



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

MAESTRÍA EN CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

TESIS

SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA ECUACIÓN DEL TIPO DE RICCATI PARA SISTEMAS LINEALES CON RETARDOS Y SU APLICACIÓN AL CONTROL DE UN INTERCAMBIADOR DE CALOR

Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias en Automatización y Control

PRESENTA

Ing. Isaac Ortega Martínez

Directora:
Dra. Liliam Rodríguez Guerrero

Pachuca de Soto, Hgo., México 25 de agosto de 2026



Ing. Isaac Ortega Martínez

Solución analítica de la ecuación del tipo de Riccati para sistemas lineales con retardos y su aplicación al control de un intercambiador de calor



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

School of Engineering and Basic Sciences

Área Académica de Computación y Electrónica

Department of Electronics and Computer Science

Mineral de la Reforma Hidalgo, a 19 de agosto de 2026

Número de control: ICBI-AACyE/1464/2026

Asunto: Autorización de impresión de tesis

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

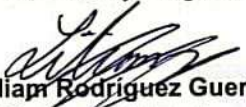
El Comité Tutorial del nombre del producto que indique el documento curricular del programa educativo de posgrado titulado **"SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA ECUACIÓN DEL TIPO DE RICCATI PARA SISTEMAS LINEALES CON RETARDOS Y SU APLICACIÓN AL CONTROL DE UN INTERCAMBIADOR DE CALOR"**, realizado por el sustentante **Isaac Ortega Martínez** con número de cuenta **306529**, perteneciente al programa de la Maestría en Ciencias en Automatización y Control, una vez que se ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente.

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir con los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente

"Amor, Orden y Progreso"


Dra. Liliam Rodríguez Guerrero
Directora de Tesis

Comité Tutorial

Dr. Hugo Romero Trejo

Presidente

Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez

Secretario

Dra. Liliam Rodríguez Guerrero

Vocal 1

Dr. Pablo Antonio López Pérez

Vocal 2

Dra. Sabine Marie Sylvie Mondié Cuzange

Vocal 3

Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo
Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,
México. C.P 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 40052, 40053
aacye_icbi@uaeh.edu.mx

"Amor, Orden y Progreso"



uaeh.edu.mx

No hay genio sin un poco de locura.
Aristóteles (384 - 322 a.C.)

Gracias a

SECIHTI por la beca de Maestría
otorgada durante el periodo
Agosto 2024 - Agosto 2026.
CVU 2050474.

AACyE-UAEH, por la formación
académica brindada durante el
posgrado y el apoyo para la
realización del presente trabajo.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por permitirme continuar estudiando y darme la capacidad para seguir aprendiendo.

Agradezco a mis padres Jorge Alberto Ortega Ramírez y María Flor Martínez Jiménez, a mis hermanos Jorge Manuel Ortega Martínez y Lizeth Ortega Martínez, y a mi sobrina Fátima Esperanza Ortega Martínez por su apoyo incondicional y compañía que me han brindado siempre.

Agradezco a mis asesores de tesis, Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez y Dra. Liliam Rodríguez Guerrero, por su amistad, sus enseñanzas y sus consejos, los cuales me ayudaron para concluir mis estudios de maestría.

Agradezco a mis sinodales por sus valiosas aportaciones para la revisión de este trabajo de tesis.

Agradezco a la familia Martínez Sánchez por su grata compañía y por las atenciones que tuvieron conmigo.

Agradezco a mis amigos de posgrado por sus útiles consejos y por el tiempo que compartieron conmigo.

Resumen

El control de temperatura en los intercambiadores de calor es fundamental para reducir el consumo energético, los costos y el impacto ambiental en procesos industriales. Implementar un controlador adecuado permite reducir los tiempos de respuesta del sistema. Mediante el análisis de los retardos y la identificación de parámetros de la planta, se puede construir un modelo matemático que facilite sintonizar un PI óptimo, para obtener la ganancia proporcional e integral y aplicarlo a un controlador comercial PID REX-C100, así como aplicar una ley de control óptima.

Se utilizó el enfoque de programación dinámica para construir la funcional de Bellman y solucionar el problema de horizonte infinito. Para ello se aplicaron las condiciones suficientes de optimalidad y la solución en la forma de Cauchy para obtener un control óptimo para sistemas lineales con retardo, empleando un índice cuadrático modificado por A. V. Kim el cual permite obtener una solución analítica a la ecuación del tipo de Riccati.

Se concluye que es posible implementar una ley de control óptimo y aplicarla en un sistema térmico. De igual manera, se puede obtener un controlador PI óptimo para lograr buenos resultados en cualquier proceso que requiera regular temperatura.

Acrónimos

PC: Computadora personal (por sus siglas en inglés Personal Computer).

DAQ: Tarjeta de adquisición de datos (por sus siglas en inglés Data Acquisition).

SSR: Relevador de estado sólido (por sus siglas en inglés Solid State Relay).

CA: Corriente alterna.

CD: Corriente directa.

VCA: Voltaje de corriente alterna.

VCD: Voltaje de corriente directa.

SP: Punto de referencia (por sus siglas en inglés Set Point).

PV: Variable del proceso (por sus siglas en inglés Process Variable)

P: Control Proporcional

PI: Control Proporcional Integral.

PID: Control Proporcional Integral y Derivativo.

Índice general

Agradecimientos	VI
Resumen	VII
Acrónimos	VIII
Índice general	IX
Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XIII
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	2
1.2. Motivación	5
1.3. Planteamiento del problema	5
1.4. Justificación	5
1.5. Hipótesis	6
1.6. Objetivos	6
1.7. Metodología de la solución propuesta	7
1.8. Organización de la tesis	8
2. Marco teórico	9
2.1. Intercambiador de calor	9
2.1.1. Clasificación de intercambiadores de calor según su construcción	10
2.1.2. Intercambiadores de calor según su operación	11
2.2. Modelo matemático multivariable para el sistema térmico del intercambiador de calor	15
2.2.1. Modelo matemático para la temperatura de un intercambiador de calor	16
2.2.2. Modelo matemático del contenedor	21
2.2.3. Modelo matemático de la planta	24
2.3. Conclusiones	29

3. Control óptimo para sistemas con retardo	30
3.1. Diagrama de pasos a seguir para obtener el control óptimo	30
3.1.1. Análisis del sistema con retardo puntual	32
3.1.2. Condiciones suficientes de optimalidad	32
3.2. Construcción de la funcional de Bellman	35
3.3. Condiciones suficientes para la estabilidad en lazo cerrado	59
3.4. Conclusiones	63
4. Resultados experimentales	64
4.1. Descripción de la plataforma experimental	64
4.1.1. Descripción del intercambiador de calor	65
4.2. Identificación de los retardos	66
4.3. Sintonización del PID REX-C100	69
4.3.1. Resultados obtenidos por el método PI óptimo	69
4.4. Identificación de parámetros	70
4.5. Implementación del control óptimo	73
4.6. Análisis de estabilidad	76
4.6.1. Análisis de estabilidad mediante la búsqueda de raíces	79
4.7. Comparación entre controladores óptimo y PI óptimo	80
4.8. Conclusiones	81
5. Conclusiones y trabajo futuro	82
5.1. Conclusiones	82
Bibliografía	84
A. Algoritmo para la identificación de parámetros	88
A.1. Identificación de parámetros	88
A.1.1. Mínimos cuadrados recursivos (RLS) y el lema de inversión matricial	93
B. Descripción de los componentes utilizados	98
C. Implementación del programa utilizado	106

Índice de figuras

2.1. Intercambiador de calor de coraza y tubo	10
2.2. Intercambiador de calor de placas	11
2.3. Intercambiador de calor paralelo	12
2.4. Intercambiador de contraflujo	12
2.5. Intercambiador de calor simple	13
2.6. Intercambiador de calor múltiple pasos	13
2.7. Intercambiador de calor regenerativo	14
2.8. Intercambiador de calor no regenerativo	14
2.9. Diagrama de la plataforma experimental	15
2.10. Esquema básico de transferencia térmica	18
2.11. Retardo de la bomba hacia el intercambiador	20
2.12. Representación del tanque con sensor de temperatura	21
2.13. Representación del sistema térmico con retardo	23
2.14. Análisis de la temperatura del agua $T_c(t)$	25
2.15. Análisis de la temperatura del agua $T_c(t - h_1)$	26
2.16. Análisis de la temperatura del agua $T_i(t)$	27
2.17. Análisis de la temperatura del agua $T_i(t - h_2)$	27
3.1. Diagrama de flujo para obtener el control óptimo	31
4.1. Plataforma experimental	65
4.2. Intercambiador de placas	66
4.3. Respuesta de los retardos en la entrada	67
4.4. Identificación de los retardos en la entrada	67
4.5. Identificación de los retardos en la entrada	68
4.6. Identificación de los retardos en la salida	68
4.7. Gráfica de los datos obtenidos en tiempo real	70
4.8. Gráfica de seguimiento de referencia	75
4.9. Gráfica de la señal de control	75

4.10. Gráfica del error	76
4.11. Valores propios para $\Phi_1(s)$	78
4.12. Valores propios de $\Phi_2(s, v)$	78
4.13. Raíces del sistema.	79
4.14. Comparación de datos	80
A.1. Representación general del sistema	88
A.2. Mínimos cuadrados recursivos	93
B.1. Sensor LM35	98
B.2. PID REX-C100	99
B.3. Tarjeta de adquisición de datos 6088	100
B.4. Resistencia	101
B.5. Bomba de diafragma	102
B.6. Relevador de estado sólido DC - AC	103
B.7. Relevador de estado sólido DC - DC	104
B.8. Fuente de poder regulada	105
C.1. Interfaz de usuario en el software LabVIEW	106
C.2. Programa implementado en el software LabVIEW	107

Índice de tablas

4.1. Datos del intercambiador de calor	66
4.2. Parámetros identificados para T_c	69
4.3. Parámetros identificados para T_i	69
4.4. Parámetros obtenidos para T_c	72
4.5. Parámetros obtenidos para T_i	73
4.6. Tabla comparativa	80
B.1. Especificaciones técnicas sensor LM35	98
B.2. Configuración de parámetros REX-C100	99
B.3. Datos de NI USB-6008 OEM.	100
B.4. Datos técnicos resistencia eléctrica	101
B.5. Especificaciones técnicas bomba	102
B.6. Especificaciones del relevador de estado sólido DC - AC	103
B.7. Especificaciones relevador de estado sólido 10A SSR 60A	104
B.8. Datos técnicos fuente de poder regulada	105

Capítulo 1

Introducción

El desarrollo y la evolución de los procesos térmicos se han convertido en una prioridad para la industria, ya que se busca constantemente un manejo y control más eficiente de la energía térmica [1].

En [2] se menciona que se utilizan grandes cantidades de energía térmica en procesos industriales de transferencia de calor, lo cual genera un consumo energético excesivo. Una solución es el uso de intercambiadores de calor (placa, espiral, carcasa y tubo, etc.). El intercambiador de placas es utilizado ampliamente debido a su eficiencia térmica, mejor adaptabilidad, calidad y mejores tiempos de respuesta de los procesos [3]. Esto se debe a la barrera delgada de metal que existe entre los fluidos, ya que, al no existir contacto directo entre sustancias, se evitan problemas de contaminación entre fluidos y se garantiza homogeneidad de calor. Como resultado, se logra un menor consumo energético y un menor desperdicio de productos, lo cual previene la contaminación del medio ambiente. En la industria moderna, la optimización de estos procesos permite mejorar la producción y reducir los gastos operativos [4].

La necesidad de mantener los procesos bajo estrictas condiciones de temperatura, como se menciona en [5], consiste en poder almacenar y transportar alimentos evitando el crecimiento de microorganismos, la desnaturalización de proteínas y la alteración de nutrientes. Asimismo, en [6] se menciona que en la industria química numerosas reacciones se llevan bajo condiciones térmicas rigurosas para garantizar un rendimiento adecuado y prevenir la formación de subproductos no deseados, cumpliendo con estándares sanitarios y de calidad en los productos [7].

Debido a la necesidad de optimizar los procesos, los modelos matemáticos para intercambiadores han cobrado relevancia, ya que permiten comprender la interacción de las corrientes en el proceso, donde una actúa como una fuente de calor y otra como receptora. Así, el calor se transfiere a través de las paredes del intercambiador mediante la conducción y convección, siempre que haya una diferencia de temperatura [8]. No obstante, los intercambiadores de calor presentan dinámicas con retardos inherentes al proceso.

Para abordar la complejidad que implica resolver las ecuaciones de los sistemas con retardos, en [9] se presenta una solución exacta para el problema de control lineal cuadrático en sistemas con retardo en el estado, lo que permite resolver las ecuaciones del tipo de Riccati dadas en [10]. De igual modo, en [11] se propone una alternativa subóptima mediante la construcción de una funcional aproximada. En [12] se contribuye con un método de construcción de la funcional de Bellman, apoyado en la solución de Cauchy, brindando así una herramienta analítica adicional para abordar el problema de control óptimo para sistemas lineales con retardo en el estado.

1.1. Estado del arte

En [13], se analizan las diversas maneras de implementar el intercambio térmico en una planta para regular la temperatura del flujo. Por otro lado, en [14] se han estudiado diversas técnicas de control clásico, exponiendo los problemas comunes que tienen los intercambiadores de calor, ya que al desconocer el modelo o ignorar la dinámica del sistema, se dificulta proponer una estrategia de control o una adecuada sintonización de los algoritmos de control.

En [15], se destaca que el control proporcional integral y derivativo (PID, por sus siglas en inglés Proportional Integral Derivative) ha sido una herramienta muy utilizada en las industrias debido a su fácil implementación y bajo costo. Sin embargo, ante los cambios dinámicos que representan los intercambiadores de calor, el desempeño del PID puede verse limitado y no siempre se obtiene el resultado deseado.

Debido a las dificultades que implica sintonizar correctamente el PID ante los retardos inherentes a los intercambiadores de calor, se complica implementar un control eficiente. Por ello en [16] se aplica un control predictivo robusto en redes de intercambiadores de calor, considerando la incertidumbre en los parámetros del sistema, siendo este un enfoque

adecuado. Sin embargo en [17], se demuestra que se pueden implementar de mejor manera las estrategias de control avanzado en el control robusto con el control óptimo mediante la identificación de parámetros, como son los mínimos cuadrados recursivos y la sintonización adaptativa de los controladores. Esto permite desarrollar algoritmos capaces de ajustar ganancias en tiempo real y mantener la temperatura deseada.

Al existir diversos métodos, en [18] se propone un enfoque óptimo basado en el regulador cuadrático lineal (LQR, por sus siglas en inglés Linear Quadratic Regulator), para minimizar la función de costo del sistema. Este método utiliza la ecuación de Riccati que permite calcular las ganancias óptimas para minimizar una función de costos cuadrática para sistemas lineales.

En [19] se realizan pruebas experimentales en un intercambiador de calor, demostrando que el control proporcional integral PI óptimo minimiza el índice de desempeño y, de este modo, permite obtener ganancias óptimas para el controlador PI. Esto evidencia que proporciona mejor desempeño que el PID clásico ante los retardos y perturbaciones, lo cual facilita obtener un desempeño predecible y repetible, algo que no siempre se logra con métodos semi-heurísticos como el de Ziegler-Nichols. Asimismo, se implementa un control adaptativo el cual permite automatizar el proceso térmico. Esta estrategia tiene la ventaja de reajustar las ganancias en tiempo real, respondiendo a cambios de la dinámica del sistema y ante perturbaciones, proporcionando así mejores condiciones de operación incluso cuando el sistema no es completamente conocido o existen incertidumbres en los parámetros.

Los intercambiadores de calor de placa cada vez tienen mayor relevancia en los procesos, ya que facilitan el cumplimiento de estándares en los productos. Sin embargo, la operación de estos equipos presenta limitaciones debido al comportamiento dinámico del sistema, ya que, presentan una respuesta lenta debido a su naturaleza térmica, lo cual genera retardos en la respuesta ante los cambios de temperatura. Para solucionar esta dificultad, en [20] se han implementado sistemas de control avanzado, control predictivo y el uso de sensores inteligentes, permitiendo obtener una mejor sintonización y respuesta ante las variaciones durante la operación del sistema. De igual manera, en [21] se desarrolla un método analítico de estrategias óptimas de control para mitigarlos; asimismo, en [10] se desarrolla la funcional de Bellman con el propósito de afrontar de manera sistemática el problema.

Para abordar el problema de control óptimo, R. Bellman utiliza el enfoque de la programación dinámica para encontrar el control óptimo para sistemas libres de retardo [22]. Este método incorpora la funcional de Bellman, la cual es esencial para resolver problemas de control óptimo. Sin embargo, al trabajar con sistemas con retardo, no existe un método particular para darle solución, por ello en [23] se utiliza el control de horizonte finito para dar solución a esta problemática, pero no se propone una metodología de cómo realizarla. N.N. Krasovskii [21] propone una funcional para obtener condiciones suficientes de estabilidad para el control óptimo de horizonte infinito en sistemas con retardo puntuales. A partir del trabajo de N.N. Krasovskii, D.W. Ross [10] define una ley de control para el problema de sistemas con retardo puntuales, donde realiza la construcción de la funcional de Bellman a partir de aproximaciones de Riesz.

En [24] se propone la construcción de la funcional de Bellman a partir de la solución en la forma de Cauchy para sistemas lineales con retardo en problemas de horizonte finito, analizando bajo qué condiciones las ecuaciones del tipo de Riccati tienen al menos una solución. De igual manera, en [9] A.V. Kim propone una solución analítica para dichas ecuaciones, con base en el trabajo de D.W. Ross [10].

Aunque los avances teóricos en control óptimo para sistemas con retardo han sentado bases metodológicas, estos se han desarrollado principalmente bajo condiciones ideales en simulaciones sin considerar su implementación en plataformas experimentales reales. De igual manera, la implementación práctica en sistemas multivariantes con retardo sigue presentando limitaciones significativas, ya que los métodos teóricos existentes no resuelven completamente los problemas derivados de la interacción simultánea entre múltiples variables y el retardo inherente a la dinámica del proceso. Particularmente, en el control de temperatura de intercambiadores de calor de placas, la presencia del retardo complica la formulación e implementación de una ley de control óptima. Además, al formular la funcional de Bellman para estos sistemas, las ecuaciones del tipo de Riccati resultantes se encuentran acopladas, lo que dificulta obtener una solución numérica. Es por ello que el desarrollo de un método de control óptimo que incorpore explícitamente el retardo es fundamental para mejorar la eficiencia energética y la estabilidad de estos equipos en procesos industriales. Se propone utilizar el método de A.V. Kim [9] para desacoplar estas ecuaciones de Riccati, lo cual facilita la implementación práctica de la ley de control óptimo.

1.2. Motivación

En procesos industriales como la pasteurización, mantener el control de temperatura en un intercambiador de calor es fundamental para mantener la calidad del producto. Sin embargo, estos equipos presentan retardos inherentes al proceso que generan oscilaciones y sobreconsumo energético, impactando directamente en costos operacionales y en la eficiencia de la planta. Por tanto, en este trabajo se implementa una ley de control óptima para compensar estos retardos.

1.3. Planteamiento del problema

La dinámica inherente de los intercambiadores de calor introduce retardos en la respuesta del sistema que complican significativamente el control. Es por ello que es fundamental mantener el control de temperatura para garantizar la calidad del producto, evitar un sobreconsumo energético y cumplir con normativas ambientales y sanitarias [25]. A pesar de la importancia de este control, los métodos teóricos existentes no resuelven completamente los problemas derivados de estos retardos inherentes a la dinámica del equipo, lo que dificulta diseñar estrategias de control óptimas [26].

Las soluciones tradicionales, basadas en controladores convencionales o aproximaciones simples, presentan limitaciones ante los retardos, ocasionando respuestas lentas, inestabilidad o impidiendo mantener los parámetros del proceso dentro de los límites establecidos [20].

Ante la necesidad de lograr un control eficiente que permita regular la temperatura en los intercambiadores de calor considerando los retardos inherentes del proceso, se plantea abordar la problemática mediante la programación dinámica. Basándose en [12], se construirá la funcional de Bellman considerando el método descrito en [10], con el fin de resolver la ecuación del tipo de Riccati que se obtiene en el control óptimo y aplicar el método de control [9].

1.4. Justificación

Los sistemas con retardo temporal existen en los procesos industriales, su importancia radica en que pueden afectar la estabilidad y eficiencia de los sistemas de control. Aunque

se han propuesto diversas soluciones, la mayoría no han sido corroboradas experimentalmente [27].

En [15] se menciona que entre el 90 % y el 95 % de los controladores utilizados en la industria son del tipo PID, ya que son fáciles de implementar. De igual manera, los intercambiadores de calor son ampliamente utilizados por su aplicación en diversos procesos; sin embargo, la presencia de retardos dificulta tanto el uso del PID como el diseño de una estrategia de control óptima.

Por ello, con un intercambiador de calor se va a comprobar experimentalmente que el índice de desempeño propuesto por A.V. Kim [9], el cual permite desacoplar las ecuaciones de Riccati que resultan de la funcional de Bellman para control óptimo, puede ser aplicado a sistemas reales y facilita su implementación práctica. De este modo, los resultados no solo se quedan de forma teórica o simulados, sino que se implementarán en un sistema real.

Esto permitirá identificar situaciones reales que pueden suceder en los procesos, así como identificar limitaciones y oportunidades de mejora, facilitando la adaptación de los modelos teóricos a diversos procesos industriales.

1.5. Hipótesis

Mediante la validación experimental en un sistema de temperatura aplicado a un intercambiador de calor de placas con modelo multivariable con retardos, se comprobará si el índice de desempeño propuesto por A.V. Kim, que permite generar soluciones analíticas del tipo de Riccati, proporciona resultados favorables en el desempeño del control frente al control PI óptimo con ganancias sintonizadas en PID REX-C100.

1.6. Objetivos

Objetivo general

Validar experimentalmente el control óptimo obtenido del índice de desempeño propuesto por A.V. Kim, mediante el desacoplamiento de las ecuaciones del tipo de Riccati para controlar la temperatura de entrada y salida de los fluidos en un intercambiador de calor de placas.

Objetivos específicos

1. Desarrollar un modelo matemático multivariable que permita implementar la ley de control óptima mediante el método de A.V. Kim para resolver de forma analítica la ecuación del tipo de Riccati, y así aplicarla a un intercambiador de calor de placas.
2. Implementar un controlador óptimo utilizando el software LabVIEW en un intercambiador de calor con el fin de mejorar el desempeño del control automático de temperatura.
3. Comparar experimentalmente el desempeño del controlador óptimo frente al control PI óptimo en un intercambiador de calor de placas con modelo multivariable con retardos.
4. Validar experimentalmente la efectividad de la solución propuesta mediante la medición y el análisis de los resultados obtenidos en el sistema experimental.

1.7. Metodología de la solución propuesta

Una vez obtenidas las ecuaciones del tipo de Riccati, y solucionadas analíticamente con el método propuesto por A. V. Kim [9], se implementó una ley de control óptima que consideraba el retardo en el estado para que el proceso mantuviera estabilidad. Posteriormente se implementó en el software LabVIEW mediante una computadora personal para regular la temperatura de entrada y de salida en el intercambiador de calor de placas. El contenedor que llevaba el agua caliente, se calentó mediante una resistencia calefactora alimentada con voltaje de corriente alterna VCA, y la salida fue controlada con bombas de diafragma de corriente directa VCD para regular la temperatura del agua a calentar por medio del intercambiador de calor.

El sistema se controló con su variable del proceso PV mediante un relevador de estado sólido SSR de corriente alterna CA que prendía y apagaba la resistencia calefactora para que el contenedor de agua caliente mantuviera la referencia solicitada por el usuario. Para el contenedor que se calentaba por medio del intercambiador de calor se utilizó un SSR de corriente directa DC que prendía y apagaba la bomba que hacía fluir agua a través del intercambiador de calor. Esto hizo que ambos alcanzaran un punto de referencia SP mediante la ley de control. Los resultados obtenidos se recopilaron mediante una tarjeta

de adquisición de datos DAQ modelo DAQ-6008 y un sensor de temperatura LM35. De este modo, se pudieron comparar los resultados obtenidos del controlador propuesto con los obtenidos del PID REX-C100 sintonizado con el método del PI óptimo, contrastando así el desempeño de cada uno.

1.8. Organización de la tesis

En el Capítulo 2 se realiza el análisis de los diferentes tipos de intercambiadores de calor con la finalidad de saber su funcionamiento y así obtener un modelo matemático multivariable que permita implementar una ley de control óptima.

En el Capítulo 3 se estudia el problema del control óptimo de sistemas lineales con retardo distribuido para el caso de horizonte infinito y se construye la funcional de Bellman para este tipo de sistemas. De igual manera, se realizan las condiciones suficientes para la estabilidad en lazo cerrado.

Los resultados experimentales se presentan en el Capítulo 4.

Finalmente, las conclusiones y trabajo futuro se encuentran en el Capítulo 5.

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se describen los métodos utilizados para analizar el funcionamiento de un intercambiador de calor de placas para así obtener un modelo matemático multi-variable que describa su comportamiento.

2.1. Intercambiador de calor

Un intercambiador de calor es un equipo utilizado para transferir energía térmica entre dos fluidos que se encuentran a diferente temperatura sin que estos se mezclen [28].

En [13] se describe que existen diferentes tipos de intercambiadores, los cuales se clasifican en función del flujo: flujo paralelo, contraflujo y flujo cruzado. Asimismo, se analizan según su construcción: paso simple, paso múltiple, tipo regenerativo, intercambiador regenerativo y no regenerativo.

La función principal de estos equipos es: elevar la temperatura de un fluido frío con otro de mayor temperatura, disminuir la temperatura de un fluido caliente mediante otro de menor temperatura, llevar un fluido hasta su punto de ebullición utilizando un fluido de mayor temperatura, y condensar un fluido gaseoso a líquido por medio de un fluido de menor temperatura.

Dependiendo del proceso que se va a realizar, cada uno tiene un propósito diferente, tal como se describe a continuación:

- **Enfriador:** reduce la temperatura de un fluido; por lo general, se utiliza agua o aire frío para extraer el calor del proceso [29].
- **Condensador:** facilita la conversión de vapor a estado líquido; usualmente, se transfiere el calor del vapor hacia un refrigerante de menor temperatura [30].
- **Vaporizador:** convierte parte de un líquido en vapor mediante la adición de calor controlado [31].
- **Rehervidor:** proporciona el calor necesario para generar la ebullición que separa los líquidos en el proceso de destilación [32].

2.1.1. Clasificación de intercambiadores de calor según su construcción

Intercambiador de calor de carcasa y tubo

De acuerdo con [33], el intercambiador de calor de carcasa y tubo contiene un conjunto de tubos fijados mediante placas que mantienen su posición dentro de una carcasa. Un fluido circula por el interior de los tubos, mientras que el segundo fluido fluye a través de la carcasa, permitiendo así la transferencia de calor entre ambos. Asimismo, este diseño facilita el mantenimiento y permite operar bajo altas presiones y temperaturas. Este diseño se puede observar en la Figura 2.1.

