Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Centro de Investigación en Matemáticas

Vectores Hipercíclicos para Múltiplos del Desplazamiento hacia Atrás

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Ronald Richard Jiménez Munguía

bajo la dirección del

Dr. Rubén A. Martínez Avendaño

PACHUCA, HIDALGO. AGOSTO 2007.

Resumen

En este trabajo se estudiará la hiperciclicidad del operador λS^*, con $|\lambda| > 1$. Para este operador se darán vectores hipercíclicos de forma explícita y además se dará un subespacio de dimensión finita de sólo vectores hipercíclicos, a excepción del cero.

Abstract

In this work we will study the hypercyclicity of operator λS^*, with $|\lambda| > 1$. For this operator we will give hypercyclic vectors in explicit form; furthermore, we will give a subspace of finite dimension consisting (except zero) of only hypercyclic vectors.

A mis padres y hermana

Agradecimientos

Agradezco a cada uno de los profesores que me impartieron clases durante mi etapa en la licenciatura, por enseñarme los conocimientos matemáticos que utilicé en la realización de esta tesis. En especial quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Rubén Martínez, por el gran apoyo y paciencia para la realización de este trabajo.

Índice general

Introducción

Un problema en el análisis funcional es, dado un operador lineal en un espacio de Hilbert, descomponer el espacio en subespacios invariantes, para así facilitar el estudio de este operador sobre este espacio, pero ¿cómo descomponer un espacio en subespacios invariantes no triviales? (es decir diferentes del espacio total y del espacio trivial). Esta pregunta podemos intentar resolverla construyendo un subespacio invariante de la siguiente manera. Supongamos que tenemos un operador lineal

$$T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert. Tomemos un $x \in \mathcal{H}, x \neq 0$, y consideremos la cerradura del subespacio generado por

$$\{x, Tx, T^2x, T^3x, ...\}.$$

Esto genera un subespacio cerrado invariante, pero puede ocurrir que este subespacio cerrado sea todo el espacio $\mathcal{H}$. Es decir, podría suceder que el subespacio generado por

$$\{x, Tx, T^2x, T^3x, ...\}$$

sea denso en $\mathcal{H}$. Si esto sucede, a T le llamamos *cíclico* y a x un vector *cíclico* para T. Pero si ocurre que este subespacio no es todo $\mathcal{H}$ entonces tendremos un subespacio invariante no trivial. Entonces, podemos decir que T tiene subespacios invariantes no triviales si y sólo si T tiene algún vector no-cíclico. El problema de decidir si cualquier operador T en un espacio de Hilbert tiene un subespacio invariante no trivial es un problema abierto.

Consideremos ahora un problema similar. Dado T, en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, intentemos descomponer a $\mathcal{H}$ en subconjuntos invariantes. Tomemos un $x \in \mathcal{H}, x \neq 0$ y consideremos la órbita de T en x, definida como

$$\mathrm{Orb}_T(x) = \{x, Tx, T^2x, T^3x, ...\}.$$

Si la cerradura de este conjunto es todo el espacio $\mathcal{H}$, es decir el conjunto es denso en $\mathcal{H}$, a T le llamaremos *hipercíclico*, y a x un vector *hipercíclico* para T.

Resulta sorprendente que existan operadores que sean hipercíclicos, pues más adelante demostraremos en el Corolario 2.4 que en un espacio de dimensión finita esto nunca sucede. Es ésta una de las razones del interés por este tema.

En la literatura el primer operador en el que se observó el fenómeno de hiperciclicidad, fuera del contexto de espacios de Hilbert, fue el operador de diferenciación en el espacio vectorial de funciones enteras. Esto fue observado por G.R. MacLane [8] en 1952. Birkhoff [2], tiempo atrás, en 1929, había probado implícitamente la hiperciclicidad del operador de traslación $T_a f(z) = f(z+a), a \neq 0$, en el espacio vectorial de funciones enteras. En estos dos ejemplos la cerradura de la órbita se toma en la topología natural del espacio de funciones enteras.
En 1982 la teoría fue estudiada por Kitai [7] y a mediados de los 80's por Beauzamy [1], Gethner y Shapiro [5]. El término *hiperciclicidad* fue aparentemente introducido con el significado actual por Beauzamy; este término fue motivado por el término *ciclicidad* ya mencionado anteriormente, pues pedir hiperciclicidad es más fuerte que pedir sólo ciclicidad.

El primer ejemplo de un operador hipercíclico en un espacio de Hilbert o de Banach fue introducido por Rolewicz [9] en 1969. Rolewicz demostró la existencia de vectores hipercíclicos para el operador λS^*, donde S^* es el operador desplazamiento hacia atrás, y $|\lambda| > 1$. Una demostración moderna de la hiperciclicidad de este operador usa el criterio de Kitai-Gethner-Shapiro [7]. Con este criterio no se muestra la forma de los vectores hipercíclicos, sólo se demuestra que existen. El objetivo principal de este trabajo es precisamente dar una forma explícita de los vectores hipercíclicos del operador λS^*.

En el Capítulo 1 daremos la notación, algunas definiciones y demostraremos algunos lemas conocidos que usaremos a lo largo de este trabajo. Además en este capítulo enunciaremos y demostraremos el Teorema de Baire (Teorema 1.12), el cual resulta fundamental para encontrar explícitamente vectores hipercíclicos.

En el Capítulo 2 estudiaremos los dos temas más importantes de este trabajo, la hiperciclicidad y la transitividad. Además mostraremos la relación que existe entre los dos, la cual, históricamente, ha permitido estudiar el concepto de hiperciclicidad.

En el Capítulo 3 se encuentra la parte más importante del trabajo original de esta tesis, el Teorema 3.1 y el Teorema 3.2. En estos se darán de forma explícita ejemplos de vectores hipercíclicos para el operador λS^*.

El cuarto y último capítulo contiene el resto del trabajo original de esta tesis, aquí daremos un subespacio de dimensión finita de sólo vectores hipercíclicos del operador λS^* de una forma especial (Teorema 3.2).

Finalizamos esta tesis demostrando un teorema de Bourdon (Teorema 4.3), que dice que, para cualquier operador hipercíclico, existe un subespacio de dimensión infinita de sólo vectores hipercíclicos.

Capítulo 1

Conceptos Básicos

Este capítulo está dedicado a introducir los conceptos elementales y la notación que usaremos en este trabajo. También demostraremos algunos resultados básicos que utilizaremos a lo largo del trabajo.

1.1 Algo de Análisis Funcional

Los espacios vectoriales que consideraremos aquí tienen un producto interno denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, el cual supondremos es lineal en la primera coordenada.

Recordemos que un espacio vectorial con producto interno también es un espacio normado, con la norma inducida por el producto interno, la cual se define como $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.

Un espacio vectorial normado V es **completo** si toda sucesión de Cauchy en V converge en V. Un espacio vectorial con producto interno y completo es un espacio de **Hilbert**, que denotaremos por $\mathcal{H}$.

El espacio de Hilbert que usaremos principalmente en este trabajo es ℓ^2, que a continuación se define.

Definición 1.1. El espacio ℓ^2 es el conjunto de todas las sucesiones complejas $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que son cuadrado-sumables, esto es

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Con las siguientes definiciones de suma y de producto por escalar, el conjunto ℓ^2 es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Sean $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Definimos:

$$x + y = \{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}$$

y

$$\lambda x = \{\lambda x_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Se puede demostrar que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n},$$

donde $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, define un producto interno en ℓ^2, véase por ejemplo [4]. Una demostración de que ℓ^2 es completo, se encuentra en [12].

Para facilitar notación, definimos $\overline{A}$ como la adherencia de A y definimos $A^{\circ} :=$ como el interior de A, donde A es un conjunto.

Un conjunto V contenido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es **denso** en $\mathcal{H}$ si su adherencia es igual a $\mathcal{H}$, es decir si para todo $x \in \mathcal{H}$ existe una sucesión en V que tenga como límite a x. Si además existe tal conjunto V numerable, a $\mathcal{H}$ le llamaremos un espacio de Hilbert **separable**. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ es un espacio de Hilbert separable ya que contiene a $\mathbb{Q}$ que es un conjunto numerable denso en $\mathbb{R}$. Otro ejemplo es ℓ^2 ya que el conjunto de las sucesiones $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $x_j \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$, tal que estas sucesiones sólo tienen un número finito de entradas diferentes de cero, es numerable y es denso en ℓ^2. Los espacios de Hilbert que usaremos en este trabajo son espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ y son **separables**. Decimos que $A \subseteq M$, es **nada denso** (denso en ninguna parte) si $\left(\overline{A}\right)^{\circ}$ es vacío, equivalentemente, si $\left(\overline{A}\right)^{c}$ es denso.

Definición 1.2. Un **operador** $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ es una función lineal y acotada en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Se puede demostrar que una función lineal es acotada si y sólo si es continua, véase [12].

Lema 1.3. *La* ***norma*** *de un operador acotado $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ definida como*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\}$$

es en realidad una norma.

Demostración. Sean T y L operadores de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$.

(i). $\|T\| > 0$ si $T \neq 0$, el operador cero.

Por la definición de la norma tenemos que siempre se cumple que $\|T\| \geq 0$. Si $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\} = 0$, entonces $\|Tx\| = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ con $\|x\| \leq 1$, pero esto sucede si y sólo si $T = 0$, el operador cero.

(ii). $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\lambda T\| &= \sup\{\|\lambda Tx\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{|\lambda|\|Tx\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\} \\
&= |\lambda| \sup\{\|Tx\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\} \\
&= |\lambda|\|T\|.
\end{aligned}$$

(iii). $\|T + L\| \leq \|T\| + \|L\|$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\|T + L\| &= \sup\{\|(T + L)x\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\|Tx + Lx\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|Tx\| + \|Lx\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|Tx\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\} + \sup\{\|Lx\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\} \\
&= \|T\| + \|L\| \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

A continuación daremos definiciones de los operadores que usaremos a lo largo del trabajo.

