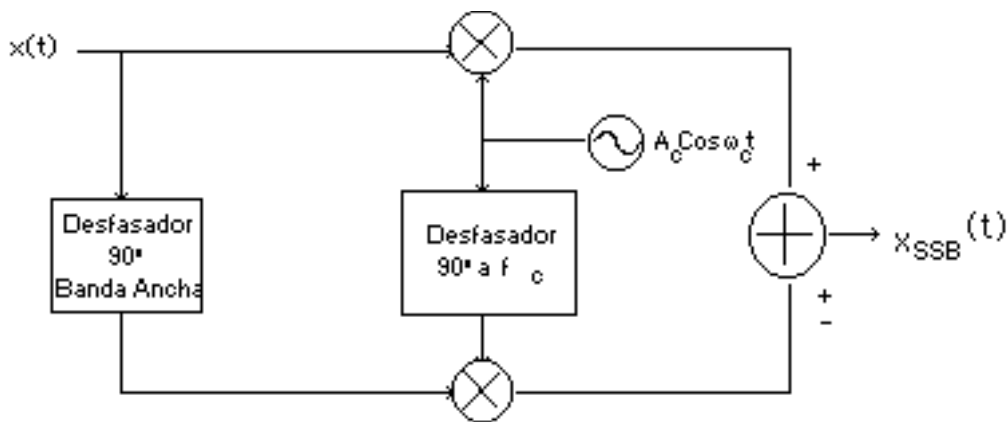


Figura 5.37 Sistema modulador por discriminación de fase



Es difícil lograr un desfasador de 90° de banda infinita; lo que se puede lograr es una banda de trabajo específica o a lo sumo utilizar dos desfasadores cuya diferencia sea siempre de 90°.

Con este tipo de modulador es fácil pasar de USSB a LSSB. Además, como no requiere filtraje, se puede hacer en una sola etapa. Sin embargo el grado de supresión de la banda indeseada depende de:

- La precisión de los mezcladores
- La precisión de la cuadratura de las dos portadoras
- La precisión del desfasador de banda ancha.

En la práctica se logra que la supresión alcance 20 dB, se puede lograr 30 dB y es difícil encontrar 40 dB. [29]

### 5.12.3 DEMODULACIÓN DE ONDAS SSB

#### 5.12.3.1 DETECCIÓN SÍNCRONA:

Al multiplicar la señal SSB por  $\text{Cos } \omega_c t$

$$\begin{aligned}
 x_{\text{SSB}}(t) \text{Cos } \omega_c t &= \frac{1}{2} A_c \left[ x(t) \text{Cos } \omega_c t \pm \hat{x}(t) \text{Sen } \omega_c t \right] \text{Cos } \omega_c t = \\
 &= \frac{A_c}{4} x(t) + \frac{A_c}{4} x(t) \text{Cos} 2 \omega_c t \pm \frac{A_c}{4} \hat{x}(t) \text{Sen} 2 \omega_c t
 \end{aligned}
 \tag{5.49}$$

El filtro pasabajo solo dejaría pasar el primer término, que es precisamente el mensaje. Los efectos que tendría un error de fase o frecuencia de la portadora se analizan posteriormente.

### 5.12.3.2 DETECCIÓN DE SSB CON UN DETECTOR DE ENVOLVENTE

(Compatible Single Side Band).

Supongamos que se envía un tono piloto y al llegar lo amplificamos y sumamos a la señal de entrada.

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \frac{1}{2} A_c \left[ x(t) \cos \omega_c t \pm \hat{x}(t) \sin \omega_c t \right] + A \cos \omega_c t = \\
 & \left( A + \frac{1}{2} A_c x(t) \right) \cos \omega_c t \pm \frac{1}{2} A_c \hat{x}(t) \sin \omega_c t
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

La envolvente de esta señal es  $R(t)$

$$\begin{aligned}
 R(t) &= \sqrt{\left( A + \frac{1}{2} A_c x(t) \right)^2 + \left( \frac{1}{2} A_c \hat{x}(t) \right)^2} \\
 &= \sqrt{A^2 + A A_c x(t) + \frac{A_c^2}{4} \hat{x}(t)^2 + \frac{A_c^2}{4} x(t)^2}
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

Si  $A \gg A_c$ , los dos últimos términos serán despreciables, y el detector de envolvente produciría:

$$\begin{aligned}
 R(t) &= \sqrt{A^2 + A A_c x(t)} \\
 &= A \sqrt{1 + \frac{A_c}{A} x(t)} \approx A \left( 1 + \frac{A_c}{2A} x(t) \right)
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

### 5.13 MODULACION EN DOBLE BANDA LATERAL (DSB)

Se puede definir como AM con la portadora suprimida con el objeto de ahorrar potencia. Este tipo de modulación se usa en comunicación punto a punto donde hay un solo receptor ya que este sería más complejo que en AM.

También se utiliza para colocar los canales derecho e izquierdo ( R y L) en FM estéreo, con el propósito de tener buena reproducción en la zona de baja frecuencia; por esta misma razón, algunos sistemas de telemetría usan el esquema DSB.

Sea  $x(t)$  un mensaje que cumple las condiciones indicadas en la introducción; sea  $x_c(t) = A_c \cos \omega_c t$  la portadora. La señal DSB se expresará como  $x_{DSB}(t) = A_c x(t) \cos \omega_c t$ .

La Figura 5.38 muestra la señal  $x_{DSB}(t)$  para un mensaje  $x(t)$  sinusoidal. Como se ve la envolvente no sigue la forma del mensaje.

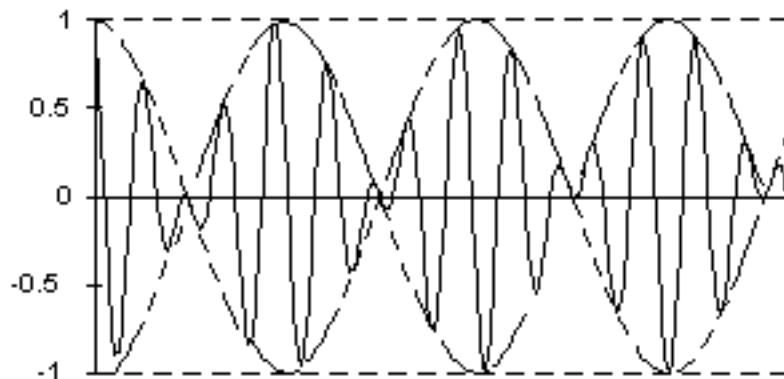


Figura 5.38 Modulación DSB

### 5.13.1 ESPECTRO DE UNA SEÑAL DSB

Supongamos un mensaje  $x(t)$  cuyo espectro ocupa una banda  $W$  tal y como se ilustra:

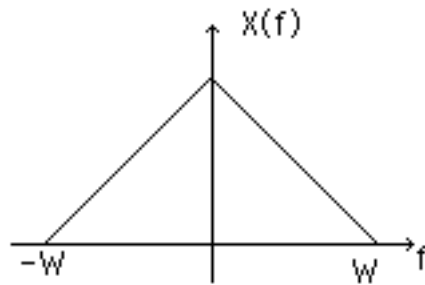


Figura 5.39 Señal de modulador DSB

Al transformar la señal DSB , se tendrá:

$$X_{DSB}(f) = (Ac/2) X(f-f_c) + (Ac/2) X(f+f_c) \quad (5.53)$$

Gráficamente:

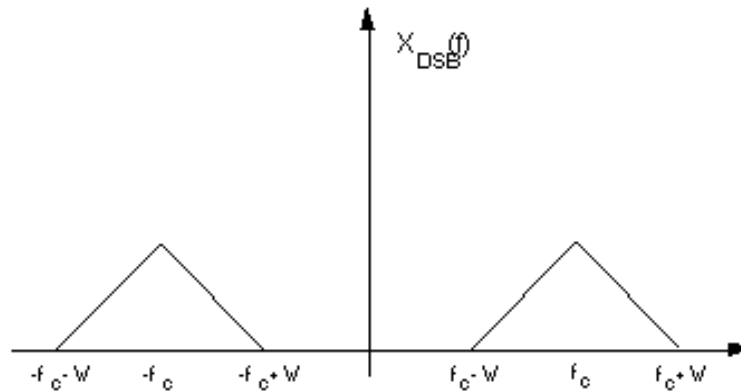


Figura 5.40 Al transformar la señal DSB

Se observa que solo aparece el espectro del mensaje trasladado en frecuencia ( no aparece la portadora) por lo que el ancho de banda es , como en AM, igual a  $2W$ . [27]

### 5.13.2 CÁLCULO DE POTENCIA DE LA SEÑAL DSB

Determinemos la potencia de la señal DSB , promediando el cuadrado de  $x_{DSB}(t)$  .

$$\begin{aligned} \langle (x_{DSB}(t))^2 \rangle &= \langle A^2 x^2(t) \cos^2 \omega_c t \rangle = \\ & \langle 0.5 A^2 x^2(t) \cos 2\omega_c t + 0.5 A^2 x^2(t) \rangle \quad (5.54) \end{aligned}$$

Pero  $\langle x^2(t) \cos 2\omega_c t \rangle = 0$  porque  $x^2(t)$  no coincide en frecuencia con  $\cos 2\omega_c t$  . Así:

$$\langle (x_{DSB}(t))^2 \rangle = \langle 0.5 A^2 x^2(t) \rangle \quad (5.55)$$

Si llamamos  $S_x$  a la potencia del mensaje  $x(t)$  :

$$\langle (x_{\text{DSB}}(t))^2 \rangle = 0.5 A_c^2 S_x = 2 \text{ PSB} \quad (5.56)$$

La eficiencia resulta:

$$\text{Eficiencia} = (2 \text{ PSB} / P_{\text{total}}) \times 100\% = 100\% \quad (5.57)$$

En conclusión podemos decir que DSB es un sistema que produce:

- a) Un ancho de banda de transmisión igual al doble del ancho de banda del mensaje ( $2\omega$ )
- b) Una eficiencia de 100%.

Falta por analizar la complejidad de sus esquemas prácticos de modulación y demodulación, cosa que veremos a continuación.

### 5.13.3 MODULADORES DSB

Para conseguir una señal DSB se necesita básicamente un multiplicador que puede ser analógico o basado en la función logaritmo tal y como se explicó para AM.

Existen otras formas de lograr la modulación DSB:

- a) Utilizando elementos no lineales.
- c) Utilizando 2 moduladores AM ( Modulador balanceado)

## 5.13.3.1 MODULADORES QUE UTILIZAN ELEMENTOS NO LINEALES:



Figura 5.41 Modulador con elementos no lineales

Por ejemplo se pueden usar dispositivos donde :

$$x_{out}(t) = a_1 x_{in}^2(t) . \quad (5.58)$$

Si se tiene  $x_{in}(t) = A_c \cos \omega_c t + x(t)$  (5.59)

$$x_{out}(t) = a_1 ( A_c \cos \omega_c t + x(t) )^2 \quad (5.59)$$

$$x_{out}(t) = a_1 A_c^2 \cos^2 \omega_c t + 2 a_1 A_c x(t) \cos \omega_c t + a_1 x^2(t) \quad (5.60)$$

Los 3 términos están:

Término 1: Ubicado  $f = 2f_c$  y en  $f = 0$

Término 2: Ubicado alrededor de  $f_c$  (Necesario para la señal DSB)

Término 3: Ubicado en banda base, ancho  $2\omega$

Por lo tanto si  $x_{out}(t)$  pasa por un filtro pasabanda ubicado en  $f_c$  con ancho de banda  $2\omega$ , solo quedará:

$x_{out}(t) = 2 a_1 A_c x(t) \cos \omega_c t$  que es una señal DSB.

Como los dispositivos no lineales de ley cuadrática perfecta son difíciles de conseguir, en la práctica se utilizan dos moduladores AM que, combinados como se indica a continuación, producen un modulador balanceado. [26]

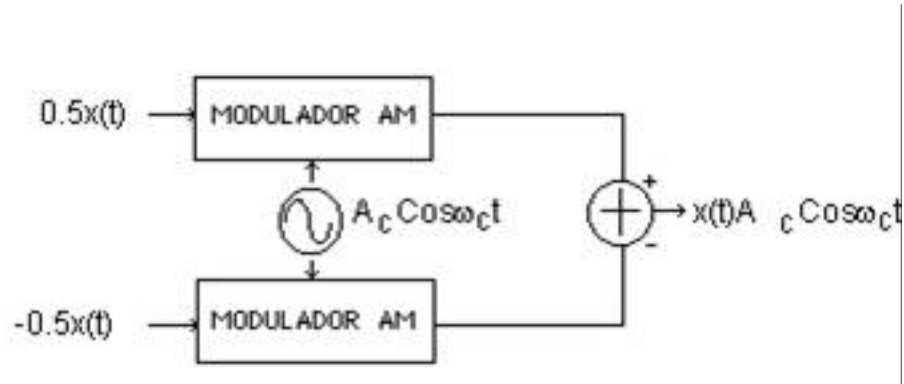


Figura 5.42 Dispositivo no lineal

En la rama superior, (Fig. 5.42) a la salida del modulador AM se tiene

$$A_c (1 + 0.5x(t)) \cos \omega_c t \quad (5.61)$$

En la rama inferior, a la salida del modulador AM se tiene

$$A_c (1 - 0.5x(t)) \cos \omega_c t \quad (5.62)$$

Al restar estas dos señales se obtiene la señal DSB.



### 5.13.4 DEMODULADORES DSB

Para recuperar la señal  $x(t)$  de la señal DSB basta multiplicar esta última por  $\cos\omega_c t$  y luego pasarla por un filtro pasabajo de ancho de banda  $W$  igual al ancho de banda del mensaje. Esto es un detector síncrono. También analizaremos el detector homodino y el receptor de portadora inyectada.

#### 5.13.4.1 DETECTOR SÍNCRONO

La figura muestra el esquema de un detector síncrono el cual simplemente multiplica la señal DSB por la portadora y luego se obtiene el mensaje al filtrar con un pasabajo. (Fig. 5.43)

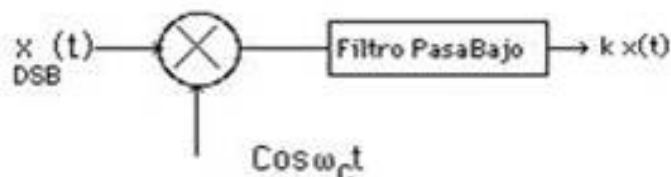


Figura 5.43 Detector síncrono

Observe que se asume que el receptor tiene una muestra de la portadora de la misma frecuencia y fase que la usada en el modulador (Fig. 5.43). El efecto que tendría un error de fase o frecuencia en el demodulador será analizado posteriormente.