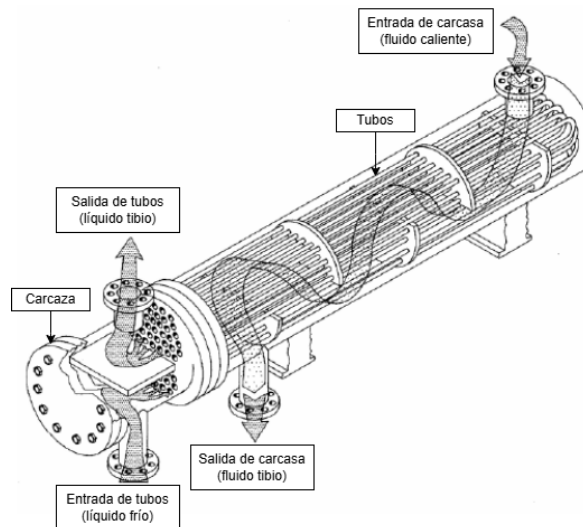


Figura 2.1: Intercambiador de calor de coraza y tubo

Intercambiador de calor de placas

La información proporcionada en [34] describe que el intercambiador de placas está constituido por placas fijas con pasos corrugados de acero inoxidable, lo que genera turbulencias en el fluido y mejora la transferencia de calor. Asimismo, las placas separan fluidos caliente y frío evitando que se mezclen, ya que están dispuestas en paralelo y separadas por juntas. Esto permite que el fluido frío quede rodeado por dos corrientes de fluido caliente (o viceversa), lo que resulta en una alta eficiencia térmica. Además, este intercambiador de calor es compacto en comparación con el de carcasa y tubos, su diseño se aprecia en la Figura 2.2.

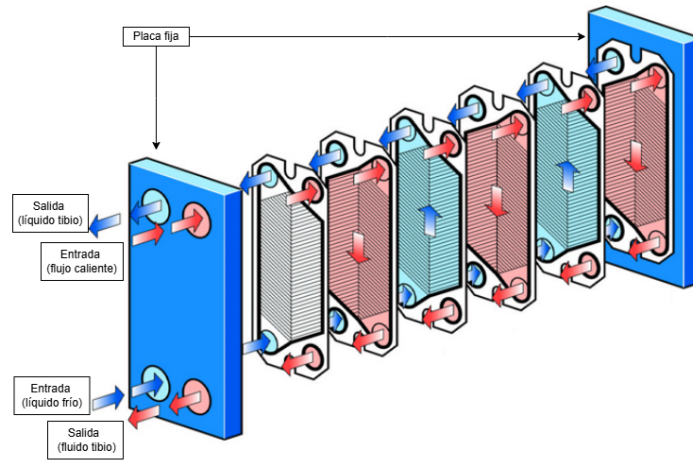


Figura 2.2: Intercambiador de calor de placas

2.1.2. Intercambiadores de calor según su operación

Otra manera de clasificar los intercambiadores de calor es según su forma de operar:

Flujo paralelo

Los fluidos que circulan por el interior del tubo y por la carcasa se desplazan en la misma dirección, como se muestra en la Figura 2.3. De este modo, el fluido que tenga mayor temperatura transfiere calor al que tiene menor temperatura, de manera que, conforme avanza el proceso, ambos tienden a alcanzar el equilibrio térmico [34].

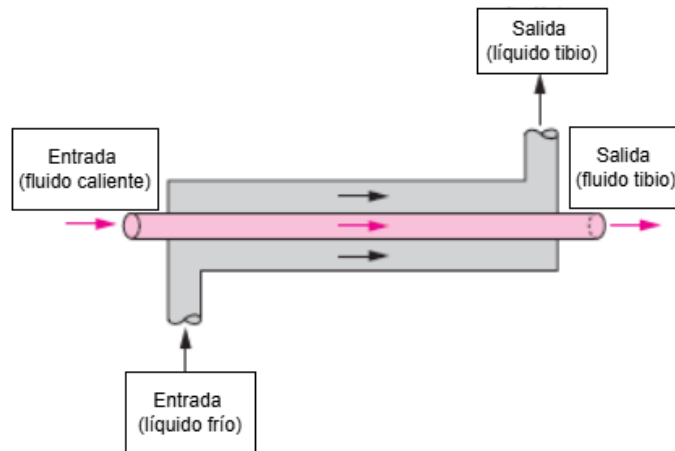


Figura 2.3: Intercambiador de calor paralelo

Contraflujo

Conforme a lo expuesto en [34, 26], en el intercambiador de calor por contraflujo, la transferencia de energía térmica entre dos fluidos se da cuando estos circulan en direcciones contrarias dentro del equipo, tal como se muestra en la Figura 2.4. Los fluidos ingresan por extremos opuestos del intercambiador, de manera que el fluido con menor temperatura sale por el extremo opuesto al que ingresa el fluido caliente. De este modo, se da la transferencia de calor hasta que ambos alcanzan un equilibrio térmico.

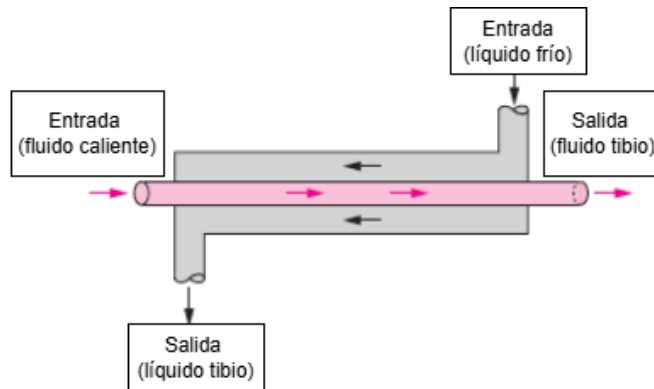


Figura 2.4: Intercambiador de contraflujo

Paso simple (un solo paso)

En [13] se describe que un intercambiador de calor de paso simple es un equipo que permite el intercambio de calor entre dos fluidos a diferentes temperaturas mediante un

único paso por el intercambiador. Los fluidos pueden circular en direcciones opuestas o paralelas, como se muestra en la Figura 2.5.

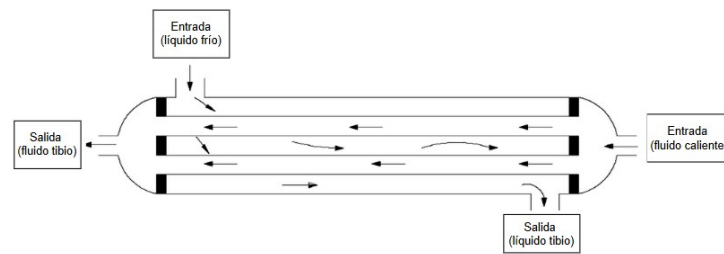


Figura 2.5: Intercambiador de calor simple

Paso múltiple

De acuerdo con [13], el intercambiador de calor de paso múltiple permite que los fluidos circulen a través del equipo realizando varios recorridos, ya sea en un solo sentido o en contraflujo, como se muestra en la Figura 2.6. Este diseño incrementa la interacción térmica entre fluidos, obteniendo así una mejor transferencia de calor.

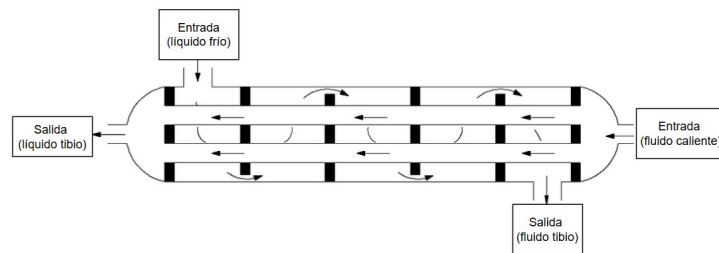


Figura 2.6: Intercambiador de calor múltiple pasos

Regenerativos

Conforme a lo descrito en [13], este sistema opera con el mismo fluido que circula de manera continua en un circuito cerrado para transferir calor a través del intercambiador de calor. Durante el proceso, el fluido cede su energía térmica al fluido que tiene menor temperatura mediante el intercambiador de calor y continúa su recorrido cíclico, como se muestra en la Figura 2.7.

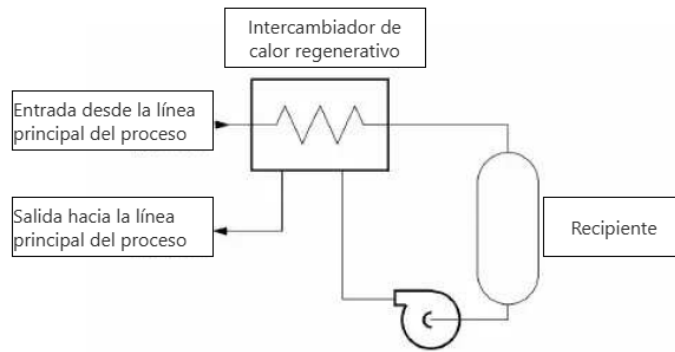


Figura 2.7: Intercambiador de calor regenerativo

No regenerativo

En [34, 13], se describe que este sistema emplea refrigerante externo para extraer el calor acumulado durante el proceso, por lo que no existe una recuperación energética en el sistema, tal como se muestra en la Figura 2.8.

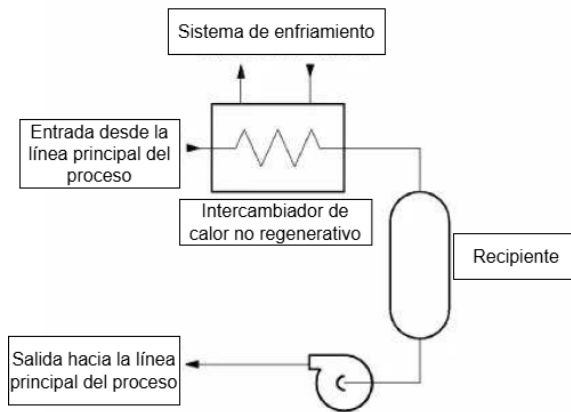


Figura 2.8: Intercambiador de calor no regenerativo

Para el desarrollo de este trabajo de tesis se empleó un intercambiador de calor de flujo paralelo modelo 588215. Este equipo fue seleccionado debido a su disponibilidad en el laboratorio de la UAEH. Asimismo, su comportamiento dinámico se describe mediante un modelo matemático suficientemente lineal, lo cual resulta adecuado para implementar la estrategia de control propuesta.

2.2. Modelo matemático multivariable para el sistema térmico del intercambiador de calor

El sistema propuesto en esta tesis puede observarse a continuación:

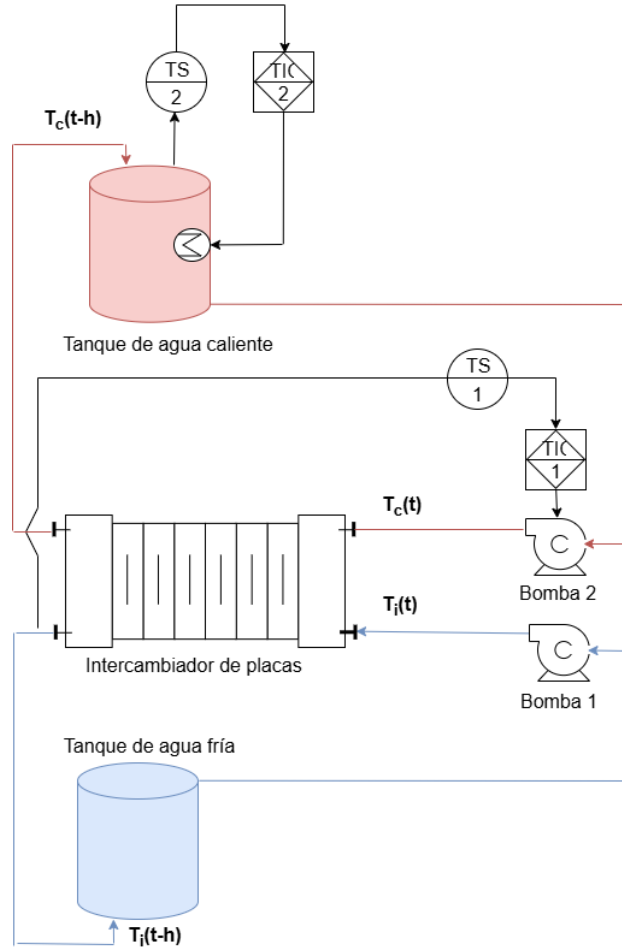


Figura 2.9: Diagrama de la plataforma experimental

En la Figura 2.9 se presenta el esquema del prototipo utilizado, en el cual se identifican tres elementos para su funcionamiento. Los dos primeros componentes son la resistencia eléctrica y el sensor, los cuales permiten medir la temperatura dentro del recipiente (tanque de agua caliente). El segundo componente corresponde al intercambiador de placas, donde se realiza el intercambio de calor entre ambos tanques. Finalmente, el tercer elemento corresponde al tanque de agua fría que recibe el fluido tras pasar por el intercambiador

de placas.

En la Figura 2.9, el tanque de agua caliente regula la temperatura $T_c(t)$, la cual debe tener una referencia mayor a la de $T_i(t)$ para que se pueda calentar dicho fluido. Es decir, este es un lazo de control con un sensor y un controlador; el agua del tanque de agua caliente, que tiene la temperatura $T_c(t)$, se hace circular al intercambiador de calor por medio de la bomba 2. Después, al retornar al tanque debido a la longitud de la tubería, se considera que es la temperatura $T_c(t)$ pero retardada h segundos, es decir, $T_c(t - h)$. Obsérvese que $T_c(t)$, al entrar en contacto con el fluido de menor temperatura $T_i(t)$, transfiere su energía calorífica. La posible perturbación de $T_i(t)$ sobre $T_c(t)$ se despreció por la segunda ley de la termodinámica (el calor fluye del cuerpo más caliente al más frío, nunca al revés [34]).

Para la temperatura del agua más fría del tanque de agua fría, se considera que es $T_i(t)$, pero con un retardo de h segundos, es decir, $T_i(t - h)$ debido a la longitud de la tubería. La bomba 1 garantiza un flujo constante de agua fría hacia el intercambiador de calor. Asimismo, la temperatura $T_i(t)$ presenta una interacción con $T_c(t)$, la cual se detallará junto con el modelo matemático en la siguiente sección.

Las longitudes de las tuberías fueron ajustadas de tal forma que los dos retardos, tanto de $T_i(t)$ como de $T_c(t)$, son iguales.

2.2.1. Modelo matemático para la temperatura de un intercambiador de calor

Para obtener el modelo matemático del intercambiador de calor de la Figura 2.9, este se modela como un sistema térmico [35, 28], el cual opera con agua dentro de un rango de temperatura de 20°C a 60°C. Se establecen los siguientes supuestos:

- Las temperaturas de entrada y de salida mantienen capacidades caloríficas y densidades constantes, ya que estas varían menos del 2% en dicho intervalo [28].
- El agua se considera incompresible, y su densidad ρ se asume constante en todo el rango de temperatura de operación.
- La capacidad calorífica específica del agua C_p permanece constante, dado que su variación en el rango de temperatura considerado es suficientemente pequeña para la precisión requerida del modelo [1].

- La bomba 2 opera en una condición de funcionamiento fija y mantiene un caudal volumétrico aproximadamente constante, por lo que:

$$\dot{V}_{\text{in}} = \dot{V}_{\text{out}} = \dot{V} = \text{constante.} \quad (2.1)$$

- El volumen de líquido efectivo V_p dentro del volumen de control considerado permanece constante. Dado que los caudales volumétricos de entrada y salida son iguales, se cumple que:

$$\frac{dV_p}{dt} = 0. \quad (2.2)$$

- El fluido dentro del volumen de control considerado está perfectamente mezclado. En consecuencia, su temperatura es espacialmente uniforme y está representada por la temperatura medida $T_i(t)$.
- Se considera un modelo lineal local alrededor de un punto de operación nominal.
- Se supone que los parámetros del modelo permanecen constantes dentro del rango de operación considerado en este estudio.
- Se desprecian las pérdidas de calor hacia los alrededores y el almacenamiento de energía térmica en las placas del intercambiador de calor y en las tuberías de conexión.

Bajo los supuestos de densidad y volumen de líquido efectivo constantes, se aplica el principio de conservación de masa [36], el cual establece que:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Tasa de cambio de la} \\ \text{masa en el proceso} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Masa de entrada} \\ \text{al proceso} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Masa de salida} \\ \text{del proceso} \end{array} \right).$$

A partir de la ecuación anterior, se tiene que:

$$\frac{d}{dt}(\rho V_p) = \rho \dot{V}_{\text{in}} - \rho \dot{V}_{\text{out}} = 0, \quad (2.3)$$

donde

ρ : densidad constante del agua [kg/m³].

C_p : capacidad calorífica específica del agua [J/(kg °C)].

$V_{\text{in}}, V_{\text{out}}$: volumen de líquido efectivo constante de entrada y salida respectivamente [m³].

Dado que tanto ρ como V_p son constantes, se deduce que:

$$\dot{V}_{\text{in}} = \dot{V}_{\text{out}} = \dot{V} = \text{constante} = z_1, \quad (2.4)$$

donde z_1 es el caudal volumétrico constante en $[\text{m}^3/\text{s}]$.

Además, se considera que el volumen del sistema permanece constante debido al flujo establecido por la bomba 1 en el intercambiador de calor tal como se observa en la Figura 2.9. A medida que el fluido pasa por las placas del intercambiador de calor, este proceso hace que la temperatura de salida $T_i(t)$ responda ante los cambios de temperatura de entrada $T_c(t)$ [25], tal como se muestra en la Figura 2.10.

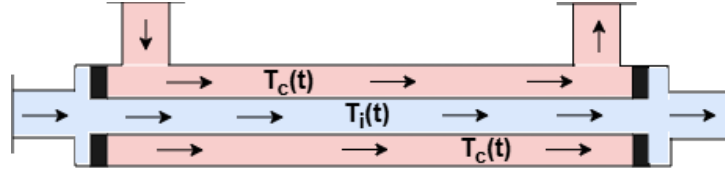


Figura 2.10: Esquema básico de transferencia térmica

Se emplea el principio físico del balance de energía térmica para describir matemáticamente la relación entre las temperaturas de entrada y de salida del sistema.

$$\left(\begin{array}{c} \text{Tasa de cambio de la} \\ \text{energía en el proceso} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{energía de entrada} \\ \text{al proceso} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{energía de salida} \\ \text{del proceso} \end{array} \right). \quad (2.5)$$

Aplicando este principio, se obtiene la siguiente ecuación de balance:

$$\rho C_p V_p \frac{dT_i(t)}{dt} = \rho C_p z_1 T_c(t) - \rho C_p z_1 T_i(t), \quad (2.6)$$

donde

$T_c(t)$, $T_i(t)$: son las temperaturas de entrada y salida del agua, respectivamente $[^\circ\text{C}]$.

ρ : densidad constante del agua en $[\text{kg}/\text{m}^3]$.

C_p : capacidad calorífica específica del agua en $[\text{J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})]$.

V_p es el volumen de líquido efectivo constante en $[\text{m}^3]$.

z_1 : Caudal volumétrico constante en $[\text{m}^3/\text{s}]$.

Para resolver la ecuación (2.6), se analiza el comportamiento del sistema en estado estacionario, condición en la cual las variables ya no cambian con el tiempo. Es decir, la

energía que entra es exactamente igual a la que sale, por lo que la diferencia se iguala a cero:

$$\rho C_p z_1 \bar{T}_c - \rho C_p z_1 \bar{T}_i = 0, \quad (2.7)$$

donde:

$\bar{T}_c$: temperatura de entrada en estado estacionario [$^{\circ}\text{C}$].

$\bar{T}_i$: temperatura de salida en estado estacionario [$^{\circ}\text{C}$].

Al sustraer la ecuación (2.7) en (2.6), se obtiene lo siguiente:

$$\rho C_p V_p \frac{d(T_i(t) - \bar{T}_i)}{dt} = \rho C_p z_1 (T_c(t) - \bar{T}_c) - \rho C_p z_1 (T_i(t) - \bar{T}_i). \quad (2.8)$$

A continuación, se definen las variables de desviación como:

$$\mathbf{T}_i(t) = T_i(t) - \bar{T}_i, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{T}_c(t) = T_c(t) - \bar{T}_c. \quad (2.10)$$

Al sustituir ecuaciones (2.9) y (2.10) en (2.8), se obtiene:

$$\rho C_p V_p \frac{d\mathbf{T}_i(t)}{dt} = \rho C_p z_1 \mathbf{T}_c(t) - \rho C_p z_1 \mathbf{T}_i(t), \quad (2.11)$$

donde $\mathbf{T}_i(t)$ y $\mathbf{T}_c(t)$ son las desviaciones de las temperaturas de salida y de entrada, respectivamente, respecto a sus valores en estado estacionario.

Debido a que ρ y C_p son constantes y aparecen en ambos lados de (2.11), la ecuación de balance de energía se simplifica a:

$$\frac{d\mathbf{T}_i(t)}{dt} = \frac{[\mathbf{T}_c(t) - \mathbf{T}_i(t)]}{\frac{V_p}{z_1}}. \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) describe los cambios de temperatura del sistema conforme transcurre el tiempo, donde la temperatura de entrada $\mathbf{T}_c(t)$ actúa como función de forzamiento que determina la variación en la temperatura de salida $\mathbf{T}_i(t)$.

Es posible considerar que la temperatura del agua $\mathbf{T}_c(t)$ es linealmente proporcional a la señal de control aplicada, siendo:

$$\mathbf{T}_c \propto u(t),$$

donde $u(t)$ está dada por volts.

Para mantener una consistencia dimensional, se incorpora la constante de proporcionalidad K , obteniendo:

$$\mathbf{T}_c(t) = Ku(t). \quad (2.13)$$

donde:

K : constante de proporcionalidad $[\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{V}}]$.

$u(t)$: señal de control $[\text{V}]$.

Al establecer que $\mathbf{T}_c(t)$ es igual a la señal de control aplicada, la bomba de agua se mantiene activa para llevar el agua caliente al intercambiador. Este proceso físico introduce un retardo h al pasar de la bomba al intercambiador, tal como se muestra en la Figura 2.11.

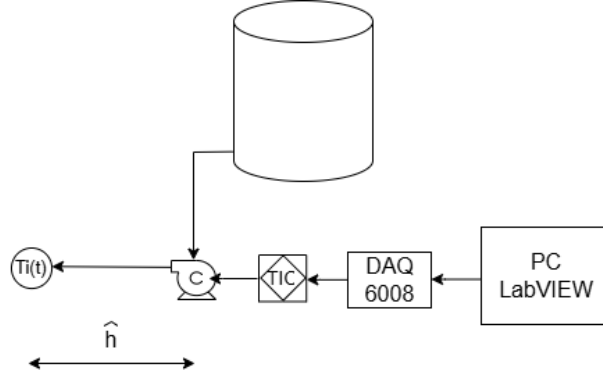


Figura 2.11: Retardo de la bomba hacia el intercambiador

Al incorporar el retardo, la ecuación (2.13) queda de la siguiente manera:

$$\mathbf{T}_c(t) = Ku(t - \hat{h}). \quad (2.14)$$

Se sustituye la ecuación (2.14) en (2.12), se tiene:

$$\frac{d\mathbf{T}_i(t)}{dt} = \frac{\mathbf{T}_c(t) - \mathbf{T}_i(t)}{\frac{V_p}{z_1}}. \quad (2.15)$$

Se aplica la transformada de Laplace a la ecuación diferencial (2.15), obteniendo

$$s\mathbf{T}_i(s) - \mathbf{T}_i(0) = \frac{Ke^{-\hat{h}s}U(s)}{\frac{V_p}{z_1}} - \frac{\mathbf{T}_i(s)}{\frac{V_p}{z_1}}, \quad (2.16)$$

considerando que $\mathbf{T}_i(0) = 0$, ya que se interesa analizar la respuesta del sistema ante los cambios de entrada, y al agrupar términos semejantes para expresarla como función de transferencia, se obtiene:

$$\frac{\mathbf{T}_i(s)}{U(s)} = \frac{K e^{-\hat{h}s}}{\left(\frac{V_p}{z_1}\right)s + \frac{V_p}{z_1} \cdot \frac{z_1}{V_p}}.$$

Se define $\tau = \frac{V_p}{z_1}$ como la constante de tiempo del sistema, ya que indica la rapidez con la que el fluido transita por el intercambiador. Por lo tanto, la función de transferencia queda expresada como:

$$\frac{\mathbf{T}_i(s)}{U(s)} = \frac{K e^{-\hat{h}s}}{\tau s + 1}, \quad (2.17)$$

donde:

$\mathbf{T}_i(s)$: temperatura de salida [°C].

$U(s)$: señal de control [V].

$\hat{h}$: retardo de tiempo en el sistema [s].

τ : constante de tiempo del sistema [s].

2.2.2. Modelo matemático del contenedor

Para obtener el modelo matemático del contenedor, este se considera como un sistema térmico [37], el cual sigue el principio físico del balance de energía (2.5).

Se considera que el sensor tiene una temperatura $T_c(t)$ al sumergirse en el agua, la cual está a temperatura ambiente $T(t)$. Existe una resistencia térmica del flujo de calor del líquido al sensor denominada R . Por lo tanto, entre el líquido y el sensor existe un flujo de energía térmica q por unidad de tiempo, tal como se muestra en la Figura 2.12.

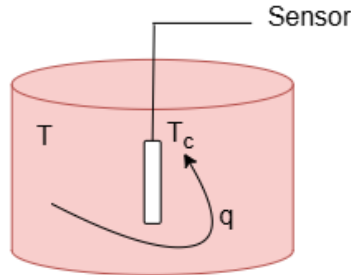


Figura 2.12: Representación del tanque con sensor de temperatura

El flujo de calor que se produce entre el sensor y el líquido, queda descrito por la siguiente ecuación:

$$q = \frac{T(t) - T_c(t)}{R}, \quad (2.18)$$

donde

q : flujo de calor $[\frac{J}{s}]$.

$T(t)$: temperatura del agua $[^{\circ}C]$.

$T_c(t)$: temperatura del sensor $[^{\circ}C]$.

R : resistencia térmica $[\frac{^{\circ}C}{J/s}]$.

Se emplea el principio físico del balance de energía térmica descrito en la ecuación (2.5) para analizar la diferencia de energía térmica que existe entre el agua y el sensor. Este fenómeno físico puede representarse matemáticamente de la siguiente manera:

$$C \frac{dT_c(t)}{dt} = q_1 - q_2, \quad (2.19)$$

donde:

C : capacitancia térmica del sensor $[\frac{J}{^{\circ}C}]$.

$\frac{dT_c(t)}{dt}$: diferencia de temperatura con respecto al tiempo $[\frac{^{\circ}C}{s}]$.

q_1 : energía térmica del agua $[\frac{J}{s}]$.

q_2 : energía térmica del sensor $[\frac{J}{s}]$.