Definición 1.4. Se define el **operador desplazamiento hacia adelante** S en ℓ^2 como

$$S(x_0, x_1, x_2, ...) = (0, x_0, x_1, ...).$$

Claramente S es una isometría; es decir $\|Sx\| = \|x\|$ para todo $x \in \ell^2$. Se sigue claramente que S es acotado y $\|S\| = 1$.

Definición 1.5. Sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, definimos T^* el **operador adjunto** de T, como el operador $T^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ que cumple, para todo $x, y \in \mathcal{H}$, la siguiente igualdad:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle .$$

Para una demostración de la existencia y unicidad de T^* véase [4].

Definición 1.6. Se define el **operador desplazamiento hacia atrás** B en ℓ^2 como

$$B(x_0, x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, x_3, ...).$$

Observemos que B es acotado y $\|B\| = 1$, pero B no es una isometría.
Es claro que para todo $x, y \in \ell^2$ se tiene la siguiente igualdad:

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, By \rangle \,,$$

y entonces B es el operador adjunto del operador S. En el resto de este trabajo nos referiremos a B como S^*. Note que $S^*S = I$, pero $SS^* \neq I$.

Un subespacio o un subconjunto U de un espacio $\mathcal{H}$ es **invariante** bajo una operador T, si éste manda a cada elemento de U a otro elemento de U. Por ejemplo, para $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ el conjunto

$$\mathrm{Orb}_T(x) = \{x, Tx, T^2x, T^3x, ...\}$$

es invariante bajo T.

Para un operador $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un **autovalor** es un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que existe un vector $x \neq 0$ que cumple $Tx = \lambda x$. Al vector x le llamamos un **autovector** para T.

A continuación demostraremos algunos lemas que nos servirán más adelante.

Lema 1.7. *Sea X un espacio vectorial normado. Si tenemos un conjunto $U \subseteq X$, tal que U es denso en X, entonces para $\lambda \neq 0$ el conjunto λU también es denso en X.*

Demostración. Sea $x \in X$. Entonces $\frac{1}{\lambda}x \in X$, por lo tanto existe $\{u_n\} \subseteq U$ tal que $u_n \longrightarrow \frac{1}{\lambda}x$. Por lo cual $\lambda u_n \longrightarrow x$ y entonces $x \in \overline{\lambda U}$. Entonces el conjunto λU es denso en X. ■

Lema 1.8. *Sea X un espacio vectorial normado. Sea U un conjunto denso en X y sea F un conjunto finito en U. Entonces el conjunto $U_0 := U \backslash F$ es denso en X.*

Demostración. Queremos demostrar que $\overline{U_0} = \mathcal{H}$. Sea $x \in \mathcal{H}$, demostremos que para todo $r > 0$, se tiene que $B_r(x) \cap U_0 \neq \emptyset$. Si $x \in U_0$, entonces para todo $r > 0$, se tiene que $B_r(x) \cap U_0 \neq \emptyset$. Si $x \notin U_0$, procedamos por contradicción. Supongamos que existe un $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap U_0 = \emptyset$, es decir $B_r(x) \cap U$ contiene sólo elementos de F (este conjunto es no vacío por ser U denso). Por ser X espacio vectorial, $B_r(x)$ es un conjunto infinito y por lo tanto existe $y \in B_r(x) \backslash F$. Sea

$$d = \text{mín}\{d(y,z) : z \in F\} > 0.$$

Ahora sea $d_0 > 0$, tal que $d_0 < d$ y $B_{d_0}(y) \subseteq B_r(x)$. Observemos que $B_{d_0}(y) \cap F = \emptyset$ por la elección de d. Por ser U denso, $B_{d_0}(y) \cap U \neq \emptyset$. Entonces $B_{d_0}(y) \cap U_0 \neq \emptyset$ pues $B_{d_0}(y) \cap U \neq \emptyset$ y $B_{d_0}(y) \cap F = \emptyset$. Por lo tanto $\emptyset \neq B_{d_0}(y) \cap U_0 \subseteq B_r(x) \cap U_0$. ¡Contradicción! Entonces $B_r(x) \cap U_0 \neq \emptyset$ para todo $r > 0$ y U_0 es denso en X. ■

Lema 1.9. *Sean (M_1, d_1) y (M_2, d_2) espacios métricos y sea $f : M_1 \longrightarrow M_2$ una función continua y suprayectiva. Si A es denso en M_1 entonces $f(A)$ es denso en M_2.*

Demostración. Sabemos que A es denso en M_1, esto es $\overline{A} = M_1$, queremos probar que $f(A)$ es denso en M_2, esto es $\overline{f(A)} = M_2$. La contención $\overline{f(A)} \subseteq M_2$ es obvia.

Probemos que $M_2 \subseteq \overline{f(A)}$. Sea $y \in M_2$. Como f es suprayectiva existe un $z \in M_1 = \overline{A}$ tal que $f(z) = y$. Por la densidad de A existe una sucesión $x_n \in A$ tal que $x_n \longrightarrow z$. Como f es continua, entonces $f(x_n) \longrightarrow f(z)$ por lo tanto $y = f(z) \in \overline{f(A)}$. Es decir $M_2 \subseteq \overline{f(A)}$ como queríamos. ■

En realidad se pueden debilitar las hipótesis del lema anterior. El siguiente lema nos muestra esto.

Lema 1.10. *Sean (M_1, d_1) y (M_2, d_2) espacios métricos y sea $f : M_1 \longrightarrow M_2$ una función continua tal que $f(M_1)$ es denso en M_2. Si A es denso en M_1 entonces $f(A)$ es denso en M_2.*

Demostración. Sabemos que A es denso en M_1, esto es $\overline{A} = M_1$, queremos probar que $f(A)$ es denso en M_2, esto es $\overline{f(A)} = M_2$. La contención $\overline{f(A)} \subseteq M_2$ es obvia.

Probemos que $M_2 \subseteq \overline{f(A)}$. Sea $y \in M_2$. Como $f(M_1)$ es denso en M_2, esto es $\overline{f(M_1)} = M_2$, entonces $y \in \overline{f(M_1)}$, y como A es denso en M_1 tenemos que $\overline{f(M_1)} = \overline{f(\overline{A})}$. Ahora falta probar que $\overline{f(\overline{A})} = \overline{f(A)}$. Para esto es suficiente mostrar que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Sea $z \in \overline{A}$, entonces existe $\{x_n\}$ una sucesión en A tal que $x_n \longrightarrow z$, y como f es continua tenemos que $f(x_n) \longrightarrow f(z)$, por lo tanto $f(z) \in \overline{f(A)}$. Es decir, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, como queríamos. ■

Lema 1.11. *Sea (M, d) un espacio métrico y sean $f_1 : M \longrightarrow M$ y $f_2 : M \longrightarrow M$ dos funciones con $f_1(M)$ y $f_2(M)$ densos en M. Entonces $(f_1 \circ f_2)(M)$ es denso en M.*

Demostración. Queremos probar que $(f_1 \circ f_2)(M)$ es denso en M. Tenemos que $(f_1 \circ f_2)(M) = f_1(f_2(M))$, y por el Lema 1.10, la función f_1 manda conjuntos densos en conjuntos densos. Por lo tanto, $f_1(f_2(M))$ es denso. ■

1.2

Teorema de Baire

A continuación demostraremos un teorema clásico en el análisis de espacios métricos completos, el cual es muy importante en el desarrollo de este trabajo. A este teorema se le conoce como el Teorema de Baire.

Teorema 1.12. ***(Baire)**. Sea (M, d) un espacio métrico completo y sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos abiertos densos en M. Entonces*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

es denso en M.

Demostración. Sea V un abierto no vacío en M. Queremos demostrar que

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \bigcap V \neq \emptyset.$$

Observemos que $U_1 \cap V$ es no vacío y abierto, ya que U_1 es un abierto denso en M. Sea $x_1 \in U_1 \cap V$. Existe r_1 con $0 < r_1 < 2^{-1}$ tal que

$$B_{r_1}(x_1) \subseteq \overline{B_{r_1}(x_1)} \subseteq U_1 \cap V.$$

Observemos que $U_2 \cap B_{r_1}(x_1)$ es no vacío y abierto, ya que U_2 es un abierto denso en M. Sea $x_2 \in U_2 \cap B_{r_1}(x_1)$. Existe r_2 con $0 < r_2 < 2^{-2}$ tal que

$$B_{r_2}(x_2) \subseteq \overline{B_{r_2}(x_2)} \subseteq U_2 \cap B_{r_1}(x_1).$$

En general, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en M, y una sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ de reales positivos tales que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq \overline{B_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subseteq U_{n+1} \cap B_{r_n}(x_n)$$

con $0 < r_n < 2^{-n}$. Observemos que si $s \geq t$ entonces $x_s \in B_{r_t}(x_t)$.
Ahora demostremos que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-N} < 2^{-1}\epsilon$. Si $m, n \geq N$ entonces $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_N) + d(x_m, x_N)$.
Ahora como $x_n, x_m \in B_{r_N}(x_N)$ entonces

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_N) + d(x_m, x_N) \leq r_N + r_N < 2(2^{-N}) < \epsilon.$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ es de Cauchy. Como M es completo entonces $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n =: x$ existe. Ahora queremos demostrar que $x \in V$ y que $x \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos primero que $x \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea n fijo. Para todo $k \geq n$

$$x_k \in B_{r_n}(x_n) \subseteq \overline{B_{r_n}(x_n)} \subseteq U_n.$$

Como $x_k \in \overline{B_{r_n}(x_n)}$, haciendo $k \longrightarrow \infty$, tenemos que $x \in \overline{B_{r_n}(x_n)}$. Como $\overline{B_{r_n}(x_n)} \subseteq U_n$, tenemos $x \in U_n$, entonces

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Sólo falta demostrar que $x \in V$. Si $k \geq 1$

$$x_k \in B_{r_1}(x_1) \subseteq \overline{B_{r_1}(x_1)} \subseteq U_1 \cap V \subseteq V.$$

Tomando límite cuando $k \longrightarrow \infty$, se tiene

$$x \in \overline{B_{r_1}(x_1)} \subseteq V.$$

Entonces $x \in (\cap_{n=1}^{\infty} U_n) \cap V$, que es lo que queríamos demostrar. Por lo tanto $(\cap_{n=1}^{\infty} U_n)$ es denso en M. ∎

Para finalizar esta sección, mostraremos una reformulación del teorema de Baire. El teorema reformulado se le conoce como el teorema de la Categoría de Baire y queda como sigue.