### 5.13.4.2 DETECCIÓN HOMODINA:

Se puede enviar una pequeña muestra de la portadora y amplificarla en el receptor para luego detectar en forma síncrona. En realidad esta señal se usa más para enganchar un oscilador en el receptor que como oscilador mismo.(Fig. 5.44)

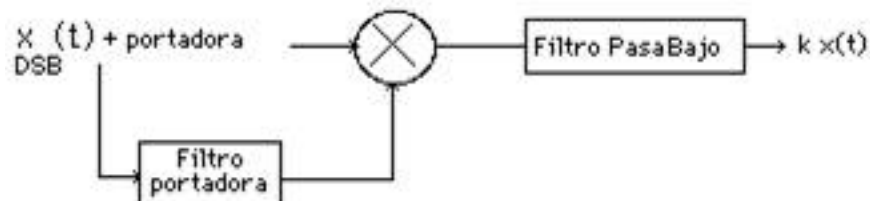


Figura 5.44 Detector homodina

### 5.13.4.3 RECEPTOR DE PORTADORA INYECTADA:

También se manda una porción de portadora. En el receptor se separa la portadora, se amplifica y luego se suma a la señal recibida. Finalmente se utiliza un detector de envolvente. (Fig. 5.45)

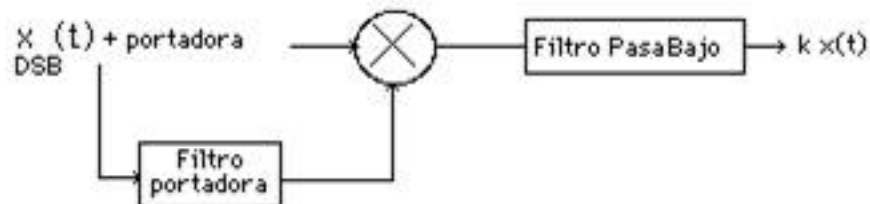


Figura 5.45 Receptor de portadora inyectada

### 5.14 MODULACION EN BANDA LATERAL RESIDUAL Ó VESTIGIAL(VSB)

Cuando se quiere ahorrar ancho de banda, la modulación SSB parece la más adecuada. Sin embargo, dado que es imposible eliminar exactamente la banda indeseada, este esquema de modulación produce una mala reproducción de las bajas frecuencias; además es bastante complicado generarla y detectarla. Aparece entonces un esquema de modulación que mejora estos dos últimos problemas a cambio de un ligero aumento del ancho de banda. Esto produce VSB o banda lateral vestigial, que deja pasar casi completamente una banda y un vestigio de la otra tal y como se muestra a continuación. La aplicación más difundida de VSB es en TV comercial. La señal VSB puede ser vista como una señal DSB filtrada de manera muy particular. Las características de dicho filtro se deducen imponiendo como condición que el mensaje se pueda recuperar con un detector síncrono como en todos los otros métodos de modulación lineal. Veamos este análisis: [25]

#### TRANSMISOR:

la señal DSB tiene un espectro de la siguiente forma

$$X_{DSB}(f) = A_c/2 [ X(f-f_c) + X(f+f_c) ] \quad (5.63)$$

Al pasarla por el filtro VSB:

$$X_{VSB}(f) = A_c/2 [ X(f-f_c) + X(f+f_c) ] H(f) \quad (5.64)$$

#### RECEPTOR

: Si se quiere recuperar el mensaje con un detector síncrono, el cual lo primero que hace es multiplicar la señal VSB por un tono de frecuencia  $f_c$ , se tendría lo siguiente:

$$A / 2 [ X_{VSB} (f-f_c) + X_{VSB} (f+f_c) ] =$$

$$\frac{A_c}{2} \frac{A}{2} \left\{ [ X(f) + X(f + 2f_c) ] H (f + f_c) + [X(f) + X(f - 2f_c)] H (f - f_c) \right\} =$$

$$\frac{A A_c}{4} \left\{ X(f) [H (f + f_c) + H (f - f_c)] + X(f + 2f_c) H (f + f_c) + X(f - 2f_c) H (f - f_c) \right\} \quad (5.65)$$

Al pasar por el filtro pasabajo del detector síncrono, solo queda:

$$\frac{A A_c}{4} X(f) [H (f + f_c) + H (f - f_c)] = K X(f) \quad (5.66)$$

Para esto,  $[H (f+f_c) + H (f-f_c) ] = \text{constante}$  para  $|f| \leq W$ . Esto sería posible si  $H(f)$  fuese por ejemplo cualquiera de las dos respuestas siguientes(Fig.:5.46)

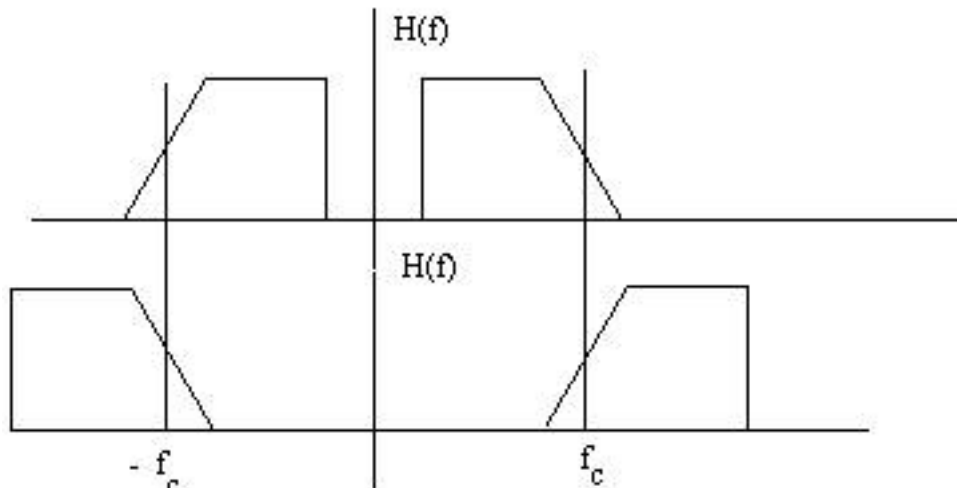


Figura 5.46 señal filtrada con basabajo del detector síncrono

Es decir, debe existir cierta simetría en el filtro alrededor de la frecuencia de la portadora.

Dependiendo del filtro elegido, se tendría LVSB o UVSB. De este análisis se deduce que:

- El ancho de banda de la señal VSB =  $\omega + \Delta\omega$ , donde  $\Delta\omega$  es el ancho del vestigio de la banda que no pasa.
- -La potencia de la señal VSB será:

$$\frac{A_c^2 \overline{x^2}}{4} \leq P_{VSB} \leq \frac{A_c^2 \overline{x^2}}{2} \quad (5.67)$$

### 5.14.1 REPRESENTACIÓN EN TIEMPO DE UNA SEÑAL VSB.

Si llamamos  $h(t)$  a la respuesta impulsiva del filtro VSB, tendremos que:

$$x_{VSB}(t) = A_c x(t) \cos \omega_c t * h(t)$$

$$A_c \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) \cos \omega_c (t-\tau) d\tau \quad (5.68)$$

$$A_c \cos \omega_c t \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) \cos \omega_c \tau d\tau + A_c \sin \omega_c t \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) \sin \omega_c \tau d\tau \quad (5.69)$$

Pero:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) \cos \omega_c \tau d\tau = x(t) * h(t) \cos \omega_c t \quad (5.70)$$

lo que en frecuencia sería  $X(f) [ H(f+fc) + H(f-fc) ] / 2 = X(f)/2$  debido a la simetría del filtro vestigial y suponiendo  $H(fc) = H(-fc) = 0.5$

Por otra parte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) \text{Sen } \omega_c \tau \, d\tau = x(t) * h(t) \text{Sen } \omega_c t$$

y en frecuencia esto sería  $X(f) [ H(f-fc) - H(f+fc) ] / 2j = X(f) HQ(f) / 2$  (5.71)

Finalmente entonces:

$$x_{\text{VSB}}(t) = 0.5A_c x(t) \text{Cos } \omega_c t + 0.5A_c x_Q(t) \text{Sen } \omega_c t \quad (5.72)$$

donde  $x_Q(t)$  es la señal  $x(t)$  filtrada a través del filtro  $HQ(f)$ .

Observe el parecido en la expresión temporal de la señal VSB con la de la señal SSB.

### 5.14.2 MODULADORES VSB

Se puede obtener una señal VSB con cualquiera de dos esquemas circuitales: uno basado en la expresión temporal, y el otro basado en el análisis frecuencial.

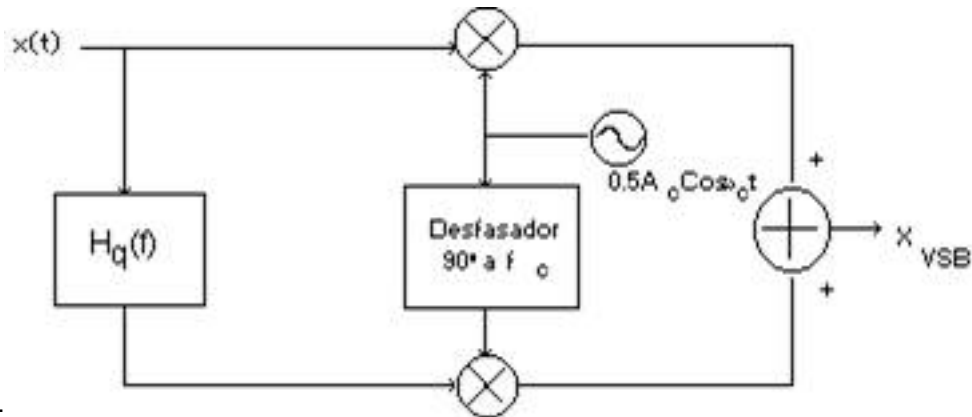


Figura 5.47 Modulador VSB

Se genera VSB con dos ondas DSB moduladas con dos portadoras en cuadratura ( Sen y Cos).

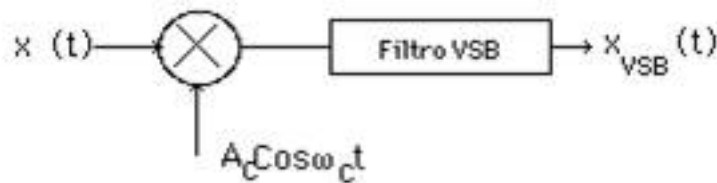


Figura 5.48 Filtro VSB

Para la aplicación de TV comercial , no se envía estrictamente la señal VSB que hemos analizado, sino que en el transmisor se filtra la señal en forma simple eliminando la banda indeseada sin un control estricto, y es en el receptor cuando se termina de conformar la característica VSB. Esto se hace así, ya que es más fácil darle la forma adecuada al espectro en el receptor porque con niveles de potencia más bajos se alcanza una menor distorsión

### 5.14.3 DEMODULADORES VSB

De la expresión temporal de la señal VSB se observa que el mensaje se puede rescatar con un detector síncrono; sin embargo como la principal aplicación de VSB es la transmisión de señales de televisión, en donde se tienen muchos receptores, el sistema de demodulación empleado es el basado en un detector de envolvente. Para esto es necesario agregar a la señal VSB la portadora.

Suponga:

$$\begin{aligned}
 x_{\text{VSB}(t)} + \text{portadora} &= \frac{1}{2} A_c \left[ x(t) \cos \omega_c t \pm x_q(t) \sin \omega_c t \right] + A \cos \omega_c t = \\
 & \left( A + \frac{1}{2} A_c x(t) \right) \cos \omega_c t \pm \frac{1}{2} A_c x_q(t) \sin \omega_c t
 \end{aligned} \tag{5.73}$$

$$\begin{aligned}
 R(t) &= \sqrt{\left( A + \frac{1}{2} A_c x(t) \right)^2 + \left( \frac{1}{2} A_c x_q(t) \right)^2} \\
 &= \left( A + \frac{1}{2} A_c x(t) \right) \sqrt{1 + \left( \frac{\left( \frac{A_c}{2} x_q(t) \right)}{\left( A + \frac{1}{2} A_c x(t) \right)} \right)^2}
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

Para que el término encerrado en la raíz tienda a 1, tiene que cumplirse que:



a)  $A \gg Ac$  y b)  $xq(t)$  sea pequeña.

Como  $x(t)$  es pasada por un filtro cuya magnitud es más o menos de la siguiente forma:

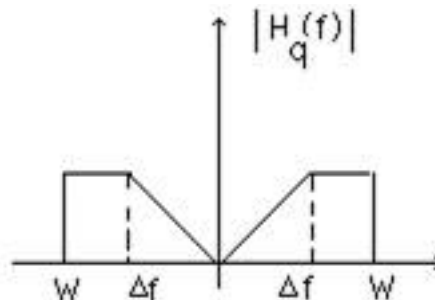


Figura 5.49 Señal filtrada

Si  $\omega f$  es grande, pasa menos señal ( la banda de rechazo es más grande).

En TV se utiliza un vestigio de 0.75 MHz el cual es aproximadamente 1/6 del ancho de banda total; de esta forma no es necesario un valor de A muy grande.

## 5.15 MODULACIÓN DE FRECUENCIA

### 5.15.1 Modulación de frecuencia de banda angosta

Consideremos el caso de la modulación de frecuencia con una señal

$$x(t) = A \cos \omega_m t. \quad (5.75)$$

la frecuencia instantánea es

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f A \cos \omega_m t, \quad (5.76)$$

a cual varía senoidalmente entre  $\omega_c + k_f A$  y  $\omega_c - k_f A$ . Con

$$\Delta\omega = k_f A,$$

tenemos

$$\omega_i(t) = \omega_c + \Delta\omega \cos \omega_m t,$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos\left[\omega_c t + \int x(t) dt\right] \\ &= \cos\left(\omega_c t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \sin \omega_m t + \theta_0\right), \end{aligned} \quad (5.77)$$

donde  $\theta_0$  es una constante de integración. Por conveniencia escogeremos  $\theta_0 = 0$ , de manera que

$$y(t) = \cos\left[\omega_c t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \sin \omega_m t\right]. \quad (5.78)$$

El factor  $\Delta\omega/\omega_m$ , el cual denotaremos con  $m$ , se define como el *índice de modulación* para la modulación de frecuencia. Las propiedades de los sistemas de FM tienden a ser diferentes dependiendo de si el índice de modulación  $m$  es pequeño o grande. El caso para el cual  $m$  es pequeño se conoce como *FM de banda angosta*. En general, podemos reescribir la ecuación (5.78) como

$$y(t) = \cos(\omega_c t + m \sin \omega_m t) \quad (5.79)$$

o

$$y(t) = \cos \omega_c t \cos(m \sin \omega_m t) - \sin \omega_c t \sin(m \sin \omega_m t). \quad (5.80)$$

Cuando  $m$  es lo suficientemente pequeña ( $\ll \pi/2$ ), podemos hacer las siguientes

aproximaciones:

$$\cos(m \operatorname{sen} \omega_m t) \approx 1, \quad (5.81)$$

$$\operatorname{sen}(m \operatorname{sen} \omega_m t) \approx m \operatorname{sen} \omega_m t, \quad (5.82)$$

de manera que la ecuación (5.79) se convierte en

$$y(t) \approx \cos \omega_c t - m(\operatorname{sen} \omega_m t)(\operatorname{sen} \omega_c t). \quad (5.83)$$