Se considera que únicamente existe transferencia de energía térmica desde el agua hacia el sensor, es decir, el sensor no genera calor. Ante esta consideración, se tiene que $q_1 = q$ y $q_2 = 0$, por lo que la ecuación (2.19) queda de la siguiente manera:

$$C \frac{dT_c(t)}{dt} = q. \quad (2.20)$$

Dado que q está definido por la ecuación (2.18), al sustituir en (2.20), se obtiene:

$$C \frac{dT_c}{dt} = \frac{T(t) - T_c(t)}{RC}.$$

Reordenando la ecuación diferencial, se tiene:

$$\frac{dT_c(t)}{dt} = \frac{T(t)}{RC} - \frac{T_c(t)}{RC}. \quad (2.21)$$

La ecuación (2.21) describe cómo se produce el cambio de temperatura del sensor T_c a medida que aumenta o disminuye la temperatura del agua T . Es posible considerar que la temperatura del agua T es linealmente proporcional a la señal de control aplicada, siendo:

$$T \propto u(t),$$

donde $u(t)$ está en volts.

Para que la ecuación anterior sea una igualdad y sus unidades concuerden en ambos lados de la ecuación, se incorpora la constante de proporcionalidad K , obteniendo:

$$T(t) = Ku(t), \quad (2.22)$$

donde:

K : constante de proporcionalidad [$\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{V}}$].

$u(t)$: señal de control [V].

Considerando que $T(t)$ es igual a la señal de control aplicada, se asume que la resistencia calefactora transfiere energía térmica al agua, aumentando su temperatura. Este calor se transfiere hacia el sensor, generando un retardo temporal h , tal como se muestra en la Figura 2.13.

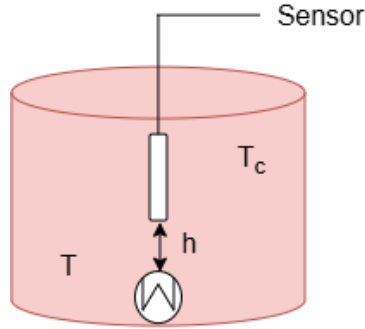


Figura 2.13: Representación del sistema térmico con retardo

Al incorporar el retardo en la ecuación (2.22) se expresa como:

$$T(t) = Ku(t - h), \quad (2.23)$$

sustituyendo la ecuación (2.23) en (2.21), se obtiene:

$$\frac{dT_c(t)}{dt} = \frac{Ku(t-h)}{RC} - \frac{T_c(t)}{RC}. \quad (2.24)$$

Dado que el modelo de la ecuación (2.24) es una ecuación diferencial lineal, se aplica la transformada de Laplace para resolverla, obteniendo:

$$sT_c(s) - T_c(0) = \frac{Ke^{-hs}U(s)}{RC} - \frac{T_c(s)}{RC},$$

considerando que $T_c(0) = 0$, para analizar cómo responde el sistema ante los cambios en la entrada, se tiene:

$$sT_c(s) = \frac{Ke^{-hs}U(s)}{RC} - \frac{T_c(s)}{RC},$$

reagrupando términos, la función de transferencia se expresa como:

$$\frac{T_c(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-hs}}{(RCs + 1)}.$$

Se define $\tau = RC$ como la constante de tiempo, ya que indica la rapidez con que el sensor de temperatura detecta y responde ante los cambios térmicos. Por lo tanto, la función de transferencia es:

$$\frac{T_c(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-hs}}{(\tau s + 1)}, \quad (2.25)$$

donde:

$T_c(s)$: temperatura del sensor [°C].

$U(s)$: señal de control [V].

h : retardo de tiempo en el sistema, el cual se desprecia [s].

τ : constante de tiempo del sistema [s].

2.2.3. Modelo matemático de la planta

Para obtener el modelo matemático de la Figura (2.9), se considera la ecuación (2.25) que describe el modelo matemático del contenedor, y la ecuación (2.17) que representa el modelo del intercambiador de calor, ambas ecuaciones son de primer orden.

Una vez definido que toda la plataforma experimental se comporta como un sistema de primer orden, se definen las siguientes variables: $T_c(t)$: temperatura del tanque de agua caliente, y $T_i(t)$: temperatura del tanque de agua fría.

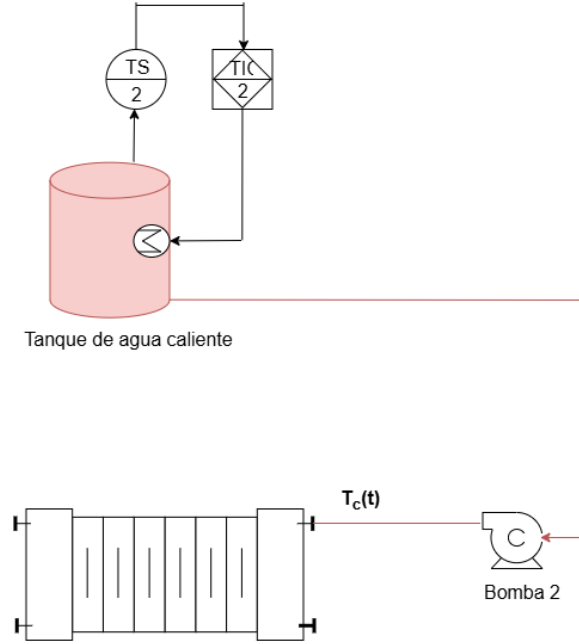


Figura 2.14: Análisis de la temperatura del agua $T_c(t)$

En la Figura 2.14, se considera que no hay cambios bruscos debido a que la capacidad calorífica volumétrica del agua es alta y la temperatura es homogénea en el tanque al ser pequeño, ya que las dimensiones físicas son reducidas. A partir de que la bomba succiona el agua del contenedor y la transporta hacia el intercambiador, la temperatura se mantiene igual, debido a que es una distancia pequeña. Por lo tanto $\tilde{T}_c(t) = T_c(t)$.

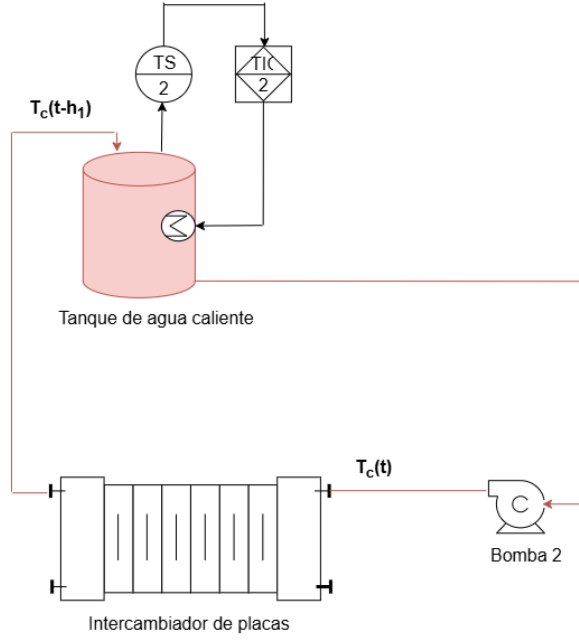


Figura 2.15: Análisis de la temperatura del agua $T_c(t - h_1)$

Una vez que el agua con temperatura $T_c(t)$ circula a través del intercambiador de calor, se considera que transcurre un tiempo h_1 para llegar a la salida y volver al tanque. Por lo tanto, $T_c(t - h_1)$ representa esa temperatura retardada. En estado estable, la temperatura $T_c(t - h_1)$ alcanzará un valor aproximado a $T_c(t)$, por lo cual $T_c(t) \approx T_c(t - h_1)$. De este modo, se considera lo siguiente:

- $\dot{T}_c(t) \propto T_c(t)$, debido a que es un sistema de primer orden.
- $\dot{T}_c(t) \propto T_c(t - h_1)$, debido a la recirculación del agua.
- $\dot{T}_c(t) \propto u_1(t)$, debido a que la resistencia afecta a T_c .

El cambio de temperatura para $\dot{T}_c(t)$ es el resultado de lo que ocurre simultáneamente en el proceso, obteniendo:

$$\dot{T}_c(t) = a_0 T_c(t) + a_1 T_c(t - h_1) + b_1 u_1(t). \quad (2.26)$$

Ahora se obtiene el modelo matemático para el tanque que tiene el agua a temperatura ambiente.

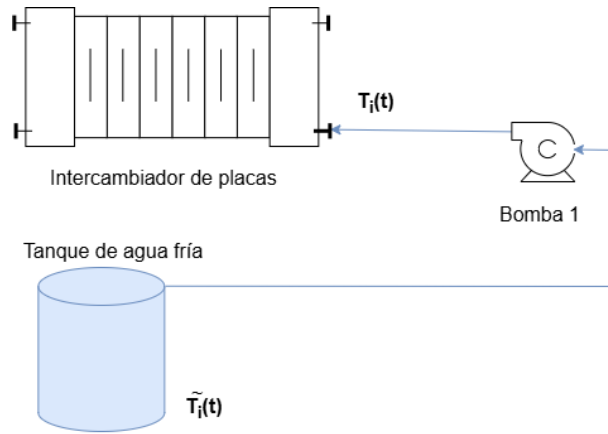


Figura 2.16: Análisis de la temperatura del agua $T_i(t)$

En la Figura 2.16 se considera que no hay cambios bruscos debido a que la capacidad calorífica volumétrica del agua es alta y la temperatura es homogénea en el tanque al ser pequeño, ya que las dimensiones físicas son reducidas, ya que se utilizan tanques de 5 litros. A partir de que la bomba succiona el agua del contenedor y la transporta hacia el intercambiador la temperatura se mantiene igual, debido a que es una distancia pequeña. Por lo tanto $\tilde{T}_i(t) = T_i(t)$.

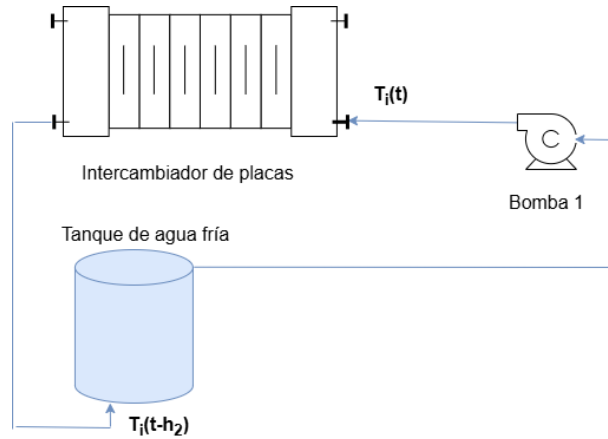


Figura 2.17: Análisis de la temperatura del agua $T_i(t - h_2)$

En la Figura 2.17 se analiza que la temperatura del agua $T_i(t)$ circula a través del intercambiador de calor, se considera que transcurre un tiempo h_2 para llegar a la salida y volver al tanque. Por lo tanto, $T_i(t - h_2)$ representa esa temperatura retardada.

En estado estable, la temperatura $T_i(t - h_2)$ alcanzará un valor aproximado a $T_i(t)$, por lo cual $T_i(t) \approx T_i(t - h_2)$.

En la Figura 2.9, el tanque de agua fría intercambia calor por convección a través del intercambiador con el tanque de agua caliente $T_c(t)$. De este modo, se considera lo siguiente:

- $\dot{T}_i(t) \propto T_i(t)$, debido a que el proceso térmico es de primer orden.
- $\dot{T}_i(t) \propto T_i(t - h_2)$, debido a la recirculación.
- $\dot{T}_i(t) \propto T_c(t)$, debido a la interacción con el fluido caliente.
- $\dot{T}_i(t) \propto u_2(t)$, debido a que la bomba 2 inyecta agua caliente.

Por lo tanto, el cambio de temperatura para $\dot{T}_i(t)$ es el resultado de lo que ocurre simultáneamente en el proceso, obteniendo:

$$\dot{T}_i(t) = c_0 T_i(t) + c_1 T_i(t - h_2) + c_2 T_c(t) + b_2 u_2(t). \quad (2.27)$$

Se consideran dos retardos h_1 y h_2 en la Figura 2.9. Sin embargo, en la implementación física se modifica la longitud de las mangueras para igualar los tiempos de retardo. El retardo h_1 corresponde a la retroalimentación del sistema de agua caliente $T_c(t - h_1)$ y el retardo h_2 corresponde a $T_i(t - h_2)$, los cuales se muestran en las Figuras 2.15 y 2.17. Al hacer esto se busca que ambos retardos sean similares. Por lo tanto $h_1 \approx h_2$, por lo que ahora se considera solo un retardo h . Las ecuaciones (2.26) y (2.27) se definen de la siguiente manera:

$$\dot{T}_c(t) = a_0 T_c(t) + a_1 T_c(t - h) + b_1 u_1(t), \quad (2.28)$$

$$\dot{T}_i(t) = c_0 T_i(t) + c_1 T_i(t - h) + c_2 T_c(t) + b_2 u_2(t). \quad (2.29)$$

El modelo multivariable a partir de las ecuaciones (2.28) y (2.29) se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_c(t) \\ \dot{T}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ c_2 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_c(t) \\ T_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_c(t - h) \\ T_i(t - h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

donde $u_1(t)$ es la señal de control aplicada a la resistencia; $u_2(t)$ es la señal de control aplicada a la bomba 2; la bomba 1 opera de manera continua proporcionando un flujo constante de agua; y $a_0, a_1, b_1, b_2, c_0, c_1$ y c_2 son los parámetros constantes a determinar.

2.3. Conclusiones

Se obtuvo el modelo matemático multivariable para el intercambiador de calor considerando el retardo inherente al proceso. El retardo h_1 corresponde a la retroalimentación del sistema de agua caliente $T_c(t - h_1)$, mientras que el retardo h_2 corresponde a $T_i(t - h_2)$. Ambos retardos pueden igualarse $h_1 \approx h_2$ modificando las mangueras de la plataforma experimental, lo que permite considerar un solo retardo h .

Capítulo 3

Control óptimo para sistemas con retardo

En este capítulo se estudian los sistemas que incorpora un retardo distribuido en el control, y así desarrollar la funcional de Bellman para el problema de control óptimo para sistemas con retardo en el estado, utilizando la solución en la forma de Cauchy del sistema en lazo cerrado con un control admisible. Mediante el índice de desempeño propuesto por A.V. Kim [9], se desacopla la ecuación del tipo de Riccati obtenida para el control óptimo y se analizan las condiciones suficientes para la estabilidad en lazo cerrado.

3.1. Diagrama de pasos a seguir para obtener el control óptimo

Para obtener el control óptimo de sistemas con retardo distribuido, se sigue una metodología descrita en la Figura 3.1, la cual presenta el diagrama de flujo que muestra los pasos necesarios para obtenerlo.

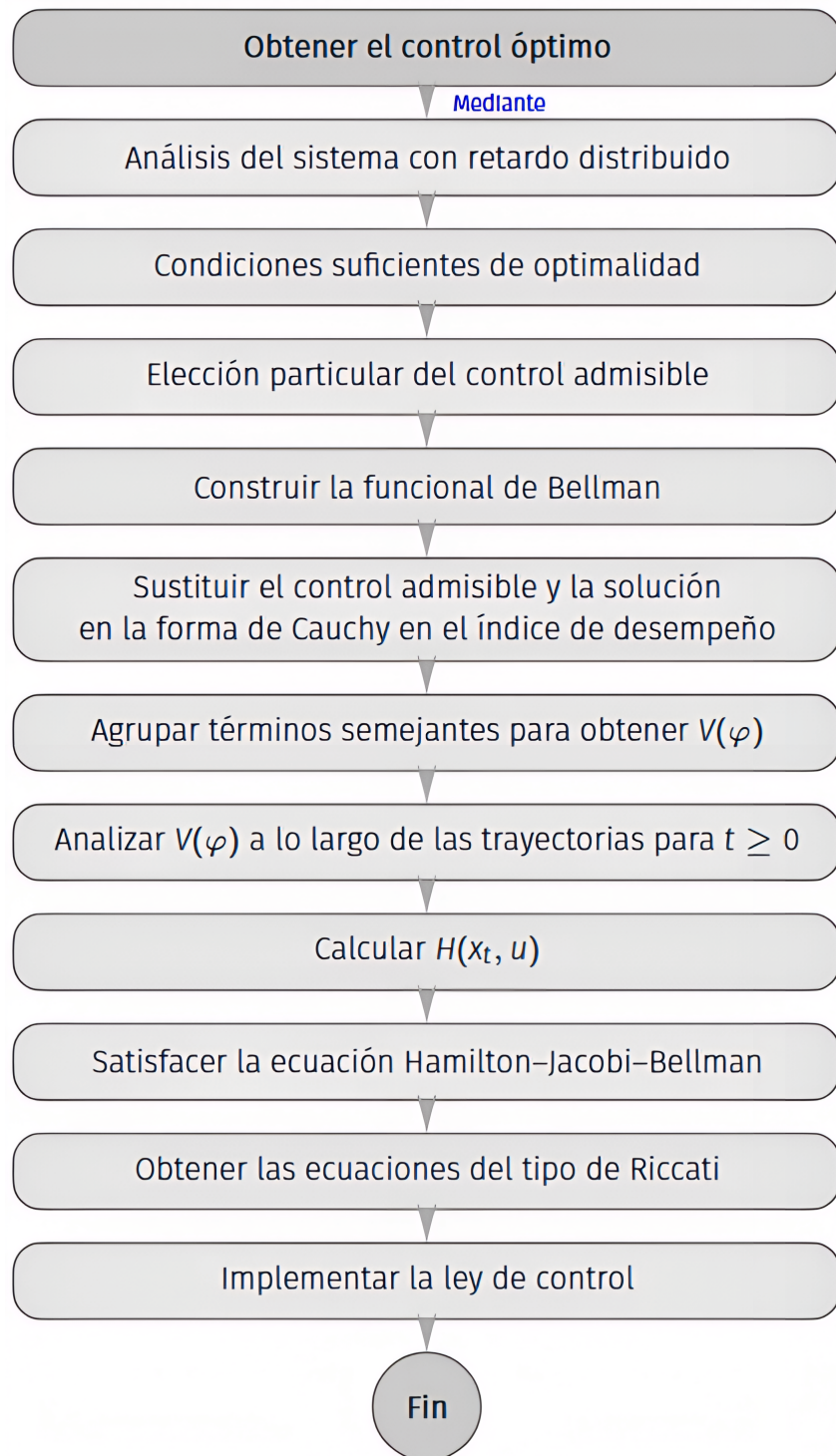


Figura 3.1: Diagrama de flujo para obtener el control óptimo

3.1.1. Análisis del sistema con retardo puntual

A pesar de que el modelo matemático propuesto en la ecuación (2.30) tiene retardos puntuales, en esta sección se considera el siguiente sistema con retardo distribuido propuesto en A.V. Kim [9], dado por la ecuación diferencial:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 G(s)x(t+s)ds + Bu(t), \quad (3.1)$$

donde los vectores $x(t)$ y $u(t)$ y las matrices A , A_τ , $G(s)$ y B tienen las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} x(t) &\in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \\ A &\in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A_\tau \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times r}, \\ G(s) &\in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ y es continua para } s \in [-\tau, 0], \end{aligned}$$

con condiciones iniciales

$$x(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0],$$

donde $\varphi(s)$ pertenece a las funciones continuas a tramos en el intervalo $[-\tau, 0]$ y tiene dimensión infinita. Es decir, se expresa como:

$$\varphi \in \mathcal{PC}_{[-\tau, 0]}, \quad \dim(\mathcal{PC}) = \infty.$$

El estado completo del sistema (3.1), se expresa de la siguiente manera

$$x_t = \{x(t); x(t+s), -\tau \leq s < 0\}.$$

3.1.2. Condiciones suficientes de optimalidad

Se requiere hallar un control estabilizante que minimice el siguiente índice de desempeño [9] sujeto al sistema con retardo distribuido dado por (3.1)

$$J = \int_0^\infty g(x_t, u(x_t)) dt, \quad (3.2)$$

donde

$$\begin{aligned}
g(x_t, u(x_t)) = & x^T(t) \Phi_0 x(t) + 2x^T(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s) x(t+s) ds \\
& + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^T(t+s) \Phi_2(s, v) x(t+v) ds dv + u^T(x_t) N u(x_t),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

donde las matrices Φ_0 , Φ_1 y Φ_2 tienen las siguientes dimensiones y propiedades:

- $\Phi_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Phi_0 = \Phi_0^T$,
- $\Phi_1(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Phi_1(s)$ es continua a trozos en $[-\tau, 0]$,
- $\Phi_2(s, \nu) = \Phi_2^T(\nu, s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es continua a trozos en $[-\tau, 0] \times [-\tau, 0]$,
- $N \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $N = N^T$, $N > 0$.

1. Definir los controles admisibles

1. $u(t) = u(x_t)$, es decir, el control es una retroalimentación de estado.
2. $u(x_t)$ es una ley de control estabilizante.
3. $u(x_t)$ es una función continua (asegura la existencia y unicidad del sistema en lazo cerrado, cuyas condiciones para la existencia y unicidad de $u(x_t)$ para esta dado pora (3.1)).

Si un control admisible u^* y una funcional $V(x_t)$ satisfacen la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman, y se alcanza un mínimo para todos los controles admisibles u , entonces u^* es óptimo. El siguiente teorema se basa en la prueba dada por D.W. Ross [10], se presenta a continuación:

Teorema 1. *Si existe un control $u^*(t) = u^*(x_t)$ que sea admisible, y una función escalar continua $V(x_t)$, tal que $V = 0$ para $x_t = 0$, entonces se satisface [10]*

$$\dot{V}(x_t) \Big|_{\substack{(3.1) \\ u=u^*}} + g(x_t, u^*(x_t)) = 0, \quad \forall t \geq 0, \tag{3.4}$$

$$\dot{V}(x_t) \Big|_{\substack{(3.1) \\ u=u^*}} + g(x_t, u^*(x_t)) \leq \dot{V}(x_t) \Big|_{\substack{(3.1) \\ u=u(t)}} + g(x_t, u(t)), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.5}$$

para todo $u(t)$ admisible, entonces se tiene que $u^*(t)$ es óptimo. Además $V(\varphi) = J(\varphi, u^*)$ y, este es el valor óptimo del índice de desempeño J .

Demostración.

Para verificar que $V(\varphi) = J(\varphi, u^*)$. Se despeja la ecuación (3.4), se tiene

$$\dot{V}(x_t) \Big|_{\substack{(3.1) \\ u=u^*}} = -g(x_t, u^*(x_t)), \quad \forall t \geq 0,$$

se integra desde $t = 0$ hasta $t = \infty$ en ambos miembros de la ecuación

$$\int_0^\infty \frac{dV(x_t)}{dt} \Big|_{\substack{(3.1) \\ u=u^*}} dt = - \int_0^\infty g(x_t, u^*(x_t)) dt,$$

resolviendo se obtiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x_t) - V(x_0) = - \int_0^\infty g(x_t, u^*(x_t)) dt, \quad (3.6)$$

debido a que u^* es un control admisible y debe ser estabilizante en el sentido asintótico, se tiene que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \implies \lim_{t \rightarrow \infty} V(x_t) = 0.$$

Por lo tanto, la ecuación (3.6) se convierte en:

$$V(x_0) = \int_0^\infty g(x_t, u^*(x_t)) dt.$$

Dado que la funcional $V(\varphi) = V(x_0)$, porque $x_0 = \varphi$, se tiene que el índice de desempeño $J(\varphi, u^*)$ es

$$J(\varphi, u^*) = \int_0^\infty g(x_t, u^*(x_t)) dt,$$

el cual se reescribe de la siguiente manera

$$V(\varphi) = J(\varphi, u^*). \quad (3.7)$$

Por lo tanto, se tiene que $V(\varphi)$ representa el índice de desempeño J cuando $u = u^*$.

Se comprueba la desigualdad de la ecuación (3.5), dada por

$$\dot{V}(x_t) \Big|_{\substack{(3.1) \\ u=u^*}} + g(x_t, u^*(x_t)) \leq \dot{V}(x_t) \Big|_{\substack{(3.1) \\ u=u(t)}} + g(x_t, u(t)), \quad \forall t \geq 0,$$

se utiliza la igualdad de la ecuación (3.4), y se sustituye en la (3.5), obteniendo

$$0 \leq \dot{V}(x_t) \Big|_{\substack{(3.1) \\ u=u(t)}} + g(x_t, u(t)), \quad \forall t \geq 0,$$

reordenando la desigualdad, se tiene:

$$\dot{V}(x_t) \Big|_{\substack{(3.1) \\ u=u(t)}} \geq -g(x_t, u(t)), \quad \forall t \geq 0,$$

se integra desde $t = 0$ hasta $t = \infty$ en ambos miembros de la ecuación

$$\int_0^\infty \frac{dV(x_t)}{dt} \Big|_{\substack{(3.1) \\ u=u^*}} dt \geq - \int_0^\infty g(x_t, u(x_t)) dt,$$

resolviendo se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x_t) - V(x_0) \geq - \int_0^\infty g(x_t, u(x_t)) dt,$$

reescribiendo se obtiene:

$$V(x_0) \leq \int_0^\infty g(x_t, u(x_t)) dt.$$

Se sabe que $V(x_0) = V(\varphi) = J(\varphi, u^*)$, y que la expresión $\int_0^\infty g(x_t, u(x_t)) dt$ corresponde a la ecuación (3.2). De este modo la ecuación se puede expresar de la siguiente manera:

$$J(\varphi, u^*) \leq J(\varphi, u(t)),$$

para todo $u(t)$ admisible y toda condición inicial $\varphi \in \mathcal{PC}_{[-h,0]}$. En consecuencia, $V(\varphi)$ representa el índice de desempeño evaluado en u^* , por lo tanto u^* es óptimo [10]. $\square$

3.2. Construcción de la funcional de Bellman

Observe que para resolver las ecuaciones (3.4) y (3.5), es necesario proponer la funcional de Bellman $V(x_t)$ o construirla. Los enfoques constructivos tienen la ventaja de que dado una estructura de control admisible $u(x_t)$, siempre se conocerá la estructura de $V(x_t)$. Por esta razón se realiza la construcción de la funcional $V(x_t)$ a diferencia de A.V. Kim [9], en la cual se propone.

Para construir la funcional de Bellman, se requiere hallar un control $u^*(x_t)$ y una funcional $V(x_t)$ que ambos satisfagan a las condiciones (3.4) y (3.5). Para ello, se debe considerar lo siguiente:

1. Elegir una forma particular de $u^*(x_t)$.
2. Construir $V(x_0) = J(x_0; u^*(x_t))$, a partir de la forma elegida de $u^*(x_t)$.
3. Utilizar las condiciones (3.4) y (3.5) como restricciones en los parámetros de $u^*(x_t)$.

Estos pasos se siguen para simplificar el problema del control óptimo, y así obtener una solución expresada mediante ecuaciones del tipo de Riccati [10].