Teorema 1.13. ***(Categoría de Baire)****. Sea (M, d) un espacio métrico completo. Ningún conjunto abierto no vacío es la unión numerable de conjuntos nada densos.*

Demostración. Sea W abierto no vacío tal que $W = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ donde F_n es nada denso. Definamos $U_n := \left(\overline{F_n}\right)^c$, el cual es abierto y denso para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces por el teorema anterior $\cap_{n=1}^{\infty} U_n$ es denso.

Entonces

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \bigcap W \neq \emptyset,$$

por lo tanto

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{F_n}\right)^c \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \neq \emptyset.$$

Pero si $x \in \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ entonces $x \in F_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $x \in \overline{F_k}$ y entonces $x \in \cup_{n=1}^{\infty} \overline{F_n}$ y por lo cual $x \notin \left(\cup_{n=1}^{\infty} \overline{F_n}\right)^c$. ¡Contradicción! Entonces ningún abierto no vacío es la unión numerable de nada densos. ∎

Capítulo 2

Hiperciclicidad y Transitividad

En este capítulo estudiaremos la hiperciclicidad en dimensión finita y usaremos el Teorema de Baire (Teorema 1.12) para estudiar la relación entre hiperciclicidad y transitividad. Por último enunciaremos y demostraremos el Criterio de Kitai, y a partir de éste demostraremos la hiperciclicidad del operador λS^*, con $|\lambda| > 1$. Continuando con notación convencional, $\mathcal{H}$ denotará siempre un espacio de Hilbert, no necesariamente de dimensión infinita.

2.1 Hiperciclicidad

Empezaremos con unas definiciones.

Definición 2.1. Sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$. Decimos que T es **cíclico** si existe un $x \in \mathcal{H}$ tal que el subespacio generado por

$$\mathrm{Orb}_T(x) := \{x, Tx, T^2x, T^3x, ...\}$$

es denso en $\mathcal{H}$. Además decimos que el vector x es un vector cíclico para T.

Definición 2.2. Sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$. Decimos que T es **hipercíclico** si existe un $x \in \mathcal{H}$ tal que el conjunto

$$\mathrm{Orb}_T(x) := \{x, Tx, T^2x, T^3x, ...\}$$

es denso en $\mathcal{H}$. Además decimos que el vector x es un vector hipercíclico para T.

Note que en las definiciones anteriores, x tiene que ser necesariamente diferente de cero.

Acerca de hiperciclicidad las primeras preguntas que uno se hace son ¿existen vectores hipercíclicos en dimensión finita?, ¿cuál es su estructura? La respuesta a la primera pregunta es un afortunado no, al menos para este trabajo, porque así hace más interesante el estudio de hiperciclicidad. Un corolario del teorema que demostraremos a continuación prueba que no existen vectores hipercíclicos en dimensión finita. Este teorema, que es bien conocido, nos da una condición para que un operador no sea hipercíclico.

Teorema 2.3. *Sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador. Si $T^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, el operador adjunto de T, tiene un autovalor λ entonces T no es hipercíclico.*

Demostración. Procedamos por contradicción. Supongamos que T tiene un vector hipercíclico $x \in \mathcal{H}$. Entonces el conjunto

$$\{x, Tx, T^2x, T^3x, ...\}$$

es denso en $\mathcal{H}$. Sabemos que $T^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tiene un autovalor λ y un autovector y de T^*, $y \neq 0$; es decir, $T^*y = \lambda y$. Por otro lado tenemos la siguiente igualdad

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \overline{\lambda} \langle x, y\rangle .$$

Entonces

$$\langle T^n x, y\rangle = \left(\overline{\lambda}\right)^n \langle x, y\rangle \tag{2.1}$$

Sea $f := \langle \cdot, y\rangle : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$. Observamos a continuación que la función f es continua y suprayectiva. La función f es continua porque el producto interno lo es. La suprayectividad de f se da porque para cada $\beta \in \mathbb{C}$ se tiene que si $z = \dfrac{\beta y}{\|y\|^2}$ entonces $f(z) = \langle z, y\rangle = \beta$.

Ahora, como por hipótesis, el conjunto

$$\mathrm{Orb}_T(x) = \{x, Tx, T^2x, T^3x, ...\}$$

es denso en $\mathcal{H}$, entonces por el Lema 1.9 el conjunto

$$f(\mathrm{Orb}_T(x)) = \{\langle x, y\rangle , \langle Tx, y\rangle , \left\langle T^2x, y\right\rangle , \left\langle T^3x, y\right\rangle , ...\},$$

con $y \in \mathcal{H}$ autovector de T^*, es denso en $\mathbb{C}$. Pero por (2.1) el conjunto $f(\mathrm{Orb}_T(x))$ es igual a

$$\{\langle x, y\rangle , \overline{\lambda} \langle x, y\rangle , (\overline{\lambda})^2 \langle x, y\rangle , (\overline{\lambda})^3 \langle x, y\rangle , ...\} = \langle x, y\rangle \{1, \overline{\lambda}, (\overline{\lambda})^2, (\overline{\lambda})^3, ...\}.$$

A continuación mostraremos que este conjunto no puede ser denso en $\mathbb{C}$. Tenemos tres casos.

Caso 1. $|\lambda| = 1$. En este caso el conjunto $\overline{f(\mathrm{Orb}_T(x))}$ está contenido en el círculo de radio igual $|\langle x, y\rangle|$. Por lo tanto el conjunto $f(\mathrm{Orb}_T(x))$ no puede ser denso en $\mathbb{C}$.

Caso 2. $|\lambda| > 1$. En este caso el conjunto $f(\mathrm{Orb}_T(x))$ sólo contiene números complejos de modulo mayor o igual a $|\langle x, y\rangle|$. Por lo tanto todos los números complejos que tienen norma menor a $|\langle x, y\rangle|$ no están en $\overline{f(\mathrm{Orb}_T(x))}$, entonces el conjunto $f(\mathrm{Orb}_T(x))$ no es denso en $\mathbb{C}$.

Caso 3. $|\lambda| < 1$. Este caso es análogo al anterior.

¡Contradicción! Entonces el operador T no es hipercíclico. ∎

El siguiente corolario prueba que no existen vectores hipercíclicos en dimensión finita.

Corolario 2.4. *Sea $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un operador, entonces T no es hipercíclico.*

Demostración. Como $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, entonces $T^* : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, el operador adjunto de T tiene un autovalor λ, por ser un operador en un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. Entonces por el Teorema 2.3 el operador T no es hipercíclico. ∎

2.2

Transitividad

En esta sección definiremos transitividad y mostraremos un lema, en el cual estableceremos la relación entre un operador hipercíclico y un operador transitivo. Los resultados de esta sección son bien conocidos.

Definición 2.5. Sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$. Decimos que T es **transitivo** si para todo U y V abiertos no vacíos en $\mathcal{H}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

A continuación definiremos dos conjuntos importantes que usaremos para establecer la relación entre un operador hipercíclico y un operador transitivo.

Definición 2.6. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador. Definimos

$$\mathrm{HC}(T) := \{x \in \mathcal{H} : Orb_T(x) \ \ es \ \ densa \ \ en \ \ \mathcal{H}\}.$$

Note que, en principio, $\mathrm{HC}(T)$ podría ser vacío.

Definición 2.7. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador. Sea A un conjunto denso numerable en $\mathcal{H}$ y sea $\{B_j\}$ el conjunto numerable de bolas abiertas con radio racional y centro en los puntos de A. Definimos,

$$\mathrm{Trans}(T) := \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B_j).$$

Note que, en principio, $\mathrm{Trans}(T)$ podría ser vacío. El siguiente lema demuestra que $\mathrm{Trans}(T)$ no depende de A.

Lema 2.8. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador. Entonces* $\mathrm{HC}(T) = \mathrm{Trans}(T)$.

Demostración. Tomemos $x \in \mathrm{HC}(T)$. Sabemos que el conjunto $\mathrm{Orb}_T(x)$ es denso en $\mathcal{H}$. Por lo cual si tomamos j fijo existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x \in B_j$. Entonces $x \in T^{-n}(B_j)$ y por lo tanto $x \in \cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B_j)$ para todo j. Entonces,

$$x \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B_j).$$

Por lo tanto $\mathrm{HC}(T) \subseteq \mathrm{Trans}(T)$.

Ahora tomemos un $x \in \mathrm{Trans}(T)$. Queremos demostrar que el conjunto $\mathrm{Orb}_T(x)$ es denso en $\mathcal{H}$. Sea V un conjunto abierto arbitrario no vacío. Queremos demostrar que el conjunto $\mathrm{Orb}_T(x) \cap V$ es diferente del vacío. Como el conjunto A, de la Definición 2.7, es denso en $\mathcal{H}$, entonces existe j tal que $B_j \subseteq V$. Como $x \in \mathrm{Trans}(T)$ entonces $x \in \cap_{j=0}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B_j)$. Es decir, para todo $j \in \mathbb{N}_0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x \in B_j$. Como $B_j \subseteq V$, entonces para este $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $T^n x \in V$. Ahora como $T^n x \in \mathrm{Orb}_T(x)$ entonces $\mathrm{Orb}_T(x) \cap V \neq \emptyset$. Como V fue arbitrario, se sigue que el conjunto $\mathrm{Orb}_T(x)$ es denso en $\mathcal{H}$. Entonces, $\mathrm{Trans}(T) \subseteq \mathrm{HC}(T)$. ∎

Obsérvese que el teorema anterior es cierto aunque los conjuntos sean vacíos.