El espectro  $y(t)$  basado en esta aproximación se muestra en la figura 5.50. Podemos observar que tiene una similitud con la AM-DSB/WC en que la frecuencia de la portadora está presente en el espectro y hay bandas laterales que representan el espectro de la señal moduladora en la ecuación (5.75). Sin embargo, en la AM-DSB/WC la portadora adicional introducida está en fase con la portadora modulada, mientras que, como vemos en la ecuación (5.83) para el caso de FM de banda angosta, la señal portadora tiene una diferencia de fase de  $\pi/2$  en relación con la portadora de amplitud modulada. Las formas de onda correspondientes a la AM-DSB/WC y a la FM también son muy diferentes. La figura 5.51(a) ilustra la forma de onda de la FM de banda angosta correspondiente a la ecuación (5.83). Para su comparación, en la figura 5.51(b) mostramos la señal AM-DSB/WC

$$y_2(t) = \cos \omega_c t + m(\cos \omega_m t)(\cos \omega_c t). \quad (5.84)$$

Para la señal FM de banda angosta descrita por la ecuación (5.83), el ancho de banda de las

bandas laterales es igual al ancho de banda de la señal moduladora y, en particular, aunque la aproximación en la ecuación se basa en la consideración de que  $m \ll \pi/2$ , el ancho de banda de las bandas laterales es, en cualquier otro caso, independiente del índice de modulación  $m$  (es decir, depende sólo del ancho de banda de la señal moduladora, no de su amplitud). Un enunciado similar se aplica para la FM de banda angosta con una señal moduladora más genera

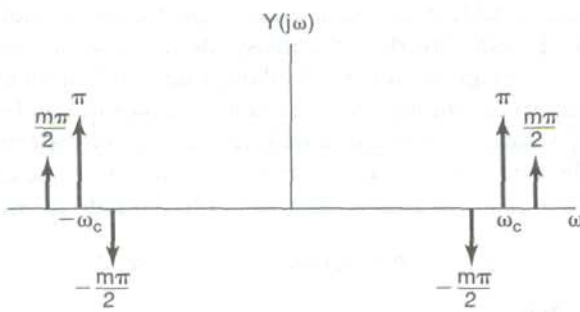
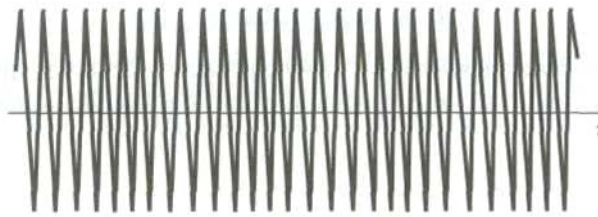
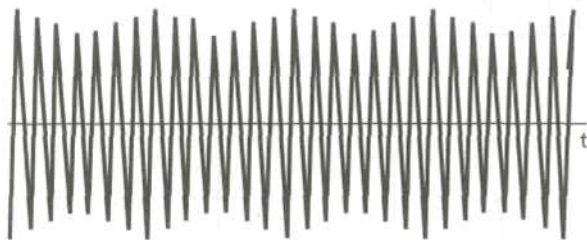


Figura 5.50 Espectroaproximado para Fm de banda angosta



(a)



(b)

Figura 5.51 Comparacion de FM de banda angosta y AM\_DSB a) FM de banda angosta b) AM\_DSB

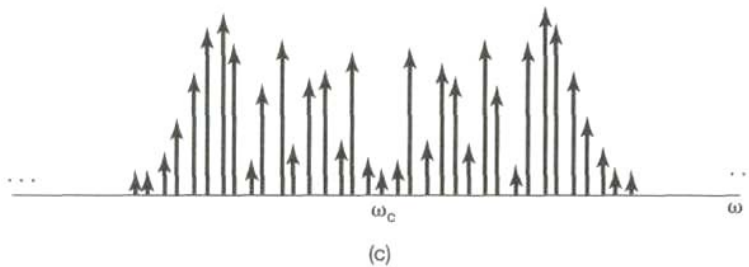
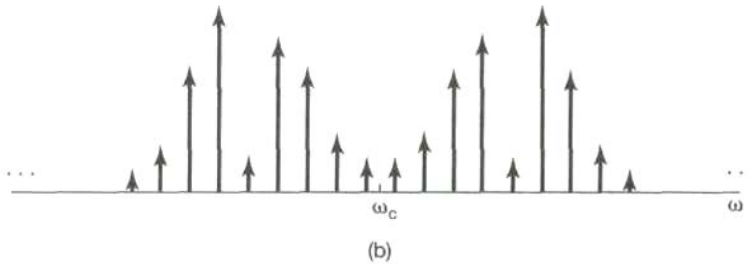
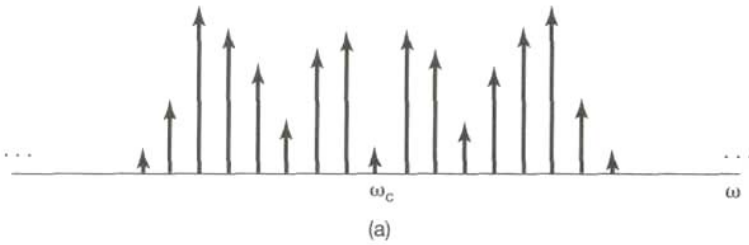
### 5.15.2 Modulación de frecuencia de banda ancha

Cuando  $m$  es grande, la aproximación que conduce a la ecuación (5.83) ya no se aplica y el espectro de  $y(t)$  depende tanto de la amplitud como del espectro de la señal moduladora  $x(t)$ . Con  $y(t)$  expresada en la forma de la ecuación (5.80), notamos que los términos  $\cos[m \sin \omega_m t]$  y  $\sin[m \sin \omega_m t]$  son señales periódicas con frecuencia fundamental  $\omega_m$ . Por lo tanto, la transformada de Fourier de cada una de estas señales es un tren de impulsos con los impulsos situados en múltiplos enteros de  $\omega_m$  y amplitudes proporcionales a los coeficientes de la serie de Fourier. Los coeficientes para estas dos señales periódicas involucran una clase de funciones conocidas como funciones Bessel de primera clase. El primer término de la ecuación (5.80) corresponde a una portadora senoidal de la forma  $\cos \omega_c t$  modulada en amplitud por la señal periódica  $\cos[m \sin \omega_m t]$ , y el segundo término es una portadora senoidal  $\sin \omega_c t$  modulada en amplitud por la señal periódica  $\sin[m \sin \omega_m t]$ . La multiplicación por las señales portadoras tiene el efecto, en el dominio de la frecuencia, de trasladar el espectro de la ecuación (5.80) a la frecuencia de la portadora, de modo que éste se centra en más y menos  $\omega_c$ . En la figura 5.52(a) y (b) ilustramos, para  $\omega > 0$ , la magnitud de los espectros de los dos términos individuales de la ecuación (5.80), y en la figura 5.52(c) la magnitud del espectro combinado que representa la señal modulada  $y(t)$ . El espectro de  $y(t)$  consiste de impulsos a frecuencias  $\pm\omega_c + n\omega_m$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , y no es, estrictamente hablando, de banda limitada alrededor de  $\pm\omega_c$ . Sin embargo, el comportamiento de los coeficientes de la serie de Fourier de  $\cos[m \sin \omega_m t]$  y  $\sin[m \sin \omega_m t]$  es tal que la amplitud de la  $n$ -ésima armónica para  $|n| > m$  puede considerarse despreciable, y de este modo, el ancho de banda total  $B$  de cada banda lateral centrada alrededor de  $+\omega_c$  y  $-\omega_c$  estará efectivamente limitado a  $2m\omega_m$ . Es decir,

$$B \approx 2m\omega_m, \tag{5.85}$$

o, ya que  $m = k_f A / \omega_m = \Delta\omega / \omega_m$ , (5.86)

$$B \approx 2k_f A = 2\Delta\omega.$$



*Figura 5.52 Magnitud del espectro de la modulación de frecuencia banda amplia*

Comparando las ecuaciones (5.76) y (5.86), podemos observar que el ancho de banda efectivo de cada banda lateral es igual a la excursión total de la frecuencia instantánea alrededor de la frecuencia de la portadora. Por lo tanto, para FM de banda ancha, ya que damos por sentado que  $m$  es grande, el ancho de banda de la señal modulada es mucho más grande que el ancho de banda de la señal moduladora y, en contraste con el caso de banda angosta, el ancho de banda de la señal transmitida en FM de banda amplia es

directamente proporcional a la amplitud  $A$  de la señal moduladora y al factor de ganancia  $k_f$ .

# ANEXOS



## ANEXO

## PROBLEMAS DE CAPITULO 2 (SEÑALES)

**P1.1** Expresé cada uno de los siguientes números complejos en forma cartesiana ( $x + jy$ ):

$$\frac{1}{2}e^{j\pi}, \frac{1}{2}e^{-j\pi}, e^{j\pi/2}, e^{-j\pi/2}, e^{j5\pi/2}, \sqrt{2}e^{j\pi/4}, \sqrt{2}e^{j9\pi/4}, \sqrt{2}e^{-j9\pi/4}, \sqrt{2}e^{-j\pi/4}.$$

**P.1.2** Expresé cada uno de los siguientes números complejos en forma polar  $re^{j\theta}$ , con

$$-\pi < \theta \leq \pi): 5, -2, -3j, \frac{1}{2}\sqrt{3}j, 1 + j, (1 - j)^2, j(1 - j), (1 + j)/(1 - j), (\sqrt{2} + j\sqrt{2})/(1 + j\sqrt{3}).$$

**P1.3** Determine los valores de  $P_\infty$  y  $E_\infty$  para cada una de las siguientes señales:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} x_1(t) = e^{-2t}u(t) & \text{(b)} x_2(t) = e^{j(2t + \pi/4)} & \text{(c)} x_3(t) = \cos(t) \\ \text{(d)} x_1[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] & \text{(e)} x_2[n] = e^{j(\pi/2n + \pi/8)} & \text{(f)} x_3[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n) \end{array}$$

**P1.4** Sea  $x[n]$  una señal con  $x[n] = 0$  para  $n < -2$  y  $n > 4$ . Para cada señal muestra de abajo, determine los valores de  $n$  para los cuales se garantiza que es cero.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} x[n - 3] & \text{(b)} x[n + 4] & \text{(c)} x[-n] \\ \text{(d)} x[-n + 2] & \text{(e)} x[-n - 2] & \end{array}$$

**P1.5** Sea  $x(t)$  una señal con  $x(t) = 0$  para  $t < 3$ . Para cada señal dada, determine los valores de  $t$  para los cuales se garantiza que es cero.

- (a)  $x(1-t)$                       (b)  $x(1-t) + x(2-t)$     (c)  $x(1-t)x(2-t)$   
 (d)  $x(3t)$                         (e)  $x(t/3)$

**P1.6** Determine si cada una de las siguientes señales es o no periódica:

- (a)  $x_1(t) = 2e^{j(t+\pi/4)}u(t)$                                       (b)  $x_2[n] = u[n] + u[-n]$   
 (c)  $x_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta[n-4k] - \delta[n-1-4k]\}$

**P1.7** Para cada una de las siguientes señales, determine todos los valores de la variable independiente para los cuales se garantice que la parte par de la señal es cero.

- (a)  $x_1[n] = u[n] - u[n-4]$     (b)  $x_2(t) = \text{sen}(\frac{1}{2}t)$   
 (c)  $x_3[n] = (\frac{1}{2})^n u[n-3]$       (d)  $x_4(t) = e^{-5t}u(t+2)$

**P1.8.** Exprese la parte real de cada señal en la forma  $Ae^{-at}\cos(\omega t + \theta)$ , donde  $A, a, \omega$  y  $\theta$  son números reales con  $A > 0$   $-\pi < \theta \leq \pi$ :

- (a)  $x_1(t) = -2$                       (b)  $x_2(t) = \sqrt{2}e^{j\pi/4}\cos(3t + 2\pi)$   
 (c)  $x_3(t) = e^{-t}\text{sen}(3t + \pi)$     (d)  $x_4(t) = je^{(-2+j100)t}$

**P1.9.** Determine si cada una de las siguientes señales es o no periódica. Si una señal es periódica, especifique su periodo fundamental.

- (a)  $x_1(t) = je^{j10t}$                       (b)  $x_2(t) = e^{(-1+j)t}$                       (c)  $x_3[n] = e^{j7\pi n}$   
 (d)  $x_4[n] = 3e^{j3\pi(n+1/2)/5}$                       (e)  $x_5[n] = 3e^{j3/5(n+1/2)}$

**P1.10.** Determine el periodo fundamental de la señal  $x(t) = 2 \cos(10t + 1) - \sin(4t - 1)$ .

**P1.11.** Determine el periodo fundamental de la señal  $x[n] = 1 + e^{j4\pi n/7} - e^{j2\pi n/5}$ .

**P1.12.** Considere la señal discreta

$$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n - 1 - k].$$

Determine los valores de los enteros  $M$  y  $n_0$  de manera que  $x[n]$  se exprese como

$$x[n] = u[Mn - n_0].$$

**P1.13.** Considere la señal continua

$$x(t) = \delta(t + 2) - \delta(t - 2).$$

Calcule el valor de  $E$  para la señal

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau.$$

**P1.14.** Considere una señal periódica

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ -2, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

con periodo  $T = 2$ . La derivada de esta señal está relacionada con el "tren de impulsos"

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k)$$

con periodo  $T = 2$ . Puede demostrarse que

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1g(t - t_1) + A_2g(t - t_2)$$

Determine los valores de  $A_1$ ,  $t_1$ ,  $A_2$  y  $t_2$ .

**P1.15.** Considere un sistema  $S$  con entrada  $x[n]$  y salida  $y[n]$ . Este sistema se obtiene mediante una interconexión en serie de relaciones entrada-salida para  $S_1$  y  $S_2$  son un

$$S_1: \quad y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n - 1],$$

$$S_2: \quad y_2[n] = x_2[n - 2] + \frac{1}{2}x_2[n - 3],$$

sistema  $S_1$  seguido por un sistema  $S_2$ .

donde  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  denotan señales de entrada.

- a) Determine la relación entrada-salida del sistema  $S$ .
- b) ¿Cambia la relación entrada-salida del sistema  $S$  si el orden en el que están conectados  $S_1$  y  $S_2$  se invierte (es decir, si  $S_2$  sigue a  $S_1$ )?

Considere un sistema discreto con entrada  $x[n]$  y salida  $y[n]$ . La relación entrada-

salida para este sistema es  $y[n] = x[n]x[n - 2]$ .

- (a) ¿El sistema es sin memoria?
- (b) Determine la salida del sistema cuando la entrada es  $A\delta[n]$ , donde  $A$  es un número

real o complejo.

(c) ¿El sistema es invertible?

**P1.17.** Considere un sistema continuo con entrada  $x(t)$  y salida  $y(t)$  relacionada mediante

$$y(t) = x(\sin(t)).$$

(a) ¿El sistema es causal?

(b) ¿El sistema es lineal?

**P1.18.** Considere un sistema discreto con entrada  $x[n]$  y salida  $y[n]$  relacionadas mediante

$$y[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k],$$

donde  $n_0$  es un entero positivo finito.

(a) ¿El sistema es lineal?

(b) ¿El sistema es invariante en el tiempo?

(c) Si se sabe que  $x[n]$  es limitada por un entero finito  $B$  (es decir,  $|x[n]| < B$  para toda  $n$ ), se puede demostrar que  $y[n]$  está limitada por un número finito  $C$ .

Concluimos así que el sistema dado es estable. Expresé  $C$  en términos de  $B$  y  $n_0$ .

**P1.19.** Para cada relación entrada-salida, determine si el sistema correspondiente es lineal, invariante en el tiempo o ambos.