2. Elección particular del control admisible

En esta sección se propone el siguiente control admisible para toda la trayectoria x_t del sistema (3.1) [9]:

$$u(x_t) = Cx(t) + \int_{-\tau}^0 D(s)x(t+s)ds, \quad (3.8)$$

donde las matrices C y D tienen las siguientes dimensiones:

$$C \in \mathbb{R}^{r \times n},$$

$$D(s) \in \mathbb{R}^{r \times n} \text{ y es continua en } [-\tau, 0].$$

Cuando $\tau = 0$ el control coincide con la retroalimentación de estado clásica de los sistemas libres de retardos, y para $\tau > 0$ se tiene que el retardo distribuido incluye todo el estado x_t .

3. Construir la funcional $V(\varphi)$

Como se mencionó anteriormente, el artículo de A.V. Kim [9] no proporciona un procedimiento detallado para construir la funcional, por lo que en este trabajo de tesis se desarrolla.

Para construir $V(\varphi)$, se sustituye el control admisible propuesto (3.8) en el sistema (3.1), con la finalidad de obtener el sistema en lazo cerrado:

$$\dot{x}(t) = [A + BC]x(t) + A_\tau x(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 [G(s) + BD(s)]x(t + s)ds,$$

donde

$$A_0 = A + BC, \quad (3.9)$$

$$E(s) = G(s) + BD(s), \quad (3.10)$$

por lo que:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_\tau x(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 E(s)x(t + s)ds. \quad (3.11)$$

La solución en la forma de Cauchy del sistema [38] para la ecuación (3.11) es:

$$x(t, \varphi) = K(t)\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 K(t - \theta - \tau)A_\tau \varphi(\theta)d\theta + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^\theta K(t - \theta + \xi)E(\xi)d\xi \varphi(\theta)d\theta,$$

con condiciones iniciales $K(0) = I$ y $K(\tau) = 0$ para todo $\tau < 0$.

Se puede reescribir de la siguiente manera:

$$x(t, \varphi) = K(t)\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \hat{K}(t, \theta)\varphi(\theta)d\theta, \quad (3.12)$$

donde

$$\hat{K}(t, \theta) = K(t - \theta - \tau)A_\tau + \int_{-\tau}^\theta K(t - \theta + \xi)E(\xi)d\xi.$$

Se requiere hallar los parámetros C y $D(s)$ de un control admisible que minimice el índice de desempeño (3.2), a lo largo de las trayectorias del sistema (3.1) [9]. Para expresar $u(x_t)$ en términos de la condición inicial φ se sustituye la solución en su forma de Cauchy (3.12) en el control admisible (3.8), obteniendo:

$$\begin{aligned} u(x_t) = & C \left(K(t)\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \hat{K}(t, \theta)\varphi(\theta)d\theta \right) \\ & + \int_{-\tau}^0 D(s) \left(K(t + s)\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \hat{K}(t + s, \theta)\varphi(\theta)d\theta \right) ds, \end{aligned}$$

desarrollando las operaciones y agrupando términos, se obtiene:

$$u(x(t, \varphi)) = \left[CK(t) + \int_{-\tau}^0 D(s)K(t+s)ds \right] \varphi(0) \\ + \int_{-\tau}^0 \left[C\hat{K}(t, \theta) + \int_{-\tau}^0 D(s)K(t+s, \theta) \right] \varphi(\theta)d\theta ds,$$

se define:

$$F_0(t) = CK(t) + \int_{-\tau}^0 D(s)K(t+s)ds,$$

$$F_1(t, \theta) = C\hat{K}(t, \theta) + \int_{-\tau}^0 D(s)\hat{K}(t+s, \theta)ds,$$

reescribiendo la ecuación, se tiene:

$$u(x(t, \varphi)) = F_0(t)\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 F_1(t, \theta)\varphi(\theta)d\theta. \quad (3.13)$$

Siguiendo la estructura del índice de desempeño descrito en la ecuación (3.3), se construye la funcional de Bellman, considerando los siguientes términos:

- Primer término:

$$x^T(t)\Phi_0 x(t). \quad (3.14)$$

- Segundo término:

$$2x^T(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s)x(t+s)ds. \quad (3.15)$$

- Tercer término:

$$\int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^T(t+s)\Phi_2(s, \nu)x(t+\nu)dsd\nu. \quad (3.16)$$

- Cuarto término:

$$u^T(t)Nu(t). \quad (3.17)$$

Entonces se sustituye la solución en la forma de Cauchy (3.12) en el primer término dado por(3.14):

$$x^T(t)\Phi_0x(t) = \left(K(t)\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \hat{K}(t, \theta)\varphi(\theta)d\theta \right)^T \Phi_0 \left(K(t)\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \hat{K}(t, \theta)\varphi(\theta)d\theta \right),$$

desarrollando las operaciones se obtiene

$$\begin{aligned} x^T(t)\Phi_0x(t) &= \varphi^T(0)K^T(t)\Phi_0K(t)\varphi(0) \\ &+ \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta)\tilde{K}^T(t, \theta)\Phi_0K(t)\varphi(0) d\theta \\ &+ \int_{-\tau}^0 \varphi^T(0)K^T(t)\Phi_0\tilde{K}(t, \theta)\varphi(\theta) d\theta \\ &+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta_1)\tilde{K}^T(t, \theta_1)\Phi_0\tilde{K}(t, \theta_2)\varphi(\theta_2) d\theta_2 d\theta_1, \end{aligned}$$

se agrupan términos usando el hecho que $\Phi_0 = \Phi_0^T$, es decir, es simétrica, esto resulta en

$$\begin{aligned} x^T(t)\Phi_0x(t) &= \varphi^T(0)K^T(t)\Phi_0K(t)\varphi(0) \\ &+ 2 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta)\tilde{K}^T(t, \theta)\Phi_0K(t)\varphi(0) d\theta \\ &+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta_1)\tilde{K}^T(t, \theta_1)\Phi_0\tilde{K}(t, \theta_2)\varphi(\theta_2) d\theta_2 d\theta_1. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ahora se sustituye la solución en la forma de Cauchy (3.12) en (3.15), obteniendo así

$$\begin{aligned} 2x^T(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s)x(t+s)ds &= \\ 2 \int_{-\tau}^0 \left(K(t)\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \hat{K}(t, \theta)\varphi(\theta)d\theta \right)^T \Phi_1(s) &\left(K(t+s)\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \hat{K}(t+s, \theta)\varphi(\theta)d\theta \right) ds, \end{aligned}$$

desarrollando las operaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}
2x^T(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s)x(t+s)ds = & \\
& 2 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(0)K^\top(t)\Phi_1(s)K(t+s) \varphi(0)ds \\
& + 2 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(0)K^\top(t)\Phi_1(s) \left[\int_{-\tau}^0 \tilde{K}(t+s, \theta)\varphi(\theta) d\theta \right] ds \\
& + 2 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(\theta)\tilde{K}^\top(t, \theta)\Phi_1(s)K(t+s)d\theta ds \varphi(0) \\
& + 2 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(\theta_1)\tilde{K}^\top(t, \theta_1)\Phi_1(s)\tilde{K}(t+s, \theta_2)\varphi(\theta_2) d\theta_2 d\theta_1 ds,
\end{aligned}$$

por lo que:

$$\begin{aligned}
2x^T(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s)x(t+s)ds = & \\
& 2\varphi^\top(0) \left(K^\top(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s)K(t+s) ds \right) \varphi(0) \\
& + 2\varphi^\top(0) \left(K^\top(t) \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s)\tilde{K}(t+s, \theta)\varphi(\theta) d\theta ds \right) \quad (3.19) \\
& + 2\varphi^\top(0) \left(\int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 K^\top(t+s, \theta)\Phi_1^\top(s)\tilde{K}(t, \theta)\varphi(\theta) d\theta ds \right) \\
& + 2 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(\theta_1)\tilde{K}^\top(t, \theta_1)\Phi_1(s)\tilde{K}(t+s, \theta_2)\varphi(\theta_2) d\theta d\theta_2 ds.
\end{aligned}$$

En el tercer término se sustituye la solución en la forma de Cauchy (3.12) en (3.16), lo que resulta en

$$\begin{aligned}
\int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^\top(t+s)\Phi(s, \nu)x(t+\nu) ds d\nu = & \\
& \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \left[K(t+s)\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \tilde{K}(t+s, \theta_1)\varphi(\theta_1)d\theta_1 \right]^\top \Phi_2(s, \nu) \times \dots \\
& \dots \times \left[K(t+\nu)\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \tilde{K}(t+\nu, \theta_2)\varphi(\theta_2)d\theta_2 \right] ds d\nu.
\end{aligned}$$

desarrollando las operaciones se tiene:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^\top(t+s) \Phi(s, \nu) x(t+\nu) ds d\nu \\
&= \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(0) K^\top(t+s) \Phi_2(s, \nu) K(t+\nu) \varphi(0) ds d\nu \\
&+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(0) K^\top(t+s) \Phi_2(s, \nu) \tilde{K}(t+\nu, \theta_2) \varphi(\theta_2) d\theta_2 ds d\nu \\
&+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(\theta_1) \tilde{K}^\top(t+s, \theta_1) \Phi_2(s, \nu) K(t+\nu) \varphi(0) ds d\nu \\
&+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(\theta_1) \tilde{K}^\top(t+s, \theta_1) \Phi_2(s, \nu) \tilde{K}(t+\nu, \theta_2) \varphi(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 ds d\nu,
\end{aligned}$$

debido a la propiedad que tiene $\Phi_2(s, \nu) = \Phi_2(\nu, s)$, se agrupan términos, obteniendo

$$\begin{aligned}
& \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^\top(t+s) \Phi(s, \nu) x(t+\nu) ds d\nu \\
&= \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(0) K^\top(t+s) \Phi_2(s, \nu) K(t+\nu) \varphi(0) ds d\nu \\
&+ 2 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(0) K^\top(t+s) \Phi_2(s, \nu) \tilde{K}(t+\nu, \theta_2) \varphi(\theta_2) d\theta_2 ds d\nu \\
&+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(\theta_1) \tilde{K}^\top(t+s, \theta_1) \Phi_2(s, \nu) \tilde{K}(t+\nu, \theta_2) \varphi(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 ds d\nu.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Finalmente en el cuarto término se sustituye el control (3.13) en (3.17), obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned}
& u^T(x(t, \varphi)) Nu(x(t, \varphi)) = \\
& \left(F_0(t) \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 F_1(t, \theta_1) \varphi(\theta_1) d\theta_1 \right)^T N \left(F_0(t) \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 F_1(t, \theta_2) \varphi(\theta_2) d\theta_2 \right),
\end{aligned}$$

desarrollando las operaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}
& u^T(x(t, \varphi)) Nu(x(t, \varphi)) = \\
& \varphi^\top(0) F_0^\top(t) N F_0(t) \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(0) F_0^\top(t) N F_1(t, \theta_2) \varphi(\theta_2) d\theta_2 \\
& + \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(\theta_1) F_1^\top(t, \theta_1) N F_0(t) \varphi(0) d\theta_1 \\
& + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(\theta_1) F_1^\top(t, \theta_1) N F_1(t, \theta_2) \varphi(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2,
\end{aligned}$$

al ser $N = N^T$, se transpone el tercer término de la ecuación del lado derecho y se suma con el segundo término, lo que resulta en

$$\begin{aligned}
u^T(x(t, \varphi))Nu(x(t, \varphi)) = & \\
& \varphi^T(0)F_0^T(t)NF_0(t)\varphi(0) + 2\varphi^T(0)F_0^T(t)N \int_{-\tau}^0 F_1(t, \theta)\varphi(\theta)d\theta \\
& + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta_1)F_1^T(t, \theta_1)NF_1(t, \theta_2)\varphi(\theta_2)d\theta_1d\theta_2.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

De los resultados obtenidos de las ecuaciones (3.18), (3.19), (3.20) y (3.21) se sustituyen en el índice de desempeño (3.7), obteniendo

$$\begin{aligned}
V(\varphi) = & \int_0^\infty \{ \varphi^T(0)K^T(t)\Phi_0K(t)\varphi(0) \\
& + 2 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta)\hat{K}^T(t, \theta)\Phi_0K(t)\varphi(0) d\theta \\
& + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta_1)\hat{K}^T(t, \theta_1)\Phi_0\hat{K}(t, \theta_2)\varphi(\theta_2) d\theta_2 d\theta_1 \\
& + 2\varphi^\top(0) \left(K^\top(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s)K(t+s) ds \right) \varphi(0) \\
& + 2 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(0) \left(K^\top(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s)\hat{K}(t+s, \theta) ds \right) \varphi(\theta) d\theta \\
& + 2 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(0) \left(\int_{-\tau}^0 K^\top(t+s)\Phi_1^\top(s)\hat{K}(t, \theta) ds \right) \varphi(\theta) d\theta \\
& + 2 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(\theta_1)\hat{K}^\top(t, \theta_1)\Phi_1(s)\hat{K}(t+s, \theta_2)\varphi(\theta_2) d\theta_2 d\theta_1 ds \\
& + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(0)K^\top(t+s)\Phi_2(s, \nu)K(t+\nu)\varphi(0) ds d\nu \\
& + 2 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(0)K^\top(t+s)\Phi_2(s, \nu)\hat{K}(t+\nu, \theta_2)\varphi(\theta_2) d\theta_2 ds d\nu \\
& + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(\theta_1)\hat{K}^\top(t, \theta_1)\Phi_2(s, \nu)\hat{K}(t+\nu, \theta_2)\varphi(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 ds d\nu \\
& + \varphi^T(0)F_0^T(t)NF_0(t)\varphi(0) + 2\varphi^T(0)F_0^T(t)N \int_{-\tau}^0 F_1(t, \theta)\varphi(\theta)d\theta \\
& + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta_1)F_1^T(t, \theta_1)NF_1(t, \theta_2)\varphi(\theta_2)d\theta_1d\theta_2 \} dt,
\end{aligned}$$

se agrupan términos semejantes, lo que conlleva:

$$\begin{aligned}
V(\varphi) = & \int_0^\infty \{ \varphi^\top(0) \left[K^\top(t) \Phi_0 K(t) + 2K^\top(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s) K(t+s) ds \right. \\
& + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 K^\top(t+s) \Phi_2(s, \nu) K(t+\nu) ds d\nu + F_0^\top(t) N F_0(t) \left. \right] \varphi(0) \\
& + 2\varphi^\top(0) \int_{-\tau}^0 \left[K^\top(t) \Phi_0 \hat{K}(t, \theta) + 2K^\top(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s) \hat{K}(t+s, \theta) ds \right. \\
& + \int_{-\tau}^0 K^\top(t+s) \Phi_1^\top(s) \hat{K}(t, \theta) ds \\
& + \left. \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 K^\top(t+s) \Phi_2(s, \nu) \hat{K}(t+\nu, \theta) ds d\nu + F_0^\top(t) N F_1(t, \theta) \right] \varphi(\theta) d\theta \\
& + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(\theta_1) \left[\hat{K}^\top(t, \theta_1) \Phi_0 \hat{K}(t, \theta_2) + 2 \int_{-\tau}^0 \hat{K}^\top(t, \theta_1) \Phi_1(s) \hat{K}(t+s, \theta_2) ds \right. \\
& + \left. \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \hat{K}^\top(t+s, \theta_1) \Phi_2(s, \nu) \hat{K}(t+\nu, \theta_2) ds d\nu + F_1^\top(t, \theta_1) N F_1(t, \theta_2) \right] \varphi(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \} dt,
\end{aligned}$$

se reescribe de la siguiente manera

$$V(\varphi) = \varphi^\top(0) P \varphi(0) + 2\varphi^\top(0) \int_{-\tau}^0 D(\theta) \varphi(\theta) d\theta + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^\top(\theta_1) R(\theta_1, \theta_2) \varphi(\theta_2) d\theta_2 d\theta_1, \quad (3.22)$$

donde:

$$\begin{aligned}
P = & \int_0^\infty \left[K^\top(t) \Phi_0 K(t) + 2K^\top(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s) K(t+s) ds \right. \\
& + \left. \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 K^\top(t+s) \Phi_2(s, \nu) K(t+\nu) ds d\nu + F_0^\top(t) N F_0(t) \right] dt. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(\theta) = & \int_0^\infty \left[K^\top(t) \Phi_0 \tilde{K}(t, \theta) + 2K^\top(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s) \tilde{K}(t+s, \theta) ds \right. \\
& + \int_{-\tau}^0 K^\top(t+s) \Phi_1^\top(s) \tilde{K}(t, \theta) ds \\
& + \left. \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 K^\top(t+s) \Phi_2(s, \nu) \tilde{K}(t+\nu, \theta) ds d\nu + F_0^\top(t) N F_1(t, \theta) \right] dt.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(\theta_1, \theta_2) = & \int_0^\infty \left[\tilde{K}^\top(t, \theta_1) \Phi_0 \tilde{K}(t, \theta_2) + 2 \int_{-\tau}^0 \tilde{K}^\top(t+s, \theta_1) \Phi_1(s) \tilde{K}(t+s, \theta_2) ds \right. \\
& \left. + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \tilde{K}^\top(t+s, \theta_1) \Phi_2(s, \nu) \tilde{K}(t+\nu, \theta_2) ds d\nu + F^\top(t, \theta_1) N F_1(t, \theta_2) \right] dt.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Se cumple que P es simétrica y $R^\top(\theta_1, \theta_2) = R(\theta_2, \theta_1)$.

Las matrices P , $D(\theta)$ y $R(\theta_1, \theta_2)$, las cuales se definen con la matriz fundamental $K(\cdot)$ y una integral impropia, existen siempre y cuando en un sistema en lazo cerrado sean asintóticamente estable. Esto garantiza dado que un control admisible es estabilizante.

Se realiza la demostración de que la matriz P de la ecuación (3.23) es simétrica. Los primeros tres términos se reescriben en su forma cuadrática, quedando de la siguiente forma:

$$P = \int_0^\infty \left[\begin{bmatrix} K(t) \\ \int_{-\tau}^0 K(t+s) ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi_0 & \Phi_1(s) \\ \Phi_1^T(s) & \Phi_2(s, \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K(t) \\ \int_{-\tau}^0 K(t+s) ds \end{bmatrix} + F_0^\top(t) N F_0(t) \right] dt.$$

Se tiene en cuenta las propiedades de simetría mencionadas con anterioridad donde $\Phi_0 = \Phi_0^T$, $\Phi_2(s, \nu) = \Phi_2^T(\nu, s)$ y $N = N^T$. Al transponer la ecuación se obtiene

$$P^T = \int_0^\infty \left[\begin{bmatrix} K(t) \\ \int_{-\tau}^0 K(t+s) ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi_0 & \Phi_1(s) \\ \Phi_1^T(s) & \Phi_2(s, \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K(t) \\ \int_{-\tau}^0 K(t+s) ds \end{bmatrix} + F_0^\top(t) N F_0(t) \right]^T dt.$$

Al realizar las operaciones se obtiene el mismo resultado, por lo tanto P es simétrica.

Se realiza la demostración de que $R^\top(\theta_1, \theta_2) = R(\theta_2, \theta_1)$. Al transponer la ecuación (3.24) se tiene

$$\begin{aligned}
R(\theta_1, \theta_2)^T = & \int_0^\infty \left[\tilde{K}^\top(t, \theta_1) \Phi_0 \tilde{K}(t, \theta_2) + 2 \int_{-\tau}^0 \tilde{K}^\top(t+s, \theta_1) \Phi_1(s) \tilde{K}(t+s, \theta_2) ds \right. \\
& \left. + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \tilde{K}^\top(t+s, \theta_1) \Phi_2(s, \nu) \tilde{K}(t+\nu, \theta_2) ds d\nu + F^\top(t, \theta_1) N F_1(t, \theta_2) \right]^T dt,
\end{aligned}$$

realizando las operaciones y teniendo en cuenta que $\Phi_2(s, \nu) = \Phi_2^T(\nu, s)$ y $N = N^T$, se obtiene

$$R(\theta_2, \theta_1) = \int_0^\infty \left[\tilde{K}^\top(t, \theta_2) \Phi_0 \tilde{K}(t, \theta_1) + 2 \int_{-\tau}^0 \tilde{K}^\top(t+s, \theta_2) \Phi_1(s) \tilde{K}(t+s, \theta_1) ds \right. \\ \left. + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \tilde{K}^\top(t+s, \theta_2) \Phi_2^T(\nu, s) \tilde{K}(t+\nu, \theta_1) ds d\nu + F^\top(t, \theta_2) N F_1(t, \theta_1) \right] dt.$$

Por lo tanto se demuestra que $R^\top(\theta_1, \theta_2) = R(\theta_2, \theta_1)$.

4. Obtención de la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman

En [9], el cálculo del Hamiltoniano asocia a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, se obtiene mediante el cálculo i-suave [9]. En este trabajo de tesis, se usa el método tradicional usado en [21, 10].

Como $\varphi = x_0$ y $x_t = x(t + \theta)$ se obtiene $V(x_t)$ a partir de $V(\varphi) = V(x_0)$, entonces la funcional $V(x_t)$ es:

$$V(x_t) = x(t)^\top P x(t) + 2x(t)^\top \int_{-\tau}^0 D(\theta) x(t+\theta) d\theta + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x(t+\theta_1)^\top R(\theta_1, \theta_2) x(t+\theta_2) d\theta_1 d\theta_2. \quad (3.25)$$

Se calcula el Hamiltoniano de la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman dada por (3.4):

$$H(x_t, u) = \dot{V}(x_t) \Big|_{\substack{(3.1) \\ u-\text{admissible}}} + x^T(t) \Phi_0 x(t) + 2x^T(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s) x(t+s) ds \\ + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^T(t+s) \Phi_2(s, v) x(t+v) ds dv + u^T(x_t) N u^T(x_t). \quad (3.26)$$

Se desarrolla $\dot{V}(x_t) \Big|_{\substack{(3.1) \\ u-\text{admissible}}}$ a partir de la ecuación (3.25), con lo cual se obtiene

$$\dot{V}(x_t) \Big|_{\substack{(3.1) \\ u-\text{admissible}}} = \frac{d}{dt} [x^T(t) P x(t)] + \frac{d}{dt} \left[2x^T(t) \int_{-\tau}^0 D(\theta) x(t+\theta) d\theta \right] \\ + \frac{d}{dt} \left[\int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^T(t+\theta_1) R(\theta_1, \theta_2) x(t+\theta_2) d\theta_2 d\theta_1 \right].$$

Al desarrollar las derivadas y reescribir la ecuación conforme a la notacion de Newton, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) \Big|_{\substack{(3.1) \\ u\text{-admissible}}} &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\
&+ 2\dot{x}^T(t) \int_{-\tau}^0 D(\theta)x(t+\theta)d\theta + 2x^T(t) \int_{-\tau}^0 D(\theta)\frac{\partial}{\partial t}x(t+\theta)d\theta \\
&+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \frac{\partial}{\partial t} [x^\top(t+\theta_1)] R(\theta_1, \theta_2)x(t+\theta_2)d\theta_2d\theta_1 \\
&+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^\top(t+\theta_1)R(\theta_1, \theta_2)\frac{\partial}{\partial t} [x(t+\theta_2)] d\theta_2d\theta_1.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Se sustituye la ecuación (3.27) en (3.26), obteniendo el Hamiltoniano como:

$$\begin{aligned}
H(x_t, u) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\
&+ 2\dot{x}^T(t) \int_{-\tau}^0 D(\theta)x(t+\theta)d\theta + 2x^T(t) \int_{-\tau}^0 D(\theta)\frac{\partial}{\partial t}x(t+\theta)d\theta \\
&+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \frac{\partial}{\partial t} [x^\top(t+\theta_1)] R(\theta_1, \theta_2)x(t+\theta_2)d\theta_2d\theta_1 \\
&+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^\top(t+\theta_1)R(\theta_1, \theta_2)\frac{\partial}{\partial t} [x(t+\theta_2)] d\theta_2d\theta_1 \\
&+ x^T(t)\Phi_0x(t) + 2x^T(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s)x(t+s) ds \\
&+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^T(t+s)\Phi_2(s, v)x(t+v) ds dv + u^T(x_t)Nu^T(x_t).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Ahora, se sustituye el modelo de la planta dado por (3.1) en (3.28) para obtener el control óptimo

$$\begin{aligned}
H(x_t, u) = & \left[A_0 x(t) + A_\tau x(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 G(s) x(t + s) ds + Bu \right]^T Px(t) \\
& + x^T(t) P \left[Ax_0(t) + A_\tau x(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 G(s) x(t + s) ds + Bu \right] \\
& + 2 \left[Ax_0(t) + A_\tau x(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 G(s) x(t + s) ds + Bu \right]^T \int_{-\tau}^0 D(\theta) x(t + \theta) d\theta \\
& + 2 \left[x^T(t) \int_{-\tau}^0 D(\theta) \frac{d}{dt} [x(t + \theta)] \right] d\theta \\
& + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \left[\frac{d}{dt} [x^T(t + s)] R(s, v) x(t + v) + x^T(t + s) R(s, v) \frac{d}{dt} [x(t + v)] \right] dv ds \\
& + x^T(t) \Phi_0 x(t) + 2x^T(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s) x(t + s) ds + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^T(t + s) \Phi_2(s, v) x(t + v) ds dv \\
& + u^T Nu.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

De acuerdo con las condiciones necesarias del cálculo de variaciones se considera lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial u} H(x_t, u) = 0. \tag{3.30}$$

Sustituyendo la ecuación (3.29) en (3.30) se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial u} [u^T B^T Px(t)] + \frac{\partial}{\partial u} [x^T(t) P Bu] + \frac{\partial}{\partial u} \left[2u^T B^T \int_{-\tau}^0 D(\theta) x(t + \theta) d\theta \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial u} [u^T Nu] = 0,
\end{aligned}$$

desarrollando las derivadas parciales obtenemos:

$$2B^T Px(t) + 2B^T \int_{-\tau}^0 D(\theta) x(t + \theta) d\theta + 2Nu = 0,$$

finalmente despejando a u , se tiene

$$u(x_t)^* = -N^{-1} B^T Px(t) - N^{-1} B^T \int_{-\tau}^0 D(\theta) x(t + \theta) d\theta. \tag{3.31}$$

Se analiza si la ecuación es un mínimo o un máximo conforme a:

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} H(x, u).$$

Al derivar a (3.31) se obtiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} H(x, u) = 2N > 0, \quad (3.32)$$

por lo tanto es un mínimo local.