A continuación mostraremos un lema que demuestra que, si existe un vector hipercíclico para un operador T sobre $\mathcal{H}$, entonces existen una infinidad de ellos.

Lema 2.9. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$. Si existe un vector $x \in \mathcal{H}$ hipercíclico para T entonces el conjunto $\mathrm{HC}(T)$ es denso en $\mathcal{H}$.*

Demostración. Observemos que, para $N \geq 1$, el vector $T^N x$ también es hipercíclico, pues $\mathrm{Orb}_T(x)$ y $\mathrm{Orb}_T(T^N x)$ difieren en un conjunto finito y por el Lema 1.8 sabemos que si tenemos un conjunto denso y le quitamos un conjunto finito de elementos éste sigue siendo denso. Por lo anterior, el conjunto $\mathrm{HC}(T)$ contiene al conjunto $\mathrm{Orb}_T(x)$ y entonces $\mathrm{HC}(T)$ es denso en $\mathcal{H}$. ∎

Resulta ser que un operador es hipercíclico si y sólo si es un operador transitivo. El siguiente teorema nos muestra esto.

Teorema 2.10. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, y sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador. Entonces T es hipercíclico si y sólo si T es transitivo.*

Demostración. Supongamos que T es hipercíclico. Entonces existe un vector x hipercíclico. Queremos demostrar que T es transitivo, es decir para U y V abiertos arbitrarios en $\mathcal{H}$, queremos demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Como T es hipercíclico el conjunto $\mathrm{HC}(T) \neq \emptyset$, y por el Lema 2.9, se tiene que $\mathrm{HC}(T)$ es denso en $\mathcal{H}$. Por el Lema 2.8, el conjunto $\mathrm{HC}(T)$ es igual al conjunto $\mathrm{Trans}(T)$; entonces, el conjunto $\mathrm{Trans}(T) = \cap_{j=0}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B_j)$ es denso en $\mathcal{H}$ y por lo tanto $\cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B_j)$ es denso para cada $j \in \mathbb{N}_0$. Como $\cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B_j)$ es denso en $\mathcal{H}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-n}(B_j) \cap V \neq \emptyset$. Recordemos que el conjunto A de la Definición 2.7, es un conjunto denso en $\mathcal{H}$, entonces existe $j \in \mathbb{N}_0$ tal que $B_j \subseteq U$. Por lo tanto $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ y entonces T es transitivo.

Supongamos ahora que T es transitivo. Queremos demostrar que T es hipercíclico, pero por el Lema 2.8 basta demostrar que $\mathrm{Trans}(T)$ es diferente del vacío. Demostremos primero que el conjunto $\cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B_j)$ es denso en $\mathcal{H}$, es decir queremos que para cualquier abierto V en $\mathcal{H}$, el conjunto $\cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B_j) \cap V$ sea diferente del vacío. Pero como T es transitivo entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-n}(B_j) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto $\cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B_j)$ es denso en $\mathcal{H}$ para cada $j \in \mathbb{N}_0$. Entonces por el Teorema de Baire (Teorema 1.12) el conjunto $\cap_{j=0}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B_j)$ es denso en $\mathcal{H}$ (en particular es no vacío). Por lo tanto el conjunto $\mathrm{Trans}(T)$ es diferente del vacío y entonces T es un operador hipercíclico. ∎

2.3

El Criterio de Kitai y el Operador λS^*

En espacios separables de dimensión infinita existen vectores hipercíclicos, y el siguiente teorema nos muestra un criterio para saber si un operador es hipercíclico.

Teorema 2.11. *(Criterio de Kitai [7]). Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal y continuo. Supongamos que existen B un subconjunto denso en $\mathcal{H}$ y una función $R : B \longrightarrow B$ (no necesariamente lineal ni continua) tal que:*

i) $T \circ R = I_B$,

ii) $R^n x \longrightarrow 0$ *cuando* $n \longrightarrow \infty$, $\forall\, x \in B$,

iii) $T^n x \longrightarrow 0$ *cuando* $n \longrightarrow \infty$, $\forall\, x \in B$.

Entonces, T es hipercíclico en $\mathcal{H}$.

Demostración. Por el Teorema 2.10 basta probar que T es transitivo. Sean U y V dos abiertos cualesquiera en $\mathcal{H}$. Por densidad de B, existen $x \in V$ y $y \in U$ con $x, y \in B$. Por ser U y V abiertos podemos encontrar $\epsilon > 0$ tales que existen B_1 y B_2 dos bolas de radio ϵ y centro en x y y tal que $B_1 \subset V$ y $B_2 \subset U$. Por hipótesis existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|T^n x\| < \epsilon$ y $\|R^n y\| < \epsilon$.

Como $\|R^n y\| < \epsilon$, sabemos que $x + R^n y \in V$. Probaremos que $T^n(x + R^n y) \in U$. Tenemos

$$T^n(x + R^n y) = T^n x + T^n R^n y$$

y por (i)

$$T^n x + T^n R^n y = T^n x + y,$$

y como $\|T^n x\| < \epsilon$ entonces

$$T^n x + y \in U.$$

Por lo tanto, el conjunto $T^n(V) \cap U \neq \emptyset$. Ahora si $v \in V$ tal que $T^n v \in U$ entonces $v \in T^{-n}(U)$, y por lo tanto $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. Entonces T es transitivo y por el Teorema 2.10 es hipercíclico. ∎

A continuación daremos un ejemplo de un operador que resulta ser hipercíclico, y para verificarlo usaremos el Criterio de Kitai (Teorema 2.11).

Ejemplo 2.12. Sea ℓ^2 el espacio de Hilbert de las sucesiones cuadrado sumables. Definamos $T = \lambda S^*$, con S^* el operador desplazamiento hacia atrás y con λ un número complejo tal que $|\lambda| > 1$. Entonces $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ es un operador hipercíclico.

Demostración. Tomemos $e_i := (0, 0, ..., 0, 1, 0, 0, ...)$, donde el uno está en la i-ésima posición. Sea B el subespacio lineal generado por $\{e_i : i \geq 0\}$. Sabemos que B es denso en ℓ^2. Tenemos que para cada i fijo, $T^n e_i$ es eventualmente cero. Si $x \in B$, entonces

$$x = \sum_{n=0}^{N} a_i e_i,$$

donde $N \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$ para $i = 0, \ldots, N$. Entonces $T^n x \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ para todo $x \in B$. Sea $R := \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ definida por $R = \lambda^{-1} S$, donde S el operador desplazamiento hacia adelante. Se comprueba sin dificultad que $(T \circ R)x = x$, para todo $x \in \ell^2$. Por otra parte, $\|R^n\| = |\lambda|^{-n} \|S^n\| = |\lambda|^{-n}$, luego $R^n x \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, para todo $x \in \ell^2$. Entonces por el Criterio de Kitai (Teorema 2.11) tenemos que $T = \lambda S^*$ es hipercíclico. ∎

En el teorema anterior notemos que si $|\lambda| \leq 1$ entonces $R^n x$ no tiende a cero cuando $n \longrightarrow \infty$. De aquí la importancia de que $|\lambda| > 1$. De hecho el operador $T = \lambda S^*$ no puede ser hipercíclico para $|\lambda| \leq 1$. Supongamos que, existiera un vector x hipercíclico para λS^*, con $|\lambda| \leq 1$. Entonces tendríamos que $\|\lambda S^*\| \leq \|S^*\|$. Ahora como $\|S^*\| = 1$, tendríamos que todos los elementos del conjunto $\mathrm{Orb}_{\lambda S^*}(x)$ serían vectores de norma menor o igual a $\|x\|$, por lo tanto $\mathrm{Orb}_{\lambda S^*}(x)$ no sería denso.

Capítulo 3

Vectores Hipercíclicos del Operador λS^*

Este capítulo está dedicado a resolver el problema principal de esta tesis: encontrar un vector hipercíclico de forma explícita para el operador λS^*, con $|\lambda| > 1$. Esto se obtiene en el Teorema 3.1 y en el Teorema 3.2.

En el capítulo anterior ya demostramos que este operador es hipercíclico. En este capítulo, encontraremos explícitamente un vector en $\mathrm{Trans}(\lambda S^*)$, el cual, por el Lema 2.8 es un vector hipercíclico.

3.1

El Caso $\lambda = 2$

Para facilitar notación, haremos en esta sección el caso $\lambda = 2$.

Para encontrar el vector hipercíclico del operador $2S^*$ usaremos el Lema 2.8. Recordemos las condiciones de este lema: necesitaremos un conjunto numerable de bolas de radio racional y centros en un conjunto denso en el espacio de Hilbert que estemos trabajando, en este caso ℓ^2.

Definamos el siguiente conjunto,

$$G := \{\{g_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^2 : g_j \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i, g_j = 0 \text{ para todo } j \geq n, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Es decir, G son los vectores en ℓ^2 tales que tienen un número finito de entradas diferentes de cero y cada una de ellas tiene parte real y parte imaginaria racional. Observemos que G es denso en ℓ^2 y además es un conjunto numerable.