(a)  $y(t) = t^2 x(t - 1)$

(c)  $y[n] = x[n + 1] - x[n - 1]$

(b)  $y[n] = x^2[n - 2]$

(d)  $y[n] = \mathcal{O}_d\{x(t)\}$

**P1.20.** Un sistema lineal continuo  $S$  con entrada  $x(t)$  y salida  $y(t)$  produce el siguiente par de relaciones entrada-salida:

$$x(t) = e^{j2t} \xrightarrow{S} y(t) = e^{j3t},$$

$$x(t) = e^{-j2t} \xrightarrow{S} y(t) = e^{-j3t}.$$

- (a) Si  $x_1(t) = \cos(2t)$ , determine la salida correspondiente  $y_1(t)$  para el sistema  $S$ .
- (b) Si  $x_2(t) = \cos(2(t-1/2))$ , determine la salida correspondiente  $y_2(t)$  para el sistema  $S$ .

**P1.21.** Una señal continua  $x(t)$  se muestra en la figura P1.21. Dibuje y marque cuidadosamente cada una de las siguientes señales:

- |                        |                          |   |
|------------------------|--------------------------|---|
| (a) $x(t-1)$           | (b) $x(2-t)$             | (c) $x(2t+1)$   |
| (d) $x(4-\frac{t}{2})$ | (e) $[x(t) + x(-t)]u(t)$ | (f) $x(t)[\delta(t + \frac{\pi}{2}) - \delta(t - \frac{\pi}{2})]$ |

**P1.22.** Una señal discreta se muestra en la figura P1.22. Dibuje y marque cuidadosamente cada una de las siguientes señales:

- |  |                  |                         |
|--|------------------|-------------------------|
| (a) $x[n-4]$                                   | (b) $x[3-n]$     | (c) $x[3n]$             |
| (d) $x[3n+1]$                                  | (e) $x[n]u[3-n]$ | (f) $x[n-2]\delta[n-2]$ |
| (g) $\frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$ | (h) $x[(n-1)^2]$ |                         |

Figura P1.21

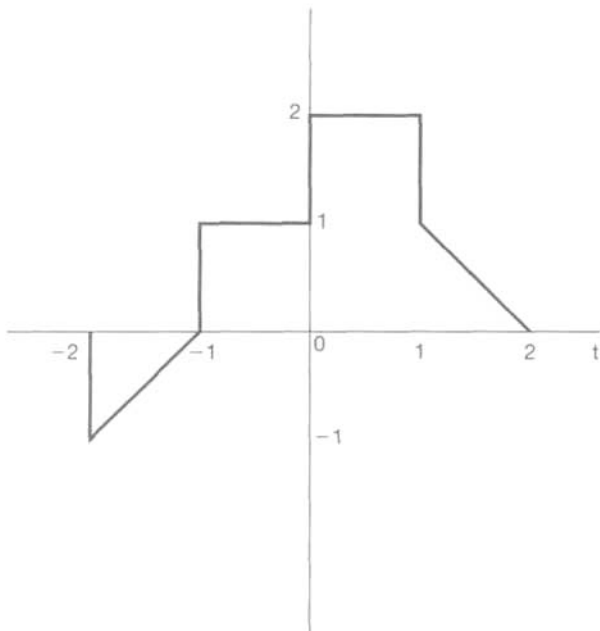
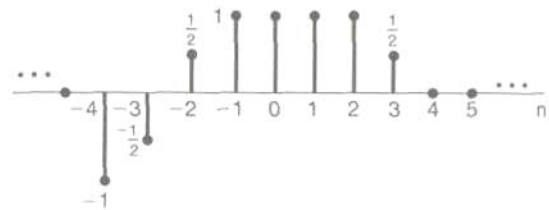
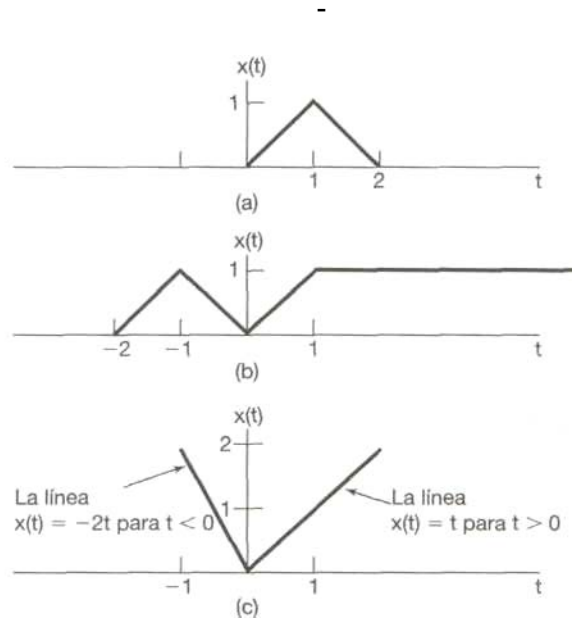


Figura P1.22



**P1.23.** Determine y dibuje las partes par e impar de las señales ilustradas en la figura P1.23. Etiquete cuidadosamente los dibujos.



**Figura P1.23P1.24.** Determine y dibuje las partes par e impar de las señales mostradas en la figura P1.24. Etiquete cuidadosamente los dibujos.



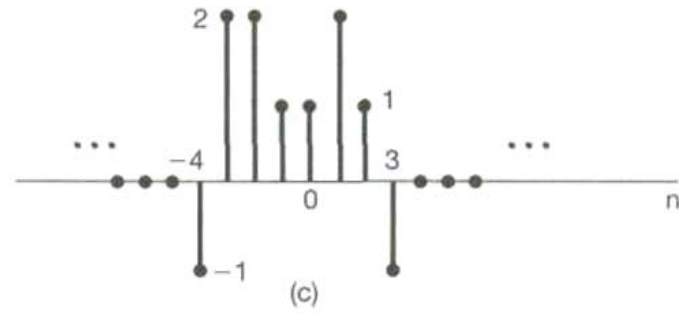
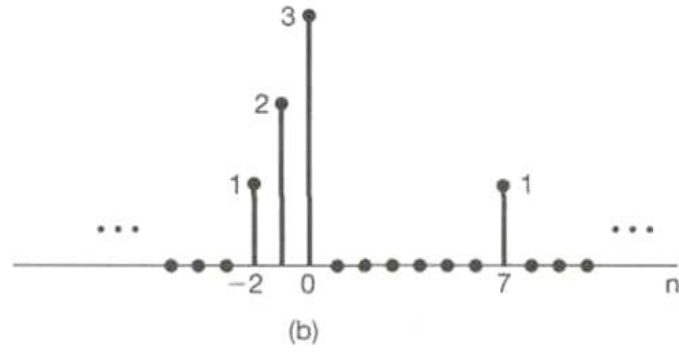
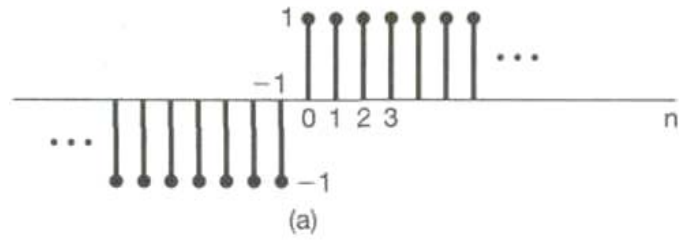


Figura P1.24

**P1.25.** Determine si cada una de las siguientes señales continuas es periódica o no. Si la señal es periódica, determine su periodo fundamental.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \ x(t) = 3 \cos(4t + \frac{\pi}{3}) & \text{(b)} \ x(t) = e^{j(\pi t - 1)} \\
 \text{(c)} \ x(t) = [\cos(2t - \frac{\pi}{3})]^2 & \text{(d)} \ x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \cos(4\pi t) u(t) \\
 \text{(e)} \ x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sin(4\pi t) u(t) & \text{(f)} \ x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(2t-n)}
 \end{array}$$

**P1.26.** Determine si cada una de las siguientes señales discretas es periódica o no lo es. Si la señal es periódica, determine su periodo fundamental.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \ x[n] = \sin(\frac{6\pi}{7}n + 1) & \text{(b)} \ x[n] = \cos(\frac{n}{8} - \pi) & \text{(c)} \ x[3 - n] \\
 \text{(d)} \ x[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n) \cos(\frac{\pi}{4}n) & \text{(e)} \ x[n] = 2 \cos(\frac{\pi}{4}n) + \sin(\frac{\pi}{8}n) - 2 \cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6})
 \end{array}$$

**P1.27.** En este capítulo presentamos varias propiedades de los sistemas. En particular, un sistema puede ser o puede no ser

**P1.28.** Sin memoria

- (1) Invariante en el tiempo
- (2) Lineal
- (3) Causal
- (4) Estable

Determine, para cada uno de los siguientes sistemas continuo, cuál de estas propiedades se cumple y cuál no. Presente argumentos que justifiquen sus respuestas. En cada ejemplo,  $y(t)$  denota la salida y  $x(t)$  la entrada del sistema.

Determine, para cada uno de los siguientes sistemas discretos, cuál de las propiedades enumeradas en el problemas 1.27 se cumple y cuál no se cumple. Ofrezca argumentos que justifiquen sus respuestas. En cada ejemplo,  $y[n]$  denota la salida y  $x[n]$  la entrada del sistema.

(a) $y(t) = x(t - 2) + x(2 - t)$	(b) $y(t) = [\cos(3t)]x(t)$
(c) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$	(d) $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t - 2), & t \geq 0 \end{cases}$
(e) $y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t - 2), & x(t) \geq 0 \end{cases}$	(f) $y(t) = x(t/3)$
(g) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	

1.29. (a) Demuestre que el sistema discreto es aditivo, en donde la entrada  $x[n]$  y la salida  $y[n]$  están relacionadas por  $y[n] = \text{Re}\{x[n]\}$ . ¿Este sistema sigue siendo aditivo si su relación entrada-salida se cambia a  $y[n] = \text{Re}\{e^{j\pi n/4} x[n]\}$  (No considere a  $x[n]$  como real en este problema.)

(b) En el texto, analizamos el hecho de que la propiedad de linealidad para un sistema es equivalente al sistema que posee tanto la propiedad de aditividad como la de homogeneidad. Determine si cada uno de los sistemas siguientes es aditivo y/u homogéneo. Justifique sus respuestas proporcionando una prueba para cada propiedad si se cumple, o un contraejemplo si no se cumple.

$$(i) \ y(t) = \frac{1}{x(t)} \left[ \frac{dx(t)}{dt} \right]^2 \quad (ii) \ y(n) = \begin{cases} \frac{x[n]x[n-2]}{x[n-1]}, & x[n-1] \neq 0 \\ 0, & x[n-1] = 0 \end{cases}$$

**P1.30.** Determine si cada uno de los siguientes sistemas es invertible. Si alguno lo es, construya el sistema inverso. Si no, encuentre dos señales de entrada al sistema que den la misma salida.

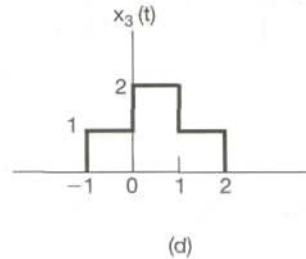
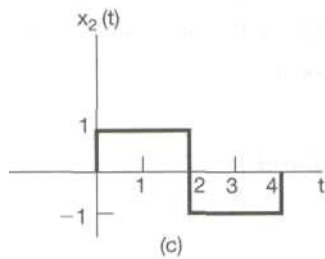
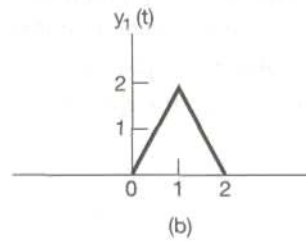
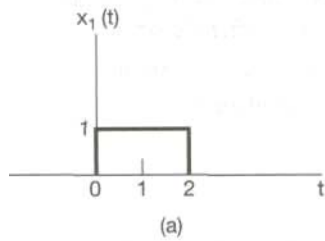
(a) $y(t) = x(t - 4)$	(b) $y(t) = \cos[x(t)]$
(c) $y[n] = nx[n]$	(d) $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$
(e) $y[n] = \begin{cases} x[n-1], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$	(f) $y[n] = x[n]x[n-1]$
(g) $y[n] = x[1-n]$	(h) $y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$
(i) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n (\frac{1}{2})^{n-k} x[k]$	(j) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
(k) $y(n) = \begin{cases} x[n+1], & n \geq 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$	(l) $y(t) = x(2t)$
(m) $y[n] = x[2n]$	(n) $y[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$

**P1.31.** En este problema ilustramos una de las consecuencias más importantes de las propiedades de linealidad y de invariancia en el tiempo. Específicamente, una vez que conocemos la respuesta de un sistema lineal o de un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) a una sola entrada o las respuestas a varias entradas, podemos calcular de manera directa las respuestas a muchas otras señales de entrada.

Gran parte del resto de este libro trata con una amplia explotación de este hecho para desarrollar resultados y técnicas para el análisis y síntesis de los sistemas LTI.

(a) Considere un sistema LTI cuya respuesta a la señal  $x_1(t)$  en la figura P1.31(a) sea la señal  $y_1(t)$  ilustrada en la figura P1.31(b). Determine y dibuje cuidadosamente la respuesta del sistema a la entrada  $x_2(t)$  dibujada en la figura P1.31(c).

(b) Determine y dibuje la respuesta del sistema considerado en la parte (a) para la entrada  $x_3(t)$  mostrada en la figura P1.31(d).



**PROBLEMAS DEL CAPITULO 3 (ANALISIS DE FOURIER)**

**P3.1.** Una señal periódica continua  $x(t)$  es de valor real y tiene un periodo fundamental de  $T = 8$ . Los coeficientes de la serie de Fourier diferentes de cero para  $x(t)$  son

$$a_1 = a_{-1} = 2, a_3 = a_{-3} = 4j.$$

Expresa  $x(t)$  en la forma

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k).$$

**P3.2.** Una señal periódica discreta  $x[n]$  es de valor real y tiene un periodo fundamental de  $N = 5$ . Los coeficientes de la serie de Fourier diferentes de cero para  $x[n]$  son

$$a_0 = 1, a_2 = a_{-2} = e^{j\pi/4}, a_4 = a_{-4} = 2e^{j\pi/3}.$$

**P3.3.** Para la señal periódica continua

$$x(t) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4 \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}t\right),$$

determine la frecuencia fundamental  $\omega_0$  y los coeficientes de la serie de Fourier  $a_k$  tales que

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}.$$

**P3.4.** Use la ecuación de análisis de la serie de Fourier (3.39) para calcular los coeficientes  $a_l$  para la señal periódica continua

$$x(t) = \begin{cases} 1.5, & 0 \leq t < 1 \\ -1.5, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

con frecuencia fundamental  $\omega_0 = \pi$ .

**P3.5.** Sea  $x(t)$  una señal periódica continua con una frecuencia fundamental  $\omega_1$  y coeficientes de Fourier  $a_k$ . Dado que

$$x_2(t) = x_1(1 - t) + x_1(t - 1),$$

¿cómo se relaciona la frecuencia fundamental  $\omega_2$  de  $X_2(t)$  con  $\omega_1$ ? Encuentre también una relación entre los coeficientes de la serie de Fourier  $b_k$  de  $x_2(t)$  y los coeficientes  $a_k$ . Puede usar las propiedades mostradas en la tabla P3.1.

**P3.6.** Considere tres señales periódicas continuas cuyas representaciones en serie de Fourier sean como sigue:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sum_{k=0}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^k e^{jk \frac{2\pi}{50} t}, \\ x_2(t) &= \sum_{k=-100}^{100} \cos(k\pi) e^{jk \frac{2\pi}{50} t}, \\ x_3(t) &= \sum_{k=-100}^{100} j \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{jk \frac{2\pi}{50} t}. \end{aligned}$$

Use las propiedades de la serie de Fourier para poder contestar las siguientes preguntas:

- (a) ¿Cuál(es) de las tres señales es/son de valor real?
- (b) ¿Cuál(es) de las tres señales es/son par?