Para que $u(x_t)^*$ sea un mínimo global se debe satisfacer la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman. Siendo válido para $t \geq 0$, en particular $t = 0$ y se considera que $u = u^*$, siendo ahora:

$$\dot{V}(x_t) + g(x_t, u^*(x_t)) = 0. \quad (3.33)$$

Se sustituye la ecuación (3.27) y (3.3) en la ecuación (3.33):

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) + g(x_t, u^*(x_t)) = & \left[A_0 x(t) + A_\tau x(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 G(s) x(t + s) ds + Bu^*(x_t) \right]^T Px(t) \\ & + x^T(t) P \left[A_0 x(t) + A_\tau x(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 G(s) x(t + s) ds + Bu^*(x_t) \right] \\ & + 2 \left[A_0 x(t) + A_\tau x(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 G(s) x(t + s) ds + Bu^*(x_t) \right]^T \int_{-\tau}^0 D(\theta) x(t + \theta) d\theta \\ & + 2 \left[x^T(t) \int_{-\tau}^0 D(\theta) \frac{\partial}{\partial t} [x(t + \theta)] d\theta \right] \\ & + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \left[\frac{\partial}{\partial t} [x^T(t + s)] R(s, v) x(t + v) + x^T(t + s) R(s, v) \frac{\partial}{\partial t} [x(t + v)] \right] dv ds \\ & + x^T(t) \Phi_0 x(t) + 2x^T(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s) x(t + s) ds + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^T(t + s) \Phi_2(s, v) x(t + v) ds dv \\ & + u^T(x_t) Nu(x_t). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Se toma en cuenta que:

$$\frac{\partial x(t + \theta)}{\partial t} = \frac{\partial x(t + \theta)}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial x^T(t+s)}{\partial t} = \frac{\partial x^T(t+s)}{\partial s}$$

$$\frac{\partial x^T(t+v)}{\partial t} = \frac{\partial x^T(t+v)}{\partial v}$$

La ecuación (3.34) se cumple para todo $t \geq 0$, en particular se cumple para $t = 0$, y al aplicar las igualdades de las derivadas parciales se tiene:

$$\begin{aligned} V'(\varphi) + g(\varphi, u^*(\varphi)) = & \left[A\varphi(0) + A_\tau\varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 G(s)\varphi(s)ds + Bu^*(\varphi) \right]^T P\varphi(0) \\ & + \varphi^T(0)P \left[A\varphi(0) + A_\tau\varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 G(s)\varphi(s)ds + Bu^*(\varphi) \right] \\ & + 2 \left[A\varphi(0) + A_\tau\varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 G(s)\varphi(s)ds + Bu^*(\varphi) \right]^T \int_{-\tau}^0 D(\theta)\varphi(\theta)d\theta \\ & + 2\varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 D(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} [\varphi(\theta)] d\theta \\ & + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \left[\frac{\partial}{\partial s} [\varphi^T(s)] R(s, v) \varphi(v) + \varphi^T(s) R(s, v) \frac{\partial}{\partial v} [\varphi(v)] \right] dv ds \\ & + \varphi^T(0) \Phi_0 \varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s) \varphi(s) ds + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s) \Phi_2(s, v) \varphi(v) ds dv \\ & + u^*(\varphi)^T N u^*(\varphi), \end{aligned}$$

donde $V'(\varphi)$ denota la derivada respecto a la variable θ , debido a que

$$\frac{dV(x_t)}{dt} = \frac{dV(x(t+\theta))}{dt},$$

como:

$$\frac{dV(x(t+\theta))}{dt} = \frac{dV(x(t+\theta))}{d\theta},$$

si $t = 0$, entonces

$$\frac{dV(x(\theta))}{d\theta} = V'(\varphi).$$

Al realizar las operaciones, se obtiene:

$$\begin{aligned}
V'(\varphi) + g(\varphi, u^*(\varphi)) = & \\
& \varphi^T(0)A^T P\varphi(0) + \varphi^T(-\tau)A_\tau^T P\varphi(0) + \left(\int_{-\tau}^0 \varphi^T(s)G^T(s)ds \right) P\varphi(0) + (u^*(\varphi))^T B^T P\varphi(0) \\
& + \varphi^T(0)PA\varphi(0) + \varphi^T(0)PA_\tau\varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \varphi^T(0)PG(s)\varphi(s)ds + \varphi^T(0)PBu^*(\varphi) \\
& + 2\varphi^T(0)A^T \int_{-\tau}^0 D(\theta)\varphi(\theta)d\theta + 2\varphi^T(-\tau)A_\tau^T \int_{-\tau}^0 D(\theta)\varphi(\theta)d\theta \\
& + 2 \left(\int_{-\tau}^0 \varphi^T(s)G^T(s)ds \right) \left(\int_{-\tau}^0 D(\theta)\varphi(\theta)d\theta \right) + 2(u^*(\varphi))^T B^T \int_{-\tau}^0 D(\theta)\varphi(\theta)d\theta \\
& + 2\varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 D(\theta) \frac{d}{d\theta}[\varphi(\theta)]d\theta + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \frac{d}{ds} \varphi^T(s)R(s,v)\varphi(v)dvds \\
& + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s)R(s,v) \frac{d}{dv} \varphi(v)dvds \\
& + \varphi^T(0)\Phi_0\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s)\varphi(s)ds + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s)\Phi_2(s,v)\varphi(v)dsdv \\
& + u^*(\varphi)^T Nu^*(\varphi),
\end{aligned}$$

se agrupan los términos semejantes, se obtiene:

$$\begin{aligned}
V'(\varphi) + g(\varphi, u^*) = & 2\varphi^T(0)P \left[A\varphi(0) + A_\tau\varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 G(s)\varphi(s)ds + Bu^*(\varphi) \right] \\
& + 2 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta)D^T(\theta)d\theta \left[A\varphi(0) + A_\tau\varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 G(s)\varphi(s)ds + Bu^*(\varphi) \right] \\
& + 2 \left[\varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 D(\theta) \frac{d}{d\theta}[\varphi(\theta)]d\theta \right] \\
& + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \left[\frac{d}{ds}[\varphi^T(s)]R(s,v)\varphi(v) + \varphi^T(s)R(s,v) \frac{d}{dv}[\varphi(v)] \right] dvds \\
& + \varphi^T(0)\Phi_0\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s)\varphi(s)ds + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s)\Phi_2(s,v)\varphi(v)dsdv \\
& + u^{*T}(\varphi)Nu^*(\varphi),
\end{aligned} \tag{3.35}$$

se sustituye la u^* encontrada (3.31) en (3.35), obteniendo

$$\begin{aligned}
V'(\varphi) + g(\varphi, u^*) = & 2\varphi^T(0)PA\varphi(0) + 2\varphi^T(0)PA_\tau\varphi(-\tau) + 2\varphi^T(0)P \int_{-\tau}^0 G(s)\varphi(s)ds \\
& + 2\varphi^T(0)PB \left[-N^{-1}B^TP\varphi(0) - N^{-1}B^T \int_{-\tau}^0 D(\theta)\varphi(\theta)d\theta \right] \\
& + 2 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta)D^T(\theta)d\theta A\varphi(0) + 2 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta)D^T(\theta)d\theta A_\tau\varphi(-\tau) \\
& + 2 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta)D^T(\theta)G(s)\varphi(s)d\theta ds \\
& + 2 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta)D^T(\theta)d\theta B \left[-N^{-1}B^TP\varphi(0) - N^{-1}B^T \int_{-\tau}^0 D(\theta)\varphi(\theta)d\theta \right] \\
& + 2\varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 D(\theta) \frac{d}{d\theta}[\varphi(\theta)]d\theta \\
& + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \left[\frac{d}{ds}[\varphi^T(s)]R(s,v)\varphi(v) + \varphi^T(s)R(s,v) \frac{d}{dv}[\varphi(v)] \right] dsdv \\
& + \varphi^T(0)\Phi_0\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(s)\varphi(s)ds + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s)\Phi_2(s,v)\varphi(v)dsdv \\
& + \left[-N^{-1}B^TP\varphi(0) - N^{-1}B^T \int_{-\tau}^0 D(\theta)\varphi(\theta)d\theta \right]^T N \\
& \times \left[-N^{-1}B^TP\varphi(0) - N^{-1}B^T \int_{-\tau}^0 D(\theta)\varphi(\theta)d\theta \right].
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Se consideran los siguientes términos de la ecuación (3.36):

$$2\varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 D(\theta) \frac{d}{d\theta} \varphi(\theta) d\theta. \tag{3.37}$$

$$\int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \frac{d}{ds} [\varphi^T(s)] R(s,v) \varphi(v) ds dv. \tag{3.38}$$

$$\int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s) R(s,v) \frac{d}{dv} \varphi(v) ds dv. \tag{3.39}$$

Se realiza la integración por partes, en las ecuaciones (3.37), (3.38) y (3.39) empleando la siguiente fórmula:

$$\int_a^b w dz = wz \Big|_a^b - \int_a^b z dw. \tag{3.40}$$

Se empieza con la ecuación (3.37), definiendo:

$$w_1 = D(\theta), \quad dz_1 = \frac{d}{d\theta}\varphi(\theta)d\theta,$$

entonces

$$dw_1 = \frac{dD(\theta)}{d\theta}d\theta, \quad z_1 = \varphi(\theta).$$

Se utiliza la ecuación (3.36), obteniendo

$$\begin{aligned} & 2\varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 D(\theta) \frac{d}{d\theta}\varphi(\theta)d\theta \\ &= 2\varphi^T(0) D(\theta)\varphi(\theta) \Big|_{-\tau}^0 - 2\varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 \frac{dD(\theta)}{d\theta}\varphi(\theta)d\theta \\ &= 2\varphi^T(0) D(0)\varphi(0) - 2\varphi^T(0) D(-\tau)\varphi(-\tau) - 2\varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 \frac{dD(\theta)}{d\theta}\varphi(\theta)d\theta. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Se continua con la ecuación (3.38), definiendo:

$$w_2 = R(s, v), \quad dz_2 = \frac{d}{ds}\varphi^T(s)ds,$$

entonces

$$dw_2 = \frac{\partial R(s, v)}{\partial s}ds, \quad z_2 = \varphi^T(s).$$

Se utiliza la ecuación (3.36), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \frac{d}{ds}[\varphi^T(s)] R(s, v)\varphi(v)dsdv \\ &= \int_{-\tau}^0 \left[\varphi^T(s) R(s, v) \Big|_{-\tau}^0 - \int_{-\tau}^0 \frac{\partial R(s, v)}{\partial s}\varphi^T(s)ds \right] \varphi(v)dv \\ &= \varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 R(0, v)\varphi(v)dv - \varphi^T(-\tau) \int_{-\tau}^0 R(-\tau, v)\varphi(v)dv - \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s) \frac{\partial R(s, v)}{\partial s}\varphi(v)dsdv. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Finalmente se resuelve la ecuación (3.39), se define:

$$w_3 = R(s, v), \quad dz_3 = \frac{d}{dv}\varphi(v)dv,$$

entonces:

$$dw_3 = \frac{\partial R(s, v)}{\partial v} dv, \quad z_3 = \varphi(v).$$

Se utiliza la ecuación (3.36), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s) R(s, v) \frac{d}{dv} \varphi(v) ds dv \\ &= \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s) \left[R(s, v) \varphi(v) \Big|_{-\tau}^0 - \int_{-\tau}^0 \frac{\partial R(s, v)}{\partial v} \varphi(v) dv \right] ds \\ &= \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s) R(s, 0) ds \varphi(0) - \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s) R(s, -\tau) ds \varphi(-\tau) - \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s) \frac{\partial R(s, v)}{\partial v} \varphi(v) ds dv. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Se sustituyen los resultados de las ecuaciones (3.41), (3.42) y (3.43) en (3.36), se tiene que:

$$\begin{aligned} & V'(\varphi) + g(\varphi, u^*) = \\ & 2\varphi^T(0) P A \varphi(0) + 2\varphi^T(0) P A_\tau \varphi(-\tau) + 2\varphi^T(0) P \int_{-\tau}^0 G(\theta) \varphi(\theta) d\theta \\ & - 2\varphi^T(0) P B N^{-1} B^T P \varphi(0) - 2\varphi^T(0) P B N^{-1} B^T \int_{-\tau}^0 D(\theta) \varphi(\theta) d\theta \\ & + 2 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta) D^T(\theta) d\theta A \varphi(0) + 2 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta) D^T(\theta) d\theta A_\tau \varphi(-\tau) \\ & + 2 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta) D^T(\theta) G(s) \varphi(s) d\theta ds - 2 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta) D^T(\theta) d\theta B N^{-1} B^T P \varphi(0) \\ & - 2 \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s) D^T(s) B N^{-1} B^T D(v) \varphi(v) ds dv \\ & + 2\varphi^T(0) D(0) \varphi(0) - 2\varphi^T(0) D(-\tau) \varphi(-\tau) - 2\varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 \frac{dD(\theta)}{d\theta} \varphi(\theta) d\theta \\ & + \varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 R(0, v) \varphi(v) dv - \varphi^T(-\tau) \int_{-\tau}^0 R(-\tau, v) \varphi(v) dv \\ & - \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s) \frac{\partial R(s, v)}{\partial s} \varphi(v) ds dv \\ & \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s) R(s, 0) ds \varphi(0) - \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s) R(s, -\tau) d\theta \varphi(-\tau) \\ & - \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s) \frac{\partial R(s, v)}{\partial v} \varphi(v) ds dv \\ & + \varphi^T(0) \Phi_0 \varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(\theta) \varphi(\theta) d\theta + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s) \Phi_2(s, v) \varphi(v) ds dv + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots + \varphi^T(0)PBN^{-1}NN^{-1}B^TP\varphi(0) + 2\varphi^T(0)PBN^{-1}NN^{-1}B^T \int_{-\tau}^0 D(\theta)\varphi(\theta)d\theta \\ & + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s)D^T(s)BN^{-1}NN^{-1}B^TD(v)\varphi(v)dsdv, \end{aligned}$$

se agrupan términos semejantes de la ecuación (3.44), obteniendo

$$\begin{aligned} V'(\varphi) + g(\varphi, u^*) &= \varphi^T(0) \left[PA + A^TP - PBN^{-1}B^TP + D(0) + D^T(0) + \Phi_0 \right] \varphi(0) \\ &+ 2\varphi^T(0) [PA_\tau - D(-\tau)] \varphi(-\tau) \\ &+ 2\varphi^T(0) \int_{-\tau}^0 \left[-\frac{dD(\theta)}{d\theta} + PG(\theta) + (A^T - PBN^{-1}B^T)D(\theta) + R(0, \theta) + \Phi_1(\theta) \right] \varphi(\theta)d\theta \\ &+ 2\varphi^T(-\tau) \int_{-\tau}^0 [A_\tau^TD(\theta) - R(-\tau, \theta)] \varphi(\theta)d\theta \\ &+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s) \left[D^T(s)G(v) + G^T(s)D(v) - D^T(s)BN^{-1}B^TD(v) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial R(s, v)}{\partial s} - \frac{\partial R(s, v)}{\partial v} + \Phi_2(s, v) \right] \varphi(v)dsdv = 0. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Para que la igualdad a cero de la ecuación (3.44) se cumpla, para toda condición inicial $\varphi \neq 0$, se tiene que cada término debe ser cero, por lo que se obtienen las ecuaciones del tipo de Riccati:

$$PA + A^TP + D(0) + D^T(0) + \Phi_0 = PBN^{-1}B^TP. \tag{3.45}$$

$$PA_\tau = D(-\tau). \tag{3.46}$$

$$\frac{dD(s)}{ds} - PG(s) + (PBN^{-1}B^T - A^T)D(s) = R(0, s) + \Phi_1(s). \tag{3.47}$$

$$A_\tau^TD(s) = R(-\tau, s). \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial R(s, v)}{\partial s} + \frac{\partial R(s, v)}{\partial v} = D^T(s)G(v) + G^T(s)D(v) - D^T(s)BN^{-1}B^TD(v) + \Phi_2(s, v). \tag{3.49}$$

Para resolver P , $R(0, s)$ y $D(s)$ se utiliza el método propuesto en [9], con el fin de desacoplar las ecuaciones (3.45), (3.47) y (3.49). Esto requiere una elección particular de las matrices Φ_0 , $\Phi(s)_1$ y $\Phi(s, v)_2$. M debe ser una matriz definida positiva, esto lleva a

$$\Phi_0 = M - (D(0) + D^T(0)), \quad (3.50)$$

$$\Phi_1(s) = -PG(s) - R(0, s), \quad (3.51)$$

$$\Phi_2(s, v) = D^T(s)BN^{-1}B^TD(v) - D^T(s)G(v) - G^T(s)D(v). \quad (3.52)$$

Mediante una elección particular de estas matrices (3.50), (3.51) y (3.52) al sustituirlas en las ecuaciones (3.45), (3.47) y (3.49) se logra la cancelación de los términos cruzados. Como resultado, las ecuaciones se desacoplan, obteniendo:

$$PA + A^TP + M = PBN^{-1}B^TP, \quad (3.53)$$

$$\frac{dD(s)}{ds} + (PBN^{-1}B^T - A^T)D(s) = 0, \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}R(s, v) + \frac{\partial}{\partial v}R(s, v) = 0, \quad (3.55)$$

donde

$$K = BN^{-1}B^T,$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$PA_\tau = D(-\tau), \quad (3.56)$$

$$A_\tau^TD(s) = R(-\tau, s). \quad (3.57)$$

Siempre que el par (A, B) sea controlable [39] existe una solución P a una ecuación algebraica de Riccati dada por (3.53), y por lo tanto, es posible sustituir esta ecuación en (3.54), de esta forma, (3.54) es una ecuación diferencial de primer orden matricial cuya solución es posible hallar en forma directa. La ecuación diferencial parcial (3.55), tiene la forma de una ecuación de transporte, la cual puede solucionarse de forma directa. Esto se establece en el siguiente teorema propuesto por A.V. Kim [9]:

Teorema 2 (A.V. Kim [9]). Si P es solución de la ecuación matricial (3.53), las matrices $D(s)$ y $R(s, v)$ que son soluciones del sistema (3.54), (3.55), (3.46) y (3.48) tienen la siguiente forma:

$$D(s) = e^{-[PK-A^T](s+\tau)} PA_\tau \quad (3.58)$$

$$R(s, v) = \begin{cases} Q(s)D(v), & (s, v) \in \Omega_1, \\ D^T(s)Q^T(v), & (s, v) \in \Omega_2, \end{cases} \quad (3.59)$$

$$\Omega_1 = \{(s, v) \in [-\tau, 0] \times [-\tau, 0] : s - v < 0\}, \quad (3.60)$$

$$\Omega_2 = \{(s, v) \in [-\tau, 0] \times [-\tau, 0] : s - v > 0\}, \quad (3.61)$$

$$Q(s) = A_\tau e^{[PK-A_1^T](s+\tau)}. \quad (3.62)$$

Demostración.

Matriz $D(s)$: se asume que P es solución a la ecuación (3.53), se tiene que:

$$\frac{dD(s)}{ds} = -(PBN^{-1}B^T - A_1^T)D(s),$$

tiene solución de la forma exponencial

$$D(s, D(s_0)) = e^{-(PBN^{-1}B^T - A_1^T)(s-s_0)} D(s_0),$$

con condición de frontera $PA_\tau = D(-\tau)$ y $s \in [-\tau, 0]$, esto implica que $s_0 = -\tau$, por lo tanto se tiene

$$D(s, D(-\tau)) = e^{-(PBN^{-1}B^T - A_1^T)(s+\tau)} D(-\tau) = e^{-(PBN^{-1}B^T - A_1^T)(s+\tau)} PA_\tau. \quad (3.63)$$

Matriz $R(s, v)$: se verifica que la matriz (3.24) es solución del sistema (3.55), esto implica demostrar que Ω_1 (3.60) cumple lo siguiente:

$$R(s, v) = Q(s)D(v), \quad (3.64)$$

se sustituye (3.64) en (3.55), obteniendo

$$\frac{dQ(s)}{ds}D(v) + Q(s)\frac{dD(v)}{dv} = 0. \quad (3.65)$$

De forma análoga se utiliza (3.54) para obtener $\frac{dD(v)}{dv}$, por consecuencia se tiene:

$$\frac{dD(v)}{dv} = -[PK - A_1^T]D(v), \quad (3.66)$$

se reemplaza la ecuación (3.66) en (3.65) obteniendo

$$\left(\frac{dQ(s)}{ds}\right)D(v) - Q(s)[PK - A_1^T]D(v) = 0, \quad (3.67)$$

reescribiendo se tiene:

$$\left[\frac{dQ(s)}{ds} - Q(s)[PK - A_1^T]\right]D(v) = 0, \quad (3.68)$$

como $D(v) \neq 0$, $Q(s)$ satisface:

$$\frac{dQ(s)}{ds} - Q(s)[PK - A_1^T] = 0, \quad (3.69)$$

cuya solución en el intervalo $[-\tau, 0]$ es:

$$Q(s, Q(-\tau)) = Q(-\tau)e^{[PK - A_1^T](s+\tau)}, \quad (3.70)$$

la condición inicial se fija por la condición de frontera:

$$Q(-\tau) = A_\tau^T. \quad (3.71)$$

Por lo tanto la matriz $R(s, v)$ (3.55) tiene la forma de Ω_1 (3.60).

Se demuestra que Ω_2 cumple lo siguiente:

$$R(s, v) = D^T(s)Q^T(v), \quad (3.72)$$

se sustituye la ecuación (3.72) en (3.55), obteniendo:

$$\frac{dD^T(s)}{ds}Q^T(v) + D^T(s)\frac{dQ^T(v)}{dv} = 0. \quad (3.73)$$

Se despeja $\frac{dD(s)}{ds}$ de la ecuación (3.55), siendo

$$\frac{dD(s)}{ds} = -[PK - A_1^T]D(s),$$

transponiendo se tiene:

$$\frac{dD^T(s)}{ds} = -D^T(s)[PK - A_1^T]^T, \quad (3.74)$$

se sustituye la ecuación (3.74) en (3.73), obteniendo

$$-D^T(s)[PK - A_1^T]^T Q^T(v) + D^T(s) \frac{dQ^T(v)}{dv} = 0,$$

reescribiendo se tiene:

$$D^T(s) \left(\frac{dQ^T(v)}{dv} \right) - D^T(s)[PK - A_1^T]^T Q^T(v) = 0,$$

como $D(s) \neq 0$, se tiene $Q^T(s)$ es solución de la siguiente ecuación:

$$D^T(s) \left[\frac{dQ^T(v)}{dv} - [PK - A_1^T]^T Q^T(s) \right] = 0, \quad (3.75)$$

debido a que la ecuación (3.75) es la transpuesta de (3.68) en consecuencia la matriz $R(s, v)$ en el dominio Ω_2 forma a (3.64).

Se verifica que $R(s, v) = R^T(v, s)$ como:

$$R^T(s, v) = \begin{cases} D^T(v)Q^T(s), & (s, v) \in \Omega_1, \\ Q(v)D(s), & (s, v) \in \Omega_2, \end{cases} \quad (3.76)$$

Al intercambiar s y v por consecuencia Ω_1 y Ω_2 se intercambian, obteniendo

$$R^T(v, s) = \begin{cases} D^T(s)Q^T(v), & (s, v) \in \Omega_2, \\ Q(s)D(v), & (s, v) \in \Omega_1. \end{cases} \quad (3.77)$$

por lo tanto se satisface $R(s, v) = R^T(v, s)$. $\square$

3.3. Condiciones suficientes para la estabilidad en lazo cerrado

Debido a que hasta el momento no existe una forma de verificar que la funcional $V(\varphi)$ dada por la ecuación (3.22) sea definida positiva, y además $g(x, u)$ en (3.26) no se ha demostrado que sea definido positivo, no es posible concluir estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado con el control óptimo $u(x_t)^*$ dados por (3.31). Es por ello que se demostrará que $u(x_t)^*$ es estabilizante (por lo tanto admisible) mediante condiciones suficientes de estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Se considera el siguiente sistema descrito en la ecuación (3.11), conforme a la notación matemática dada en [40], se realizó un cambio de variable $\sigma = t + s \implies d\sigma = ds$ y se calculan los límites inferior ($\sigma = t - \tau$) y el límite superior ($\sigma = t$) y $s = \sigma - t \implies \int_{t-\tau}^t E(\sigma - t)x(\sigma)d\sigma$ y luego hasta $s = \sigma$, para obtener:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_\tau x(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t E(s - t)x(s)ds \quad (3.78)$$

donde

$x(t)$ es un vector en $\mathbb{R}^n$.

A_0 y A_τ son matrices constantes de dimensión $n \times n$.

τ es un valor positivo mayor que cero.

$E(s - t)$ es una matriz de dimensión $n \times n$ con elementos continuos.

Se probará la estabilidad asintótica del origen del sistema en lazo cerrado adecuando la funcional de Lyapunov–Krasovskii y derivando una condición del tipo de Riccati.

Se propone $V = V_1 + V_2$ con:

$$V_1(x_t) = x^T(t)\tilde{P}x(t), \quad \tilde{P} = \tilde{P}^T > 0, \quad (3.79)$$

$$V_2(x_t) = \int_{t-\tau}^t x^T(s)Nx(s)ds + \int_0^\tau \int_{t-s}^t x^T(\xi)S_1x(\xi)d\xi ds, \quad (3.80)$$

donde $N = N^T > 0$ y $S_1 = S_1^T > 0$.