Ahora definamos,

$$\mathcal{B} := \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \bigcup_{g \in G} \{B_r(g)\},$$

es decir el conjunto de las bolas de radio racional y de centro en un elemento de G. El conjunto $\mathcal{B}$ es numerable porque es unión numerable de numerables, ya que los racionales y el conjunto G son numerables. A los elementos de $\mathcal{B}$ los denotaremos como B_j con $j \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde sus respectivos radio racional y centro en G les denotaremos q_j y g_j respectivamente, es decir tendrán el mismo subíndice que B_j. Obsérvese que, bajo la numeración de los elementos de $\mathcal{B}$, q_j podría ser igual a q_k, aún si $j \neq k$. Análogamente g_j podría ser igual a g_k, aún si $j \neq k$.

A este conjunto $\mathcal{B}$ le pediremos la siguiente condición: $q_0 > 1$, $q_1 > \frac{1}{2^1}$, $q_2 > \frac{1}{2^2}$; esto es, $q_k > \frac{1}{2^k}$, para $k \in \mathbb{N}$. Veamos que esto es posible. Supongamos que para B_0, el radio q_0 no es mayor que uno. Entonces buscamos en $\mathcal{B}$ otro B_k que tenga el mismo centro pero el radio mayor que uno e intercambiamos sus posiciones. Esto se puede hacer pues para cada centro existe una infinidad de radios. Siguiendo de esta manera vemos que es posible encontrar un B_1, con un radio mayor que $\frac{1}{2}$, un B_2 con un radio mayor $\frac{1}{2^2}$, y así sucesivamente. Observemos que la numeración de este $\mathcal{B}$ depende del radio de los B_j. El conjunto $\mathcal{B}$ lo usamos para definir $\mathrm{Trans}(\lambda S^*)$ (Definición 2.7).

A continuación encontraremos explícitamente un vector hipercíclico del operador $2S^*$. Según el Lema 2.8, si existe un vector en el conjunto $\mathrm{Trans}(2S^*)$ entonces ese vector está en el conjunto $\mathrm{HC}(2S^*)$; es decir, su órbita es densa. Esto significa que el operador $2S^*$ es hipercíclico, lo cual ya sabemos.

Primero definiremos para cada $j \in \mathbb{N}_0$ el conjunto

$$A_j := \{f \in \ell^2 : \exists m \in \mathbb{N}, \|(2S^*)^m f - g_j\| < q_j\}.$$

Observemos que este conjunto es la unión sobre todo $n \in \mathbb{N}$ de los vectores $f \in \ell^2$ tal que $(2S^*)^n f \subseteq B_j$. Esto es $A_j = \cup_{n=1}^{\infty} (2S^*)^{-n}(B_j)$, para j fijo.

Recordemos que la numeración correspondiente al conjunto A_j también es la numeración del centro y radio del B_j correspondiente.

El siguiente teorema nos da el vector f que estamos buscando. Antes necesitamos introducir la siguiente notación. Recordemos que los elementos del conjunto G tienen un número finito de entradas diferentes de cero. Para $g_j \in G$ al índice correspondiente a la última posición que tenga la entrada diferente de cero le llamaremos m_j. Por ejemplo, si

$$g_j = \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{20}, 0, 0, 0, \ldots\right),$$

entonces el $m_j = 20$.

Ahora demostramos el resultado principal de esta tesis. Recordemos que $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Teorema 3.1. *Para cada $j \in \mathbb{N}_0$, sea*

$$A_j := \{f \in \ell^2 : \exists m \in \mathbb{N}, \|(2S^*)^m f - g_j\| < q_j\},$$

con $\mathcal{B}$ y G como los definimos antes y sea

$$f = g_0 + \frac{S^{n_1} g_1}{2^{n_1}} + \frac{S^{n_2} g_2}{2^{n_2}} + \frac{S^{n_3} g_3}{2^{n_3}} + ... + \frac{S^{n_k} g_k}{2^{n_k}} + ...$$

donde g_j es el centro de B_j. Para todo $k \in \mathbb{N}$, escojamos n_k tales que $n_k > m_{k-1} + n_{k-1}$ y $\frac{1}{2^k} \geq \frac{\| g_k \|}{2^{n_k - n_{k-1}}}$ con $n_0 = 0$.

Entonces f está en A_j para todo $j \in \mathbb{N}_0$.

Demostración.

Primero demostremos que $f \in \ell^2$, es decir f pertenece a las sucesiones cuadrado sumables.

Observemos lo siguiente, supongamos $k > r$, entonces

$$\langle S^{n_k} g_k, S^{n_r} g_r \rangle = \langle g_k, (S^*)^{n_k} S^{n_r} g_r \rangle = \left\langle g_k, (S^*)^{n_k - n_r} g_r \right\rangle,$$

ahora por hipótesis $n_k - n_r > m_r$, es decir, a g_r le aplicamos tantas veces S^* que sus entradas diferentes cero desaparecen, entonces

$$\left\langle S^{n_k - n_r} g_k, g_r \right\rangle = 0.$$

Note que en f, cada sumando es ortogonal por lo anterior, por lo tanto para que f esté en ℓ^2, es suficiente demostrar que

$$\left\| \frac{S^{n_1} g_1}{2^{n_1}} \right\|^2 + \left\| \frac{S^{n_2} g_2}{2^{n_2}} \right\|^2 + \left\| \frac{S^{n_3} g_3}{2^{n_3}} \right\|^2 + \cdots + \left\| \frac{S^{n_k} g_k}{2^{n_k}} \right\|^2 + \cdots < \infty,$$

es decir que esta serie converge.

Por hipótesis para $k \in \mathbb{N}$, tenemos que,

$$\frac{\| g_k \|}{2^{n_k - n_{k-1}}} \leq \frac{1}{2^k},$$

entonces

$$\frac{\| g_k \|}{2^{n_k}} \leq \frac{1}{2^{k + n_{k-1}}} \leq \frac{1}{2^k},$$

además

$$\left(\frac{\| g_k \|}{2^{n_k}} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{2^k} \right)^2.$$

y como la serie

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 + \cdots$$

converge, entonces f también converge.

Lo siguiente que queremos demostrar es que $f \in A_j$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Tenemos que encontrar un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|(2S^*)^m f - g_j\| < q_j$.

Sea $m = n_j$, entonces

$$\begin{aligned}
&\|(2S^*)^{n_j} f - g_j\| \\
&\qquad = \left\| (2S^*)^{n_j} \left(g_0 + \frac{S^{n_1} g_1}{2^{n_1}} + \frac{S^{n_2} g_2}{2^{n_2}} + \cdots + \frac{S^{n_k} g_k}{2^{n_k}} + \cdots \right) - g_j \right\| \\
&\qquad = \left\| (2S^*)^{n_j} (g_0) + \cdots + (2S^*)^{n_j} \left(\frac{S^{n_j} g_j}{2^{n_j}} \right) + (2S^*)^{n_j} \left(\frac{S^{n_{j+1}} g_{j+1}}{2^{n_{j+1}}} \right) + \cdots - g_j \right\|,
\end{aligned}$$

observemos que para $n_k < n_j$, se tiene que

$$(2S^*)^{n_j} S^{n_k}(g_k) = (2S^*)^{n_j - n_k} g_k = 0,$$

pues por hipótesis $n_j - n_k > m_k$, es decir a g_k le aplicamos S^* tantas veces que sus entradas diferentes de cero desaparecen.

Entonces

$$\begin{aligned}
&\|(2S^*)^{n_j} f - g_j\| \\
&\qquad = \left\| g_j + \frac{S^{n_{j+1}-n_j} g_{j+1}}{2^{n_{j+1}-n_j}} + \frac{S^{n_{j+2}-n_j} g_{j+2}}{2^{n_{j+2}-n_j}} + \frac{S^{n_{j+3}-n_j} g_{j+3}}{2^{n_{j+3}-n_j}} + \cdots - g_j \right\| \\
&\qquad = \left\| \frac{S^{n_{j+1}-n_j} g_{j+1}}{2^{n_{j+1}-n_j}} + \frac{S^{n_{j+2}-n_j} g_{j+2}}{2^{n_{j+2}-n_j}} + \frac{S^{n_{j+3}-n_j} g_{j+3}}{2^{n_{j+3}-n_j}} + \cdots \right\| \\
&\qquad \leq \left\| \frac{S^{n_{j+1}-n_j} g_{j+1}}{2^{n_{j+1}-n_j}} \right\| + \left\| \frac{S^{n_{j+2}-n_j} g_{j+2}}{2^{n_{j+2}-n_j}} \right\| + \left\| \frac{S^{n_{j+3}-n_j} g_{j+3}}{2^{n_{j+3}-n_j}} \right\| + \cdots .
\end{aligned}$$

Por ser S una isometría tenemos que, para $g_k \in G$, y $r \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \frac{S^r g_k}{2^r} \right\| = \left\| \frac{g_k}{2^r} \right\|$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{S^{n_{j+1}-n_j} g_{j+1}}{2^{n_{j+1}-n_j}} \right\| + \left\| \frac{S^{n_{j+2}-n_j} g_{j+2}}{2^{n_{j+2}-n_j}} \right\| + \left\| \frac{S^{n_{j+3}-n_j} g_{j+3}}{2^{n_{j+3}-n_j}} \right\| \cdots = \\
&\qquad\qquad \left\| \frac{g_{j+1}}{2^{n_{j+1}-n_j}} \right\| + \left\| \frac{g_{j+2}}{2^{n_{j+2}-n_j}} \right\| + \left\| \frac{g_{j+3}}{2^{n_{j+3}-n_j}} \right\| + \cdots .
\end{aligned}$$

Por la elección de los n_k, tenemos que para $k > 1$, se tiene $n_{j+k} - n_j > n_{j+k} - n_{j+(k-1)}$, entonces

$$\left\| \frac{g_{j+k}}{2^{n_{j+k}-n_j}} \right\| < \left\| \frac{g_{j+k}}{2^{n_{j+k}-n_{j+(k-1)}}} \right\| < \frac{1}{2^{j+k}}$$

por lo tanto

$$\left\|\frac{g_{j+1}}{2^{n_{j+1}-n_j}}\right\| + \left\|\frac{g_{j+2}}{2^{n_{j+2}-n_j}}\right\| + \left\|\frac{g_{j+3}}{2^{n_{j+3}-n_j}}\right\| + \cdots \leq \frac{1}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^{j+2}} + \frac{1}{2^{j+3}} + \cdots ,$$

sabemos que,

$$\frac{1}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^{j+2}} + \frac{1}{2^{j+3}} \cdots = \frac{1}{2^j},$$

y por el orden de los q_j tenemos

$$\frac{1}{2^j} < q_j.$$

Entonces f está en A_j para todo j. ■

Por el teorema anterior f esta en A_j para todo $j \in \mathbb{N}_0$, por lo tanto

$$f \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} (2S^*)^{-n}(B_j) = \text{Trans}(2S^*),$$

entonces f es un vector hipercíclico para el operador $2S^*$.