**P3.7.** Suponga que la señal periódica  $x(t)$  tiene periodo fundamental  $T$  y coeficientes de Fourier  $a_k$ . En diversas situaciones, es más fácil calcular los coeficientes de la serie de Fourier  $b_k$  para  $g(t) = dx(t)/dt$  en lugar de calcular  $a_k$  directamente. Dado que

$$\int_T^{2T} x(t) dt = 2,$$

encuentre una expresión para  $a_k$  en términos de  $b_k$  y  $T$ . Puede usar cualquiera de las propiedades mostradas en la tabla 3.1.

**P3.8.** Suponga que se nos proporciona la siguiente información acerca de la señal  $x(t)$ :

Especifique dos señales diferentes que satisfagan estas condiciones.

1.  $x(t)$  es real y par.
2.  $x(t)$  es periódica con periodo  $T = 2$  y tiene coeficientes de Fourier  $a_k$ .
3.  $a_k = 0$  para  $|k| > 1$ .
4.  $\frac{1}{2} \int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$ .

**P3.9.** Use la ecuación de análisis (3.95) para evaluar los valores numéricos de un periodo de los coeficientes de la serie de Fourier de la señal periódica

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{4\delta[n - 4m] + 8\delta[n - 1 - 4m]\}.$$

**P3.10.** Sea  $x[n]$  una señal periódica real e impar con periodo  $N = 7$  y coeficientes de

$$a_{15} = j, a_{16} = 2j, a_{17} = 3j,$$

Fourier  $a_k$ . Dadas



determine los valores de  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ .

**P3.11.** Suponga que nos dan la siguiente información acerca de la señal  $x[n]$ :

1.  $x[n]$  es una señal real y par.
2.  $x[n]$  tiene periodo  $N = 10$  y coeficientes de Fourier  $a_k$ .
3.  $a_{11} = 5$ .
4.  $\frac{1}{10} \sum_{n=0}^9 |x[n]|^2 = 50$ .

Demuestre que  $x[n] = A \cos(Bn + C)$ , y especifique los valores numéricos de las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

**P3.12.** Cada una de las dos secuencias  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  tiene un periodo  $N = 4$ , y los correspondientes coeficientes de la serie de Fourier están especificados como

$$x_1[n] \longleftrightarrow a_k, \quad x_2[n] \longleftrightarrow b_k,$$

donde

$$a_0 = a_3 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} a_2 = 1 \quad \text{y} \quad b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 1.$$

Usando la propiedad de multiplicación de la tabla 3.1, determine los coeficientes de la serie de Fourier  $c_k$  para la señal  $g[n] = X_1 X_2[n]$ .

**P3.13.** Considere un sistema LTI de tiempo continuo cuya respuesta en frecuencia es

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{\text{sen}(4\omega)}{\omega}.$$

Si la entrada a este sistema es una señal periódica

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 4 \\ -1, & 4 \leq t < 8 \end{cases}$$

con periodo  $T = 8$ , determine la salida correspondiente del sistema  $y(t)$ .

**P3.14.** Cuando el tren de impulsos

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 4k]$$

es la entrada a un sistema LTI particular con respuesta en frecuencia  $H(e^{j\omega})$ , se encuentra que la salida del sistema es

$$y[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right).$$

Determine los valores de  $H(e^{j\omega})$  para  $k = 0, 1, 2$  y  $3$ .

**P3.15.** Considere un filtro  $S$  paso bajas ideal cuya respuesta en frecuencia es

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 100 \\ 0, & |\omega| > 100 \end{cases}$$

Cuando la entrada a este filtro es una señal  $x(t)$  con periodo fundamental  $T = \pi/6$  y coeficientes de la serie de Fourier  $a_k$ , se encuentra que

$$x(t) \xrightarrow{S} y(t) = x(t).$$

¿Para qué valores de  $k$  se garantiza que  $a_k = 0$ ?

**P3.16.** Determine la salida del filtro mostrado en la figura P3.16 para las siguientes entradas periódicas:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad x_1[n] &= (-1)^n \\ \text{(b)} \quad x_2[n] &= 1 + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4}\right) \\ \text{(c)} \quad x_3[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4k} u[n - 4k] \end{aligned}$$

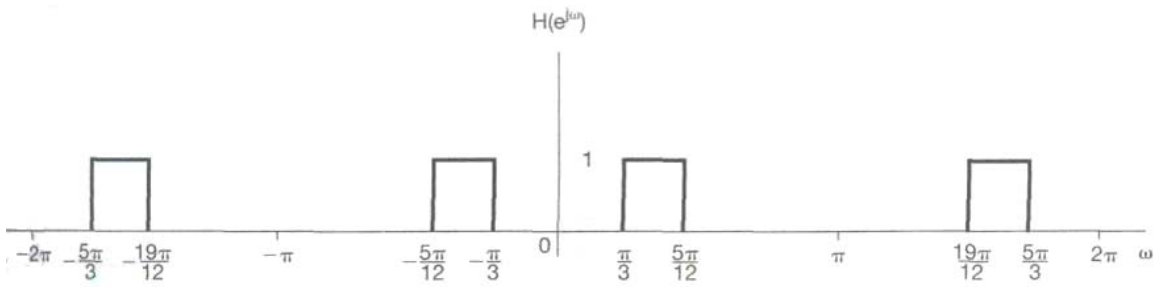


Figura P3.16

**P3.17.** Considere tres sistemas de tiempo continuo  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  cuyas respuestas a una entrada exponencial compleja  $e^{j5t}$  están especificadas como

$$\begin{aligned} S_1: e^{j5t} &\rightarrow te^{j5t}, \\ S_2: e^{j5t} &\rightarrow e^{j5(t-1)}, \\ S_3: e^{j5t} &\rightarrow \cos(5t). \end{aligned}$$

Para cada sistema, determine si la información proporcionada es suficiente para concluir que el sistema definitivamente *no* es LTT.

**P3.18.** Considere tres sistemas discretos  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  cuyas respectivas respuestas a una entrada exponencial compleja  $e^{j\pi/2n}$  están especificadas como

$$\begin{aligned} S_1: e^{j\pi n/2} &\rightarrow e^{j\pi n/2} u[n], \\ S_2: e^{j\pi n/2} &\rightarrow e^{j3\pi n/2}, \\ S_3: e^{j\pi n/2} &\rightarrow 2e^{j5\pi n/2}. \end{aligned}$$

Para cada sistema, determine si la información dada es suficiente para concluir que el sistema es definitivamente *no* LTI.

**P3.19.** Considere un sistema LTI causal como el circuito  $RL$  mostrado en la figura P3.19. Una fuente de corriente produce una corriente de entrada  $x(t)$ , y la salida del sistema se considera la corriente  $y(t)$  que fluye por el inductor.

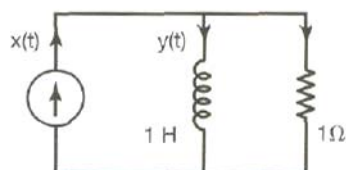


Figura P3.19

- (a) Encuentre la ecuación diferencial que relaciona a  $x(t)$  con  $y(t)$ .
- (b) Determine la respuesta en frecuencia de este sistema, considerando la salida del sistema ante entradas con forma  $x(t) = e^{j\omega t}$ .
- (c) Determine la salida  $y(t)$  si  $x(t) = \cos(t)$ .

**P3.20.** Considere un sistema LTI causal como el circuito  $RLC$  que se muestra en la figura P3.20. En este circuito,  $x(t)$  es el voltaje de entrada. El voltaje  $y(t)$  a través de capacitor se considera como la salida del sistema.

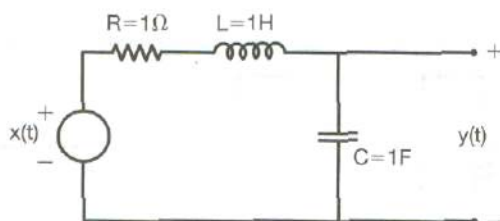


Figura P3.20

- (a) Encuentre la ecuación diferencial que relaciona a  $x(t)$  con  $y(t)$ .
- (b) Determine la respuesta en frecuencia de este sistema, considerando la salida del sistema ante entradas con forma  $x(t) = e^{j\omega t}$ .
- (c) Determine la salida  $y(t)$  si  $x(t) = \sin(t)$ .

**P3.21.** Una señal periódica continua  $x(t)$  es de valor real y tiene periodo fundamental de  $T = 8$ . Los coeficientes de la serie de Fourier diferentes de cero para  $x(t)$  se especifican como

$$a_1 = a_{-1}^* = j, a_5 = a_{-5} = 2.$$

Expresé  $x(t)$  en la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \cos(w_k t + \phi_k).$$

**P3.22.** Determine las representaciones en serie de Fourier de las siguientes señales:

(a) Cada  $x(t)$  mostrada en la figura P3.22(a)-(f).

(b) Una  $x(t)$  periódica con periodo 2 y

(c) Una  $x(t)$  periódica con periodo 4 y

$$x(t) = e^{-t} \quad \text{para} \quad -1 < t < 1$$

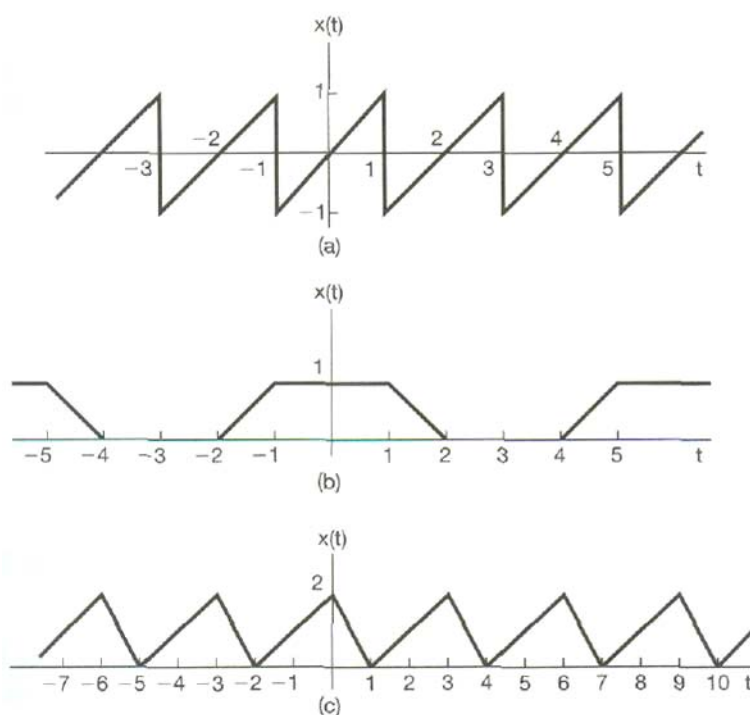


Figura P3.22

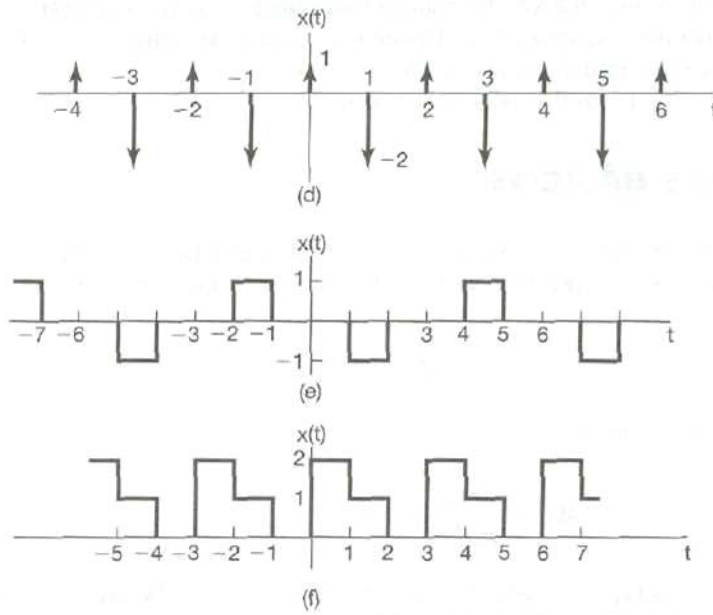


Figura P3.22 Conti

$$x(t) = \begin{cases} \text{sen } \pi t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

**P3.23.** A continuación se especifican los coeficientes de la serie de Fourier de una señal continua que es periódica con periodo 4. Determine la señal  $x(t)$  en cada caso.

(a)  $a_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ (j)^k \frac{\text{sen } k\pi/4}{k\pi}, & \text{con otro valor} \end{cases}$

(b)  $a_k = (-1)^k \frac{\text{sen } k\pi/8}{2k\pi}$

(c)  $a_k = \begin{cases} jk, & |k| < 3 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$

(d)  $a_k = \begin{cases} 1, & k \text{ par} \\ 2, & k \text{ impar} \end{cases}$

**P3.24.** Sea una señal periódica con periodo fundamental  $T = 2$  y coeficientes de Fourier  $a_k$

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

- (a) Determine el valor de  $n_0$
- (b) Determine la representación en serie de Fourier de  $dx(t)/dt$ .
- (c) Use el resultado de la parte (b) y la propiedad de diferenciación de la serie continua de Fourier para poder determinar los coeficientes de la serie de Fourier de  $x(t)$ .

**P3.25.** Considere las siguientes tres señales continuas con periodo fundamental de  $T = 1/2$ :

$$x(t) = \cos(4\pi t), y(t) = \text{sen}(4\pi t), z(t) = x(t)y(t).$$

- (a) Determine los coeficientes de la serie de Fourier de  $x(t)$ .
- (b) Determine los coeficientes de la serie de Fourier de  $y(t)$ .
- (c) Utilice los resultados de las partes (a) y (b) junto con la propiedad de multiplicación de la serie continua de Fourier para determinar los coeficientes de la serie de Fourier de  $z(t) = x(t)y(t)$ .
- (d) Determine los coeficientes de la serie de Fourier de  $z(t)$  mediante la expansión directa de  $z(t)$  en forma trigonométrica, y compare su resultado con el de la parte (c).

**P3.26.** Sea  $x(t)$  una señal periódica cuyos coeficientes de la serie de Fourier son

$$a_k = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ j(\frac{1}{2})^{|k|} & \text{con otro valor} \end{cases}$$

Utilice las propiedades de la serie de Fourier para responder a las siguientes preguntas:

- (a) ¿ $x(t)$  es real?
- (b) ¿ $x(t)$  es par?
- (c) ¿ $dx(t)/dt$  es par?

**3.27.** Una señal periódica discreta  $x[n]$  es de valor real y tiene periodo fundamental  $N = 5$ . Los coeficientes de la serie de Fourier diferentes de cero para  $x[n]$  son

$$a_0 = 2, a_2 = a_{-2}^* = 2e^{j\pi/6}, \quad a_4 = a_{-4}^* = e^{j\pi/3}.$$

Expresé  $x[n]$  en la forma

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{sen}(\omega_k n + \phi_k).$$

**P3.28.** Determine los coeficientes de la serie de Fourier para cada una de las siguientes señales periódicas discretas. Grafique la magnitud y fase de cada conjunto de coeficientes  $a_k$ .