Aquí V es positivo definido y radialmente no acotado en el espacio de funciones $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. En efecto las cotas inferior y superior son dadas por:

$$\alpha_1(\|x(t)\|) = x^T P x(t)$$

y

$$\alpha_2(\|x(t)\|) = \|x(t)\|_h^2 [\lambda_{max}(P) + h\lambda_{max}(R) + h^2\lambda_{max}(S)]$$

y así: $\alpha_1(.) \leq y(x_t) \leq \alpha_2(.) \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Para verificar que el estado sea decreciente, se verifica la negatividad de $\dot{V}(x_t)$. Para ello se calcula $\dot{V}$ usando la dinámica y la regla de Leibniz para integrales con límites dependientes del tiempo, obteniendo

$$\dot{V}_1(x_t) = \dot{x}^T(t) \tilde{P} \dot{x}(t) + x^T(t) \tilde{P} \dot{x}(t), \quad (3.81)$$

Se sustituye la ecuación (3.78) en (3.81); resolviendo se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x_t) = & x^T(t) [A_0^T \tilde{P} + \tilde{P} A_0] x(t) + [A_\tau x(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t E(s - t) x(s) ds]^T \tilde{P} x(t) \\ & + x^T(t) \tilde{P} [A_\tau x(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t E(s - t) x(s) ds], \end{aligned} \quad (3.82)$$

y se tiene que para:

$$\dot{V}_2(x_t) = \frac{d}{dt} \left[\int_{t-\tau}^t x^T(s) N x(s) ds \right] + \frac{d}{dt} \left[\int_0^\tau \int_{t-s}^t x^T(\tau) S_1 x(\tau) d\tau ds \right], \quad (3.83)$$

Para resolver la ecuación (3.83) se aplica la regla de Leibniz al primer término $\frac{d}{dt} \left[\int_{t-\tau}^t x^T(s) N x(s) ds \right]$, lo cual resulta en:

$$x^T(t) N x(t) - x^T(t - \tau) N x(t - \tau).$$

Ahora, para el segundo término de la ecuación (3.83), la derivada se introduce en la integral interior:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^\tau \int_{t-s}^t x^T(\tau) S_1 x(\tau) d\tau ds \right] = \int_0^\tau \frac{d}{dt} \left[\int_{t-s}^t x^T(\tau) S_1 x(\tau) d\tau \right] ds.$$

Se aplica la regla de Leibniz a la integral interior y se obtiene:

$$x^T(t) S_1 x(t) \tau - \int_0^\tau x^T(t - s) S_1 x(t - s) ds.$$

Obteniendo así:

$$\dot{V}_2(x_t) = x^T(t)Nx(t) - x^T(t-\tau)Nx(t-\tau) + x^T(t)S_1x(t)\tau - \int_0^\tau x^T(t-s)S_1x(t-s)ds, \quad (3.84)$$

se considera que:

$$\begin{aligned} \sigma &= t - s, & d\sigma &= -ds, \\ \text{si } s &= 0, & \implies \sigma &= t, \\ \text{si } s &= \tau, & \implies \sigma &= t - \tau, \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x_t) &= x^T(t) [N + S_1\tau] x(t) - x^T(t-\tau)Nx(t-\tau) \\ &\quad - \int_{t-\tau}^t x^T(\sigma)S_1x(\sigma)d\sigma, \end{aligned} \quad (3.85)$$

dado los resultados obtenidos de las ecuaciones (3.82) y (3.85), al sumarse se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= x^T(t)[A_0^T\tilde{P} + \tilde{P}A_0 + N + \tau S_1]x(t) \\ &\quad + \left[A_\tau x(t-\tau) + \int_{t-\tau}^t E(s-t)x(s)ds \right]^T \tilde{P}x(t) \\ &\quad + x^T(t)\tilde{P} \left[A_\tau x(t-\tau) + \int_{t-\tau}^t E(s-t)x(s)ds \right] \\ &\quad - x^T(t-\tau)Nx(t-\tau) - \int_{t-\tau}^t x^T(\sigma)S_1x(\sigma)d\sigma \end{aligned} \quad (3.86)$$

Se realizan las operaciones matemáticas de la ecuación (3.86), obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= x^T(t)A_0^T\tilde{P}x(t) + x^T(t)\tilde{P}A_0x(t) + x^T(t)Nx(t) + x^T(t)\tau S_1x(t) \\ &\quad + x^T(t-\tau)A_\tau^T\tilde{P} + \int_{t-\tau}^t x^T(s)E^T(s-t)\tilde{P}x(t)ds \\ &\quad + x^T(t)\tilde{P}A_\tau x(t-\tau) + x^T(t)\tilde{P} \int_{t-\tau}^t E(s+t)x(s)ds \\ &\quad - x^T(t-\tau)Nx(t-\tau) - \int_{t-\tau}^t x^T(\sigma)E^T(s-t)\tilde{P}x(t)ds \end{aligned} \quad (3.87)$$

se agrupan términos semejantes para $x(t - \tau)$, se tiene lo siguiente:

$$-x^T(t - \tau)Nx(t - \tau) + x^T(t - \tau)A_\tau^T \tilde{P}x(t) + x^T(t)PA_\tau x(t - \tau),$$

se puede reescribir de la siguiente manera:

$$-[A_\tau^T \tilde{P}x(t) - Nx(t - \tau)]^T N^{-1} [A_\tau^T \tilde{P}x(t) - Nx(t - \tau)] + x^T(t) \tilde{P}A_\tau N^{-1} A_\tau^T \tilde{P}x(t). \quad (3.88)$$

Del mismo modo, se agrupan para los términos que corresponden a las integrales, con lo cual se obtiene:

$$\int_{t-\tau}^t \left[x^T(s)E^T(s-t)\tilde{P}x(t) + x^T(t)\tilde{P}E(s-t)x(s) - x^T(s)S_1x(s) \right] ds,$$

la ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & - \int_{t-\tau}^t \left[E^T(s-t)\tilde{P}x(t) - S_1x(s) \right]^T S_1^{-1} \left[E^T(s-t)\tilde{P}x(t) - S_1x(s) \right] ds \\ & + x^T(s) \left[\int_{t-\tau}^t \tilde{P}E(s-t)S_1^{-1}E^T(s-t)ds \right] \tilde{P}x(t). \end{aligned} \quad (3.89)$$

La ecuación (3.87), utilizando las ecuaciones (3.88) y (3.89) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) = & x^T(t) \left[A_0^T \tilde{P} + \tilde{P}A_0 + N + \tau S_1 + \tilde{P}A_\tau N^{-1} A_\tau^T \tilde{P} + \int_{t-\tau}^t \tilde{P}E(s-t)S_1^{-1}E^T(s-t)ds \tilde{P} \right] x(t) \\ & - \left[A_\tau^T \tilde{P}x(t) - Nx(t - \tau) \right]^T N^{-1} \left[A_\tau^T \tilde{P}x(t) - Nx(t - \tau) \right] \\ & - \int_{t-\tau}^t \left[E^T(s-t)\tilde{P}x(t) - S_1x(s) \right]^T S_1^{-1} \left[E^T(s-t)\tilde{P}x(t) - S_1x(s) \right] ds \end{aligned} \quad (3.90)$$

Finalmente $\dot{V}(x_t)$ se puede mayorizar de la siguiente manera:

$$\dot{V}(x_t) \leq x^T(t) \left[A_0^T \hat{P} + \hat{P}A_0 + N + \tau S_1 + \hat{P} \left(A_\tau N^{-1} A_\tau^T + \int_{-\tau}^0 E(\sigma)S_1^{-1}E^T(\sigma)d\sigma \right) \hat{P} \right] x(t) \quad (3.91)$$

Como la matriz $E(\sigma)$ del sistema en lazo cerrado se asume conocida de la ecuación (3.10), la integral definida puede resolverse y este término resultar una matriz constante. De acuerdo con lo expuesto anteriormente, es posible establecer el siguiente teorema:

Teorema 3. *Se asume que dadas las matrices $N > 0$, $S_1 > 0$, y $M > 0$ existe una solución simétrica $\hat{P} > 0$ a la ecuación algebraica:*

$$A_0^T \hat{P} + \hat{P} A_0 + N + h S_1 + \hat{P} \left(A_\tau N^{-1} A_\tau^T + \int_{-h}^0 E(\sigma) S_1^{-1} E^T(\sigma) d\sigma \right) \hat{P} = -M, \quad (3.92)$$

entonces el control óptimo u^ es estabilizante y por lo tanto admisible.*

3.4. Conclusiones

Se desarrolló la teoría necesaria para obtener el control óptimo para sistemas lineales con retardos distribuidos. Se construyó la funcional de Bellman y, mediante el índice de desempeño propuesto por A.V. Kim, se desacoplaron las ecuaciones del tipo de Riccati, lo que permitió obtener una solución analítica. Se estableció que si existe una solución simétrica $\tilde{P} > 0$ a la ecuación algebraica de Riccati que involucra retardos, entonces el control óptimo u^* es estabilizante y por lo tanto admisible.

Capítulo 4

Resultados experimentales

En este capítulo se identifican los retardos mediante una entrada tipo escalón a la planta. Los parámetros K y T se obtienen de esta entrada para sintonizar un PID industrial REX-C100 usando el método de control PI óptimo [18].

Se estiman los parámetros de la planta con el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos, lo que permite implementar la ley de control óptimo [9].

Se realiza un análisis de estabilidad y se compara el control óptimo con el PI óptimo mediante el índice IAE.

4.1. Descripción de la plataforma experimental

En la Figura 4.1 se muestra la planta implementada, la cual está conformada por

- Sensores de temperatura: LM35, que constituyen los elementos primarios del sistema de medición. Sus especificaciones técnicas se detallan en la sección B.1.
- Controladores: PID REX-C100, es el sistema de control. Sus especificaciones técnicas se detallan en B.2.
- Módulo de adquisición de datos: NI DAQ 6008. Sus especificaciones técnicas se detallan en B.3.
- Actuadores: resistencia calefactora de 1500 W, bomba de agua de diafragma FL-3210 con una capacidad de 6 L/min , relevador de estado sólido DC-AC FQFER de 40A, y relevador de estado sólido DC-DC FQFER de 60A. Estos son los elementos

de control, cuyas especificaciones técnicas se detallan en las secciones [B.4](#), [B.5](#), [B.6](#) y [B.7](#), respectivamente.

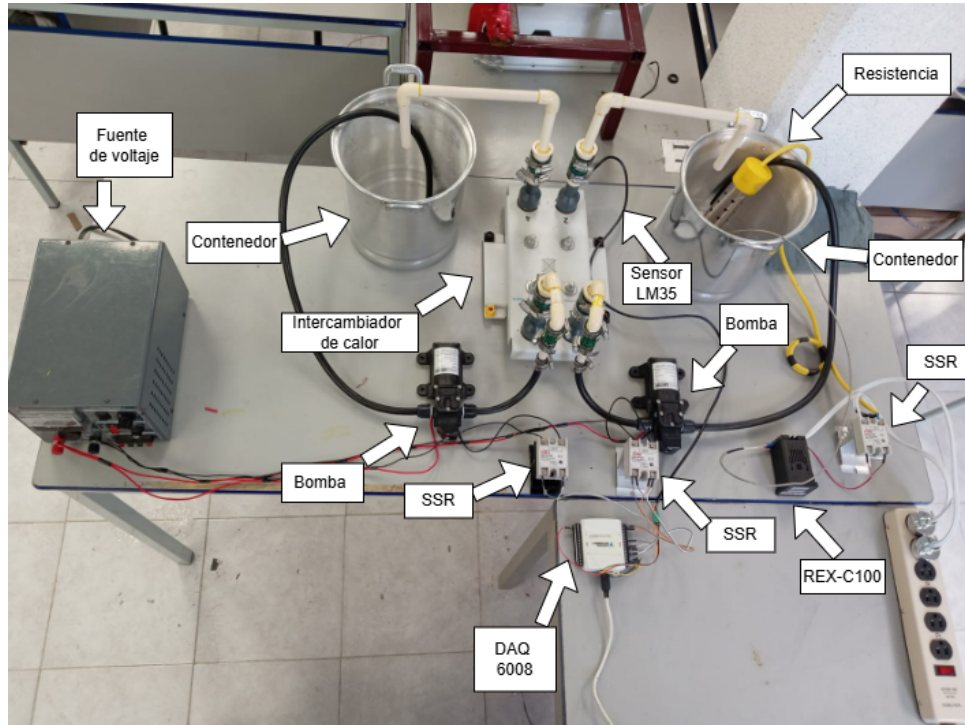


Figura 4.1: [Plataforma experimental](#)

Se identifican las variables controladas y manipuladas en ambos lazos de control. En ambos tanques, la variable controlada es la temperatura y las variables manipuladas son el flujo y el voltaje.

4.1.1. Descripción del intercambiador de calor

En la tabla [4.1](#) se muestran las características del intercambiador de calor que se encuentra en la UAEH, modelo 588215 (6532-00) marca FESTO. Su modo de operación es en paralelo. Asimismo, las entradas son 1 y 3, y las salidas 2 y 4, respectivamente. Este equipo se muestra en la Figura [4.2](#).

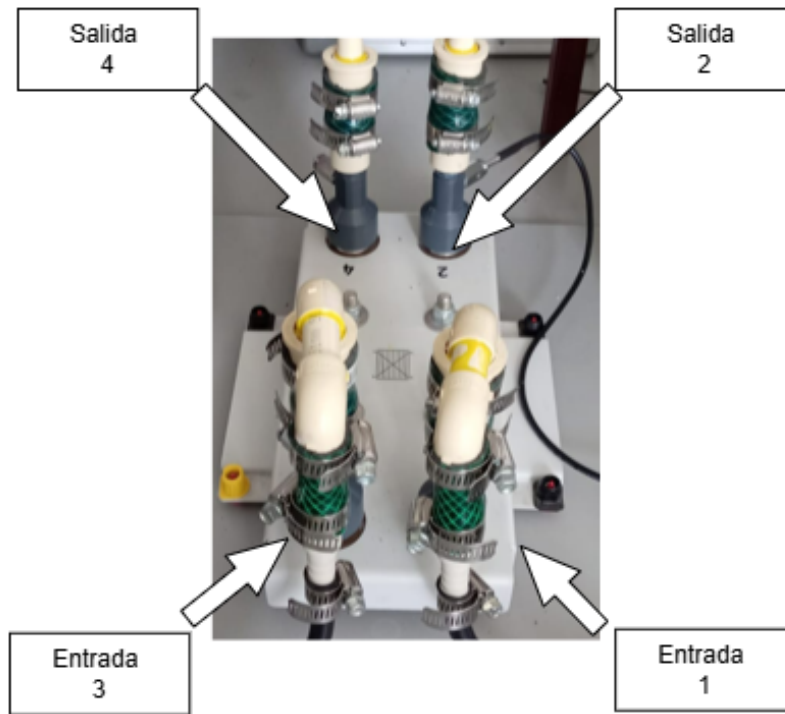


Figura 4.2: Intercambiador de placas

Parámetro	Valor
Tipo de intercambiador	Placa soldada
Superficie nominal	0.21 m ² (2.3 ft ²)
Número de canales	4 canales para el lado A y 3 para el lado B, total 8 placas

Tabla 4.1: Datos del intercambiador de calor

4.2. Identificación de los retardos

Para identificar los retardos en la entrada del intercambiador de calor se mete una entrada del tipo escalón. En la Figura 4.2 corresponde a la entrada 1 y 3. Después de realizar la prueba se obtuvieron los siguientes resultados.

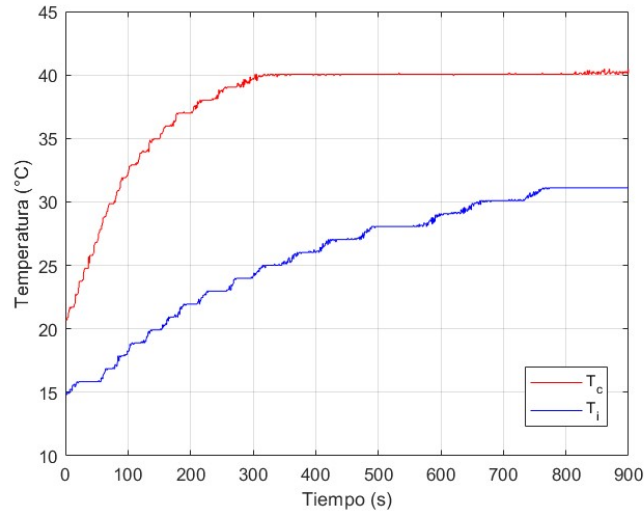


Figura 4.3: Respuesta de los retardos en la entrada

Para obtener los tiempos del retardo para la temperatura T_c y T_i ; respectivamente, se realiza en la Figura 4.3 una ampliación en la región de interés. Obteniendo así la Figura 4.4.

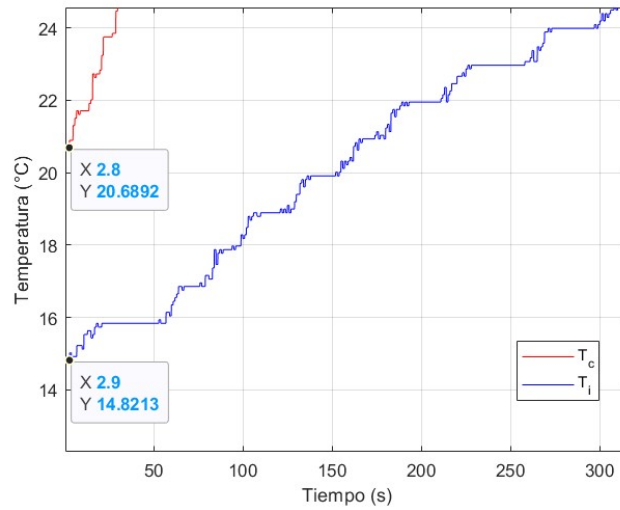


Figura 4.4: Identificación de los retardos en la entrada

Se observa en la Figura 4.4 que el retardo para la temperatura T_c y T_i es de 2.8s y 2.9s respectivamente. Al ser un retardo pequeño, se decidió no considerarlos en este trabajo de tesis.

De igual manera, se identifican los retardos en la salida del intercambiador de calor. En la Figura 4.2 se muestran las salidas 2 y 4. A continuación se muestran los resultados obtenidos.

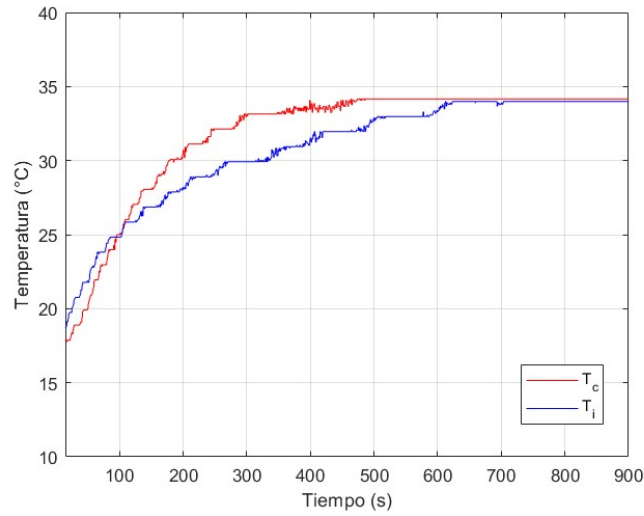


Figura 4.5: Identificación de los retardos en la entrada

Para obtener los tiempos del retardo para la temperatura T_c y T_i respectivamente, se realiza en la Figura 4.5 una ampliación en la región de interés. Obteniendo así la Figura 4.6.

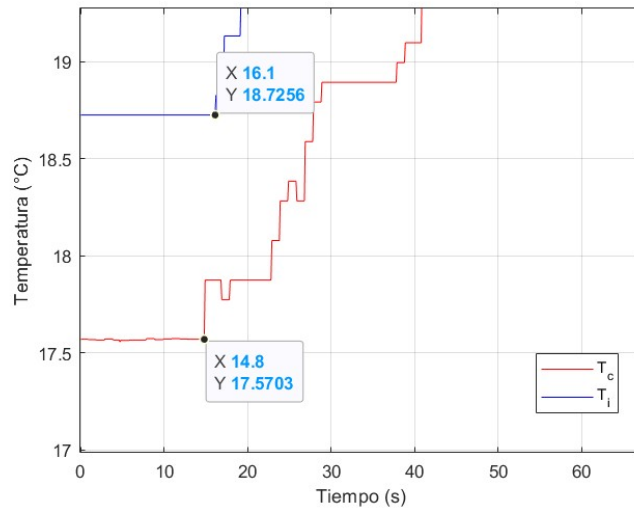


Figura 4.6: Identificación de los retardos en la salida

Se observa en la Figura 4.6 que los retardos para las temperatura T_c y T_i son de 14.8s y 16.1s respectivamente. Al ser retardos significativos, se decidió tomar el de mayor tiempo: 16.1s. Estos representan los retardos en el estado.

4.3. Sintonización del PID REX-C100

4.3.1. Resultados obtenidos por el método PI óptimo

Para implementar el control PI óptimo [18] en el controlador industrial REX-C100 se considera el siguiente modelo, obtenidos mediante la respuesta al escalón unitario:

$$G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{Ts + 1}, \quad (4.1)$$

donde $G(s)$ es la función de transferencia, K es la ganancia estática, τ es el retardo y T es la constante de tiempo [35].

Los parámetros obtenidos para el contenedor T_c al aplicar una entrada del tipo escalón unitario al sistema son:

Parámetro	T	K	τ
Valor	400 s	0.43	2.3 s

Tabla 4.2: Parámetros identificados para T_c

Se sustituyen los parámetros obtenidos en la Tabla 4.2 en la ecuación (4.1) obteniendo:

$$G(s) = \frac{0.43 e^{2.3s}}{400s + 1}. \quad (4.2)$$

Con la ecuación (4.2), al aplicar el algoritmo del control PI óptimo [18] se obtuvieron los parámetros $Bp = 86$ (banda proporcional) y $T_i = 248$ para configurar el PID REX-C100.

Los parámetros obtenidos para el contenedor T_i al aplicar una entrada del tipo escalón unitario al sistema son:

Parámetro	T	K	τ
Valor	900 s	0.38	16.1 s

Tabla 4.3: Parámetros identificados para T_i

Se sustituyen los parámetros obtenidos en la Tabla 4.3 en la ecuación (4.3) obteniendo:

$$G(s) = \frac{0.38e^{16.1s}}{900s + 1} \quad (4.3)$$

Con la ecuación (4.3), al aplicar el algoritmo del control PI óptimo [18] se obtuvieron los parámetros $Bp = 76$ y $T_i = 497$ para sintonizar el PID REX-C100.

En la Figura 4.7 se muestran los resultados de la sintonización del control PI óptimo, donde se establecieron referencias de $SP = 40^\circ\text{C}$ para T_c y $SP = 35^\circ\text{C}$ para T_i .

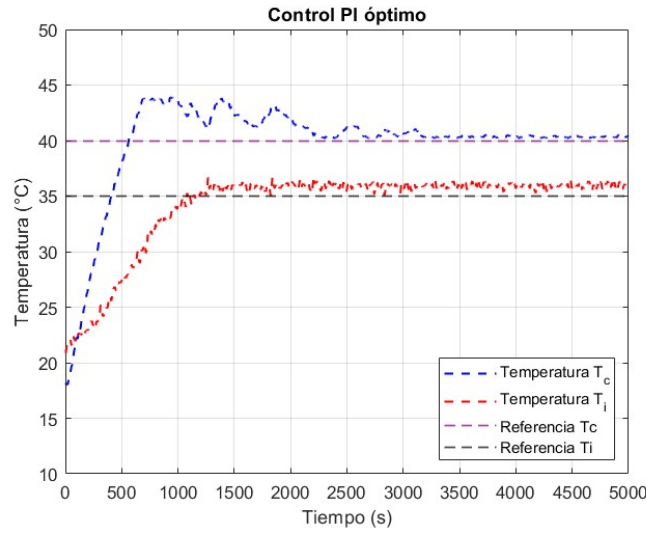


Figura 4.7: Gráfica de los datos obtenidos en tiempo real

Solo se grafican las temperaturas del PI óptimo, y no la señal de los controladores debido a que cuando se conecta la DAQ-6008 al circuito de control del relevador de estado sólido para el caso de corriente directa y alterna, se produce una caída de voltaje dado que se supera la capacidad de suministro de corriente de salida del REX-C 100, por consecuencia no se activa el SSR.

4.4. Identificación de parámetros

Ahora se considera el siguiente modelo matemático obtenido en la ecuación (2.30):

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_c(t) \\ \dot{T}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ c_0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_c(t) \\ T_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_c(t-h) \\ T_i(t-h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

Se observa que los parámetros de $\dot{T}_c$ y $\dot{T}_i$ son independientes entre sí, por lo que se pueden obtener dos ecuaciones separadas:

$$\dot{T}_c(t) = a_0 T_c(t) + a_1 T_c(t-h) + b_1 u_1(t). \quad (4.4)$$

$$\dot{T}_i(t) = c_0 T_i(t) + c_1 T_i(t-h) + c_2 T_c(t) + b_2 u_2(t). \quad (4.5)$$

Para identificar los parámetros de la planta, es necesario discretizar las ecuaciones (4.4) y (4.5).

Para discretizar la ecuación (4.4) se hace mediante el método de Euler hacia adelante, se aplican los siguientes pasos:

1. Aproximar la derivada:

$$\dot{T}_c(t) \approx \frac{T_c(k+1) - T_c(k)}{\Delta t}. \quad (4.6)$$

2. Sustituir la ecuación (4.6) en (4.4), obteniendo

$$\frac{T_c(k+1) - T_c(k)}{\Delta t} = a_0 T_c(k) + a_1 T_c(k-\bar{h}) + b_1 u_1(k).$$

3. Despejar $T_c(k+1)$:

$$T_c(k+1) = (1 + \Delta t a_0) T_c(k) + \Delta t a_1 T_c(k-\bar{h}) + \Delta t b_1 u_1(k). \quad (4.7)$$

4. Dejar la ecuación (4.7) en la muestra actual:

$$T_c(k) = (1 + \Delta t a_0) T_c(k-1) + \Delta t a_1 T_c(k-\bar{h}-1) + \Delta t b_1 u_1(k-1). \quad (4.8)$$

5. Definir los parámetros:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 + \Delta t a_0, \\ \alpha_1 &= \Delta t a_1, \\ \beta_1 &= \Delta t b_1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

6. Sustituir los parámetros (4.9) en (4.8), con lo cual se obtiene:

$$T_c(k) = \alpha_0 T_c(k-1) + \alpha_1 T_c(k - \bar{h} - 1) + \beta_1 u_1(k-1) \quad (4.10)$$

donde los parámetros α_0 , α_1 y β_1 son equivalentes a los parámetros a_0 , a_1 y b_1 de la ecuación (4.4) con un tiempo de muestreo $\Delta t = 500ms$, y $\bar{h}$ es el retardo del sistema expresado en número de muestras.

Se aplica el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos descrito en el Apéndice A.1.1. Para ello es necesario excitar el sistema con una señal persistente senoidal con un tiempo de muestreo de 500 ms. En la Tabla 4.4 se muestran los parámetros obtenidos:

Parámetro	Valor
α_0	-0.26076
α_1	0.26006
β_1	0.03030

Tabla 4.4: Parámetros obtenidos para T_c .

Se realiza el mismo procedimiento de discretizar la ecuación (4.5) con Euler hacia adelante, se aplican siguientes pasos:

1. Aproximar la derivada:

$$\dot{T}_i(t) \approx \frac{T_i(k+1) - T_i(k)}{\Delta t} \quad (4.11)$$

2. Sustituir en la ecuación (4.11) en (4.5), obteniendo

$$\frac{T_i(k+1) - T_i(k)}{\Delta t} = c_0 T_i(k) + c_1 T_i(k - \bar{h}) + c_2 T_c(k) + b_2 u_2(k).$$

3. Despejar $T_i(k+1)$:

$$T_i(k+1) = (1 + \Delta t c_0) T_i(k) + \Delta t c_1 T_i(k - \bar{h}) + \Delta t c_2 T_c(k) + \Delta t b_2 u_2(k). \quad (4.12)$$

4. Obtener el ecuación (4.12) en la muestra actual:

$$T_i(k) = (1 + \Delta t c_0) T_i(k-1) + \Delta t c_1 T_i(k - \bar{h} - 1) + \Delta t c_2 T_c(k-1) + \Delta t b_2 u_2(k-1) \quad (4.13)$$

5. Definir los parámetros:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= 1 + \Delta t c_0 \\ \gamma_1 &= \Delta t c_1 \\ \gamma_2 &= \Delta t c_2 \\ \beta_2 &= \Delta t b_2\end{aligned}\tag{4.14}$$

6. Sustituir los parámetros (4.14) en (4.13), con lo cual se obtiene:

$$T_i(k) = \gamma_0 T_i(k-1) + \gamma_1 T_i(k-\bar{h}-1) + \gamma_2 T_c(k-1) + \beta_2 u_2(k-1) \tag{4.15}$$

donde los parámetros γ_0 , γ_1 , γ_2 y β_2 son equivalentes a los parámetros c_0 , c_1 , c_2 y b_2 de la ecuación (4.5), con un muestreo de $\Delta t = 500ms$, y $\bar{h}$ es el retardo del sistema expresado en número de muestras.