Una forma de ver al vector hipercíclico que se encontró en el teorema anterior es la siguiente:

$$f = \left(g_0, 0, \ldots, 0, \frac{g_1}{2^{n_1}}, 0, \ldots, 0, \frac{g_2}{2^{n_2}}, 0, \ldots, 0, \frac{g_3}{2^{n_3}}, 0, 0, \ldots \frac{g_4}{2^{n_4}}, 0, 0, ...\right),$$

con n_k ceros entre cada g_k y g_{k+1}. Aunque los g_k son vectores en ℓ^2, recordemos que sólo tienen un número finito de entradas diferentes de cero, por lo cual podemos interpretarlos como vectores en $\mathbb{C}^{m_k+1}$.

Ya demostramos que f es hipercíclico, es decir que su órbita es densa en ℓ^2. En lo que sigue hacemos un análisis intuitivo de lo que ocurre con la órbita de f.

Recordemos que el conjunto G es un conjunto denso en ℓ^2. Lo que observaremos a continuación es que algunos elementos de la órbita de f están relativamente cerca de los elementos de G. Por esto, podemos pensar que la órbita de f es una perturbación del conjunto denso G, lo cual, intuitivamente, explica por que la órbita es densa.

El primer elemento de la órbita es f, el cual podemos ver que es casi g_0, ya que las primeras coordenadas de f son g_0, y las restantes casi no tienen importancia, ya que son vectores de norma pequeña por lo que no afectan "mucho" la norma de f. Entonces la norma de f es casi la norma de g_0. Los elementos de la órbita del 2 al

$n_1 - 1$ no los analizaremos. Ahora observemos el elemento n_1 de la órbita, es decir cuando le aplicamos a f el operador $(2S^*)^{n_1}$, el elemento que tenemos es

$$\left(g_1, 0, \ldots, 0, \frac{g_2}{2^{n_2-n_1}}, 0, 0, \ldots, \frac{g_3}{2^{n_3-n_1}}, 0, 0, \ldots, \frac{g_4}{2^{n_4-n_1}}, 0, 0, \ldots\right).$$

Este elemento tiene como primeras coordenadas a g_1. Observemos que por la elección de los n_k las coordenadas restantes de este vector son casi 0, por lo tanto este elemento es casi g_1. De la misma forma que el anterior, el elemento n_2-ésimo de la órbita es casi g_2, y así sucesivamente.

3.2

El Caso $|\lambda| > 1$

Recordemos que este trabajo está destinado a encontrar un vector hipercíclico para el operador λS^*, con $|\lambda| > 1$. Lo anterior lo realizamos para el caso particular de $\lambda = 2$

Para el caso general tenemos que cambiar algo muy sencillo pero significativo, lo cual es lo siguiente. Recordemos que cuando formamos el conjunto $\mathcal{B}$, le pedimos que los radios, es decir los q_k cumplieran que $q_0 > 1$, $q_1 > \frac{1}{2}$, $q_2 > \frac{1}{2^2}$, y así sucesivamente. Ahora para el caso general esta condición la sustituiremos por la siguiente: $q_0 > 1$, $q_1 > \frac{1}{|\lambda|}$, $q_2 > \frac{1}{|\lambda|^2}$, y así sucesivamente.

A continuación, si en el vector hipercíclico f cambiamos el 2 por $|\lambda|$, entonces tendremos el caso general. Por lo tanto podemos enunciar el siguiente teorema. Antes recordemos que los elementos del conjunto G, tienen un número finito de entradas diferentes de cero. Para $g_j \in G$ el índice de la última posición que tenga la entrada diferente de cero le llamaremos m_j.

Teorema 3.2. *Para cada $j \in \mathbb{N}_0$, sea*

$$A_j = \{f \in \ell^2 : \exists m \in \mathbb{N}, \|(\lambda S^*)^m f - g_j\| < q_j\},$$

con $\mathcal{B}$ y G como lo definimos antes y sea

$$f = g_0 + \frac{S^{n_1} g_1}{|\lambda|^{n_1}} + \frac{S^{n_2} g_2}{|\lambda|^{n_2}} + \frac{S^{n_3} g_3}{|\lambda|^{n_3}} + \ldots + \frac{S^{n_k} g_k}{|\lambda|^{n_k}} + \ldots$$

donde g_j es el centro de B_j. Para todo $k \in \mathbb{N}$ escojamos n_k tales que $n_k > m_{k-1} + n_{k-1}$ y $\dfrac{1}{|\lambda|^k} \geq \dfrac{\| g_k \|}{|\lambda|^{n_k - n_{k-1}}}$ con $n_0 = 0$.

Entonces $f \in A_j$ *para todo* $j \in \mathbb{N}_0$*, y por lo tanto* f *es un vector hipercíclico para el operador* λS^**, con* $|\lambda| > 1$*.*

Demostración. Análoga a el Teorema 3.1. ■

De esta forma queda resuelto el problema principal de este trabajo.

Capítulo 4

Subespacio de Vectores Hipercíclicos del Operador λS^*

Una vez encontrado un vector hipercíclico de forma explícita para el operador λS^* nos podemos plantear las siguientes preguntas: ¿existen más vectores hipercíclicos explícitos?, ¿son estos vectores hipercíclicos linealmente independientes?, ¿el conjunto de estos vectores hipercíclicos generan un subespacio de vectores hipercíclicos? La respuesta a estas preguntas se da en este capítulo. Parece lógico pensar que sí existen más vectores hipercíclicos ya que la forma en que encontramos un vector hipercíclico explícito depende de una numeración que se puede variar. Ahora entonces lo difícil no parece ser el hecho de que existan muchos vectores hipercíclicos diferentes entre sí, sino que estos sean linealmente independientes. Para saber si los vectores hipercíclicos generan un subespacio sólo de vectores hipercíclicos surgen nuevas preguntas como ¿el producto de un escalar por un vector hipercíclico es un vector hipercíclico?, ¿la suma de dos vectores hipercíclicos es siempre otro vector hipercíclico? La primera no es muy difícil de responder, pero la segunda parece complicada. En lo siguiente trataremos de responder a las preguntas anteriores.

4.1 Vectores Hipercíclicos Diferentes

Lo primero que pensamos al encontrar un vector hipercíclico explícito es si podremos encontrar otro u otros diferentes a él. Recordemos que el vector hipercíclico era de la siguiente forma:

$$f = \left(g_0, 0, \ldots, 0, \frac{g_1}{|\lambda|^{n_1}}, 0, \ldots, 0, \frac{g_2}{|\lambda|^{n_2}}, 0, \ldots, 0, \frac{g_3}{|\lambda|^{n_3}}, 0, 0, \ldots, \frac{g_4}{|\lambda|^{n_4}}, 0, 0, ...\right),$$

donde g_j es el centro de B_j, para todo $k \in \mathbb{N}$ escogimos los n_k de tal forma que $n_k > m_{k-1} + n_{k-1}$, $\dfrac{1}{|\lambda|^k} \geq \dfrac{\| g_k \|}{|\lambda|^{n_k - n_{k-1}}}$ con $n_0 = 0$ y los m_k son para los $g_k \in G$ el índice de la última posición que tenga la entrada diferente de cero.

Ahora recordemos que en la numeración del conjunto $\mathcal{B}$ sólo se pidió que los q_k fueran ordenados de tal forma que $q_0 > 1$, $q_1 > \frac{1}{|\lambda|}$, $q_2 > \frac{1}{|\lambda|^2}$, y así sucesivamente. Entonces podríamos ordenarlos de otra manera y que se siga cumpliendo la misma condición.

Ahora para tener un orden distinto del conjunto $\mathcal{B}$ haremos lo siguiente. Primero comparamos el radio de B_0 con B_1, si no es igual lo comparamos con el radio de B_2, y así seguimos hasta que encontremos un radio que sea igual al de B_0 digamos B_r. Esto lo podemos hacer pues para $q_0 \in \mathbb{Q}$, se tiene que,

$$\bigcup_{g \in G} \{B_{q_0}(g)\} \subseteq \mathcal{B},$$

es decir existe un conjunto numerable de bolas en $\mathcal{B}$ con radio fijo q_0 y centro en los elementos de G. Es por eso que siempre podemos encontrar una cantidad numerable de bolas con el mismo radio q_0.

Observemos que para cada $j \in \mathbb{N}_0$, la condición $q_j > \frac{1}{|\lambda|^j}$ se seguirá cumpliendo aún cuando cambiemos el orden del conjunto $\mathcal{B}$ de la forma descrita arriba, ya que los radios de las bolas en $\mathcal{B}$ no cambiarán su orden inicial.

Después, ya que encontramos un elemento de $\mathcal{B}$ que tiene el mismo radio q_0, cambiamos de lugar a B_0 y lo ponemos en la posición r, y a B_r lo ponemos en la posición 0.