- (a) Cada  $x[n]$  dibujada en la figura P3.28 {a)-(c)}
- (b)  $x[n] = \text{sen}(27\pi n/3) \cos(7\pi n/2)$
- (c)  $x[n]$  periódica con período 4 y



(d)  $x[n]$  periódica con periodo 12 y

$$x[n] = 1 - \operatorname{sen} \frac{\pi n}{4} \quad \text{para } 0 \leq n \leq 11$$

$$x[n] = 1 - \operatorname{sen} \frac{\pi n}{4} \quad \text{para } 0 \leq n \leq 3$$

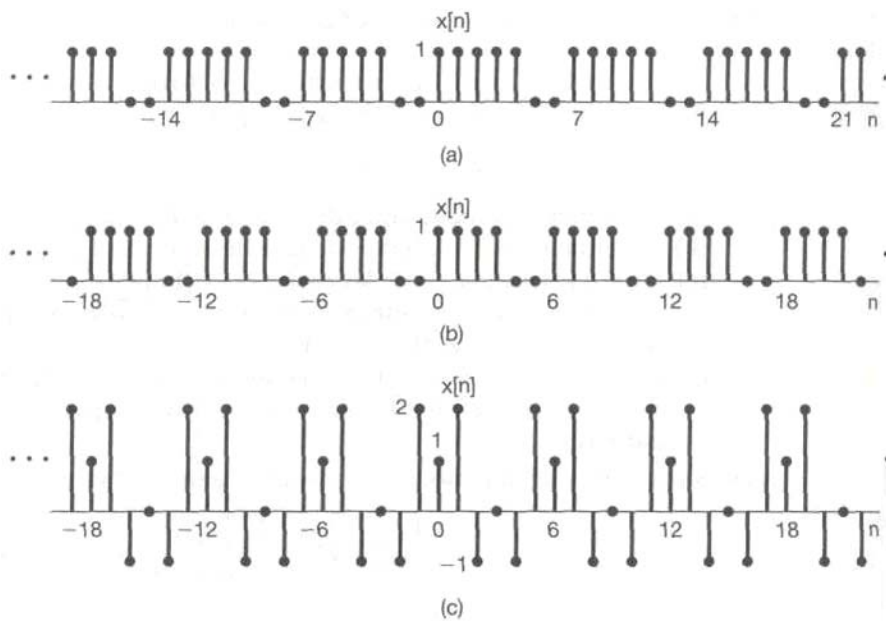


Figura P3.28

---



---

**PROBLEMAS CAPITULO 4 (CONVOLUCION)**

**P2.1** Sea

$$X[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3] \text{ y } h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$$

Calcule y haga la grafica de cada una de las siguientes convoluciones:

**(a)**  $y_1[n] = x[n] * h[n]$

**(b)**  $y_2[n] = x[n+2] * h[n]$

**(c)**  $y_3[n] = x[n] * h[n+2]$

**P2.2.** Considere la señal

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \{u[n+3] - u[n-10]\}.$$

Expresé  $A$  y  $B$  en términos de  $n$  de manera que se cumplan las siguientes ecuaciones:

$$h[n-k] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1}, & A \leq k \leq B \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

**P2.3.** Considere una entrada  $x[n]$  y una respuesta al impulso unitario  $h[n]$  dada por

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2],$$

$$h[n] = u[n+2].$$

Determine y dibuje la salida  $y[n] = x[n] * h[n]$ .

**P2.4.** Calcule y dibuje  $y[n] = x[n] * h[n]$ , donde

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 3 \leq n \leq 8 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 4 \leq n \leq 15 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

**P2.5** Sea

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases} \quad \text{y} \quad h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

donde  $N \leq 9$  es un entero. Determine el valor de  $N$ , dado que

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[4] = 5, \quad y[14] = 0.$$

**P2.6.** Calcule y dibuje la convolución  $y[n] = x[n] * h[n]$ , donde

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[-n-1] \quad \text{y} \quad h[n] = u[n-1].$$

**P2.7.** Un sistema lineal  $S$  tiene la relación

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n-2k]$$

entre la entrada  $x[n]$  y su salida  $y[n]$ , donde  $g[n] = u[n] - u[n-4]$ .

- (a) Determine  $y[n]$  cuando  $x[n] = \delta[n-1]$ .
- (b) Determine  $y[n]$  cuando  $x[n] = \delta[n-2]$ .
- (c) ¿ $S$  es LTI?
- (d) Determine  $y[n]$  cuando  $x[n] = u[n]$ .

**P2.8.** Determine y bosqueje la convolución de las siguientes dos señales:

$$x(t) = \begin{cases} t + 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

$$h(t) = \delta(t + 2) + 2\delta(t + 1).$$

**P2.9** Sea

$$h(t) = e^{2t}u(-t + 4) + e^{-2t}u(t - 5).$$

Determine  $A$  y  $B$  tales que

$$h(t - \tau) = \begin{cases} e^{-2(t-\tau)}, & \tau < A \\ 0, & A < \tau < B \\ e^{2(t-\tau)}, & B < \tau \end{cases}$$

**P2.10.** Suponga que

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

y  $h(t) = x(t/a)$ , donde  $0 < a \leq 1$ .

(a) Determine y bosqueje  $y(t) = x(t) * h(t)$ .

(b) Si  $dy(t)/dt$  contiene sólo tres discontinuidades, ¿cuál es el valor de  $a$ ?

**P2.11.** Sea

$$x(t) = u(t - 3) - u(t - 5) \quad \text{y} \quad h(t) = e^{-3t}u(t).$$

- (a) Calcule  $y(t) = x(t) * h(t)$ .  
 (b) Calcule  $g(t) = (dx(t)/dt) * h(t)$ .  
 (c) ¿Cómo está relacionada  $g(t)$  con  $y(t)$ ?

**P2.12.** Sea

$$y(t) = e^{-t}u(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 3k).$$

Demuestre que  $y(t) = Ae^{-t}$  para  $0 \leq t < 3$ , y determine el valor de  $A$ .

**P2.13.** Considere un sistema discreto  $S_1$  con respuesta al impulso

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n].$$

- (a) Determine el entero  $A$  tal que  $h_1[n] - Ah_1[n - 1] = d[n]$ .  
 (b) Usando el resultado de la parte (a), determine la respuesta al impulso  $g[n]$  de un sistema LTI  $S_2$  el cual es el sistema inverso de  $S_1$ .

**P2.14.** ¿Cuál de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas estables

LTI?

- (a)  $h_1(t) = e^{-(1-2j)t}u(t)$       (b)  $h_2(t) = e^{-t} \cos(2t)u(t)$

**P2.15.** ¿Cuál de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas estables LTI?

(a)  $h_1[n] = n \cos(\pi/4 n)u[n]$       (b)  $h_2[n] = 3^n u[-n + 10]$

**P2.16.** Para cada una de las siguientes afirmaciones, determine si es verdadera o falsa:

- (a) Si  $x[n] = 0$  para  $n < N_1$  y  $h[n] = 0$  para  $n < N_2$ , entonces  $x[n] * h[n] = 0$  para  $n < N_1 + N_2$ .
- (b) Si  $y[n] = x[n] * h[n]$ , entonces  $y[n - 1] = x[n - 1] * h[n - 1]$ .
- (c) Si  $y(t) = x(t) * h(t)$ , entonces  $y(-t) = x(-t) * h(-t)$ .
- (d) Si  $x(t) = 0$  para  $t > T_1$  y  $h(t) = 0$  para  $t > T_2$ , entonces  $x(t) * h(t) = 0$  para  $t > T_1 + T_2$ .

**P2.17.** Considere un sistema LTI cuya entrada  $x(t)$  y salida  $y(t)$  estén relacionadas por la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t).$$

El sistema también satisface la condición de reposo inicial.

(a) Si  $x(t) = e^{-(1+3j)t} u(t)$ , ¿cuál es  $y(t)$ ?

(b) Observe que  $\text{Re}(x(t))$  satisfará la ecuación (P2.17-1) con  $\text{Re}(y(t))$ . Determine la salida  $y(t)$  del sistema LTI si

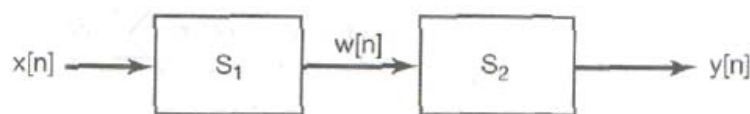
$$x(t) = e^{-t} \cos(3t)u(t).$$

**P2.18.** Considere un sistema LTI causal cuya entrada  $x[n]$  y salida  $y[n]$  estén relacionadas por la ecuación de diferencias

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n - 1] + x[n].$$

Determine  $y[n]$  si  $x[n] = 8[n - 1]$ .

**P2.19.** Considere la conexión en cascada de los siguientes dos sistemas  $S_1$  y  $S_2$ , como se muestran en la figura P2.19:



**Figura P2.19**

$S_1$  : es LTI causal,

$$w[n] = \frac{1}{2}w[n - 1] + x[n];$$

$S_2$  : es LTI causal,

$$y[n] = \alpha y[n - 1] + \beta w[n].$$

La ecuación de diferencias que relaciona  $x[n]$  y  $y[n]$  es;

$$y[n] = -\frac{1}{8}y[n - 2] + \frac{3}{4}y[n - 1] + x[n].$$

(a) Determine  $\alpha$  y  $\beta$ .

(b) Obtenga la respuesta al impulso de la conexión en cascada de  $S_1$  y  $S_2$ .

**P2.20.** Evalúe las siguientes integrales:

(a)  $\int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) \cos(t) dt$

(b)  $\int_0^5 \text{sen}(2\pi t) \delta(t + 3) dt$

(c)  $\int_{-5}^5 u_1(1 - \tau) \cos(2\pi\tau) d\tau$

**P2.21.** Calcule la convolución  $y[n] = x[n] * h[n]$  de los siguientes pares de señales:

(a)  $\left. \begin{aligned} x[n] &= \alpha^n u[n], \\ h[n] &= \beta^n u[n], \end{aligned} \right\} \alpha \neq \beta$

(b)  $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$

(c)  $\left. \begin{aligned} x[n] &= (-\frac{1}{2})^n u[n - 4] \\ h[n] &= 4^n [2 - n] \end{aligned} \right\}$

(d)  $x[n]$  y  $h[n]$  son como en la figura P2.21.



**Figura P2.21**



**P2.22.** Para cada uno de los siguientes pares de formas de onda, use la integral de convolución para encontrar la respuesta  $y(t)$  a la entrada  $x(t)$  del sistema LTI cuya respuesta al impulso es  $h(t)$ . Bosqueje sus resultados.

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad x(t) &= e^{-at}u(t) \\ h(t) &= e^{-\beta t}u(t) \end{aligned} \right\}$$

(Obtenga el resultado cuando  $a \neq \beta$  y cuando  $a = \beta$ .)

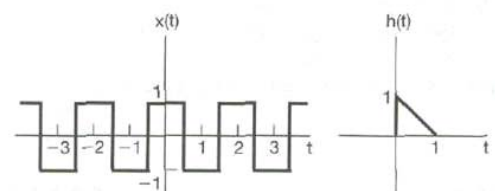
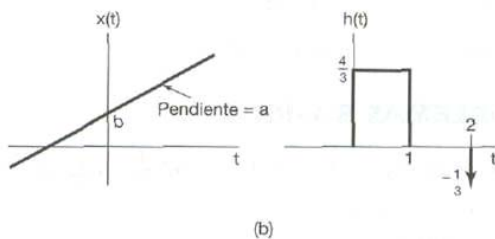
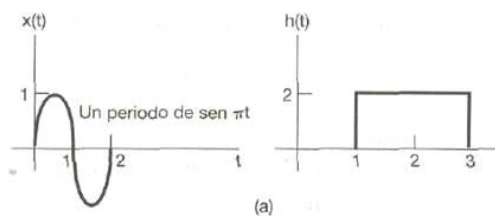
**(b)**  $x(t)u(t) - 2u(t - 2) + u(t - 5)$

$h(t) = e^{2t}u(1-t)$

**(c)**  $x(t)$  y  $h(t)$  son como en la figura P2.22(a).

**(d)**  $x(t)$  y  $h(t)$  son como en la figura P2.22(b).

**(e)**  $x(t)$  y  $h(t)$  son como en la figura P2.22(c).



**Figura P2.22**

**P2.23.** Sea  $h(t)$  el pulso triangular mostrado en la figura P2.23(a) y  $x(t)$

el tren de impulsos representado en la figura P2.23(b). Esto es,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT).$$

Determine y trace  $y(t) = x(t) * h(t)$  para los siguientes valores de  $T$ :

(a)  $T = 4$

(b)  $T = 2$

(c)  $T = 3/2$

(d)  $T = 1$

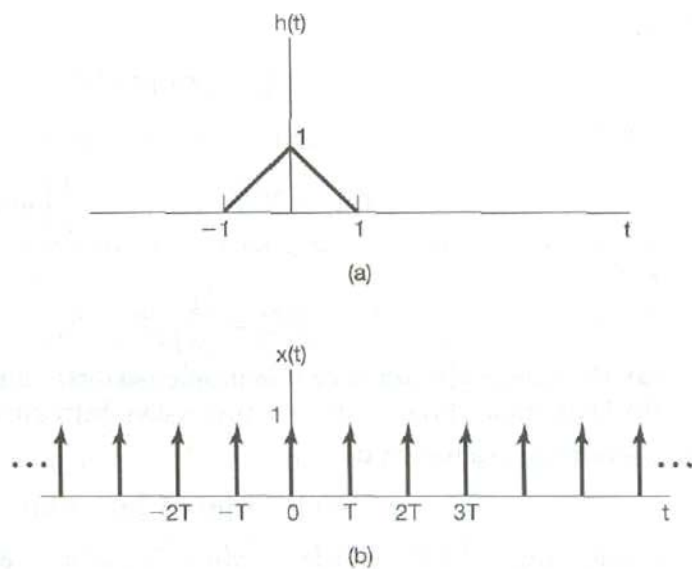


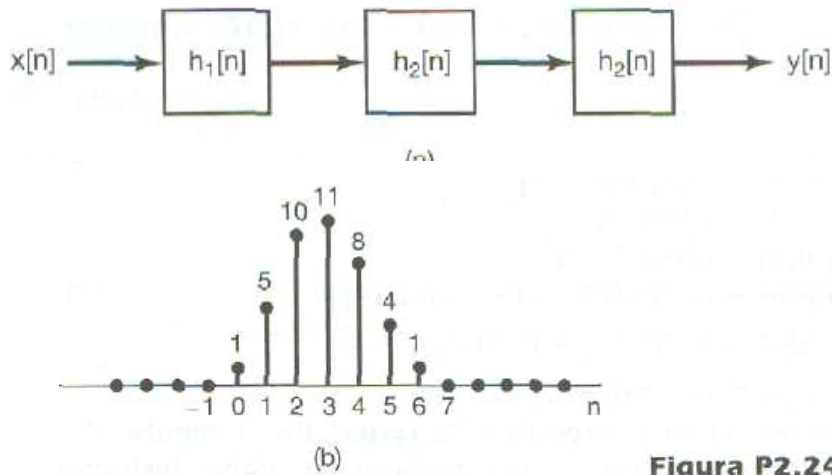
Figura P2.23

**P2.24** Examine la interconexión en cascada de los tres sistemas LTI causales ilustrados en la figura P2.24(a). La respuesta al impulso

$h_2[n]$  es

$$h_2[n] = u[n] - u[n - 2],$$

y la respuesta total al impulso es como se muestra en la figura P2.24(b).