Se aplica el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos descrito en el Apéndice A.1.1. Para ello es necesario excitar el sistema con una señal persistente senoidal con un tiempo de muestreo de 500 ms. En la Tabla 4.5 se muestran los parámetros obtenidos:

Parámetro	Valor
γ_0	-0.25824
γ_1	0.20898
γ_2	0.0384
β_2	0.04221

Tabla 4.5: Parámetros obtenidos para T_i

Al sustituir los parámetros obtenidos en las Tablas 4.4 y 4.5 en el modelo multivariable (2.30), considerando un retardo $h = 16.1s$, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_c(t) \\ \dot{T}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.26076 & 0 \\ 0.03846 & -0.25824 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_c(t) \\ T_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.26006 & 0 \\ 0 & 0.20898 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_c(t-16.1) \\ T_i(t-16.1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.03030 & 0 \\ 0 & 0.04221 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

4.5. Implementación del control óptimo

Se implementa la siguiente ley de control obtenida en la ecuación (3.31)

$$u^*(x_t) = -N^{-1}B^T Px(t) - N^{-1}B^T \int_{-\tau}^0 e^{-[P(BN^{-1}B^T) - A^T](\theta+h)} PA_h x(t+\theta) d\theta.$$

Esta ley de control se implementó en el software LabVIEW por lo cual fue necesario discretizarla, obteniendo

$$u^*(x_t) = -N^{-1}B^T Px(k) - N^{-1}B^T \sum_{i=0}^{m-1} e^{-[P(BN^{-1}B^T) - A^T](\theta_i+h)} PA_h x(k+\theta_i) Ts. \quad (4.17)$$

donde k son las muestras que toma el programa, h es el retardo de 16.1s y m es número de intervalos a discretizar. Ts corresponde a un tiempo de muestreo de 0.5s, siendo $Ts = \frac{h}{m}$ y $\theta_i = -\frac{ih}{m}$ para $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$.

Al implementar la ley de control (4.17) en el software LabVIEW y aplicarla en la plataforma experimental mostrada en la Figura 4.1, se propusieron las siguientes matrices:

$$M = \begin{bmatrix} 10000 & 800 \\ 800 & 80 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

y

$$N = \begin{bmatrix} 0.57 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

siendo ambas definidas positivas. Para el contenedor T_c se estableció un $SP = 40^\circ\text{C}$, mientras que para T_i se fijó en 35°C . Debido a que la ecuación (4.17) corresponde a una ley de control por realimentación de estados del tipo $Kx(t)$, es necesario agregar un *offset* para alcanzar las referencias deseadas. Estos valores se determinaron de manera heurística mediante experimentación, resultando en 0.3 V para T_c y 0.4 V para T_i .

El experimento duró 5000 segundos, el programa utilizado se muestra en C.1 y C.2. Se obtuvieron los siguientes resultados:

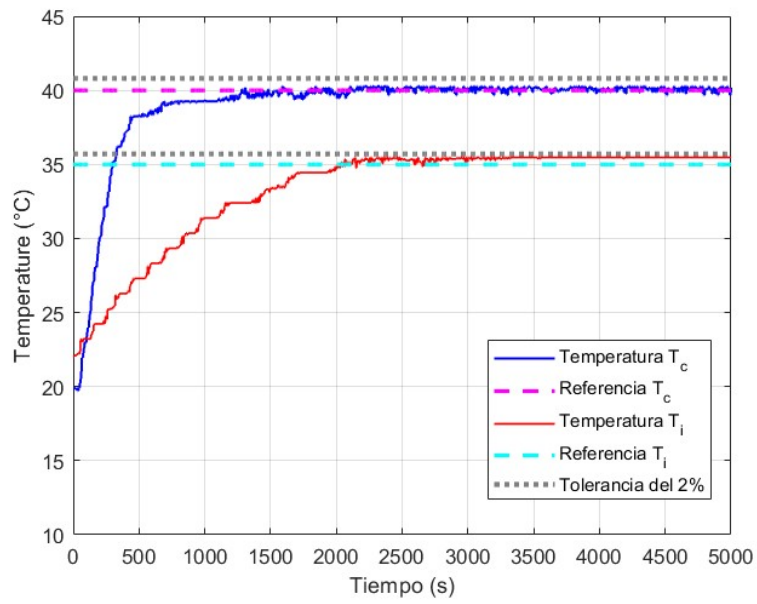


Figura 4.8: Gráfica de seguimiento de referencia

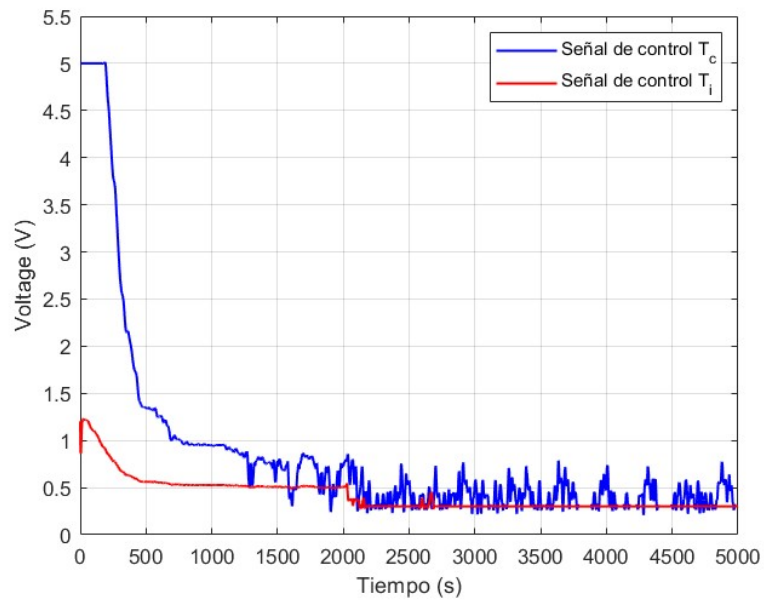


Figura 4.9: Gráfica de la señal de control

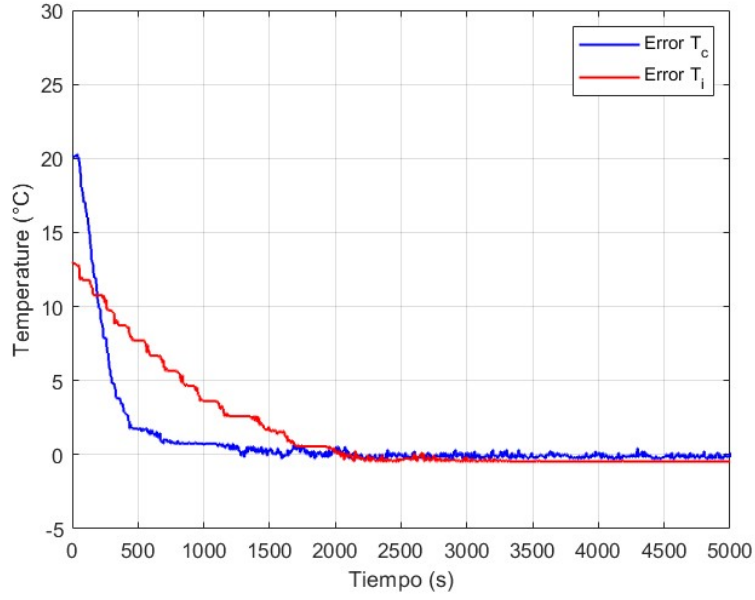


Figura 4.10: Gráfica del error

4.6. Análisis de estabilidad

Conforme a la ecuación (3.92), el Teorema 5.1 [40] establece que si existe una solución simétrica $\tilde{P} > 0$ a la ecuación algebraica que involucra los retardos del sistema, entonces el control óptimo u^* es estabilizante y por tanto admisible. Para calcular $\tilde{P}$ es necesario definir de la ecuación (4.16), lo siguiente:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.26076 & 0 \\ 0.03846 & -0.25824 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$A_\tau = \begin{bmatrix} 0.26006 & 0 \\ 0 & 0.20898 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 0.03030 & 0 \\ 0 & 0.04221 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Previamente se habían definido las matrices M y N en las ecuaciones (4.18) y (4.19) respectivamente. Se propone

$$S_1 = \begin{bmatrix} 700 & 0 \\ 0 & 700 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

la cual es simétrica y definida positiva.

Se reemplazan las matrices (3.10), (4.18), (4.19), (4.20), (4.21), y (4.23) en (3.92). Al realizar los cálculos en el software MATLAB se obtiene:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 95.2232 & -21.4964 \\ -21.4964 & 418.1876 \end{bmatrix}.$$

Sus valores propios son:

$$\lambda_{1,\tilde{P}} = 93.7987.$$

y

$$\lambda_{2,\tilde{P}} = 419.6121.$$

Con esto se confirma que $\tilde{P} > 0$ y que el control óptimo u^* es estabilizante y por tanto admisible.

De igual manera se analizan las matrices Φ_0 , $\Phi_1(s)$ y $\Phi_2(s, \nu)$ seleccionadas de acuerdo con las ecuaciones (3.50), (3.51) y (3.52).

Se realizan los cálculos para obtener Φ_0 conforme a la ecuación (3.50) en el software MATLAB, obteniendo:

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} 10033.8000 & 802.5466 \\ 802.5466 & 80.2239 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Sus valores propios son:

$$\lambda_{1,\Phi_0} = 15.9307.$$

$$\lambda_{2,\Phi_0} = 10098.0932.$$

Con los valores obtenidos para λ_{1,Φ_0} y λ_{2,Φ_0} , se demuestra que es simétrica y definida positiva.

Posteriormente se realizan los cálculos para $\Phi_1(s)$ en el software MATLAB, conforme a la ecuación (3.51). Los valores propios para el intervalo de 16.1 a 0, que corresponde al retardo, se muestran en la Figura 4.11.

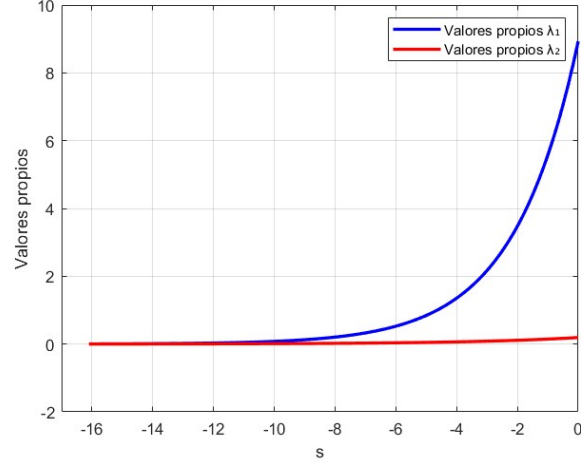


Figura 4.11: Valores propios para $\Phi_1(s)$

Finalmente se realizan los cálculos para obtener $\Phi_2(s, v)$ conforme a la ecuación (3.52) en el software MATLAB, cuyos valores propios se muestran en la Figura 4.12.

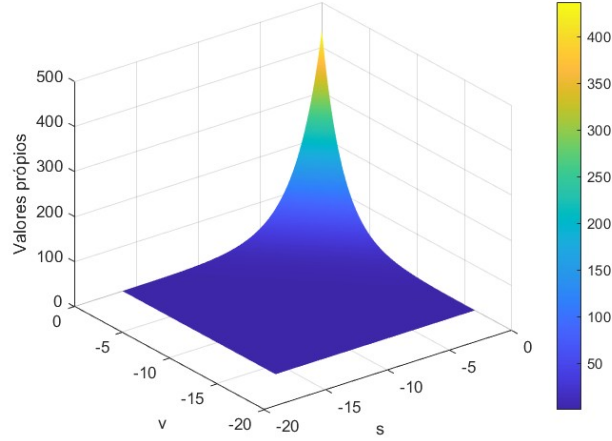


Figura 4.12: Valores propios de $\Phi_2(s, v)$

Con los valores obtenidos para $\lambda_{1,\Phi_2(s,v)}$ y $\lambda_{2,\Phi_2(s,v)}$, mostrados en la Figura 4.12 se demuestra que es definida positiva.

4.6.1. Análisis de estabilidad mediante la búsqueda de raíces

Para determinar la ubicación de las raíces del sistema en lazo cerrado, se aplica la transformada de Laplace a la ecuación (3.11), obteniendo así el cuasipolinomio del sistema:

$$P(s) = \det \left(sI - A_0 - A_\tau e^{-\tau s} - \int_{-\tau}^0 E(\theta) e^{\theta s} d\theta \right) = 0. \quad (4.25)$$

Se sustituyen las ecuaciones (3.10), (4.20) y (4.21) en (4.25) para implementar el algoritmo QPmR (Quasi-Polynomial mapping based Rootfinder) [41] y obtener las raíces del sistema mediante el software MATLAB. Los resultados se muestran en la Figura 4.13.

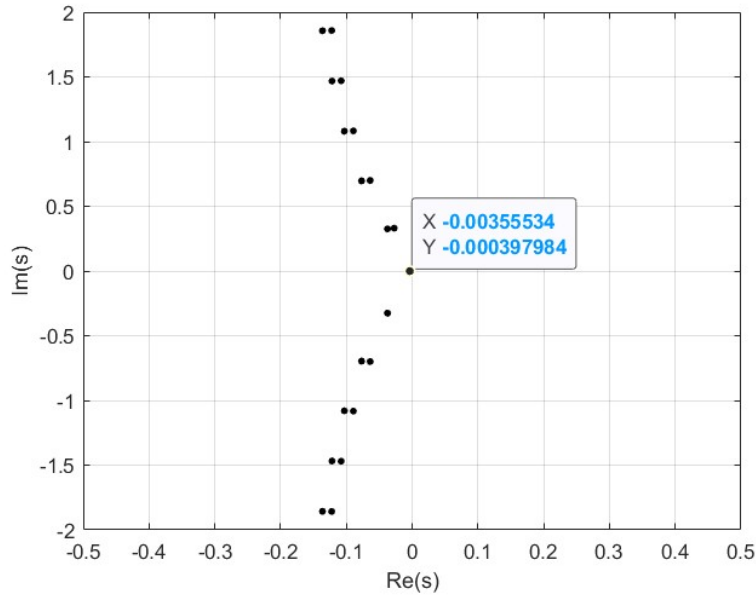


Figura 4.13: Raíces del sistema.

En la Figura 4.13, todas las raíces calculadas se encuentran ubicadas en el semiplano izquierdo del plano complejo. Dado que el polo más cercano al origen se ubica en $s = -0.003555 - 0.000398j$, se corrobora que el sistema es estable.

4.7. Comparación entre controladores óptimo y PI óptimo

Se analiza el seguimiento de referencia de ambos controladores en la Figura 4.14 se muestran las gráficas

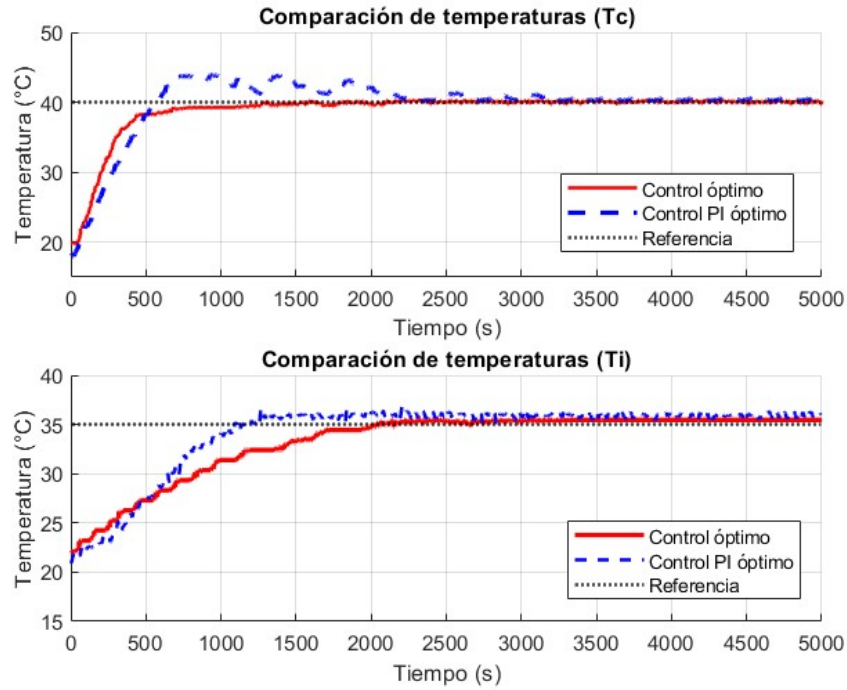


Figura 4.14: Comparación de datos

Para evaluar el desempeño de las estrategias de control, se analiza el índice IAE. A partir de los resultados obtenidos en la Tabla 4.6, se observa que el control Óptimo presenta un mejor rendimiento frente al control PI óptimo en ambas temperaturas.

Estrategia de Control	Parámetro	IAE
Control Óptimo	Temperatura (T_c)	6015.25
Control PI Óptimo	Temperatura (T_c)	11449.45
Control Óptimo	Temperatura (T_i)	11416.28
Control PI Óptimo	Temperatura (T_i)	11982.01

Tabla 4.6: Tabla comparativa

4.8. Conclusiones

Se validó experimentalmente la implementación del control óptimo en la plataforma del intercambiador de calor. Se verificó que la matriz $\tilde{P}$ es definida positiva, confirmando que el control óptimo es estabilizante y admisible. Asimismo, se comprobó que Φ_0 , Φ_1 y Φ_2 son definidas positivas. De igual manera, mediante el algoritmo QPmR se obtuvieron las raíces del sistema, las cuales resultaron estar en el semiplano izquierdo, corroborando que el sistema es estable. Finalmente, se observó que el desempeño del control óptimo es superior al del control PI óptimo para ambas variables de temperatura, T_c y T_i .

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

5.1. Conclusiones

A continuación se presentan las conclusiones y el trabajo a futuro que se tiene planeado.

- Es posible desacoplar las ecuaciones del tipo de Riccati obtenidas del control óptimo con el índice de desempeño modificado por A.V. Kim.
- Se puede construir la funcional de Bellman para sistemas con retardos distribuidos.
- Se validó experimentalmente una ley de control óptima mediante LabVIEW en una plataforma experimental con un sistema multivariable que incluye retardos.
- El controlador óptimo demostró un mejor desempeño que el PI óptimo en ambas variables (T_c y T_i), según el índice IAE.
- El análisis teórico junto con la validación experimental demuestran que el sistema es estable.

Trabajo a Futuro

- Obtener un modelo multivariable que permita caracterizar el intercambiador de calor y el enfriador simultáneamente.
- Implementar una ley de control que contemple múltiples retardos.

- Implementar una ley de control que considere retardos neutrales.
- Implementar un control distribuido mediante PLCs para analizar el comportamiento del sistema ante diferentes retardos.

Bibliografía

- [1] T. L. Bergman, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley & Sons, 2011.
- [2] H. Müller-Steinhagen, *Handbook of Heat Exchanger Design*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2003.
- [3] S. Kakaç, H. Liu, and A. Pramuanjaroenkij, *Heat Exchangers: Selection, Rating, and Thermal Design*. CRC Press, 2002.
- [4] J. L. Ortiz Mejia and G. Valderrama Escudero, “Control en cascada de un intercambiador de calor,” tesis, Universidad Tecnológica de Bolívar, 2003.
- [5] P. J. Fellows, *Food Processing Technology: Principles and Practice*. Woodhead Publishing, 2022.
- [6] M. Gibson, “Pharmaceutical preformulation and formulation,” *Drugs & Pharmaceutical Sciences*, vol. 199, p. 199, 2001.
- [7] B. K. Lydersen, N. A. D’Elia, and K. L. Nelson, *Bioprocess Engineering: Systems, Equipment and Facilities*. John Wiley & Sons, 1994.
- [8] C. A. Bailón Bustamante, “Control de un intercambiador de calor de doble tubo en contracorriente,” tesis, Universidad Nacional de Ingeniería, 2004.
- [9] A. V. Kim and A. B. Lozhnikov, “A linear-quadratic control problem for state-delay systems: Exact solutions for the riccati equations,” *Automation and Remote Control*, vol. 61, no. 7, pp. 1076–1090, 2000.
- [10] D. W. Ross and I. Flügge-Lotz, “An optimal control problem for systems with differential-difference equation dynamics,” *SIAM Journal on Control*, vol. 7, no. 4, pp. 609–623, 1969.

- [11] O. Santos, S. Mondié, and V. L. Kharitonov, “Linear quadratic suboptimal control for time delays systems,” *International Journal of Control*, vol. 82, no. 1, pp. 147–154, 2009.
- [12] J.-M. Ortega-Martínez, O.-J. Santos-Sánchez, and S. Mondié, “Comments on the bellman functional for linear time-delay systems,” *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 42, no. 5, pp. 1531–1540, 2021.
- [13] O. A. Jaramillo, “Intercambiadores de calor,” *Centro de Investigación en Energía*, vol. 10, 2007.
- [14] J. G. Álvarez, J. M. Armero, and C. A. Urrutia, “Control de temperatura en intercambiadores de calor tipo coraza-tubo: una revisión realizada a la industria,” *Entre Ciencia e Ingeniería*, vol. 14, no. 27, pp. 41–49, 2020.
- [15] K. J. Åström, *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. The International Society of Measurement and Control, 1995.
- [16] M. Bakošová and J. Oravec, “Robust model predictive control for heat exchanger network,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 73, no. 1, pp. 924–930, 2014.
- [17] Y. S. Gandur Adarme, “Diseño de control óptimo y control robusto para regular la temperatura de un intercambiador de calor,” tesis, Universidad Autónoma de Bucaramanga, 2016.
- [18] J.-B. He, Q.-G. Wang, and T.-H. Lee, “Pi/pid controller tuning via lqr approach,” *Chemical Engineering Science*, vol. 55, no. 13, pp. 2429–2439, 2000.
- [19] G. G. Ortiz Badillo, “Instrumentación y control óptimo de temperatura en un intercambiador de calor de placas,” tesis, ICBI-BD-UAEH, 2022.
- [20] K. J. Åström and J. T. Hägglund, *Advanced PID Control*. ISA-The Instrumentation, Systems and Automation Society, 2006.
- [21] N. N. Krasovskii, “On the analytic construction of an optimal control in a system with time lags,” *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 26, no. 1, pp. 50–67, 1962.
- [22] R. Bellman, *Dynamic Programming*. Princeton University Press, 1957.

- [23] J. D. R. Kramer Jr., “On control of linear systems with time lags,” tech. rep., 1960.
- [24] H. J. Kushner and D. I. Barnea, “On the control of a linear functional-differential equation with quadratic cost,” *SIAM Journal on Control*, vol. 8, no. 2, pp. 257–272, 1970.
- [25] J. M. Smith, H. C. Van Ness, M. Abbott, and C. R. García, *Introducción a la Termodinámica en Ingeniería Química*. McGraw-Hill, 2007.
- [26] F. P. Incropera and D. P. DeWitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 7 ed., 2011.
- [27] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Adaptive control*. Courier Corporation, 2008.
- [28] C. A. Smith, A. B. Corripio, and S. D. Manzanares Basurto, *Control Automático de Procesos: Teoría y Práctica*. Limusa, 1991.
- [29] D. W. Green, *Perry’s Chemical Engineers’ Handbook*. McGraw-Hill, 2008.
- [30] C. Geankoplis, *Transport Processes and Separation Process Principles (Includes Unit Operations)*. Prentice Hall Press, 2003.
- [31] W. L. McCabe, J. C. Smith, and P. Harriott, *Unit Operations of Chemical Engineering*. McGraw-Hill, 1993.
- [32] R. K. Sinnott, *Chemical Engineering Design*. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 4 ed., 2005.
- [33] D. Q. Kern, *Process Heat Transfer*. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [34] Y. A. Cengel and A. J. Ghajar, *Transferencia de Calor y Masa: Fundamentos y Aplicaciones*. McGraw-Hill Interamericana, 2011.
- [35] K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*. Pearson Educación, 2003.
- [36] R. A. Serway and R. J. Beichner, *Física para Ciencias e Ingeniería*, vol. 1. McGraw-Hill, 2002.
- [37] W. Bolton, *Ingeniería de Control*. ALFAOMEGA, 2001.

- [38] V. Kolmanovskii and A. Myshkis, *Applied Theory of Functional Differential Equations*, vol. 85. Springer Science & Business Media, 2012.
- [39] R. E. Kalman, “Contributions to the theory of optimal control,” *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, vol. 5, no. 2, pp. 102–119, 1960.
- [40] V. Kolmanovskii and A. Myshkis, *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, vol. 463. Springer Science & Business Media, 2013.
- [41] T. Vyhlídal and P. Zítek, “Qpmr-quasi-polynomial root-finder: Algorithm update and examples,” in *Delay Systems: From Theory to Numerics and Applications*, pp. 299–312, Springer, 2014.

Apéndice A

Algoritmo para la identificación de parámetros

A.1. Identificación de parámetros

En [19] se explica el proceso para determinar los parámetros del modelo matemático, lo cual es esencial para describir el comportamiento real de una planta o proceso y, de este modo desarrollar un control el cual permite anticipar como responderá la planta ante estímulos o cambios externos.

En la Figura A.1 se muestra la estructura general, donde $u(t)$ es la entrada de control, $y(t)$ respuesta del sistema, $v(t)$ es una perturbación observable, $\mathcal{D}(t)$ perturbaciones derivadas y $e_p(t)$ es una señal de ruido aleatoria. .

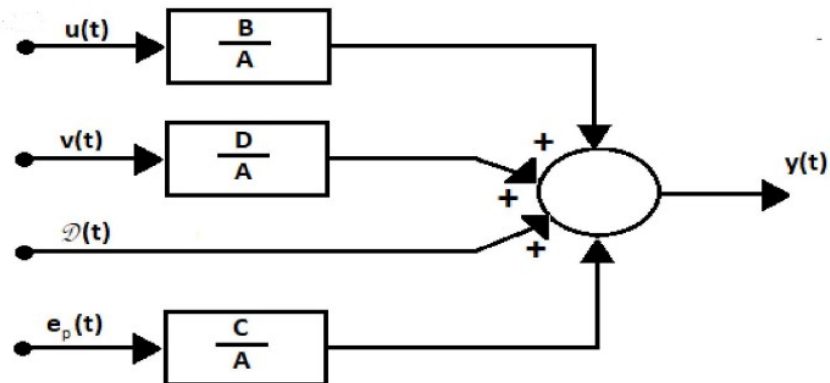


Figura A.1: Representación general del sistema

Se debe de tener en consideración que el tamaño de la matriz $(\mathcal{X}^T \mathcal{X})_{m \times m}$ está determinado por el número de parámetros a estimar para formar una matriz cuadrada. La señal de entrada $u(t)$ debe tener suficiente variabilidad (señal persistente o señal de entrada excitada) para garantizar que el determinante de la matriz $\mathcal{X}^T \mathcal{X}$ no sea nulo y, así, exista su inversa, ya que de lo contrario, puede no tener rango completo y volverse singular [19].