Es decir teníamos

$$f = \left(g_0, 0, \ldots, 0, \frac{g_1}{|\lambda|^{n_1}}, 0, \ldots, 0, \frac{g_2}{|\lambda|^{n_2}}, 0, \ldots, \ldots, 0, \frac{g_r}{|\lambda|^{n_r}}, 0, \ldots, 0, \frac{g_{r+1}}{|\lambda|^{n_{r+1}}}, \ldots\right)$$

con el conjunto $\{B_0, B_1, B_2, B_3, ..., B_r, B_{r+1}, ...\}$, y ahora usando el conjunto con el siguiente orden $\{B_r, B_1, B_2, B_3, ..., B_0, B_{r+1}, ...\}$ tenemos

$$f' = \left(g_r, 0, \ldots, 0, \frac{g_1}{|\lambda|^{n_1}}, 0, \ldots, 0, \frac{g_2}{|\lambda|^{n_2}}, 0, \ldots, \ldots, 0, \frac{g_0}{|\lambda|^{n_r}}, 0, \ldots, 0, \frac{g_{r+1}}{|\lambda|^{n_{r+1}}}, \ldots\right).$$

Donde los $n_k \in \mathbb{N}$ son escogidos nuevamente a partir de este orden, por lo que en principio pueden ser diferentes a los que se escogieron anteriormente.

Es claro que el primer f es diferente al segundo ya que $g_0 \neq g_r$, además de que debido al orden diferente de $\mathcal{B}$ los n_k podrían cambiar, y esto cambiaría totalmente la forma del segundo vector.

Así tenemos que, para encontrar un vector hipercíclico f diferente, sólo intercambiamos dos elementos adecuados de $\mathcal{B}$. Por lo tanto podremos producir tantos vectores hipercíclicos como órdenes distintos tenga $\mathcal{B}$, sólo recordemos que para cualquier orden de $\mathcal{B}$ debemos tomar en cuenta la condición de que $q_0 > 1$, $q_1 > \frac{1}{|\lambda|}$, $q_2 > \frac{1}{|\lambda|^2}$, y así sucesivamente.

Entonces con la construcción del vector hipercíclico que tenemos, resultó sencillo encontrar vectores hipercíclicos distintos.

4.2

Independencia Lineal de Vectores Hipercíclicos

Después de tener vectores hipercíclicos de forma explícita distintos, la siguiente pregunta es si estos vectores son linealmente independientes. Para resolver esta pregunta hagamos lo siguiente.

Sean f_1 y f_2 los siguientes vectores construidos como antes:

$$f_1 = \left(g_0, 0, \dots, 0, \frac{g_1}{|\lambda|^{n_{1,1}}}, 0, \dots, 0, \frac{g_2}{|\lambda|^{n_{1,2}}}, 0, \dots, 0, \frac{g_3}{|\lambda|^{n_{1,3}}}, 0, \dots, 0, \frac{g_r}{|\lambda|^{n_{1,r}}}, 0, 0, \dots \right),$$

$$f_2 = \left(g_r, 0, \dots, 0, \frac{g_1}{|\lambda|^{n_{2,1}}}, 0, \dots, 0, \frac{g_2}{|\lambda|^{n_{2,2}}}, 0, \dots, 0, \frac{g_3}{|\lambda|^{n_{2,3}}}, 0, \dots, 0, \frac{g_0}{|\lambda|^{n_{2,r}}}, 0, 0, \dots \right),$$

donde g_0 y g_r sean linealmente independientes, con las condiciones adicionales de que $m_0 = m_r \geq 2$, es decir que el índice de la última posición diferente de cero de g_0 y g_r coincidan, y que g_0 y g_r tengan al menos dos entradas diferentes de cero, además pediremos $\|g_0\| = \|g_r\|$. Esto es posible ya que g_0 y g_r se eligen en G, por lo tanto, para un tamaño dado, podemos encontrar muchos vectores con la misma norma de ese mismo tamaño, que estén en G y que sean linealmente independientes, ya que los vectores g_0 y g_r los podemos ver como en dimensión finita y esto permite hacer coincidir "fácilmente" sus normas. Las condiciones anteriores son para asegurar $n_{1,k} = n_{2,k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir que las posiciones donde f_1 y f_2 tienen entradas diferentes de cero sean las mismas.

Para ver si f_1 y f_2 son linealmente independientes queremos demostrar que para $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 = 0 \Longrightarrow \beta_1 = 0, \beta_2 = 0.$$

Calculemos

$$\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 =$$

$$\left(\beta_1 g_0 + \beta_2 g_r, 0, \ldots, 0, \beta_1 \frac{g_1}{|\lambda|^{n_{1,1}}} + \beta_2 \frac{g_1}{|\lambda|^{n_{2,1}}}, 0, \ldots, 0, \beta_1 \frac{g_r}{|\lambda|^{n_{1,r}}} + \beta_2 \frac{g_0}{|\lambda|^{n_{2,r}}}, 0, 0, \ldots\right)$$

lo cual es cero, por hipótesis. Pero esto implica que

$$\beta_1 g_0 + \beta_2 g_r = 0,$$

y se tiene que $\beta_1 = 0 = \beta_2$ por independencia lineal de g_0 y g_r. Más adelante, daremos un conjunto arbitrariamente grande de vectores en ℓ^2 que cumple la condiciones de ser un conjunto linealmente independiente, de mismas normas y del mismo tamaño.

Recordemos que la manera en que formamos nuestros vectores hipercíclicos es a partir del conjunto $\mathcal{B}$, y que cambiando el orden de este conjunto podemos generar muchos vectores hipercíclicos.

A partir de esto podemos concluir que una forma de asegurar la independencia lineal de dos vectores hipercíclicos distintos es la siguiente: los dos vectores deben ser casi iguales, en el sentido siguiente, intercambiamos el orden de dos elementos del conjunto $\mathcal{B}$, los elementos correspondientes que intercambiemos en el vector hipercíclico deben tener el mismo índice de la última posición diferente de cero, misma norma, mismo radio y ser linealmente independientes.

Sabemos que para cada $q_k \in \mathbb{Q}$ tenemos una cantidad numerable de centros, tantos como elementos de G. Esto es, para cada racional tenemos muchos centros posibles, por ejemplo los canónicos. Otro conjunto de vectores que pueden ser tomados como centros es el siguiente:

$$\begin{aligned}
b_0 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0, 1, 0, \ldots) \\
b_1 &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0, 1, 0, \ldots) \\
b_2 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0, 1, 0, \ldots) \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
b_{m-2} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots, 1, 0, 1, 0, \ldots) \\
b_{m-1} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 1, 0, \ldots)
\end{aligned}$$

$$b_m = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \sqrt{2}, 0, \dots)$$

donde en cada vector el índice de la última posición diferente de cero es m.

Observemos que todos tienen norma igual a $\sqrt{2}$. Otra cosa importante de este conjunto es que es linealmente independiente.

El conjunto $\mathcal{B}$ contiene una cantidad numerable de bolas que tienen como centros a elementos del conjunto $\{b_j\}_{j=0}^m$. Además para cada elemento en $\{b_j\}_{j=0}^m$ existe una cantidad numerable de radios, tantos como racionales. Es decir, siempre podemos encontrar una bola con centro en un elemento de $\{b_j\}_{j=0}^m$ y radio racional $q > 1$.

Dado lo anterior podemos establecer un orden especial para nuestro conjunto $\mathcal{B}$. Dado $m \in \mathbb{N}$, podemos establecer el siguiente orden, B_0 debe tener como centro a b_0, B_1 debe tener como centro a b_1, B_2 debe tener como centro a b_2, y así sucesivamente hasta llegar a que B_m debe tener como centro a b_m, y todos deben tener como radio un racional $q > 1$. El resto de los centros y radios se escogen como antes.

Ahora a partir de este conjunto nuestro primer vector hipercíclico queda de la siguiente manera:

$$f_0 = \left(b_0, 0, 0, ..., \frac{b_1}{|\lambda|^{n_1}}, 0, 0, ..., \frac{b_2}{|\lambda|^{n_2}}, 0, 0, ..., \frac{b_3}{|\lambda|^{n_3}}, 0, 0, ..., ..., \frac{b_m}{|\lambda|^{n_m}}, 0, 0, ... \right)$$

donde $n_0 = 0$, y los demás n_k son elegidos como antes.

Ahora cambiando el orden del conjunto $\mathcal{B}$ a $\{B_1, B_0, B_2, B_3, ..., B_{m-1}, B_m, ...\}$, tenemos que el segundo vector hipercíclico es el siguiente:

$$f_1 = \left(b_1, 0, 0, ..., \frac{b_0}{|\lambda|^{n_1}}, 0, 0, ..., \frac{b_2}{|\lambda|^{n_2}}, 0, 0, ..., \frac{b_3}{|\lambda|^{n_3}}, 0, 0, ..., ..., \frac{b_m}{|\lambda|^{n_m}}, 0, 0, ... \right),$$

donde los n_k son iguales que en el caso anterior.

Cambiando el orden a $\{B_2, B_1, B_0, B_3, ..., B_{m-1}, B_m, ...\}$, el tercer vector hipercíclico es el siguiente:

$$f_2 = \left(b_2, 0, 0, ..., \frac{b_1}{|\lambda|^{n_1}}, 0, 0, ..., \frac{b_0}{|\lambda|^{n_2}}, 0, 0, ..., \frac{b_3}{|\lambda|^{n_3}}, 0, 0, ..., ..., \frac{b_m}{|\lambda|^{n_m}}, 0, 0, ... \right),$$

donde los n_k son iguales que en los casos anteriores.

Análogamente seguimos cambiando el orden hasta tener el orden m que es el siguiente $\{B_m, B_1, B_2, B_3, ..., B_{m-1}, B_0, ...\}$ y entonces el m-ésimo vector hipercíclico es:

$$f_m = \left(b_m, 0, 0, ..., \frac{b_1}{|\lambda|^{n_1}}, 0, 0, ..., \frac{b_2}{|\lambda|^{n_2}}, 0, 0, ..., \frac{b_3}{|\lambda|^{n_3}}, 0, 0, ..., ..., \frac{b_0}{|\lambda|^{n_m}}, 0, 0, ... \right).$$

Ahora tenemos $m+1$ vectores hipercíclicos linealmente independientes. Es decir, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un conjunto de n vectores hipercíclicos linealmente independientes de la forma dada por el Teorema 3.2.