**Figura P2.24**

- (a) Encuentre la respuesta al impulso  $h_1[n]$ .
- (b) Encuentre la respuesta del sistema total a la entrada

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n - 1].$$

**P2.25.** Sea la señal

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

donde

$$x[n] = 3^n u[-n - 1] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

y

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n + 3].$$

**(a) Determine  $y[n]$  sin utilizar la propiedad distributiva de la convolución.**

**(b) Determine  $y[n]$  utilizando la propiedad distributiva de la convolución.**

**P2.26.** Examine la evaluación de

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] * x_3[n],$$

donde  $x_1[n] = (0.5)^n u[n]$ ,  $x_2[n] = u[n + 3]$  y  $x_3[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$ .

**(a)** Evalúe la convolución  $x_1[n] * x_2[n]$ .

**(b)** Realice la convolución de la parte (a) con  $x_3[n]$  para evaluar  $y[n]$ .

**(c)** Evalúe la convolución de  $x_2[n] * x_3[n]$ .

**(d)** Realice la convolución del resultado de la parte (c) con  $x_1[n]$  para evaluar  $y[n]$ .

**P2.27.** Definimos el área bajo una señal continua  $v(t)$  como

$$A_v = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) dt.$$

**P2.28.** A continuación mostramos las respuestas al impulso de sistemas LTI discretos.

Demuestre que si  $y(t) = x(t) * h(t)$ , entonces

$$A_y = A_x A_h.$$

Determine si cada sistema es causal y/o estable. Justifique sus respuestas.

- (a)  $h[n] = (\frac{1}{5})^n u[n]$
- (b)  $h[n] = (0.8)^n u[n + 2]$
- (c)  $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[-n]$
- (d)  $h[n] = (5)^n u[3 - n]$
- (e)  $h[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n] + (1.01)^n u[n - 1]$
- (f)  $h[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n] + (1.01)^n u[1 - n]$
- (g)  $h[n] = n(\frac{1}{3})^n u[n - 1]$

**P2.29.** A continuación ofrecemos las respuestas al impulso de sistemas LTI continuos

Determine si cada sistema es causal y/o estable. Justifique sus respuestas.

- (a)  $h(t) = e^{-4t} u(t - 2)$
- (b)  $h(t) = e^{-6t} u(3 - t)$
- (c)  $h(t) = e^{-2t} u(t + 50)$
- (d)  $h(t) = e^{2t} u(-1 - t)$

**P2.30.** Examine la ecuación de diferencias de primer orden

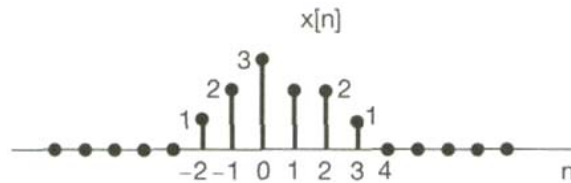
$$y[n] + 2y[n - 1] = x[n].$$

Dando por sentado la condición de reposo inicial (es decir, si  $x[n] = 0$  para  $n < n_0$ , entonces  $y[n] = 0$  para  $n < n_0$ ), determine la respuesta al impulso de un sistema cuya entrada y salida estén relacionadas mediante esta ecuación de diferencias. Puede resolver el problema rescribiendo la ecuación de manera que  $y[n]$  quede expresada en términos de  $y[n - 1]$  y  $x[n]$  y generando los valores de  $y[0]$ ,  $y[+1]$ ,  $y[+2]$ , ..., en ese orden.

**P2.31.** Examine el sistema LTI inicialmente en reposo y descrito por la ecuación de diferencias

$$y[n] + 2y[n - 1] = x[n] + 2x[n - 2].$$

Determine la respuesta de este sistema a la entrada que se representa en la figura P2.31 resolviendo recursivamente la ecuación.



**Figura P2.31**

# RESPUESTAS

RESPUESTA PROBLEMA CAPITULO 2(TIPOS DE SEÑALES)

- P1.1  $-0.5, -0.5, j, -j, j, 1 + j, 1 + j, 1 - j, 1 - j$
- P1.2  $5e^{j0}, 2e^{j\pi}, 3e^{-j\pi/2}, e^{-j\pi/3}, \sqrt{2}e^{j\pi/4}, 2e^{-j\pi/2}, \sqrt{2}e^{j\pi/4}, e^{j\pi/2}, e^{-j\pi/12}$
- P1.3 (a)  $P_\infty = 0, E_\infty = \frac{1}{4}$  (b)  $P_\infty = 1, E_\infty = \infty$  (c)  $P_\infty = \frac{1}{2}, E_\infty = \infty$   
 (d)  $P_\infty = 0, E_\infty = \frac{4}{3}$  (e)  $P_\infty = 1, E_\infty = \infty$  (f)  $P_\infty = \frac{1}{2}, E_\infty = \infty$
- P1.4 (a)  $n < 1$  y  $n > 7$  (b)  $n < -6$  y  $n > 0$  (c)  $n < -4$  y  $n > 2$   
 (d)  $n < -2$  y  $n > 4$  (e)  $n < -6$  y  $n > 0$
- P1.5 (a)  $t > -2$  (b)  $t > -1$  (c)  $t > -2$  (d)  $t < 1$  (e)  $t < 9$
- P1.6 (a) No (b) No (c) Sí
- P1.7 (a)  $|n| > 3$  (b) para toda  $t$  (c)  $|n| < 3, |n| \rightarrow \infty$  (d)  $|t| \rightarrow \infty$
- P1.8 (a)  $A = 2, a = 0, \omega = 0, \phi = \pi$  (b)  $A = 1, a = 0, \omega = 3, \phi = 0$   
 (c)  $A = 1, a = 1, \omega = 3, \phi = \frac{\pi}{2}$  (d)  $A = 1, a = 2, \omega = 100, \phi = \frac{\pi}{2}$
- P1.9 (a)  $T = \frac{\pi}{5}$  (b) No periódica (c)  $N = 2$   
 (d)  $N = 10$  (e) No periódica
- P1.10  $\pi$
- P1.11 35
- P1.12  $M = -1, n_0 = -3$
- P1.13 4
- P1.14  $A_1 = 3, t_1 = 0, A_2 = -3, t_2 = 1$
- P1.15 (a)  $y[n] = 2x[n - 2] + 5x[n - 3] + 2x[n - 4]$  (b) No
- P1.16 (a) No (b) 0 (c) No
- P1.17 (a) No; por ejemplo,  $y(-\pi) = x(0)$  (b) Sí
- P1.18 (a) Sí (b) Sí (c)  $C \leq (2n_0 + 1)B$
- P1.19 (a) Lineal, no invariante en el tiempo (b) No lineal, invariante en el tiempo  
 (c) Lineal, invariante en el tiempo (d) Lineal, no invariante en el tiempo
- P1.20 (a)  $\cos(3t)$  (b)  $\cos(3t - 1)$



**RESPUESTAS PROBLEMAS CAPITULO 3 (SERIES DE FOURIER)**

**P2.1** (a)  $y_1[n] = 2\delta[n + 1] + 4\delta[n] + 2\delta[n - 1] + 2\delta[n - 2] - 2\delta[n - 4]$   
 (b)  $y_2[n] = y_1[n + 2]$  (c)  $y_3[n] = y_2[n]$

**P2.2**  $A = n - 9, B = n + 3$

**P2.3**  $2[1 - \frac{1}{2}^{n+1}]u[n]$

**P2.4**  $y[n] = \begin{cases} n - 6, & 7 \leq n \leq 11 \\ 6, & 12 \leq n \leq 18 \\ 24 - n, & 19 \leq n \leq 23 \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$

**P2.5**  $N = 4$

**P2.6**  $y[n] = \begin{cases} \frac{3^n}{2}, & n < 0 \\ \frac{1}{2}, & n \geq 0 \end{cases}$

**P2.7** (a)  $u[n - 2] - u[n - 6]$  (b)  $u[n - 4] - u[n - 8]$  (c) No  
 (d)  $y[n] = 2u[n] - \delta[n] - \delta[n - 1]$

**P2.8**  $y(t) = \begin{cases} t + 3, & -2 < t \leq -1 \\ t + 4, & -1 < t \leq 0 \\ 2 - 2t, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$

**P2.9**  $A = t - 5, B = t - 4$

**P2.10** (a)  $y(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \alpha \\ \alpha, & \alpha \leq t \leq 1 \\ 1 + \alpha - t, & 1 \leq t \leq 1 + \alpha \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$  (b)  $\alpha = 1$

**P2.11** (a)  $y(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leq 3 \\ \frac{1 - e^{-3(t-3)}}{3}, & 3 < t \leq 5 \\ \frac{(1 - e^{-6})e^{-3(t-5)}}{3}, & 5 < t \leq \infty \end{cases}$   
 (b)  $g(t) = e^{-3(t-3)}u(t-3) - e^{-3(t-5)}u(t-5)$  (c)  $g(t) = \frac{dy(t)}{dt}$

**P2.12**  $A = \frac{1}{1 - e^{-3}}$

**P2.13** (a)  $A = \frac{1}{5}$  (b)  $g[n] = \delta[n] - \frac{1}{5}\delta[n - 1]$

**P2.14**  $h_1(t), h_2(t)$

**P2.15**  $h_2[n]$

**P2.16** (a) Verdadero (b) Falso (c) Verdadero (d) Verdadero

**P2.17** (a)  $y(t) = \frac{1-j}{6}[e^{(-1+3j)t} - e^{-4t}]u(t)$   
 (b)  $y(t) = \frac{1}{6}[e^{-t}(\cos 3t + \text{sen } 3t) - e^{-4t}]u(t)$

**P2.18**  $(1/4)^{n-1}u[n - 1]$

**P2.19** (a)  $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = 1$  (b)  $[2(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{4})^n]u[n]$

**P2.20** (a) 1 (b) 0 (c) 0

RESPUESTAS PROBLEMAS CAPÍTULO (CONVOLUCIÓN)

- P3.1**  $x(t) = 4 \cos(\frac{\pi}{4}t) + 8 \cos(\frac{3\pi}{4}t + \frac{\pi}{2})$
- P3.2**  $x[n] = 1 + 2 \operatorname{sen}(\frac{4\pi}{5}n + \frac{3\pi}{4}) + 4 \operatorname{sen}(\frac{8\pi}{5}n + \frac{5\pi}{6})$
- P3.3**  $\omega_0 = \frac{\pi}{3}, a_0 = 2, a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, a_5 = a_{-5} = -2j$
- P3.4**  $a_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ e^{-jk\pi/2} \frac{3 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})}{j^{2\pi k}}, & k \neq 0 \end{cases}$
- P3.5**  $\omega_2 = \omega_1, b_k = e^{-jk\omega_1}[a_{-k} + a_k]$
- P3.6** (a)  $x_2(t), x_3(t)$  (b)  $x_2(t)$
- P3.7**  $a_k = \begin{cases} \frac{2}{T}, & k = 0 \\ \frac{b_k}{j^{2\pi k}}, & k \neq 0 \end{cases}$
- P3.8**  $x_1(t) = \sqrt{2} \operatorname{sen}(\pi t), x_2(t) = -\sqrt{2} \operatorname{sen}(\pi t)$
- P3.9**  $a_0 = 3, a_1 = 1 - 2j, a_2 = -1, a_3 = 1 + 2j$
- P3.10**  $a_0 = 0, a_{-1} = -j, a_{-2} = -2j, a_{-3} = -3j$
- P3.11**  $A = 10, B = \frac{\pi}{5}, C = 0$
- P3.12**  $c_k = 6$  para toda  $k$
- P3.13**  $y(t) = 0$
- P3.14**  $H(e^{j\pi/2}) = H^*(e^{j3\pi/2}) = 2e^{j\pi/4}, H(e^{j0}) = H(e^{j\pi}) = 0$
- P3.15** 5.  $|k| > 8$
- P3.16** (a) 0 (b)  $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4})$  (c) 0
- P3.17**  $S_1$  y  $S_3$  no son LTI
- P3.18**  $S_1$  y  $S_2$  no son LTI
- P3.19** (a)  $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$  (b)  $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$  (c)  $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t - \frac{\pi}{4})$
- P3.20** (a)  $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$  (b)  $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega-\omega^2}$  (c)  $-\cos t$



**AM Modulación de amplitud:** modulación de señal continua que utiliza variación de la amplitud en proporción a la amplitud de una señal moduladora; en general, se toma como DSB-LC para transmisiones comerciales de radio y como DSB-SC para sistemas de multiplexión

**APK Conmutación de amplitud y fase:** combinación de ASK y PSK para proporcionar información.

**ASK Conmutación de amplitud:** conmutación entre dos amplitudes de una senoidal para representar unos y ceros binarios

**BPSK Conmutación de fase binaria:** conmutación entre dos fases de una senoidal para representar unos y ceros binarios

**CPFSK FSK de fase continua:** versión de FSK sin discontinuidades de fase en los puntos de conmutación, lo que da lugar a una disminución en la densidad espectral de potencia en las frecuencias eliminadas de la frecuencia portadora.

**CW Señal Continua:** señal portadora (en general senoidal) que se utiliza para modulación o conmutación.

**DM Modulación delta:** DPCM que sólo utiliza un bit para codificar las diferencias entre los valores muestreados sucesivos de la señal moduladora.

**DPCM Modulación de código de pulsos diferencial:** utiliza PCM para enviar sólo las diferencias entre los valores muestreados sucesivos de la señal moduladora

**DPSK PSK diferencial:** utiliza PSK sólo para enviar las diferencias entre bits sucesivos.

**DSB Doble banda lateral (LC o SC):** señal cuyo espectro tiene dos bandas laterales balanceadas en forma simétrica con respecto a la frecuencia portadora.

**FDM Multiplexión por división de frecuencia:** utiliza desplazamientos en frecuencia para proporcionar varios canales de información independientes.

**FDX full Duplex:** transmisión de datos en ambos sentidos a la vez por un solo canal.

**FM Modulación de frecuencia:** modulación de señal continua que utiliza la variación de la frecuencia en proporción a la amplitud de la señal moduladora.

**FSK Conmutación de frecuencia:** conmutación de la frecuencia instantánea de una senoidal para representar unos y ceros binarios.

**FSK M-aria FSK de multiestado:** versión de la FSK que utiliza más de dos frecuencias, lo cual proporciona transmisión eficiente de información con restricción de potencia a cambio de ancho de banda.

**HDX Half Duplex:** transmisión de datos en un en ambos sentidos pero no al mismo tiempo.

**LC Gran portadora:** señal en la que una gran parte del espectro está concentrada en la frecuencia portadora (se usa en DSB, SSB, VSB).

**LTI Sistemas de lazo abierto:**

**MSK Conmutación de desplazamiento mínimo:** versión común de la CPFSK que utiliza un desplazamiento de frecuencia mínimo para conmutación ortogonal.

**MUX Multiplexor:** sistema para combinar varios canales de información en una sola señal.

**NBFM Modulación de frecuencia de banda angosta:** conversión de amplitud a frecuencia; este efecto es pequeño comparado con las frecuencias en el espectro de la señal moduladora.

**NBPM Modulación de fase de banda angosta:** conversión de amplitud a fase; este efecto es pequeño con un radián de desplazamiento de fase.