Para identificar los parámetros se considera el modelo generalizado

$$y(t) = \left[\frac{1}{A} \right] (Bu(t) + D(t) + D(t) + Ce(t)),$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}, \\ B &= b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}, \\ D &= d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{n_d} z^{-n_d}, \\ C &= 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}. \end{aligned}$$

donde a_i , b_i , d_i , y c_i son los coeficientes de regresión de $y(t)$, $u(t)$, $v(t)$ y $e_p(t)$ respectivamente y n_a , n_b , n_d y n_c corresponden a su orden de regresión.

Cuando los parámetros de la planta no son conocidos, deben determinarse mediante estimaciones o mediciones (identificación de la planta).

Para hacer la estimación, se representa el modelo de la siguiente manera

$$y(t) = \mathcal{X}^T(t)\theta + e(t)$$

donde el vector de parámetros se define como

$$\theta^T = [-a_1, \dots, -a_{n_a}, b_0, \dots, b_{n_b}, d_0, \dots, d_{n_d}, c_1, \dots, c_{n_c}] \quad (\text{A.1})$$

Por otro lado, $\mathcal{X}^T(t)$, conocido como vector de regresión, se elabora a partir de los datos medidos tanto de entrada como de salida, está definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^T(t) = [& y(t-1), \dots, y(t-n_a), u(t-1), \dots, u(t-n_b-1), \\ & v(t), \dots, v(t-n_d), e(t-1), \dots, e(t-n_c)] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

En la práctica, debido a la dificultad de obtener mediciones pasadas como se muestra en la ecuación (A.2) y (A.1) de la señal de ruido, se suele considerar que estos términos no son relevantes en el momento actual, es decir, son cero, así que los vectores toman la forma

$$\mathcal{X}^T(t) = [y(t-1), \dots, y(t-n_a), u(t-1), \dots, u(t-n_b-1), \\ v(t), \dots, v(t-n_d), e(t-1), \dots, e(t-n_c)], \quad (\text{A.3})$$

y

$$\theta = [-a_1, \dots, -a_{n_a}, b_0, \dots, b_{n_b}, d_0, \dots, d_{n_d}] \quad (\text{A.4})$$

Se asume que la ecuación (A.1) describe de forma exacta al sistema, por lo cual se requiere estimar el vector de parámetros θ para conocer los verdaderos parámetros del sistema. Para lograr esto, se debe asumir que la siguiente ecuación también obtiene la salida del sistema:

$$y(t) = \mathcal{X}^T(t)\hat{\theta} + \hat{e}(t) \quad (\text{A.5})$$

donde $\hat{\theta}$ es el vector estimado de parámetros y $\hat{e}(t)$ representa el error de modelado en el instante t . Se busca elegir $\hat{\theta}$ tal que el error sea lo más pequeño posible para obtener las ecuaciones (A.6) y (A.7) .

$$0 = \mathcal{X}^T(t)\theta - \mathcal{X}^T(t)\hat{\theta} - \hat{e}(t) \quad (\text{A.6})$$

$$\underbrace{\hat{e}(t)}_{\text{Ruido}} = \mathcal{X}^T(t) (\theta - \hat{\theta}) \quad (\text{A.7})$$

El error de modelado, por tanto, dependerá de la diferencia entre los parámetros verdaderos y los estimados, así como del ruido en las mediciones de $\mathcal{X}^T(t)$.

Si el sistema responde según $y(t) = \mathcal{X}^T(t)\theta$ durante un periodo y se obtienen N mediciones, al emplear el modelo $y(t) = \mathcal{X}^T(t)\hat{\theta} + \hat{e}(t)$ estos valores observados pueden representarse en forma matricial descritos a continuación

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}^T(1) \\ \mathcal{X}^T(2) \\ \vdots \\ \mathcal{X}^T(N) \end{bmatrix} \hat{\theta} + \begin{bmatrix} \hat{e}(1) \\ \hat{e}(2) \\ \vdots \\ \hat{e}(N) \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Para identificar de manera única el conjunto de parámetros, la cantidad de ecuaciones de medición N debe ser igual o mayor al número total de parámetros desconocidos en $\hat{\theta}$. En el caso ideal en que $e(t) = 0$, la ecuación (A.8) se resuelve como un sistema de ecuaciones lineales con $N = m$ incógnitas

$$m = n_a + (n_b + 1) + (n_d + 1) + (n_c + 1) \quad (\text{A.9})$$

suponiendo que en la ecuación (A.9) $n_c = 0$, pero considerando que en la práctica suele cumplirse $N \gg m$, se recurre a técnicas distintas para estimar los parámetros cuando las observaciones superan ampliamente al número de incógnitas. Se reformula la ecuación (A.8), siendo

$$y = \mathcal{X}\hat{\theta} + \hat{e}. \quad (\text{A.10})$$

Con lo anterior se define

$$y^T = [y(1), \dots, y(N)]$$

$$\hat{e}^T = [\hat{e}(1), \dots, \hat{e}(N)]$$

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}^T(1) \\ \mathcal{X}^T(2) \\ \vdots \\ \mathcal{X}^T(N) \end{bmatrix}$$

A partir de las ecuaciones (A.10) se deduce lo siguiente:

$$\hat{e} = y - \mathcal{X}\hat{\theta}. \quad (\text{A.11})$$

Se busca determinar el vector de parámetros estimados $\hat{\theta}$ que minimice el siguiente criterio de optimización

$$J = \sum_{t=1}^N \hat{e}^2(t) = \hat{e}^T \hat{e} \quad (\text{A.12})$$

Sustituyendo de la ecuación (A.11) en (A.12) se obtiene:

$$J = \hat{e}^T \hat{e} = (y - \mathcal{X}\hat{\theta})^T (y - \mathcal{X}\hat{\theta}) \quad (\text{A.13})$$

Desarrollando la expresión de la ecuación (A.13) conduce a:

$$J = y^T y - \hat{\theta}^T \mathcal{X}^T y - y^T \mathcal{X} \hat{\theta} + \hat{\theta}^T \mathcal{X}^T \mathcal{X} \hat{\theta}$$

reescribiendo se tiene:

$$J = y^T y - 2y^T \mathcal{X} \hat{\theta} + \hat{\theta}^T \mathcal{X}^T \mathcal{X} \hat{\theta} \quad (\text{A.14})$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo de variaciones para el álgebra vectorial, para encontrar un mínimo se iguala la derivada parcial de la ecuación (A.14) respecto a $\hat{\theta}$ y se iguala a cero, es decir,

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = -2\mathcal{X}^T y + 2\mathcal{X}^T \mathcal{X} \hat{\theta} = 0$$

despejando la igualdad se obtiene la siguiente ecuación

$$\mathcal{X}^T y = \mathcal{X}^T \mathcal{X} \hat{\theta} \quad (\text{A.15})$$

Se calcula la segunda derivada con respecto a $\hat{\theta}$ de la función costo de la ecuación (A.14)

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = 2(\mathcal{X}^T \mathcal{X}). \quad (\text{A.16})$$

El resultado de la ecuación (A.16) indica que es una matriz definida positiva, por lo cual se concluye que la estimación óptima de los parámetros de (A.15) es:

$$\hat{\theta} = (\mathcal{X}^T \mathcal{X})^{-1} \mathcal{X}^T y.$$

Finalmente, los errores de modelado se representan como

$$\eta^T = [\eta(1), \dots, \eta(N)].$$

A.1.1. Mínimos cuadrados recursivos (RLS) y el lema de inversión matricial

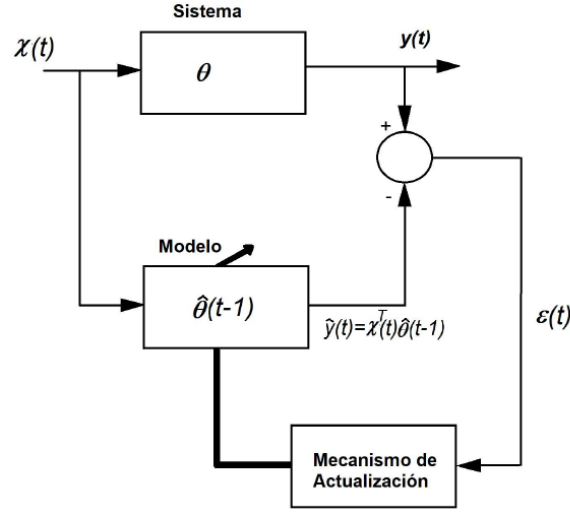


Figura A.2: Mínimos cuadrados recursivos

En [19] se describe que la estructura mostrada en la Figura A.2 es el esquema de los mínimos cuadrados recursivos. La estimación de parámetros se expresa de la siguiente manera:

$$\hat{\theta}(t) = \left(\vec{\mathcal{X}}^T(t) \vec{\mathcal{X}}(t) \right)^{-1} \vec{\mathcal{X}}(t)^T y(t). \quad (\text{A.17})$$

donde $\vec{\mathcal{X}}(t)$ indica la medición hasta el tiempo discreto t , siendo

$$\vec{\mathcal{X}}(t) = \begin{bmatrix} \vec{\mathcal{X}}^T(1) \\ \vec{\mathcal{X}}^T(2) \\ \vdots \\ \vec{\mathcal{X}}^T(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Para generar el algoritmo recursivo en la ecuación (A.1.1) se debe hacer en el instante $t + 1$.

$$\vec{\mathcal{X}}(t+1) = \begin{bmatrix} \vec{\mathcal{X}}^T(1) \\ \vec{\mathcal{X}}^T(2) \\ \vdots \\ \vec{\mathcal{X}}^T(t) \\ \vec{\mathcal{X}}^T(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\mathcal{X}}(t) \\ \vec{\mathcal{X}}^T(t+1) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t+1) \end{bmatrix}$$

A continuación se calcula el vector de parámetros estimados en el tiempo $t+1$ siendo

$$\hat{\theta}(t+1) = \left(\vec{\mathcal{X}}^T(t+1) \vec{\mathcal{X}}(t+1) \right)^{-1} \vec{\mathcal{X}}^T(t+1) y(t+1) \quad (\text{A.18})$$

Desarrollando la ecuación (A.17) se obtiene:

$$\vec{\mathcal{X}}^T(t+1) \vec{\mathcal{X}}(t+1) = \left[\vec{\mathcal{X}}^T(t) \vec{\mathcal{X}}(t+1) \right] = \vec{\mathcal{X}}^T(t) \vec{\mathcal{X}}(t) + \vec{\mathcal{X}}^T(t+1) \vec{\mathcal{X}}^T(t+1). \quad (\text{A.19})$$

Y de la ecuación (A.19) sugiere que $\vec{\mathcal{X}}^T(t+1) y(t+1)$ cumple con:

$$\vec{\mathcal{X}}^T(t+1) y(t+1) = \left[\vec{\mathcal{X}}^T(t) y(t+1) \right] = \vec{\mathcal{X}}^T(t) y(t) + \vec{\mathcal{X}}^T(t+1) y(t+1). \quad (\text{A.20})$$

Supóngase que se emplea la siguiente notación:

$$P(t) = \left(\vec{\mathcal{X}}^T(t) \vec{\mathcal{X}}(t) \right)^{-1}, \quad B(t) = \vec{\mathcal{X}}^T(t) y(t) \quad (\text{A.21})$$

Con la ecuación (A.21), la estimación de los parámetros de la ecuación (A.18) puede escribirse como:

$$\hat{\theta}(t+1) = P(t+1) B(t+1), \quad \hat{\theta}(t) = P(t) B(t) \quad (\text{A.22})$$

Al incorporar una nueva observación en la ecuación (A.22), las matrices se actualizan de acuerdo a

$$\vec{\mathcal{X}}^T(t+1) \vec{\mathcal{X}}(t+1) = \vec{\mathcal{X}}^T(t) \vec{\mathcal{X}}(t) + \vec{\mathcal{X}}^T(t+1) \vec{\mathcal{X}}^T(t+1) \quad (\text{A.23})$$

Por tanto la ecuación (A.23) se rescribe como

$$P^{-1}(t+1) = P^{-1}(t) + \vec{\mathcal{X}}(t+1)\vec{\mathcal{X}}^T(t+1)$$

De manera análoga, la ecuación (A.23) define el vector $B(t+1)$ por lo que se escribe

$$B(t+1) = B(t) + \vec{\mathcal{X}}(t+1)y(t+1) \quad (\text{A.24})$$

Para simplificar el cálculo de $P(t+1)$ de la ecuación (A.22), se emplea el lema de inversión de matrices, obteniendo

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (\text{A.25})$$

En la ecuación (A.25), se consideran las siguientes variables para obtener la forma recursiva para $P(t+1)$

$$\begin{aligned} A &= P^{-1}(t), \\ B &= \vec{\mathcal{X}}(t+1), \\ C &= 1, \\ D &= \vec{\mathcal{X}}^T(t+1) \end{aligned}$$

$$P(t+1) = P(t) - \frac{P(t)\vec{\mathcal{X}}(t+1)\vec{\mathcal{X}}^T(t+1)P(t)}{1 + \vec{\mathcal{X}}^T(t+1)P(t)\vec{\mathcal{X}}(t+1)}$$

Otra manera de representar la ecuación es

$$P(t+1) = P(t) \left[I_m - \frac{\vec{\mathcal{X}}(t+1)\vec{\mathcal{X}}^T(t+1)P(t)}{1 + \vec{\mathcal{X}}^T(t+1)P(t)\vec{\mathcal{X}}(t+1)} \right] \quad (\text{A.26})$$

Se define el error de estimación $\epsilon(t+1)$ como

$$\epsilon(t+1) = y(t+1) - \mathcal{X}^T(t+1)\hat{\theta}(t).$$

Entonces $B(t+1)$ en la ecuación (A.24) queda como

$$B(t) = B(t) + \mathcal{X}(t+1)y(t+1) + \mathcal{X}(t+1)\mathcal{X}^T(t+1)\hat{\theta}(t).$$

De la ecuación (A.22) se sustituye las ecuaciones (A.24) y (A.26), obteniendo la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(t+1) &= P(t+1)B(t+1), \\
&= P(t+1) \left[B(t) + \mathcal{X}(t+1)\epsilon(t+1) + \mathcal{X}(t+1)\mathcal{X}^T(t+1)\hat{\theta}(t) \right], \\
&= P(t+1) \left[B(t) + \mathcal{X}(t+1)\mathcal{X}^T(t+1)\hat{\theta}(t) \right] + P(t+1)\mathcal{X}(t+1)\epsilon(t+1), \\
&= P(t+1) \left[P^{-1}(t)\hat{\theta}(t) + \mathcal{X}(t+1)\mathcal{X}^T(t+1)\hat{\theta}(t) \right] + P(t+1)\mathcal{X}(t+1)\epsilon(t+1), \\
&= P(t+1) \left[\underbrace{\mathcal{X}^T(t)\mathcal{X}(t) + \mathcal{X}^T(t+1)\mathcal{X}(t+1)}_{P^{-1}(t+1)} \hat{\theta}(t) \right] + P(t+1)\mathcal{X}(t+1)\epsilon(t+1),
\end{aligned}$$

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + P(t+1)\mathcal{X}(t+1)\epsilon(t+1).$$

Para aplicar los mínimos cuadrados recursivos en el tiempo $t+1$. En [19] se describen los siguientes pasos:

1. Formar $\mathcal{X}(t+1)$ usando nuevos datos capturados de mediciones del sistema.
2. Formar $\epsilon(t+1)$ usando

$$\epsilon(t+1) = y(t+1) - \mathcal{X}^T(t+1)\hat{\theta}(t_n).$$

3. Formar $P(t+1)$ usando

$$P(t+1) = P(t) \left[I_m - \frac{\mathcal{X}(t+1)\mathcal{X}^T(t+1)P(t)}{1 + \mathcal{X}^T(t+1)P(t)\mathcal{X}(t+1)} \right].$$

4. Actualizar $\hat{\theta}(t)$ usando

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + P(t+1)\mathcal{X}(t+1)\epsilon(t+1).$$

5. Esperar a la siguiente muestra y regresar al paso 1.

Apéndice B

Descripción de los componentes utilizados

En la tabla [B.1](#) se especifican los datos técnicos de los sensores LM35.

Parámetro	Valor
Voltaje de alimentación	5 V a 30 V
Salida lineal	10 mV/°C
Rango de medición	−30 °C a 120 °C
Precisión	0.5 °C
Encapsulado	Acero inoxidable
Longitud de la sonda metálica	50 mm
Diámetro de la sonda metálica	6 mm
Longitud del cable	1 m
Configuración del cable	Negro = GND ; Rojo = VCC ; Amarillo = Señal de salida

Tabla B.1: Especificaciones técnicas sensor LM35



Figura B.1: Sensor LM35

En la tabla B.2 se especifican los datos técnicos de los PID REX-C100.

Símbolo	Nombre	Rango de ajuste	Descripción	Valor de fábrica
HbA	Alarma de ruptura de calentador (HBA)	0.0 a 100.0 A	Valor de alarma según entrada del transformador de corriente (CT). Solo monofásico.	0.0
LbA	Alarma de ruptura de lazo (LBA)	0.1 a 200.0 min	Ajuste del tiempo de alarma de ruptura de lazo de control.	8.0
Lbd	Banda muerta	TC/RTD: 0 a 9999 °C [°F] Volt/Corr: 0 a 10.0 % del rango	Área sin salida. Banda diferencial: TC/RTD: 0.8 °C [°F], Voltaje/Corriente: 0.8 % del rango.	0
At	Autotuning (AT)	0: Fin/cancelar 1: Inicio/ejecución	Enciende o apaga el autotuning.	0
P	Banda proporcional	TC/RTD: 1 (0.1) a rango Resol.: 0.1 °C [°F] hasta 999.9 °C [°F] Volt/Corr: 0.1 a 100.0 % del rango 0 (0.0): ON/OFF	Para PI, PD o PID. Frío/Calor: banda proporcional lado calor. Dif. ON/OFF: TC/RTD: 2 (0.2) °C [°F], Volt/Corr: 2 % rango.	TC/RTD: 30 (30.0) Volt/Corr: 3.0
I	Tiempo integral	1 a 3600 s (0: acción PD)	Elimina el offset en control proporcional.	240
d	Tiempo derivativo	1 a 3600 s (0: acción PI)	Estabilidad anticipando cambios.	60
Ar	Anti-reset windup (ARW)	1 a 100 % banda prop. calor (0 %: integral OFF)	Limita sobrepaso y subpaso por efecto integral.	100
r	Ciclo proporc. calor	1 a 100 s (no si salida es corriente)	Ajusta el ciclo de salida de control (calor).	Relé: 20 Pulso: 2
Pc	Banda proporcional frío	1 a 1000 % banda de calor	Banda proporcional lado frío (calor/frío PID).	100
db	Banda muerta	TC/RTD: -10 a +10 °C [°F] o -10.0 a +10.0 °C [°F] Volt/Corr: -10.0 a +10.0 % rango	Muerta entre bandas prop. de calor y frío. Negativo = solapamiento.	0 o 0.0
t	Ciclo proporc. frío	1 a 100 s (no si salida es corriente)	Ciclo de salida lado frío (calor/frío PID).	Relé: 20 Pulso: 2
LCK	Bloqueo datos (LCK)	0100: Sin bloqueo 0101: Todo bloqueado 0110: Solo SV	Permite o impide cambios de parámetros.	0100
CT	Monitor entrada CT	0.0 a 100.0 A (solo visual)	Visualiza entrada del transformador de corriente (CT). Solo si hay alarma de ruptura calentador.	—
AL1	Valor alarma 1 (ALM1)	TC/RTD: desviación/proceso: -1999 a +9999 °C [°F] o -199.9 a +999.9 °C [°F] Volt/Corr: desv.: -199.9 a +200.0 % proc.: -199.9 a +300.0 %	Ajusta alarma 1 y 2. Banda diferencial: TC/RTD: 2 o 2.0 ÅFC [ÅFF], Volt/Corr: 0.2 % rango.	TC/RTD: 50 (50.0) Volt/Corr: 5.0
AL2	Valor alarma 2 (ALM2)	Igual a AL1	Igual a AL1.	Igual a AL1

Tabla B.2: Configuración de parámetros REX-C100



Figura B.2: PID REX-C100

En la tabla B.3 se especifican los datos técnicos de la tarjeta de adquisición de datos DAQ 6008.

Datos	Valores
Número de modelo	USB-6008
Canales de entrada	8 entrada analógica (12 bits, -10 – 10 V)
Canales de salida	salida analógica de 2 canales (12 bits, 0 – 5 V)
Precisión	$\pm 0.0625^{\circ}\text{C}$ (de -10°C a 85°C)
Error (-10°C a 85°C)	$\pm 0.5^{\circ}\text{C}$
Error (-55°C a 125°C)	$\pm 2^{\circ}\text{C}$
Comunicación inalámbrica	Control de cable.
Alimentación	5V

Tabla B.3: Datos de NI USB-6008 OEM.



Figura B.3: Tarjeta de adquisición de datos 6088

En la tabla B.4 se especifican los datos técnicos de la resistencia eléctrica.

Material	Acero inoxidable, cable cobre puro, cubierta de cable PCV
Voltaje	127–220 V
Marca	QEWDAEQ
Color	Amarillo
Potencia	1500 W

Tabla B.4: Datos técnicos resistencia eléctrica



Figura B.4: Resistencia

En la tabla B.5 se especifican los datos técnicos de las bombas.

Parámetro	Valor
Voltios	12 V CC
Amplificadores / Potencia nominal	5A / 60W
Presión máxima	0,8 MPA (120 PSI)
Flujo máximo	5 L/min
Tamaño de entrada y salida	10 mm
Dimensiones	16,5 × 10 × 6,2 cm

Tabla B.5: Especificaciones técnicas bomba



Figura B.5: Bomba de diafragma

En la tabla B.6 se especifican los datos técnicos de los relevadores de estado sólido DC-AC.

Especificación	Detalle
Material	Carcasa de metal de alta calidad con disipador de calor para una disipación de calor eficiente
Salida	Relevador de estado sólido 40A con capacidad de salida 40A
Gama del voltaje	Entrada versátil de 3-32VDC y de 24-480VAC, conveniente para los diversos usos.
Monofásico	Diseñado para la conversión monofásica de DC a AC

Tabla B.6: Especificaciones del relevador de estado sólido DC - AC



Figura B.6: Relevador de estado sólido DC - AC

En la tabla B.7 se especifican los datos técnicos de los relevadores de estado sólido DC-DC.

Característica	Descripción
Tipo	Relevador de estado sólido 10A / 60A
Salida máxima	60A
Rango de voltaje de entrada	3–32 VDC
Rango de voltaje de salida	5–60 VDC
Fases	Monofásico
Conversión	De corriente continua (CC) a corriente continua (CC)

Tabla B.7: Especificaciones relevador de estado sólido 10A SSR 60A



Figura B.7: Relevador de estado sólido DC - DC

En la tabla B.8 se especifican los datos técnicos de la fuente de poder regulada.

Datos	Valores
Fabricante	Hong
Voltaje Operativo	127–220V
Peso del producto	300 gramos
Potencia	1500 W
Corriente	11.81–6.8181A
Tiempo máximo de operación	3 horas

Tabla B.8: Datos técnicos fuente de poder regulada



Figura B.8: Fuente de poder regulada

Implementación del programa utilizado

The left screenshot shows a Simulink model with four sample and hold blocks (Sample Compression1 to Sample Compression4). The model includes a plot of Tcc and a MATLAB script. The MATLAB script defines parameters and calculates the output Tcc.

The right screenshot shows a similar Simulink model with a different MATLAB script. The MATLAB script defines parameters and calculates the output Tcc.

106

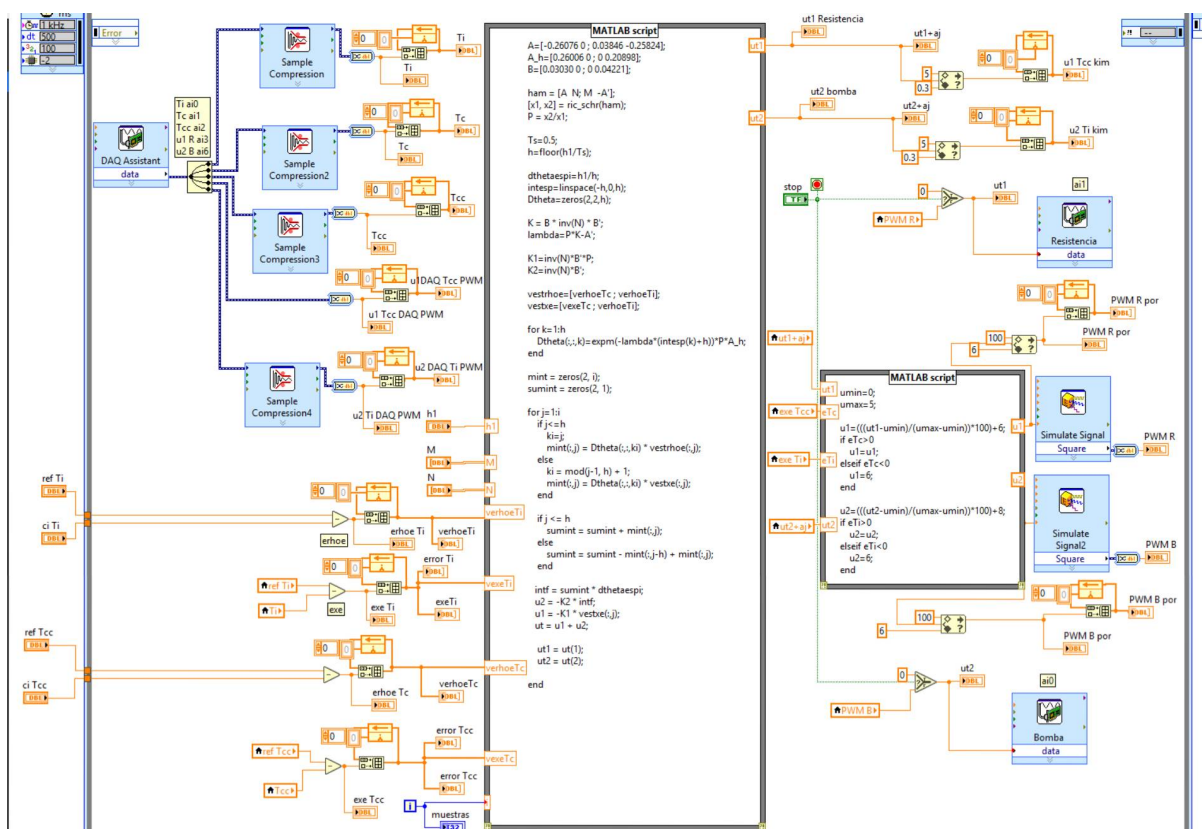


Figura C.2: Programa implementado en el software LabVIEW