4.3

Subespacio de Dimensión Finita de Vectores Hipercíclicos

La siguiente pregunta es ver si los vectores hipercíclicos que construimos en la sección anterior generan un subespacio de dimensión $m+1$ que consista solamente de vectores hipercíclicos, a excepción del cero. Para esto enunciaremos el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Sean $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_m$ como en la sección anterior. Entonces el subespacio generado por $\{f_0, f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ forma un subespacio de dimensión $m+1$ que consiste, a excepción del vector 0, de sólo vectores hipercíclicos para el operador λS^*, con $|\lambda| > 1$.*

Demostración. Primero responderemos si el producto de un vector hipercíclico f_k por un escalar sigue siendo un vector hipercíclico. Sea $\beta \in \mathbb{C}$, observemos la órbita βf_k, para $k \leq m$. Sabemos que el conjunto $\operatorname{Orb}_{\lambda S^*}(f_k)$ es denso en ℓ^2 y queremos demostrar que el conjunto $\operatorname{Orb}_{\lambda S^*}(\beta f_k)$ también es denso en ℓ^2. Como $\operatorname{Orb}_{\lambda S^*}(\beta f_k) = \beta \operatorname{Orb}_{\lambda S^*}(f_k)$, entonces por Lema 1.7 el conjunto $\operatorname{Orb}_{\lambda S^*}(\beta f_k)$ es denso en ℓ^2. Entonces un vector hipercíclico producto con un escalar también es hipercíclico.

Para saber si el conjunto $\{f_0, f_1, f_2, f_3, ..., f_m\}$ genera un subespacio de sólo vectores hipercíclicos, a excepción del cero, falta ver si la suma de dos vectores del subespacio generado por este conjunto es hipercíclico.

Calculemos $\beta_1 f_i + \beta_2 f_j$, donde β_1 y $\beta_2 \in \mathbb{C}$. Tenemos,

$$\begin{aligned}\beta_1 f_i + \beta_2 f_j = \Bigg(& \beta_1 b_i + \beta_2 b_k, 0, \ldots, 0, \frac{(\beta_1+\beta_2) b_1}{|\lambda|^{n_1}}, 0, \ldots, 0, \frac{(\beta_1+\beta_2) b_2}{|\lambda|^{n_2}}, \\ & 0, \ldots, 0, \frac{\beta_1 b_0 + \beta_2 b_i}{|\lambda|^{n_i}}, 0, \ldots, 0, \frac{\beta_1 b_j + \beta_2 b_0}{|\lambda|^{n_j}}, 0, \ldots, 0, (\beta_1+\beta_2)\frac{b_m}{|\lambda|^{n_m}}, 0, \ldots \Bigg).\end{aligned}$$

Observemos que el conjunto $\operatorname{Orb}_{\lambda S^*}(\beta_1 f_i + \beta_2 f_j)$ es igual al conjunto $\operatorname{Orb}_{\lambda S^*}((\beta_1 + \beta_2) f_j)$, excepto en algunas de las n_j primeras entradas, es decir sólo es diferente en un número finito de elementos. Entonces por el Lema 1.8, sabemos que si a un conjunto denso le quitamos un número finito de elementos éste sigue siendo denso. Por lo tanto como el conjunto $\mathrm{Orb}_{\lambda S^*}((\lambda_1+\lambda_2)f_j)$ es denso en ℓ^2 también lo es el conjunto $\mathrm{Orb}_{\lambda S^*}(\beta_1 f_i + \beta_2 f_j)$. Entonces la suma de dos vectores hipercíclicos del subespacio generado por el conjunto $\{f_0, f_1, f_2, f_3, ..., f_m\}$ es también un vector hipercíclico. ∎

Por lo tanto el conjunto $\{f_0, f_1, f_2, f_3, ..., f_m\}$ *de vectores hipercíclicos genera un subespacio de dimensión* $m+1$*, a excepción del cero, de sólo vectores hipercíclicos.*

En este capítulo abordamos la pregunta natural que surgió del capítulo anterior. Ahora nos encontramos con la sorpresa de que no sólo tenemos un vector hipercíclico explícito, si no que tenemos algo mucho mejor. Dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, podemos generar un subespacio de vectores hipercíclicos de dimensión n, donde todos los vectores son de la misma forma.

La siguiente interrogante es ¿existirá un subespacio de dimensión infinita de sólo vectores hipercíclicos?, en la siguiente sección responderemos esta pregunta.

4.4

Subespacio de Dimensión Infinita de Vectores Hipercíclicos

El siguiente teorema, el cual fue observado por Paul S. Bourdon [3], nos demuestra que existe un subespacio de dimensión infinita de vectores hipercíclicos, pero antes enunciaremos un lema.

Lema 4.2. *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert. Si* $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *entonces* $T(\mathcal{H})$ *es denso si y sólo si* T^**, el adjunto de* T*, es uno a uno.*

Demostración. $T(\mathcal{H})$ es denso en $\mathcal{H}$ si y sólo si, se cumple que si $\langle Tx, y\rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $y = 0$. Y esto sucede si y sólo si, se cumple que si $\langle x, T^*y\rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $y = 0$. Es decir si y sólo si, se tiene que $T^*y = 0$, implica $y = 0$. Por lo tanto T^* es uno a uno. Entonces $T(\mathcal{H})$ es denso si y sólo si T^* es uno a uno. ∎

El teorema es el siguiente:

Teorema 4.3. *Supongamos T hipercíclico en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existe un subespacio lineal denso en $\mathcal{H}$ e invariante bajo T que consiste, excepto por el cero, de vectores hipercíclicos para T.*

Demostración. Sea f un vector hipercíclico para T. Notemos que

$$M = \{p(T)f : p \text{ es un polinomio}\}$$

es un subespacio lineal denso e invariante bajo T. Es denso porque M contiene la órbita del vector hipercíclico f y claramente es un subespacio invariante. Debemos mostrar que cualquier elemento no cero de M es hipercíclico.

Sea $p(T)f$ un elemento arbitrario de M. Como sabemos, para demostrar que $p(T)f$ es hipercíclico tenemos que ver que $\mathrm{Orb}_T(p(T)f)$ sea densa en $\mathcal{H}$.

Para ver esto observemos que, como T conmuta con $p(T)$, tenemos

$$\mathrm{Orb}_T(p(T)f) = p(T)\,\mathrm{Orb}_T(f).$$

Esto es, la órbita de $p(T)f$ bajo T es la imagen de $\mathrm{Orb}_T(f)$ bajo el mapeo $p(T)$. Ahora si $p(T)$ tuviera rango denso entonces $\mathrm{Orb}_T(p(T)f)$ sería densa, ya que por el Lema 1.10 sabemos que un operador con rango denso manda conjuntos densos en conjuntos densos. Entonces basta probar que $p(T)$ tiene rango denso.

Expresando p como producto de factores lineales, $p(T)$ queda como producto de factores de la forma $T - \lambda$. Por el Teorema 2.3, como T es hipercíclico entonces T^* no tiene autovalores, es decir $\mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda})$ es vacío, por lo tanto $T^* - \overline{\lambda}$ es uno a uno, y por el Lema 4.2 el $(T^* - \overline{\lambda})^*(\mathcal{H})$ es denso, y como $(T^* - \overline{\lambda})^* = (T - \lambda)$, entonces $(T - \lambda)(\mathcal{H})$ también es denso. Ahora por el Lema 1.11 como $p(T)$ esta escrito como producto de operadores de rango denso entonces también tiene rango denso.

Por lo tanto $\mathrm{Orb}_T(p(T)f)$ es densa en $\mathcal{H}$. Entonces M es subespacio lineal denso en $\mathcal{H}$ e invariante bajo T. ■

En conclusión, en este trabajo hemos encontrado ejemplos de vectores hipercíclicos de forma explícita para el operador λS^*, también un subespacio de dimensión n de vectores hipercíclicos de la misma forma. Al final llegamos a una teorema que demuestra, para cualquier operador hipercíclico, la existencia de un subespacio de dimensión infinita de sólo vectores hipercíclicos.

Terminamos este trabajo con la siguiente pregunta, que dejamos para un trabajo futuro, **¿se podrá encontrar un subespacio de vectores hipercíclicos de dimensión infinita donde todos los vectores sean de la forma dada por el Teorema 3.2?**

Bibliografía

[1] B. Beauzamy, *Un operateur, sur l'space de Hilbert, dont tous les polinomes sont hypercycliques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math. 303 (1986), 923-925.

[2] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théoreme elementaire sur les fonctions entieres*, C. R. Acad. Sci. Paris 189 (1929), 473-475.

[3] Paul S. Bourdon, *Invariant manifolds of hypercyclic vectors*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 118, Number 3, (July 1993), 845-847.

[4] John B. Conway, *A Course in Funtional Analysis*, Second Edition, Springer, New York, 1990.

[5] R. M. Gethner y J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on space of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 281-288.

[6] Karl-Goswin Grosse-Erdmann, *Universal families and hyperciclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 36 (1999), 345-381.

[7] C. Kitai, *Invariant Closed Sets for Linear Operators*, Tesis de Doctorado, Univ. of Toronto, Toronto, 1982.

[8] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math. (1952/53), 72-87.

[9] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math. 32 (1969),17-22.

[10] Luis Enrique Saldivia, *Topological Transitivity of Bounded Linear Operators*, Tesis de Doctorado, Michigan State University, 2003.

[11] Joel H. Shapiro, *Notes on the Dynamics of Linear Operators*, 2001.

[12] Nicholas Young, *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.