**OFDM Multiplexación por división de frecuencias ortogonales.**

**OOK Conmutación encendido-apagado:** versión de ASK en la que la señal portadora se transmite en toda su amplitud ("encendido") o con amplitud cero ("apagado") para representar unos y ceros binarios.

**OQPSK QPSK de conmutación desplazada:** utiliza un retardo en la sincronía de los bits de datos de entrada para disminuir al máximo las transiciones de fase en los puntos de conmutación.

**PAM Modulación de amplitud de pulso:** variación de la amplitud de un tren de pulsos de duración constante, en proporción a los valores muestreados de la señal moduladora.

**PCM Modulación de código de pulsos:** utiliza un código digital para designar el nivel de amplitud de la señal moduladora en cada tiempo de muestra.

**PM Modulación de fase:** modulación de señal continua que utiliza variación de la fase en proporción a la amplitud de la señal moduladora.

**PPM Modulación de posición de pulso:** utiliza pulsos de amplitud y de duración constante cuyos desplazamientos temporales con respecto a un reloj son proporcionales a los valores muestreados de la señal moduladora.

**PRK**      **Conmutación por inversión de fase:** conmutación de  $(0, n)$  radianes en fase de una senoidal para representar unos y ceros binarios.

**PSK**      **Conmutación de fase:** conmutación de la fase de una senoidal para representar unos y ceros binarios.

**PSK Af-aria**    **PSK de multiestado:** versión de PSK que utiliza más de dos fases, lo cual proporciona transmisión eficiente de información con restricción de ancho de banda a cambio de potencia.

**PWM**    **Modulación de ancho de pulso:** utiliza un tren de pulsos de amplitud constante cuya duración es proporcional a los valores muestreados de la señal moduladora.

**QAM**      **AM en cuadratura:** utiliza AM tanto en fase como en cuadratura para proporcionar información.

**QAM**      **Modulación de amplitud en cuadratura:** utiliza ASK en fase y cuadratura para proporcionar información.

**QPSK**      **PSK en cuadratura:** utiliza PSK tanto en fase como en cuadratura para proporcionar información.

**SC**      **Portadora suprimida:** señal en la que una proporción relativamente baja (lo ideal es cero) del espectro está concentrada en la frecuencia portadora (se utiliza en DSB, SSB, VSB).

**SSB**    **Banda lateral única (LC o SC):** ((+) indica banda lateral superior, (-) banda lateral inferior): señal que tiene una banda lateral espectral que presenta el contenido de frecuencia ya sea positivo (+) o negativo (-) de la señal moduladora.

**TDM**      **Multiplexión por división de tiempo:** inserción secuencial de los valores muestreados de dos o más señales para proporcionar varios canales de información independiente.

**VSB**    **Banda lateral residual (LC o SC):** señal en la que su densidad espectral tiene la mayor parte de una banda lateral y un "residuo" de la segunda banda lateral.

**WBFM**      **Modulación de frecuencia de banda ancha:** conversión de amplitud a frecuencia; este efecto predomina comparado con las frecuencias en el espectro de la señal moduladora.

**WBPM**      **Modulación de fase de banda ancha:** conversión de amplitud a fase; este efecto predomina comparado con un radián de desplazamiento de fase.

LISTA DE SÍMBOLOS

$a_n$	Coeficientes de Fourier	$m$	Masa
$b_n$		$m_n$	Momento enésimo de $X$
$c_n$		$m(t)$	Mensaje
$a(t)$	Respuesta al escalón unitario	$n(t)$	Ruido
$B$	Coeficiente de amortiguación	$p$	El operador $d/dt$
$C$	Capacitancia	$p(x), p(x, y)$	Densidad probabilística o función de frecuencia
$d$	Duración de un pulso	$p_d(t)$	Pulso rectangular de amplitud unitaria y duración $d$
$D_k(\xi)$	Núcleo de Dirichlet	$P$	Potencia
$E$	Contenido de energía; esperanza matemática	$P(x), P(x, y)$	Función de distribución probabilística
$E_k$	Error cuadrático medio	$P(\omega)$	Densidad espectral de potencia; espectro de potencia
$f$	Frecuencia	$R$	Resistencia
$f(t)$	Función del tiempo	$R(\omega)$	Parte real de $F(\omega)$
$\ f\ ^2$	Contenido de energía de $f(t)$	$R_{11}, R_{22}, \dots$	Funciones de autocorrelación
$F(\omega), F(j\omega)$	Transformada de Fourier de $f(t)$	$R_{12}, R_{21}, \dots$	Funciones de correlación
$F_c(\omega)$	Transformada coseno de Fourier de $f(t)$	$\bar{R}_{11}, \bar{R}_{22}, \dots$	Funciones de autocorrelación promedias
$F_s(\omega)$	Transformada seno de Fourier de $f(t)$	$\bar{R}_{12}, \bar{R}_{21}, \dots$	Funciones de correlación promedias
$\ F\ ^2$	Contenido de energía de $F(\omega)$	$Si$	Función seno integral
$G$	Conductancia	$S_a(t)$	Función muestreadora
$h(t)$	Respuesta al impulso unitario	$S_k(t)$	Suma de los primeros $(2k + 1)$ términos de la serie de Fourier de $f(t)$
$H(p)$	Función operacional del sistema	$t$	Tiempo
$H(\omega), H(j\omega)$	Transformada de Fourier de $h(t)$ ; función del sistema	$T$	Período de una función periódica; temperatura; tensión
$i, I$	Corriente	$\bar{t}$	Centro de gravedad del área bajo la curva $f^2(t)$
$I_m$	Amplitud del fasor que representa la corriente $i(t)$		
$k$	Constante de Boltzman; constante del resorte		
$K$	Conductividad térmica		
$k^2, k_x, \dots, k_{mn}$	Constante de separación		
$L$	Inductancia; operador lineal		

## LISTA DE SIMBOLOS

$t_r$	Tiempo de ascenso	$\epsilon_k$	Error entre $f(t)$ y $S_k(t)$
$T_d$	Duración efectiva del pulso	$\theta$	Angulo de fase
$u$	Deflexión del cordel o de la membrana; potencial electrostático; distribución de temperatura	$\lambda$	Longitud de onda
$u(t)$	Función escalón unitario	$\rho$	Densidad
$v, V$	Voltaje	$\sigma$	Desviación estándar
$V_m$	Amplitud del fasor que representa al voltaje $v(t)$	$\phi$	Función característica; ángulo de fase; función de prueba
$x$	Desplazamiento; variable	$\phi_m$	Indice de modulación
$X$	Variable al azar	$\omega$	Frecuencia angular
$X(\omega)$	Parte imaginaria de $F(\omega)$	$\bar{\omega}$	Centro de gravedad del área bajo la curva $ F(\omega) ^2$
$Y(p), Y(j\omega)$	Admitancia	$\mathcal{F}, (\mathcal{F}_c, \mathcal{F}_s)$	Transformada de Fourier (coseno, seno)
$Z(p), Z(j\omega)$	Impedancia	$\mathcal{F}^{-1}, (\mathcal{F}_c^{-1}, \mathcal{F}_s^{-1})$	Transformada inversa de Fourier (coseno, seno)
$\alpha$	Constante de Atenuación	$\mathcal{L}$	Transformada de Laplace
$\beta$	Constante de fase	$\mathcal{L}^{-1}$	Transformada inversa de Laplace
$\alpha_n, \beta_n$	Coefficientes de Fourier	$\mathcal{L}_{II}$	Transformada bilateral de Laplace
$\gamma$	Constante de propagación	$Re$	La parte real de
$\delta(t)$	Función delta o impulso unitario	$Im$	La parte imaginaria de
$\delta_T(t), \delta_{\omega_o}(\omega)$	Tren periódico de impulsos unitarios		
$\Delta f$	Dispersión en el tiempo		
$\Delta\omega$	Ancho de banda		



**BIBLIOGRAFIA**

1. Schwartz Mischa, "Transmisión de información modulación y ruido", Mc Graw Hill
2. Couch León W. II, "Sistemas de comunicación digitales y analógicos", Pearson Educación
3. Edminister Joseph A., "Circuitos Eléctricos", McGraw Hill  
IrrazavaPablo I, "Análisis de señales", Mc Graw Hill
4. Hsu Hwei P., "Análisis de Fourier Colección DDISON"
5. Stremmer F.G., "Introducción a los sistemas de comunicación", Addison Wesley Iberoamericana
6. Alan V. Oppenheim y Alan S. Willsky, "Señales de Sistemas", Pearson Educación
7. Lathi B.P "Introducción a la teoría y Sistemas de Comunicación" Limusa
8. [www.geocities.com/apuntes/señales.html](http://www.geocities.com/apuntes/señales.html)
9. [www.eae.com/seminario/telecomunicaciones.html](http://www.eae.com/seminario/telecomunicaciones.html)
10. [www.conclase.net](http://www.conclase.net)
11. [www.bd.edu.ar](http://www.bd.edu.ar)
12. [www.burn.udcd.edu.es](http://www.burn.udcd.edu.es)
13. [www.acm.org](http://www.acm.org)
14. [www.sunsite.berkeley.edu/telecos.html](http://www.sunsite.berkeley.edu/telecos.html)
15. [www.monografias.com/modul-apuntes.html](http://www.monografias.com/modul-apuntes.html)
16. [www.elmejorwarez.net/indice/señales.html](http://www.elmejorwarez.net/indice/señales.html)
17. [www.copiale.com/apuntes\\_32/cursos/electronica.html](http://www.copiale.com/apuntes_32/cursos/electronica.html)
18. [www.camelot.upt.es](http://www.camelot.upt.es)
19. [www.abra.sisbi.uba.ar/deficiones](http://www.abra.sisbi.uba.ar/deficiones)
20. HILDEBRAND, F. B., *Finite Difference Equations and Simulations*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1968.

21. LEW, H. y LESSMAN, F., *Finite Difference Equations*. New York, NY: Macmillan, 1961. SIMMONS, G. F., *Differential Equations: With Applications and Historical Notes*. New York, NY: McGraw-Hill, 1972.
22. McGraw-Hill, 1972.
23. CARRIER, G. F., KROOK, M. y PEARSON, C. E., *Functions of a Complex Variable: Theory and Technique*. Ithaca, NY: Hod Books, 1983. CHURCHILL, R. V., BROWN, J. W. y VERHEY, R. F., *Complex Variables and Applications*. 5a ed. New York NY: McGraw-Hill, 1990.
24. BRACEWELL, R. N., *The fourier Transform and Its Applications*. 2a ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1996. CHURCHILL, R. V. y BROWN, J. W., *Fourier Series and Boundary Value Problems*. 3a ed. New York, NY: McGraw-Hill, 1978.
25. DYM, H. y MCKEAN, H. P., *Fourier Series and Integrals*. New York, NY: Academic Press, 1972. EDWARDS, R. E., *Fourier Series: A Modern Introduction*. 2a ed. New York, NY: Springer-Verlag, Cambridge University Press, 1962.
26. PAPOULIS, A., *The Fourier Integral and Its Applications*. New York, NY: McGraw-Hill, 1987. WALKER, P. L., *The Theory of Fourier Series and Integrals*. New York, NY: John Wiley, 1986.
27. BASCH, E. E., y T. G. BROWN, "Introduction to Coherent Optical Fiber Transmission," *IEEE Communications Magazine*, vol. 23, mayo 1985, pp. 23-30.
28. BEDROSIAN, E. B., y S. O. RICE, "Distortion and Crosstalk of Linearly Filtered Angle-Modulated Signals," *Proceedings of the IEEE*, vol. 56, enero 1968, pp. 2-13.
29. BELL TELEPHONE LABORATORIES, *Transmission Systems for Communications*, 1a ed., Western Electric Company, Winston-Salem, NC, 1970.
30. BENDAT, J. S., y A. G. PIERSOL, *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, Wiley-Intere science, Nueva York, 1971.
31. BENEDETTO, S., E. BIGLIERI, y V. CASTELLANI, *Digital Transmission Theory*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1987.
32. BENEDETTO, S., M. MONDIN, y G. MONTORSI, "Performance Evaluation of Trellis-Coded Modulation Schemes," *Proceedings of the IEEE*, vol. 82, num. 6, junio 1994, pp. 833-855.
33. BENNETT, W. R., y J. R. DAVEY, *Data Transmission*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1965.
34. BENNETT, W. R., y S. O. RICE, "Spectral Density and Autocorrelation Functions Associated with Binary Frequency Shift Keying," *Bell System Technical Journal*, vol. 42, septiembre 1963, pp. 2355-2385.
35. BENSON, K. B., y J. C. WHITAKER, *Television Engineering Handbook*, edition revisada, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1992.

37. BERGLAND, G. D., "A Guided Tour of the Fast Fourier Transform," *IEEE Spectrum*, vol. 6, julio 1969, pp. 41-52.
38. BEST, R. E., *Phase-Locked Loops*, 2a. ed., McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1993.
39. BHARGAVA, V. K., "Forward Error Correction Schemes for Digital Communications," *IEEE Communications Magazine*, vol. 21, enero 1983, pp. 11-19.
40. BHARGAVA, V. K., D. HACCOUN, R. MATYAS, y P. P. NUSPL, *Digital Communications by Satellite*, Wiley-Interscience, Nueva York, 1981.
41. BIC, J. C, D. DUPONTEIL, y J. C. IMBEAUX, *Elements of Digital Communication*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1991.
42. BIGLIERI, E., D. DIVSALAR, P. J. MCLANE, y M. K. SIMON, *Introduction to Trellis-Coded Modulation with Applications*, Macmillan Publishing Company, Nueva York, 1991.
43. BLACKMAN, R. B. y J. W. TUKEY, *The Measurement of Power Spectra*, Dover, Nueva York, 1958.
44. BLAHUT, R. E., *Theory and Practice of Error Control Codes*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1983.
45. BLANCHARD, A., *Phase-Locked Loops*, Wiley-Interscience, Nueva York, 1976.
46. BOASHASH, B., "Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal Part 1: Fundamentals," y "Part 2: Algorithms and Applications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 80, num. 4, abril 1992, pp. 520-538, 540-568.
47. BORJESSON P. O., y C. E. W. SUNDBERG, "Simple Approximations for the Error Function  $Q(x)$  for Communication Applications," *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-27, marzo 1979, pp. 639-643.
48. BOWRON, P. y F. W. STEPHENSON, *Active Filters for Communications and Instrumentation*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1979.
49. BREMERMAN, H., *Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1965.
50. BRILEY, B. E., *Introduction to Telephone Switching*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1983.

## CONCLUSIONES

- Se elaboró la monografía basada en el tema de señales; conociendo la magnitud que abarca este tema sólo se limitó a cubrir el programa de Sistemas de señales 1; por que se consideró la base de otras materias como procesamiento digital de Señales, Líneas de transmisión, Telefonía, Control.
  - Y con la experiencia personal al cursar la materia, de la falta de bibliografía donde se pueda encontrar a la mano y de acuerdo al programa los conocimientos básicos en un sólo tomo, fue la causa lo que dio origen a este trabajo.
  - Tendiendo en consideración que el ejemplo nos ayuda a retener el conocimiento, se añadieron ejercicios, estos han demostrado ser de gran apoyo de la teoría, donde el alumno pueden ejercitar y comprobar su aprendizaje a la vez que es útil para el catedrático.
  - El desarrollo de material de apoyo busca que tanto el alumno como el catedrático tengan una mayor accesibilidad a estos temas
- 
-